

**Situaciones Adidácticas Para la Enseñanza de la Homotecia Usando Cabri Elem
Como Medio**

Luis Ángel Pérez Fernández

Tesis Para Optar el Título de Magister en Educación Matemática

Director:

Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en educación Matemática

Codirector:

Dr. Martín Eduardo Acosta Gempeler

Doctor en educación Matemática

Universidad Industrial De Santander

Facultad de Ciencias Básicas

Escuela De Matemáticas

Bucaramanga

2017

A Elizabeth Fernández Peñaloza y Enith Fernández Peñaloza

A ustedes debo mi vida y formación.

Este trabajo es un regalo para ustedes, en agradecimiento por brindarme tanto amor y apoyo.

Gracias

A mi familia por el soporte y aliento, sin ustedes no sería posible la consecución de este logro. La tolerancia, paciencia, afecto y motivación, fueron fundamentales para lograrlo. Especialmente a mis padres Elizabeth Fernández Peñaloza y Ángel Gabriel Pérez Pedrozo por darme la vida; a mis segundos padres Enith Fernández Peñaloza y Fernando Zambrano Narváez, docentes excepcionales y con un corazón inmenso que me criaron y forjaron en mí todo lo que he sido y seré; a mi novia Yulieth Paola Cárdenas Roa, gracias por tu amor y apoyo.

A mis padres académicos Martín Eduardo Acosta Gempeler y Jorge Enrique Fiallo Leal, no tengo palabras que manifiesten lo agradecido que estoy con ustedes; por el apoyo, la tolerancia, la paciencia y el deseo de ayudarme en mi carrera como investigador.

Al profesor Juan de Dios Urbina, cada colegio colombiano debería contar con docentes como usted.

A la Universidad Industrial de Santander y los docentes de la Escuela de Matemáticas, por la formación académica que me permitió ser licenciado y ahora magister en educación matemática.

A mis evaluadores, doctoras Dora Solange Roa Fuentes y Leonor Camargo Uribe; sus correcciones y aportes fueron muy importantes en este trabajo y para mi carrera en general.

A mis compañeras y amigas de maestría, juntos abreviamos el camino.

A los amigos que nunca faltan, familias Gamboa y Contreras, por el apoyo y deseos de verme triunfar.

Contenido

Introducción	12
1. Problemática de investigación	14
2. Problema de investigación	15
2.1 Preguntas de investigación	16
2.2 Objetivos	16
3. Teoría de las situaciones didácticas	16
3.1 Aprendizaje por adaptación.....	17
3.2 Situación adidáctica y didáctica	18
3.3 El alumno y la situación adidáctica: validación	20
3.4 Rol del profesor en la situación adidáctica: Proceso de devolución	20
3.5 Medio adidáctico	21
3.6 Cabri Elem como medio adidáctico	22
4. Antecedentes	23
4.1 Algunos trabajos en Colombia	23
4.2 Otros resultados importantes para nuestra investigación	25
5. Método de investigación	26
5.1 Ingeniería didáctica	26
5.2 Ejecución de la investigación	28
5.3 Población de estudio.....	28
6. Análisis preliminar.....	29
6.1 Análisis epistemológico	29
6.2 Análisis cognitivo.....	31
6.3 Análisis didáctico	34
6.4 Diseño.....	34
7. Análisis a priori.....	36
7.1 Actividad 1	38
7.1.1 Primera secuencia	38
7.1.2 Segunda secuencia	45
7.1.3 Tercera secuencia.....	59
7.2 Actividad 2	69
7.2.1 Primera secuencia	69
7.2.2 Segunda secuencia	74

8.	Análisis a posteriori	82
8.1	Actividad 1	83
8.1.1	Primera secuencia	83
8.1.2	Segunda secuencia	93
8.1.3	Tercera secuencia.....	134
8.2	Actividad 2	147
8.2.1	Primera secuencia	147
8.2.2	Segunda secuencia	159
9.	Conclusiones	174
	Referencias bibliográficas.....	180

Lista de figuras

Figura 7.1	Primera tarea – Serie 1.	40
Figura 7.2	Segunda tarea – Serie 2.	40
Figura 7.3	Tercera tarea – Serie 3.....	41
Figura 7.4	Cuarta tarea – Serie 4.	41
Figura 7.5	Letrero tarea no resuelta.	42
Figura 7.6	Cuadro de texto tarea no resuelta.	43
Figura 7.7	Tarea de anticipación.....	47
Figura 7.8	Validación tarea de anticipación.	48
Figura 7.9	Solución correcta.	49
Figura 7.10	Retroacción botón continuar.....	50
Figura 7.11	Retroacción botón volver a intentarlo.	51
Figura 7.12	Retroacción botón ayuda.	52
Figura 7.13	Tarea de ayuda para el reconocimiento de la alineación primera parte.	54
Figura 7.14	Tarea de ayuda para el reconocimiento de la alineación segunda parte.....	55
Figura 7.15	Retroacción didáctica que explicita la alineación.	56
Figura 7.16	Salir de la ayuda.	56
Figura 7.17	Salir ayuda. Opción NO.	57
Figura 7.18	Salir Ayuda. Opción NO. Continuar.	57
Figura 7.19	Retroacción luego de 4 intentos fallidos.	58

Figura 7.20 Primera anticipación.....	61
Figura 7.21 Primera validación.....	62
Figura 7.22 Retroacción botón continuar 1.....	62
Figura 7.23 Retroacción botón continuar 2.....	63
Figura 7.24 Retroacción botón continuar 3.....	63
Figura 7.25 Inicia la animación.	64
Figura 7.26 Animación en curso.....	64
Figura 7.27 Termina la animación.	65
Figura 7.28 Retroacción botón verificar segundo momento.....	66
Figura 7.29 Retroacción botón continuar segundo momento.	67
Figura 7.30 Intervención uso herramientas.....	68
Figura 7.31 Tarea introducción.....	70
Figura 7.32 Tarea de introducción resuelta.....	71
Figura 7.33 Retroacción botón continuar.....	71
Figura 7.34 Tarea principal.....	72
Figura 7.35 Tarea de anticipación.....	76
Figura 7.36 Retroacción asociada al botón verificar.	77
Figura 7.37 Tarea resuelta.....	78
Figura 7.38 Tarea no resuelta.....	78
Figura 7.39 Retroacción botón volver a intentarlo.	79
Figura 7.40 La traslación como estrategia de solución.....	80

Lista de Tablas

Tabla 1 Datos primera secuencia primera actividad.	84
Tabla 2 Datos segunda secuencia primera actividad.	93
Tabla 3 Datos tercera secuencia primera actividad.....	135
Tabla 4 Datos primera secuencia segunda actividad.	148
Tabla 5 Datos segunda secuencia segunda actividad.....	159
Tabla 6 Datos primera secuencia Act 1.	183
Tabla 7 Datos segunda secuencia Act 1.....	192

Tabla 8 Datos tercera secuencia Act 1.....	236
Tabla 9 Datos primera secuencia Act 2.	248
Tabla 10 Datos segunda secuencia Act 2.....	258

Lista de Apéndices

Apéndice A.	Primera secuencia actividad 1	183
Apéndice B.	Segunda secuencia actividad 1	192
Apéndice C.	Tercera secuencia actividad 1	236
Apéndice D.	Primera secuencia actividad 2	248
Apéndice E.	Segunda secuencia actividad 2	258

RESUMEN

TÍTULO: SITUACIONES ADIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA HOMOTECIA USANDO CABRI ELEM COMO MEDIO¹

AUTOR: LUIS ÁNGEL PÉREZ FERNÁNDEZ²

PALABRAS CLAVE: RETROACCIONES DIDÁCTICAS, TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS, CABRI ELEM, HOMOTECIA.

DESCRIPCIÓN:

Investigamos el potencial del software Cabri Elem para desarrollar conocimiento matemático. Éste a diferencia de otros software de geometría dinámica, además de las retroacciones matemáticas, ofrece herramientas que permiten programar otras retroacciones: mostrar un texto; resaltar, mostrar, ocultar o impedir el arrastre de uno o más objetos; enviar a otra tarea; decidir cuáles herramientas ofrecer al alumno y cuándo mostrarlas; etc. Para caracterizar estas nuevas herramientas usamos la Teoría de las Situaciones Didácticas, considerando Cabri Elem un medio material con el cual interactúan los alumnos. Esto nos llevó a distinguir *retroacciones matemáticas* y *retroacciones didácticas*; las primeras son respuestas naturales de la geometría dinámica que obedecen a la teoría matemática, mientras que las segundas son aquellas que usamos para darle al medio una configuración determinada y obtener un modelo de interacción con el fin de producir el aprendizaje por adaptación.

Como resultados de la investigación, presentamos una ingeniería didáctica, que consta de un análisis preliminar del diseño, desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica; un análisis a priori, en el que se describe el rol de las retroacciones didácticas en el diseño de situaciones, con el objetivo de producir aprendizaje por adaptación; un análisis a posteriori a partir de un pilotaje con una pareja de alumnos de noveno grado, los cuales habían usado el software de geometría dinámica Cabri II plus con anterioridad, durante un proceso de instrucción basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas, desde sexto hasta octavo grado.

¹ Tesis de Maestría.

² Facultad de ciencias Básicas, Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, doctor en Educación Matemática. Coodirector: Martín Eduardo Acosta Gemperler, doctor en Educación Matemática.

ABSTRACT

TITLE: DIDACTIC SITUATIONS FOR THE TEACHING OF HOMOTHETIC USING CABRI ELEM AS MILIEU³

AUTHOR: LUIS ÁNGEL PÉREZ FERNÁNDEZ⁴

KEY WORDS: DIDACTIC RETROACTIONS, THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS, CABRI ELEM, HOMOTHETIC.

DESCRIPTION:

We research the potential of the Calibri Elem software to develop mathematical knowledge. This dynamic geometry software, unlike others, not only offers mathematical retroactions but other tools that allow to program other retroactions including: show text; underline, show, hide, restrain movement of objects; send to another task; pick the tools to be offer to students and when to show it; among others. In order to characterize this new tools, we use the Theory of Didactic Situations, considering Cabri Elm as a material *milieu* which the students interact with. That led us to distinguish mathematical retroactions from didactical retroactions: the firsts are dynamic geometry's natural response that obey the mathematical theory, while the others are the ones we use to provide the *milieu* with a specific configuration and obtain an interaction model in order to develop knowledge by adaptation.

As results of the investigation, we present a didactic engineering compose of: a preliminary analysis of the design, including the epistemological, cognitive and didactic dimensions; an a priori analysis in which the didactic retroaction's role in the design situation is described for the purpose of develop knowledge by adaptation; and finally an a posteriori analysis of a pilot case completed with a couple of ninth grade students who had used the dynamic geometry software Cabri II plus before, during an instruction process based on the Didactical Situations Theory from sixth to eight grade.

³ Master Thesis.

⁴ Facultad de ciencias Básicas, Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, doctor en Educación Matemática. Coodirector: Martín Eduardo Acosta Gemperler, doctor en Educación Matemática.

Introducción

Con el presente proyecto nos interesa estudiar la influencia del uso de software de geometría dinámica en el aprendizaje de la geometría, particularmente estudiamos el potencial de las nuevas herramientas que ofrece Cabri Elem para desarrollar conocimiento matemático.

Desde la producción de los primeros dispositivos informáticos personales, los investigadores han reconocido en ellos grandes potenciales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010) y han dedicado esfuerzos a estudiar dicho potencial. Como resultado de estos esfuerzos, se han desarrollado diferentes programas informáticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, principalmente de la geometría. Por ejemplo, luego de la creación de las interfaces de interacción directa en la pantalla del computador, aparecieron los primeros software de geometría dinámica (SGD), caracterizados por la posibilidad de crear y manipular objetos geométricos en tiempo real en la pantalla del computador o la calculadora. Entre ellos, uno de los primeros es Cabri Geometry, que ha ido evolucionando desde 1995 adaptándose a las nuevas posibilidades de hardware disponibles. El último desarrollo de la tecnología Cabri es el software Cabri Elem que además de las características de geometría dinámica, incluye herramientas didácticas que permiten enriquecer y diversificar la interacción entre el alumno y el software. En este proyecto nos interesa estudiar el potencial de estas herramientas didácticas.

Para estudiar el potencial de las nuevas herramientas de Cabri Elem, consideramos la homotecia como objeto matemático, ya que es un concepto complejo, cuyo tratamiento en los libros de texto ha sido deficiente, y que tiende a desaparecer del currículo de geometría

(Bautista y Peralta, 2011). Sin embargo, es una herramienta importante para la solución de problemas, ya que contribuye al desarrollo del pensamiento proporcional.

Respondiendo a este interés, en esta investigación proponemos estudiar el potencial de las herramientas de la geometría dinámica y las nuevas herramientas didácticas ofrecidas por el software Cabri Elem, para enseñar el concepto de homotecia en noveno grado.

El documento está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo exponemos la problemática general de investigación en la cual se enmarca nuestra investigación. En el segundo capítulo concretamos la problemática general en un problema de investigación, planteamos tres preguntas y dos objetivos con los que pretendemos dar respuesta a las preguntas planteadas. En el tercer capítulo explicitamos algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, la cual usaremos como marco teórico. A continuación en el cuarto capítulo exponemos los antecedentes de la investigación. En el quinto capítulo, planteamos la metodología *ingeniería didáctica* y la forma como la usaremos en nuestro trabajo. En el sexto capítulo presentamos el análisis preliminar. En el séptimo capítulo exponemos el análisis a priori de las actividades diseñadas. En el octavo capítulo mostramos el análisis a posteriori. En el noveno capítulo ofrecemos algunas conclusiones generales de la investigación. A continuación presentamos las referencias bibliográficas y finalizamos el documento con los anexos, donde se muestran las transcripciones completas de los videos obtenidos en la experimentación.

1. Problemática de investigación

La problemática general de investigación dentro de la cual se enmarca este proyecto es la necesidad de identificar y caracterizar los elementos de la tecnología que permiten desarrollar conocimiento matemático, con el fin de fundamentar de manera racional cómo el uso de la tecnología favorece el aprendizaje de las matemáticas y proponer estrategias de enseñanza que aprovechen ese potencial; superando algunos discursos pedagógicos y políticos que buscan imponer el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza sin fundamentos científicos.

Se necesitan entonces, estudios didácticos tanto teóricos como empíricos que ayuden a responder a la pregunta acerca de si la tecnología favorece o no la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de qué manera. Este es un interés general de gran parte de la comunidad de educadores matemáticos, reflejado en la producción de estudios alrededor de este tema. Por ejemplo tres estudios de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI): el primero, *influencia de los computadores y la informática en las matemáticas y su enseñanza* (1985); El decimoséptimo, *tecnologías digitales y enseñanza de las matemáticas: repensando el terreno* (2005) y actualmente en proceso el vigésimo segundo, *diseño de tareas en educación matemática* (2013), que no versa explícitamente sobre la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero sí se trata ampliamente este tema. Por otra parte, en actas de las conferencias del Grupo Internacional para la Psicología de Educación Matemática (PME), encontramos reportes de investigaciones dedicados a la influencia de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También a nivel local, se ha tratado esta problemática en los últimos encuentros de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME).

Con el objeto de contribuir a tal cuestión, asumimos la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) como referente teórico. Esta teoría tiene como hipótesis general, que el aprendizaje es producto de la adaptación de un sujeto a un medio antagonista (Brousseau, 2007). Por lo tanto podemos estudiar la problemática de los efectos de la tecnología en el aprendizaje, concibiendo Cabri Elem como un medio material con el cual interactúan los alumnos y examinando los elementos de interacción que posibilita el software y los efectos de esos elementos en el aprendizaje. A continuación exponemos los elementos de la teoría de las situaciones didácticas que tendremos en cuenta para realizar nuestro estudio.

2. Problema de investigación

Nuestro trabajo tiene como objeto desarrollar una investigación, tanto teórica como empírica que contribuya a responder pregunta acerca de si la tecnología favorece o no el aprendizaje de las matemáticas y de qué manera. Para ello asumimos como referente teórico la teoría de las situaciones didácticas en donde el aprendizaje se da por la adaptación del sujeto al medio. En particular nos interesa estudiar si las características de Cabri Elem favorecen el aprendizaje por adaptación del concepto de homotecia, asumiendo Cabri Elem como un medio material.

Dadas las características de Cabri Elem, queremos investigar si la posibilidad de programar las retroacciones didácticas, favorece el aprendizaje por adaptación del concepto de homotecia. Concretamos nuestro problema de investigación en las siguientes preguntas:

2.1 Preguntas de investigación

¿Cómo diseñar situaciones adidácticas que aprovechen las posibilidades de programar retroacciones didácticas que ofrece Cabri Elem para producir aprendizaje por adaptación?

¿Cuál es el potencial de las retroacciones didácticas para lograr aprendizaje por adaptación del concepto de homotecia?

¿Cómo usar las retroacciones didácticas para lograr aprendizaje por adaptación del concepto de homotecia?

2.2 Objetivos

- Diseñar situaciones adidácticas que integren las retroacciones didácticas y matemáticas que ofrece Cabri Elem y que favorezcan el aprendizaje por adaptación del concepto de homotecia.
- Evaluar el efecto de las situaciones didácticas diseñadas, sobre el aprendizaje por adaptación de los alumnos y analizar el potencial de las retroacciones didácticas que ofrece Cabri Elem.

3. Teoría de las situaciones didácticas

En este capítulo nos limitaremos a exponer someramente los siguientes elementos de la teoría que tendremos en cuenta para el desarrollo de la investigación: Aprendizaje por adaptación y sus componentes principales; situación adidáctica y su relación con la situación didáctica; el papel del alumno y la validación; el rol del profesor y la devolución; y por último, el medio.

3.1 Aprendizaje por adaptación

El concepto de aprendizaje por adaptación es una idea tomada de Piaget, en ella se postula que un individuo aprende adaptándose a las condiciones de su entorno. Brousseau retomó este planteamiento para adaptarlo a la enseñanza de las matemáticas. Como resultado propone que un sujeto aprende adaptándose a un medio que responde a sus acciones de manera autónoma y siguiendo ciertas reglas. Tal aprendizaje, consecuencia de la interacción del sujeto con el medio, se manifiesta en el refuerzo o abandono de sus acciones.

Asumimos como supuesto que el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso. Los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control de las situaciones (Brousseau, 2007, p.18).

La interacción del sujeto con el medio podemos describirla de la siguiente manera:

- 1) El sujeto, motivado por una necesidad o deseo personal, tiene una intención u objetivo; para lograrlo realiza acciones que inciden en el medio.
- 2) El medio reacciona siguiendo ciertas reglas, es decir no es cuestión de azar sino una consecuencia natural de las acciones del sujeto, proporcionando respuestas llamadas retroacciones.
- 3) El sujeto hace una interpretación de la respuesta del medio y decide la validez de su acción, en términos de si logró o no el objetivo. Este hecho se conoce como validación.

El aprendizaje por adaptación se da sin la presencia efectiva de un profesor. Pero, ¿cómo relaciona la TSD el aprendizaje por adaptación y la enseñanza de las matemáticas? Veamos las siguientes definiciones para dar respuesta a esta pregunta.

3.2 Situación adidáctica y didáctica

Las situaciones adidácticas, que son las de nuestro principal interés, son definidas por (Brousseau, 2007, p.31) de la siguiente manera:

Los problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer... el alumno no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada *situación adidáctica*.

Dicho de otro modo, una situación es adidáctica si propicia el aprendizaje por adaptación.

Ahora, una situación didáctica en la TSD se define como una situación de clase, entre un profesor y uno o más alumnos en relación con un saber que se enseña (Brousseau, 2007).

Margolinas (2009) sugiere que una parte de una situación didáctica debe ser vivida como situación adidáctica, y estas a su vez deben darse durante todo el proceso de enseñanza, puesto que se espera que los alumnos resuelvan los problemas como matemáticos y no en términos del contrato didáctico.

De acuerdo con Margolinas, consideraremos una situación adidáctica como una estrategia del profesor para transmitir el saber. La TSD diferencia *conocimiento* de *saber*, siendo el primero enteramente producto de la experiencia personal del sujeto en interacción con el

medio, mientras que el segundo es institucional u oficial y por lo tanto impersonal y descontextualizado. El profesor pone en funcionamiento una situación adidáctica; el producto de la interacción entre el sujeto y el medio en esa situación adidáctica es un conocimiento (personal y contextualizado); luego el profesor explicita las relaciones entre el saber oficial y el conocimiento personal de los alumnos. Este último proceso recibe el nombre de institucionalización.

En primer lugar, esos hechos y luego los razonamientos -el hecho de asegurar la consistencia del conjunto de las modelizaciones eliminando las que son contradictorias exige un trabajo teórico- mostraron la necesidad de tener en cuenta fases de *institucionalización* que dieran a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes (Brousseau, 2007, p.28).

Así que la TSD se opone a la idea de la enseñanza concebida como la trasmisión directa del saber a enseñar por parte del profesor. Margolinas (2009) justifica esta oposición por el carácter apodíctico de las proposiciones matemáticas, considerando que el conocimiento matemático no se logra por un acuerdo social, tampoco por imposición, sino por necesidad del mismo. Argumenta además que el descubrimiento del carácter apodíctico de las matemáticas por parte del sujeto, hace parte del aprendizaje (Margolinas, 2009).

El rol del alumno y del profesor es importante durante el desarrollo de la situación adidáctica. A continuación presentamos dos conceptos ligados a ellos, la validación y la devolución.

3.3 El alumno y la situación adidáctica: validación

Como vimos anteriormente, una de las características que define el carácter adidáctico de una situación es que el alumno tenga la posibilidad de decidir la validez de las acciones que realiza. Todo el ciclo de interacción contribuye a satisfacer esta condición. Por ejemplo, la intención es indispensable para la validación, ya que la validación es producto de la comparación de la intención con las retroacciones del medio. Igualmente no puede darse validación, si no se realizan acciones y si no se identifican e interpretan las retroacciones del medio. Concebimos entonces, de acuerdo con Margolinas, que la validación es un proceso que abarca todos los aspectos de la interacción entre el sujeto y el medio.

3.4 Rol del profesor en la situación adidáctica: Proceso de devolución

Las intervenciones del profesor durante una situación adidáctica deben ser cuidadosas, puesto que podrían afectar el carácter adidáctico de la situación. La TSD diferencia dos tipos de intervenciones, las que refuerzan el ciclo de interacción, y otras que lo interrumpen. A las intervenciones del primer tipo Brousseau las llama *devolución*.

Rueda y Niño (2013) definen cada intervención del profesor con el fin de lograr la devolución, como un *acto de devolución*, lo cual implica que su rol durante las fases adidácticas es activo. Por su parte, Margolinas (2009) considera la devolución como un proceso que perdura durante toda la situación adidáctica, donde el profesor es responsable de la relación adidáctica del alumno con el problema.

Se distinguen entonces dos procesos esenciales para el funcionamiento adidáctico de una situación en relación con el alumno. El primero es el proceso de validación, a cargo del alumno y acompañado por el profesor quien es responsable del segundo proceso, el de la

devolución. Nuestro trabajo se centrará principalmente en estos dos procesos, considerando que Cabri Elem ofrece dos tipos de retroacciones que corresponden a estos dos procesos, más adelante expondremos elementos que justifican de alguna manera esta proposición.

Veamos la caracterización que hace la TSD del medio.

3.5 Medio adidáctico

El medio es muy importante en el aprendizaje por adaptación puesto que determina tanto las acciones que puede realizar el estudiante como las retroacciones que se pueden ofrecer, por lo tanto el medio es determinante para la interpretación y la validación. Brousseau lo caracteriza de la siguiente manera:

...son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar, pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas (Brousseau, 2007, p.15).

Entonces el medio es un sistema autónomo, modelizado con el fin de lograr objetivos de aprendizaje. Para que la interacción del alumno con tal medio sea adidáctica, Brousseau considera indispensable que el alumno reconozca en él una existencia tanto objetiva como material: objetiva en tanto ente autónomo independiente de la intención del profesor; y material teniendo en cuenta que el alumno debe interactuar con él mediante acciones.

Por lo tanto, consideramos que el potencial de un medio yace en la posibilidad que tienen los alumnos para realizar acciones en él, las restricciones que este ofrece a ciertas acciones, y

sus posibles retroacciones. En efecto, estas últimas deben ser reconocibles e interpretables por el alumno, teniendo en cuenta que “una condición necesaria para que una situación permita un juego adidáctico es que incluya un medio que permita una fase de validación” (Margolinas, 2009, p.43)

3.6 Cabri Elem como medio adidáctico

Teniendo en cuenta los elementos de la TSD presentados anteriormente, en nuestro trabajo de investigación usaremos Cabri Elem como un medio material con el cual interactúan los alumnos con el fin de lograr aprendizaje por adaptación. Cabri Elem es un software nuevo, que además de las características de geometría dinámica, incluye herramientas didácticas que permiten modelizar la interacción entre el alumno y el software.

En Cabri Elem definimos dos tipos de retroacciones, producto de la interacción adidáctica del alumno con el software, las *retroacciones matemáticas* y las *retroacciones didácticas*. Las primeras corresponden a respuestas naturales del software que obedecen a la teoría matemática, pero sin ningún tipo de intención didáctica, asociadas principalmente al *proceso de validación*, mientras que las retroacciones didácticas son aquellas que permite programar el software, para favorecer el *proceso de devolución*, sin contradecir de ninguna manera la teoría matemática. Las retroacciones matemáticas se manifiestan en la pantalla como fenómenos visuales, por ejemplo al arrastrar un triángulo otro se mueve de manera que conserva la relación de homotecia con el anterior, y por lo tanto se mantienen también las propiedades que esta relación implica (característica principal de la geometría dinámica). Por otra parte, las retroacciones didácticas pueden manifestarse por la imposibilidad o restricción de acciones, también por una respuesta programada en función de las acciones del alumno, por ejemplo mostrar un texto; resaltar, mostrar, ocultar o impedir el arrastre de uno o más

objetos; enviar a otra tarea; controlar las herramientas de las que dispone el alumno durante el desarrollo de una tarea; etc.

4. Antecedentes

En este capítulo presentamos algunos resultados de investigaciones que tendremos en cuenta para desarrollar nuestro trabajo de investigación.

4.1 Algunos trabajos en Colombia

A partir del año 2004 un considerable grupo de educadores matemáticos tanto de universidades como de colegios colombianos, de manera conjunta, se dieron a la tarea de implementar el proyecto del Ministerio de Educación Nacional (MEN) “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia” (MEN, 2004). Aún, en la Universidad Industrial de Santander se desarrolla este proyecto por parte del grupo EDUMAT, con algunos colegios del área metropolitana de Bucaramanga. Hace al menos cinco años, se ha considerado como referente teórico la TSD, para el diseño de situaciones didácticas que cubran el contenido curricular de geometría, al menos de sexto a noveno. Como producto de esta tarea se han desarrollado varios proyectos de grado con estudiantes de licenciatura en matemáticas y especialización en educación matemática, en la misma universidad. A continuación haremos referencia a los que tendremos en cuenta para nuestra investigación.

Bautista y Peralta, (2010) diseñaron, aplicaron y evaluaron dos actividades que comprendía una serie de tareas cada una, mediadas por Cabri Elem, con el propósito de que los alumnos logran la conceptualización de la homotecia mediante el reconocimiento visual

de sus propiedades. Los resultados de ésta investigación muestran que los seis alumnos de sexto grado que desarrollaron las actividades, identificaron la dependencia entre objeto e imagen, al igual que la conservación de la forma, sin embargo no reconocieron la alineación de una figura, su imagen y el centro, y el orden de éstos dependiendo del factor de homotecia. No obstante reportan que el software sí favoreció el funcionamiento de las fases adidácticas, siendo que los alumnos consiguieron evaluar y tomar decisiones a partir de las retroacciones de Cabri Elem, durante el desarrollo de las actividades, pero recomiendan evaluar las actividades en grados mayores que sexto.

Tendremos en cuenta este trabajo y atenderemos las sugerencias planteadas por los autores, para diseñar actividades en las que los alumnos deban hacer uso de las propiedades reconocidas perceptivamente para la construcción de los elementos que conforman la homotecia, a partir de condiciones específicas.

En esta misma dirección Rueda y Monroy (2009); Acosta, Delgado y Corzo (2010); Gómez y Ávila (2010) estudiaron secuencias didácticas diseñadas por el grupo EDUMAT, para la enseñanza de las transformaciones isométricas usando Cabri II como medio. Estas secuencias tienen la misma estructura: Una primera actividad donde los alumnos reconocen las propiedades perceptivas globales de algunas figuras y sus imágenes, una segunda actividad donde los alumnos pasan de reconocer las figuras como objetos globales a considerarlas compuestas por puntos, y también empiezan a reconocer algunos fenómenos visuales referentes al movimiento. Por último dos actividades donde inicialmente establecen los elementos de la transformación de manera perceptiva y terminan con la construcción de los mismos. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos logran un aprendizaje por adaptación gracias a las interacciones de éstos con Cabri en el desarrollo de las tareas propuestas, evidenciando las potencialidades del software como medio didáctico.

Por otra parte, el MEN (2006) propone como estándar para los grados de sexto a octavo, para el pensamiento espacial:

Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte (p. 84).

Esto muestra que en los textos escolares de geometría se le debe brindar un espacio a la enseñanza de las transformaciones, además porque son estas las operaciones del sistema geométrico.

4.2 Otros resultados importantes para nuestra investigación

Lemonidis en 1990 realizó una investigación con 38 estudiantes con edades entre 15 y 16 años durante 1987 y 1988 en el que lleva a cabo una propuesta de enseñanza experimental organizada en 9 secciones con duración de una a dos horas cada una, con el propósito de recuperar el carácter figurativo de la homotecia, brindando a los estudiantes la oportunidad de experimentar con las diferentes configuraciones posibles y lograr la articulación con el aspecto numérico, ver Lemonidis (1991).

Durante el desarrollo de la propuesta aplica un test inicial, un test intermedio y un test final para la comparación posterior. Las actividades propuestas fueron en su orden, encontrar el centro, construir la imagen, verificar la similitud, distinguir puntos homólogos, utilizar el centro de manera operatoria, aproximación a la razón numérica, articulación aspectos numérico y figurativo, definición y escritura simbólica, situaciones homotéticas en la recta y el plano, llegar a las propiedades y dos secciones de ejercicio antes del test final.

Para el diseño considera un análisis epistemológico y uno figurativo del concepto de homotecia.

5. Método de investigación

En aras de alcanzar los objetivos propuestos para dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas, consideramos la ingeniería didáctica, entendida esta como metodología de investigación. A continuación expondremos sucintamente los principales componentes de esta metodología y su aplicación en esta investigación.

5.1 Ingeniería didáctica

Artigue caracteriza la ingeniería didáctica como “un esquema experimental basado en las ‘realizaciones didácticas’ en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (1995, p.36) asociada principalmente a una validación por estudio de casos y basada en la confrontación de un análisis a priori y un análisis a posteriori de tales secuencias. Este proceso está delimitado por cuatro fases temporales: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación, y por último el análisis a posteriori. Veamos en qué consisten las diferentes etapas de esta metodología.

Análisis preliminar. Artigue (1995) distingue tres dimensiones desde las cuales se debe realizar el análisis preliminar: epistemológica, cognitiva y didáctica. Asociadas respectivamente a las características del saber en juego, las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza y a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Esta etapa ceñida a los objetivos del trabajo, permite determinar las variables que se pondrán en juego en la investigación, así como sus posibilidades y restricciones.

Análisis a priori. Esta etapa; caracterizada especialmente por la intervención del investigador sobre algunas variables en juego, y por la organización de una secuencia didáctica; busca “precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores” (Artigue, 1995, p.12).

Artigue (1995) considera además, que el análisis a priori está basado fundamentalmente en un conjunto de hipótesis, y que comprende una parte descriptiva y otra predictiva; centradas en las características de una o más situaciones adidácticas que pretenden diseñarse para llevar a los alumnos. Por lo tanto en esta fase de la metodología se analiza “lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone” (Artigue, 1995, p.45)

Experimentación. La experimentación concierne a la puesta en escena de las situaciones adidácticas diseñadas, y a la observación de las producciones de los alumnos durante el desarrollo de las mismas, mediante el estudio de casos.

Análisis a posteriori. Es esta la fase en la que “el análisis a priori se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado” (Artigue, 1995, p.12). Es decir en esta etapa se analizan los datos tomados en la fase de experimentación en términos del análisis a priori.

La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de investigación (Artigue, 1995).

5.2 Ejecución de la investigación

Asumiendo en su orden, los elementos de la ingeniería didáctica, nuestro trabajo de investigación inicia con el *análisis preliminar* desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica del concepto de homotecia. En esta etapa seleccionamos las variables en juego en las situaciones adidácticas diseñadas, a saber, los fenómenos visuales asociados a la homotecia en el contexto de Cabri Elem, que deseamos identifiquen los alumnos. Lo que corresponde a la contextualización del saber matemático en el medio.

En segunda instancia se realiza un *análisis a priori*, en el que se organizan las situaciones adidácticas y se plantean hipótesis en cuanto al ciclo de interacción de los alumnos con el medio preparado. Para ello precisamos las acciones que deben realizar los alumnos y las correspondientes retroacciones que ofrece Cabri Elem, para que identifiquen los fenómenos visuales, es decir, para que se produzca aprendizaje por adaptación. En consecuencia ideamos tareas que obliguen a los alumnos a realizar las acciones deseadas, mediante un proceso de control y programación.

Por último un *análisis a posteriori* en el que se contrarrestan las hipótesis planteadas en el análisis a priori con los ciclos de interacción efectivos, en aras de confirmar o rechazar las hipótesis planteadas, y hablar de tales resultados mediante los elementos teóricos de la TSD.

5.3 Población de estudio

Teniendo en cuenta los antecedentes y los medios para la validación, propuestos por la ingeniería didáctica; llevamos a cabo un estudio de casos, con una pareja de estudiantes de noveno grado escogida al azar. Estos dos estudiantes habían usado el software de geometría dinámica Cabri II plus con anterioridad, durante un proceso de instrucción basado en la teoría de las situaciones didácticas, desde sexto hasta octavo grado. Sin embargo, no

consideramos condición necesaria este hecho, para el desarrollo de la experimentación, aunque esto facilita el promover un juego adidáctico de los alumnos con las tareas propuestas. El papel de profesor fue llevado a cabo por el investigador.

6. Análisis preliminar

A continuación proponemos un análisis preliminar desde las dimensiones epistemológicas, cognitiva y didáctica del concepto de homotecia. Finalizamos con la articulación de estas ideas y el diseño de las actividades.

6.1 Análisis epistemológico

Definición: La homotecia es una función f del plano en el plano, tal que dados un número real k (razón de homotecia) y O un punto (centro de homotecia), se tiene que:

$$\overrightarrow{Of(A)} = k * \overrightarrow{OA}$$

Para cada punto A del plano. De esta definición se deducen tres importantes propiedades:

- 1) Los puntos $A, f(A)$ y O están alineados, es decir, un punto y su homotético están alineados con el centro. El orden de alineación depende del valor de k :
 - i. Si $k < 0$ entonces O se encuentra entre A y $f(A)$.
 - ii. Si $k = 0$ entonces f es la función nula.
 - iii. Si $k > 0$ entonces $f(A)$ se encuentra al mismo lado de A con respecto a O .
- 2) La imagen de una recta, es otra recta paralela.
- 3) Las distancias de dos puntos y sus homotéticos al centro de homotecia son proporcionales.

El reconocimiento y uso de estas tres propiedades, es necesario para resolver los siguientes problemas concernientes a la homotecia.

- Dadas dos figuras homotéticas construir el centro de homotecia.
- Dadas dos figuras homotéticas calcular la razón de homotecia.
- Construir la figura homotética de otra dados el centro y la razón.
- Construir la figura homotética de otra dados el centro de homotecia, un punto y su homotético.

Desarrollo histórico del concepto de homotecia: la palabra homotecia viene del prefijo griego homo y el verbo tithenai que respectivamente significan semejantes y colocar (Smith, 2011) es decir, dos figuras homotéticas son aquellas que están colocadas en posición semejante.

Lemonidis (1990) distingue tres periodos claramente influyentes en la evolución del concepto de homotecia, estos son:

- **La época de la Grecia Antigua:** se estudiaban las relaciones entre diferentes figuras sin tener en cuenta la idea de transformación, centrados principalmente en la construcción de razones.

- **Entre el siglo XVI y XVIII:** se empezaron a considerar las aplicaciones de un conjunto de puntos del plano en el mismo. Estas fueron entonces las herramientas utilizadas para representar el espacio en las obras de pintores y arquitectos del renacimiento. Poco a poco se expresa la homotecia como una aplicación de una figura en otra a partir de un centro de similitud, siendo éste definido por primera vez en 1777 por Euler.

- **Durante los siglos XIX y XX:** se llevó a cabo un proceso de estructuración y algebrización de la geometría, siendo las transformaciones la base de la nueva geometría que se desarrolló durante el siglo XIX.

Lemonidis argumenta que en los dos primeros periodos mencionados anteriormente, la homotecia se estudió de manera estática y que su carácter dinámico surgió durante la segunda mitad del siglo XIX. Por lo tanto el salto del primer momento podría significar un obstáculo epistemológico, salto inducido principalmente por las propuestas sobre la homotecia presentes en los libros de texto oficiales. Lo que para el autor evidencia las dificultades que existieron en la historia de las matemáticas, con respecto a la articulación de los aspectos numérico y figurativo. Lemonidis reafirma esto con los siguientes hechos: los griegos no consideraban las razones de magnitudes como números además Euclides no consideró la adición de estas. Por último, la ambigüedad con respecto a los números negativos continúa hasta que la geometría tiene en cuenta las direcciones de segmentos, asignando un signo al número que mide la longitud de un segmento en un eje.

6.2 Análisis cognitivo

Lemonidis (1990) mostró que los alumnos presentan dificultades cognitivas sobre la homotecia, principalmente en los aspectos figurativo y numérico.

En cuanto a lo figurativo identifica seis factores principales que generan las dificultades:

- 1) Existencia de simetría interna: si la figura es invariante por una simetría central se hace más difícil identificar los puntos homotéticos cuando se desconoce el centro de homotecia, ejemplos de estas son los círculos y los polígonos regulares de un número par de lados. También se dificulta identificar puntos homólogos cuando la figura tiene otro tipo de simetría.

2) Factor de homotecia positivo o negativo: La posición relativa de una figura con respecto a otra dependen del signo de la razón, lo que ocasiona dificultades, ya que se requiere la articulación del registro figurativo y numérico.

3) Números de puntos notables de la figura: Los puntos notables permiten encontrar las correspondencias con mayor facilidad. Por ejemplo el círculo no tiene puntos notables, el triángulo tiene tres.

4) Figuras designadas o no designadas: Se llaman figuras designadas a aquellas figuras homotéticas a las que se les asigna una etiqueta para distinguir los puntos correspondientes. Por ejemplo A para un punto y A' para su homólogo.

5) Posición relativa de las figuras homotéticas:

- Disyuntas
- Se intersecan en un punto.
- Contiguas.
- Secantes.
- La región limítrofe de una bordea a la otra.
- Inclusión completa de una con respecto a la otra.

6) Número de segmentos que unen dos puntos homólogos. En algunas configuraciones estos pueden generar confusiones.

- Se confunden entre ellos.
- Se confunden los puntos homólogos.
- Se confunde un punto de la figura inicial con otro de la figura homotética.

De acuerdo con Lemonidis se requiere de diferentes representaciones figurativas para abordar el concepto de homotecia. Considerando además que el tránsito entre lo figurativo y

lo numérico precisa tener en cuenta la correspondencia entre los elementos significativos de la representación y los elementos significativos de la escritura numérica.

Dificultades concernientes al aspecto numérico:

La interpretación de la razón de homotecia requiere de la articulación y coordinación del registro numérico y el registro figurativo. Es decir la aplicación en correspondencia de los elementos numéricos (signo y valor absoluto) con los elementos figurativos.

Lemonidis en este caso establece un paralelismo entre las dificultades que presentan los alumnos con el signo de la razón y los obstáculos de la geometría en el siglo XIX. Por ejemplo en la situación de los segmentos orientados, el signo perturba a los estudiantes, puesto que el significado numérico que ellos le atribuyen es el de número menor que cero. En tanto que el signo negativo se asocia con una disminución de las magnitudes, en lugar de la posición relativa de las figuras con respecto al centro.

El estudio de Lemonidis concierne al uso de la homotecia en configuraciones estáticas y es anterior al uso de la geometría dinámica y de acuerdo con Laborde (2012) la manipulación directa de los objetos que conservan propiedades al arrastrar, característica fundamental del SGD, ofrece la posibilidad de obtener muchas configuraciones en las que las propiedades se visualizan con mayor facilidad que en dibujos estáticos, gracias a la explicitación y conservación de las relaciones matemáticas durante el arrastre. Por lo tanto consideramos que muchas de las dificultades que reporta Lemonidis, podrían atenuarse con el uso del software de geometría dinámica, mediante la interacción de los alumnos con construcciones robustas.

6.3 Análisis didáctico

Como mencionamos anteriormente, el concepto de homotecia ha desaparecido del currículo y cuando se trata, lo hacen desde el punto de vista algebraico en la mayoría de los casos. Hay pocos trabajos sobre la homotecia con un tratamiento euclidiano, en particular en los estándares del Ministerio de Educación Nacional, se menciona superfluamente esta transformación: *“Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte”* (MEN, 2004, p. 84), siendo esta la única vez que se menciona la palabra homotecia.

6.4 Diseño

Queremos que los alumnos logren reconocer y usar las dos siguientes propiedades: el centro de homotecia y su alineación con una figura y su imagen y la proporcionalidad entre las distancias de cada punto y su imagen al centro de homotecia; que permiten resolver los siguientes problemas:

- Dadas dos figuras homotéticas construir el centro de homotecia.
- Dadas dos figuras homotéticas calcular la razón de homotecia.
- Construir la figura homotética de otra dados el centro y la razón.
- Construir la figura homotética de otra dados el centro de homotecia, un punto y su homotético.

Para ello tenemos en cuenta que de acuerdo a la TSD, el conocimiento se manifiesta primero en la acción, luego en la formulación y por último en la validación. Basándose en que la toma de decisiones por parte del sujeto en una situación adidáctica es mediada por sus conocimientos, por lo tanto las acciones son manifestaciones de estos y de su evolución;

posteriormente los conocimientos son formulados verbalmente como generalizaciones o proposiciones y finalmente usados como criterios de validación (Margolinas, 2009).

La cuestión es entonces ¿cómo operar el tránsito entre las acciones, la formulación y la validación, en nuestras actividades? Para responder a esta pregunta nos remitimos al ciclo de intención-acción-retroacción-interpretación-validación. Al respecto Brousseau propone que el sujeto tiene que tomar conciencia de las opciones que le ofrece el medio y entender que hay una relación causa efecto entre sus acciones y las retroacciones del medio. Pero que no son precisamente las posibilidades de acción las que dan cuenta del aprendizaje por adaptación, sino la anticipación; es decir, cuando el sujeto toma conciencia del alcance de sus acciones antes de efectuarlas. Dicho de otro modo, cuando el sujeto percibe el resultado de sus acciones de manera continua e inmediata, puede lograr su intención con ajustes graduales de sus acciones, lo que corresponde a uso de conocimiento perceptivo, mientras que si se impide el ajuste gradual de las acciones, el sujeto deberá usar el conocimiento matemático para determinar el resultado de sus acciones antes de efectuarlas, es decir para anticipar. Por esta razón, es necesario que el medio en algún momento bloquee las estrategias perceptivas para que haya anticipación, de modo que aparezca el conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta lo planteado en los dos párrafos precedentes, usamos básicamente tres estrategias didácticas para el diseño de las actividades, con el fin de lograr que los alumnos identifiquen y usen las propiedades perceptivamente, y luego que dicho uso no sea meramente perceptivo y pase a ser formulado verbalmente o mediante el uso de herramientas de construcción. Estas tres estrategias son:

- Provocar el uso de estrategias perceptivas.
- Bloquear las estrategias perceptivas para que haya anticipación
- Invalidar las estrategias perceptivas para que haya formulación.

De acuerdo con Lemonidis (1990) y Bautista y Peralta (2011), los alumnos presentarán dificultades desde el reconocimiento perceptivo de algunas de las propiedades en juego: reconocer el centro, reconocer la alineación de los puntos homotéticos con el centro, y por último la relación de proporcionalidad, debido a que la identificación de estas propiedades requiere tener en cuenta objetos que no necesariamente están presentes en el dibujo (por ejemplo para reconocer la alineación es necesario imaginar una recta que une al centro y los dos puntos homotéticos). Por lo tanto, asumimos que las retroacciones matemáticas no serán suficientes para que los alumnos logren identificar esas propiedades y será necesario el uso de retroacciones didácticas que favorezcan el reconocimiento perceptivo. Ahora bien, tendremos que investigar hasta qué punto las retroacciones didácticas empleadas en cada una de las tareas, refuerzan o interrumpen el ciclo de interacción del alumno con el medio y los resultados de estas investigaciones harán parte de los aportes de este trabajo.

7. Análisis a priori

De acuerdo a lo propuesto en el análisis preliminar, el propósito del diseño es que los alumnos reconozcan y usen perceptivamente algunas propiedades de la homotecia, las formulen verbalmente o las expliciten mediante el uso de herramientas de construcción. Hemos organizado 2 actividades: una para el reconocimiento de la alineación de objetos homotéticos con el centro y otra para el reconocimiento de la razón de las distancias de objetos homotéticos al centro. En cada actividad hay dos momentos: un primer momento de exploración, durante el cual los alumnos puede hacer ajustes perceptivos para resolver las tareas propuestas, y un momento de anticipación en el que se impide el ajuste perceptivo para que haya anticipación.

En todas las tareas que se proponen están en juego varias parejas de objetos homotéticos. Cada tarea se repite varias veces en configuraciones con diferente centro y razón de homotecia con el fin de familiarizar a los alumnos con esas distintas configuraciones y promover la identificación de las propiedades comunes a todas ellas.

Usaremos distintos tipos de objetos (figuras geométricas rectilíneas o curvas y letras) con el objetivo de favorecer el reconocimiento de los puntos homotéticos y la conservación de la forma. En el análisis cognitivo resaltamos la dificultad que representa reconocer la correspondencia de los puntos homotéticos, cuando las figuras presentan simetrías centrales o axiales, de modo que incluimos algunos objetos con estas características en varias tareas.

Las actividades están previstas para ser trabajadas por parejas para promover el diálogo y la formulación verbal de estrategias. Es importante que el profesor esté atento a la interacción de los alumnos con el fin de garantizar que ambos asuman un rol activo e intercambien sus opiniones.

Con la actividad 1 queremos que los alumnos identifiquen perceptivamente el centro de homotecia y su unicidad, los puntos homólogos, su alineación con el centro, el orden de dicha alineación y que anticipen perceptivamente la posición del centro de homotecia.

Con la actividad 2 buscamos que los alumnos identifiquen perceptivamente la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada punto y su homólogo al centro, que anticipen perceptivamente la posición de una figura homotética cuando la figura inicial sea llevada a otra posición.

A continuación hacemos el análisis de cada actividad, describiendo los objetivos específicos, las propiedades en juego, las hipótesis sobre el funcionamiento de las tareas, decisiones de diseño y la descripción del medio material, especificando las retroacciones

matemáticas y las retroacciones didácticas. Distinguimos tres tipos de retroacciones didácticas: Las tipo 1 corresponden al control del funcionamiento de las secuencias de tareas, por ejemplo la posibilidad de avanzar a la página siguiente o mostrar textos con instrucciones. Las tipo 2 conciernen al control de las acciones, por ejemplo botones o letreros que aparecen durante el desarrollo de una tarea, bloquear o habilitar. Por último, las retroacciones didácticas de nuestro principal interés, las tipo 3, son las que usamos para que los alumnos reconozcan propiedades de la homotecia, principalmente aquellas que no son explícitas o fácilmente reconocibles perceptivamente como la alineación y la proporcionalidad. Ejemplos de estas retroacciones didácticas son: hacer titilar puntos, objetos que aparecen y desaparecen, ofrecer tareas de ayuda, etc.

7.1 Actividad 1

Con esta actividad buscamos que los alumnos reconozcan y anticipen perceptivamente el centro de homotecia y su unicidad. Para ello esperamos que identifiquen, además de que las figuras homotéticas tienen la misma forma, el carácter puntual de cada una y su dependencia, de modo que determinen la alineación de los puntos homotéticos con el centro y el orden de dicha alineación.

La actividad está organizada en 3 secuencias que describimos detalladamente a continuación.

7.1.1 Primera secuencia

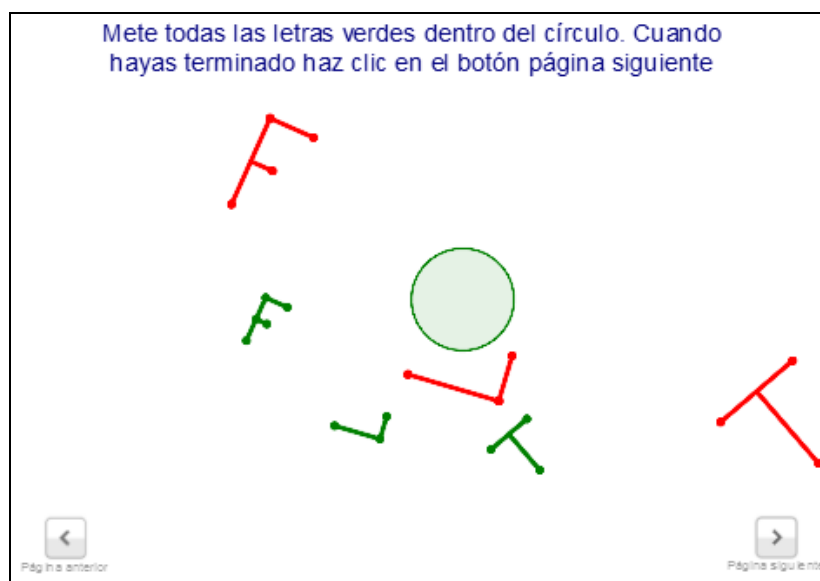
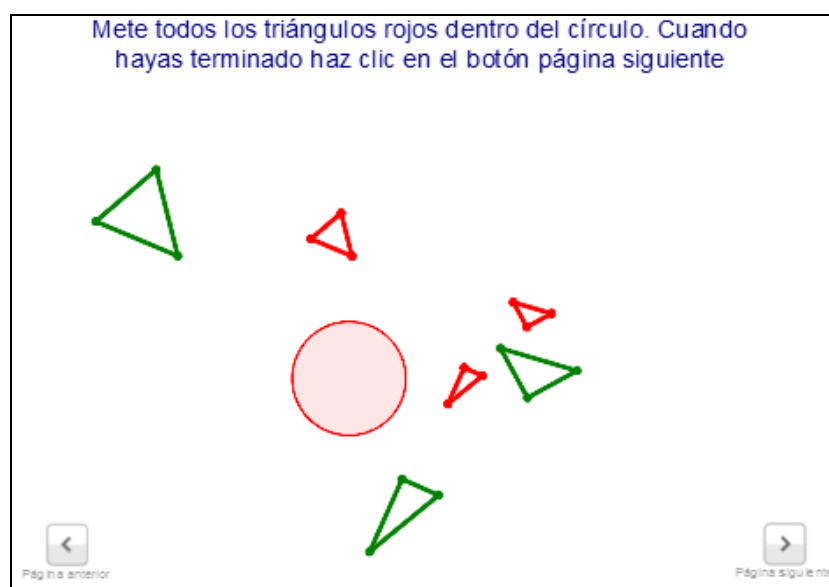
El objetivo de esta secuencia es que los alumnos reconozcan que hay dependencia entre dos figuras homotéticas, que existe un único lugar donde se superponen y que se familiaricen con distintas configuraciones.

Consta de cuatro tareas que se repiten en 4 series modificando los objetos homotéticos, el centro y la razón de homotecia.

Diseño de las tareas

Para que los alumnos reconozcan que hay dependencia entre dos figuras homotéticas, proponemos en las cuatro tareas, tres figuras y sus homotéticas de modo que las tres iniciales se pueden arrastrar por cualquier parte de la pantalla, mientras que las figuras imágenes no se dejan arrastrar. En la primera tarea les pedimos que metan las figuras iniciales dentro de un círculo fijo y en una segunda tarea les pedimos que metan las figuras homotéticas en un círculo fijo.

Para que los alumnos tomen conciencia del centro de homotecia y su unicidad, proponemos la tercera y cuarta tarea: en la tercera les pedimos meter todas las letras dentro de un círculo fijo en una posición distinta al centro de homotecia. En la cuarta desbloqueamos el movimiento del círculo, les pedimos que lo muevan y que metan todas las figuras en él.

Descripción del medio y retroacciones**Figura 7.1 Primera tarea – Serie 1.****Figura 7.2 Segunda tarea – Serie 2.**

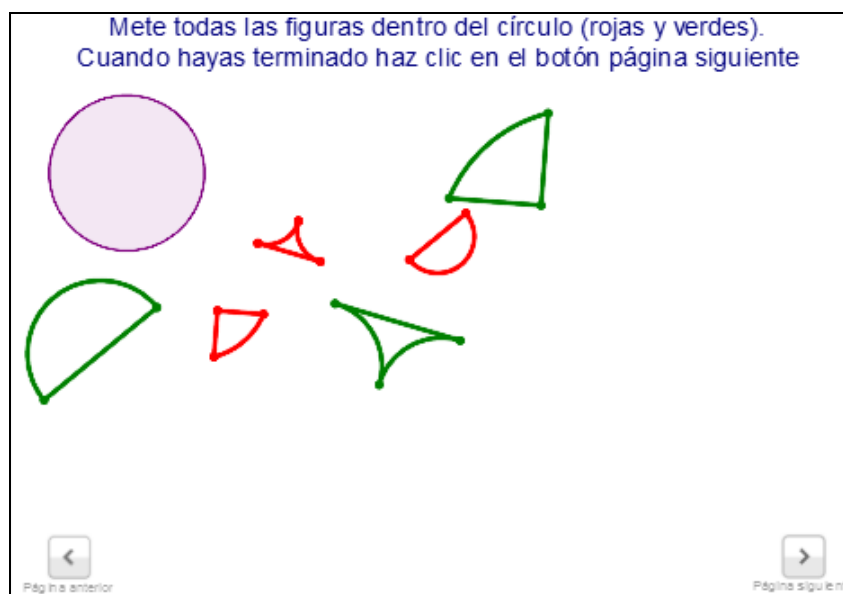


Figura 7.3 Tercera tarea – Serie 3.

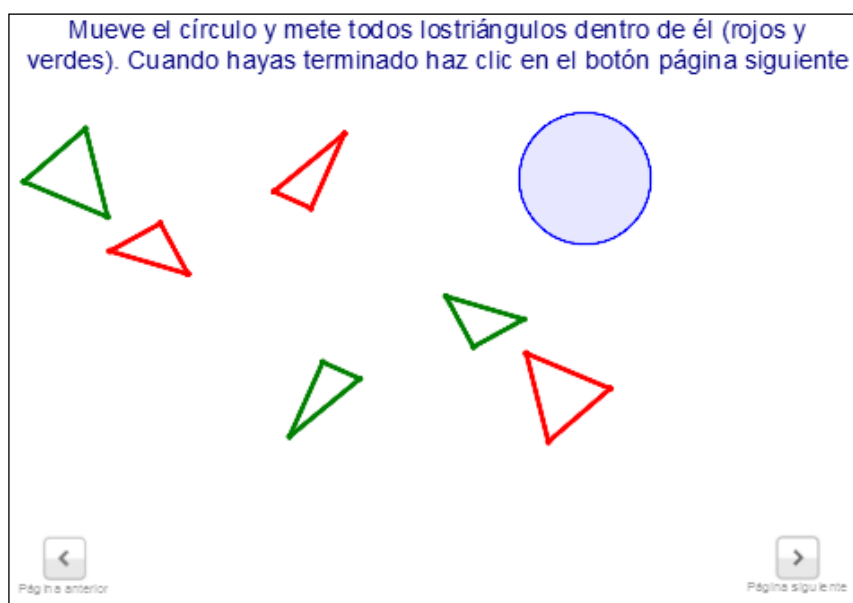


Figura 7.4 Cuarta tarea – Serie 4.

En las configuraciones presentadas las figuras rojas son homotéticas de las verdes y el centro de homotecia permanece oculto. Las figuras verdes se pueden arrastrar mientras que las rojas no, sin embargo estas se mueven al arrastrar las verdes, conservando la relación de homotecia. En las tres primeras tareas el círculo permanece fijo en una posición distinta al centro de homotecia, en la cuarta se puede arrastrar.

En consecuencia, es posible resolver la primera tarea arrastrando las figuras verdes hacia el círculo; la segunda tarea se puede resolver únicamente arrastrando las figuras verdes de modo que las rojas se muevan hacia el círculo; la tercera tarea es imposible puesto que el único lugar donde las figuras homotéticas se superponen es en el centro; por último, la cuarta tarea se puede resolver arrastrando las figuras verdes hasta que se superpongan con las rojas y llevando el círculo a dicha posición.

Además de los objetos homotéticos y el círculo, en cada página aparecen dos botones que permiten regresar a la página anterior o pasar a la siguiente. Con el botón página siguiente hay asociada una retroacción didáctica de evaluación:

- ✓ Si la tarea ha sido resuelta, se pasa a la siguiente tarea.
- ✓ Si la tarea no ha sido resuelta aparece un letrero donde se le pregunta si desea continuar sin resolver la tarea y los puntos incorrectos titilan. Ver Figura 7.5 Letrero tarea no resuelta.

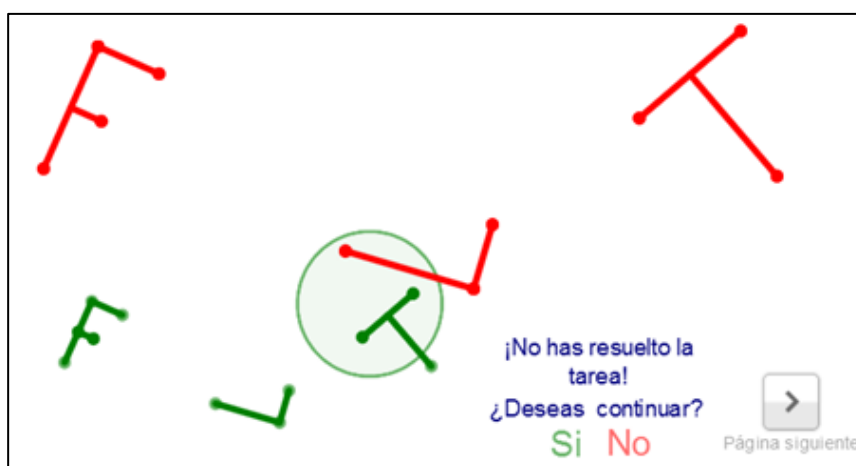


Figura 7.5 Letrero tarea no resuelta.

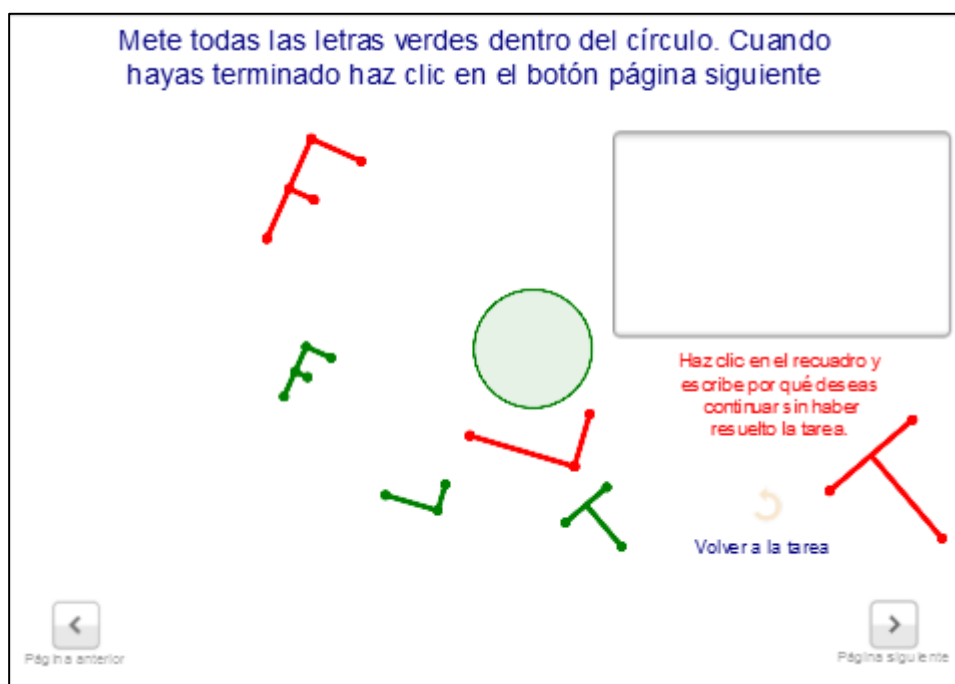


Figura 7.6 Cuadro de texto tarea no resuelta.

Si el alumno hace clic en la opción *SI* aparece un cuadro de texto donde deberá justificar por qué desea continuar sin resolver la tarea, y se ofrece la opción de volver a la tarea (ver Figura 7.6). La opción de pasar a la página siguiente sólo se activará si el alumno escribe algo en el cuadro de texto.

Si el alumno hace clic en la opción *NO*, volverá a la tarea y podrá seguir intentando resolverla⁵.

Se lleva un registro de cuántas tareas de la secuencia son realizadas, de modo que si el alumno no resuelve al menos 8 de las 12 solubles, se le pedirá que vuelva a resolver algunas tareas que no han sido resueltas.

⁵ Esta retroacción didáctica tiene por objetivo que el alumno en la tarea 3, justifique por qué es imposible resolver la tarea, pero para evitar que relacione esta retroacción con las tareas imposibles, hemos decidido ponerla en todas las de esta primera secuencia.

Análisis de las tareas

A continuación describimos las distintas posibilidades de interacción adidáctica en cada una de las tareas: Intención, acción, retroacción, interpretación y validación.

✓ Primera tarea

Se espera que el alumno arrastre las figuras verdes y las suelte dentro del círculo. Las figuras verdes se dejan arrastrar y el alumno valida perceptivamente que están dentro del círculo.

✓ Segunda tarea

Se espera que el alumno arrastre las figuras rojas para meterlas dentro del círculo. Como las figuras rojas no se dejan arrastrar, el alumno abandonará esta estrategia. Es probable que el alumno recuerde que en la tarea anterior, al mover las figuras verdes, las rojas cambiaron de posición e intente mover las figuras rojas arrastrando las verdes. Esta estrategia le permitirá resolver la tarea y podrá validar perceptivamente que las figuras rojas están dentro del círculo.

✓ Tercera tarea

Se espera que los alumnos metan de nuevo las figuras verdes dentro del círculo y constaten que las rojas quedan por fuera. Igualmente, si meten las rojas dentro del círculo, las verdes quedan por fuera. Es posible que los alumnos arrastren una figura verde hasta superponerla con la roja correspondiente e intenten arrastrar el círculo a esa posición. Como el círculo no se puede arrastrar, abandonarán esta estrategia.

Después de varios intentos fallidos, se espera que el alumno haga clic en el botón página siguiente, y deberá justificar por qué no resolvió la tarea. Se espera que los alumnos justifiquen la imposibilidad de resolver esta tarea diciendo que si meten las figuras rojas dentro del círculo las verdes quedan por fuera y viceversa y que el círculo no se puede llevar a la posición donde las figuras se superponen.

✓ **Cuarta tarea**

Esperamos que los alumnos junten las figuras y luego lleven el círculo a esa posición para resolver la tarea. Con el fin de que los alumnos tomen conciencia de que el lugar donde se juntan las letras es único, el profesor podrá preguntar si es posible meter las letras dentro del círculo en otra posición distinta.

Análisis de la secuencia

La secuencia tiene por objetivo que los alumnos se familiaricen con distintas configuraciones de la homotecia (centro y razón) con varios tipos de figuras. Se espera que en las series 2 a 4, en la segunda tarea desaparezcan los intentos de arrastrar las figuras rojas y en la tercera tarea desaparezcan los intentos de meter todas las figuras dentro del círculo. Por el contrario, se espera que se refuercen las acciones de arrastrar las figuras verdes para mover las rojas y pasar a la página siguiente en la tercera tarea.

7.1.2 Segunda secuencia

Buscamos que los alumnos reconozcan la alineación de una figura, su homotética y el centro para anticipar la posición del centro, dada una pareja de objetos y sus imágenes. Según el análisis preliminar, esta propiedad no es fácil de reconocer, por eso consideramos necesarias retroacciones didácticas que favorezcan tal reconocimiento perceptivo.

La secuencia consta de una tarea que se repite 4 veces cambiando el centro y la razón de homotecia, mientras que las figuras son siempre las mismas. Está organizada en dos momentos: anticipación y validación, que describimos a continuación.

Diseño de la tarea

Proponemos de nuevo la tarea 4 de la secuencia anterior que consiste en ubicar un círculo en la posición donde las figuras homotéticas se superponen. Para lograr que los alumnos anticipen la posición del centro de homotecia, debemos bloquear la estrategia de ajustes sucesivos. Este bloqueo se logra impidiendo el movimiento de las figuras. Sin embargo, para que el alumno pueda validar su solución, debemos permitir que intente meter las figuras dentro del círculo. Por esta razón separamos la tarea en dos momentos: en un primer momento, el alumno debe ubicar el círculo en la posición del centro de homotecia y no puede mover las figuras; en un segundo momento puede arrastrar las figuras para meterlas dentro del círculo, pero no puede desplazar el círculo. En caso de que el alumno invalide la solución, debemos impedir que ubique el círculo memorizando la posición del centro, porque necesitamos que tome como referencia la posición de las figuras homotéticas. Para ello programamos la tarea de modo que cuando él decida volver a intentarlo, cambie la posición del centro de homotecia.

Descripción del medio y retroacciones

En primera instancia se muestra una página al alumno con tres letras verdes, tres rojas, un círculo, tres botones (*Verificar*, *Página anterior* y *Página siguiente*) y la consigna “¿En qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar”. Ver Figura 7.7.

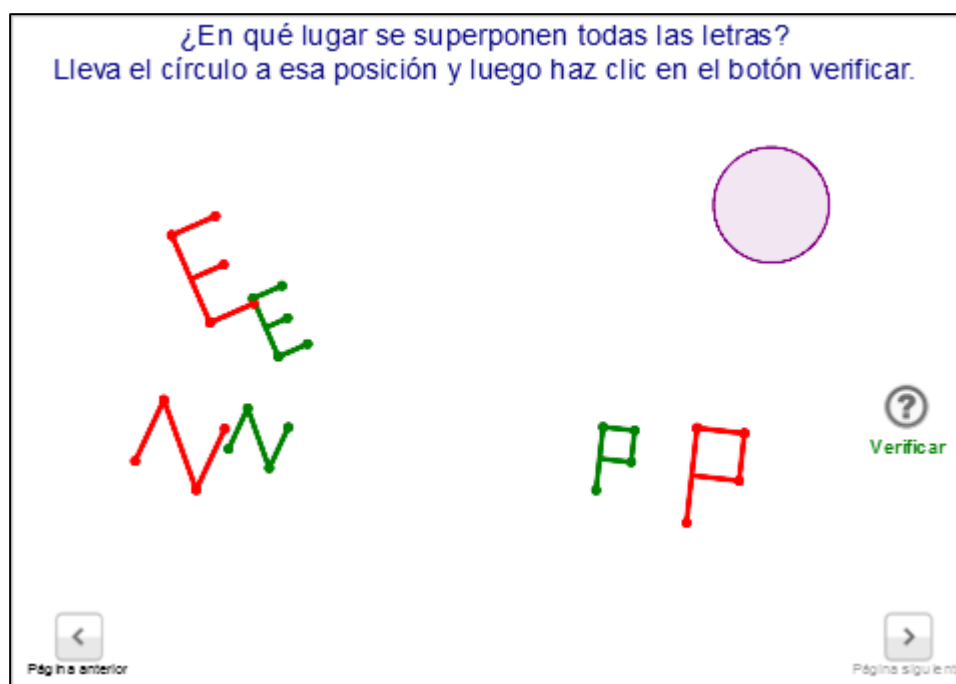


Figura 7.7 Tarea de anticipación.

Siguiendo con el código de color de la primera secuencia, las letras rojas son homotéticas de las verdes con respecto a un centro que permanece oculto y ninguna de ellas se puede arrastrar; el círculo se puede arrastrar a cualquier parte de la pantalla. Los botones tienen programadas las siguientes retroacciones didácticas, que se ejecutan al hacer clic en ellos.

Verificar: bloquea el movimiento del círculo, habilita el arrastre de las letras verdes, oculta los botones *Página anterior* y *Verificar*, muestra el botón *Continuar* y cambia la consigna: “Ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón continuar”. Ver Figura 7.8.

- 1) **Página anterior:** muestra la tarea inmediatamente anterior, tal como la resolvió el alumno.
- 2) **Página siguiente:** muestra un letrero que dice “debes resolver esta tarea” y se ocultará nuevamente, luego de 4 segundos.

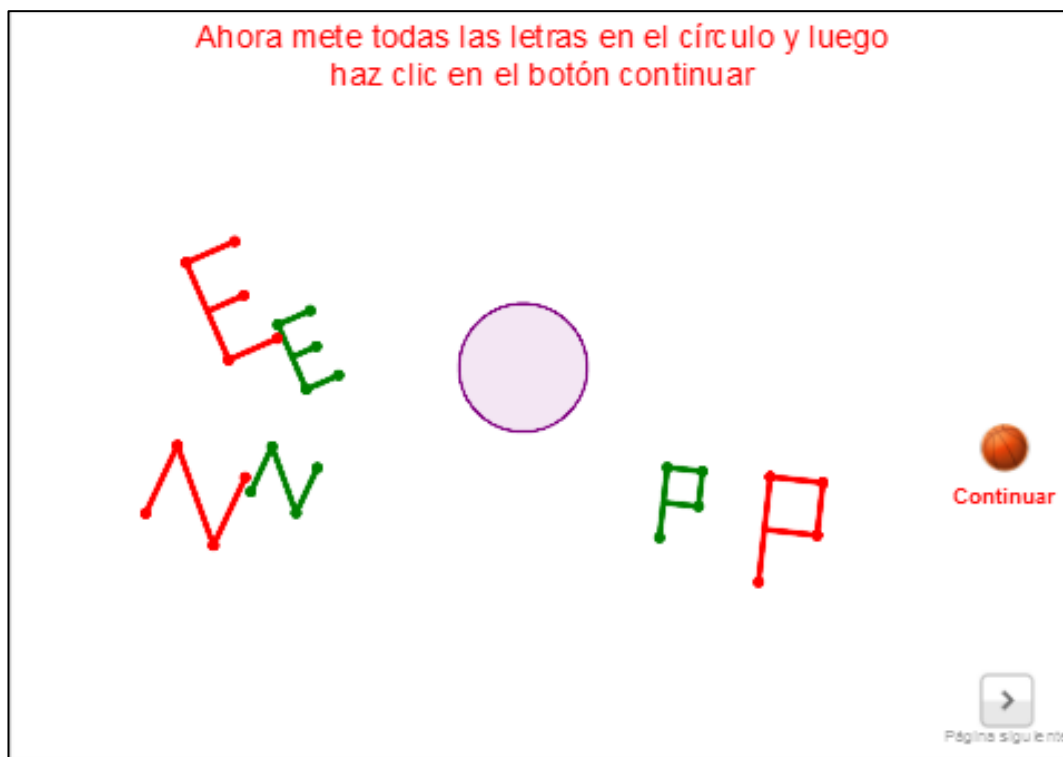


Figura 7.8 Validación tarea de anticipación.

El botón *Continuar* tiene programadas dos retroacciones didácticas en función de si la tarea ha sido resuelta o no:

- 1) Si la tarea ha sido resuelta muestra un letrero que dice: “*¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente*” y habilita el avance a la página siguiente al hacer clic en el botón correspondiente. Ver Figura 7.9.



Figura 7.9 Solución correcta.

2) Si la tarea no ha sido resuelta, oculta el botón *Continuar*, muestra el botón *Volver a intentarlo*, el círculo y los puntos incorrectos titilan y muestra un letrero que dice: “¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!”. Ver Figura 7.10.



Figura 7.10 Retroacción botón continuar.

El botón *Volver a intentarlo* tiene programadas dos retroacciones didácticas: reiniciar la tarea cambiando la posición del centro de homotecia (las letras verdes y el círculo retornan a la posición donde se encontraban al iniciar la tarea) y mostrar un botón de ayuda luego del primer intento fallido. Ver Figura 7.11.



Figura 7.11 Retroacción botón volver a intentarlo.

Al hacer clic en el botón *Ayuda* pasa a otra página donde se muestra un texto que dice:
“Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras.
A continuación te proponemos una tarea de ayuda”. Ver Figura 7.12

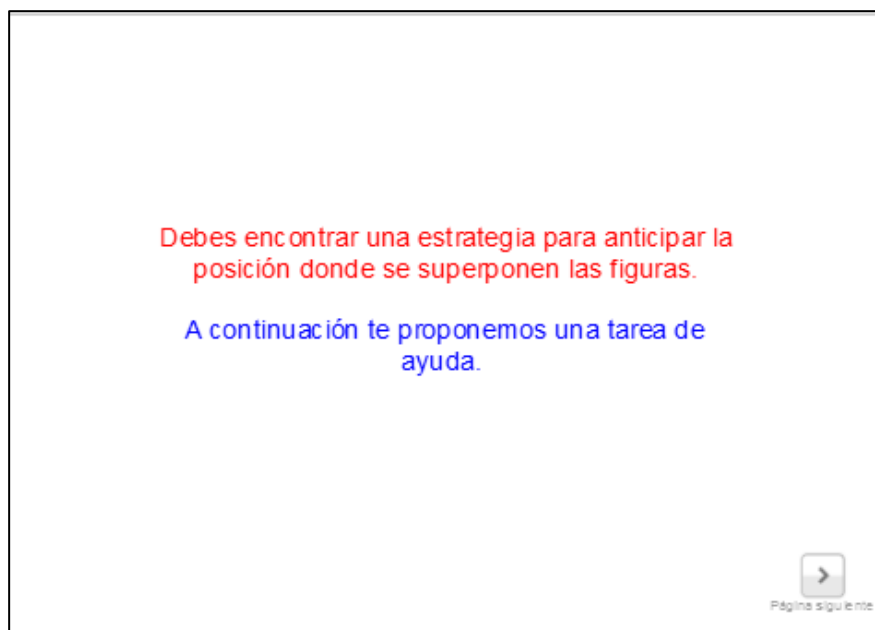


Figura 7.12 Retroacción botón ayuda.

El botón página siguiente envía a una tarea de ayuda que describiremos luego del análisis de esta tarea.

Análisis de la tarea

Esperamos que el alumno intente resolver la tarea arrastrando las letras verdes para juntarlas con las rojas y luego llevar el círculo a esa posición. Como las letras no se dejan arrastrar, el alumno abandonará esta estrategia y tomará conciencia de que debe ubicar el círculo sin poder mover las letras. Es posible que el alumno ubique el círculo en cualquier parte de la pantalla y haga clic en el botón *Verificar*. Al arrastrar las letras verdes y juntarlas con las rojas quedarían fuera del círculo, así que intentará arrastrarlo para que las letras queden dentro de él, pero éste ya no se dejará arrastrar; de modo que invalidará su estrategia. Probablemente intente memorizar la posición donde las letras se juntan, haga clic en el botón *Volver a intentarlo* y ubique el círculo en dicha posición. Como el centro cambia de posición

cada vez que el alumno realiza un nuevo intento, esta estrategia no le funcionará y la abandonará.

También es posible que los alumnos tomen conciencia de que entre más cerca esté una letra de su pareja, más cerca estará la posición donde se juntan. Por lo tanto podrían intentar ubicar el círculo más cerca de las parejas de letras menos distantes. Sin embargo, esta estrategia sólo garantizará la solución si ubican el círculo de modo que la razón entre las distancias cada letra y su pareja al centro del círculo corresponda a la razón de homotecia. Dado que el reconocimiento perceptivo de la proporcionalidad es más complejo que la alineación, creemos que esta estrategia es poco probable que funcione y terminarán abandonándola.

Según los análisis preliminares, los alumnos experimentarán dificultades para reconocer la alineación de cada pareja de letras y el centro. Por eso ofrecemos una tarea de ayuda luego del primer intento, con retroacciones didácticas para facilitar el reconocimiento global de la alineación.

Diseño de la tarea de ayuda

Necesitamos que el alumno reconozca globalmente la alineación de un objeto, su homotético y el centro de homotecia. Por lo tanto es necesario que el centro esté visible. Así que solicitamos superponer un par de letras para hacer visible el centro de homotecia, y proponemos una tarea en la que deben desplazar las otras letras y observar la alineación de las parejas de letras con las superpuestas. Cuando el alumno ha desplazado las letras, aparecen dos rectángulos grises que contienen cada uno las letras superpuestas y una pareja de letras no superpuestas. Esperamos que, gracias a esta retroacción didáctica el alumno reconozca la alineación y la utilice para resolver el problema anterior.

Descripción de la tarea de ayuda y retroacciones

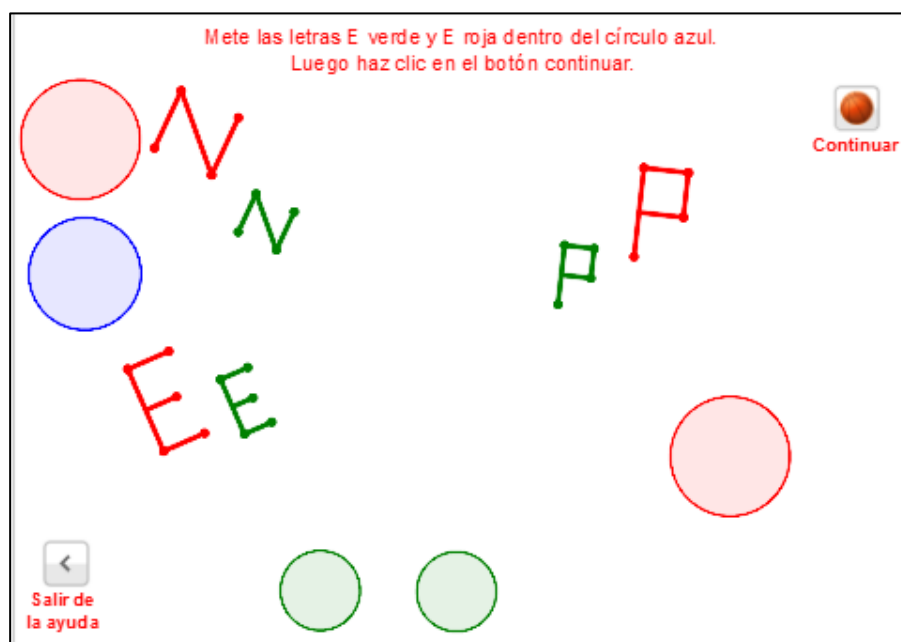


Figura 7.13 Tarea de ayuda para el reconocimiento de la alineación primera parte.

Se presenta a los alumnos la página que muestra la Figura 7.13, donde los dos círculos rojos y las letras N y P no se pueden arrastrar, mientras que el círculo azul, los círculos verdes y la letra E verde sí pueden arrastrarse.

El botón *Salir de la ayuda* permitirá volver a la tarea inicial, sólo cuando la tarea de ayuda haya sido resuelta.

El botón *Continuar* tiene programadas 2 retroacciones:

- Si la letra E verde y E roja no están dentro del círculo azul, muestra un letrero que titila y dice: “*!Las letras E verde y E roja no están dentro del círculo!*”, también titila la consigna “*Mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón continuar*”

- Si las letras E verde y E roja están dentro del círculo azul, cambia la consigna por “Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color. Luego puedes salir de la ayuda”, oculta el botón *Continuar*, las letras N y P y la consigna titilan, bloquea el movimiento del círculo azul y las letras E, libera el desplazamiento de las letras N y P.



Figura 7.14 Tarea de ayuda para el reconocimiento de la alineación segunda parte.

Cuando el alumno meta las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color, aparecerá una retroacción didáctica para hacerle reflexionar sobre la relación entre las figuras y el lugar donde se superponen. Ver Figura 7.15.

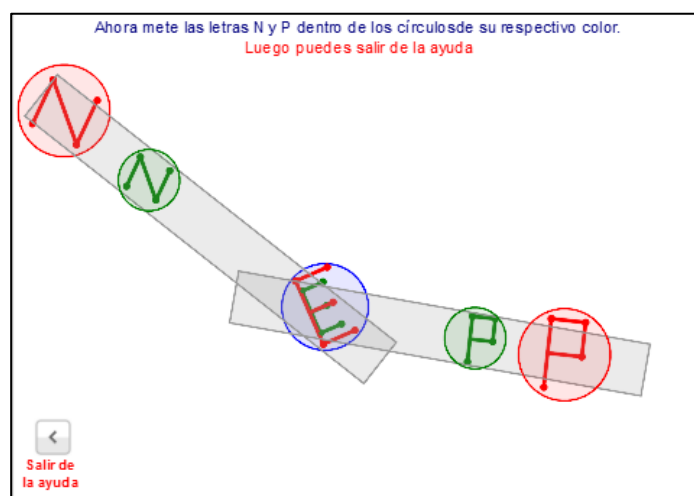
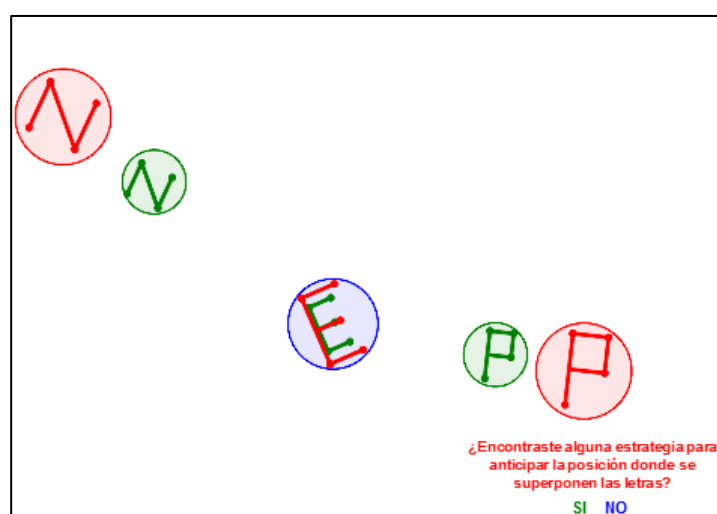


Figura 7.15 Retroacción didáctica que explicita la alineación.

Las franjas grises permanecen visibles sólo por 4 segundos, y una vez desaparecen, si el alumno hace clic en el botón *Salir de la ayuda* muestra un letrero que dice “¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?” con opciones de respuesta *SI* y *NO*. Ver Figura 7.16.

**Figura 7.16 Salir de la ayuda.**

- Si el alumno escoge la opción *NO*, se oculta el letrero y se muestra otro que dice “Se sugiere resolver nuevamente la tarea. Si al hacerlo encuentras alguna estrategia, haz clic en el botón salir de la ayuda de lo contrario, arrastra las letras *N* y *P* en busca de una relación entre ellas y el lugar donde se superponen. Ahora haz clic en el botón continuar” y se muestra el botón *Continuar*. Ver Figura 7.17.

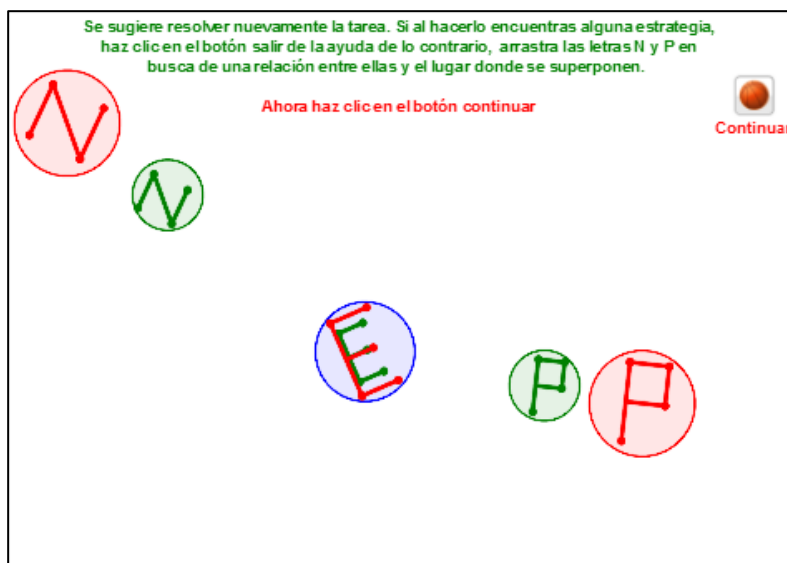


Figura 7.17 Salir ayuda. Opción NO.

Al hacer clic en el botón *Continuar*, las letras verdes retornarán a la posición inicial y se muestra nuevamente la tarea de ayuda.



Figura 7.18 Salir Ayuda. Opción NO. Continuar.

- Si el alumno hace clic en la opción *SI*, volverá a la tarea principal donde deberá anticipar nuevamente la posición donde se superponen las letras sin poder moverlas y se muestra un botón para volver a la ayuda.

Se lleva un registro de cuántos intentos ha realizado el alumno en la tarea principal y de cuántas veces ha decidido ir a la ayuda. Si el alumno intenta resolver la tarea 4 veces sin éxito, de manera automática pasa a la página que muestra la Figura 7.19, que corresponde a la misma página a la que envía el botón *Ayuda* mencionado anteriormente.

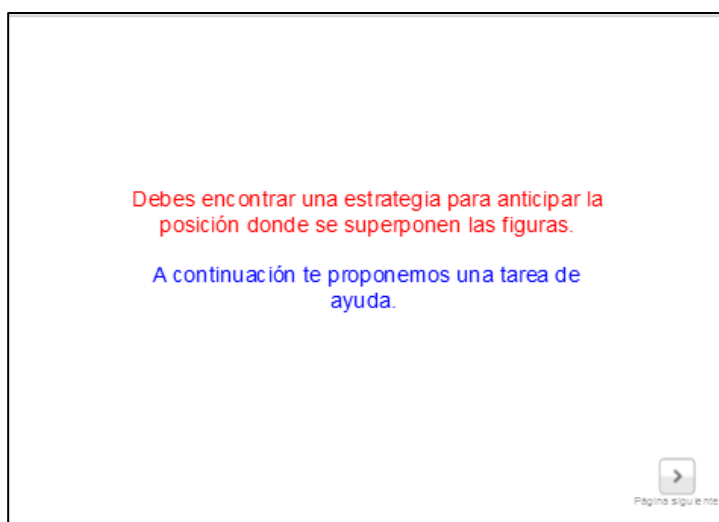


Figura 7.19 Retroacción luego de 4 intentos fallidos.

El alumno puede pasar de la tarea a la ayuda y viceversa cuantas veces quiera.

Análisis de la tarea de ayuda

Esperamos que el alumno junte las letras E, las meta dentro del círculo azul y haga clic en el botón continuar. Luego que intente arrastrar los círculos verdes y rojos hacia las letras N y P para que cada una quede dentro del círculo de su respectivo color. Como los círculos rojos permanecen fijos, invalidará esta estrategia. Por lo tanto creemos que arrastrará las letras N y P verdes hasta que las rojas queden dentro de los círculos rojos, luego llevará los círculos verdes a dicha posición. Como la tarea estará resuelta, aparecerán las franjas grises que resaltan la alineación de las figuras homotéticas y el centro. Esperamos que los alumnos reflexionen sobre esta propiedad una vez que aparezca esta retroacción, puesto que explicita

la posición donde se juntan las letras y su relación con las otras dos parejas que están en posiciones distintas al centro de homotecia.

Es posible que una vez desaparezcan las dos franjas grises, los alumnos intenten arrastrar nuevamente las letras. La N y la P verde se dejarán arrastrar mientras que las E verde y roja permanecerán superpuestas y dentro del círculo azul. Esto aumentará las posibilidades de que los alumnos tomen conciencia de la alineación, propiedad necesaria para anticipar la posición del centro de homotecia sin mover las figuras.

Consideramos que la retroacción de las franjas grises no produce un efecto topacio, puesto que el alumno tiene que tomar conciencia de la alineación, regresar a la tarea de anticipación e imaginar las franjas en esta nueva página. Así que no se le comunica la solución del problema, sino que se le sugiere tener en cuenta una propiedad que debe explicitar para solucionar el problema.

Análisis de la secuencia de la tarea de anticipación

Se espera que al repetir la tarea con distintas configuraciones (razón y centro de homotecia distintos), los alumnos abandonen las estrategias que no se basan en el reconocimiento de la alineación y refuercen la estrategia de reconocer la alineación de las figuras homotéticas con el centro.

7.1.3 Tercera secuencia

En la segunda secuencia los alumnos utilizan el reconocimiento global de la alineación. En esta secuencia se busca un reconocimiento puntual de la misma. Proponemos esta secuencia que consta de una tarea que se repite cuatro veces con distintas razones de homotecia y posiciones del centro, para que los alumnos tomen conciencia del carácter puntual de cada

figura y puedan anticipar perceptivamente el centro de homotecia trazando o imaginando dos rectas que unen dos pares de puntos homotéticos.

Diseño de la tarea

El diseño de esta tarea es igual al diseño de la tarea anterior, pero para pasar del reconocimiento global de la alineación al carácter puntual, se utilizan dos estrategias: representar el centro de homotecia no con un círculo sino con un punto, y reducir las letras a puntos que forman triángulos homotéticos. Para resolver la tarea utilizando estos triángulos, los alumnos deben lograr una mayor precisión. Por eso se pone a su disposición algunas herramientas de construcción, en particular la herramienta recta.

Descripción del medio y retroacciones

Se muestran tres letras verdes y tres rojas, un punto azul titilante, tres botones: *Verificar*, *Página anterior* y *Página siguiente*, 7 herramientas de construcción: *Punto de intersección*, *punto medio*, *recta*, *segmento*, *recta perpendicular*, *recta paralela* y *circunferencia*. Además la consigna: “*Ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar*”. Ver Figura 7.20.



Figura 7.20 Primera anticipación.

Las letras rojas son homotéticas de las letras verdes con respecto a un punto que permanece oculto y ninguna de ellas se deja arrastrar. El punto azul se puede arrastrar a cualquier parte de la pantalla. El botón *Página anterior* envía a la página precedente mientras que el botón *Página siguiente* no tiene retroacción programada en este primer momento.

El botón *Verificar* se oculta al hacer clic en él, muestra el botón *Continuar*, bloquea el arrastre del punto azul, libera el desplazamiento de las letras verdes y cambia la consigna por: “Ahora junta cada pareja de letras para validar la solución. Luego haz clic en el botón *continuar*”. Ver Figura 7.21.



Figura 7.21 Primera validación.

El botón *Continuar* tiene programadas dos retroacciones didácticas en función de si el punto azul está ubicado en la posición correcta o no:

1) Si el punto azul no está en el lugar donde las figuras se superponen, oculta el botón *Continuar* y muestra el botón *Volver a intentarlo*. Al hacer clic en este último, la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y con las figuras verdes en la posición inicial. Ver Figura 7.22.



Figura 7.22 Retroacción botón continuar 1.

2) Si el punto azul ha sido ubicado en el lugar donde las figuras se superponen, oculta la consigna y muestra un letrero que dice: “¿Podrías ubicar el punto con mejor precisión en la siguiente tarea? Haz clic en el botón continuar”. Ver Figura 7.23.



Figura 7.23 Retroacción botón continuar 2.

Cuando el alumno haga clic en el botón *Continuar*, se oculta este botón, el punto azul y las letras verdes vuelven a la posición inicial, el centro de homotecia cambia de posición, muestra el botón *Iniciar animación* y aparece la consigna: “Haz clic en el botón iniciar animación, luego sigue las instrucciones”. Ver Figura 7.24.

Al hacer clic en el botón *Iniciar animación* este se oculta y las letras se van reduciendo hasta convertirse en puntos. Ver Figura 7.25 y Figura 7.26.



Figura 7.24 Retroacción botón continuar 3.



Figura 7.25 Inicia la animación.



Figura 7.26 Animación en curso.

Cuando termina la animación, aparecen un triángulo rojo y un triángulo verde cuyos vértices corresponden a los puntos que representan las letras achicadas. Se muestra la consigna “Ubica el punto azul en la posición donde cada vértice del triángulo verde se junta con el vértice correspondiente del triángulo rojo. Cuando creas que has terminado haz clic

en el botón verificar” y el botón *Verificar* (los triángulos no se dejan arrastrar). Ver Figura 7.27.

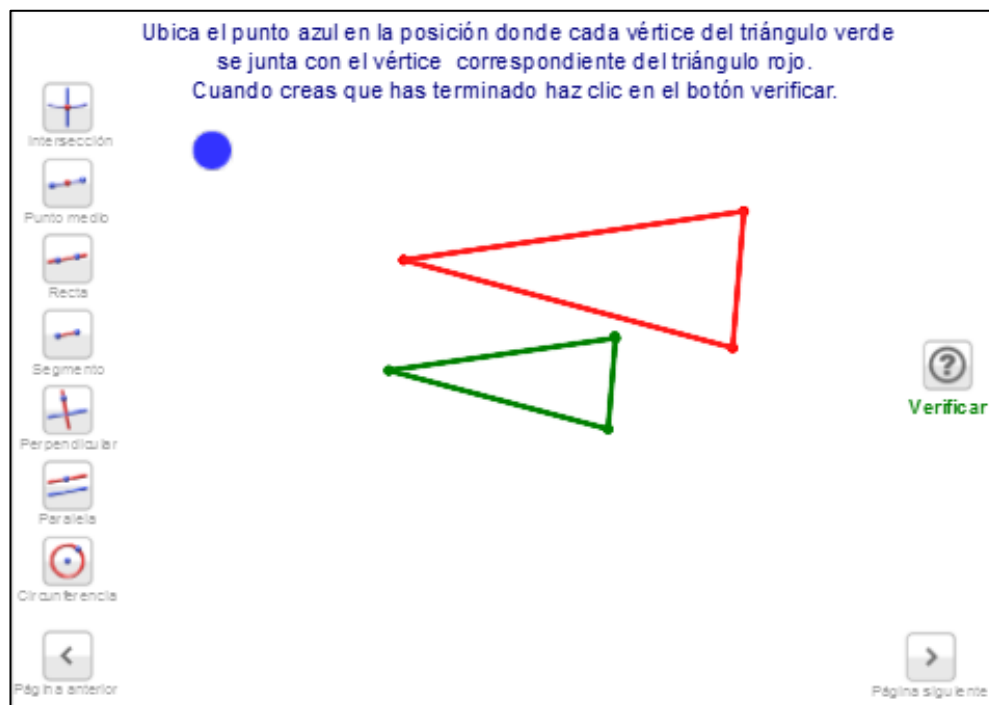


Figura 7.27 Termina la animación.

Al hacer clic en el botón *Verificar* se oculta al hacer clic en él, muestra el botón *Continuar*, bloquea el arrastre del punto azul, libera el desplazamiento del triángulo verde y cambia la consigna por “Ahora junta cada pareja de vértices para validar la solución. Luego haz clic en el botón continuar”. Ver Figura 7.28.

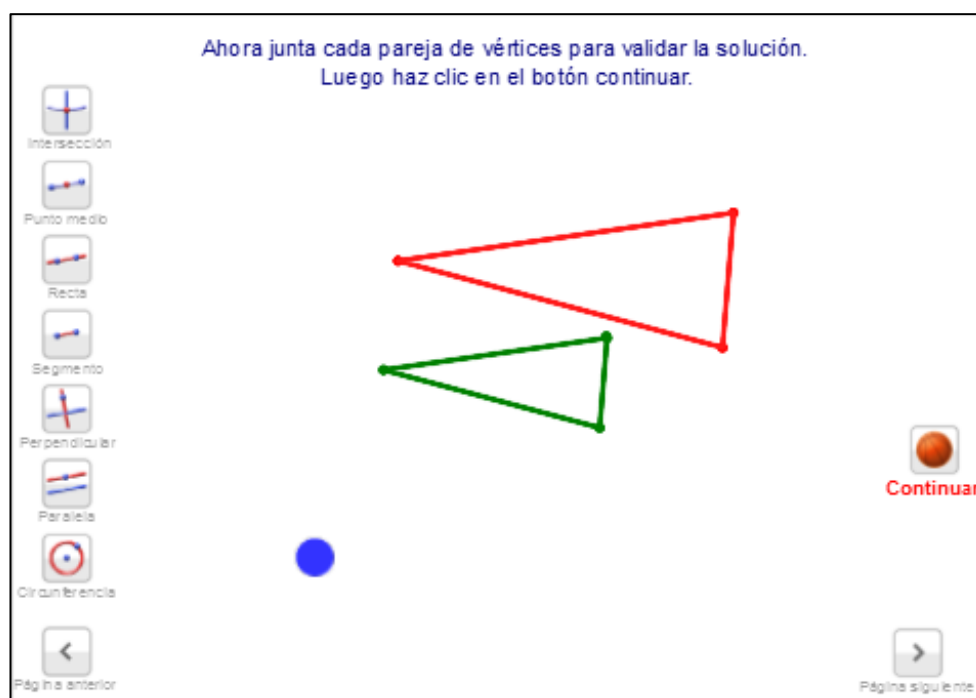


Figura 7.28 Retroacción botón verificar segundo momento.

El botón *Continuar* nuevamente tiene programadas dos retroacciones en función de si el punto azul está ubicado sobre el centro de homotecia con bastante precisión o no.

1) Si el punto no está en la posición correcta, oculta el botón *Continuar* y muestra el botón *Volver a intentarlo*. Ver Figura 7.29. Al hacer clic en el botón *Volver a intentarlo*, la tarea se reinicia haciendo que el triángulo verde retorne a la posición inicial y el centro de homotecia cambia de posición.



Figura 7.29 Retroacción botón continuar segundo momento.

2) Si el punto está ubicado en la posición correcta, habilita el paso a la página siguiente donde se repite la tarea con otra razón de homotecia y distinta posición del centro.

Análisis de la tarea

En la primera parte de la tarea esperamos que los alumnos refuercen el uso perceptivo de la alineación global para anticipar la posición donde las figuras se superponen. En la segunda parte, donde se exige mayor precisión para ubicar el punto, esperamos que hagan uso de la herramienta recta para garantizar la alineación. En tal caso podrían intentar trazar la recta por un punto del triángulo verde y un punto del triángulo rojo. Si los puntos escogidos no son homotéticos, invalidarán la estrategia al presionar el botón *Verificar* y arrastrar los triángulos. Esperamos que los alumnos finalmente logren identificar las tres parejas de puntos homotéticos correspondientes a los tres vértices de cada triángulo y usen estos para trazar dos rectas por dos parejas de puntos y encontrar la posición del centro de homotecia.

Cuando los alumnos decidan usar las herramientas de construcción, el profesor debe intervenir si observa dificultades con el uso de las mismas, por ejemplo: al seleccionar la

herramienta recta y hacer clic en dos puntos, muestra un segmento que se puede seleccionar por los extremos para extenderlo tanto como se desee (Ver Figura 7.30).

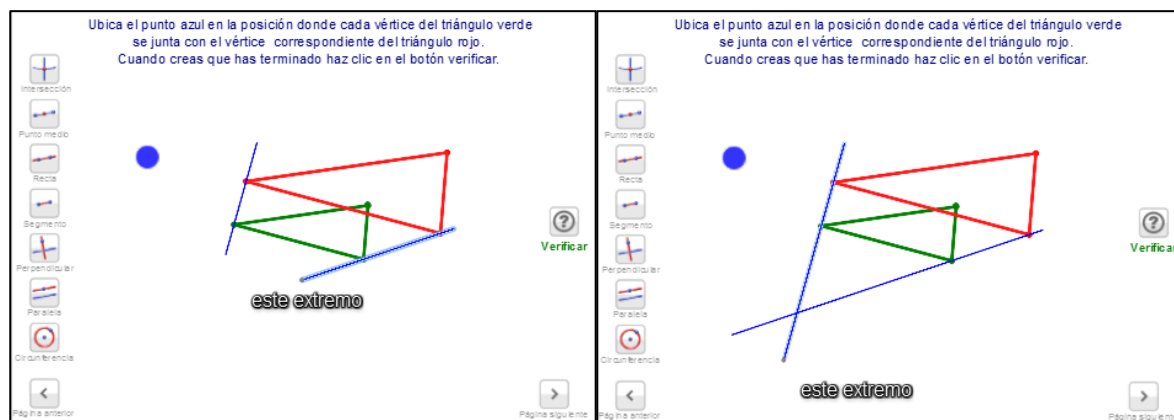


Figura 7.30 Intervención uso herramientas.

La única herramienta que permite resolver la tarea es la *recta*. Sin embargo, para evitar un efecto topacio, se ponen a disposición otras herramientas de construcción que el alumno podrá utilizar pero no le ayudarán a ubicar con precisión el centro de homotecia, por lo cual se espera que abandonen su uso.

También es necesaria la intervención del profesor para proponer el uso de las herramientas de construcción si los alumnos no las usan para garantizar la precisión exigida en la segunda parte de la tarea.

Análisis de la secuencia

Esperamos que al repetir la tarea con distintas configuraciones (razón y centro de homotecia distintos), en primer lugar los alumnos pasen de la percepción global de las figuras al reconocimiento puntual de las mismas e identifiquen con mayor facilidad los puntos homotéticos. En segundo lugar, que abandonen la estrategia de localizar el centro de homotecia mediante el uso perceptivo de la alineación y refuercen la formulación de la misma mediante el uso de la herramienta recta.

7.2 Actividad 2

Con esta actividad buscamos inicialmente que los alumnos reconozcan perceptivamente la proporcionalidad entre las distancias de cada pareja de figuras homotéticas y el centro, luego que la usen para anticipar perceptivamente la posición de una figura cuando su preimagen es llevada a otra posición.

La actividad está organizada en dos secuencias cuyo análisis describimos a continuación.

7.2.1 Primera secuencia

Deseamos que los alumnos reconozcan perceptivamente la proporcionalidad entre las distancias de cada par de figuras homotéticas y el centro, para lo cual proponemos una tarea que se repite cuatro veces con distintas razones de homotecia y posiciones del centro.

Diseño de la tarea

El objetivo de esta primera secuencia es que los alumnos constaten que una mayor distancia entre dos figuras homotéticas implica mayor distancia de ellas al centro; en otras palabras, entre más cerca están del centro, más cerca están entre ellas. Para propiciar esta constatación proponemos un dispositivo formado por dos pares de círculos unidos por un segmento de longitud fija, de manera que pueden arrastrarse a cualquier lugar de la pantalla conservando la distancia entre ellos. Los alumnos deberán acomodar este dispositivo y dos parejas de figuras homotéticas de manera que cada figura quede dentro de uno de los dos círculos.

Con el fin de que los alumnos identifiquen y tengan en cuenta el centro de homotecia, antes de empezar la secuencia proponemos una tarea en la que se pide a los alumnos meter en

un círculo dos pares de figuras homotéticas, de modo que superpongan todas las figuras en el centro de homotecia que quedará representado por un punto grande.

Descripción del medio y retroacciones

En la tarea de introducción se presenta la página que muestra la Figura 7.31.

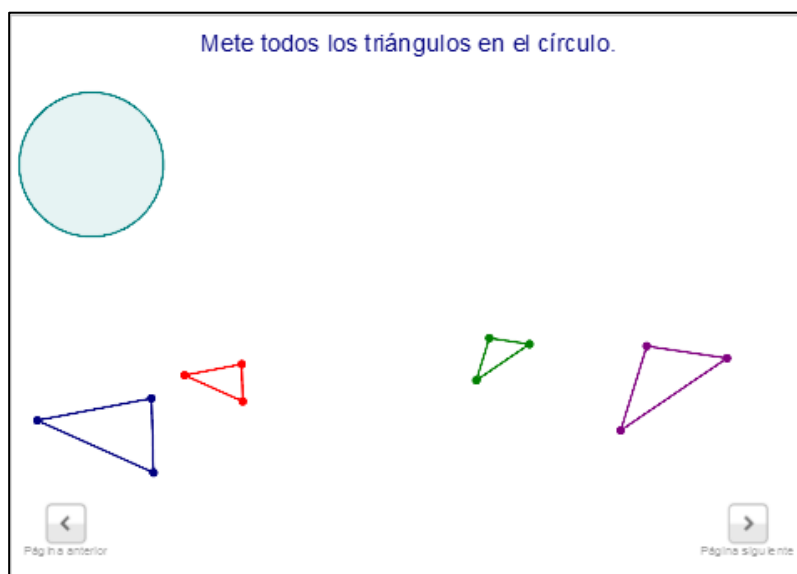


Figura 7.31 Tarea introducción.

Se muestran cuatro triángulos: dos pequeños y dos grandes, un círculo, la consigna “*Mete todos los triángulos en el círculo*” y dos botones: *Página anterior* y *Página siguiente*.

Los triángulos grandes son homotéticos de los triángulos pequeños con respecto a un punto que permanece oculto, los triángulos pequeños y el círculo se dejan arrastrar pero los triángulos grandes no se dejan arrastrar.

El botón *Página anterior* envía a la página de inicio y el botón *Página siguiente* muestra un letrero que dice: “*Aún no has resuelto la tarea*”.

Cuando el alumno mete todos los triángulos dentro del círculo, automáticamente se ocultan los triángulos y el círculo y aparece el botón *Continuar*, un punto negro titilante que

representa el centro de homotecia y un letrero que dice: “*En las siguientes tareas, este punto negro indicará la posición donde los triángulos se superponen*”. Ver Figura 7.32.

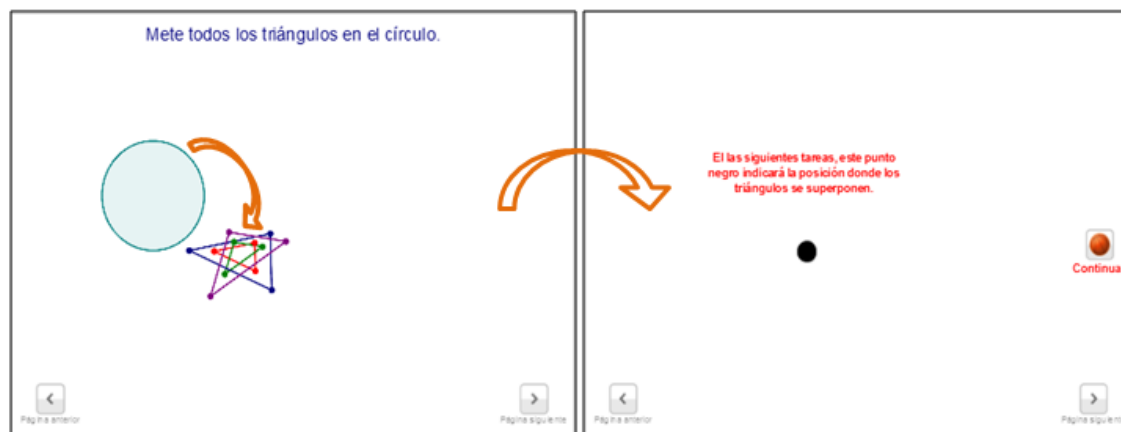


Figura 7.32 Tarea de introducción resuelta.

Al hacer clic en el botón *Continuar*, éste se oculta al igual que la consigna y el letrero, aparecen los triángulos nuevamente y habilita el paso a la página siguiente al hacer clic en el botón correspondiente. Ver Figura 7.33.

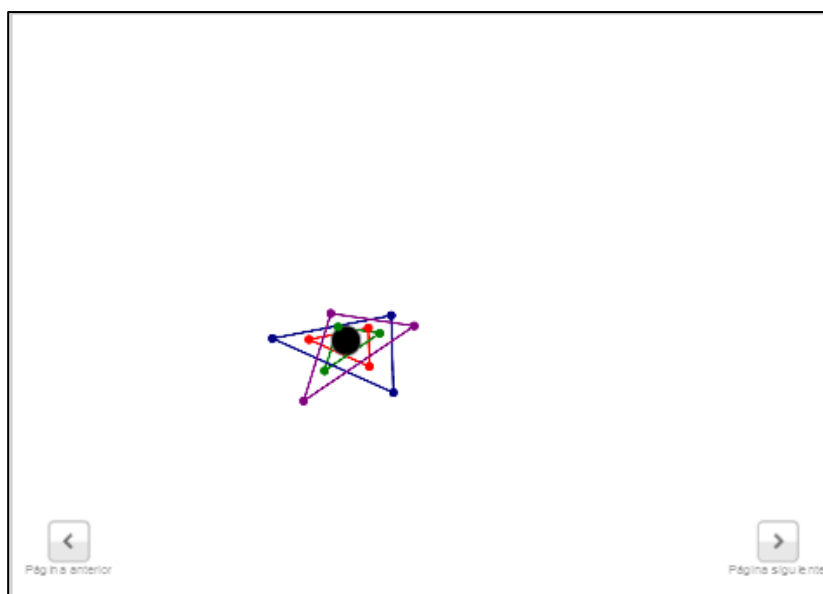


Figura 7.33 Retroacción botón continuar.

Al hacer clic en el botón *Página siguiente* se presenta la tarea principal, Ver Figura 7.34:

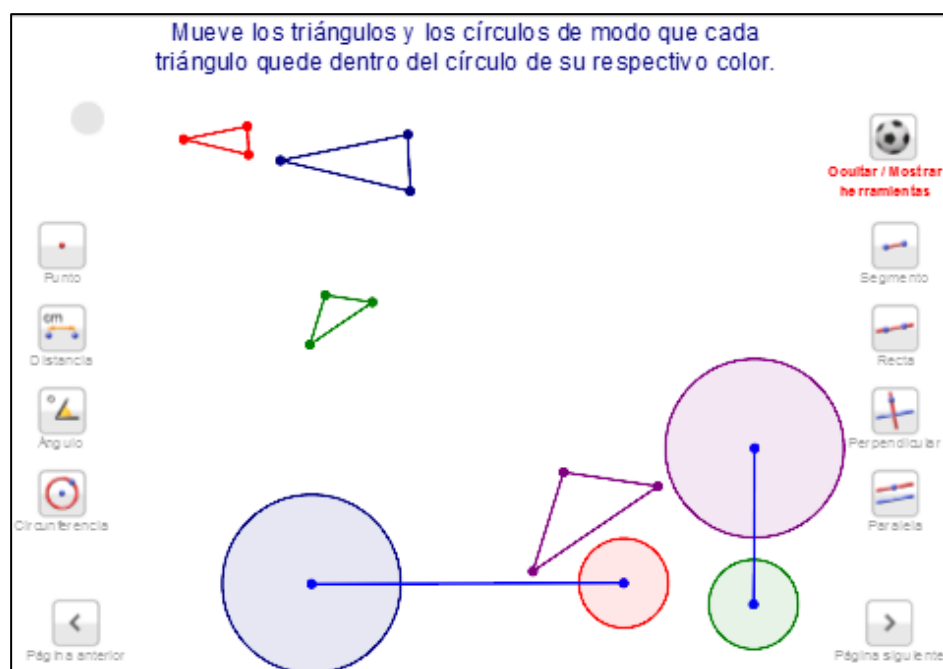


Figura 7.34 Tarea principal.

En la página se muestran cuatro triángulos y cuatro círculos: rojo, verde, azul y violeta; dos segmentos azules: el primero con extremos en los centros de los círculos azul y rojo, y el segundo con extremos en los centros de los círculos verde y violeta; un punto negro titilante; 8 herramientas de construcción: *Punto*, *Distancia*, *Ángulo*, *Circunferencia*, *Segmento*, *Recta*, *Recta perpendicular* y *Recta paralela*; la consigna “Mueve los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de su respectivo color” y tres botones: *Página anterior*, *Página siguiente* y *Ocultar/Mostrar herramientas*.

Los triángulos grandes son homotéticos de los pequeños con respecto al punto negro; los dos segmentos azules tienen longitudes fijas; los círculos pequeños se dejan arrastrar a cualquier parte de la pantalla, mientras que los círculos grandes se pueden arrastrar rotando alrededor de los círculos pequeños con los que están unidos.

El botón *Ocultar/Mostrar herramientas* muestra y oculta las herramientas de construcción.

Se puede ir a la página anterior haciendo clic en el botón correspondiente, mientras que el botón *Página siguiente* permite avanzar si la tarea ha sido resuelta, de lo contrario muestra el letrero que dice “*Algún triángulo no está dentro de su respectivo círculo*”, este letrero se oculta luego de 4 segundos.

Análisis de la tarea

Esperamos que mediante el arrastre los alumnos entiendan el funcionamiento del dispositivo de las parejas de círculos. Es probable que arrastren los círculos para superponerlos con los triángulos de su color y constaten que no es posible resolver la tarea arrastrando únicamente los círculos. Consideramos que tomarán conciencia de la necesidad de mover los triángulos hasta que la distancia entre ellos sea la distancia entre los círculos.

Mediante ajustes sucesivos de las distancias entre cada pareja de triángulos los alumnos podrán meterlos dentro de los círculos correspondientes y tomar conciencia de que cuando la distancia entre ellos disminuye, también disminuye la distancia al centro.

Como suponemos que en la actividad anterior los alumnos tomaron conciencia de la alineación de las parejas de figuras homotéticas con el centro, esperamos que arrastren los círculos hasta alinearlos con el centro.

Es posible que los alumnos utilicen la herramienta *Distancia* para medir la distancia entre los centros de cada pareja de círculos y entre puntos homotéticos. Estas medidas pueden ayudarles a encontrar la posición de los triángulos en la que podrán superponerlos a los círculos y por lo tanto se espera un refuerzo de esta estrategia. También es posible que los alumnos usen la herramienta *Recta* e incluso la herramienta *Segmento* para lograr la alineación de cada pareja de círculos con el centro de homotecia.

Por el contrario, el uso de las demás herramientas de construcción será abandonado ya que no contribuyen a la solución de la tarea.

Nuevamente es necesaria la intervención del profesor si observa que los alumnos tienen dificultades con el uso de las herramientas e indicarles cómo usarlas.

Análisis de la secuencia

Al repetir la tarea con distintas posiciones del centro y razones de homotecia, esperamos que los alumnos refuercen la acción de ajustar las distancias entre cada pareja de triángulos, acercándolos o alejándolos del centro de homotecia, hasta que sea la misma que hay entre los círculos, antes de arrastrar cada dispositivo. Es posible que los alumnos tomen conciencia de que razón de los tamaños de los triángulos homotéticos, es la misma razón entre las distancias de ellos al centro de homotecia. Por ejemplo: si un triángulo tiene el doble del tamaño del otro, entonces la distancia del primero al centro es el doble de la del segundo al centro.

7.2.2 Segunda secuencia

Con esta secuencia buscamos que los alumnos anticipen la posición de una figura dado el centro y la posición de la preimagen. En otras palabras, que utilicen los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores sobre la alineación de las figuras homotéticas y el centro, y la razón de las distancias del centro a un par de figuras homotéticas.

Diseño de la tarea

Necesitamos que los alumnos anticipen la posición de una figura homotética teniendo en cuenta el centro y la posición de su preimagen. Por lo tanto proponemos una figura con el centro de homotecia, dos pares de triángulos homotéticos, dos círculos fijos y dos círculos

móviles y les pedimos ubicar los dos círculos móviles en la posición donde quedarán los triángulos imágenes, cuando sus preimágenes sean llevadas a los círculos.

Para lograr que los alumnos anticipen la posición donde deben ubicar los círculos móviles debemos bloquear la estrategia de ajustes sucesivos. Este bloqueo se logra impidiendo el movimiento de los triángulos. Sin embargo, para que los alumnos puedan validar su solución, debemos permitir que intenten meter los triángulos dentro de los círculos. Por esta razón separamos la tarea en dos momentos: en un primer momento, los alumnos deberán ubicar los dos círculos en la posición donde quedarán los triángulos, pero no podrán arrastrar los triángulos; en un segundo momento podrán arrastrar los triángulos para meterlos dentro de los círculos correspondientes, pero no podrán desplazar los círculos. En caso de que los alumnos invaliden la solución, debemos impedir que ubiquen los círculos memorizando la posición de los mismos. Para ello programamos la tarea de modo que cuando decidan volver a intentarlo, cambie la posición de los círculos que permanecen fijos.

Además, para que los alumnos puedan establecer la alineación de los círculos con el centro y determinar las distancias que deben usar para resolver la tarea, les ofrecemos las herramientas *Recta* y *Distancia*. Para evitar un efecto topacio también mostramos otras herramientas que no son útiles para resolver la tarea.

Descripción del medio y retroacciones

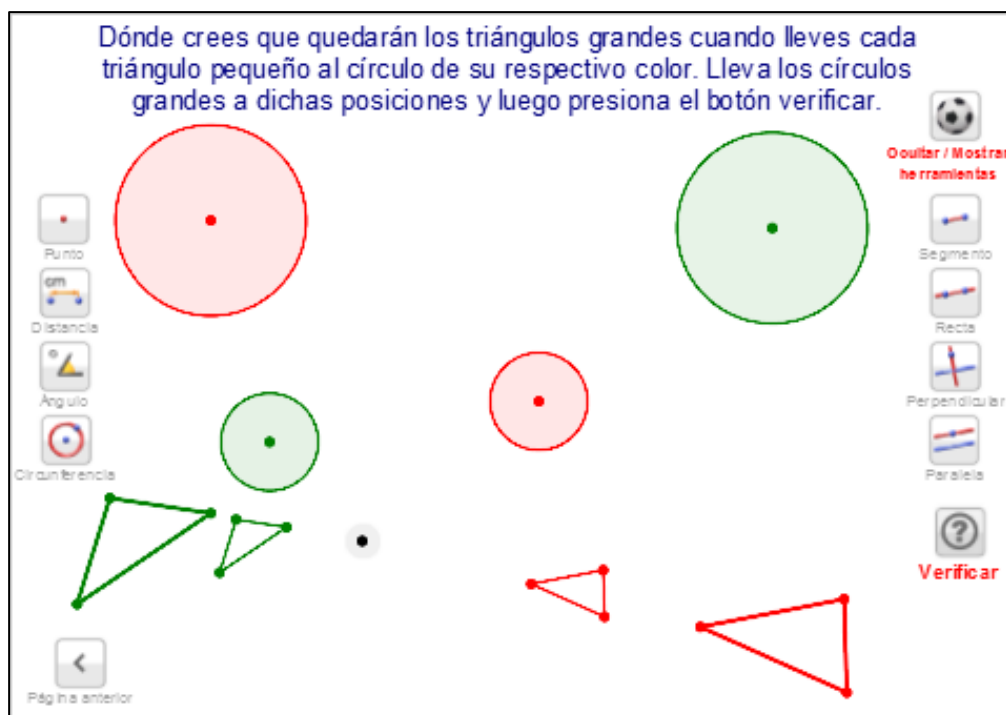


Figura 7.35 Tarea de anticipación.

En la Figura 7.35 se muestran dos parejas de triángulos homotéticos con respecto al punto negro que permanece visible y titilante, una pareja de color rojo y otra verde; dos parejas de círculos: una roja y otra verde; 8 herramientas de construcción: *Punto*, *Distancia*, *Ángulo*, *Circunferencia*, *Segmento*, *Recta*, *Recta perpendicular* y *Recta paralela*; tres botones: *Verificar*, *Página anterior* y *Ocultar/Mostrar herramientas* y la consigna “¿Dónde crees que quedarán los triángulos grandes cuando lleves cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color? Lleva los círculos grandes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar”.

Los círculos imagen se dejan arrastrar, mientras que los círculos preimagen, los triángulos y el punto negro están fijos.

Se pueden ocultar y mostrar las herramientas haciendo clic en el botón correspondiente.

Al hacer clic en el botón *Verificar* este se oculta, se bloquea el desplazamiento de los círculos, se libera el arrastre de los triángulos, cambia la consigna por: “*Ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color*” y aparece el botón *Volver a intentarlo*. Ver Figura 7.36.

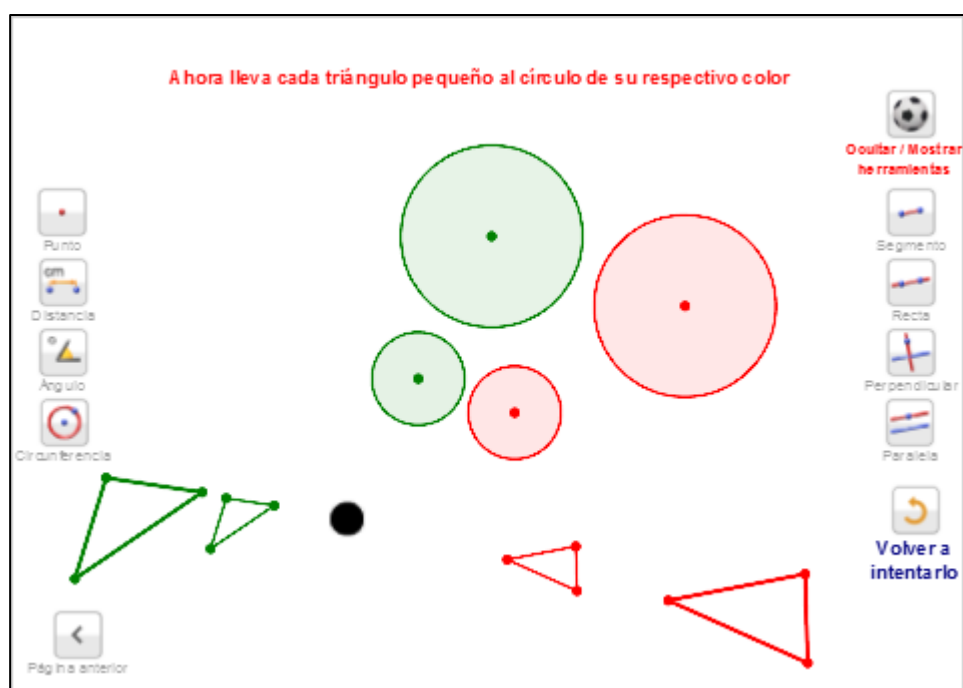


Figura 7.36 Retroacción asociada al botón verificar.

Si los círculos grandes están ubicados en las posiciones correctas, cuando el alumno meta los triángulos dentro de los círculos correspondientes, se oculta el botón *Volver a intentarlo* y se muestra el botón *Página siguiente*. Ver Figura 7.37.

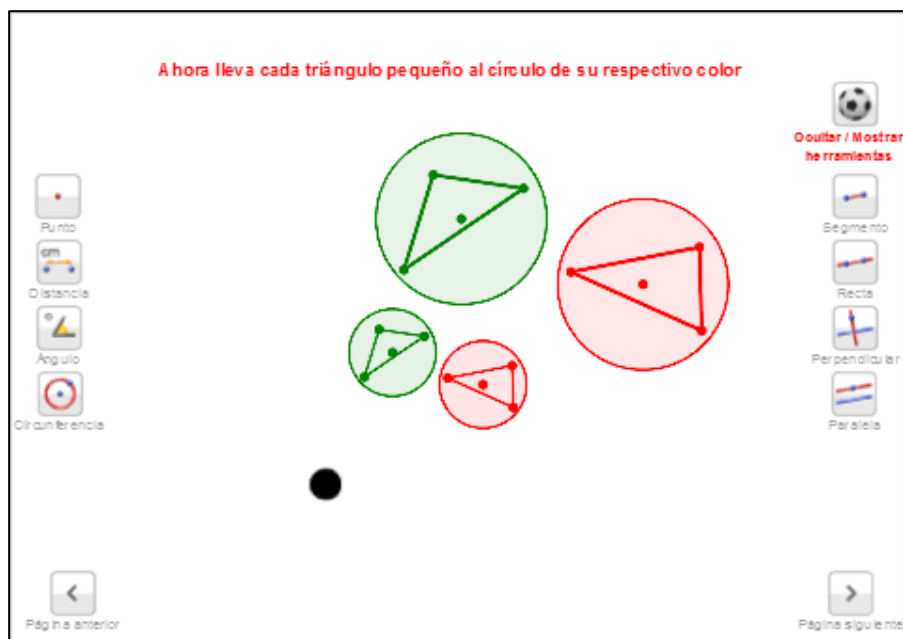


Figura 7.37 Tarea resuelta.

Si los círculos no están ubicados en la posición correcta, el botón volver a intentarlo permanece. Ver Figura 7.38.

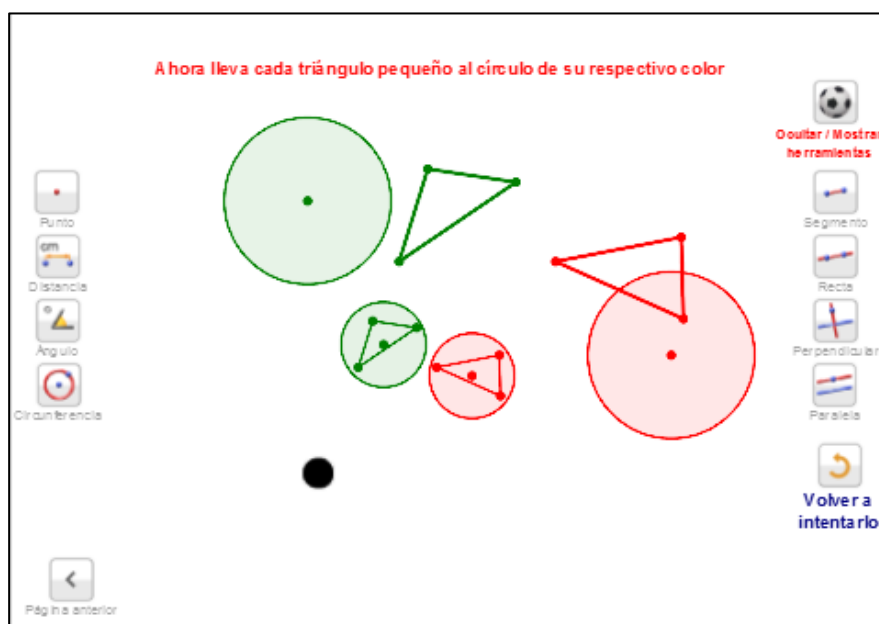


Figura 7.38 Tarea no resuelta.

Si los alumnos hacen clic en el botón *Volver a intentarlo* la tarea se reinicia, los triángulos y los círculos imagen vuelven a las posiciones iniciales, mientras que los círculos preimagen cambian de posición. Ver Figura 7.39.

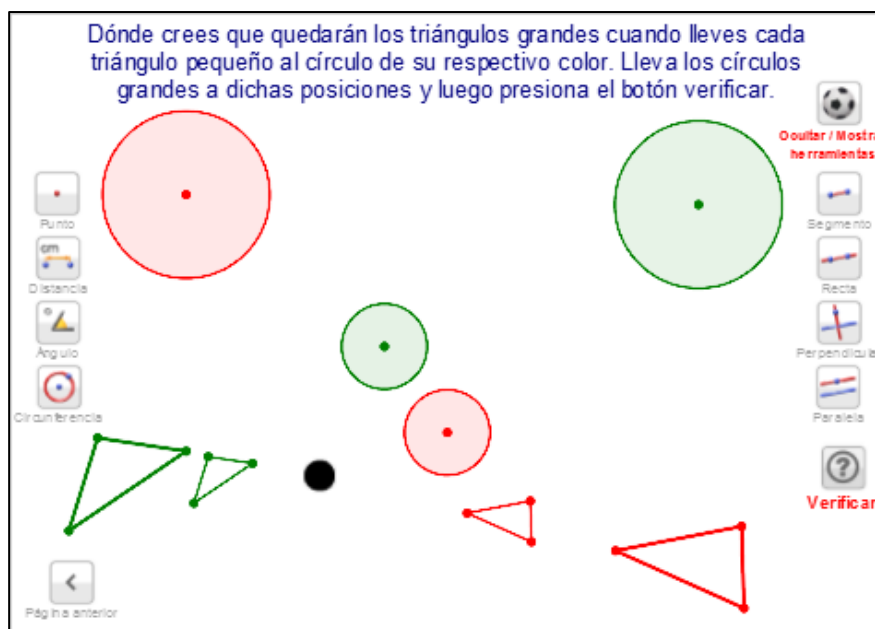


Figura 7.39 Retroacción botón volver a intentarlo.

Análisis de la tarea

Es probable que los alumnos inicialmente intenten arrastrar los triángulos o los círculos preimagen para que los triángulos queden dentro de los círculos correspondientes. Como los triángulos y los círculos preimagen no se dejan arrastrar, abandonarán esta estrategia tomando conciencia de la necesidad de ubicar los círculos imagen sin arrastrar los triángulos.

También es factible que los alumnos en los primeros intentos ubiquen los círculos al azar sin tener en cuenta ninguna relación con los triángulos y el centro de homotecia. Esta estrategia será invalidada al verificar su solución y por lo tanto la abandonarán. Si intentan memorizar la posición donde debían ubicar los círculos, invalidarán la estrategia al constatar que éstos cambian de posición cada vez que hacen clic en el botón volver a intentarlo.

Es posible que los alumnos supongan que el movimiento que hace el triángulo imagen es el mismo que hace el triángulo preimagen, es decir que si se traslada el triángulo pre imagen, su pareja se traslada con la misma magnitud y sentido, por lo tanto podrían intentar ubicar el círculo teniendo en cuenta este supuesto (ver Figura 7.40). Como esta estrategia no garantiza la alineación de los triángulos con el centro de homotecia, la invalidarán al presionar el botón *Verificar* y constatar que los triángulos no quedan dentro de los círculos correspondientes.

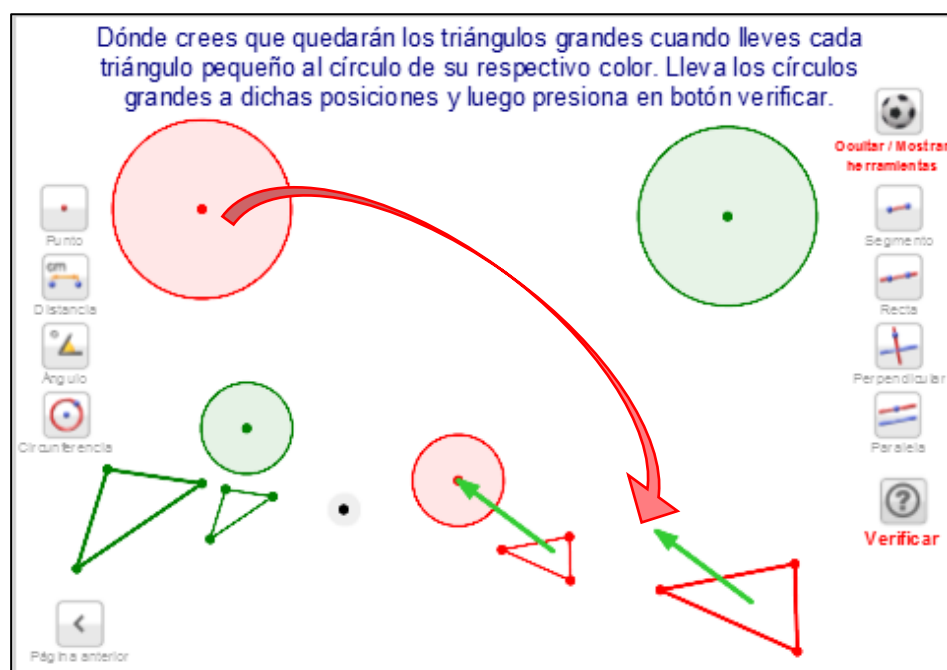


Figura 7.40 La traslación como estrategia de solución.

Como suponemos que los alumnos al desarrollar la actividad 1 tomaron conciencia de la alineación de cada pareja de figuras homotéticas con el centro, es posible que ubiquen cada pareja de círculos alineados con el centro pero que no consideren la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada triángulo y su pareja al centro. Esperamos que refuercen la estrategia de garantizar la alineación al validarla cuando intenten verificar y tomen conciencia de la necesidad considerar las distancias de los triángulos al centro de

homotecia. La alineación podrían intentar garantizarla perceptivamente o usando la herramienta recta.

Es posible que los alumnos midan las distancias entre una pareja de triángulos homotéticos y las distancias entre la pareja de círculos correspondientes y arrastren el círculo hasta que esas distancias sean iguales. Esta estrategia no necesariamente garantiza la solución del problema puesto que al arrastrar los triángulos, la distancia entre ellos cambia. Cuando verifiquen la solución se darán cuenta que los triángulos no quedan dentro de los círculos correspondientes.

Otra estrategia que podrían usar los alumnos tener en cuenta la relación de proporcionalidad entre las distancias de un triángulo y su homotético al centro para ubicar cada círculo pero sin tener en cuenta la alineación de los círculos con el centro de homotecia, esta estrategia también será invalidada al intentar meter todos los triángulo dentro de los círculos correspondientes y ver que no es posible, luego de presionar el botón *Verificar*.

Finalmente esperamos que los alumnos usen la única estrategia que permite resolver la tarea, que consiste en garantizar la alineación de cada pareja de círculos con el centro y la relación de proporcionalidad entre las distancias de cada pareja de triángulos y de los círculos correspondientes al centro de homotecia. Al verificar podrán meter los triángulos dentro de los círculos correspondientes y reforzarán esta estrategia.

Análisis de la secuencia.

Esperamos que al enfrentarse a las diferentes configuraciones con razones y centros de homotecia diferentes, los alumnos abandonen las estrategias donde consideran sólo la alineación o sólo la proporcionalidad o ninguna de estas. También esperamos que refuercen la estrategia de usar ambas propiedades para resolver la tarea y que identifiquen con mayor

facilidad, con o sin ayuda de la herramienta distancia la razón de homotecia en cada configuración.

8. Análisis a posteriori

En este capítulo contrastamos las hipótesis planteadas en el análisis a priori con los resultados obtenidos de la experimentación de las actividades con una de alumnos de noveno grado de la Institución Educativa las Américas de Bucaramanga. Estos alumnos habían usado previamente el software de geometría dinámica Cabri II, de modo que conocen algunas herramientas básicas de construcción. La recolección de los datos se realizó grabando la pantalla del computador y el audio.

Los resultados de la experimentación los exponemos mediante tablas de cuatro columnas, la primera para enumerar, la segunda para indicar el sujeto que ejecuta la acción (E1, E2 y P para indicar a los dos alumnos y al profesor respectivamente), la tercera para explicitar lo que el sujeto dice o hace (en esta columna usaremos la siguiente convención: si el texto aparece sin paréntesis, indica que es dicho por el sujeto, si aparece entre paréntesis redondos “()” indica que es algo que se observa en el video pero que no es dicho, por último, en los casos en los que no se entiende lo que sucedió y es necesaria una interpretación para exponerlo, el texto aparece entre paréntesis cuadrados “[]”), eventualmente en la cuarta columna aparece una o más imágenes cuando sean necesarias para aclarar.

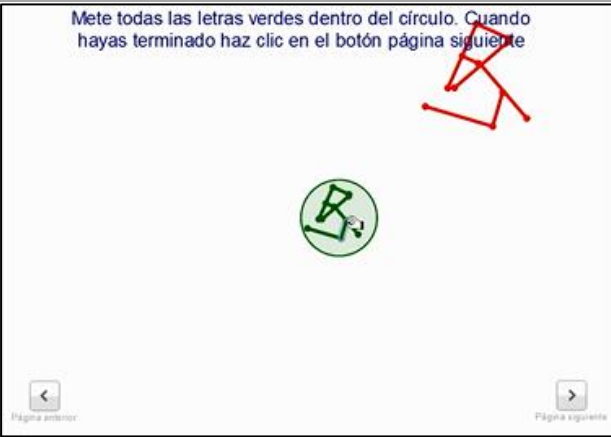
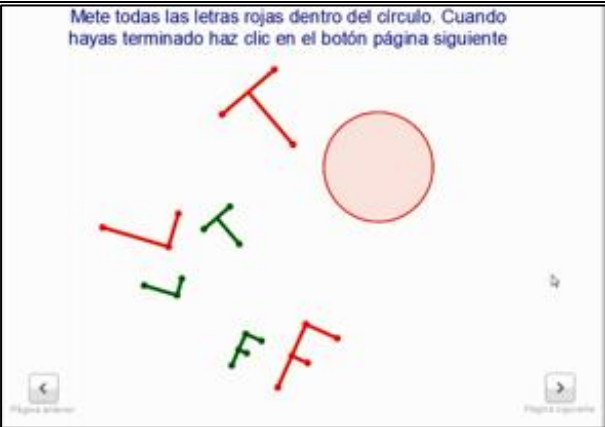
8.1 Actividad 1

A continuación presentamos el análisis y los soportes de cada una de las tres secuencias de la primera actividad. Los soportes presentados no corresponden a la transcripción completa, sugerimos al lector revisar las transcripciones completas en el capítulo anexos, en caso de requerir una lectura más detallada de los datos.

8.1.1 Primera secuencia

En primer lugar presentamos los datos que soportan el análisis se hace a continuación de ellos.

Tabla 1 Datos primera secuencia primera actividad.

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E1	[lee la consigna] Mete todas las letras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente. ¿Con cuál empezamos? Empecemos con la T (arrastra la letra T verde hacia el círculo). Ahora esta (arrastra la letra F verde hacia el círculo). (Mete la letra L verde dentro del círculo). ¿La dejamos así?	
4	E2	[lee la consigna] Mete todas las letras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente. Es lo mismo (intenta arrastrar varias veces la letra T roja sin lograrlo).	

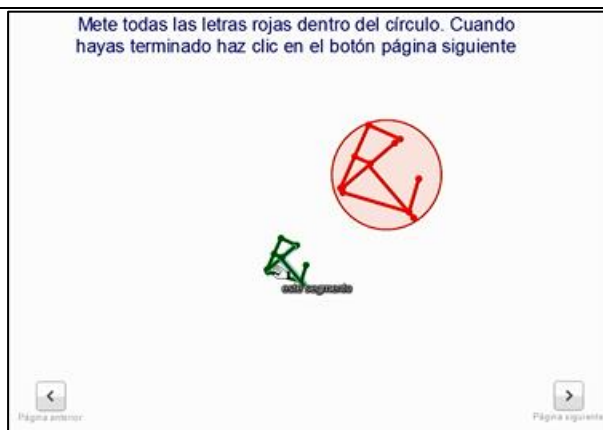
5 E1 Meta la F.

6 E2 Pero son las letras rojas (intenta arrastrar la letra F roja).

¿Cómo la agarro?

7 E1 ¡Ah! ¡Mire! ¡Así! (toma el ratón y arrastra la T verde).

8 E2 ¡Ah! ¡Ya! (arrastra una a una las letras verdes hasta que las rojas quedan dentro del círculo y luego hace clic en el botón *Página siguiente*, pasa a la tercera tarea y cede el ratón al compañero).



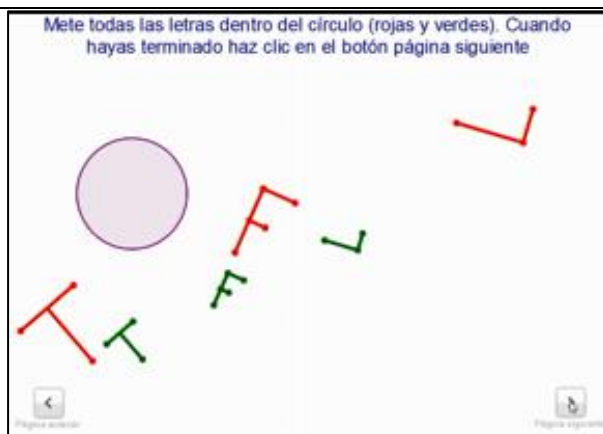
9 E1 [lee la consigna] Mete todas las letras dentro del círculo (verdes y rojas). Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente.

(Arrastra cada letra verde hasta que las rojas quedan dentro del círculo y las verdes quedan por fuera).

¿Y ahora qué? ¿Y las verdes?

(arrastra las letras verdes hacia el círculo).

No entran (vuelve a meter las



letras rojas arrastrando las
verdes hacia fuera del círculo
y vuelve a leer la consigna).

10	E2	¡Haga otro círculo!
11	E1	Pero cómo se hace otro círculo, no hay instrucciones. (Intenta arrastrar el círculo sin lograrlo).
12	E2	¿Se puede agrandar el círculo?
13	E1	No se puede (vuelve a intentar arrastrar el círculo).
14	E2	¡Ah vea! (toma el ratón y arrastra la letra F verde y la junta con la F roja).
15	E1	El círculo debería estar por acá (señala la posición donde su compañera juntó las letras F).
16	E2	Es que tienen una distancia. (Mete las letras verdes dentro del círculo y las rojas quedan por fuera). ¿No podemos dejarla así? Es que no se puede.
17	P	¡No sé! Como ustedes quieran.
18	E2	Vamos a continuar (hace clic en el botón <i>Página siguiente</i>). [lee el letrero emergente] No has resuelto la tarea, ¿deseas continuar? Digámosle sí (aparece el recuadro donde deben justificar porqué desean avanzar sin resolver la tarea).



19 P ¿Por qué no se puede resolver la tarea?

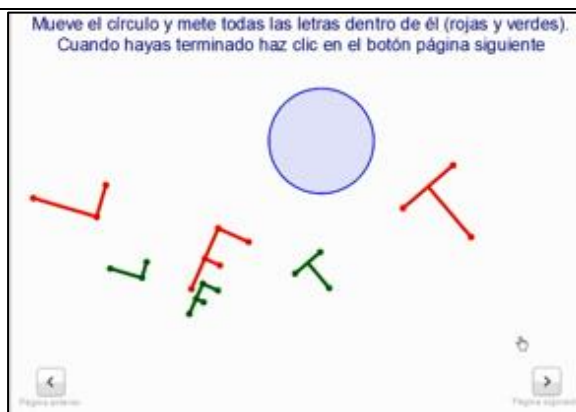
20 E1 Porque las letras tenían como un espacio y no se podían igualar.

21 E2 (Escribe en el recuadro: “No se pudo realizar la tarea porque la letra verde la que dirigía a la roja tenía una distancia que no las dejaban juntar en el círculo”).

22 E1 ¡Ya!, haga clic en *Página siguiente*.

23 E2 (Hace clic en el botón *Página siguiente* y pasa a la cuarta tarea).

[Lee la consigna y cede el ratón al compañero] Mueve el círculo y mete todas las letras dentro de él (rojas y verdes). Cuando hayas terminado haz clic en el botón *página siguiente*.



24 E1 (Arrastra el círculo).

¡Ah! ¡Esta sí se puede! (Suelta el círculo y junta todas las letras arrastrando una a una las letras verdes, luego arrastra el círculo hasta que las letras quedan dentro de él).

30 E1 [lee la consigna] Mete todos los triángulos rojos dentro del círculo...

31 E2 (Intenta arrastrar los triángulos rojos sin lograrlo).

32 E1 Arrastre los verdes, ¡recuerde!

33 E2 ¡Ah! ¡Claro! (Arrastra los triángulos verdes hasta que los rojos quedan dentro del círculo, hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra la tercera tarea).

34	E1	[lee la consigna] Mete todos los triángulos...
35	E2	(Arrastra los triángulos verdes y los mete dentro del círculo y los rojos quedan por fuera). ¡Esta tampoco se puede por lo mismo de la anterior!
36	P	Entonces continúe y diga que no se puede por lo mismo de la anterior.
37	E2	(Hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> , aparece el letrero que dice “no has resuelto la tarea, deseas continuar” y escoge la opción <i>Sí</i> . Aparece el cuadro de texto para justificar y escribe: “no se puede por lo mismo de la anterior”. Luego hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> y pasa a la cuarta tarea). (Junta los triángulos verdes y los rojos quedan juntos en otra posición)
38	E1	No, busque una posición donde queden todos juntos.
39	E2	Arrastra los triángulos verdes hasta superponerlos con los rojos y luego arrastra el círculo a dicha posición. (Hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> y pasa a la primera tarea con razón de homotecia menor que cero y otra posición del centro).
40	E1	(Rápidamente resuelve la primera tarea arrastrando las figuras verdes hacia el círculo, luego pasa a la segunda tarea y arrastra directamente las figuras verdes para meter las rojas dentro del círculo, en la tercera tarea arrastra una figura verde y la superpone con su pareja y estas quedan fuera del círculo, inmediatamente hace clic en el botón <i>página siguiente</i>). Esta tampoco se puede como en las anteriores (escribe en el recuadro: “no se puede por lo mismo de la anterior” y hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> nuevamente). (Pasa a la cuarta tarea, arrastra las letras verdes y las junta con las rojas. Luego

arrastra el círculo a dicha posición y hace clic en el botón *Página siguiente* y cede el ratón a su compañera. Se muestra nuevamente la primera tarea con otra razón y centro de homotecia).

41 E2 ¡Pues es hacer lo mismo!

(Arrastra los triángulos verdes hacia el círculo y hace clic en el botón *Página siguiente*. Pasa a la segunda tarea y arrastra los triángulos verdes para meter los rojos dentro del círculo. Pasa a la tercera tarea donde junta una pareja de triángulos).

Se juntan acá, pero igual no se puede mover el círculo.

(Hace clic en el botón *Página siguiente* y escribe en el recuadro: “no se puede aunque esta vez las figuras quedan más cerca del círculo” y hace clic en el botón *Página siguiente*).

(Pasa a la cuarta tarea, arrastra las letras verdes y las junta con las rojas. Luego arrastra el círculo a dicha posición y hace clic en el botón *Página siguiente*).

44 P ¿Encontraron alguna diferencia entre las tareas?

45 E2 ¡Sí, Obvio! Las figuras cambiaban.

46 E1 Sí, en la primera eran letras y en las otras triángulos y otras figuras.

47 P ¿Y no había más diferencias?

48 E1 Pues no sé, creo que no.

49 P Vaya a la página anterior.

50 E1 (Hace clic en el botón *página anterior* y aparece como había quedado previamente).

51 P Arrastre un triángulo.

52 E1 (Arrastra un triángulo verde por la pantalla).

53 P Ahora vaya a la página anterior.

54 E1 ¡Ah ya! Que en esta cuando uno mueve una figura la otra se va para el otro lado, mientras que en las otras cuando se movía una la otra la iba persiguiendo. ¡Mire y verá! (hace clic en el botón página anterior varias veces hasta llegar a la segunda serie donde la razón de homotecia es mayor que cero).
(Arrastra un triángulo verde) Mire cómo el rojo viene siguiéndolo, mientras que en las demás si usted mueve la verde hacia acá, la roja se va hacia el otro lado.

Análisis de las tareas

Observamos que el alumno no tuvo ninguna dificultad para resolver la primera tarea, y como lo habíamos previsto, arrastró las letras verdes y las metió en el círculo (1).

El alumno 2 considera que la segunda tarea es la misma y que sólo basta arrastrar las letras rojas, lo intenta y no lo logra. Con la ayuda de su compañero quien le sugiere arrastrar las letras verdes, toman conciencia de que deben arrastrar las letras verdes para poder mover las rojas, por lo que consiguen resolver la tarea sin dificultades. Esto corresponde a lo que esperábamos (4-8).

En la tercera tarea constatamos lo que habíamos previsto, el alumno mete las letras verdes en el círculo y las rojas quedan por fuera, luego mete las rojas y las verdes quedan por fuera. Intenta arrastrar el círculo y observa que éste no se deja arrastrar ni cambiar de tamaño. Luego de arrastrar las letras por toda la pantalla entiende que la tarea no se puede resolver: “¿No podemos dejarla así? Es que no se puede” y deciden continuar sin resolverla (9-17).

Del renglón 18 al 22 se observa que los alumnos decidieron continuar sin haber resuelto la tarea y justificaron por qué no era posible resolverla. En la justificación se observa que tomaron conciencia de la imposibilidad de juntar las letras en cualquier lugar de la pantalla y que hay una distancia entre ellas que varía al arrastrarlas: *“No se pudo realizar la tarea porque la letra verde la que dirigía a la roja tenía una distancia que no las dejaban juntar en el círculo”*.

En los renglones 23,24, 37, 38, 40 y 41 observamos que los alumnos reconocen que las figuras se juntan en alguna posición de la pantalla y la encuentran perceptivamente arrastrando una figura verde hasta que se junte con su pareja. Sin embargo no hay evidencias de que tomen conciencia de la unicidad de dicha posición. En este caso el profesor pudo intervenir y proponer meter todas las figuras dentro del círculo en otra posición de la pantalla.

Análisis de la secuencia

Al avanzar en las tareas, observamos que los alumnos abandonan la estrategia de intentar arrastrar las figuras rojas y refuerzan la acción de arrastrar las verdes para mover las rojas, tomando conciencia de la dependencia entre ellas (7-9, 21, 24, 32).

Al repetir las tareas con distinta razón y posición del centro de homotecia, observamos que los alumnos en la tercera tarea abandonan la acción de intentar meter las letras dentro del círculo y refuerzan la acción de hacer clic en el botón *Página siguiente* sin resolver la tarea, dado que no se puede resolver. (35, 40 y 41).

Al finalizar, cuando el profesor pregunta a los alumnos si encontraron alguna diferencia entre las tareas (44-54), el estudiante 1 da cuenta de dos tipos de movimientos relativos entre una figura y su homotética, que corresponden a los fenómenos visuales de las razones mayor y menor que cero: *“Que en esta cuando uno mueve una figura la otra se va para el otro lado,*

mientras que en las otras cuando se movía una la otra la iba persiguiendo. ¡Mire y verá!”
(54).

Análisis de las retroacciones didácticas

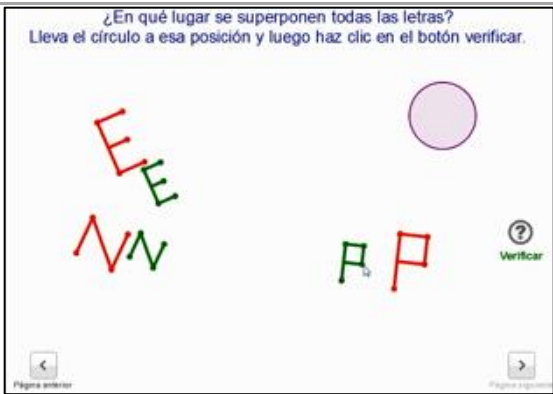
En las tres primeras tareas el círculo no se dejaba arrastrar. Esta retroacción didáctica permitió que los alumnos tomaran conciencia de que sólo hay un lugar en la pantalla donde las figuras se juntan. Cuando se pidió a los alumnos meter todas las letras en el círculo, juntaron las letras en el centro de homotecia y propusieron: *“El círculo debería estar por acá”* (15).

La retroacción didáctica de evaluación que se ejecuta cuando los alumnos deciden continuar sin haber resuelto la tarea, funcionó como esperábamos. Los alumnos decidieron avanzar sin resolver la tarea sólo cuando ésta era imposible y cuando apareció por primera vez el letrero: *“No has resuelto la tarea, ¿deseas continuar?”* junto a las opciones Sí y No (18), los alumnos decidieron escoger la opción Sí puesto que eran conscientes de que no habían resuelto la tarea y de su imposibilidad: *“Es que tienen una distancia. ¿No podemos dejarla así? Es que no se puede”* (16). Una vez que se mostró el cuadro de texto donde se les pedía justificar por qué deseaban continuar sin resolver la tarea, escribieron sus argumentos e hicieron clic en el botón *Página siguiente*. Es decir, la retroacción didáctica no interrumpió la interacción del alumno con el medio y promovió la formulación.

8.1.2 Segunda secuencia

En primer lugar presentamos los datos que soportan el análisis se hace a continuación de ellos.

Tabla 2 Datos segunda secuencia primera actividad.

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E2	[lee la consigna] ¿En qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar. ¿O sea en qué lugar se juntan? [En este momento sólo el círculo se deja arrastrar].	
2	P	Sí.	
3	E1	(Intenta arrastrar las letras verdes y las letras rojas sin lograrlo). Acá no puedo mover ninguna. (Arrastra el círculo hasta la P roja). ¡Pero no puedo mover ninguna letra!	
4	E2	Intente agrandar el círculo.	
5	E1	No se puede (arrastra el círculo).	

6	P	¿De qué se trata la tarea?
7	E1	Saber dónde se juntan las letras, pero ninguna se puede mover.
8	P	¿Y dónde se juntan?
9	E1	No se juntan porque no se pueden mover.
10	P	¿En las tareas anteriores no se juntaban las letras?
11	E1	Sí pero las letras se dejaban mover.
12	P	Si pudieran mover las letras dónde se juntarían, ubique el círculo en esa posición.
13	E1	Se juntarían en cualquier parte.
14	P	Entonces ubique el círculo en cualquier parte y presione verificar.
15	E2	¡En la mitad! ¿Se acuerda que la verde seguía a la roja y se unían?
16	E1	(Ubica el círculo y presiona el botón verificar). [Una vez que el alumno presiona el botón <i>Verificar</i>, éste se cambia por el botón <i>Continuar</i>, cambia la consigna, las letras verdes se pueden arrastrar y el círculo se bloquea].
17	E1	[Lee la consigna] Ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón continuar. (Arrastra las letras verdes).
18	E2	¡Ah! Ahora sí se dejan arrastrar.

- 19 E1 (Arrastra la P verde y la superpone con su pareja, luego intenta arrastrar el círculo sin lograrlo).

¿Y entonces acá qué hacemos?

¿Por qué ya no puedo mover el círculo?



- 20 E2 Haga clic en *Continuar*.

- 21 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y aparece lo que se muestra en la imagen, donde el letrero: “¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!”, los puntos notables de las letras y el círculo titilan).



- 22 E1 [Lee el texto] Algunas letras no están dentro del círculo.
(Intenta arrastrar las letras y el círculo sin conseguirlo).

- 23 P Haga clic en el botón *Volver a intentarlo*.

- 24 E1 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y se reinicia la tarea con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes retornan a la posición inicial, también aparece el botón *Ayuda*).



¡Ah! ¡Ya entendí!

25 E2 O sea no hay necesidad de hacerlo en ese círculo, sino formarlo con las letras.

¡Ah! ¡Mire! Pida ayuda.

26 E1 (Hace clic en el botón *Ayuda* y aparece la página que se muestra en la imagen).

[Lee la consigna] Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras.

A continuación te proponemos una tarea de ayuda (hace clic en el botón *Página siguiente* y aparece la tarea de ayuda).



27 E1 [En esta tarea de ayuda los círculos rojos y las letras rojas no se dejan arrastrar, los demás objetos sí].

[Lee la consigna] Mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón continuar.



- 28 E1 (Arrastra la letra *E* verde y la junta con la letra *E* roja, lleva el círculo azul a dicha posición).



- 30 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y aparece otra consigna).

[La pareja de letras *E* y el círculo azul quedan fijos, mientras que los círculos verdes y las letras *N* y *P* verdes se pueden arrastrar].

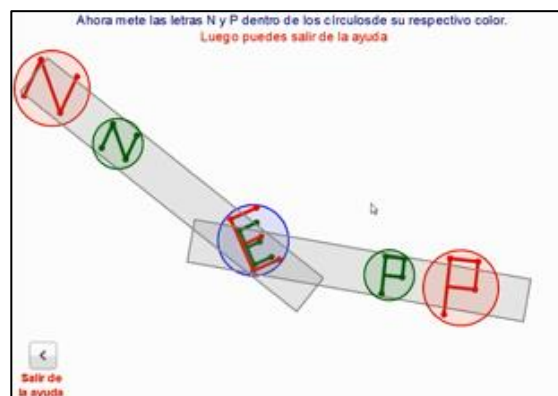


- 34 E1 No porque el rojo no puede estar ahí.

(arrastra la letra *N* verde por la pantalla, luego la suelta y arrastra la letra *P* verde hasta que su pareja queda dentro del círculo correspondiente, luego arrastra un círculo verde hasta la *P* verde. Después hace lo mismo con las letras *N*).

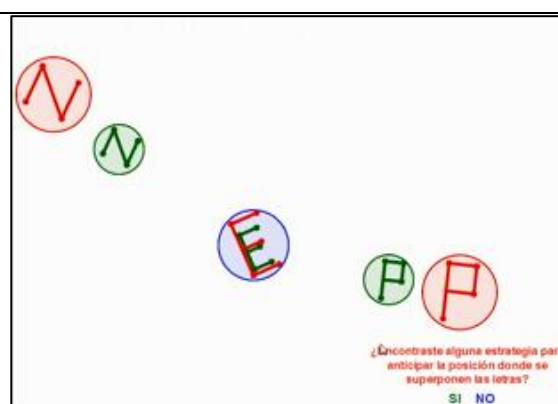


- 36 E1 (El alumno pone el círculo verde sobre la letra N correspondiente y aparecen 2 bandas grises como se muestra en la imagen. Las bandas grises desaparecen luego de 4 segundos).



- 37 E2 ¿Y eso qué fue?

- 38 E1 Es una ayuda. Es que cuando usted mueve la letra verde hacia allá, las dos se mueven en diagonal [Pasa el cursor sobre la pantalla, desde la letra E superpuestas hasta la letra N roja, pasando por la N verde].



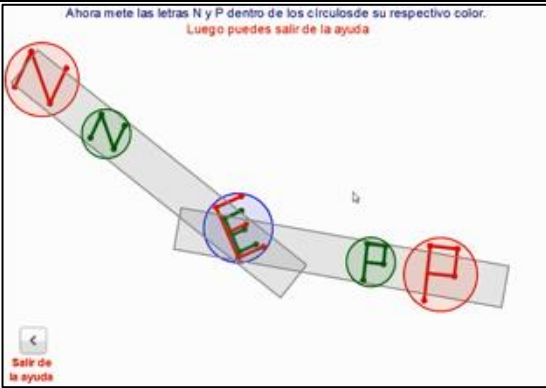
(Hace clic en el botón *Salir de la ayuda* y aparece un letrero que dice: “¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?” y las opciones *Sí* y *No*).

- 39 P Lea primero [el profesor interrumpe al alumno al ver que intenta hacer clic en la opción *Sí* antes de leer el mensaje].

- 40 E1 [Lee la pregunta] ¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?] (se detiene un momento).

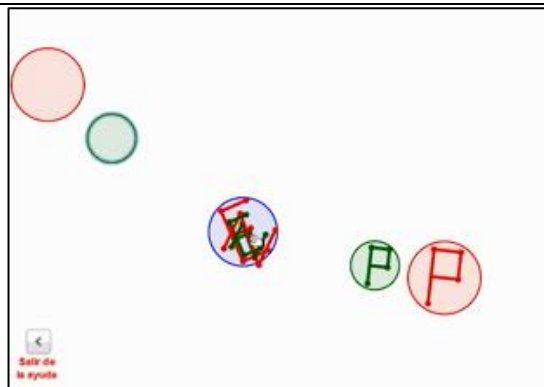
(Hace clic en la opción *Sí* y vuelve a la tarea).

[La tarea de anticipación se reinicia, la posición del centro de homotecia cambia y se muestra el botón *Volver a la ayuda*].

41	E2	Ahora haga la tarea	
42	E1	¡Vea! Esta letra puede estar allá, esta otra puede estar allá y esta puede estar allá (Señala con el cursor desde cada letra roja hasta la posición que se indica en la imagen, con la flecha de color naranja) [El alumno intenta indicar la posición donde se juntarían las letras si pudiera arrastrarlas]	
43	P	¿Cómo lo sabe?	
44	E1	Porque...	
45	E2	¡Vuelva a la ayuda!	
46	E1	Pues sí, vayamos a la ayuda otra vez (hace clic en el botón correspondiente y lo envía nuevamente a la tarea de ayuda que permanece resuelta). (Nuevamente aparecen las bandas grises por 4 segundos).	

¡Mire! La N hacia allá, la P hacia
allá (señala con el cursor en la
dirección de las bandas).

47	E2	Siempre hay una que se une. ¿No?
48	P	¿Sólo una?
49	E1	No, las otras también (arrastra la letra N verde y la superpone con su pareja). (Luego arrastra la letra N verde hacia el círculo correspondiente) ¿Si ve? Esta siempre se mueve hacia arriba y se va...)
50	E2	[Interrumpe a su compañero] Y se unen en un solo punto.
51	E1	Sí, en el medio (arrastra la letra N verde por la pantalla). ¡Mire! Está aquí y se va juntando con la roja en la mitad.
52	P	¿Cómo así que en la mitad?
53	E2	Forman es como un... ¿Un ángulo? Y donde se forma el ángulo es donde se unen... ¡Vuelva a la tarea!
54	E1	(Hace clic en el botón <i>Salir de la ayuda</i> y vuelven a la tarea de anticipación donde el centro de homotecia ha cambiado de posición y las letras verdes han retornado a la posición inicial).
55	E2	En la tarea de ayuda decía que había un ángulo y donde se forma es donde se unen las letras.



- 56 E1 Sí... (Ubica el círculo, luego hace clic en el botón *Verificar*, superpone las letras P y luego arrastra la letra N verde por la pantalla).



- 57 E1 Mire en la forma que vienen... (Arrastra la N verde hasta el lugar donde están las P superpuestas y luego lo hace con la letra E).



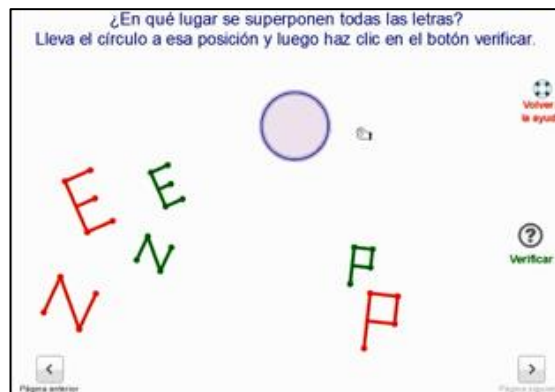
- 58 E2 Depende de cómo estén ubicadas las letras.

- 59 E1 Depende de la dirección (hace clic en el botón *Continuar* y aparece el texto: “¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!” y el botón volver a intentarlo mientras los puntos notables de las letras titilan. Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia).



- 60 E2 Sí, formando un ángulo

- 61 E1 Veá, estas se mueven para acá,
estas para acá y estas para acá
(señala con el cursor,
arrastrándolo en dirección recta
sobre cada pareja de letras).
Entonces el círculo debe estar por
acá (ubica el círculo y hace clic
en el botón *Verificar*).



- 62 E1 (Arrastra las letras para meterlas
en el círculo y hace clic en el
botón *Continuar*).



- 63 E2 ¡La E tiene dos puntos afuera!
(La E roja tiene dos puntos
ligeramente fuera del círculo que
titilan y aparece el texto:
*¡Alguna(s) letras no están dentro
del círculo!*).



- 64 E1 Es la E esta. ¡Sí! (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y se reinicia la tarea con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes retornan a la posición inicial).



- 65 E1 Bueno, esta baja hasta acá, y esta... (Señala con el cursor en dirección recta desde la N roja pasando por la N verde y desde la E roja pasando por la E verde, luego ubica el círculo).

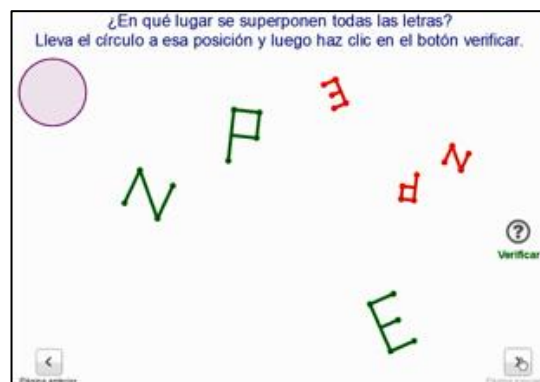


- 67 E1 Esta hacia acá, esta acá... (Señala con el cursor desde las letras P roja hasta la P verde y desde la E roja hasta la E verde, luego desplaza muy poco el círculo hacia la izquierda y hacia abajo mientras su compañera le indica).

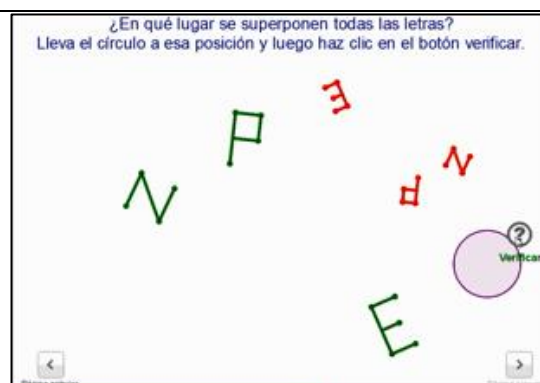
- 69 E1 (Hace clic en el botón *Verificar* y arrastra las letras verdes hasta el círculo y aparece el letrero: “¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente”).



- 73 E1 [lee la consigna] ¿En qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar.



- 75 E1 La E manda, entonces la E dice que va hacia allá, la P dice que va hacia allá y la N dice que va para allá, entonces el círculo debe estar por acá. (Señala con el cursor en dirección recta desde cada letra verde hasta el lugar donde luego ubicaría el círculo. A continuación hace clic en el botón *Verificar*).



- 77 E1 (Arrastra la E verde por la pantalla hasta juntarla con su pareja).
¡Pero...!



- 78 E2 ¿Sí ve? Le dije que estaba mal. ¿No ve que la letra roja está al revés?

- 79 E1 Es que estas ya van en reversa, o sea... y es que en el otro la sigue. ¿Sí ve?
(Arrastra la letra E verde por la pantalla).

80 E2 O sea se cruzan.

81 E1 Sí, se cruzan.

82 E1 (Presiona el botón *Continuar*).



3 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).

[La tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes retornan a las posiciones iniciales].



84 E1 ¡Bueno! La E se cruza acá, la N se cruza acá y la P acá. Entonces el círculo está como por aquí. (Señala con el cursor el lugar donde luego ubicaría el círculo).



- 88 E1 (Arrastra el círculo ligeramente hacia la derecha y presiona el botón *Verificar* y enseguida el botón *Continuar*).

¡Nooo!



- 91 E1 ¡Ese ya estaba bien!
- (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes en la posición inicial).



- 92 E1 Bueno, la P viene para acá... (Ubica el círculo).



- 95 E1 (Superpone las letras).
- ¡Me quedó mal! Por un poquitico.



- 97 E1 Presiona el botón *Continuar* e inmediatamente el botón *Volver a intentarlo*.

[La tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes en la posición inicial].



- 99 E1 Vamos a hacerlo con calma... (Arrastra la letra P verde hasta superponerla con su pareja y presiona el botón *Continuar*).



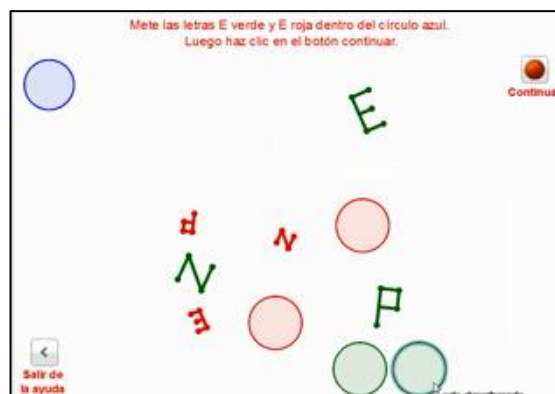
- 100 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y pasa a una página donde se muestra un texto que dice: “*Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras. A continuación te proponemos una tarea de ayuda*”).

¡Ay no!



- 101** E1 (Presiona el botón *Página siguiente* y avanza a la tarea de ayuda).

[Los círculos rojos y las letras rojas no se dejan arrastrar, los demás objetos sí].

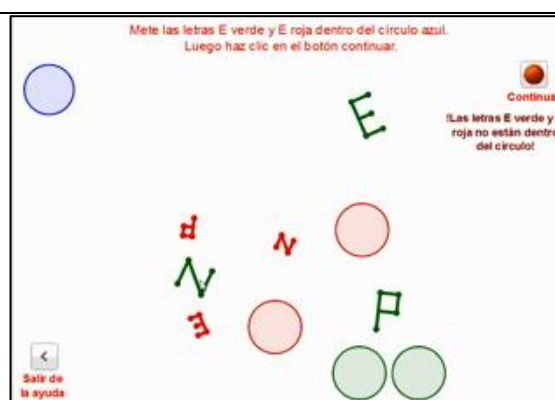


- 102** E2 Dígale salir de ayuda que ya nosotros más o menos sabemos cómo es.

- 103** E1 (Presiona el botón *Salir de la ayuda* y titila la consigna).

(Presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “*Las letras E verde y E roja no están dentro del círculo*”. La consigna, el letrero, las letras E y el círculo azul titilan).

Toca hacerla.



- 104** E2 [Lee la consigna] Mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón continuar.

- 106** E2 Tiene que encontrar el punto fijo.

- 116** E1 (Presiona el botón *Continuar* y cambia la consigna por: “Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color. Luego puedes salir de la ayuda”. La consigna y las letras N y P titilan).



- 117** E2 [Lee la consigna] Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color...
La N y la P.

- 118** E1 (Arrastra la N verde hasta que la N roja queda dentro del círculo de su respectivo color).

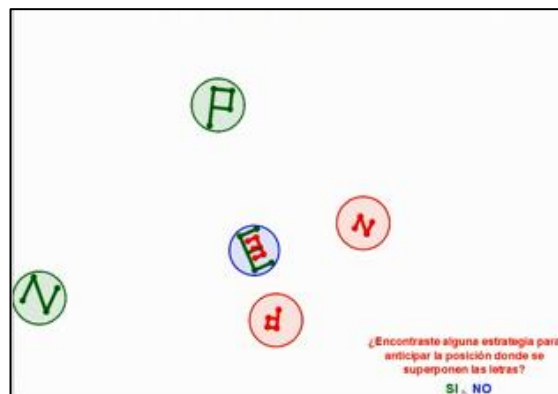


- 120** E1 (Arrastra la P verde hasta que la P roja queda dentro del círculo correspondiente)
No ve que los círculos rojos no se pueden mover.

- 121** E1 Arrastra los círculos verdes hasta las letras verdes (Aparecen las bandas grises que se muestran en la imagen, por 4 segundos).



- 122 E1 (Desaparecen las bandas grises y hace clic en el botón *Salir* de la ayuda y se muestra un texto que titula: “¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?” con las opciones *Si* y *No*).



- 123 E1 ¡Ay! ¡Sí! (Hace clic en la opción *Sí* y vuelve a la tarea de anticipación que se ha reiniciado con las letras verdes en las posiciones iniciales y el centro de homotecia en otra posición).



- 124 E1 ¡Bueno! Entonces las P y la... Van a estar como por aquí (Ubica el círculo en la posición señalada)



- 131 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y aparece el letrero: “!Alguna(s) letras no están dentro del círculo!”).
¡No se vale...!



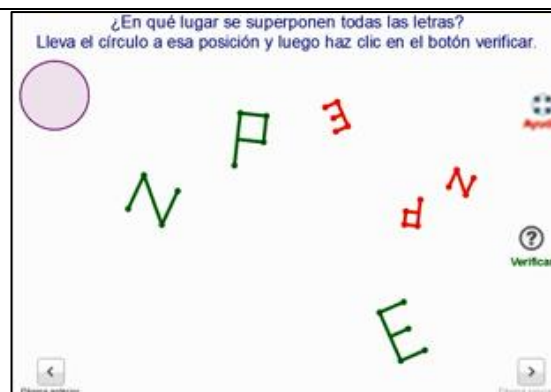
- 132 E1 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 137 E1 (Superpone las letras P).



- 139 E1 (Hace clic en el botón *Continuar*, enseguida en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



143 E2 Sí, es ahí (Ubica el círculo)



148 E2 (Hace clic en el botón *Continuar* e inmediatamente en el botón *Volver a intentarlo*, la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



149 E2 (Ubica el círculo y presiona el botón *Verificar*).



150 E2 (Superpone las letras P y presiona el botón *Continuar*).



- 151 E2 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 152 E2 (Presiona el botón *Verificar*) [Sin querer hizo doble clic y activó la acción de los botones *Volver a intentarlo* y *Verificar*].

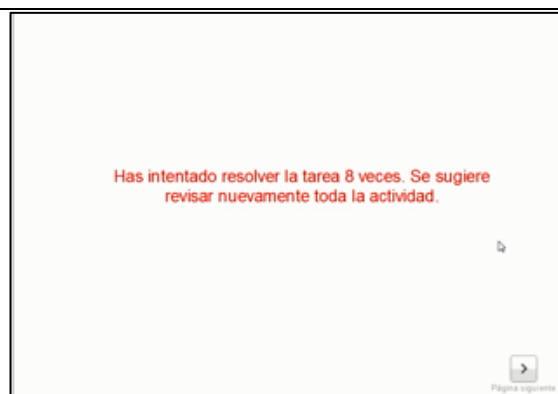


¡Ay no! Ya le di continuar.

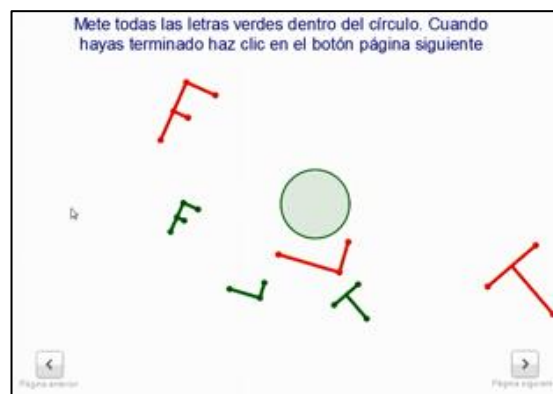
- 153 E2 (Presiona el botón *Continuar*)



- 154 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y se muestra una nueva página con el texto: “*Has intentado resolver la tarea 8 veces. Se sugiere revisar nuevamente toda la actividad*”).



- 155 E2 (Hace clic en el botón página siguiente y se muestra la primera tarea de la primera secuencia).
¡No! ¿Volver a empezar otra vez?



- 156 P Está bien, no la harán toda desde el principio pero sí desde aquí (propone reiniciar la secuencia en vez de la actividad, mostrando la primera tarea de anticipación donde la razón de homotecia es mayor que cero).



- 163 E1 ¡Mire! Midiendo esto y esto sería como un dedito (ubica el dedo entre las dos letras P).



- 164 E1 Entonces sería... un dedito más tres deditos sería como por acá, o sea cuatro deditos (ubica los dedos sobre la pantalla midiendo las distancias entre las letras P y



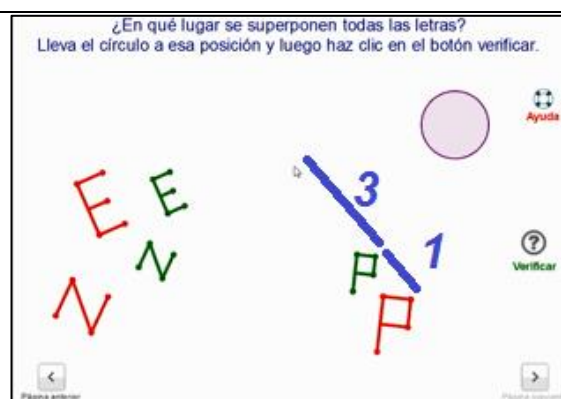
el lugar donde se superponen,
luego superpone las letras P).



- 170 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y enseguida en el botón *Volver a intentarlo*. La tarea se reinicia con el centro de homotecia una posición ligeramente distinta)



- 171 E1 ¡Bueno! ¡Póngale cuidado! Sería un dedito más tres deditos, sería como por acá (ubica los dedos en la pantalla para medir las distancias indicadas en la imagen).



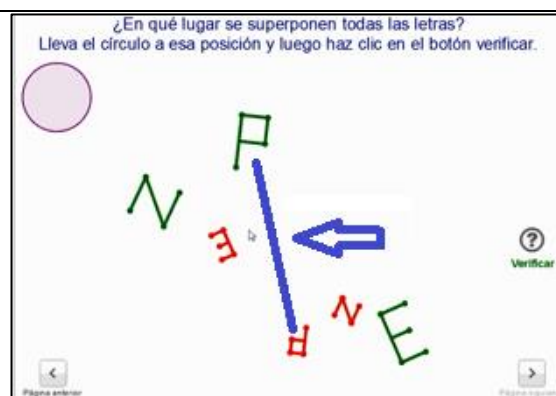
- 174 E1 (Presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente”)



- 175 E1 (Hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea con razón de homotecia menor que cero).



- 179 E1 ¿Cómo era que había hecho...? Cuatro deditos (ubica los dedos entre las letras P, para medir la distancia indicada en la imagen). No, espere... Mejor dejo quieto mis deditos. [La medida no correspondía a lo que él esperaba]



- 183 E2 Presiona el botón *Continuar*.



- 185 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición, luego presiona el botón *Verificar*).



- 186 E1 ¡Póngale cuidado profesor! Son cuatro deditos. Cuando se viene para acá la otra se une.

- 188 E1 Um... Cuatro deditos (arrastra la letra P para superponerla con su pareja).



- 189 P Pero si usted arrastra la P ya no hay cuatro deditos.

- 196 E1 Um... Espere, présteme (toma el ratón y presión el botón *Continuar* y luego el botón *Volver a intentarlo*. La tarea se reinicia cambiando la posición del centro de homotecia).



- 201 E2 (Ubica el círculo en la posición indicada por su compañero y presiona el botón *Verificar*).



- 202 E1 ¡Era un poquito más arriba!

- 203 E2 (Arrastra las letras para meterlas en el círculo). Casi, quedó cerca.



- 205 E2 (Presiona el botón *Continuar* y luego el botón *Volver a intentarlo*. La tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 209 E2 ¿Cuál idea? (Arrastra la P verde y la superpone con su pareja. Luego presiona el botón *Continuar*).

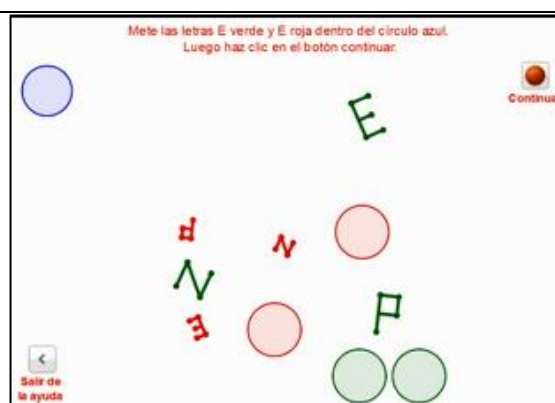


- 211 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y se muestra una página donde dice: “*Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras. A continuación te proponemos una tarea de ayuda*”).

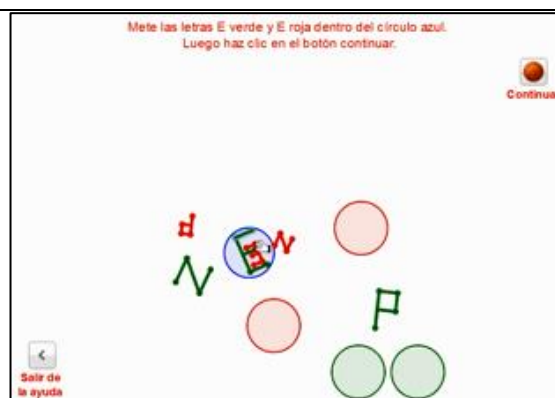


- 212 E2 (Presiona el botón *Página siguiente* y avanza a la página que muestra en la imagen).

[Los círculos rojos y las letras rojas no se dejan arrastrar, los demás objetos sí].



- 217 E1 ¡Lo de los deditos es mejor todavía! (Superpone las letras E y luego arrastra el círculo azul hasta esa posición).



- 218 E1 (Presiona el botón *Continuar*, la consigna cambia por “*Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color. Luego puedes salir de la ayuda*” y las letras N y P titilan).

[Las letras E superpuestas y el círculo azul quedan fijos]



- 219 E1 [Lee la consigna] Las letras N y P...

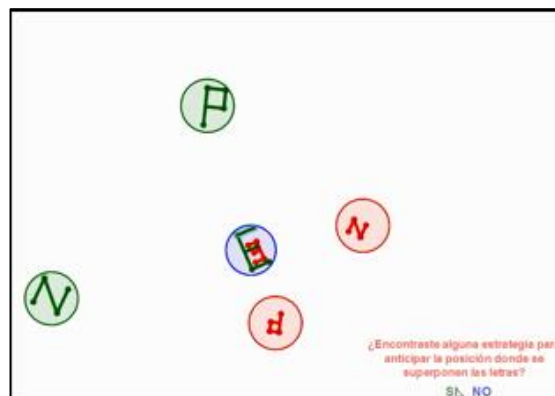
¿Profesor pero esto para qué otra vez si nosotros ya lo sabemos?

(Arrastra las letras verdes hasta meter las rojas en los círculos respectivos y luego arrastra los círculos verdes hasta las letras verdes. Se muestran durante cuatro segundos dos bandas grises como lo muestra la figura).

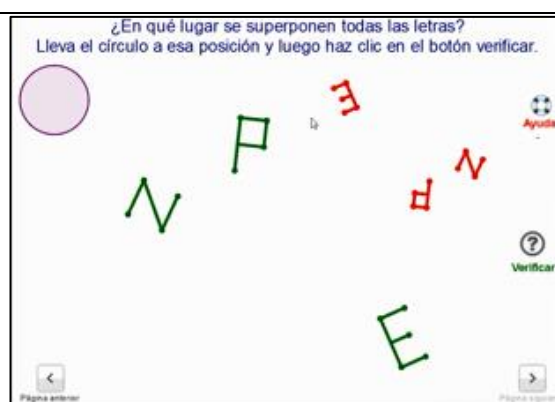


- 220 P Pero pareciera que no porque no han resuelto la otra tarea.

- 221 E1 Vamos a hacerlo así (Presiona el botón *Salir de la ayuda* y aparece el letrero: *¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?* con las opciones *Si* y *No*).



- 222 E1 (Hace clic en la opción *Si* y vuelve a la tarea de anticipación). Bueno vamos a hacerlo así como... Como lo de la mirada.



- 223 E2 La P mira para allá, La E para allá, entonces queda como por aquí (señala con el cursor).



- 228 E2 (Presiona el botón *Verificar* y superpone las letras P). Um... Toca correrlo un poquito más.



- 229 E2 (Presiona el botón *Continuar* y luego el botón *Volver a intentarlo*, la tarea se reinicia, pero el centro de homotecia quedó casi en la misma posición anterior).



¡Ah! Es la misma... ¿No?

- 230 E1 ¡Sí! Entonces la E...

- 231 E2 (Ubica el círculo)



- 234 P ¿Por qué ahí? ¡Espere! ¿Por qué son tan afanados...?

- 235 E1 Porque ahorita que nosotros las fuimos a mover, la P y la E se mueven muy despacio, osea esta semueve más despacio que la otra (señala la E roja).

- 236 P ¿Cómo así que se mueve más despacio?

- 237 E2 O sea no se mueve igual de rápido...

- 238 E1 O sea que no se une igual, esta se mueve más rápido que la otra, no en la mitad porque... Bueno, entonces... (Arrastra un poco el círculo).
¡Pongámoslo aquí!



- 239 P ¿Y por qué sólo tienen en cuenta la P?

- 240 E1 ¡Vea! La N viene así y la E viene lo mismo (señala con el cursor en dirección recta, desde la N verde hasta la N roja y desde la E verde hasta su pareja).

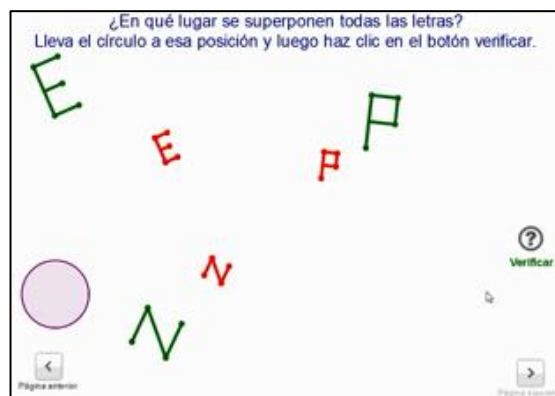
- 241 P ¡Ah! Ya veo.

- 242 E1 (Presiona el botón *Verificar* y arrastra las letras para meterlas en el círculo. Luego presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente”).



Y ahorita hacemos la de los deditos.

- 244 E2 (Presiona el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea con otra razón de homotecia). [Sólo el círculo se deja arrastrar, los demás objetos están fijos inicialmente]



- 248 E2 Aquí se unirían... ¿No? (Señala la posición del centro de homotecia)

- 249 E1 ¡Ah! ¡Sí! Porque lo de la mirada que se unen acá... O sea el círculo queda como por aquí (toma el ratón y ubica el círculo). ¡Póngale cuidado! La P tiene estas cositas, entonces al moverla para acá tienen que encajar acá, y la E tiene que venir acá (señala con el cursor desde un punto notable de la P verde hasta dónde está el círculo, pasando por la P roja, lo mismo hace para las letras E).



- 250 E2 (Presiona el botón *Verificar* y arrastra las letras para meterlas en el círculo. Luego hace clic en el botón *Continuar* y se muestra el letrero: “*¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente*”).



- 252 E2 Hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra una página con el letrero: “*Discute con tu compañero los resultados obtenidos. Luego haz clic en el botón página siguiente*”



- 255 E1 Bueno mire, tenemos tres formas de hacerlo.

- 256 P ¿Tres?

- 257 E1 ¡Sí! ¡Tres! Depende de cómo estén las letras. Si las letras están volteadas es porque...

- 258 E2 Se van a separar

- 259 E1 Sí, y si las letras están del mismo es porque se persiguen.

- 260 E2 Se contraen

- 261 E1 Entonces para cada una nos sirve cada método. Si la persiguen, entonces no sirve la de los deditos... ¡No! ¡Mentiras! Esa es para las desunidas, que vienen así, entonces son cuatro deditos y por la mitad. Entonces la otra es por mera mirada, que usted llega y dice, viene para acá y ahí lo pone.

Análisis de la tarea de anticipación

Cuando se muestra la primera tarea de anticipación, los alumnos no perciben la posibilidad de anticipar, sin arrastrar las letras, el lugar donde se superponen (17). Es imposible que los alumnos resuelvan la tarea sin tomar conciencia de dicha posibilidad de anticipación. El uso de los botones *Verificar* y *Volver a intentarlo* (6-24), constituye un acto de devolución gracias al cual los alumnos comprenden en qué consiste la tarea aunque no tienen una estrategia de solución (13-16). En otras palabras, los alumnos en este momento saben que para mover las letras rojas deben arrastrar las verdes, pero no han tomado conciencia de ninguna relación concreta entre ellas y el lugar donde se superponen; por lo tanto, no son capaces de anticipar la posición del centro de homotecia.

Luego del primer intento fallido aparece el botón *Ayuda*, los alumnos acuden inmediatamente a ella (24 y 25), resuelven la tarea de ayuda propuesta (26-40) y al salir de ella observamos tres estrategias para intentar anticipar la posición del centro de homotecia:

- La primera consiste en el uso de la alineación de las figuras homotéticas y el centro. Con esta estrategia resuelven la tarea en la primera y cuarta serie donde la razón de homotecia es mayor que cero (61-69 y 244-250). Podemos constatar que la estrategia consiste en usar la propiedad de la alineación, cuando uno de los estudiantes dice “*forman como un ángulo*”, haciendo referencia a dos parejas de letras y el lugar donde se superponen (60); también cuando dice “*estas se mueven para acá, estas para acá y estas para acá*” señalando con el cursor en dirección recta desde cada letra pasando por su homotética (61).

En la segunda y tercera serie, donde la razón es menor que cero, esta estrategia fue abandonada. Al parecer hay un fenómeno visual provocado por la disposición de las letras que no permite que los alumnos identifiquen la alineación de manera espontánea como en las

series donde la razón es mayor que cero. Sin embargo, no sabemos por qué se da este fenómeno y podría ser un tema de investigación en trabajos posteriores.

- La segunda estrategia, que no habíamos previsto en el análisis a priori, aparece en la segunda y tercera serie donde la razón de homotecia es menor que cero: un estudiante considera que el lugar donde se superponen las letras está en la dirección en la que apuntan las letras, es decir, en la dirección de escritura. Podemos observar este hecho cuando él dice *“la E manda, entonces la E dice que va hacia allá, la P dice que va hacia allá y la N dice que va para allá, entonces el círculo debe estar por acá”* señalando con el cursor desde cada letra verde en dirección hacia donde ellas indican (75). Esta estrategia fue invalidada rápidamente luego de presionar el botón *Verificar*, al superponer las letras. Evidencias de dicha validación las encontramos en los renglones 78-84, donde abandonan la estrategia justificándolo de la siguiente manera: *“Le dije que estaba mal. ¿No ve que la letra roja está al revés?”* (78); *“O sea se cruzan”* (80); *“Es que estas ya van en reversa, o sea... y es que en el otro la sigue”*. Luego de invalidar esta estrategia los alumnos aparentemente empiezan a ubicar el círculo en una posición entre las dos letras homotéticas pero sin garantizar la alineación, ya que se observan 5 intentos fallidos (88, 95, 99, 131 y 150).

- La tercera estrategia apareció cuando el profesor sugirió reiniciar la secuencia y propuso nuevamente la tarea de anticipación donde la razón de homotecia es positiva. Esta tercera estrategia parece recurrir a una razón entre la distancia de una letra a su homotética y la distancia de ésta al centro de homotecia. Un alumno dice: *“Midiendo esto y esto sería como un dedito”* mientras pone el dedo índice entre las letras (163), continúa proponiendo: *“entonces sería... un dedito más tres deditos sería como por acá, o sea cuatro deditos”* (164). Encontró esta relación particular entre la distancia de la letra P roja a su pareja y de

ésta última al lugar donde se juntan, una vez que presionó el botón *Verificar* y superpuso las letras. Usando esta estrategia logró resolver nuevamente la tarea de la primera serie en el segundo intento. Sin embargo, lo consiguió porque implícitamente utilizó la alineación, ya que dispuso los dedos en dirección perpendicular a la recta que une la pareja de letras; además, en el segundo intento las letras quedaron separadas aproximadamente la misma distancia que en el primero. Esta estrategia fue parcialmente abandonada en la segunda serie, cuando la razón de homotecia cambió y constató que las medidas no correspondían: “¿cómo era que había hecho...? Cuatro dedos... No, espere... Mejor dejo quieto mis dedos” (179). Luego en el siguiente intento vuelve a tratar de usar la estrategia: “¡póngale cuidado profesor! Son cuatro dedos. Cuando se viene para acá la otra se une” (186) y el profesor propone: “pero si usted arrastra la P ya no hay cuatro dedos” (189). El alumno sigue intentado ajustar su estrategia para convencer al profesor de que funcionará, mientras reflexiona en voz alta: “cuatro dedos... tres dedos...” (206). A pesar de los intentos fallidos, los alumnos no invalidaron completamente la estrategia, puesto que con ella resolvieron la tarea en la tercera serie donde casualmente el centro de homotecia no cambió significativamente de posición al presionar el botón *Volver a intentarlo* y las medidas eran casi las mismas que las del intento anterior (229-242).

Después de resolver la tarea de ayuda los estudiantes lograron anticipar perceptivamente la posición del centro de homotecia, en las series donde la razón es mayor que cero. Sin embargo, cuando la razón era menor que cero, aún después de haber resuelto la tarea de ayuda dos veces, requirieron más de 8 intentos para resolver la tarea de anticipación, lográndolo básicamente por ensayo y error, observando el movimiento y la distancia entre las letras. Concluimos que sucedió lo que habíamos previsto sólo donde la razón de homotecia era mayor que cero, pero queda la duda sobre los fenómenos visuales que generan dificultad

para identificar la alineación cuando la razón es menor que cero. La tarea de ayuda y las retroacciones didácticas jugaron un papel importante en este proceso de interacción, a continuación exponemos estos análisis.

También los alumnos lograron identificar dos relaciones entre el movimiento de las letras, que corresponden a los fenómenos visuales cuando la razón de homotecia es mayor y menor que cero. Los alumnos formulan este hecho al finalizar la secuencia: “...*Si las letras están volteadas es porque...*” (257). “*Se van a separar*” (258). “... *y si las letras están del mismo es porque se persiguen*” (259).

Análisis de la tarea de ayuda

Hubo cuatro momentos en los que los alumnos pasaron por la tarea de ayuda. El primero se dio en la primera serie cuando los alumnos acudieron a ella voluntariamente (26-38); el segundo, también en la primera serie, cuando los alumnos vuelven a ella para formular al profesor su estrategia de anticipación del centro de homotecia (45-54); los dos últimos ocurren en la segunda serie: una retroacción didáctica estaba programada para mostrar la tarea de ayuda cuando los alumnos intentaran resolver sin éxito la tarea de anticipación más de cuatro veces (100-122 y 211-221). A continuación exponemos y analizamos lo sucedido en estos cuatro momentos.

- Momento 1: el alumno mete la pareja de letras E dentro del círculo y al presionar el botón *Continuar*, se activa una retroacción que bloquea el movimiento de estos tres objetos que resaltan la posición del centro de homotecia (30), obteniendo una configuración donde se observan las dos parejas de letras N y P alineadas con el lugar donde están superpuestas las letras E. Luego mete las otras dos parejas de letras dentro de los círculos correspondientes, arrastrando las letras verdes y los círculos verdes. En este momento se activa la retroacción didáctica que muestra durante cuatro segundos las dos bandas grises que resaltan la

alineación, provocando que los alumnos se detuvieran un momento antes de presionar el botón *Salir de la ayuda*. El alumno 2 cuestiona: “¿y eso qué fue?” (37) y el alumno 1 responde: “*Es una ayuda. Es que cuando usted mueve la letra verde hacia allá, las dos se mueven en diagonal*” (38). Presiona el botón *Salir de la ayuda* y aparece el letrero: “¿*Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?*” con las opciones *Sí* y *No* (38). Escoge la opción *Sí* y vuelve a la tarea de anticipación que resuelve utilizando la alineación.

De acuerdo con lo sucedido, concluimos que la tarea de ayuda funcionó como lo habíamos previsto; en primer lugar, los alumnos lograron obtener una configuración donde era posible percibir la alineación de las letras homotéticas con el centro; en segundo lugar, apareció la retroacción didáctica de las bandas grises y los alumnos tomaron conciencia de ella y se preguntaron por su significado; por último, al regresar a la tarea de anticipación los alumnos utilizan la alineación para resolverla.

- Momento 2: estando en la tarea de anticipación el profesor pregunta a los alumnos cómo saben dónde ubicar el círculo (43) y ellos deciden volver a la tarea de ayuda que ya está resuelta, mostrando las bandas grises nuevamente: “*¡Mire! La N hacia allá, la P hacia allá*” arrastrando el cursor sobre las bandas grises (46). “*¡Mire! Está aquí y se va juntando con la roja en la mitad*” (51). Mientras que el otro alumno propone: “*Forman es como un... ¿Un ángulo? Y donde se forma el ángulo es donde se unen... ¡Vuelva a la tarea!*” (53).

Observamos que la tarea de ayuda fue usada por los alumnos para formular el conocimiento de la alineación de cada pareja de letras y el lugar donde se superponen. Por lo

tanto constatamos que fue la tarea de ayuda la que favoreció el reconocimiento de esta propiedad que en principio no percibían espontáneamente.

- Momentos 3 y 4: Gracias a la retroacción didáctica programada para que se mostrara la tarea de ayuda luego del cuarto intento fallido en la tarea de anticipación, los alumnos volvieron a la ayuda en la segunda serie donde la razón de homotecia es menor que cero (100-101), pero quisieron salir de ella sin resolverla: *“Dígale salir de ayuda que ya nosotros más o menos sabemos cómo es”* (102). Sin embargo, no era posible salir de la ayuda sin antes resolver la tarea, de modo que los alumnos deciden resolverla haciendo lo mismo que en el momento 1, pero salen rápidamente sin intentar buscar una estrategia de anticipación. Lo mismo sucede posteriormente en la misma serie, cuando el profesor sugirió reiniciar la secuencia y la retroacción les mostró nuevamente la tarea de ayuda, luego de cuatro intentos fallidos (211).

Consideramos que la tarea de ayuda no funcionó como esperábamos en los casos donde la razón de homotecia es menor que cero, posiblemente porque los alumnos pasaron muy rápido por ella, sin intentar buscar relaciones que les permitieran anticipar; o porque la propiedad de la alineación es más difícil de percibir cuando la razón de homotecia es menor que cero.

Concluimos que la tarea de ayuda funcionó como un acto de devolución de la tarea de anticipación, mediante la explicitación de algunas propiedades que los alumnos lograron identificar y usar para anticipar la posición del centro de homotecia. Además, consideramos que no generó efecto topacio por dos razones: la primera es que los alumnos lograron resolver la tarea de anticipación en ausencia de la ayuda y la segunda, es que sugirió una estrategia para resolver el problema, sin imponerla; ya que los alumnos no la consideraron

una instrucción explícita y directa de lo que debían hacer para anticipar. Sin embargo, sí generó el efecto esperado porque a partir de allí los alumnos empezaron a identificar la alineación de manera espontánea, al menos cuando la razón de homotecia era mayor que cero.

Análisis de las retroacciones didácticas

Como ya lo dijimos, las retroacciones didácticas correspondientes al bloqueo y desbloqueo de las letras y el círculo, funcionaron como un acto de devolución que les permitió a los alumnos comprender el problema. Inicialmente no concebían la posibilidad de anticipar la posición del centro de homotecia, pero luego de recibir estas retroacciones, entendieron en qué consistía la tarea: “¡Ah! Ahora sí se dejan arrastrar” (18). “¿Por qué ya no puedo mover el círculo?” (19). Cuando juntaron las letras por fuera del círculo y presionaron el botón *Continuar*, tomaron conciencia de que primero debían ubicar el círculo sin poder mover las letras y que después para comprobar la solución, podrían mover las letras pero no el círculo. Uno de ellos exclamó “¡Ah! ¡Ya entendí!” (24).

En la tarea de ayuda hubo cuatro retroacciones didácticas que promovieron la aparición de estrategias de anticipación del centro de homotecia basadas en encontrar alguna relación entre cada pareja de letras y el lugar donde se superponen: la primera es la explicitación del centro de homotecia mediante el bloqueo de las letras E superpuestas y del círculo azul sobre ellas. La segunda, el bloqueo de los círculos rojos que forzó el movimiento de las letras mientras el lugar donde se superponen permanecía visible, permitiendo explicitar la alineación de cada pareja de letras y el centro de homotecia. La tercera es la aparición durante cuatro segundos de las bandas grises que resaltan la alineación una vez resuelta la tarea. Por último, la cuarta retroacción didáctica es el texto: “¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?” con las opciones *Sí* y *No*, que se muestra cuando el alumno

ha resuelto la tarea y presiona el botón *Salir de la ayuda*. Los efectos de las tres primeras retroacciones los podemos observar durante el desarrollo de las cuatro series, pero principalmente en la primera serie, porque los alumnos en principio no tenían ninguna estrategia de anticipación y luego de resolver la tarea de ayuda empezaron a centrar la atención en buscar relaciones entre las letras y el lugar donde se superponen. Sin embargo, de la cuarta retroacción didáctica que pregunta a los alumnos si encontraron alguna estrategia de anticipación, lo único que sabemos es que ellos respondieron rápidamente de esa pregunta sin reflexionar; por lo tanto, consideramos que no tuvo un efecto significativo. Probablemente, si pidiéramos que escribieran la estrategia luego de seleccionar la opción *Sí*, lograríamos que los alumnos la formularan o al menos que reflexionaran sobre la pregunta.

Particularmente la retroacción donde se muestran las bandas grises resaltando la alineación de las letras y el centro de homotecia generó duda y discusión entre los dos alumnos: El alumno 2 cuestiona: “¿y eso qué fue?” (37) y el alumno 1 responde “*Es una ayuda. Es que cuando usted mueve la letra verde hacia allá, las dos se mueven en diagonal*” (38). El alumno 2 parece no interpretar la retroacción, mientras que el alumno 1 lo relaciona con el movimiento de las letras. Sin embargo, en principio no explicita ninguna relación entre las letras y el lugar donde se superponen, pero es claro que la aparición de las bandas hizo que los alumnos se cuestionaran y empezaran a establecer relaciones entre las letras y el lugar donde se superponen. Además, fue un elemento importante para el reconocimiento global de la alineación, puesto que fue esta la estrategia que usaron para resolver la primera y cuarta series.

8.1.3 Tercera secuencia

En primer lugar presentamos los datos que soportan el análisis se hace a continuación de ellos.

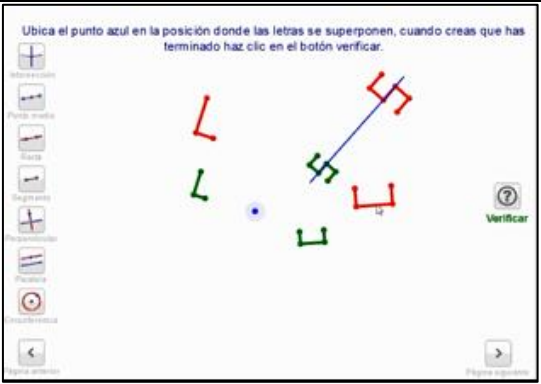
Tabla 3 Datos tercera secuencia primera actividad.

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	P	(Se muestra una página con tres letras verdes y tres letras rojas; un puto azul titilante; la consigna: <i>“Ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar”</i>; 7 botones que corresponden a herramientas de construcción: <i>Punto de intersección, Punto medio, Recta, Segmento, Recta perpendicular, Recta paralela y Circunferencia</i>; y los botones <i>Verificar, Página anterior y Página siguiente</i>) [En esta tarea sólo el punto azul se deja arrastrar y las letras rojas son homotéticas de las letras verdes con respecto a un centro oculto]. Ahorita estaban ubicando el círculo, ¿está bien?	

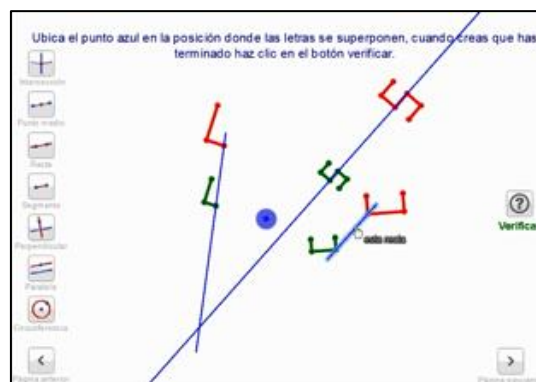
2	E2	Sí señor.
3	P	Ok, ahora van a ubicar, no el círculo porque el círculo es muy grande, van a ubicar la posición más... Con más precisión, o sea lo van a hacer con el punto... ¿Sí? Ya no van a ubicar un círculo sino un punto.
8	E1	¡Ah! ¡Mire! Esta es en la que viene y lo persigue
9	E2	Sí
10	E1	Bueno, esta mueve a esta y esta mueve a esta ¿Cierto? Esta es esta y esta es esta (señala dos parejas de letras). Entonces al moverlas esta queda acá, esta acá y esta por acá (le indica a su compañero una posición en la pantalla que no corresponde al centro de homotecia).
11	E2	Entonces el punto quedaría como por acá (ubica el punto donde su compañero indicaba).
12	E2	Pero venga, ¿esto qué? Se puede hacer algo con esto, mire. (Selecciona la herramienta punto de intersección e intenta hacer clic sobre el punto azul y sobre las los puntos notables de las



letras).

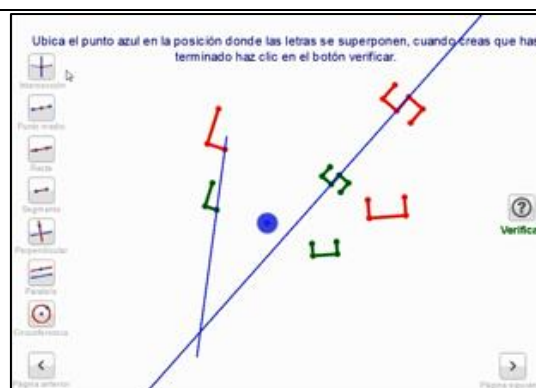
13	E1	Busque punto medio...Punto medio, punto medio. Se acuerda que entre esa y la L.
14	E2	(Selecciona la herramienta <i>Punto medio</i>, hace un clic en la pantalla y arrastra el cursor por la pantalla. Aparece un punto donde hizo clic y se muestra el punto medio de éste y la posición donde se encuentra el cursor). 
15	E1	Lo mismo que los deditos.
16	E2	Pero entonces tocaría poner una recta... ¿No? (Selecciona la herramienta <i>Recta</i> y desaparecen los puntos que se mostraron cuando usó la herramienta <i>Punto de medio</i>). ¿De dónde a dónde?
17	E1	De la S a la S
18	E2	(Hace clic en dos puntos notables (uno de la S roja y otro de la S verde) y aparece la recta que pasa por esos dos puntos. 

27 E2 (Prolonga las tres rectas)

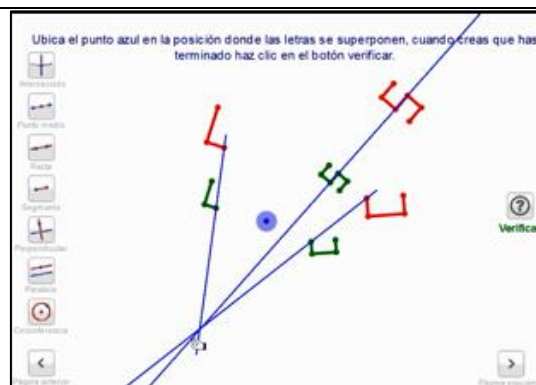


28 E1 Entonces esta sí nos quedó mal porque debería estar por acá arriba (señala la recta trazada sobre las letras C).

31 E2 (Borra la recta trazada sobre las letras C).



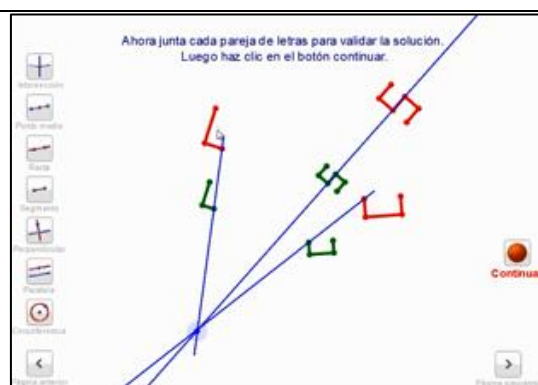
32 E1 (Traza la recta que pasa por dos puntos correspondientes de las letras C y la prolonga).



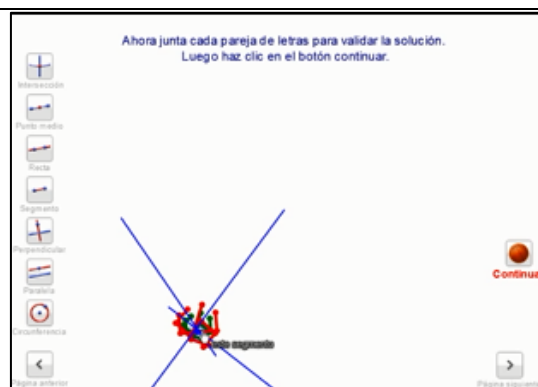
- 33 E2 Acá es el punto, o sea que debería estar como por aquí (ubica el punto azul donde las rectas concurren).



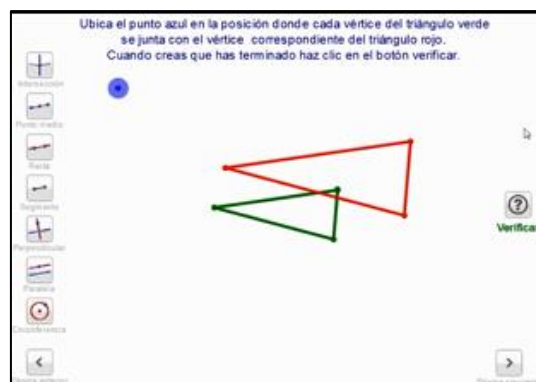
- 34 E2 (Presiona el botón *Verificar* y éste cambia por el botón *Continuar*. La consigna cambia: “*Ahora junta cada pareja de letras para validar la solución. Luego haz clic en el botón continuar*”). [Ahora las letras se dejan arrastrar].



- 35 E2 (Arrastra las letras y la superpone)
jajaja ¡Magia! ¿Sí ve que era ahí?

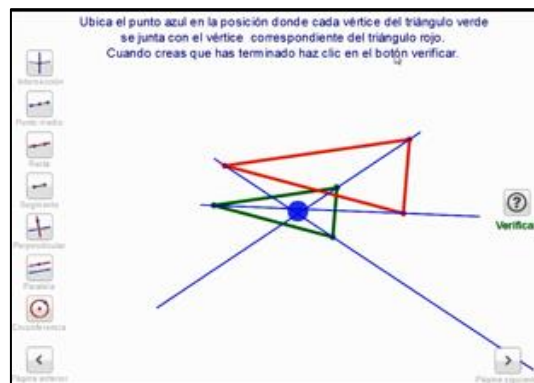


- 41 E2 [Lee la consigna] Haz clic en el botón iniciar animación, luego sigue las instrucciones (hace clic en el botón *Iniciar animación*, éste se oculta y aparece el botón *Verificar*. Las letras empiezan a reducirse hasta un punto, luego se muestran dos triángulos: uno verde con vértices en los puntos verdes que quedaron y uno rojo con vértices en los puntos rojos. Cambia la consigna: “*Ubica el punto azul en la posición donde cada vértice del triángulo verde se junta con el vértice correspondiente del triángulo rojo. Cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar*”).



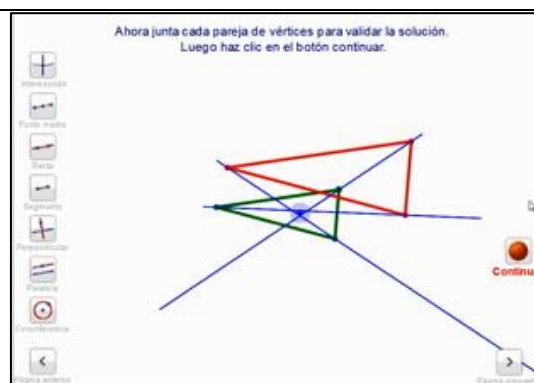
- 47 E1 (Construye tres rectas sobre los vértices de los triángulos como muestra la figura).

Entonces el punto estaría por acá... (ubica el punto) Pero dice que es un solo...



- 48 E2 Quedó mal.

- 49 E1 (Presiona el botón *Verificar*, éste cambia por el botón *Continuar* y la consigna cambia: “*Ahora junta cada pareja de vértices para validar la solución. Luego haz clic en el botón continuar*”)



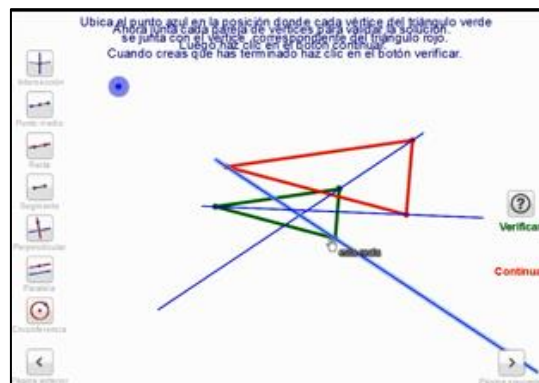
- 50 E1 (Arrastra los triángulos y superpone un par de vértices correspondientes).

¿Cómo así?

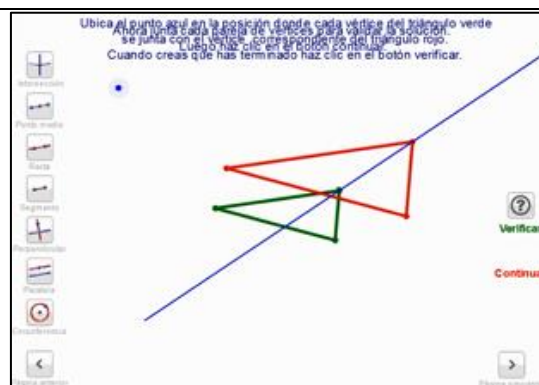


- 51 E2 Le quedó corrido.

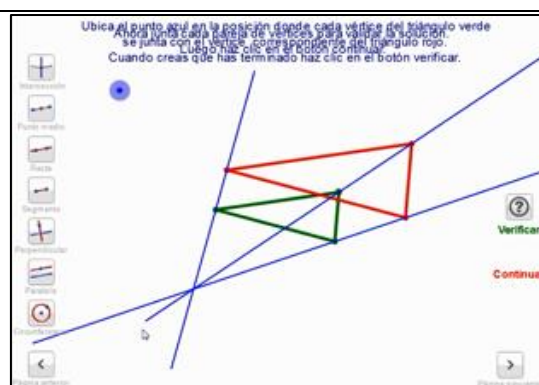
- 52 E1 (Presiona el botón *Continuar* éste cambia por el botón *Volver a intentarlo*, hace clic en éste inmediatamente. El triángulo verde y el punto azul retornan a la posición inicial y el centro de homotecia cambia levemente de posición) [La consigna no se entiende porque hay dos textos superpuestos].



- 53 E2 (Toma el ratón y borra las rectas. Luego construye una recta entre un par de vértices correspondientes).



- 55 E2 ¡Relájese! ¡Cójala suave!
(Construye las tres rectas que pasan por cada par de vértices correspondientes).



- 59 E2 (Ubica el punto, presiona el botón *Verificar* y arrastra el triángulo verde hasta superponer un par de vértices correspondientes).
jajaja... ¿Cómo la ve?



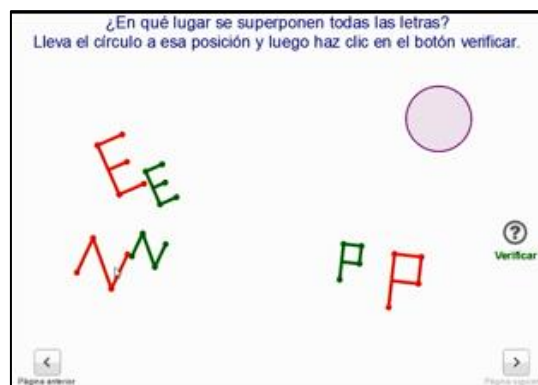
- 60 E2 Presiona el botón *Continuar* y luego el botón *Página siguiente*. Se muestra una página con un letrero que dice: “*Discute con tu compañero los resultados obtenidos*”.



Era con cada punto.

- 61 P Bueno, tengo dos figuras ahí en la pantalla... ¿Cómo sé dónde se van a juntar?
- 62 E1 Entre las dos, entre los cuatro deditos... Jajaja.
- 63 P ¿Siempre se juntaban entre las dos?
- 64 E2 No, depende de cómo estén ubicadas las figuras. Y de cómo uno vaya a trazar las rectas de cada lado, por decirlo de cada vértice.
- 65 P ¿Entonces qué hago para encontrar el lugar dónde se juntan las figuras?
- 66 E2 Trazar rectas.
- 67 P ¿Qué rectas trazo?
- 68 E2 De cada vértice correspondiente.
- 69 P ¿Hay vértices que se corresponden?
- 70 E2 Pues, no es eso... es que no sé cómo decirlo.

- 71 P Bueno busquemos otra
(muestra nuevamente la tarea
de la primera serie de la
secuencia anterior).



- 74 E1 Veá, se mira esta con esta, esta con esta, esta con esta y así... Para que dé el
vértice acá y de los tres puedan dar un punto y saber dónde ubicar el círculo
(Señala con el cursor en dirección recta desde cada vértice de las letras rojas
pasando por su correspondiente en la letra verde).

Análisis de la tarea

Al contrario de lo que se había supuesto en el análisis a priori, los alumnos inicialmente no utilizaron la alineación para resolver el problema y ubicaron el punto lejos de la posición correcta (10-11). Sin embargo, el estudiante 2 centra su atención en las herramientas de construcción de las que disponen y luego de ensayar un poco las herramientas *Punto de intersección* y *Punto medio* (12-15) propone usar la herramienta recta: “*pero entonces tocaría poner una recta... ¿No?*” (16) y pasan directamente a formular la alineación mediante el uso de la herramienta *Recta*. Sin embargo, construye las rectas entre puntos no homotéticos y al prolongarlas toman conciencia de la necesidad de trazarlas entre puntos correspondientes (16-34). De acuerdo al análisis a priori, en esta primera parte no esperábamos que usaran la herramienta recta sino que reconocieran dicha alineación globalmente y encontraran perceptivamente el lugar donde debían ubicar el punto. Los alumnos finalmente validan la estrategia cuando presionan el botón *Verificar* y comprueban

que el punto está bien ubicado al arrastrar las letras y superponerlas: “¡Magia! ¿Sí ve que era ahí?” (35) exclama E2 al validar la solución.

Gracias a la retroacción que ofrece la posibilidad de arrastrar las letras luego de ubicar el punto, los alumnos tomaron conciencia del carácter puntual de las letras y empezaron a reconocer la correspondencia entre los puntos de las figuras homotéticas.

En la segunda parte, el estudiante retoma la estrategia anterior pero no traza las rectas entre los puntos correspondientes. Al presionar el botón *Verificar* y arrastrar los triángulos invalida la solución propuesta (47-51). El otro estudiante procede en el siguiente intento, traza las rectas entre los puntos homotéticos y valida la solución luego de arrastrar los triángulos y superponer los vértices correspondientes (53-59). Nuevamente, gracias a las retroacciones de los botones de verificación y evaluación, los alumnos logran validar y reforzar la estrategia del reconocimiento de los puntos correspondientes para trazar rectas entre ellos y encontrar el centro de homotecia. Los alumnos formulan este conocimiento al finalizar la tarea, cuando el profesor pregunta: “bueno, tengo dos figuras ahí en la pantalla... ¿Cómo sé dónde se van a juntar?” (61). Uno de ellos responde: “trazar rectas” (66), “de cada vértice correspondiente” (68). El otro alumno también, cuando dice: “Vea, se mira esta con esta, esta con esta, esta con esta y así... Para que dé el vértice acá y de los tres puedan dar un punto y saber dónde ubicar el círculo” mientras señala con el cursor en dirección recta pasando por cada par de vértices homotéticos (74). Este conocimiento era el que esperábamos se manifestara en esta tarea.

Por errores en la programación no fue posible proponer la tarea con otras configuraciones con distinto centro y razón de homotecia. Por lo tanto no presentamos el análisis a posteriori de la secuencia.

Análisis retroacciones didácticas

Las retroacciones de bloqueo y desbloqueo de las figuras y el punto funcionaron correctamente, permitiendo que los alumnos validaran perceptivamente la solución propuesta en ambos momentos de la tarea.

Con la retroacción didáctica que ejecuta la animación de las letras hasta convertirlas en puntos y presentar dos triángulos homotéticos, buscábamos que los alumnos consideraran los vértices del triángulo como si fueran las letras. Pero no tenemos evidencias de que los alumnos hayan tomado conciencia de este hecho, sin embargo no interrumpió el proceso de interacción y favoreció que los alumnos reforzaran la acción de reconocer los puntos homotéticos y trazar rectas entre ellos para anticipar la posición del centro de homotecia, es decir que pasaron del carácter global al carácter puntual de la transformación.

Por otra parte, algunos botones presentaron error en la programación y en algún momento quedaron textos superpuestos y la consigna no se entendía (52) sin embargo esto no impidió el avance de la interacción con el software.

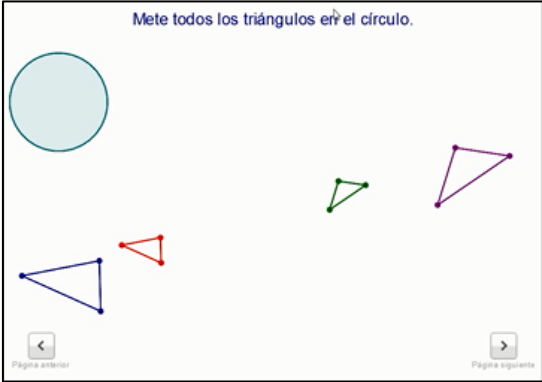
8.2 Actividad 2

A continuación presentamos los soportes y el análisis de cada una de las tres secuencias de la segunda actividad. Los soportes presentados no corresponden a la transcripción completa, sugerimos al lector revisar las transcripciones completas en el siguiente capítulo (anexos) en caso de requerir una lectura más detallada de los datos.

8.2.1 Primera secuencia

En primer lugar presentamos los datos que soportan el análisis se hace a continuación de ellos.

Tabla 4 Datos primera secuencia segunda actividad.

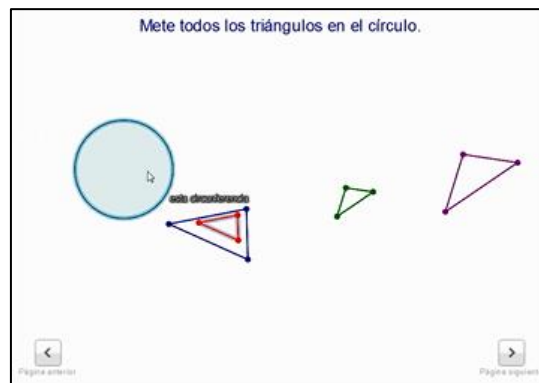
No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E1	(Se muestra una página con un círculo, cuatro triángulos: dos pequeños de colores verde y rojo; y dos grandes de colores violeta y azul, la consigna: “<i>mete todos los triángulos en el círculo</i>” y los botones: <i>Página anterior</i> y <i>Página siguiente</i>). [En esta tarea sólo el círculo y los triángulos pequeños se dejan arrastrar. Los triángulos violeta y azul son homotéticos de los triángulos verde y rojo respectivamente, con respecto a un centro oculto] [Lee la consigna] Mete todos los triángulos dentro del círculo.	

- 2 E1 (Arrastra el triángulo rojo por la pantalla y luego lo superpone con el triángulo azul, luego arrastra un poco el círculo).

¡Ah! ¡Sí se puede mover!

(Exclama al mover arrastrar el círculo).

¡Ah! Se acuerda lo de... Lo de moverse así (dice mientras arrastra el triángulo verde).

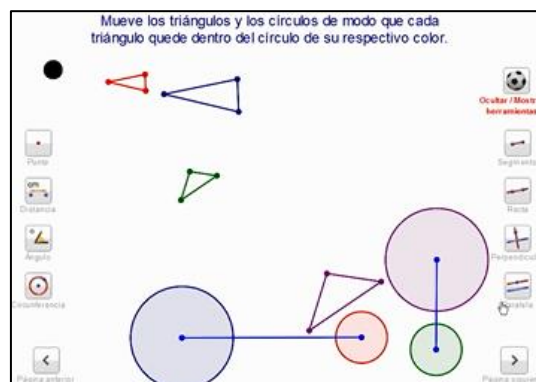


- 3 E1 (Superpone todos los triángulos y arrastra el círculo sobre ellos. Se ocultan los triángulos y el círculo, y aparece un punto negro titilante con el texto: “*en las siguientes tareas, este punto negro indicará la posición donde los triángulos se superponen*”).



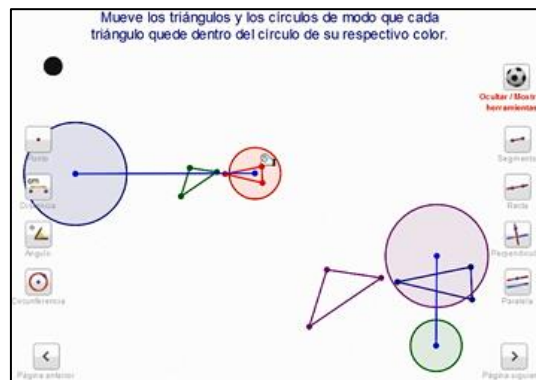
- 6 E2 ¿Qué tiene que hacer? Ya, Ahí se superponen... ¿Qué más va a hacer?

- 7 E1 (Hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra una página con cuatro triángulos y cuatro círculos: rojo, verde, azul y violeta; dos segmentos: el primero con extremos en los centros de los círculos azul y rojo, y el segundo con extremos en los centros de los círculos verde y violeta; un punto negro titilante; 8 herramientas de construcción: *Punto*, *Distancia*, *Ángulo*, *Circunferencia*, *Segmento*, *Recta*, *Recta perpendicular* y *Recta paralela*; la consigna “*Mueve los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de su respectivo color*” y tres botones: *Página anterior*, *Página siguiente* y *Ocultar/Mostrar herramientas*).



-
- 10 E2 Mire a ver si los círculos se pueden mover.

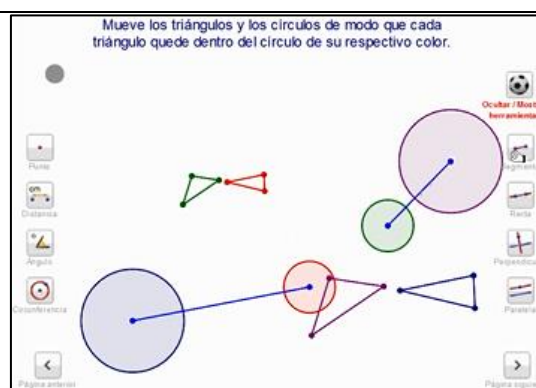
- 11 E1 El rojo sí (arrastra el círculo rojo hasta el triángulo correspondiente y el círculo azul se traslada lo mismo que el círculo rojo).



- 12 E2 Mire los que no se pueden mover.

- 13 E1 Sí... (Arrastra el círculo azul y este rota alrededor del círculo rojo).

El verde también se puede mover (arrastra el círculo verde).



Y este también se puede mover pero no se mueve igual que el verde (arrastra el círculo violeta que rota alrededor del círculo verde).

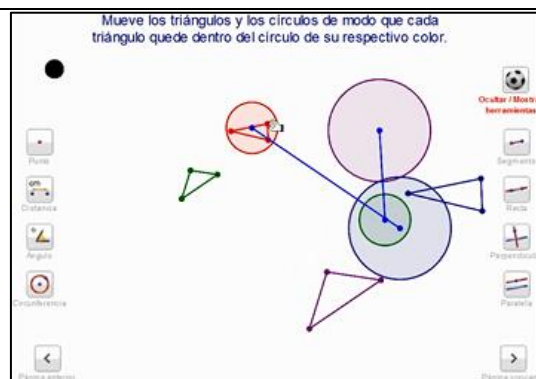
O sea este se puede mover para allá y para acá en cambio el otro se puede mover en todas las direcciones (dice mientras rota el

círculo violeta alrededor del
círculo verde).

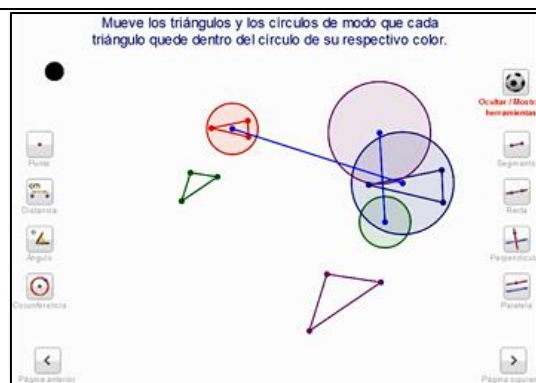
16 E1 ¿Y esa recta no se puede encoger?

17 E2 [Intenta cambiar el tamaño del
segmento que une los círculos azul
y rojo agarrándolo por los
extremos, pero no lo logra]

(Arrastra el triángulo rojo y
arrastra el círculo rojo a dicha
posición).



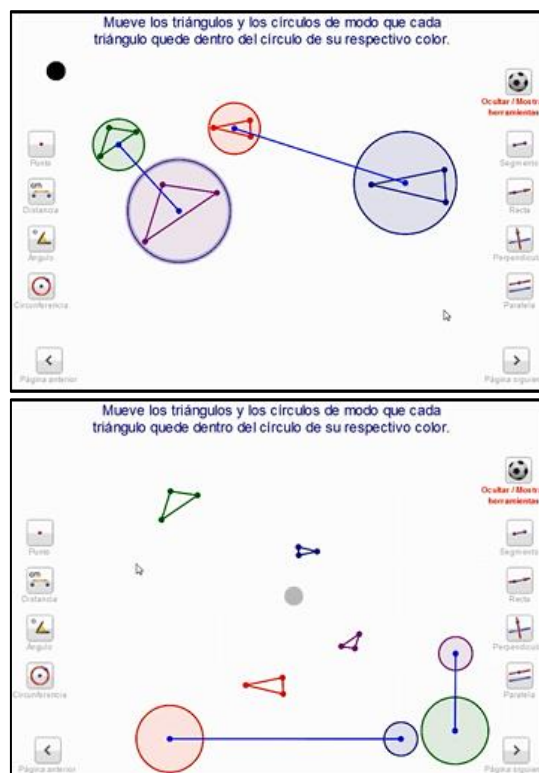
19 E2 (Ajusta gradualmente la distancia
entre los dos triángulos
homotéticos: rojo y azul hasta
lograr meterlos en los círculos
correspondientes)



20 E2 (Rápidamente, ajusta la distancia
entre los triángulos homotéticos:
verde y violeta y arrastra los
círculos correspondientes hasta
que los triángulos quedan dentro
de ellos).

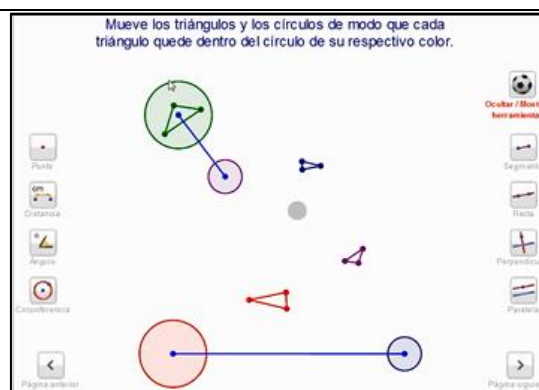
- 22 E1 (Presiona el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea anterior con el centro de homotecia en otra posición y razón menor que cero).

[Lee la consigna] Mueve los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de su respectivo color.

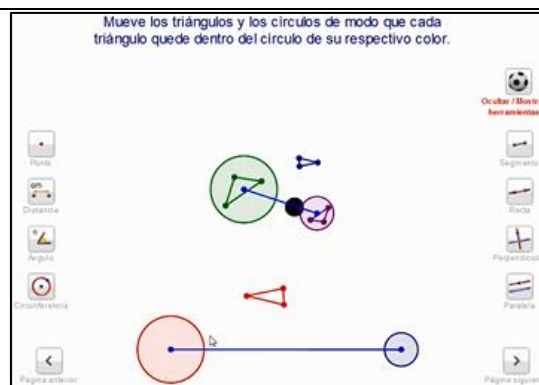


- 23 E1

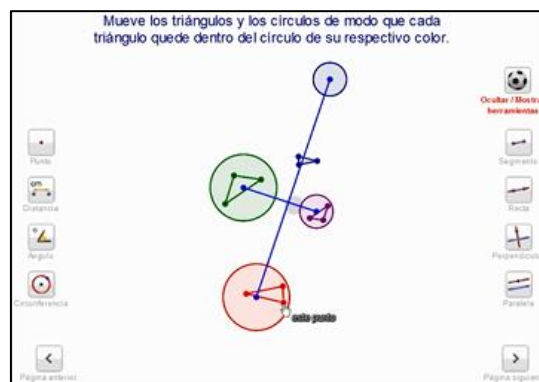
(Arrastra el triángulo círculo verde hasta el triángulo correspondiente).



- 24 E1 (Arrastra el triángulo verde y lo acerca a su pareja, el violeta. Luego ajustando la distancia entre ellos, logra meter ambos triángulos en los círculos correspondientes).

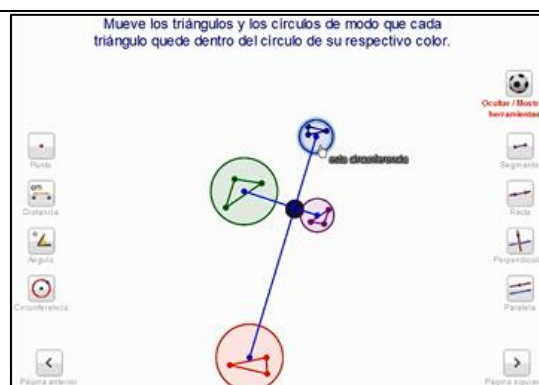


- 25 E1 (Arrastra el círculo rojo hasta el triángulo correspondiente y rota el círculo azul hasta que los dos círculos y los dos triángulos correspondientes quedaran parcialmente alineados con el centro).

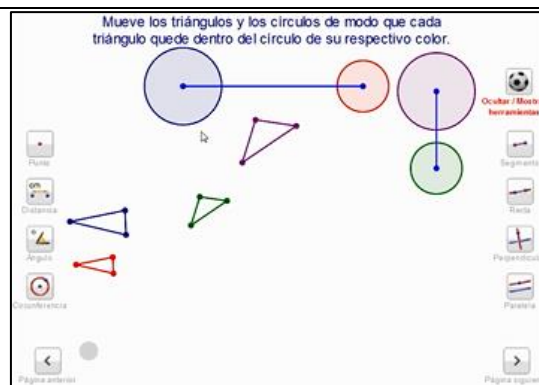


- 26 E2 Tiene que hacer que se alejen más.

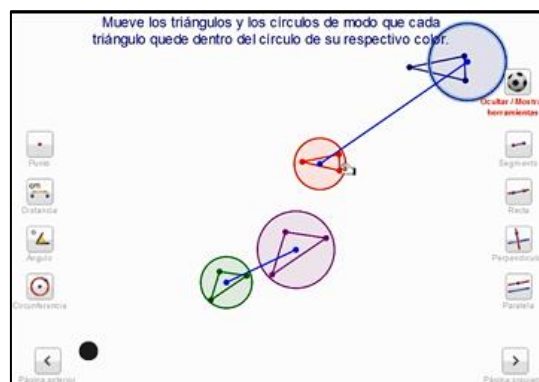
- 27 E1 (Ajusta gradualmente la distancia entre los dos círculos rojo y azul, arrastrando el círculo rojo, hasta lograr meter los triángulos correspondientes dentro de ellos).



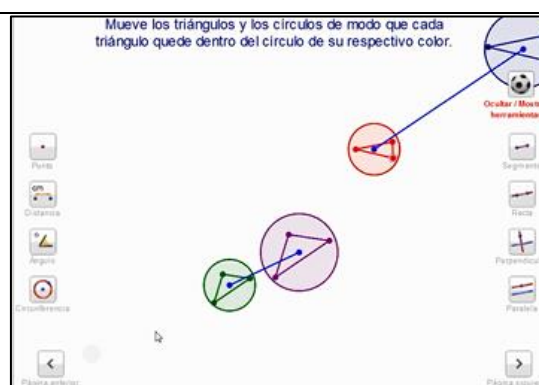
- 28 E1 (Presiona el botón *Página siguiente* y nuevamente aparece la página donde se sugiere ceder el ratón. En ella presiona el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea con el centro de homotecia en otra posición y razón mayor que cero).



- 32 E2 (Mediante ajustes graduales logra meter una pareja de triángulos en los círculos correspondientes. Luego intenta meter la otra pareja de triángulos en los otros círculos).

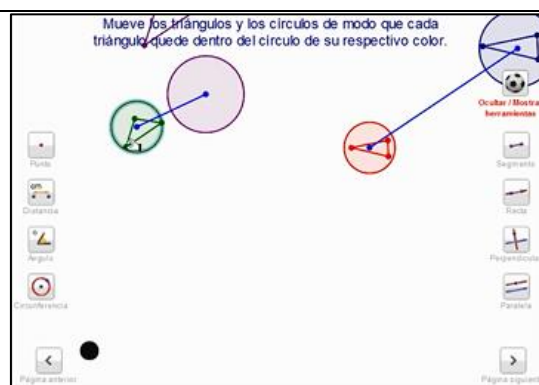


- 33 E1 Sí (a ensayo y error logra meter la otra pareja de triángulos en los círculos correspondientes).



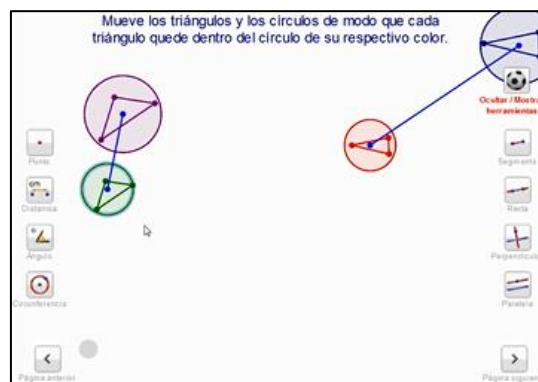
- 34 P Espere antes de avanzar... ¿Puede mover los círculos, el verde y morado en otro lugar donde pueda meter los triángulos, que no sea esa posición?

- 35 E1 O sea que pueda... Digamos este por acá y este por acá... Pero entonces no sería la misma medida (dice mientras arrastra el círculo verde y luego el triángulo correspondiente a otra posición).



- 36 E1 (Arrastra nuevamente el triángulo verde y los círculos hasta meter ambos triángulos en los círculos correspondientes).

O sea que sí se puede.



Análisis de la tarea

Como esperábamos, en la tarea de introducción los alumnos superponen los triángulos en el centro de homotecia, luego ubican el círculo en dicha posición y se activa la retroacción que muestra el texto *“en las siguientes tareas, este punto negro indicará la posición donde los triángulos se superponen”* y un punto negro titilante que representa el centro de homotecia (1-3). Al parecer los alumnos tomaron conciencia de esto. La única evidencia que tenemos es cuando el alumno dice: *“Ya, Ahí se superponen...”* (6) y deciden avanzar a la página siguiente.

Luego en la tarea, inicialmente observamos un reconocimiento del funcionamiento del dispositivo formado por dos círculos unidos a un segmento de longitud fija, mediante la acción del arrastre (10-17). Rápidamente desarrollan una estrategia de solución que consiste en ajustar la distancia entre los triángulos hasta que sea igual a la distancia entre los círculos correspondientes y luego arrastrar éstos últimos, para que los triángulos queden dentro de ellos. Por lo tanto hubo un aprendizaje por adaptación y el conocimiento construido es que la distancia entre los triángulos varía y que es posible hacer que esa distancia aumente o disminuya. Sin embargo, no tenemos evidencias de que hayan tomado conciencia de que la distancia entre los triángulos homotéticos varía conforme se acercan o se alejan del centro de

homotecia. Constatamos la necesidad de una intervención didáctica para promover esa toma de conciencia, intervención que corresponde al profesor, quien podría preguntar por ejemplo: Si se quiere aumentar o disminuir la distancia entre los dos triángulos, ¿hacia dónde debe arrastrarse el triángulo inicial? O también podría automatizarse como una retroacción didáctica.

Análisis de la secuencia

Al repetir la tarea con distintas configuraciones con diferente posición del centro y razón de homotecia, los alumnos reforzaron la acción de ajustar la distancia entre los triángulos, hecho que podemos sustentar porque resuelven la tarea más rápido conforme avanzan en las series usando la misma estrategia (10-36).

Un hecho particular sucedió en la última serie (33-36) cuando el profesor preguntó: *“¿Puede mover los círculos, el verde y morado en otro lugar donde pueda meter los triángulos, que no sea esa posición?”* luego de que el alumno había resuelto la tarea. El alumno entiende la pregunta y finalmente mediante el arrastre de los triángulos y el dispositivo formado por los círculos, toma conciencia de que hay distintos lugares de la pantalla donde los triángulos quedan a la misma distancia.

Análisis de las retroacciones didácticas

Como mencionamos anteriormente, los alumnos comprendieron rápidamente el funcionamiento del dispositivo de los círculos. Y esta retroacción didáctica fue la que permitió que los alumnos tomaran conciencia de la posibilidad de ajustar la distancia entre los triángulos. Por lo tanto esta retroacción produjo el efecto que esperábamos, de acuerdo con lo propuesto en el análisis a priori.

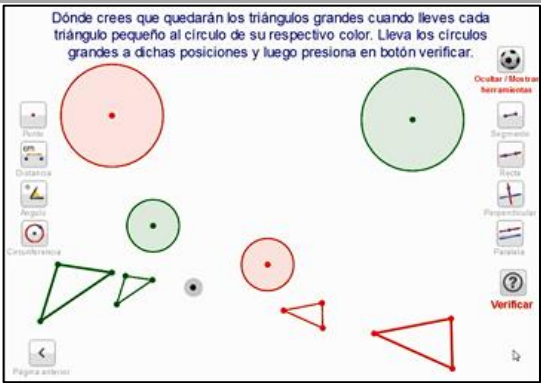
Por el contrario, la retroacción didáctica de mostrar un punto negro titilante no tuvo el efecto esperado de hacer que los alumnos consideraran la distancia entre el centro de homotecia y los triángulos como parte de la estrategia de solución.

Por otra parte, las herramientas de construcción disponibles, con el objetivo de que los alumnos logren ubicar los círculos con mejor precisión en caso de requerirlo, no fueron usadas por los alumnos.

8.2.2 Segunda secuencia

En primer lugar presentamos los datos que soportan el análisis se hace a continuación de ellos.

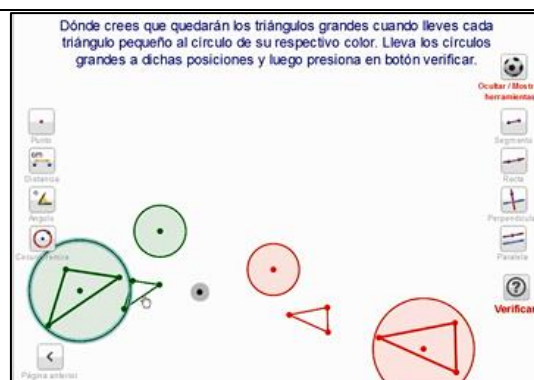
Tabla 5 Datos segunda secuencia segunda actividad.

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E1	(se muestran dos parejas de triángulos homotéticos con respecto al punto negro que permanece visible y titilante, una pareja de color rojo y otra verde; dos parejas de círculos: una roja y otra verde; 8 herramientas de construcción: <i>Punto, Distancia, Ángulo, Circunferencia, Segmento, Recta, Recta perpendicular y Recta paralela</i>; tres botones: <i>Verificar, Página anterior</i> y <i>Ocultar/Mostrar herramientas</i> y la consigna “¿Dónde crees que quedarán los triángulos grandes cuando lleves cada triángulo pequeño al círculo de	

su respectivo color? Lleva los círculos grandes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar”).

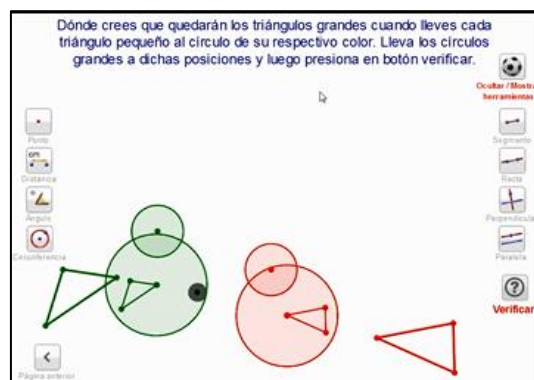
[Los círculos imagen se dejan arrastrar, mientras que los círculos preimagen, los triángulos y el punto negro están fijos].

- 2 E1 [Lee la consigna] ¿Dónde crees que quedarán los triángulos grandes cuando lleves cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color? Lleva los círculos grandes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar.
- (Arrastra los círculos grandes hasta los triángulos correspondientes).



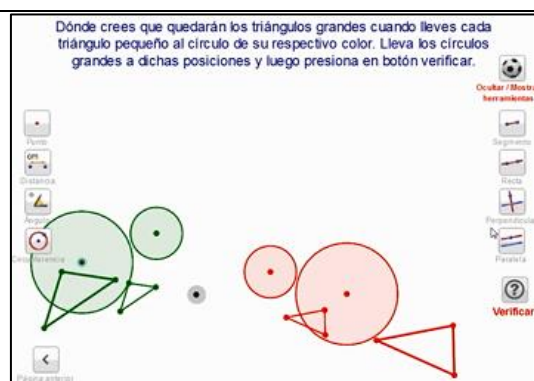
- 3 E2 Tiene que ponerlos donde van a quedar.

- 4 E1 Intenta arrastrar los círculos pequeños y los triángulos pero no lo logra. Luego arrastra los círculos grandes hasta los triángulos pequeños de su respectivo color.

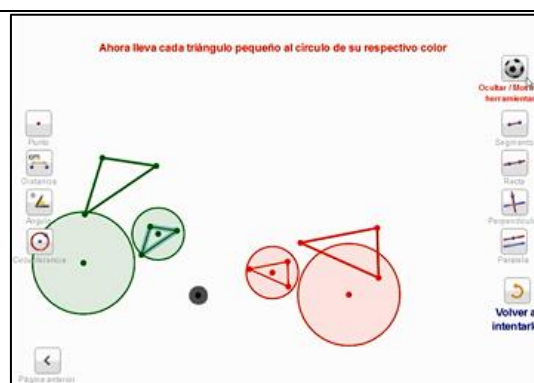


- 9 P ¿Cree que ese círculo que ubicó aquí (señala el círculo rojo grande) está dónde quedará este triángulo (señala el triángulo rojo grande) cuando lleve este (señala el triángulo verde pequeño) al círculo pequeño?

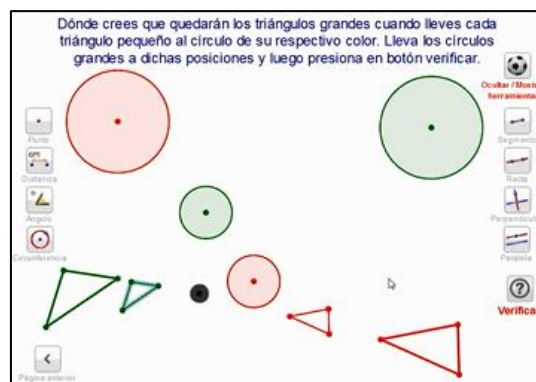
- 13 E1 ¡Ah! Ya entendí... Si yo corro el pequeño... (Mueve los círculos grandes en otra posición)



- 15 E1 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).
¡Ah! Ya, ya, ya...



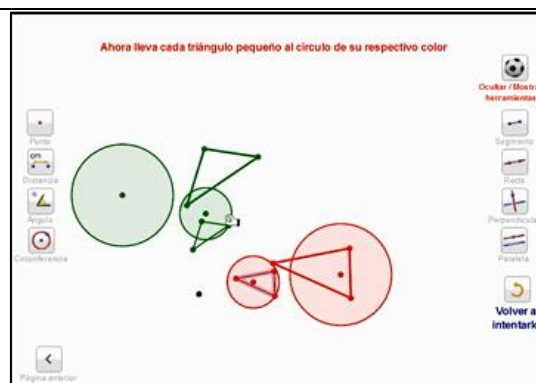
- 16 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con los círculos pequeños en otra posición y los círculos grandes en las posiciones iniciales).



(Observa la pantalla algunos segundos).

¿Estos cómo se mueven? Unos para un lado y los otros para el otro... ¿Cierto? Depende de cómo vayan los triángulos... O sea que el otro lo va siguiendo.

- 19 E1 (Presiona el botón *Verificar* y arrastra el triángulo rojo al círculo de su respectivo color, luego arrastra el triángulo verde pequeño).

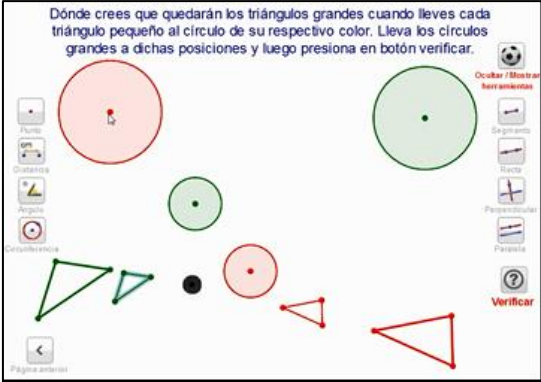
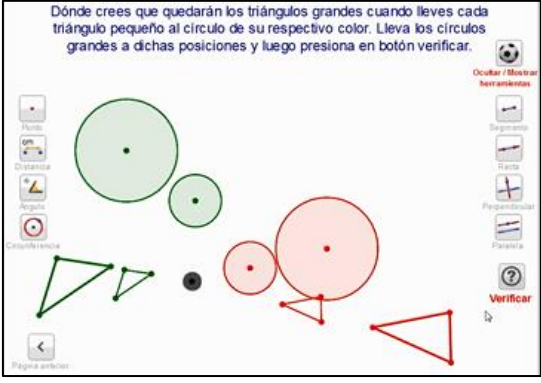
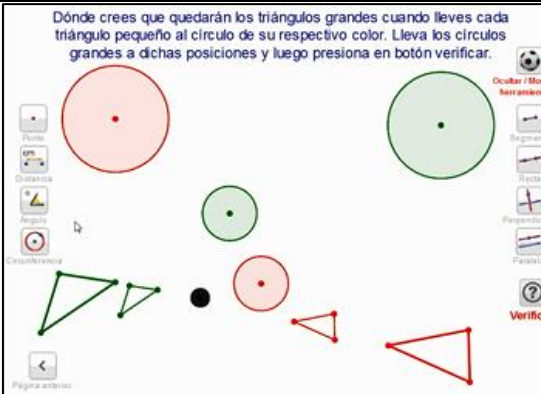


Pero es que este lo sigue y este no (señala el triángulo rojo pequeño y luego el verde pequeño).

- 20 P ¿Cómo así que este sí y este no?

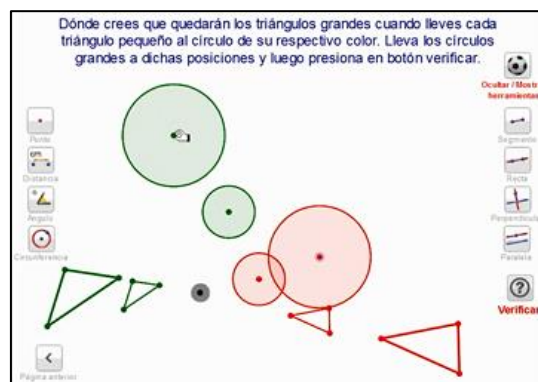
- 21 E1 Que este lo va siguiendo (arrastra el triángulo verde pequeño) y este va al

contrario (arrastra el triángulo rojo pequeño).

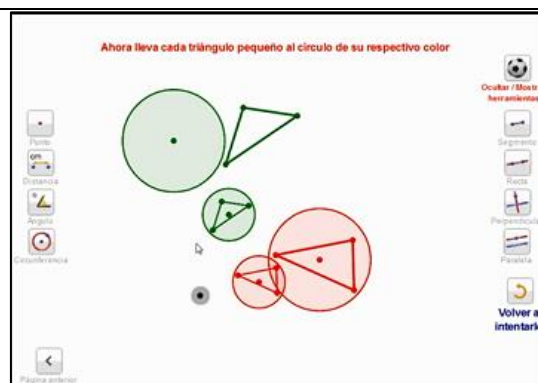
24	E1	(Presiona el botón <i>Volver a intentarlo</i> y la tarea se reinicia con los círculos pequeños en una posición ligeramente distinta a la anterior y los círculos grandes en las posiciones iniciales).	
33	E1	Y este va a subir hasta acá y este lo va acompañar como hasta por aquí (ubica allí el círculo verde grande).	
35	E1	(Hace clic en el botón <i>Volver a intentarlo</i> y la tarea se reinicia con los círculos pequeños en una posición distinta a la anterior y los círculos grandes en las posiciones iniciales).	
37	P	¿Por qué allí y no más arriba o más abajo o más a la izquierda o más a la derecha?	

- 38 E1 Porque yo al mover este aquel no se va a mover como se va a mover este (señala ambos triángulos rojos).

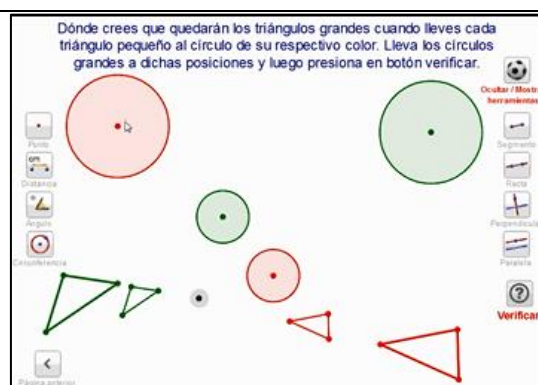
En cambio cuando este suba, este se va a separar (señala el triángulo verde pequeño y luego el grande). Entonces el círculo quedaría como por acá (ubica el círculo verde grande).



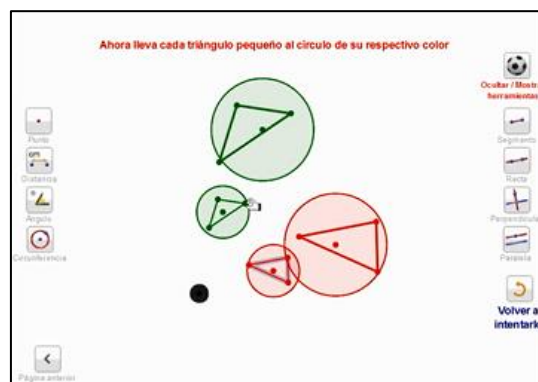
- 46 E1 (Mete los triángulos pequeños en sus respectivos círculos).



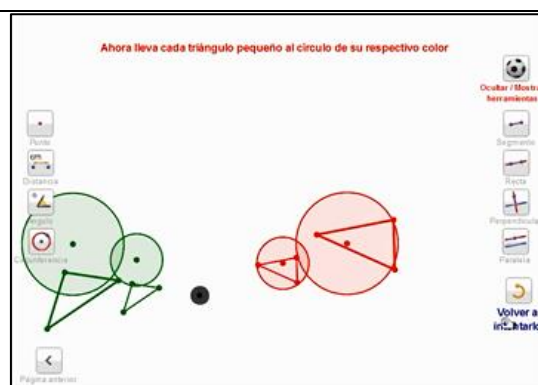
- 48 E1 Un poquito (presiona el botón *Volver a intentarlo* pero los círculos pequeños aparentemente no cambian de posición. Los círculos grandes retornan a las posiciones iniciales).



- 54 E1 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes. Un punto del triángulo verde grande queda por fuera del círculo respectivo).

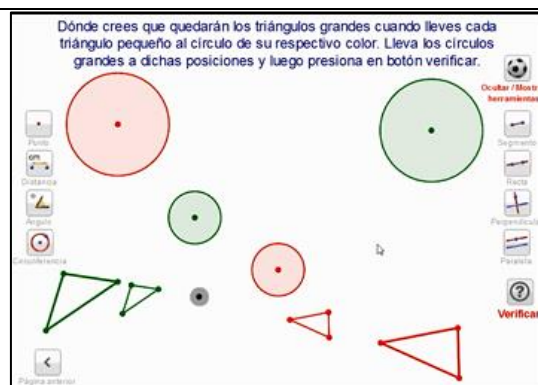


- 59 E1 Presiona el botón *verificar* y arrastra el triángulo rojo pequeño al círculo correspondiente.

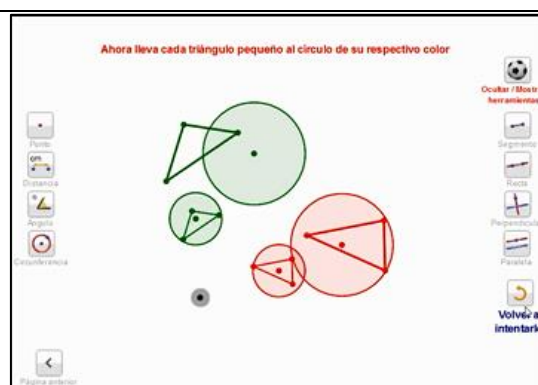


- 60 E2 Le faltó poco... Pero siempre es la misma, por qué no lo ubica ahí.

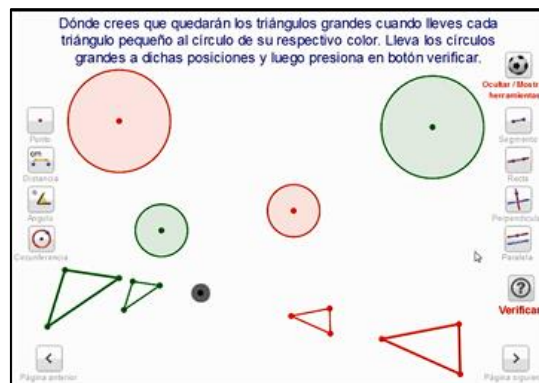
- 61 E1 No, no es la misma (presiona el botón *Volver a intentarlo*).



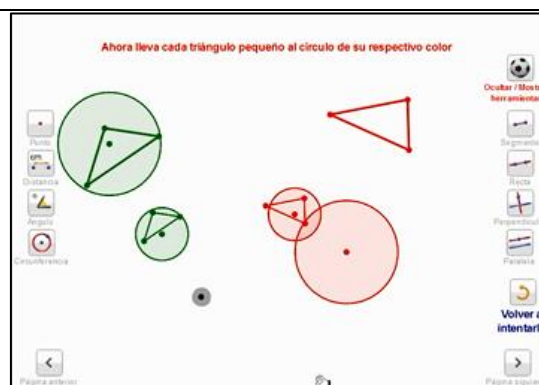
- 63 E1 (Mete los triángulos pequeños dentro de los círculos correspondientes).



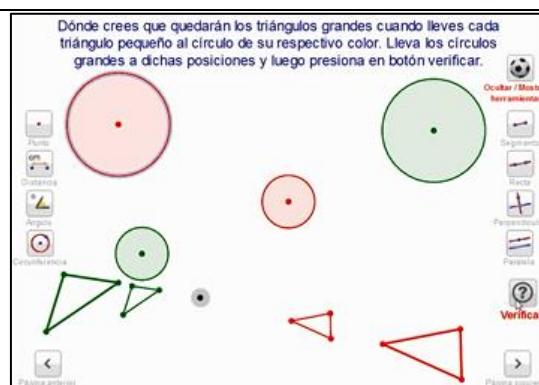
- 64 E2 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia).



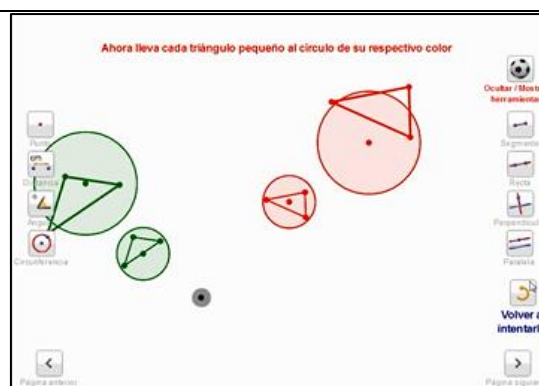
- 66 E2 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).
¿Y ahora por qué se separaron?



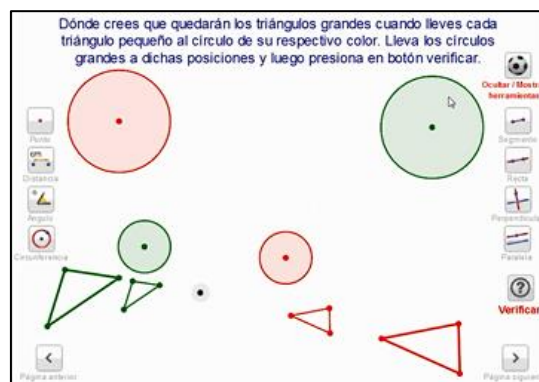
- 67 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).



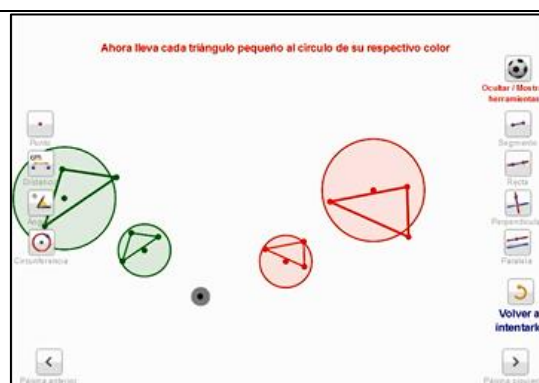
- 69 E2 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).



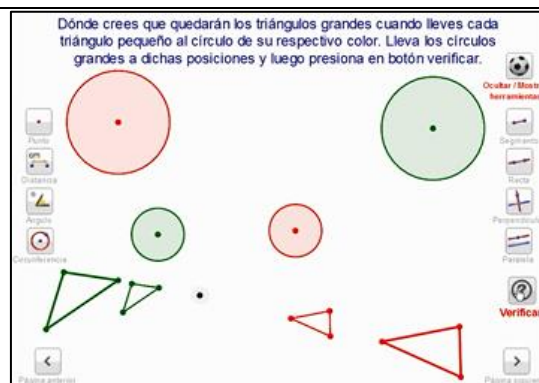
- 70 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).



- 72 E2 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).



- 73 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).

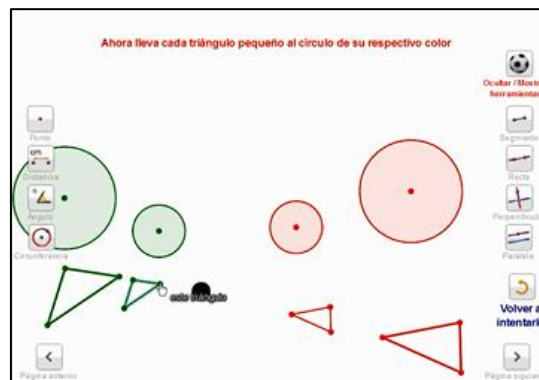


- 74 P ¿Cuál es la estrategia que están usando para resolver la tarea?

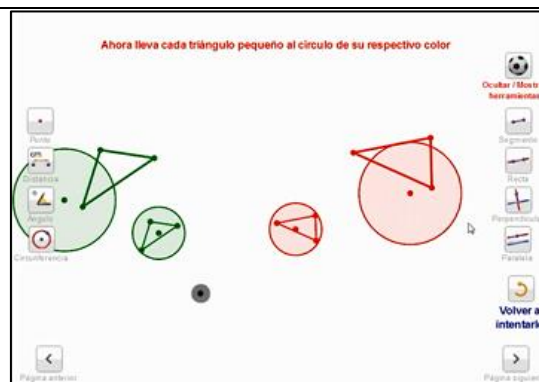
- 75 E2 Depende de cómo estén ubicado los triángulos..

- 76 P Y cómo usan eso para ubicar los círculos.

- 77 E1 Ya me di cuenta de algo, un dedito, dos deditos... (Ubica los círculos grandes y presiona el botón *Verificar*).

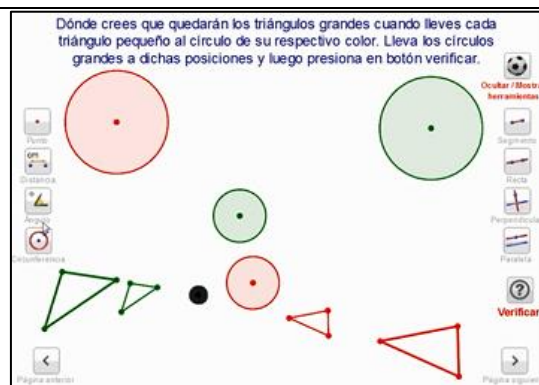


- 78 E1 (Mete los triángulos pequeños en los los círculos correspondientes).
¡Por poquito!



- 79 P ¿Qué fue lo que midió? Ahí tiene herramientas para medir.

- 80 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).
¡Ah!

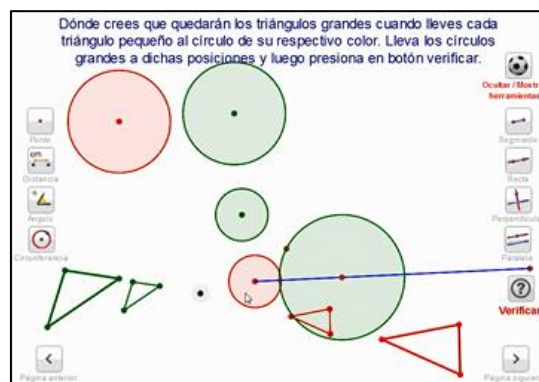


- 81 P ¿Qué era lo que medía? Usted decía, dos deditos, entonces aquí lo va a medir con precisión.

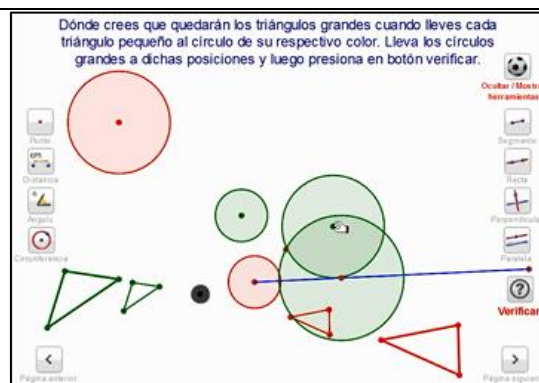
82 E1 (Construye un segmento y luego un círculo, como se muestra en la figura).

Póngale cuidado, al subir este (señala el triángulo rojo pequeño) este subiría (señala el triángulo rojo grande).

Eso sería donde no lo deberíamos ubicar (señala la región limitada por el círculo que construyó), porque si lo ubicamos ahí... Sería más arriba.



83 E1 Entonces el círculo iría como por acá... (Ubica el círculo).

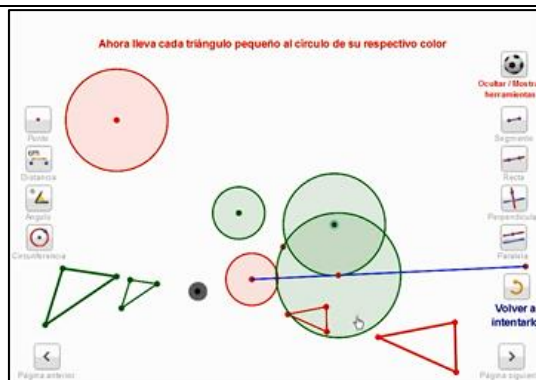


84 P ¿Por qué allá?

85 E1 Porque al subir este (señala el triángulo rojo pequeño), sería la misma distancia que estos (señala los dos triángulos rojos). Es que le sigue pero hacia arriba. Si usted lo coge y lo lleva hacia encima, el otro... Digamos así, se abre, se aleja del chiquito. Y si lo llevamos hacia abajo, él se pega.

86 P Dele verificar.

87 E1 Espere a ver si sirve (presiona el botón *Verificar*).



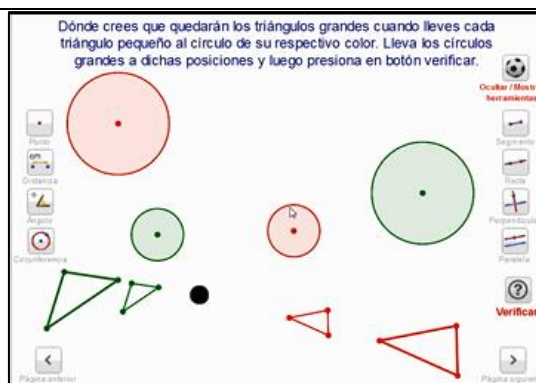
88 E1 Vea, este hacia arriba, se leja (arrastra el triángulo rojo pequeño hacia la parte superior de la pantalla).

89 P Arrástrelo hacia abajo.

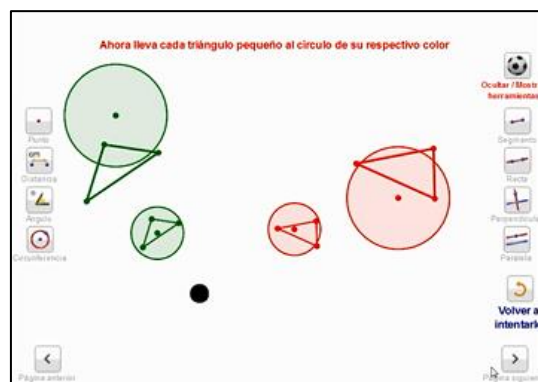
90 E1 (Arrastra el triángulo rojo pequeño por toda la pantalla).
¡Ah! En los extremos se aleja y en la mitad se acerca.

91 E2 Cuando llega al punto es donde se acercan. Cuando se aleja del punto negro es que se separan. ¿Sí ve...? ¿Sí entendió?

92 E1 Sí (presiona el botón volver a intentarlo).



- 93 E1 Entonces, si subimos este acá (señala el triángulo rojo pequeño y el círculo correspondiente).



(Ubica los círculos grandes, presiona el botón *Verificar* y mete los triángulos pequeños en los círculos respectivos)

No profesor, sinceramente no somos capaces. Está muy difícil.

-
- 84 E2 Está difícil y estamos muy cansados.

-
- 85 P Entonces paremos aquí.
-

Análisis de la tarea

En los renglones 1-15 observamos un proceso de devolución donde los alumnos buscan comprender el problema. Gracias a las intervenciones del profesor y a las retroacciones de bloqueo y desbloqueo de los triángulos y los círculos, los alumnos toman conciencia de que la tarea consiste en anticipar dónde quedará uno de los triángulos cuando su homotético es llevado a otra posición.

Luego de que los alumnos entendieron en qué consistía el problema, en distintas oportunidades ubicaron los círculos sin usar la alineación ni las distancias. Además uno de

los alumnos en principio consideraba que una pareja de triángulos tenía comportamiento distinta a la otra: *“Pero es que este lo sigue y este no”, “este lo va siguiendo y este va al contrario”*. Esto probablemente se debe a que en los primeros intentos, el círculo rojo pequeño no cambiaba significativamente de posición (2-63) y uno de los estudiantes interpretó los círculos rojos conservaban la orientación horizontal, mientras que los verdes no. Pero luego en el séptimo intento (64) ambos círculos pequeños cambian relevantemente su posición y el alumno toma conciencia de que ambas parejas de triángulos tienen el mismo comportamiento.

Uno de los alumnos a partir del sexto intento, empezó a garantizar la alineación, pero sin precisar las distancias de los triángulos al centro (53, 68 y 71). Esta estrategia fue usada en la acción tres veces, empero no fue formulada en ningún momento y a pesar de que no fue abandonada, no fue suficiente para lograr resolver la tarea.

Los alumnos intentaron usar las herramientas para medir por sugerencia del profesor (77-87), pero no es claro el tipo de mediciones que hacen. Posteriormente uno de ellos logra formular el conocimiento necesario para anticipar: *“Cuando llega al punto es donde se acercan. Cuando se aleja del punto negro es que se separan”* (91), pero no lo usa en la acción. Al parecer ninguno de los dos relaciona completamente esta actividad con la anterior.

Consideramos que la complejidad del problema no permite que las retroacciones matemáticas y la posibilidad de validar las estrategias, sean suficientes para que los alumnos logren resolver la tarea. Aparentemente la coordinación de la alineación y la proporcionalidad no es fácil de lograr. Por lo tanto sugerimos dos tareas previas; una donde se dé la alineación y se solicite la distancia y otra donde se den las distancias y se solicite la alineación. Luego proponer esta tarea. También podría facilitar una tarea de ayuda donde se expliciten de alguna manera estas propiedades para que los alumnos tomen conciencia de ellas.

Otro aspecto que pudo haber influido fue el tiempo con el que contaron los alumnos, posiblemente si hubieran contado con más tiempo, aparecerían nuevas estrategias mediante un proceso de adaptación al medio.

Análisis de las retroacciones didácticas

Nuevamente, los botones de verificación y evaluación surtieron el efecto esperado. Los alumnos lograron comprender el problema y validar cada una de sus estrategias aunque no hayan resuelto el problema.

En esta secuencia inicialmente los alumnos no tuvieron en cuenta la retroacción que muestra el punto titilante. Sin embargo, luego con la sugerencia del profesor de arrastrar el triángulo por toda la pantalla (88) uno de los alumnos toma conciencia de la relación entre este punto y los triángulos: *“Cuando llega al punto es donde se acercan. Cuando se aleja del punto negro es que se separan”* (91), pero como ya mencionamos, no usan este hecho para establecer relaciones entre las distancias de los triángulos a él, más allá de que los triángulos se superponen en ese punto. Por lo tanto esta retroacción tuvo un funcionamiento parcial con respecto a lo que habíamos previsto en el análisis a priori.

Aunque los alumnos intentaron usar las herramientas de construcción de las que disponían, no usaron, ni la herramienta *Recta* ni la herramienta *Distancia*. De modo que no hubo formulación de ninguna de las dos propiedades (alineación y proporcionalidad) mediante herramientas de construcción, como lo habíamos propuesto en el análisis a priori.

9. Conclusiones

A diferencia de otros software de geometría dinámica, Cabri Elem, además de las retroacciones matemáticas, ofrece herramientas que permiten programar otro tipo de retroacciones: mostrar un texto; resaltar, mostrar, ocultar o impedir el arrastre de uno o más objetos; enviar a otra tarea; decidir cuáles herramientas ofrecer al alumno y cuándo mostrarlas; etc. Las novedades de este software nos llevaron a la necesidad de distinguir las retroacciones matemáticas de las retroacciones didácticas, para caracterizar estas nuevas herramientas; haciéndonos reflexionar sobre las posibilidades de aprendizaje que podrían generar el funcionamiento de estas retroacciones en situaciones adidácticas. Entonces, el nuevo término: retroacciones didácticas surge de la necesidad de entender qué es lo que ofrece Cabri Elem que no ofrecen los demás software de geometría dinámica, generando una nueva forma de concebir las situaciones adidácticas que se pueden proponer utilizando Cabri Elem como medio.

Un avance importante para la teoría es describir el rol de las retroacciones didácticas en el diseño de situaciones, con el objetivo de producir aprendizaje por adaptación. Precisamente, en los diseños que realizamos, logramos explicitar el rol de las retroacciones didácticas y su impacto en el aprendizaje por adaptación al poner a los alumnos en interacción con el medio diseñado.

Diferenciamos cuatro roles de las retroacciones didácticas:

1) **Retroacciones para la gestión y articulación de las tareas.** Por ejemplo, las que permiten pasar a la página siguiente, reiniciar las tareas, enviar a una tarea de ayuda, permitir el avance sólo cuando se cumplan ciertas condiciones, entre otras.

2) **Retroacciones para constituir actos de devolución.** Cuando se muestra un texto donde se propone una pregunta para hacer comprender el problema, mostrar botones cuya programación ejecuta respuestas que favorecen la interpretación de la tarea, etc.

3) **Retroacciones para promover el proceso de validación.** Ejemplo de estas son las que generan una evaluación del trabajo de los alumnos, también las que permiten y bloquean ciertas acciones hasta que el alumno cree que ha resuelto la tarea y luego de presionar un botón, se impiden las que estaban permitidas y se posibilitan las que estaban bloqueadas, con el objetivo de que el alumno pueda verificar su solución.

4) **Retroacciones para explicitar o resaltar propiedades que no son fácilmente perceptibles.** Por ejemplo, mostrar objetos por un instante o permanentemente, hacer titilar objetos, bloquear el desplazamiento de objetos, etc.

De acuerdo a los resultados del pilotaje, las retroacciones del primer tipo funcionaron como esperábamos básicamente en todos los casos, las del segundo y tercer tipo en la mayoría y las del cuarto tipo sólo funcionaron en algunos.

La TSD propone que el conocimiento se manifiesta en la acción, en la formulación y en la validación. Además, que el sujeto debe tomar conciencia de que hay una relación de causalidad entre sus acciones y las retroacciones del medio, de modo que pueda anticipar el efecto y alcance de sus acciones antes de efectuarlas. En el análisis a priori mostramos cómo usamos este resultado teórico y las retroacciones didácticas para bloquear las estrategias perceptivas de los alumnos de modo que anticipen, validen y formulen el conocimiento. Por ejemplo, en la segunda secuencia de la primera actividad, bloqueamos el movimiento de las letras homotéticas para que los alumnos tengan que anticipar la posición del centro de homotecia. En efecto, si los alumnos tuvieran la posibilidad de arrastrar las letras, encontrarían la posición del centro de homotecia mediante ajustes graduales bajo un control

meramente perceptivo; al no poder realizar estos ajustes, se ven obligados a utilizar conocimientos o controles no exclusivamente perceptivos para determinar esa posición. Luego permitimos el movimiento de las letras para que las retroacciones matemáticas confirmen o no el juicio del alumno sobre su propuesta de solución. En efecto, para tener acceso a esas retroacciones matemáticas el alumno debe oprimir un botón, significando de esta manera, que considera haber terminado la tarea; las retroacciones matemáticas vendrán entonces a contrastar esa decisión, posibilitando la validación por parte del estudiante.

En otras palabras, usamos las retroacciones didácticas para darle al medio una configuración determinada y obtener un modelo de interacción adidáctico donde se produce aprendizaje por adaptación.

De acuerdo con lo expuesto en el análisis a priori, resaltamos las siguientes potencialidades de las retroacciones didácticas que permite programar Cabri Elem: propiciar el proceso de validación en la interacción adidáctica, automatizar actos de devolución, facilitar herramientas que permiten enlazar distintas tareas, ofrecer distintas posibilidades de diseño, controlar las acciones que puede realizar el alumno sobre el medio y ofrecer respuestas en función de las acciones de los alumnos. Estas son herramientas importantes para producir aprendizaje por adaptación, y constituyen el potencial del software.

Aunque Cabri Elem ofrece muchas posibilidades de programación de retroacciones didácticas, también presenta algunas limitaciones. Por ejemplo, si quisiéramos automatizar una evaluación sobre un objeto que los alumnos construyen durante la interacción con el software, no es posible porque Cabri Elem no permite ejecutar acciones sobre objetos que aún no han sido contruidos.

EL pilotaje realizado nos permitió confirmar muchas de las hipótesis propuestas en el análisis a priori. Por ejemplo, gracias a las posibilidades de programación de Cabri Elem logramos provocar actos de devolución: los alumnos comprendieron algunos problemas propuestos, mediante retroacciones didácticas de evaluación que se ejecutaban al presionar botones presentes en la pantalla; conseguimos automatizar respuestas en el software que explicitan propiedades de la homotecia, propiciando que los alumnos tomaran conciencia de ellas y que las usaran para resolver problemas propuestos; los alumnos en muchos casos lograron validar sus acciones gracias a retroacciones didácticas de bloqueo y desbloqueo del arrastre de objetos presentes en la pantalla. En la segunda secuencia de la primera actividad, las retroacciones de bloqueo y desbloqueo del arrastre del círculo y las letras permitieron que los alumnos tomaran conciencia de la posibilidad de anticipar el lugar donde las figuras homotéticas se superponen; gracias a esa toma de conciencia los alumnos comprendieron la naturaleza del problema (encontrar una estrategia para anticipar ese lugar), por lo tanto estas retroacciones didácticas funcionaron como un acto de devolución. Esta retroacción, además de permitir la toma de conciencia de la posibilidad de anticipar, obliga a los alumnos a decidir cuándo han terminado la tarea y esta es una decisión de validación. De manera que cuando verifican su solución, realmente se confirma o refuta dicha validación.

Igualmente, en la tarea de ayuda de la segunda secuencia de la primera actividad, la retroacción didáctica que explicita y resalta la alineación de las figuras homotéticas y el lugar donde se superponen, permitió que los alumnos tomaran conciencia de esta propiedad y la usaran para anticipar la posición del centro de homotecia en los casos donde la razón de homotecia era positiva. En los casos donde la razón de homotecia era negativa, la retroacción no tuvo este efecto.

Un último ejemplo es el de la primera serie de la segunda actividad, donde la retroacción didáctica correspondiente al dispositivo formado por los círculos unidos a un segmento fijo fomentó que los alumnos tomaran conciencia de que la distancia entre las figuras homotéticas podía variar. Pero no logró que los alumnos tomaran en cuenta el centro de homotecia y lo usaran para relacionarlo con esa variación.

Constatamos la pertinencia de las retroacciones didácticas en los casos donde las retroacciones matemáticas no son suficientes para que los alumnos tomen conciencia de algunas propiedades. Por ejemplo, en la segunda secuencia de la segunda actividad, donde se pedía a los alumnos anticipar la posición de una figura cuando su homotética es llevada a otra posición, no fue suficiente que los alumnos arrastraran las dos figuras homotéticas para que relacionaran la distancia entre ellas y el centro de homotecia. Consideramos que en este caso es pertinente proponer una retroacción didáctica que sugiera a los alumnos reflexionar sobre la distancia de dos figuras homotéticas al centro.

Una de las limitaciones que tuvimos durante el diseño fue la falta de conocimiento sobre la forma en que los alumnos perciben las propiedades implícitas en el dibujo. Particularmente, la alineación de las figuras homotéticas y el centro y la proporcionalidad entre las distancias de cada par de vértices homotéticos al centro. Por ejemplo en el caso donde la razón de homotecia era positiva los alumnos percibían la alineación más fácil que en los casos donde la razón era menor que cero. De acuerdo con esto, sugerimos recomendaciones en dos sentidos: el primero es diseñar experimentos que nos ofrezcan información sobre la forma de percibir las propiedades y el segundo es diseñar actividades que utilicen ese conocimiento para superar dichas dificultades.

Aunque los resultados del pilotaje confirman muchas de las hipótesis del análisis a priori, estas evidencias tienen un carácter limitado, pues se trabajó únicamente con dos estudiantes.

Se recomienda hacer la experimentación con un mayor número de estudiantes con el fin de generalizar los resultados obtenidos.

Este trabajo sienta las bases de una nueva línea de investigación, puesto que es necesario seguir indagando sobre el rol de las retroacciones en el diseño de situaciones adidácticas, de modo que se puedan obtener más resultados que ratifiquen o modifiquen las propuestas en este primer intento. Otro tema de investigación en esta línea podría ser el rol del profesor durante el proceso de interacción de los alumnos con situaciones que involucran retroacciones didácticas.

Referencias bibliográficas

- Acosta, M., Delgado, P. y Corzo, O. (2010). *Nuevas tecnologías en la enseñanza del concepto de traslación*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica
- Bautista, L. y Peralta, M. (2011). *Conceptualización de la homotecia en estudiantes de sexto grado*. Tesis de especialización no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Cornu, B. y Ralston, A. (Eds.). (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Unesco.
- Drijvers, P., Kieran, C., y Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles y J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: rethinking the terrain* (pp. 89–132). New York: Springer.
- Gómez, M. y Ávila, A. (2010). *Una mirada teórica sobre la conceptualización de la traslación en sexto grado a través de un aprendizaje por adaptación*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Hoyles, C. (Ed.) (2009). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain*. New York, NY: Springer.
- Lemonidis, C. (1990). Une analyse de la complexité cognitive de la notion d'homothétie. *Pedagogies. Cahiers du Laboratoire de Pédagogie Expérimentale de l'universite de Louvain*. No.1, pp. 71-79, Bruxelles.

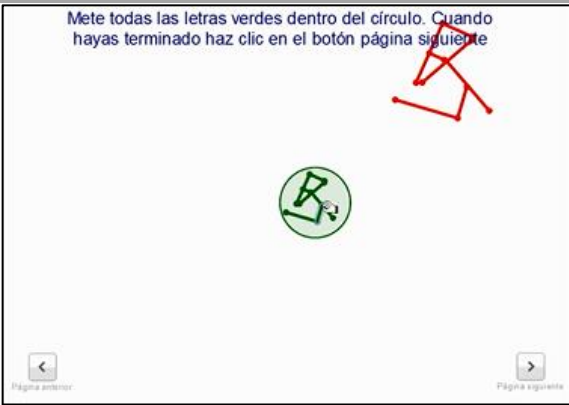
- Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 11(23) 295-324, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander Ediciones.
- Margolinas, C. (Ed.). (2013). *Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22 (Vol. 1). Oxford.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Talleres para la formación de docentes en el uso didáctico de nuevas tecnologías en la educación matemática*. Bogotá: Enlace editores ltda.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Rueda, K. y Monroy, M. (2009). *Conceptualización de la simetría axial y la traslación con el programa Cabri Geometry II*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Rueda, M. y Niño, A. (2013). *Automatización de actos de devolución en el software Cabri Im*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Industrial de Santander.

Apéndices

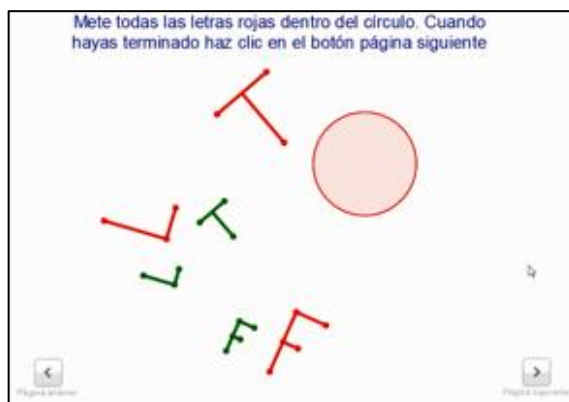
A continuación presentamos la transcripción completa de la experimentación de las actividades con una pareja de alumnos de noveno grado de la Institución Educativa las Américas de Bucaramanga. Estos alumnos habían usado previamente el software de geometría dinámica Cabri II, de modo que conocen algunas herramientas básicas de construcción. La recolección de los datos se realizó grabando la pantalla del computador y el audio.

Los resultados de la experimentación los exponemos mediante tablas de cuatro columnas, la primera para enumerar, la segunda para indicar el sujeto que ejecuta la acción (E1, E2 y P para indicar a los dos alumnos y al profesor respectivamente), la tercera para explicitar lo que el sujeto dice o hace (en esta columna usaremos la siguiente convención: si el texto aparece sin paréntesis, indica que es dicho por el sujeto, si aparece entre paréntesis redondos “()” indica que es algo que se observa en el video pero que no es dicho, por último, en los casos en los que no se entiende lo que sucedió y es necesaria una interpretación para exponerlo, el texto aparece entre paréntesis cuadrados “[]”), eventualmente en la cuarta columna aparece una o más imágenes cuando sean necesarias para aclarar.

Apéndice A. Primera secuencia actividad 1**Tabla 6 Datos primera secuencia Act 1.**

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E1	[lee la consigna] Mete todas las letras verdes dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente. ¿Con cuál empezamos? Empecemos con la T (arrastra la letra T verde hacia el círculo). Ahora esta (arrastra la letra F verde hacia el círculo). (Mete la letra L verde dentro del círculo). ¿La dejamos así?	
2	E2	Sí.	
3	E1	(Hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> y pasa a la segunda tarea). Ahora usted (cede el ratón a la compañera).	

- 4 E2 [lee la consigna] Mete todas las letras rojas dentro del círculo. Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente.
- Es lo mismo (intenta arrastrar varias veces la letra T roja sin lograrlo).



- 5 E1 Meta la F.

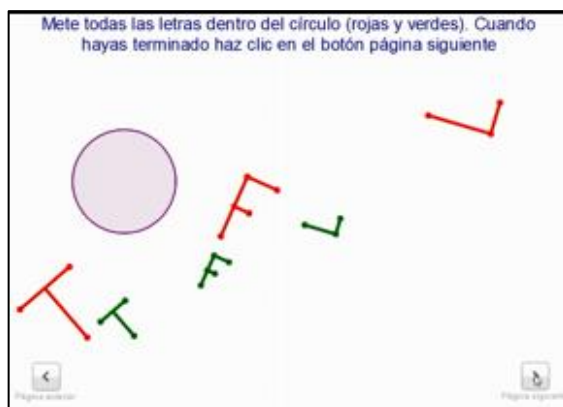
- 6 E2 Pero son las letras rojas (intenta arrastrar la letra F roja).
- ¿Cómo la agarro?

- 7 E1 ¡Ah! ¡Míre! ¡Así! (toma el ratón y arrastra la T verde).

- 8 E2 ¡Ah! ¡Ya! (arrastra una a una las letras verdes hasta que las rojas quedan dentro del círculo y luego hace clic en el botón *Página siguiente*, pasa a la tercera tarea y cede el ratón al compañero).



- 9 E1 [lee la consigna] Mete todas las letras dentro del círculo (verdes y rojas). Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente.
- (Arrastra cada letra verde hasta que las rojas quedan dentro del círculo y las verdes quedan por fuera).
- ¿Y ahora qué? ¿Y las verdes? (arrastra las letras verdes hacia el círculo).
- No entran (vuelve a meter las letras rojas arrastrando las verdes hacia fuera del círculo y vuelve a leer la consigna).



-
- 10 E2 ¡Haga otro círculo!
-
- 11 E1 Pero cómo se hace otro círculo, no hay instrucciones.
- (Intenta arrastrar el círculo sin lograrlo).
-
- 12 E2 ¿Se puede agrandar el círculo?
-
- 13 E1 No se puede (vuelve a intentar arrastrar el círculo).
-
- 14 E2 ¡Ah vea! (toma el ratón y arrastra la letra F verde y la junta con la F roja).
-
- 15 E1 El círculo debería estar por acá (señala la posición donde su compañera juntó las letras F).

16 E2 Es que tienen una distancia.

(Mete las letras verdes dentro del círculo y las rojas quedan por fuera).

¿No podemos dejarla así? Es que no se puede.

17 P ¡No sé! Como ustedes quieran.

18 E2 Vamos a continuar (hace clic en el botón *Página siguiente*).

[lee el letrero emergente] No has resuelto la tarea, ¿deseas continuar?

Digámosle sí (aparece el recuadro donde deben justificar porqué desean avanzar sin resolver la tarea).



19 P ¿Por qué no se puede resolver la tarea?

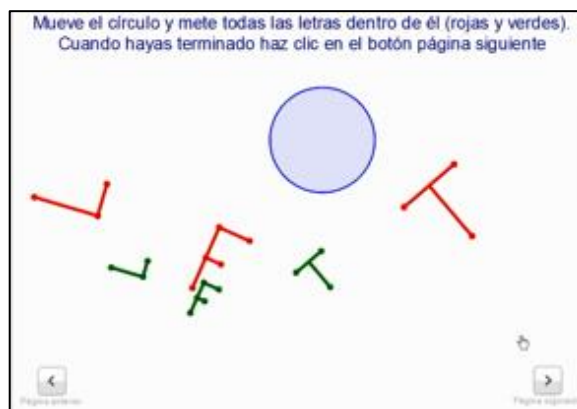
20 E1 Porque las letras tenían como un espacio y no se podían igualar.

21 E2 (Escribe en el recuadro: “No se pudo realizar la tarea porque la letra verde la que dirigía a la roja tenía una distancia que no las dejaban juntar en el círculo”).

22 E1 ¡Ya!, haga clic en *Página siguiente*.

- 23 E2 (Hace clic en el botón *Página siguiente* y pasa a la cuarta tarea).

[Lee la consigna y cede el ratón al compañero] Mueve el círculo y mete todas las letras dentro de él (rojas y verdes). Cuando hayas terminado haz clic en el botón página siguiente.



- 24 E1 (Arrastra el círculo).

¡Ah! ¡Esta sí se puede! (Suelta el círculo y junta todas las letras arrastrando una a una las letras verdes, luego arrastra el círculo hasta que las letras quedan dentro de él).

- 25 E2 Sí, esta sí se puede, se van como recogiendo.

- 26 E1 (Hace clic en el botón *Página siguiente* y aparece la página dónde se sugiere ceder el ratón al compañero).

(vuelve a hacer clic en el botón *Página siguiente* y cede el ratón)

[Se repite la primera tarea, pero con otro centro y razón de homotecia y las figuras son triángulos en vez de letras].

- 27 E2 ¿Así van a ser todas?

- 28 E1 Sí, arrastre los triángulos verdes y llévelos al círculo, es fácil.

- 29 E2 (Arrastra los triángulos verdes hasta meterlos dentro del círculo, hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra la segunda tarea).



-
- 30 E1 [lee la consigna] Mete todos los triángulos rojos dentro del círculo...
-
- 31 E2 (Intenta arrastrar los triángulos rojos sin lograrlo).
-
- 32 E1 Arrastre los verdes, ¡recuerde!
-
- 33 E2 ¡Ah! ¡Claro! (Arrastra los triángulos verdes hasta que los rojos quedan dentro del círculo, hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra la tercera tarea).
-
- 34 E1 [lee la consigna] Mete todos los triángulos...
-
- 35 E2 (Arrastra los triángulos verdes y los mete dentro del círculo y los rojos quedan por fuera).

¡Esta tampoco se puede por lo mismo de la anterior!
-
- 36 P Entonces continúe y diga que no se puede por lo mismo de la anterior.
-
- 37 E2 (Hace clic en el botón *Página siguiente*, aparece el letrero que dice “no has resuelto la tarea, deseas continuar” y escoge la opción *Sí*. Aparece el cuadro de texto para justificar y escribe: “no se puede por lo mismo de la anterior”. Luego hace clic en el botón *Página siguiente* y pasa a la cuarta tarea).

(Junta los triángulos verdes y los rojos quedan juntos en otra posición)
-
- 38 E1 No, busque una posición donde queden todos juntos.
-
- 39 E2 Arrastra los triángulos verdes hasta superponerlos con los rojos y luego

arrastra el círculo a dicha posición.

(Hace clic en el botón *Página siguiente* y pasa a la primera tarea con razón de homotecia menor que cero y otra posición del centro).

-
- 40** E1 (Rápidamente resuelve la primera tarea arrastrando las figuras verdes hacia el círculo, luego pasa a la segunda tarea y arrastra directamente las figuras verdes para meter las rojas dentro del círculo, en la tercera tarea arrastra una figura verde y la superpone con su pareja y estas quedan fuera del círculo, inmediatamente hace clic en el botón *página siguiente*).

Esta tampoco se puede como en las anteriores (escribe en el recuadro: “no se puede por lo mismo de la anterior” y hace clic en el botón *Página siguiente* nuevamente).

(Pasa a la cuarta tarea, arrastra las letras verdes y las junta con las rojas. Luego arrastra el círculo a dicha posición y hace clic en el botón *Página siguiente* y cede el ratón a su compañera. Se muestra nuevamente la primera tarea con otra razón y centro de homotecia).

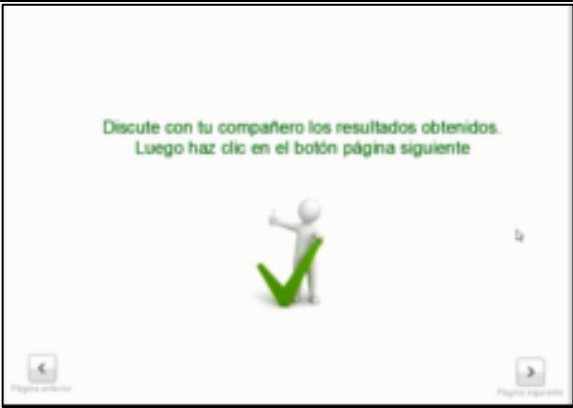
-
- 41** E2 ¡Pues es hacer lo mismo!

(Arrastra los triángulos verdes hacia el círculo y hace clic en el botón *Página siguiente*. Pasa a la segunda tarea y arrastra los triángulos verdes para meter los rojos dentro del círculo. Pasa a la tercera tarea donde junta una pareja de triángulos).

Se juntan acá, pero igual no se puede mover el círculo.

(Hace clic en el botón *Página siguiente* y escribe en el recuadro: “no se puede aunque esta vez las figuras quedan más cerca del círculo” y hace clic en el botón *Página siguiente*).

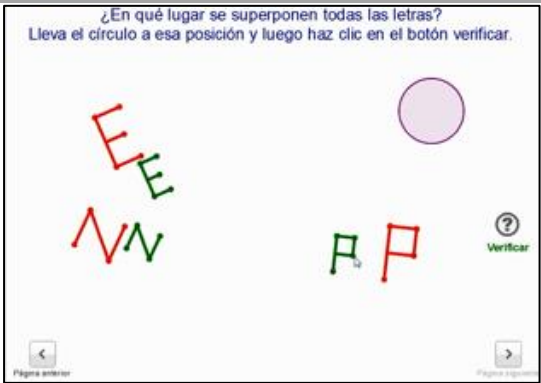
(Pasa a la cuarta tarea, arrastra las letras verdes y las junta con las rojas. Luego arrastra el círculo a dicha posición y hace clic en el botón *Página siguiente*).

42	E1	[Lee la consigna] Discute con tu compañero los resultados obtenidos.	
43	E2	¿Pero qué vamos a discutir?	
44	P	¿Encontraron alguna diferencia entre las tareas?	
45	E2	¡Sí, Obvio! Las figuras cambiaban.	
46	E1	Sí, en la primera eran letras y en las otras triángulos y otras figuras.	
47	P	¿Y no había más diferencias?	
48	E1	Pues no sé, creo que no.	
49	P	Vaya a la página anterior.	
50	E1	(Hace clic en el botón <i>página anterior</i> y aparece como había quedado previamente).	
51	P	Arrastre un triángulo.	
52	E1	(Arrastra un triángulo verde por la pantalla).	
53	P	Ahora vaya a la página anterior.	
54	E1	¡Ah ya! Que en esta cuando uno mueve una figura la otra se va para el otro lado, mientras que en las otras cuando se movía una la otra la iba persiguiendo. ¡Mire y verá! (hace clic en el botón <i>página anterior</i> varias veces hasta llegar a la segunda serie donde la razón de homotecia es mayor que cero).	

(Arrastra un triángulo verde) Mire cómo el rojo viene siguiéndolo, mientras que en las demás si usted mueve la verde hacia acá, la roja se va hacia el otro lado.

55 P Ok, vamos a la siguiente tarea.

Apéndice B. Segunda secuencia actividad 1**Tabla 7 Datos segunda secuencia Act 1.**

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E2	[lee la consigna] ¿En qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar. ¿O sea en qué lugar se juntan? [En este momento sólo el círculo se deja arrastrar].	
2	P	Sí.	
3	E1	(Intenta arrastrar las letras verdes y las letras rojas sin lograrlo). Acá no puedo mover ninguna. (Arrastra el círculo hasta la P roja). ¡Pero no puedo mover ninguna letra!	
4	E2	Intente agrandar el círculo.	
5	E1	No se puede (arrastra el círculo).	
6	P	¿De qué se trata la tarea?	
7	E1	Saber dónde se juntan las letras, pero ninguna se puede mover.	
8	P	¿Y dónde se juntan?	

9	E1	No se juntan porque no se pueden mover.	
10	P	¿En las tareas anteriores no se juntaban las letras?	
11	E1	Sí pero las letras se dejaban mover.	
12	P	Si pudieran mover las letras dónde se juntarían, ubique el círculo en esa posición.	
13	E1	Se juntarían en cualquier parte.	
14	P	Entonces ubique el círculo en cualquier parte y presione verificar.	
15	E2	¡En la mitad! ¿Se acuerda que la verde seguía a la roja y se unían?	
16	E1	(Ubica el círculo y presiona el botón verificar). [Una vez que el alumno presiona el botón <i>Verificar</i>, éste se cambia por el botón <i>Continuar</i>, cambia la consigna, las letras verdes se pueden arrastrar y el círculo se bloquea].	
17	E1	[Lee la consigna] Ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón continuar.	
		(Arrastra las letras verdes).	
18	E2	¡Ah! Ahora sí se dejan arrastrar.	

- 19 E1 (Arrastra la P verde y la superpone con su pareja, luego intenta arrastrar el círculo sin lograrlo).

¿Y entonces acá qué hacemos?

¿Por qué ya no puedo mover el círculo?



- 20 E2 Haga clic en *Continuar*.

- 21 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y aparece lo que se muestra en la imagen, donde el letrero: “¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!”, los puntos notables de las letras y el círculo titilan).



- 22 E1 [Lee el texto] Algunas letras no están dentro del círculo.
(Intenta arrastrar las letras y el círculo sin conseguirlo).

- 23 P Haga clic en el botón *Volver a intentarlo*.

- 24 E1 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y se reinicia la tarea con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes retornan a la posición inicial, también aparece el botón *Ayuda*).



¡Ah! ¡Ya entendí!

25 E2 O sea no hay necesidad de hacerlo en ese círculo, sino formarlo con las letras.

¡Ah! ¡Mire! Pida ayuda.

26 E1 (Hace clic en el botón *Ayuda* y aparece la página que se muestra en la imagen).

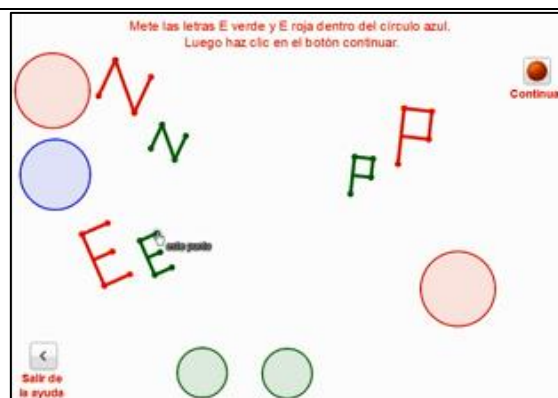
[Lee la consigna] Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras.

A continuación te proponemos una tarea de ayuda (hace clic en el botón *Página siguiente* y aparece la tarea de ayuda).



27 E1 [En esta tarea de ayuda los círculos rojos y las letras rojas no se dejan arrastrar, los demás objetos sí].

[Lee la consigna] Mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón continuar.



- 28 E1 (Arrastra la letra *E* verde y la junta con la letra *E* roja, lleva el círculo azul a dicha posición).



- 29 E2 Haga clic en *Continuar*.

- 30 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y aparece otra consigna).

[La pareja de letras *E* y el círculo azul quedan fijos, mientras que los círculos verdes y las letras *N* y *P* verdes se pueden arrastrar].



- 31 (El alumno junta las letras *N* y lleva un círculo verde a dicha posición e intenta arrastrar un círculo rojo a esa posición sin lograrlo).



- 32 (Decide juntar todas las letras y los círculos verdes, pero no consigue arrastrar los círculos rojos a dicha posición).



- 33 E2 Ahora dele salir de la ayuda.

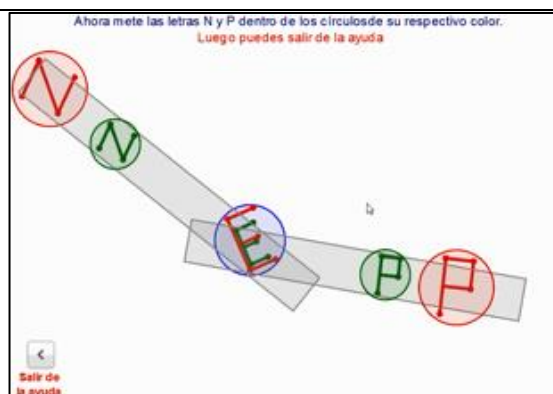
- 34 E1 No porque el rojo no puede estar ahí.

(arrastra la letra N verde por la pantalla, luego la suelta y arrastra la letra P verde hasta que su pareja queda dentro del círculo correspondiente, luego arrastra un círculo verde hasta la P verde. Después hace lo mismo con las letras N).

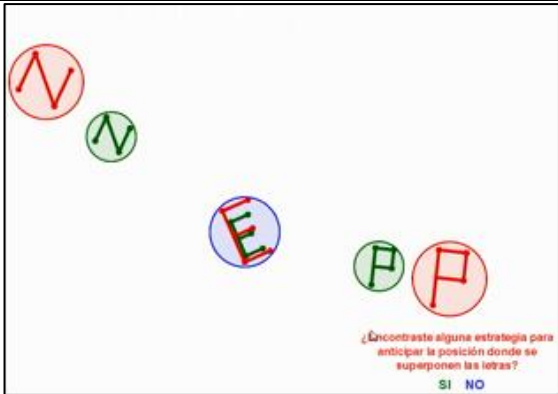


- 35 E2 Eso, meta ahora... Arrastre el círculo verde.

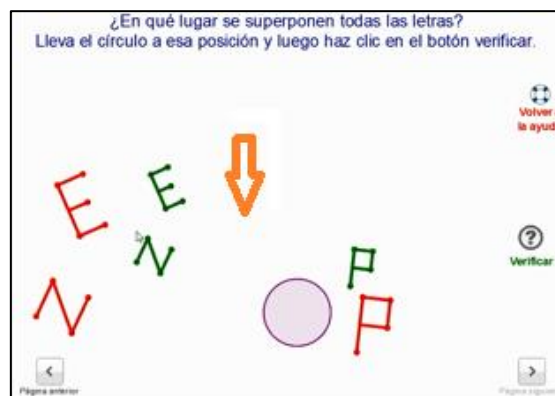
- 36 E1 (El alumno pone el círculo verde sobre la letra N correspondiente y aparecen 2 bandas grises como se muestra en la imagen. Las bandas grises desaparecen luego de 4



segundos).

37	E2	¿Y eso qué fue?	
38	E1	Es una ayuda. Es que cuando usted mueve la letra verde hacia allá, las dos se mueven en diagonal [Pasa el cursor sobre la pantalla, desde las letra E superpuestas hasta la letra N roja, pasando por la N verde]. (Hace clic en el botón <i>Salir de la ayuda</i> y aparece un letrero que dice: “¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?” y las opciones <i>Sí</i> y <i>No</i>).	
39	P	Lea primero [el profesor interrumpe al alumno al ver que intenta hacer clic en la opción <i>Sí</i> antes de leer el mensaje].	
40	E1	[Lee la pregunta] ¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?] (se detiene un momento). (Hace clic en la opción <i>Sí</i> y vuelve a la tarea). [La tarea de anticipación se reinicia, la posición del centro de homotecia cambia y se muestra el botón <i>Volver a la ayuda</i>].	
41	E2	Ahora haga la tarea	

- 42 E1 ¡Vea! Esta letra puede estar allá, esta otra puede estar allá y esta puede estar allá (Señala con el cursor desde cada letra roja hasta la posición que se indica en la imagen, con la flecha de color naranja) [El alumno intenta indicar la posición donde se juntarían las letras si pudiera arrastrarlas]



- 43 P ¿Cómo lo sabe?

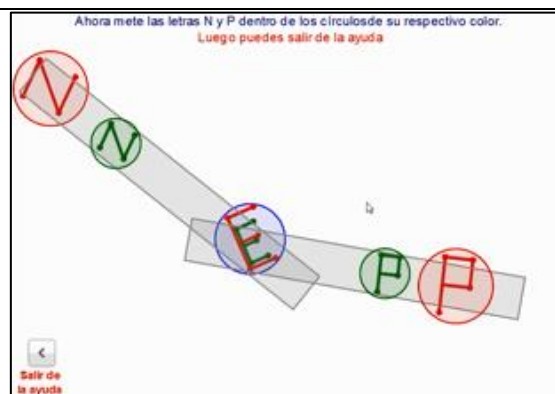
- 44 E1 Porque...

- 45 E2 ¡Vuelva a la ayuda!

- 46 E1 Pues sí, vayamos a la ayuda otra vez (hace clic en el botón correspondiente y lo envía nuevamente a la tarea de ayuda que permanece resuelta).

(Nuevamente aparecen las bandas grises por 4 segundos).

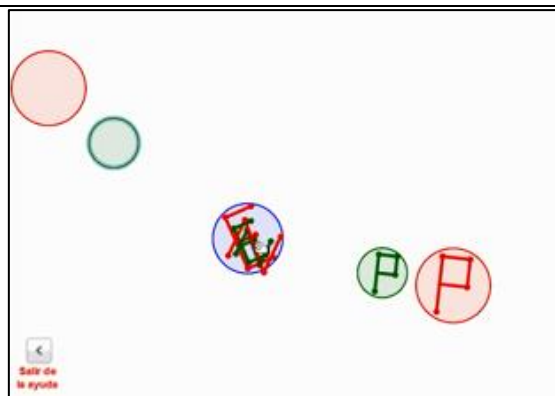
¡Mire! La N hacia allá, la P hacia allá (señala con el cursor en la dirección de las bandas).



- 47 E2 Siempre hay una que se une. ¿No?

48 P ¿Sólo una?

49 E1 No, las otras también (arrastra la letra N verde y la superpone con su pareja).
(Luego arrastra la letra N verde hacia el círculo correspondiente)



¿Si ve? Esta siempre se mueve hacia arriba y se va...)

50 E2 [Interrumpe a su compañero] Y se unen en un solo punto.

51 E1 Sí, en el medio (arrastra la letra N verde por la pantalla).
¡Mire! Está aquí y se va juntando con la roja en la mitad.

52 P ¿Cómo así que en la mitad?

53 E2 Forman es como un... ¿Un ángulo? Y donde se forma el ángulo es donde se unen... ¡Vuelva a la tarea!

54 E1 (Hace clic en el botón *Salir de la ayuda* y vuelven a la tarea de anticipación donde el centro de homotecia ha cambiado de posición y las letras verdes han retornado a la posición inicial).

55 E2 En la tarea de ayuda decía que había un ángulo y donde se forma es donde se unen las letras.

- 56 E1 Sí... (Ubica el círculo, luego hace clic en el botón *Verificar*, superpone las letras P y luego arrastra la letra N verde por la pantalla).



- 57 E1 Mire en la forma que vienen... (Arrastra la N verde hasta el lugar donde están las P superpuestas y luego lo hace con la letra E).



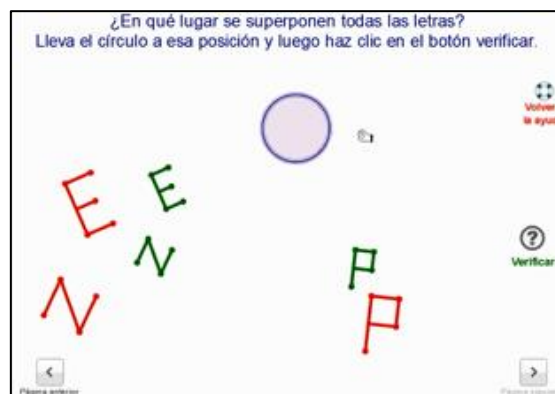
- 58 E2 Depende de cómo estén ubicadas las letras.

- 59 E1 Depende de la dirección (hace clic en el botón *Continuar* y aparece el texto: “¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!” y el botón volver a intentarlo mientras los puntos notables de las letras titilan. Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia).



- 60 E2 Sí, formando un ángulo

- 61 E1 Veá, estas se mueven para acá, estas para acá y estas para acá (señala con el cursor, arrastrándolo en dirección recta sobre cada pareja de letras). Entonces el círculo debe estar por acá (ubica el círculo y hace clic en el botón *Verificar*).



- 62 E1 (Arrastra las letras para meterlas en el círculo y hace clic en el botón *Continuar*).



- 63 E2 ¡La E tiene dos puntos afuera! (La E roja tiene dos puntos ligeramente fuera del círculo que titilan y aparece el texto: ¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!).



- 64 E1 Es la E esta. ¡Sí! (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y se reinicia la tarea con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes retornan a la posición inicial).



- 65 E1 Bueno, esta baja hasta acá, y esta... (Señala con el cursor en dirección recta desde la N roja pasando por la N verde y desde la E roja pasando por la E verde, luego ubica el círculo).



- 66 E2 ¡No! Acá... Más para la izquierda.

- 67 E1 Esta hacia acá, esta acá... (Señala con el cursor desde las letras P roja hasta la P verde y desde la E roja hasta la E verde, luego desplaza muy poco el círculo hacia la izquierda y hacia abajo mientras su compañera le indica).

- 68 E2 Más para acá, ¡Más a la izquierda...! ¡Más a la izquierda...! Ahí.



- 69 E1 (Hace clic en el botón *Verificar* y arrastra las letras verdes hasta el círculo y aparece el letrero: “¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente”).



- 70 E2 ¿Sí ve? ¡Le dije que ahí era!

- 71 E1 ¡Uuu! ¡Uuu!

- 72 E2 ¡Bueno! Vamos a la siguiente.

- 73 E1 [lee la consigna] ¿En qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo a esa posición y luego haz clic en el botón verificar.



- 74 E2 ¡La misma cosa!

- 75 E1 La E manda, entonces la E dice que va hacia allá, la P dice que va hacia allá y la N dice que va para allá, entonces el círculo debe estar por acá. (Señala con el cursor en dirección recta desde cada letra verde hasta el lugar donde luego ubicaría el



círculo. A continuación hace clic en el botón *Verificar*).

76	E2	Esta sube, aquella baja... Creo que quedó mal el círculo.	
77	E1	(Arrastra la E verde por la pantalla hasta juntarla con su pareja). ¡Pero...!	
78	E2	¿Sí ve? Le dije que estaba mal. ¿No ve que la letra roja está al revés?	
79	E1	Es que estas ya van en reversa, o sea... y es que en el otro la sigue. ¿Sí ve? (Arrastra la letra E verde por la pantalla).	
80	E2	O sea se cruzan.	
81	E1	Sí, se cruzan.	
82	E1	(Presiona el botón <i>Continuar</i>).	

- 83 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).

[La tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes retornan a las posiciones iniciales].



- 84 E1 ¡Bueno! La E se cruza acá, la N se cruza acá y la P acá. Entonces el círculo está como por aquí. (Señala con el cursor el lugar donde luego ubicaría el círculo).



- 85 E2 No, un poquito más allá, para la derecha.

- 86 E1 No, es que esta N baja.

- 87 E2 Pues creo que estas van... ¡mire a ver!

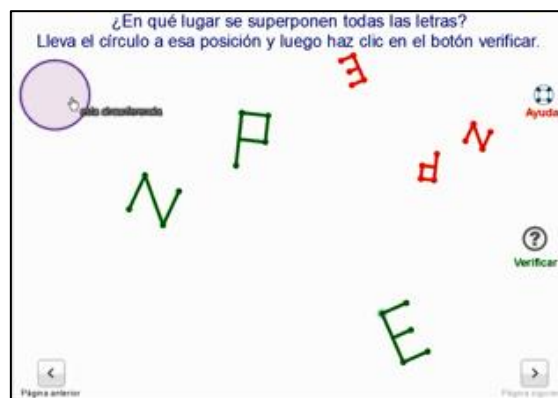
- 88 E1 (Arrastra el círculo ligeramente hacia la derecha y presiona el botón *Verificar* y enseguida el botón *Continuar*).
¡Nooo!



- 89 E2 ¡Espichó mal!

- 90 P ¡Por apresurado! ¡Debe leer!

- 91 E1 ¡Ese ya estaba bien!
- (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes en la posición inicial).



- 92 E1 Bueno, la P viene para acá...
- (Ubica el círculo).



- 93 E2 ¡No! Yo creo que más allá, porque las E.

- 94 E1 (Reubica el círculo y presiona el botón *Verificar*).
- Vea profesor y le enseño cómo es.



- 95 E1 (Superpone las letras).
- ¡Me quedó mal! Por un poquitico.



96 E2 ¡Sí ve! Le dije que más allá.

97 E1 Presiona el botón *Continuar* e inmediatamente el botón *Volver a intentarlo*.

[La tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición y las letras verdes en la posición inicial].



98 E1 La P viene como por aquí entonces esta viene como por aquí (ubica el círculo).



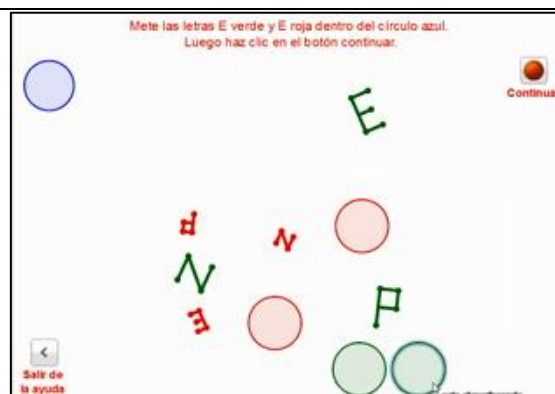
99 E1 Vamos a hacerlo con calma... (Arrastra la letra P verde hasta superponerla con su pareja y presiona el botón *Continuar*).



- 100** E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y pasa a una página donde se muestra un texto que dice: “*Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras. A continuación te proponemos una tarea de ayuda*”).
- ¡Ay no!

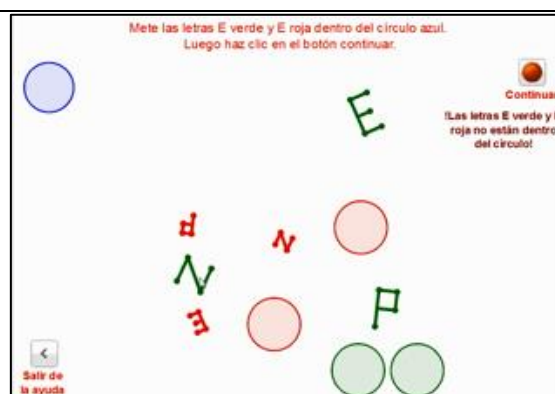


- 101** E1 (Presiona el botón *Página siguiente* y avanza a la tarea de ayuda).
- [Los círculos rojos y las letras rojas no se dejan arrastrar, los demás objetos sí].



- 102** E2 Dígale salir de ayuda que ya nosotros más o menos sabemos cómo es.

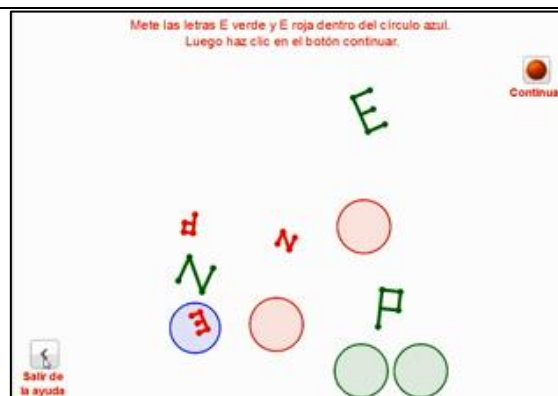
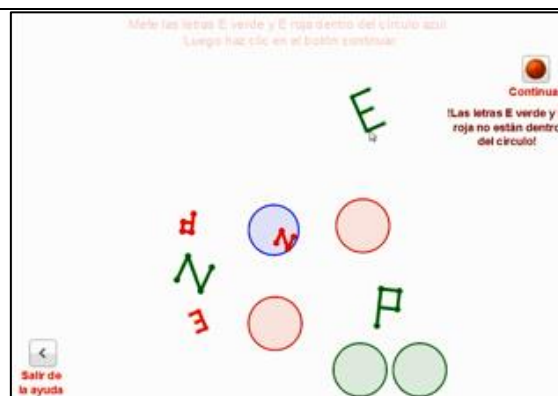
- 103** E1 (Presiona el botón *Salir de la ayuda* y titila la consigna).
- (Presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “*Las letras E verde y E roja no están dentro del círculo*”. La consigna, el letrero, las letras E y el círculo



azul titilan).

Toca hacerla.

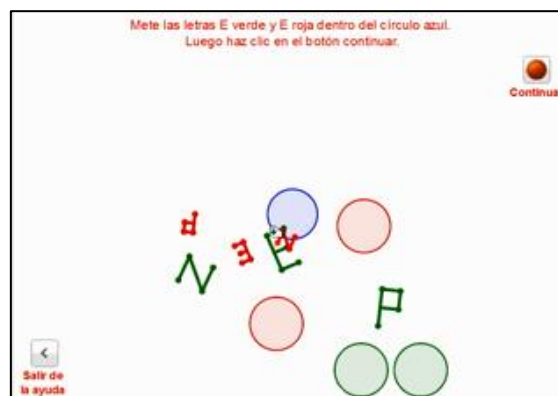
104	E2	[Lee la consigna] Mete las letras E verde y E roja dentro del círculo azul. Luego haz clic en el botón continuar.
105	E1	(Ubica el círculo).
106	E2	Tiene que encontrar el punto fijo.
107	E1	(Intenta arrastrar la letra E verde y no lo consigue). ¿Y esto por qué no sube? (Arrastra el círculo hasta la E roja).
108	E2	Dele salir de la ayuda.
109	E1	(Hace clic en el botón <i>Salir de la ayuda</i> varias veces y titila la consigna).



- 110 E1 (Arrastra el círculo y luego arrastra la letra E verde).

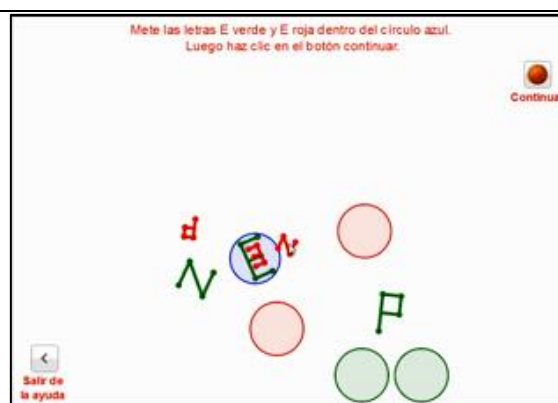
¡Ahora sí!

¡Ah! Es que se puede arrastrar así... (Arrastra la letra E verde alrededor del lugar donde se junta con su pareja).



- 111 E2 ¡Que tiene que buscar el punto fijo!

- 112 E1 (Superpone las letras E y las mete dentro del círculo).



- 113 E2 ¿Usted no miró si las otras también se pueden mover?

- 114 E1 (Intenta arrastrar las letras N y P verdes pero no lo consigue).

- 115 E2 Entonces dele continuar.

- 116 E1 (Presiona el botón *Continuar* y cambia la consigna por: “*Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color. Luego puedes salir de la ayuda*”. La consigna y las letras N y P titilan).



- 117 E2 [Lee la consigna] Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color...

La N y la P.

- 118 E1 (Arrastra la N verde hasta que la N roja queda dentro del círculo de su respectivo color).



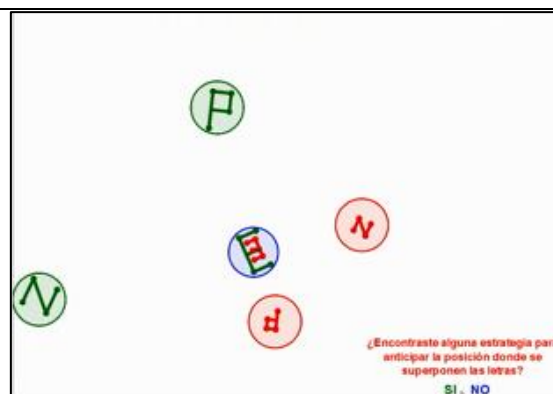
- 119 E2 Hágalo como la otra vez, que se corrían eran los círculos... ¿Para qué las mueve?

- 120 E1 (Arrastra la P verde hasta que la P roja queda dentro del círculo correspondiente) No ve que los círculos rojos no se pueden mover.

- 121 E1 Arrastra los círculos verdes hasta las letras verdes (Aparecen las bandas grises que se muestran en la imagen, por 4 segundos).



- 122 E1 (Desaparecen las bandas grises y hace clic en el botón Salir de la ayuda y se muestra un texto que titula: “¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?”)



posición donde se superponen las letras?” con las opciones Si y No).

- 123** E1 ¡Ay! ¡Sí! (Hace clic en la opción Sí y vuelve a la tarea de anticipación que se ha reiniciado con las letras verdes en las posiciones iniciales y el centro de homotecia en otra posición).



- 124** E1 ¡Bueno! Entonces las P y la... Van a estar como por aquí (Ubica el círculo en la posición señalada).



- 125** E2 ¡Pero la E! Es más como por acá.

- 126** E1 (Reubica el círculo en la posición indicada por el estudiante 2).



- 127 E1 (Hace clic en el botón *Verificar* y cambia la consigna: “*Ahora mete todas las letras en el círculo y luego haz clic en el botón continuar*”).
- (Arrastra la letra P verde alrededor del centro de homotecia).



- 128 E2 ¡Sí ve que sí se puede mover el círculo!

- 129 E1 Y yo le dije que no era ahí... ¡Vea! (Superpone todas las letras).

- 130 E2 ¡No sea mentiroso!

- 131 E1 (Hace clic en el botón *Continuar* y aparece el letrero: “*¡Alguna(s) letras no están dentro del círculo!*”).
- ¡No se vale...!



- 132 E1 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 133 E2 Ubique el círculo como por...

- 134 E1 ¡No! La P se va a unir por aquí
(Ubica el círculo)



- 135 E1 (Hace clic en el botón *Verificar*)



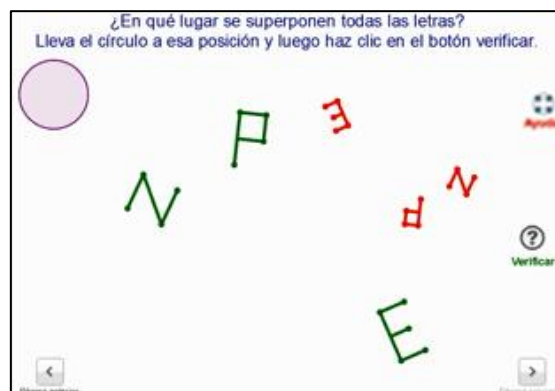
- 136 P ¿Por qué es tan apresurado? ¡Hágalo con calma!

- 137 E1 (Superpone las letras P).



- 138 E2 ¡Muestre a ver! ¡Déjeme hacerlo!

- 139 E1 (Hace clic en el botón *Continuar*, enseguida en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 140 P No lo ha pensado y ya está haciendo clic...

- 141 E1 ¡Es aquí! ¡Es aquí!

- 142 P ¡Déjela!

- 143 E2 Sí, es ahí (Ubica el círculo)



- 144 P ¿Y usted le cree?

- 145 E2 ¡Sí! (Hace clic en el botón *Verificar* y superpone las letras P).



- 146 E1 Por un pelito...

- 147 P Más bien por un pelote porque...

- 148 E2 (Hace clic en el botón *Continuar* e inmediatamente en el botón *Volver a intentarlo*, la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 149 E2 (Ubica el círculo y presiona el botón *Verificar*).



- 150 E2 (Superpone las letras P y presiona el botón *Continuar*).



- 151 E2 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



152 E2 (Presiona el botón *Verificar*)

[Sin querer hizo doble clic y activó la acción de los botones *Volver a intentarlo* y *Verificar*].

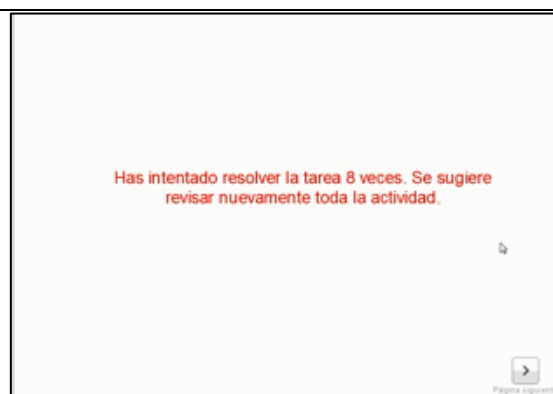
¡Ay no! Ya le di continuar.



153 E2 (Presiona el botón *Continuar*)

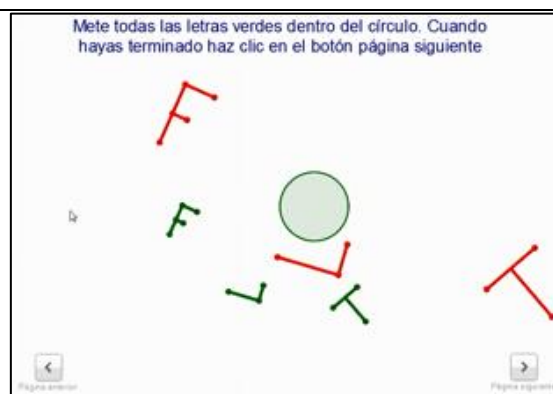


154 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y se muestra una nueva página con el texto: “*Has intentado resolver la tarea 8 veces. Se sugiere revisar nuevamente toda la actividad*”).

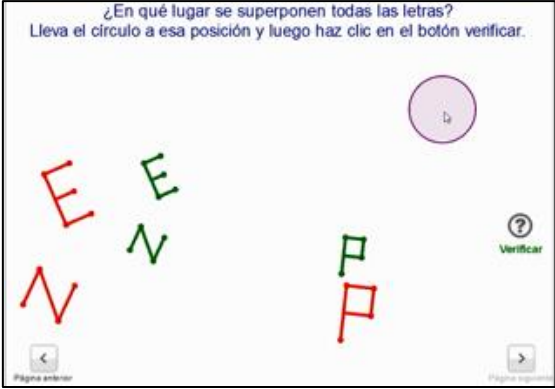


155 E2 (Hace clic en el botón *página siguiente* y se muestra la primera tarea de la primera secuencia).

¡No! ¿Volver a empezar otra



vez?

156	P	Está bien, no la harán toda desde el principio pero sí desde aquí (propone reiniciar la secuencia en vez de la actividad, mostrando la primera tarea de anticipación donde la razón de homotecia es mayor que cero).	
157	E1	[Lee la consigna] ¿En qué lugar se superponen todas las letras?	
158	E2	Pero es que las letras no se mueven y así es más difícil.	
159	P	Piensen bien dónde es que van a ubicar el círculo y dejen el afán.	
160	E2	(Ubica el círculo, presiona el botón <i>Verificar</i> y arrastra las letras para meterlas en el círculo).	
161	P	Les propongo una cosa, arrastren las letras y exploren... ¿Cómo hacer para anticipar esa posición antes de poder mover las letras?	

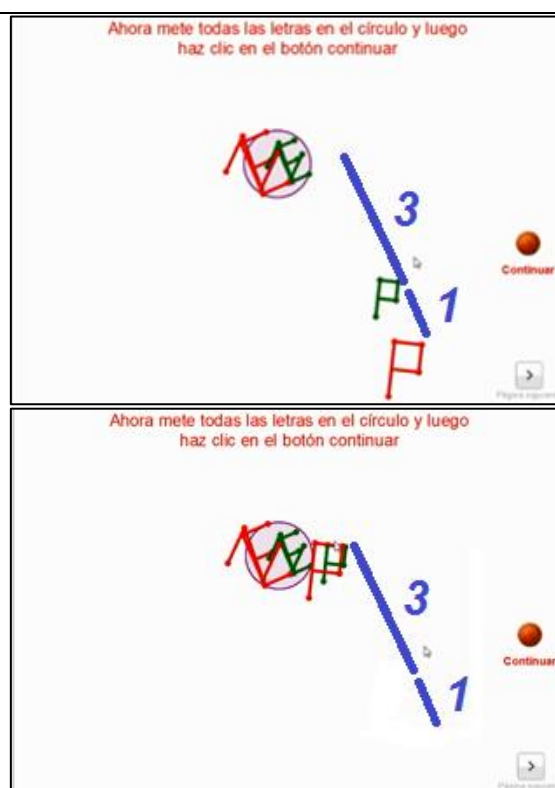
- 162 E1 ¡Vea! Ellas están aquí y se pegan así (repetidas veces superpone y separa la P verde y su pareja).
O sea que es un poquito más allá.



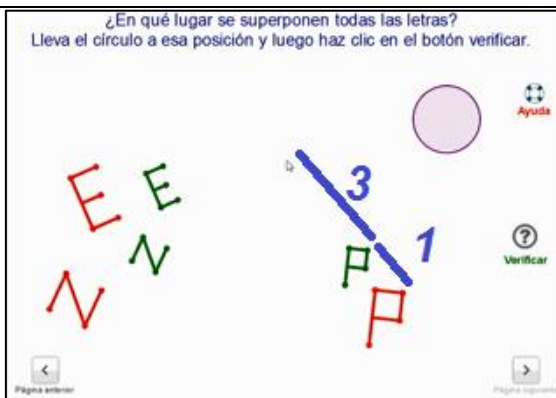
- 163 E1 ¡Mire! Midiendo esto y esto sería como un dedito (ubica el dedo entre las dos letras P).



- 164 E1 Entonces sería... un dedito más tres deditos sería como por acá, o sea cuatro deditos (ubica los dedos sobre la pantalla midiendo las distancias entre las letras P y el lugar donde se superponen, luego superpone las letras P).



- 165 P ¿Qué medida fue la que hizo?

166	E2	¡Pero la resolvió!	
167	P	Sí, pero no entendí cómo fue que midió.	
168	E2	¡Pues con los deditos!	
169	P	Parece que midió cualquier cosa y salió... Eso me pareció más bien casualidad. Ok, presione continuar y luego volver a intentarlo.	
170	E1	(Hace clic en el botón <i>Continuar</i> y enseguida en el botón <i>Volver a intentarlo</i> . La tarea se reinicia con el centro de homotecia una posición ligeramente distinta)	
171	E1	¡Bueno! ¡Póngale cuidado! Sería un dedito más tres deditos, sería como por acá (ubica los dedos en la pantalla para medir las distancias indicadas en la imagen).	
172	E1	(Ubica el círculo, presiona el botón <i>Verificar</i> y arrastra las letras para meterlas al círculo)	
173	E2	(Risas) Y le dio...	

- 174 E1 (Presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente”)



- 175 E1 (Hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea con razón de homotecia menor que cero).



- 176 P ¡Bueno! Ahora le toca a usted.

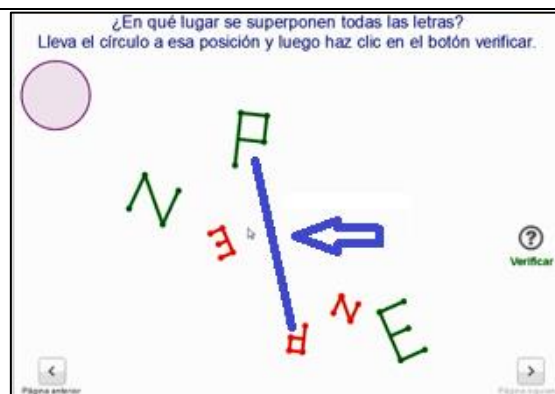
- 177 E1 ¡Ah! Recuerde que estas ya no vienen uniéndose sino que vienen separándose.

- 178 E2 ¡Ay! ¡Me tocó el más difícil!

- 179 E1 ¿Cómo era que había hecho...?

Cuatro deditos (ubica los dedos entre las letras P, para medir la distancia indicada en la imagen).

No, espere... Mejor dejo quieto mis deditos. [La medida no correspondía a lo que él esperaba]



180 P Esa estrategia de los deditos me pareció casualidad.

181 E2 (Ubica el círculo y presiona el botón *Verificar* y arrastra un poco la letra P).



182 E1 ¡Ah! ¡Mire! La estrategia de los deditos como es que es.

183 E2 Presiona el botón *Continuar*.



184 E1 ¡Espere! ¡Espere!

185 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición, luego presiona el botón *Verificar*).



186 E1 ¡Póngale cuidado profesor! Son cuatro deditos. Cuando se viene para acá la otra se une.

187 P ¿Y dónde se unen?

- 188** E1 Um... Cuatro deditos (arrastra la letra P para superponerla con su pareja).



- 189** P Pero si usted arrastra la P ya no hay cuatro deditos.

- 190** E1 Espere (vuelve a separar las letras P)

- 191** E2 Sería como en la mitad

- 192** E1 Entonces esta también sería como en la mitad... (Arrastra la E verde acercándola despacio a su pareja, luego las separa nuevamente).



Entonces esta también sería en la mitad.

- 193** E1 ¡Ah! Sería en la mitad de los cuatro deditos. Póngale cuidado (ubica los dedos entre las letras E y arrastra la verde hasta que la distancia entre ellas sea cuatro deditos).



- 194** E1 De esos cuatro deditos, se colocan 2 deditos y se unen acá... Junte la E.

- 195** E2 Superpone las letras E.

- 196 E1 Um... Espere, présteme (toma el ratón y presión el botón *Continuar* y luego el botón *Volver a intentarlo*. La tarea se reinicia cambiando la posición del centro de homotecia).



- 197 E1 ¡Póngale cuidado! De la P a la “d”...

- 198 E2 ¿Por qué de la P a la E?

- 199 E1 De la P a la “d”... ¡Ah! que esta es una P al revés.

- 200 E1 Entonces sería como por acá, póngalo ahí.

- 201 E2 (Ubica el círculo en la posición indicada por su compañero y presiona el botón *Verificar*).



- 202 E1 ¡Era un poquito más arriba!

- 203 E2 (Arrastra las letras para meterlas en el círculo). Casi, quedó cerca.



- 204 P Era un poco más abajo, no arriba como pensaba.

- 205 E2 (Presiona el botón *Continuar* y luego el botón *Volver a intentarlo*. La tarea se reinicia con el centro de homotecia en otra posición).



- 206 E1 Cuatro deditos... tres deditos...

- 207 E2 Se unirían acá... Se unirían acá... (Señala con el cursor desde la P verde hasta su pareja y lo mismo para las letras E. Luego ubica el círculo y presiona el botón *Verificar*).



- 208 P ¿Ustedes por qué abandonaron la estrategia que tenían antes? De repente se les ocurrió algo con los dedos, que todavía no le veo sentido. Ustedes tenían otra idea antes.

- 209 E2 ¿Cuál idea? (Arrastra la P verde y la superpone con su pareja. Luego presiona el botón *Continuar*).

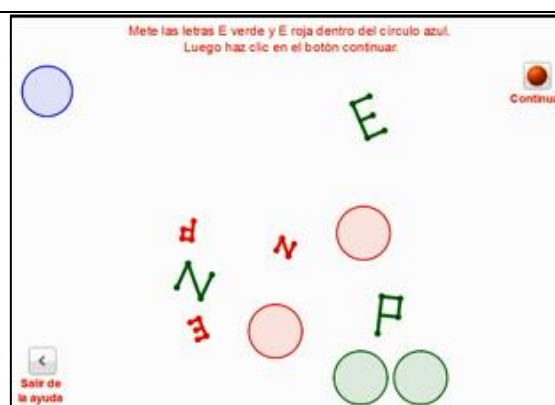


- 210 P Una que tenían antes de los deditos.

- 211 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y se muestra una página donde dice: “*Debes encontrar una estrategia para anticipar la posición donde se superponen las figuras. A continuación te proponemos una tarea de ayuda*”).



- 212 E2 (Presiona el botón *Página siguiente* y avanza a la página que muestra en la imagen).
[Los círculos rojos y las letras rojas no se dejan arrastrar, los demás objetos sí].



- 213 E1 [Lee la consigna] Mete las letras E...

Esta es la de ahorita.

- 214 E2 ¿Cuál que no me acuerdo?

- 215 E1 La de que si esta letra miraba hacia allá la otra miraba para el otro lado, ¿Se acuerda que llegaban y se unían así? (Arrastra la letra E verde hasta superponerla con su pareja).

- 216 E2 ¡Ah! Ya me acordé, pero lo de los deditos también sirve

- 217 E1 ¡Lo de los deditos es mejor todavía! (Superpone las letras E y luego arrastra el círculo azul hasta esa posición).



- 218 E1 (Presiona el botón *Continuar*, la consigna cambia por “Ahora mete las letras N y P dentro de los círculos de su respectivo color. Luego puedes salir de la ayuda” y las letras N y P titilan).



[Las letras E superpuestas y el círculo azul quedan fijos]

- 219 E1 [Lee la consigna] Las letras N y P...

¿Profesor pero esto para qué otra vez si nosotros ya lo sabemos?

(Arrastra las letras verdes hasta meter las rojas en los círculos respectivos y luego arrastra los círculos verdes hasta las letras



verdes. Se muestran durante cuatro segundos dos bandas grises como lo muestra la figura).

220	P	Pero pareciera que no porque no han resuelto la otra tarea.	
221	E1	Vamos a hacerlo así (Presiona el botón <i>Salir de la ayuda</i> y aparece el letrero: <i>¿Encontraste alguna estrategia para anticipar la posición donde se superponen las letras?</i> con las opciones <i>Si</i> y <i>No</i>).	
222	E1	(Hace clic en la opción <i>Si</i> y vuelve a la tarea de anticipación). Bueno vamos a hacerlo así como... Como lo de la mirada.	
223	E2	La P mira para allá, La E para allá, entonces queda como por aquí (señala con el cursor).	

- 224 E1 Sí, queda ahí... Y la N mira para acá entonces quedaría un poquito más acá.
¡Mueva el círculo!

- 225 E2 (Ubica el círculo).



- 226 P ¡Esperen un momento! Antes de darle verificar, ¿cómo es que lo están haciendo?

- 227 E1 Lo de la mirada, lo que hicimos al principio, eso mismo.

- 228 E2 (Presiona el botón *Verificar* y superpone las letras P).
Um... Toca correrlo un poquito más.



- 229 E2 (Presiona el botón *Continuar* y luego el botón *Volver a intentarlo*, la tarea se reinicia, pero el centro de homotecia quedó casi en la misma posición anterior).



¡Ah! Es la misma... ¿No?

230 E1 ¡Sí! Entonces la E...

231 E2 (Ubica el círculo)



232 E1 ¡No! Casi pegada a la E, pero no pegadita, o sea como por acá (señala el lugar donde reubicarían el círculo).

233 E2 (Cambia ligeramente la posición del círculo)



234 P ¿Por qué ahí? ¡Espere! ¿Por qué son tan afanados...?

235 E1 Porque ahorita que nosotros las fuimos a mover, la P y la E se mueven muy despacio, osea esta semueve más despacio que la otra (señala la E roja).

236 P ¿Cómo así que se mueve más despacio?

237 E2 O sea no se mueve igual de rápido...

- 238 E1 O sea que no se une igual, esta se mueve más rápido que la otra, no en la mitad porque... Bueno, entonces... (Arrastra un poco el círculo).
¡Pongámoslo aquí!



- 239 P ¿Y por qué sólo tienen en cuenta la P?

- 240 E1 ¡Vea! La N viene así y la E viene lo mismo (señala con el cursor en dirección recta, desde la N verde hasta la N roja y desde la E verde hasta su pareja).

- 241 P ¡Ah! Ya veo.

- 242 E1 (Presiona el botón *Verificar* y arrastra las letras para meterlas en el círculo. Luego presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente”).



Y ahorita hacemos la de los deditos.

- 243 P Esa estrategia de los deditos yo no sé, como que le hace falta algo.

- 244 E2 (Presiona el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea con otra razón de homotecia). [Sólo el círculo se deja arrastrar, los demás objetos están fijos inicialmente]



- 245 E1 [Lee la consigna] ¿En qué lugar se superponen todas las letras? Lleva el círculo...

- 246 E2 ¡Ah! ¡La misma!

- 247 E1 La misma... ¿cierto? Entonces... ¡Deditos! ¿Pero entonces cómo...?

- 248 E2 Aquí se unirían... ¿No? (Señala la posición del centro de homotecia)

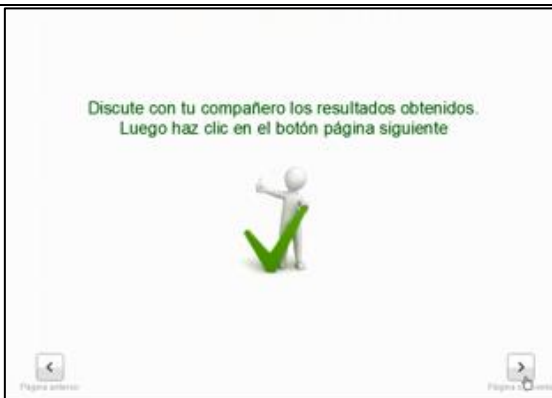
- 249 E1 ¡Ah! ¡Sí! Porque lo de la mirada que se unen acá... O sea el círculo queda como por aquí (toma el ratón y ubica el círculo).

¡Póngale cuidado! La P tiene estas cositas, entonces al moverla para acá tienen que encajar acá, y la E tiene que venir acá (señala con el cursor desde un punto notable de la P verde hasta dónde está el círculo, pasando por la P roja,



lo mismo hace para las letras

E).

250	E2	(Presiona el botón <i>Verificar</i> y arrastra las letras para meterlas en el círculo. Luego hace clic en el botón <i>Continuar</i> y se muestra el letrero: “ <i>¡Las letras están dentro del círculo! Puedes ir a la página siguiente</i> ”).	
251	E1	¡Ha! ¿Sí ve?	
252	E2	Hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> y se muestra una página con el letrero: “ <i>Discute con tu compañero los resultados obtenidos. Luego haz clic en el botón página siguiente</i> ”	
253	P	¡Espere, espere! ¿Sí ven cómo son de afanados? ¡No han leído y ya están presionando el botón! (el profesor interrumpe antes de que presione el botón página siguiente).	
254	E2	¿Y qué quiere que discutamos?	
255	E1	Bueno mire, tenemos tres formas de hacerlo.	
256	P	¿Tres?	
257	E1	¡Sí! ¡Tres! Depende de cómo estén las letras. Si las letras están volteadas es	

porque...

258	E2	Se van a separar
259	E1	Sí, y si las letras están del mismo es porque se persiguen.
260	E2	Se contraen
261	E1	Entonces para cada una nos sirve cada método. Si la persiguen, entonces no sirve la de los deditos... ¡No! ¡Mentiras! Esa es para las desunidas, que vienen así, entonces son cuatro deditos y por la mitad. Entonces la otra es por mera mirada, que usted llega y dice, viene para acá y ahí lo pone.
262	P	Bueno, ahora sí vamos a la siguiente.

Apéndice C. Tercera secuencia actividad 1

Tabla 8 Datos tercera secuencia Act 1.

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	P	(Se muestra una página con tres letras verdes y tres letras rojas; un punto azul titilante; la consigna: “Ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar”; 7 botones que corresponden a herramientas de construcción: <i>Punto de intersección, Punto medio, Recta, Segmento, Recta perpendicular, Recta paralela y Circunferencia</i>; y los botones <i>Verificar, Página anterior</i> y <i>Página siguiente</i>) [En esta tarea sólo el punto azul se deja arrastrar y las letras rojas son homotéticas de las letras verdes con respecto a un centro oculto]. Ahorita estaban ubicando el círculo, ¿está bien?	

2	E2	Sí señor.
3	P	Ok, ahora van a ubicar, no el círculo porque el círculo es muy grande, van a ubicar la posición más... Con más precisión, o sea lo van a hacer con el punto... ¿Sí? Ya no van a ubicar un círculo sino un punto.
4	E2	Y esto lo podemos utilizar (señala las herramientas que aparecen disponibles).
5	P	Sí.
6	E1	Entonces es más fácil.
7	E2	[Lee la consigna] Ubica el punto azul en la posición donde las letras se superponen, cuando creas que has terminado haz clic en el botón de verificar.
8	E1	¡Ah! ¡Mire! Esta es en la que viene y lo persigue
9	E2	Sí
10	E1	Bueno, esta mueve a esta y esta mueve a esta ¿Cierto? Esta es esta y esta es esta (señala dos parejas de letras). Entonces al moverlas esta queda acá, esta acá y esta por acá (le indica a su compañero una posición en la pantalla que no corresponde al centro de homotecia).
11	E2	Entonces el punto quedaría como por acá (ubica el punto donde su compañero indicaba).



- 12 E2 Pero venga, ¿esto qué? Se puede hacer algo con esto, mire. (Selecciona la herramienta punto de intersección e intenta hacer clic sobre el punto azul y sobre las los puntos notables de las letras).



- 13 E1 Busque punto medio...Punto medio, punto medio. Se acuerda que entre esa y la L.

- 14 E2 (Selecciona la herramienta *Punto medio*, hace un clic en la pantalla y arrastra el cursor por la pantalla. Aparece un punto donde hizo clic y se muestra el punto medio de éste y la posición donde se encuentra el cursor).



- 15 E1 Lo mismo que los deditos.

- 16 E2 Pero entonces tocaría poner una recta... ¿No? (Selecciona la herramienta *Recta* y desaparecen los puntos que se mostraron cuando usó la herramienta *Punto de medio*).
¿De dónde a dónde?

- 17 E1 De la S a la S

- 18 E2 (Hace clic en dos puntos notables (uno de la S roja y otro de la S verde) y aparece la recta que pasa por esos dos puntos.



- 19 P ¿Por qué una recta?

- 20 E2 Porque la recta... (Nuevamente selecciona la herramienta recta y construye la recta que pasa por un punto de la C verde y un punto de la C roja).
¡Ah! ¡No! Espere, es un segmento.



- 21 P ¿Y por qué un segmento?

- 22 E2 Para encontrar el punto medio...
Es que no sé cómo explicar (traza la recta que pasa por dos puntos correspondientes de las letras L).



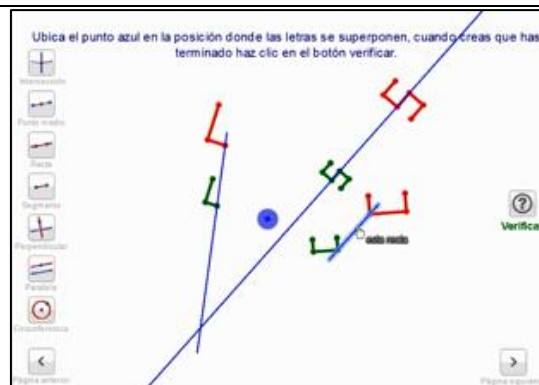
- 23 E1 El rango es acá (señala la parte inferior y central de la pantalla)... Mire que la línea viene como por acá. Entonces esta tira como más abajo y queda como por aquí.

- 24 P Usted puede prolongar las rectas.

- 25 E2 ¿Y cómo?

26 P Haga clic sobre un extremo y arrastre.

27 E2 (Prolonga las tres rectas)

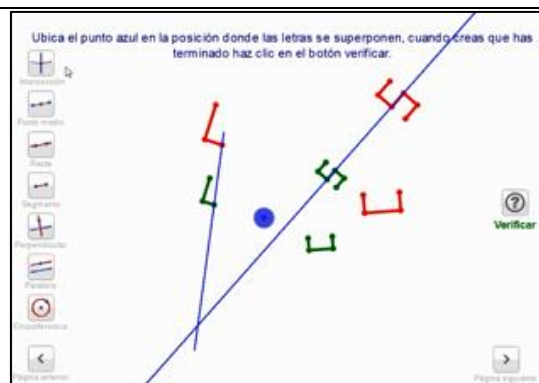


28 E1 Entonces esta sí nos quedó mal porque debería estar por acá arriba (señala la recta trazada sobre las letras C).

29 E2 ¿Y cómo se borra?

30 P Haga clic y presione la tecla de borrar

31 E2 (Borra la recta trazada sobre las letras C).



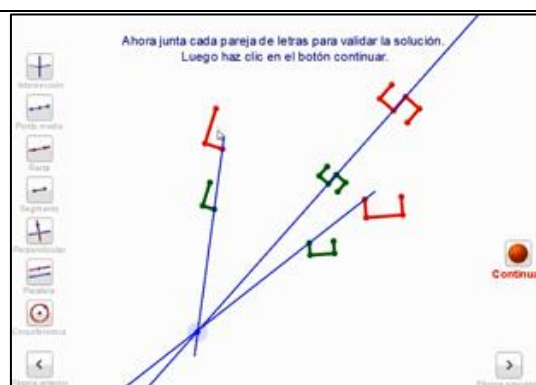
32 E1 (Traza la recta que pasa por dos puntos correspondientes de las letras C y la prolonga).



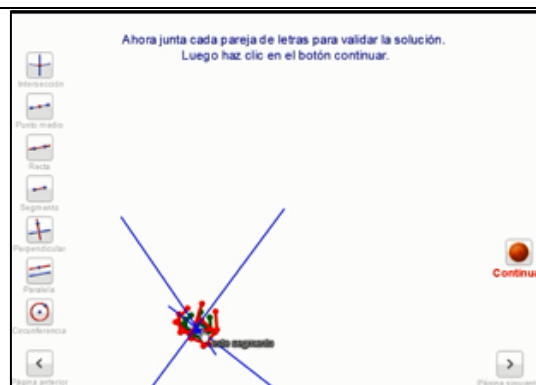
- 33 E2 Acá es el punto, o sea que debería estar como por aquí (ubica el punto azul donde las rectas concurren).



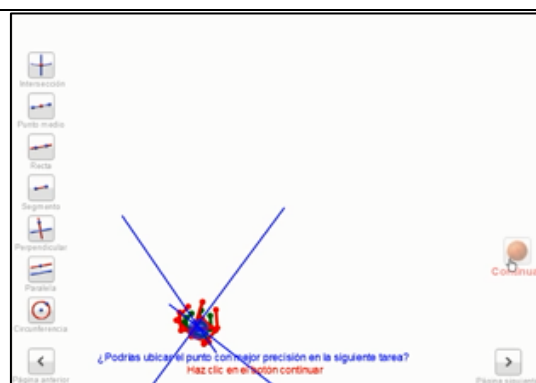
- 34 E2 (Presiona el botón *Verificar* y éste cambia por el botón *Continuar*. La consigna cambia: “*Ahora junta cada pareja de letras para validar la solución. Luego haz clic en el botón continuar*”). [Ahora las letras se dejan arrastrar].



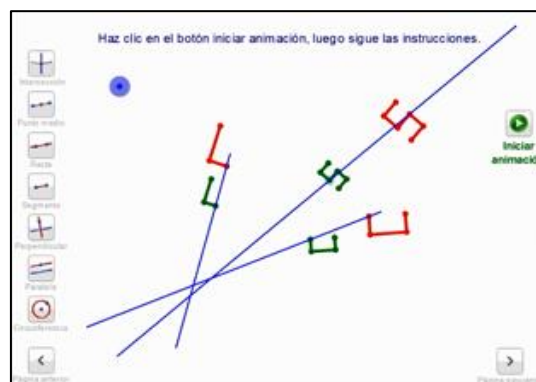
- 35 E2 (Arrastra las letras y la superpone) jajaja ¡Magia! ¿Sí ve que era ahí?



- 36 E2 (Presiona el botón *Continuar* y aparece el letrero: “¿Podrías ubicar el punto con mejor precisión en la siguiente tarea? Haz clic en el botón continuar”



- 37 E2 (Hace clic en el botón *Continuar*, éste se oculta y aparece el botón *Iniciar animación*. La consigna cambia: “Haz clic en el botón *iniciar animación*, luego sigue las instrucciones”. Las letras verdes y el punto azul retornan a la posición inicial y el centro de homotecia cambia levemente de posición).



- 38 P Espere... Borre las rectas.

- 39 E2 (Borra las rectas).



- 40 P Ahora sí continúe.

- 41 E2 [Lee la consigna] Haz clic en el botón *iniciar animación*, luego sigue las instrucciones (hace clic en el botón *Iniciar animación*, éste se oculta y aparece el botón *Verificar*. Las letras empiezan a reducirse hasta un punto, luego se muestran dos triángulos: uno verde



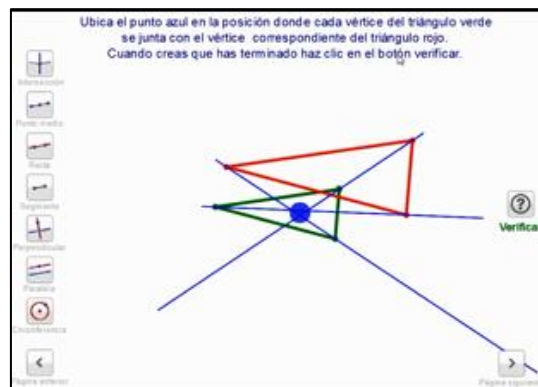
con vértices en los puntos verdes que quedaron y uno rojo con vértices en los puntos rojos. Cambia la consigna: “Ubica el punto azul en la posición donde cada vértice del triángulo verde se junta con el vértice correspondiente del triángulo rojo. Cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar”).



42	E2	[Lee la consigna] Ubica el punto azul en la posición donde cada vértice del triángulo verde se junta con el vértice correspondiente del triángulo rojo. Cuando creas que has terminado haz clic en el botón verificar. ¿Vértice...?
43	E1	[Vuelve a leer la consigna] Ubica el punto azul... Umm... el punto azul... ¡ya! En la posición del vértice del triángulo... ¿El vértice?
44	E2	¿Cuál es el vértice?
45	P	El triángulo tiene tres vértices. Uno, dos, tres; y este, uno, dos, tres (señala los vértices de los triángulos rojo y verde).
46	E2	[Vuelve a leer la consigna] Ubica el punto azul en la posición donde cada vértice del triángulo verde se junta con el vértice correspondiente del triángulo...

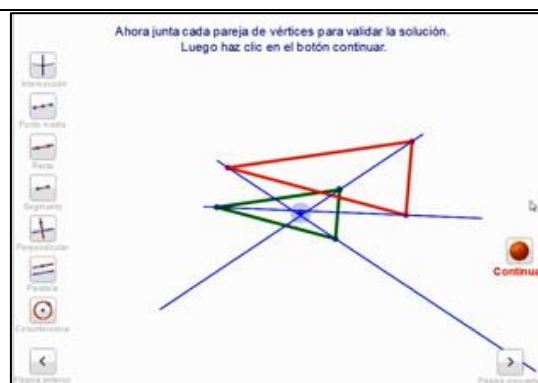
- 47 E1 (Construye tres rectas sobre los vértices de los triángulos como muestra la figura).

Entonces el punto estaría por acá... (ubica el punto) Pero dice que es un solo...



- 48 E2 Quedó mal.

- 49 E1 (Presiona el botón *Verificar*, éste cambia por el botón *Continuar* y la consigna cambia: “*Ahora junta cada pareja de vértices para validar la solución. Luego haz clic en el botón continuar*”)

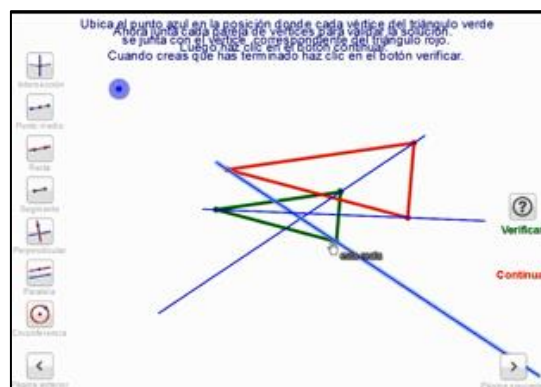


- 50 E1 (Arrastra los triángulos y superpone un par de vértices correspondientes).
¿Cómo así?

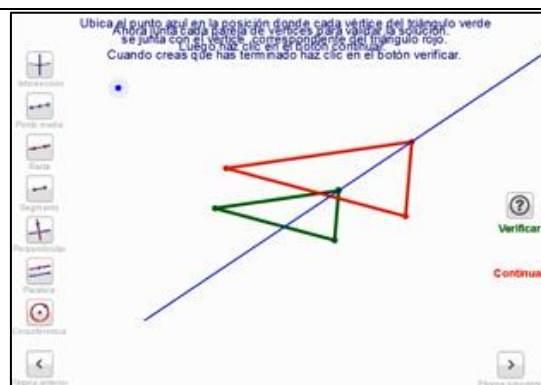


- 51 E2 Le quedó corrido.

- 52 E1 (Presiona el botón *Continuar* éste cambia por el botón *Volver a intentarlo*, hace clic en éste inmediatamente. El triángulo verde y el punto azul retornan a la posición inicial y el centro de homotecia cambia levemente de posición) [La consigna no se entiende porque hay dos textos superpuestos].

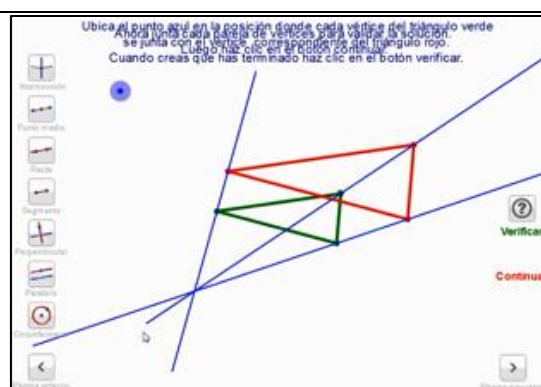


- 53 E2 (Toma el ratón y borra las rectas. Luego construye una recta entre un par de vértices correspondientes).



- 54 E1 ¡Pero lo mismo estaba haciendo yo!

- 55 E2 ¡Relájese! ¡Cójala suave!
(Construye las tres rectas que pasan por cada par de vértices correspondientes).



- 56 E1 ¡Ah!

- 57 P ¿Qué encontró?

58 E1 Que es buscar dónde queda el vértice, yo no entendía qué decía.

59 E2 (Ubica el punto, presiona el botón *Verificar* y arrastra el triángulo verde hasta superponer un par de vértices correspondientes).
jajaja... ¿Cómo la ve?



60 E2 Presiona el botón *Continuar* y luego el botón *Página siguiente*.
Se muestra una página con un letrero que dice: “*Discute con tu compañero los resultados obtenidos*”.



Era con cada punto.

61 P Bueno, tengo dos figuras ahí en la pantalla... ¿Cómo sé dónde se van a juntar?

62 E1 Entre las dos, entre los cuatro dedos... Jajaja.

63 P ¿Siempre se juntaban entre las dos?

64 E2 No, depende de cómo estén ubicadas las figuras. Y de cómo uno vaya a trazar las rectas de cada lado, por decirlo de cada vértice.

65 P ¿Entonces qué hago para encontrar el lugar dónde se juntan las figuras?

66 E2 Trazar rectas.

67 P ¿Qué rectas trazo?

68 E2 De cada vértice correspondiente.

69 P ¿Hay vértices que se corresponden?

70 E2 Pues, no es eso... es que no sé cómo decirlo.

71 P Bueno busquemos otra (muestra nuevamente la tarea de la primera serie de la secuencia anterior).



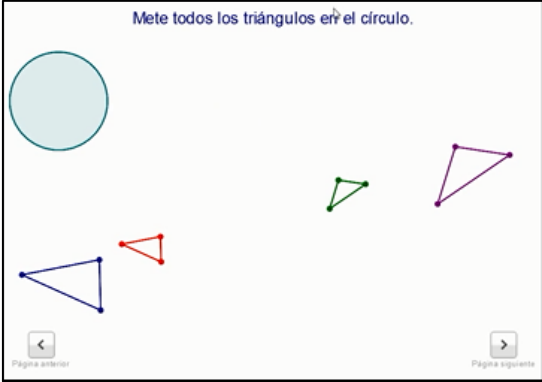
72 E2 ¡Otra vez no!

73 P Tranquilos, sólo es para que me expliquen... ¿Dónde se van a juntar?

74 E1 Vea, se mira esta con esta, esta con esta, esta con esta y así... Para que dé el vértice acá y de los tres puedan dar un punto y saber dónde ubicar el círculo (Señala con el cursor en dirección recta desde cada vértice de las letras rojas pasando por su correspondiente en la letra verde).

75 P Ok, paremos ahí.

Apéndice D. Primera secuencia actividad 2**Tabla 9 Datos primera secuencia Act 2.**

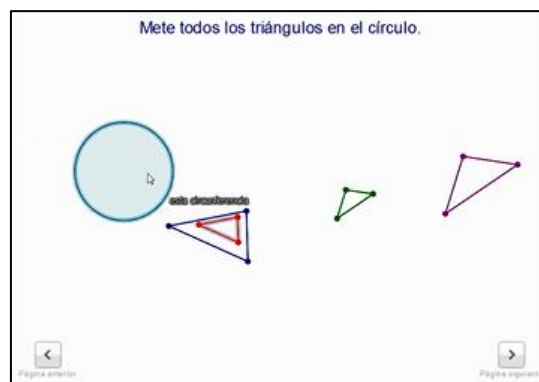
No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E1	(Se muestra una página con un círculo, cuatro triángulos: dos pequeños de colores verde y rojo; y dos grandes de colores violeta y azul, la consigna: “<i>mete todos los triángulos en el círculo</i>” y los botones: <i>Página anterior</i> y <i>Página siguiente</i>). [En esta tarea sólo el círculo y los triángulos pequeños se dejan arrastrar. Los triángulos violeta y azul son homotéticos de los triángulos verde y rojo respectivamente, con respecto a un centro oculto] [Lee la consigna] Mete todos los triángulos dentro del círculo.	

- 2 E1 (Arrastra el triángulo rojo por la pantalla y luego lo superpone con el triángulo azul, luego arrastra un poco el círculo).

¡Ah! ¡Sí se puede mover!

(Exclama al mover arrastrar el círculo).

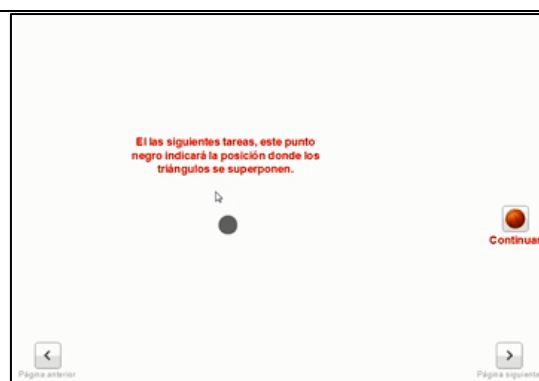
¡Ah! Se acuerda lo de... Lo de moverse así (dice mientras arrastra el triángulo verde).



- 3 E1 (Superpone todos los triángulos y arrastra el círculo sobre ellos. Se ocultan los triángulos y el círculo, y aparece un punto negro titilante con el texto: “*en las siguientes tareas, este punto negro indicará la posición donde los triángulos se superponen*”).

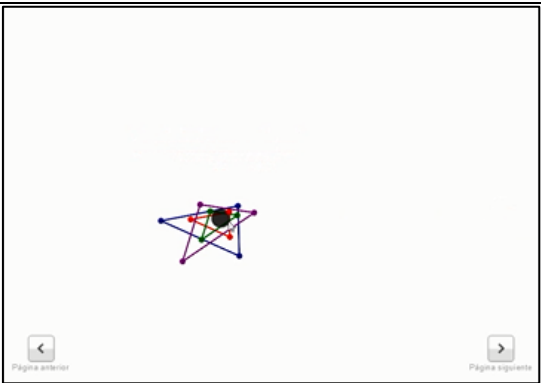
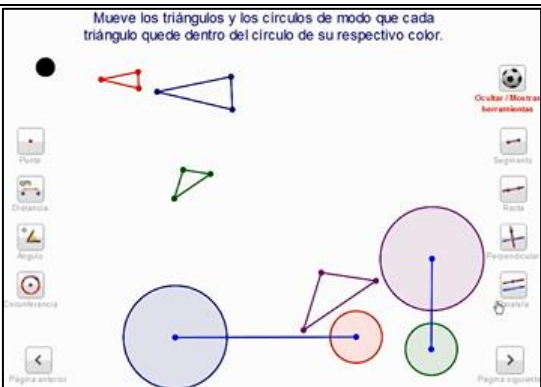


- 4 E2 [Lee el texto] En las... Este punto negro indicará la posición donde los triángulos se superponen.
(4 segundos después de haber aparecido el punto negro y el



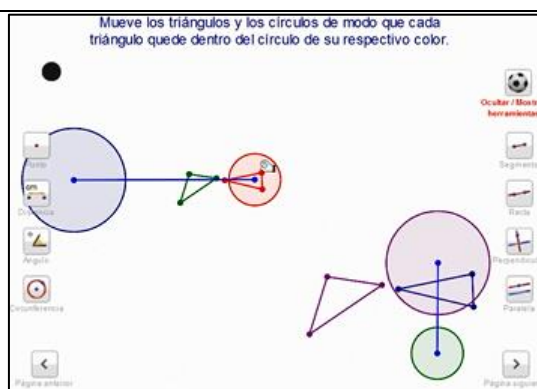
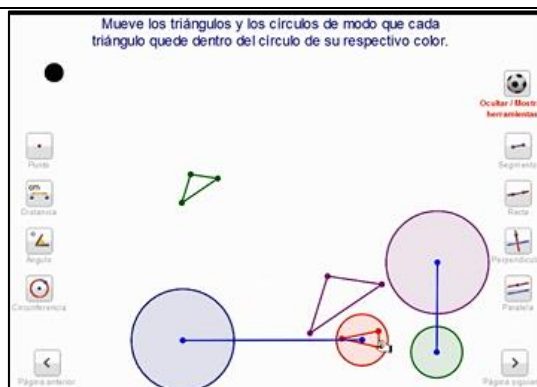
texto, se muestra el botón

Continuar).

5	E1	(Hace clic en el botón <i>Continuar</i> , éste y el texto se ocultan y se muestran nuevamente los cuatro triángulos). Arrastra un poco el triángulo verde.	
6	E2	¿Qué tiene que hacer? Ya, Ahí se superponen... ¿Qué más va a hacer?	
7	E1	(Hace clic en el botón <i>Página siguiente</i> y se muestra una página con cuatro triángulos y cuatro círculos: rojo, verde, azul y violeta; dos segmentos: el primero con extremos en los centros de los círculos azul y rojo, y el segundo con extremos en los centros de los círculos verde y violeta; un punto negro titilante; 8 herramientas de construcción: <i>Punto</i> , <i>Distancia</i> , <i>Ángulo</i> , <i>Circunferencia</i> , <i>Segmento</i> , <i>Recta</i> , <i>Recta perpendicular</i> y <i>Recta paralela</i> ;	

la consigna “Mueve los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de su respectivo color” y tres botones: *Página anterior*, *Página siguiente* y *Ocultar/Mostrar herramientas*).

8	E2	[Lee la consigna] Mueve los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo quede dentro del círculo de su respectivo color.
9	E1	Este quedaría acá (mete el triángulo rojo en el círculo correspondiente y luego lo saca).
10	E2	Mire a ver si los círculos se pueden mover.
11	E1	El rojo sí (arrastra el círculo rojo hasta el triángulo correspondiente y el círculo azul se traslada lo mismo que el círculo rojo).
12	E2	Mire los que no se pueden mover.

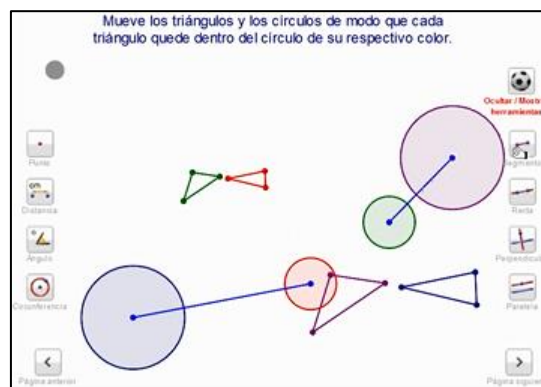


- 13 E1 Sí... (Arrastra el círculo azul y este rota alrededor del círculo rojo).

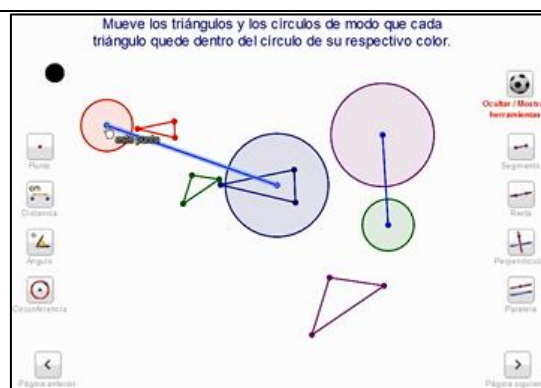
El verde también se puede mover (arrastra el círculo verde).

Y este también se puede mover pero no se mueve igual que el verde (arrastra el círculo violeta que rota alrededor del círculo verde).

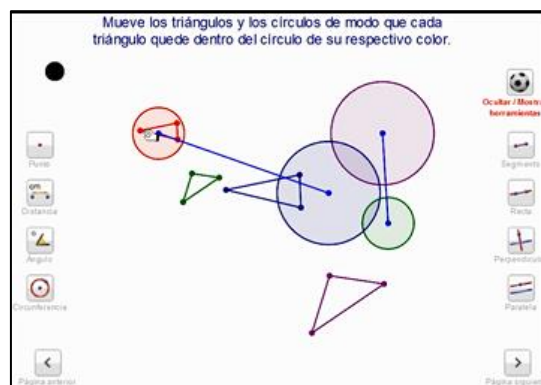
O sea este se puede mover para allá y para acá en cambio el otro se puede mover en todas las direcciones (dice mientras rota el círculo violeta alrededor del círculo verde).



- 14 E2 (Arrastra el triángulo rojo por la pantalla, lo suelta y arrastra círculo rojo hasta que el azul quede sobre el triángulo correspondiente).

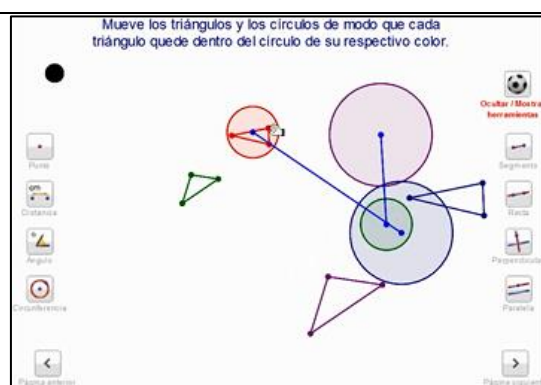


- 15 E2 (Arrastra el círculo rojo hasta el triángulo correspondiente).



- 16 E1 ¿Y esa recta no se puede encoger?

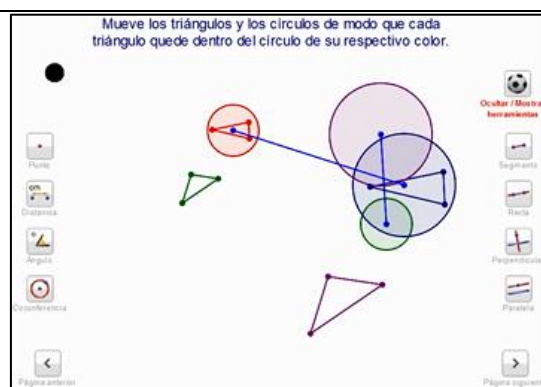
- 17 E2 [Intenta cambiar el tamaño del segmento que une los círculos azul y rojo agarrándolo por los extremos, pero no lo logra]



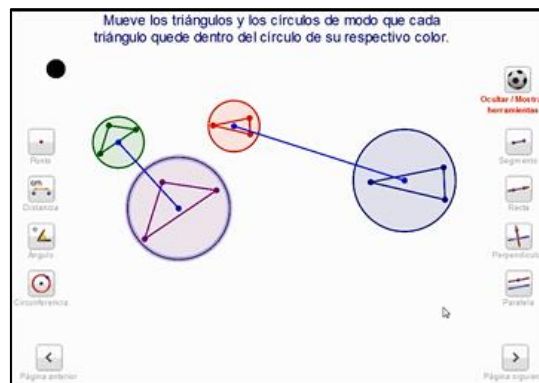
(Arrastra el triángulo rojo y arrastra el círculo rojo a dicha posición).

- 18 E1 No, no le alcanza... Más hacia allá.

- 19 E2 (Ajusta gradualmente la distancia entre los dos triángulos homotéticos: rojo y azul hasta lograr meterlos en los círculos correspondientes)



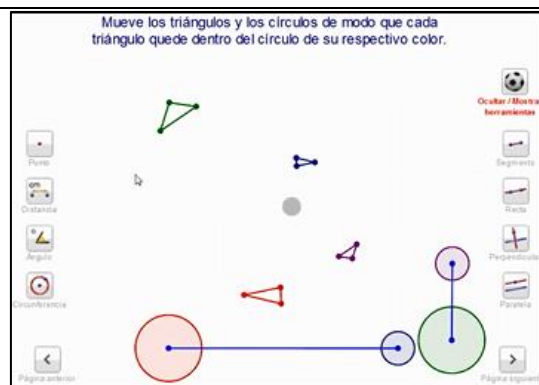
- 20 E2 (Rápidamente, ajusta la distancia entre los triángulos homotéticos: verde y violeta y arrastra los círculos correspondientes hasta que los triángulos quedan dentro de ellos).



- 21 E2 Hace clic en el botón *Página siguiente* y se muestra una página con el texto: “*Para continuar, cede el ratón a tu compañero*”. También se muestran los botones *Página anterior* y *Página siguiente*.



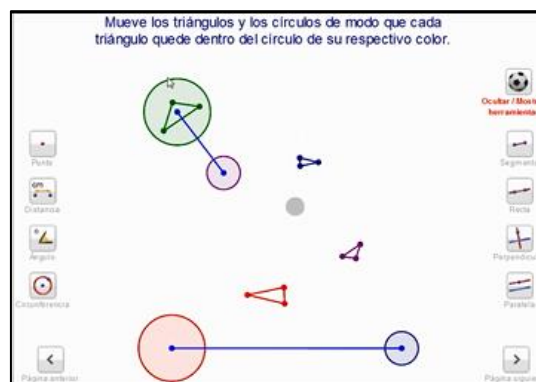
- 22 E1 (Presiona el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea anterior con el centro de homotecia en otra posición y razón menor que cero).



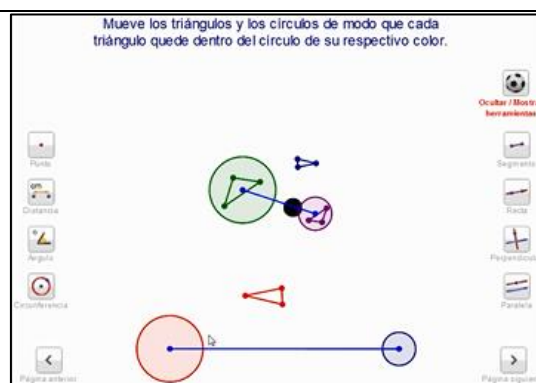
[Lee la consigna] Mueve los triángulos y los círculos de modo que cada triángulo... ¡Ah! Es lo mismo.

23 E1

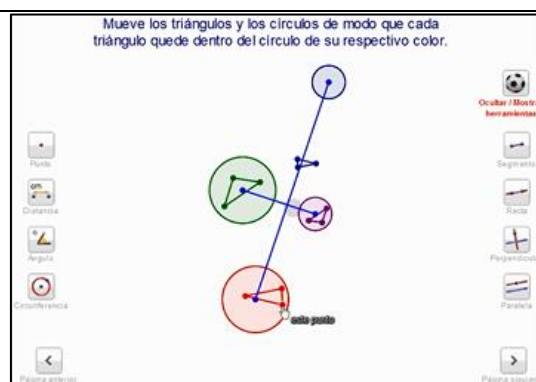
(Arrastra el triángulo círculo verde hasta el triángulo verde hasta el triángulo correspondiente).



24 E1 (Arrastra el triángulo verde y lo acerca a su pareja, el violeta. Luego ajustando la distancia entre ellos, logra meter ambos triángulos en los círculos correspondientes).



25 E1 (Arrastra el círculo rojo hasta el triángulo correspondiente y rota el círculo azul hasta que los dos círculos y los dos triángulos correspondientes quedaran parcialmente alineados con el centro).

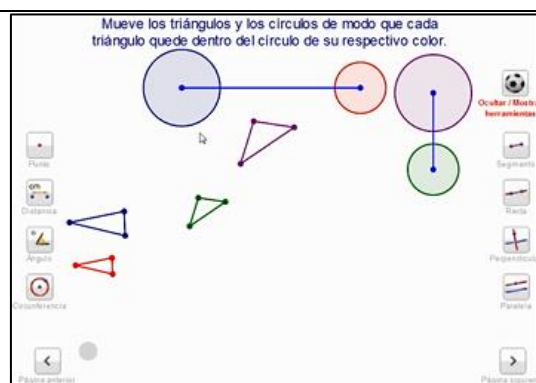


26 E2 Tiene que hacer que se alejen más.

- 27 E1 (Ajusta gradualmente la distancia entre los dos círculos rojo y azul, arrastrando el círculo rojo, hasta lograr meter los triángulos correspondientes dentro de ellos).



- 28 E1 (Presiona el botón *Página siguiente* y nuevamente aparece la página donde se sugiere ceder el ratón. En ella presiona el botón *Página siguiente* y se muestra la misma tarea con el centro de homotecia en otra posición y razón mayor que cero).

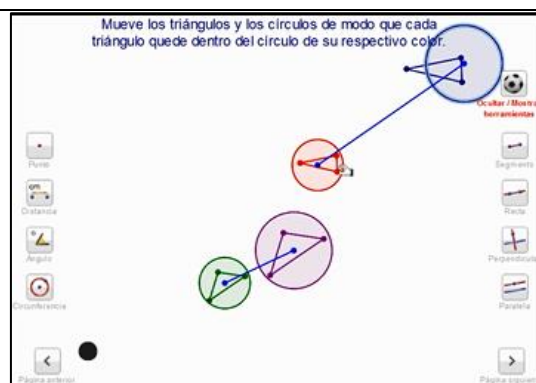


- 29 E2 (Arrastra los círculos y los triángulos sin ningún patrón).

- 30 P ¿Qué está intentando hacer?

- 31 E2 Intentando acomodar los triángulos para que queden a la misma distancia que los círculos.

- 32 E2 (Mediante ajustes graduales logra meter una pareja de triángulos en los círculos correspondientes. Luego intenta meter la otra pareja de triángulos en los otros círculos).

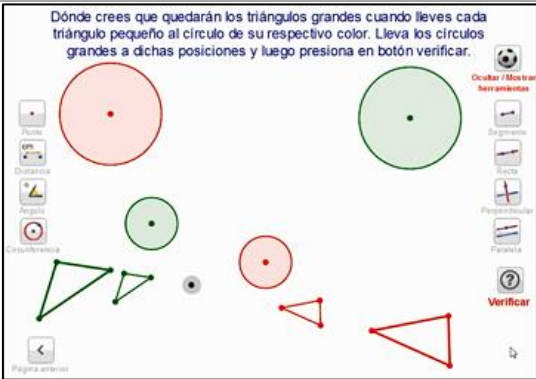


31	E1	Venga y le ayudo (toma el ratón).	
32	E2	¿Y ese punto...? ¡Ah! El punto no es donde se juntan...	
33	E1	Sí (a ensayo y error logra meter la otra pareja de triángulos en los círculos correspondientes).	
34	P	Espere antes de avanzar... ¿Puede mover los círculos, el verde y morado en otro lugar donde pueda meter los triángulos, que no sea esa posición?	
35	E1	O sea que pueda... Digamos este por acá y este por acá... Pero entonces no sería la misma medida (dice mientras arrastra el círculo verde y luego el triángulo correspondiente a otra posición).	
36	E1	(Arrastra nuevamente el triángulo verde y los círculos hasta meter ambos triángulos en los círculos correspondientes). O sea que sí se puede.	
37	P	Entiendo.	
38	E1	(Presiona el botón <i>Página siguiente</i> y nuevamente aparece la página donde se	

sugiere ceder el ratón. En ella presiona el botón *Página siguiente* y avanza a la siguiente secuencia).

Apéndice E. Segunda secuencia actividad 2

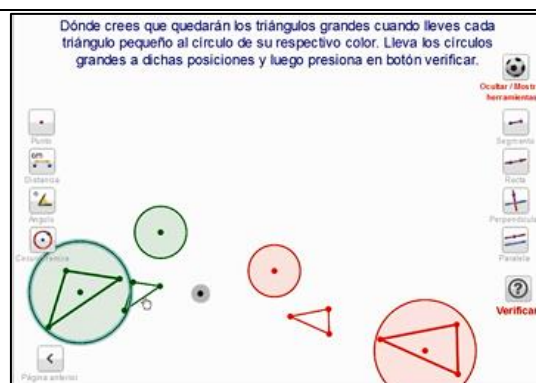
Tabla 10 Datos segunda secuencia Act 2.

No	Sujeto	Descripción	Evidencia
1	E1	(se muestran dos parejas de triángulos homotéticos con respecto al punto negro que permanece visible y titilante, una pareja de color rojo y otra verde; dos parejas de círculos: una roja y otra verde; 8 herramientas de construcción: <i>Punto</i> , <i>Distancia</i> , <i>Ángulo</i> , <i>Circunferencia</i> , <i>Segmento</i> , <i>Recta</i> , <i>Recta perpendicular</i> y <i>Recta paralela</i> ; tres botones: <i>Verificar</i> , <i>Página anterior</i> y <i>Ocultar/Mostrar herramientas</i> y la consigna “¿Dónde crees que quedarán los triángulos grandes cuando lleves cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color? Lleva los	

círculos grandes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar”).

[Los círculos imagen se dejan arrastrar, mientras que los círculos preimagen, los triángulos y el punto negro están fijos].

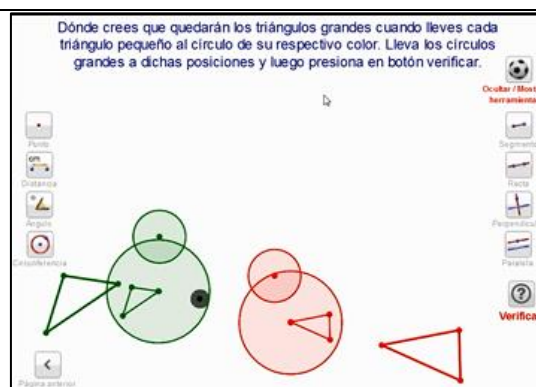
- 2 E1 [Lee la consigna] ¿Dónde crees que quedarán los triángulos grandes cuando lles cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color? Lleva los círculos grandes a dichas posiciones y luego presiona el botón verificar.



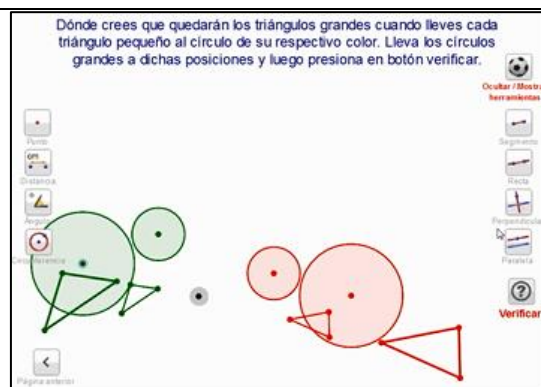
(Arrastra los círculos grandes hasta los triángulos correspondientes).

- 3 E2 Tiene que ponerlos donde van a quedar.

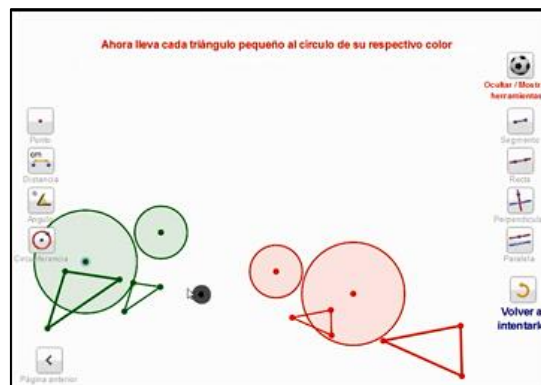
- 4 E1 Intenta arrastrar los círculos pequeños y los triángulos pero no lo logra. Luego arrastra los círculos grandes hasta los triángulos pequeños de su respectivo color.



5	P	¿Qué está intentando hacer?
6	E1	Dice... [Lee e intenta entender la consigna]¿Dónde crees que quedarán los triángulos grandes...? O sea este y este (señala con el cursor los triángulos grandes)... Cuando lleves cada triángulo pequeño... O sea estos (señala con el cursor los triángulos pequeños)... A los círculos de su respectivo color... O sea el verde al verde y el naranja al naranja.
7	E2	Ese es rojo.
8	E1	[Continúa leyendo la consigna] Lleva los círculos a dichas posiciones.
9	P	¿Cree que ese círculo que ubicó aquí (señala el círculo rojo grande) está dónde quedará este triángulo (señala el triángulo rojo grande) cuando lleve este (señala el triángulo verde pequeño) al círculo pequeño?
10	E2	¿Sí entendió?
11	E1	O sea si yo llevo el rojo allá...
12	E2	Es que el círculo es la posición donde va a quedar este triángulo cuando usted corra el pequeño (interrumpe a su compañero).
13	E1	¡Ah! Ya entendí... Si yo corro el pequeño... (Mueve los círculos grandes en otra posición)

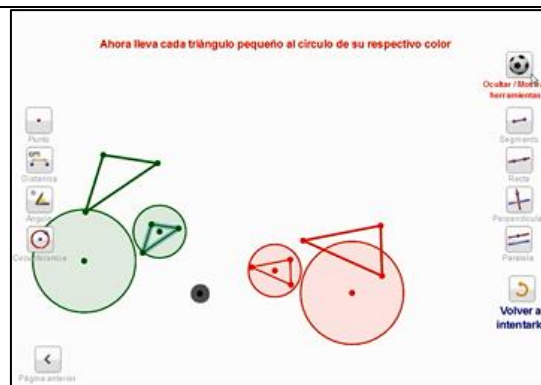


- 14 E1 (Presiona el botón *Verificar*, éste cambia por el botón *Volver a intentarlo* y la consigna cambia por: “*Ahora lleva cada triángulo pequeño al círculo de su respectivo color*”).

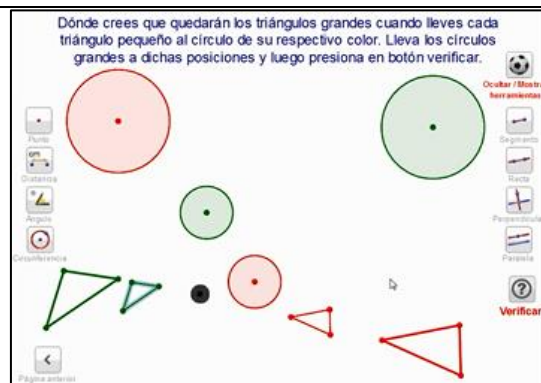


[Ahora los triángulos pequeños se dejan arrastrar pero los círculos permanecen fijos].

- 15 E1 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).
¡Ah! Ya, ya, ya...



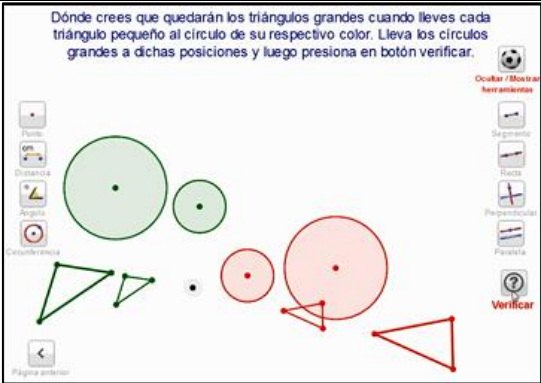
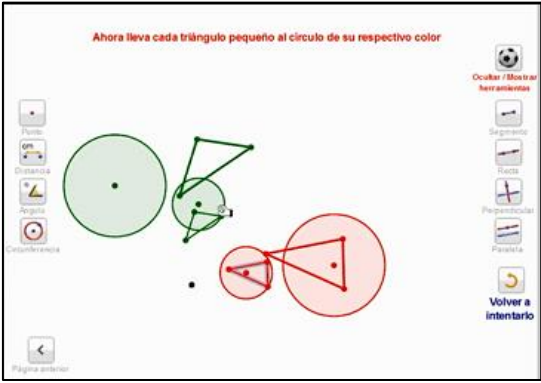
- 16 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con los círculos pequeños en otra posición y los círculos grandes en las posiciones iniciales).



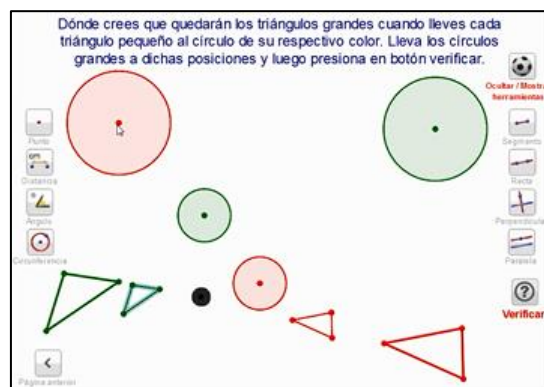
(Observa la pantalla algunos segundos).

¿Estos cómo se mueven? Unos para un lado y los otros para el

otro... ¿Cierto? Depende de cómo
vayan los triángulos... O sea que
el otro lo va siguiendo.

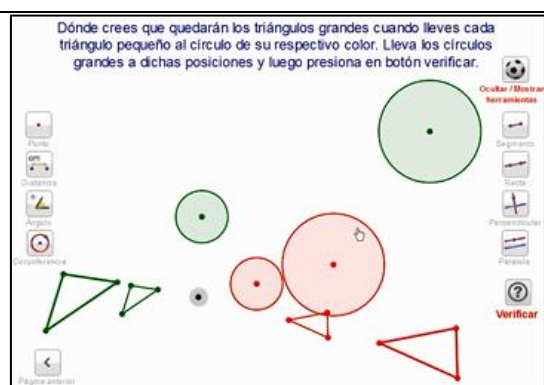
17	E2	Creo que este sube (señala el triángulo verde grande) y este...
18	E1	¿Cómo así? Sí, el verde sube. (Mueve los círculos grandes). 
19	E1	(Presiona el botón <i>Verificar</i> y arrastra el triángulo rojo al círculo de su respectivo color, luego arrastra el triángulo verde pequeño). Pero es que este lo sigue y este no (señala el triángulo rojo pequeño y luego el verde pequeño). 
20	P	¿Cómo así que este sí y este no?
21	E1	Que este lo va siguiendo (arrastra el triángulo verde pequeño) y este va al contrario (arrastra el triángulo rojo pequeño).
22	P	¿Sí...? ¿Usted qué opina? (pregunta a E2)
23	E2	Yo ya dije.

- 24 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con los círculos pequeños en una posición ligeramente distinta a la anterior y los círculos grandes en las posiciones iniciales).

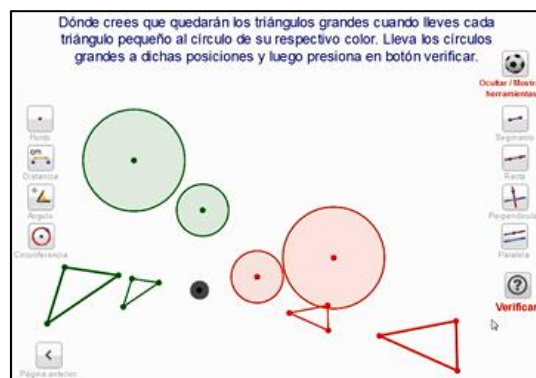


- 25 P ¿Tienen comportamientos distintos las dos parejas?
- 26 E1 Sí.
- 27 P Y usted qué fue lo que le dijo (pregunta a E2)
- 28 E2 Yo le dije que este iba a subir (señala el triángulo verde grande) y este a bajar (señala el triángulo rojo grande).
- 29 P ¿Cómo lo sabe?
- 30 E1 Depende de cómo estén los triángulos...
- 31 P Aquí por ejemplo.

- 32 E1 Este lo va a seguir (señala el triángulo rojo pequeño). Y este lo va a seguir como por acá (ubica el círculo rojo grande en dicha posición).

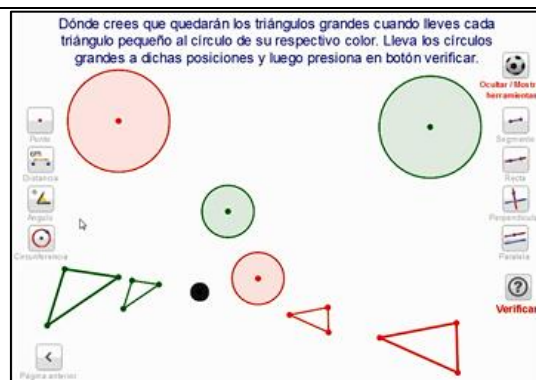


- 33 E1 Y este va a subir hasta acá y este lo va acompañar como hasta por aquí (ubica allí el círculo verde grande).

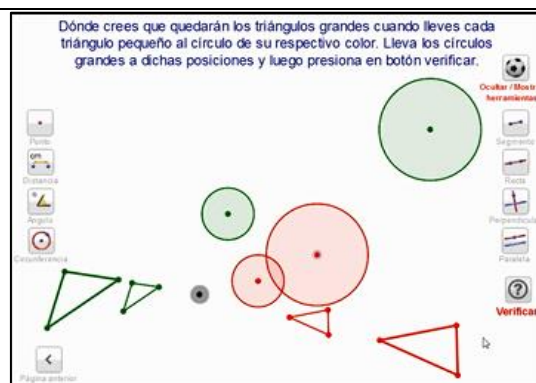


- 34 E1 (Presiona el botón *Verificar* y arrastra los triángulos pequeños hasta los círculos correspondientes, los triángulos grandes quedan por fuera de sus respectivos círculos).

- 35 E1 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia con los círculos pequeños en una posición distinta a la anterior y los círculos grandes en las posiciones iniciales).



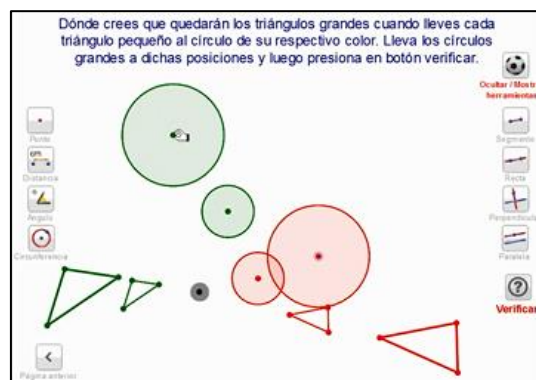
- 36 E1 Cuando este se mueva para acá este se va a venir para acá, porque se van a pegar. O sea que el círculo debe estar como por aquí (ubica el círculo).



- 37 P ¿Por qué allí y no más arriba o más abajo o más a la izquierda o más a la derecha?

- 38 E1 Porque yo al mover este aquel no se va a mover como se va a mover este (señala ambos triángulos rojos).

En cambio cuando este suba, este se va a separar (señala el triángulo verde pequeño y luego el grande). Entonces el círculo quedaría como por acá (ubica el círculo verde grande).



- 39 E1 (Presiona el botón *Verificar* y arrastra el triángulo rojo pequeño para llevarlo al círculo correspondiente).

- 40 P Arrástrelo por toda la pantalla.

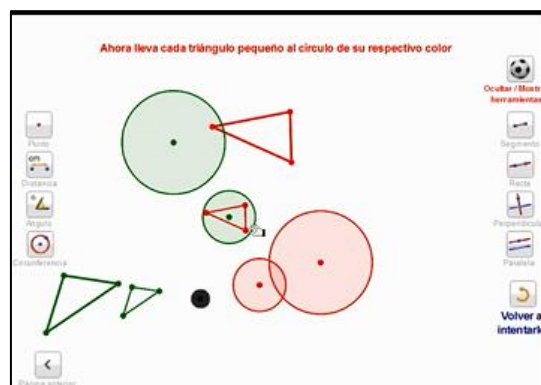
- 41 E1 Arrastra el triángulo rojo pequeño por toda la pantalla.

- 42 E2 O sea que el chiquito, depende de cómo uno lo mueva, como que le va ganando al otro.

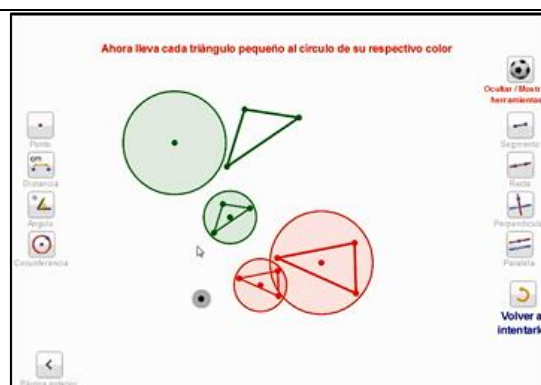
- 43 P ¿Cómo así que le va ganando al otro?

- 44 E1 No, no, no... Ya entendí, ya entendí. ¡Mire! Este es igual que este, o sea que si este círculo pequeño estuviera aquí con el otro entonces el grande también tendría que estar encima.

- 45 E1 (Arrastra el triángulo rojo pequeño hasta el círculo verde pequeño).
¿Sí ve que quedan ahí mismo?

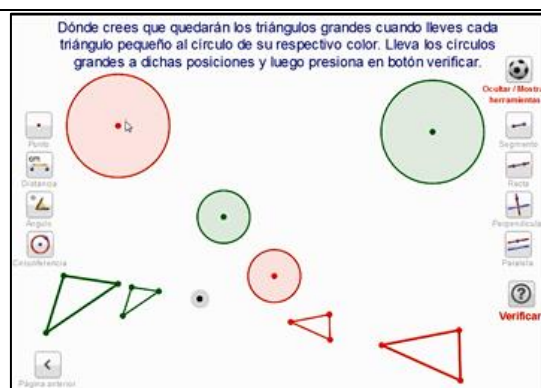


- 46 E1 (Mete los triángulos pequeños en sus respectivos círculos).



- 47 P ¿Es el comportamiento de las figuras distinto al de la primera actividad?

- 48 E1 Un poquito (presiona el botón *Volver a intentarlo* pero los círculos pequeños aparentemente no cambian de posición. Los círculos grandes retornan a las posiciones iniciales).

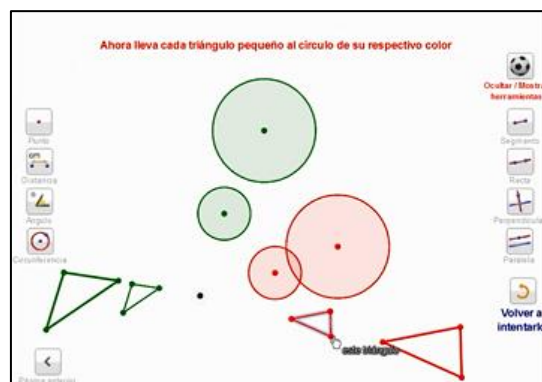


- 49 P ¿Quieren que volvamos a abrir el de la primera?

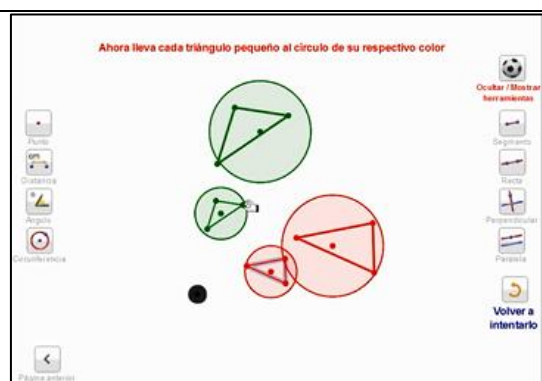
- 51 E1 No señor

- 52 E2 ¡No! Así está bien.

- 53 E1 (Ubica los círculos grandes y presiona el botón *Verificar*).



- 54 E1 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes. Un punto del triángulo verde grande queda por fuera del círculo respectivo).

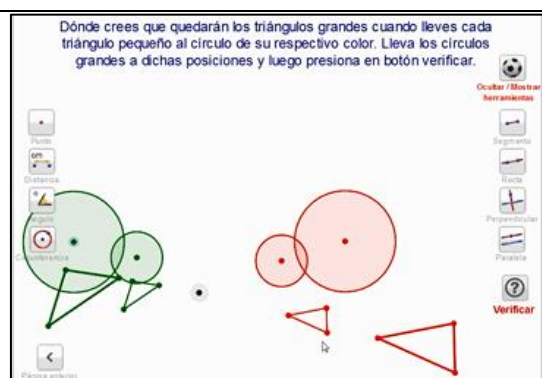


- 55 P ¿Qué hay de distinto en esta segunda actividad al de la primera?

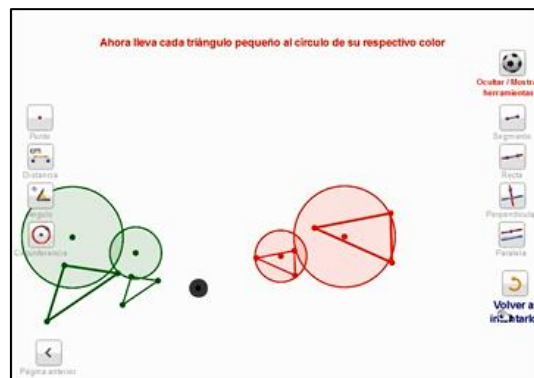
- 56 E2 Que ahora toca poner las figuras.

- 57 P Me refiero al movimiento de las dos figuras.

- 58 E1 ¡Ah! mire este va a quedar ahí porque se van a mover igual (dice mientras ubica el círculo verde grande).
(Presiona el botón *Volver a intentarlo*, la tarea se reinicia y ubica los círculos grandes rápidamente).

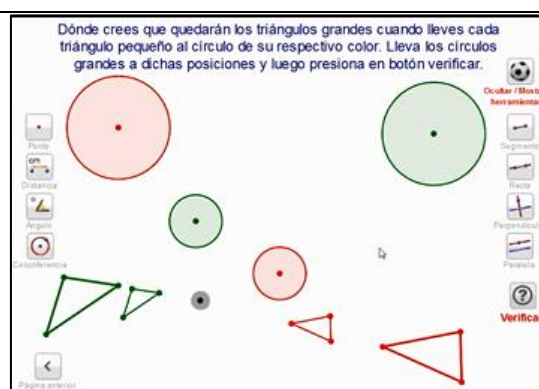


- 59 E1 Presiona el botón *verificar* y arrastra el triángulo rojo pequeño al círculo correspondiente.

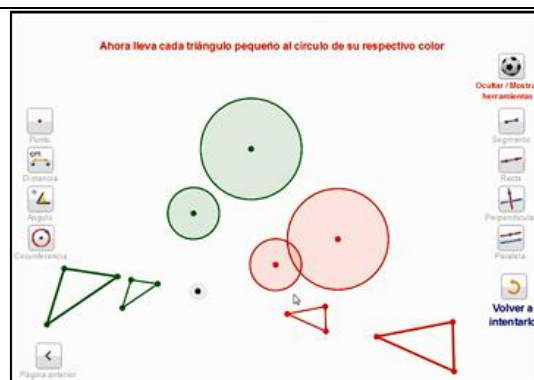


- 60 E2 Le faltó poco... Pero siempre es la misma, por qué no lo ubica ahí.

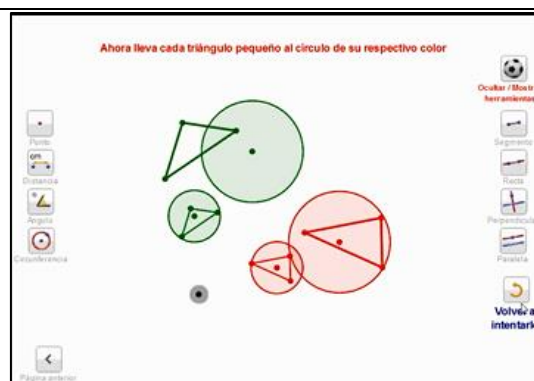
- 61 E1 No, no es la misma (presiona el botón *Volver a intentarlo*).



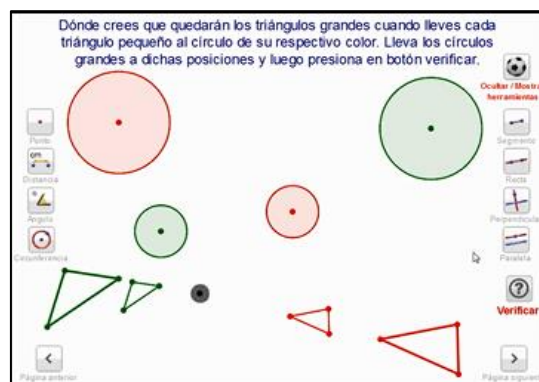
- 62 E1 (Ubica los círculos grandes y presiona el botón *Verificar*).



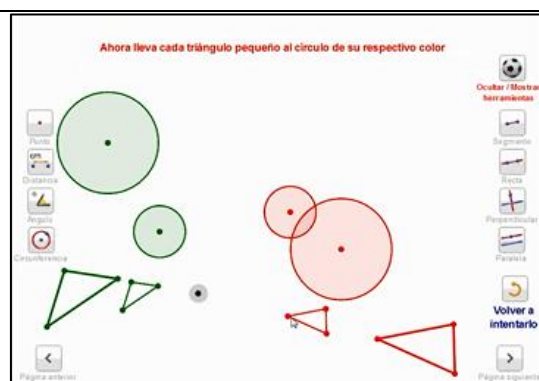
- 63 E1 (Mete los triángulos pequeños dentro de los círculos correspondientes).



- 64 E2 (Hace clic en el botón *Volver a intentarlo* y la tarea se reinicia).

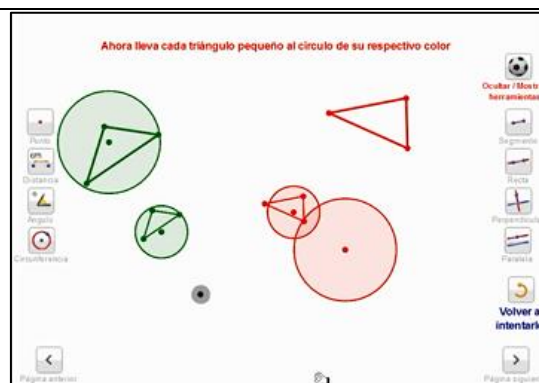


- 65 E2 (Ubica los círculos y presiona el botón *Verificar*).

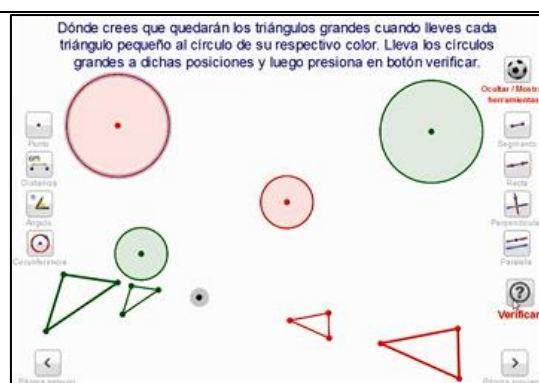


- 66 E2 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).

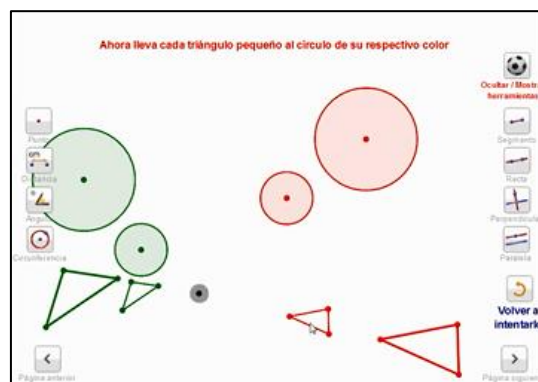
¿Y ahora por qué se separaron?



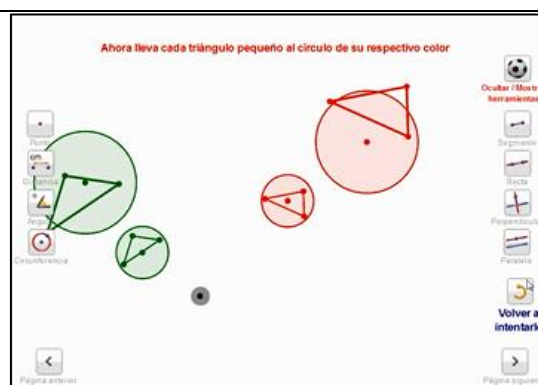
- 67 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).



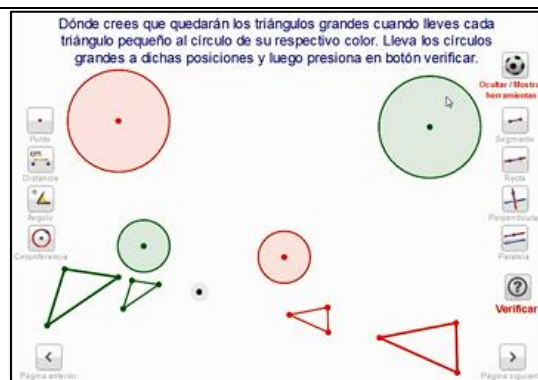
- 68 E2 (Ubica los círculos y presiona el botón *Verificar*).



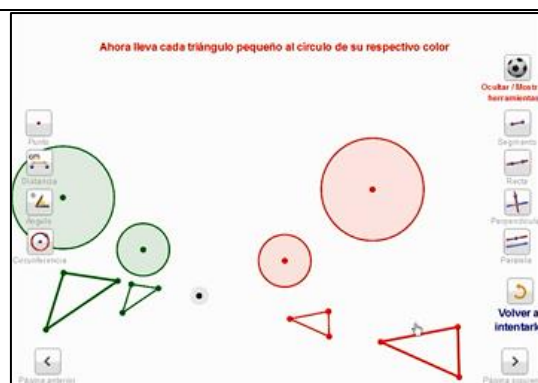
- 69 E2 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).



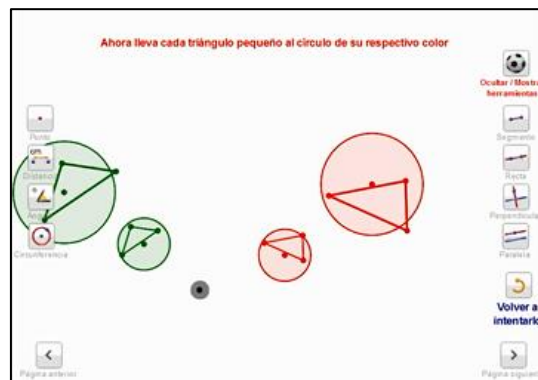
- 70 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).



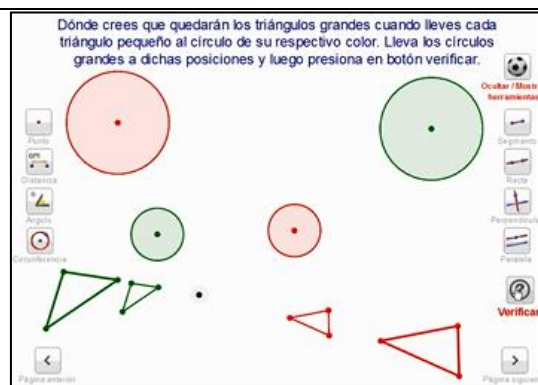
- 71 E2 (Ubica los círculos con ayuda del compañero y presiona el botón *Verificar*).



- 72 E2 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).



- 73 E2 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).

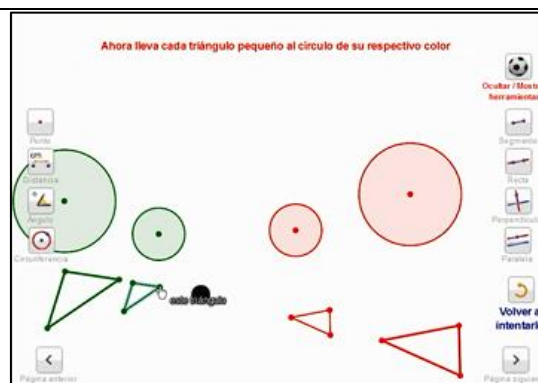


- 74 P ¿Cuál es la estrategia que están usando para resolver la tarea?

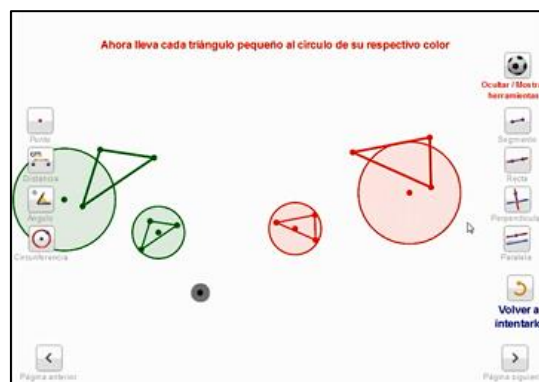
- 75 E2 Depende de cómo estén ubicado los triángulos..

- 76 P Y cómo usan eso para ubicar los círculos.

- 77 E1 Ya me di cuenta de algo, un dedito, dos deditos... (Ubica los círculos grandes y presiona el botón *Verificar*).

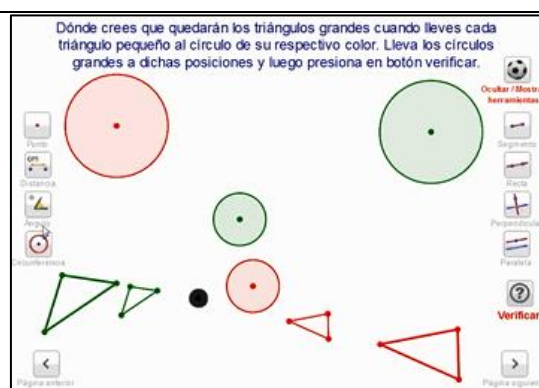


- 78 E1 (Mete los triángulos pequeños en los círculos correspondientes).
¡Por poquito!



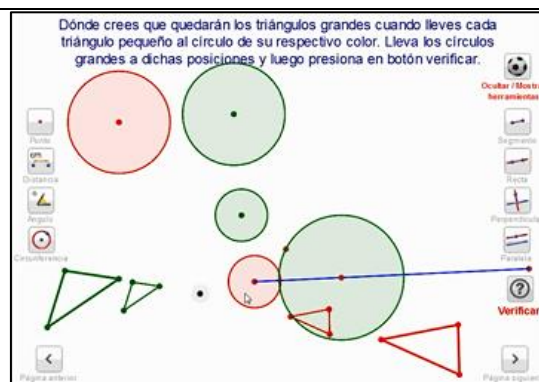
- 79 P ¿Qué fue lo que midió? Ahí tiene herramientas para medir.

- 80 E1 (Presiona el botón *Volver a intentarlo*).
¡Ah!



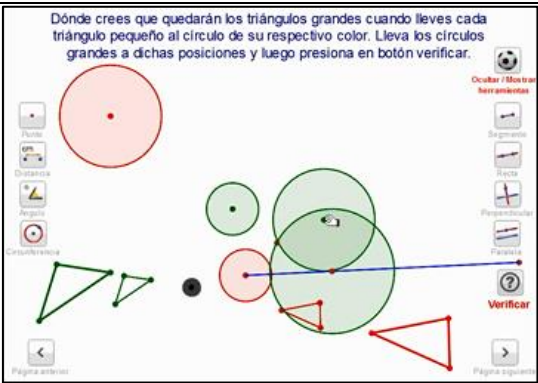
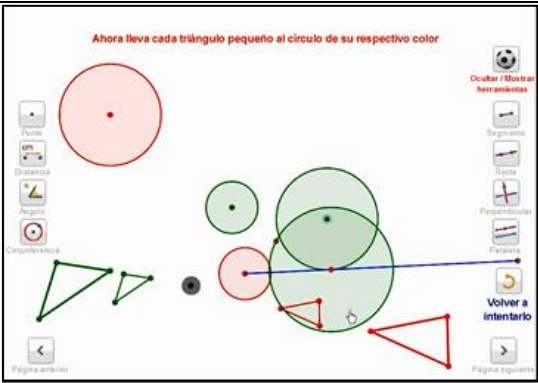
- 81 P ¿Qué era lo que medía? Usted decía, dos deditos, entonces aquí lo va a medir con precisión.

- 82 E1 (Construye un segmento y luego un círculo, como se muestra en la figura).
Póngale cuidado, al subir este (señala el triángulo rojo pequeño) este subiría (señala el triángulo rojo grande).

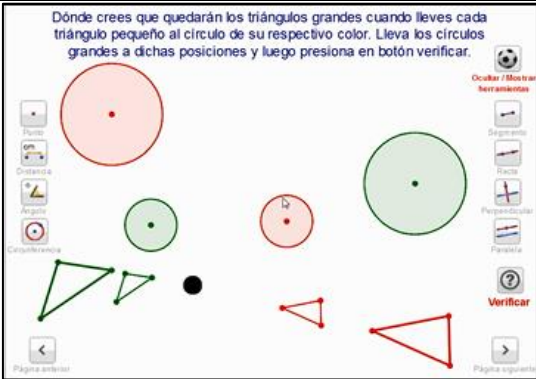
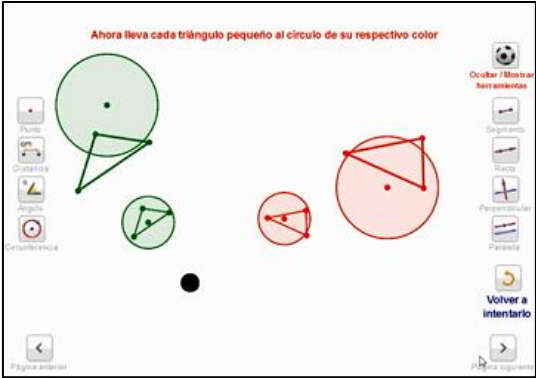


Eso sería donde no lo deberíamos ubicar (señala la región limitada por el círculo que construyó),

porque si lo ubicamos ahí... Sería más arriba.

83	E1	Entonces el círculo iría como por acá... (Ubica el círculo).	
84	P	¿Por qué allá?	
85	E1	Porque al subir este (señala el triángulo rojo pequeño), sería la misma distancia que estos (señala los dos triángulos rojos). Es que le sigue pero hacia arriba. Si usted lo coge y lo lleva hacia encima, el otro... Digamos así, se abre, se aleja del chiquito. Y si lo llevamos hacia abajo, él se pega.	
86	P	Dele verificar.	
87	E1	Espere a ver si sirve (presiona el botón <i>Verificar</i>).	
88	E1	Vea, este hacia arriba, se leja (arrastra el triángulo rojo pequeño hacia la parte superior de la pantalla).	
89	P	Arrástrelo hacia abajo.	
90	E1	(Arrastra el triángulo rojo pequeño por toda la pantalla).	

¡Ah! En los extremos se aleja y en la mitad se acerca.

91	E2	Cuando llega al punto es donde se acercan. Cuando se aleja del punto negro es que se separan. ¿Sí ve...? ¿Sí entendió?
92	E1	Sí (presiona el botón volver a intentarlo). 
93	E1	Entonces, si subimos este acá (señala el triángulo rojo pequeño y el círculo correspondiente). (Ubica los círculos grandes, presiona el botón <i>Verificar</i> y mete los triángulos pequeños en los círculos respectivos) No profesor, sinceramente no somos capaces. Está muy difícil. 
84	E2	Está difícil y estamos muy cansados.
85	P	Entonces paremos aquí.