

Estudio de las Superficies de Delaunay

Laura Juliana Basto Buitrago

Trabajo de grado para optar al título de Matemática

Director

Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Matemáticas

Bucaramanga

2026

Tabla de Contenido

	Pág.
1. Contexto Histórico	8
2. Fundamentos teóricos	13
2.1 Superficies regulares	13
2.2 Primera y segunda forma fundamental	17
2.3 Curvaturas principales, curvatura media y curvatura de Gauss	23
2.4 Superficies completas y extensiones suaves	26
2.5 Superficies mínimas	29
2.6 Superficies de revolución	35
2.7 Ecuación de curvatura media constante para superficies de revolución	39
3. Cónicas y curvas ruleta	51
3.1 Cónicas	51
3.2 Curvas ruleta	63
4. Superficies de Delaunay y el teorema de clasificación	107
4.1 Superficies de Delaunay	107
4.2 Teorema de clasificación	166
5. Aplicaciones	202
5.1 Puentes capilares y superficies líquido-aire	202
5.2 Superficies CMC completas con extremos de Delaunay	208
5.3 Aplicación a membranas biológicas, energía de Willmore-Helfrich y beta barrels . . .	218
Referencias Bibliográficas	222

Lista de Figuras

Figura 1.	Charles-Eugène Delaunay	11
Figura 2.	Parametrizaciones compatibles y cambio de coordenadas en una superfi- cie diferenciable	15
Figura 3.	La esfera como superficie regular	17
Figura 4.	El cilindro como superficie regular	17
Figura 5.	Aplicación de Gauss	20
Figura 6.	Curvatura Normal de una Superficie	24
Figura 7.	El helicoides, superficie mínima reglada	32
Figura 8.	Superficie de Scherk, ejemplo de superficie mínima periódica	33
Figura 9.	Superficie de Costa	33
Figura 10.	Superficie de Schwarz P	34
Figura 11.	Superficie de Gyroid	34
Figura 12.	Cónicas como intersección de un cono	51
Figura 13.	Definición geométrica de la parábola	52
Figura 14.	Definición geométrica de la elipse	55
Figura 15.	Definición geométrica de la hipérbola	59
Figura 16.	Ruleta generada por el punto A sobre la espiral de Arquímedes	63
Figura 17.	Curva pedal de la curva paramétrica $(3 \cos(t) + \cos 3t, 3 \sin(t) - \sin 3t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, respecto al polo $O = (0, 6)$	64
Figura 18.	Representación gráfica de la proposición	67
Figura 19.	Curva catenaria	71
Figura 20.	Curva ondularia	76

Figura 21.	Curva Nodaria	90
Figura 22.	Curvas C_1 y C_2	104
Figura 23.	Nodaria con traslación axial	104
Figura 24.	Nodaria completa periódica	104
Figura 25.	Catenoide	107
Figura 26.	Onduloide	115
Figura 27.	Parte inferior del Onduloide cortado por el plano xy	115
Figura 28.	Nodoide generado por la nodaria $C_1(t)$	129
Figura 29.	Nodoide generado por la nodaria $C_2(t)$	142
Figura 30.	Nodoide completo	156
Figura 31.	Parte inferior del Nodoide cortado por el plano xy	156
Figura 32.	Fotografía de un calibrador deslizante con dos anillos coaxiales formando un catenoide de película de jabón	206
Figura 33.	Secuencia de imágenes de un menisco de agua en una punta de microscopio de fuerza atómica, obtenidas mediante un microscopio electrónico de barrido a diferentes humedades relativas	207
Figura 34.	Cuerpo capilar axisimétrico con forma de nodoide: una gota que adopta la forma de un nodoide cuando es comprimida por placas sólidas de forma especial	208
Figura 35.	Jorge–Meeks 3-noid	213
Figura 36.	Jorge–Meeks 4-noid	213
Figura 37.	Jorge–Meeks 5-noid	213
Figura 38.	Costa-Hoffman-Meeks de genero 2	214
Figura 39.	Costa-Hoffman-Meeks de genero 4	214
Figura 40.	Costa-Hoffman-Meeks de genero 9	214
Figura 41.	Ejemplo: Un CMC 3-noid (izquierda) y un 3-noid mínimo (derecha) . . .	218

Figura 42.	Lámina beta	219
Figura 43.	Hebra beta	219
Figura 44.	Barril beta	219

Resumen

Título: Estudio de las Superficies de Delaunay

Autor: Laura Juliana Basto Buitrago

Palabras clave: Superficies de Delaunay, Curvatura media constante, Superficies de revolución, Ruletas, Cónicas

Descripción:

Este trabajo presenta un estudio de las superficies de Delaunay, una familia clásica de superficies de revolución caracterizadas por tener curvatura media constante. El interés principal es comprender cómo estas superficies surgen a partir del rodamiento sin deslizamiento de una cónica sobre una recta y de la trayectoria descrita por uno de sus focos, destacando la relación entre la geometría de las curvas generatrices y las superficies obtenidas.

Para desarrollar esta idea, se introducen primero las herramientas básicas de la geometría diferencial de superficies, necesarias para estudiar con detalle la geometría local de las superficies obtenidas por revolución. Posteriormente, se construyen las ruletas asociadas a la parábola, la elipse y la hipérbola. A partir de ellas se obtienen, respectivamente, la catenaria, las ondularias y las nodarias, cuyas rotaciones alrededor del eje de rodamiento generan el catenoide, el onduloide y el nodoide.

Finalmente, se presenta el teorema de clasificación de Delaunay, que permite identificar las superficies de revolución completas con curvatura media constante. El trabajo concluye con una revisión de algunas aplicaciones actuales de estas superficies, especialmente en el estudio de puentes capilares, superficies CMC completas con extremos de Delaunay y modelos geométricos relacionados con membranas biológicas y la energía de Willmore-Helfrich.

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Abstract

Title: Study of Delaunay Surfaces

Author: Laura Juliana Basto Buitrago

Key Words: Delaunay surfaces, Constant mean curvature, Surfaces of revolution, Roulettes, Conics

Description:

This work presents a study of Delaunay surfaces, a classical family of surfaces of revolution characterized by constant mean curvature. The main objective is to understand how these surfaces arise from the rolling without slipping of a conic along a straight line and from the trajectory traced by one of its foci, emphasizing the relationship between the geometry of the generating curves and the corresponding surfaces of revolution.

To develop this study, the basic tools of the differential geometry of surfaces are first introduced, providing the framework required to analyze their local geometry. The roulettes associated with the parabola, the ellipse, and the hyperbola are then constructed. From these curves, respectively, the catenary, the undulary, and the nodary are obtained, whose rotations around the rolling axis generate the catenoid, the unduloid, and the nodoid.

Finally, Delaunay's classification theorem is presented, identifying the complete surfaces of revolution with constant mean curvature. This approach provides a unified geometric perspective connecting the classical construction of Delaunay with the differential properties studied. The work concludes with a review of current applications of these surfaces, particularly in capillary bridges, complete CMC surfaces with Delaunay ends, and geometric models related to biological membranes and Willmore-Helfrich energy.

* Bachelor Thesis.

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, PhD in Mathematical Sciences.

1. Contexto Histórico

El estudio de las superficies con curvatura media constante (CMC) tiene sus raíces en problemas físicos y geométricos que cautivaron a los matemáticos desde el siglo XVIII. La primera motivación surgió del cálculo de variaciones con el problema de encontrar la superficie de área mínima que se apoya en un contorno dado. Este problema, conocido posteriormente como **problema de Plateau** en honor al físico belga Joseph Plateau, llevó a Joseph-Louis Lagrange en 1760 a plantear la ecuación en derivadas parciales que deben satisfacer las superficies mínimas, aquellas con curvatura media nula ($H = 0$) (1).

Paralelamente, el estudio de fenómenos capilares y de las pompas de jabón planteaba un problema relacionado pero distinto. Mientras que una película de jabón (sin aire atrapado) tiende a minimizar su área ($H = 0$), una pompa de jabón con aire en su interior presenta una diferencia de presión entre el interior y el exterior. La ley de Laplace-Young (1805) establece que esta diferencia de presión es proporcional a la curvatura media de la superficie (2, 3). Por lo tanto, las superficies que modelan pompas de jabón en equilibrio deben tener curvatura media constante pero no nula ($H = \text{constante} \neq 0$).

En este contexto de búsqueda de superficies con CMC, el matemático francés **Charles-Eugène Delaunay** (1816-1872) realizó un avance fundamental. En su memoria titulada "*Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*" (Sobre la superficie de revolución cuya curvatura media es constante), publicada en el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* en 1841, Delaunay abordó el problema de clasificar todas las superficies de revolución con curvatura media constante (4). Su enfoque fue extraordinariamente geométrico e ingenioso. Delaunay demostró que las curvas generatrices de dichas superficies podían obtenerse mediante un mecanismo simple pero profundo: la ruleta del foco de una cónica. Es decir, si se hace rodar, sin deslizamiento, una cónica (elipse, parábola o hipérbola) sobre una recta (que será el eje de revolución de la

superficie final), el foco de la cónica describe una curva. Al girar esta curva alrededor de la recta, se obtiene una superficie de curvatura media constante. Esta construcción geométrica dio lugar a la familia que hoy conocemos como superficies de Delaunay, que incluye el **onduloide**, generado por la ruleta del foco de una elipse; el **nodoide**, generado por la ruleta del foco de una hipérbola; la **catenoide**, obtenida como caso límite a partir del foco de una parábola (la única superficie mínima ($H = 0$) de la familia, ya conocida por Euler en 1744); y, como casos límite adicionales, la **esfera**, el **cilindro** y el **plano**.

Pocos años después de la publicación de Delaunay, la conexión con los problemas variacionales se hizo explícita. Jacques Sturm, en el mismo año 1841 (5), y más tarde Joseph Plateau en su obra "*Statique Expérimentale et Théorique des Liquides*" (1873) (6), interpretaron las superficies de Delaunay como las configuraciones de equilibrio de puentes líquidos (también llamados *capillary bridges*). Estos científicos comprendieron que, al igual que una pompa de jabón aislada es una esfera, un volumen de líquido sostenido entre dos soportes (por ejemplo, dos anillos o dos placas) adoptará, bajo condiciones de ingravidez o equilibrio capilar, la forma de una superficie de Delaunay. La superficie resultante es un punto crítico (o extremal) del funcional de energía superficial (área) bajo la restricción de volumen constante. Este problema isoperimétrico tiene como ecuación de Euler-Lagrange precisamente la condición de que la curvatura media sea constante. Así, las superficies de Delaunay se convirtieron en los modelos matemáticos ideales para estudiar fenómenos capilares y de tensión superficial.

Durante más de un siglo, las superficies de Delaunay fueron los únicos ejemplos conocidos de superficies CMC no triviales. Sin embargo, a mediados del siglo XX, el interés por la clasificación global de estas superficies resurgió con fuerza. Heinz Hopf demostró en 1956 que cualquier superficie inmersa de curvatura media constante y género cero (es decir, homeomorfa a una esfera) debe ser una esfera redonda (7). Por otro lado, A. D. Alexandrov (1962) probó, utilizando su ingenioso método de los planos de simetría, que si la superficie es embebida (sin autointersecciones) y compacta, entonces también debe ser una esfera (8). Esto dejaba abierta la posibilidad de que existieran superficies compactas inmersas (con autointersecciones) de género superior. La respuesta

llegó de la mano de Henry Wente en 1986, quien construyó el primer ejemplo de un toro con curvatura media constante (9). Este fue un resultado demoledor que demostró que la conjetura de Hopf era falsa y que la familia de superficies CMC era mucho más rica de lo que se pensaba. Poco después, Nicolaos Kapouleas desarrolló potentes técnicas analíticas de perturbación que le permitieron construir superficies CMC de género arbitrario (10, 11). Estas construcciones a menudo utilizan las superficies de Delaunay como "bloques fundamentales" que conectan diferentes partes de la superficie, consolidando así el papel central de la familia descubierta por Delaunay.

Paralelamente a las construcciones geométricas y de análisis global, se desarrollaron herramientas analíticas para estudiar estas superficies. Un hito importante es el teorema de representación de Katsuei Kenmotsu (publicado alrededor de 1980) (12). Este teorema proporciona una fórmula explícita para parametrizar una superficie de revolución con curvatura media constante en términos de funciones elípticas, ofreciendo una perspectiva diferente y complementaria a la construcción original de Delaunay. El enfoque de Kenmotsu permite recuperar todas las superficies de tipo Delaunay (cilindros, esferas, catenoides, onduloides y nodoides) a través de un análisis de ecuaciones diferenciales, demostrando la equivalencia entre el problema geométrico y el variacional.

Lejos de ser un mero objeto de curiosidad matemática, las superficies de Delaunay siguen siendo relevantes en la investigación actual. En física de la materia blanda, se utilizan para modelar la forma de puentes capilares (pequeñas cantidades de líquido entre dos superficies sólidas), cuyo estudio es crucial en microfluídica y en la comprensión de fuerzas adhesivas. En el estudio de cristales coloidales, investigaciones recientes exploran cómo se empaquetan partículas cargadas sobre superficies de Delaunay, simulando el estiramiento de puentes líquidos y observando la aparición de defectos topológicos en dichos arreglos cristalinos (13). En biología celular, la geometría de las membranas celulares y ciertas estructuras biológicas (como algunos tipos de orgánulos) puede, en primera aproximación, ser modelada utilizando superficies CMC, incluyendo las de Delaunay, debido a principios de minimización de energía de flexión.

Charles-Eugène Delaunay**Figura 1***Charles-Eugène Delaunay*

Nota. Tomado de: Maravillas
del Mundo (14).

Charles-Eugène Delaunay fue un matemático y astrónomo francés cuyo trabajo tuvo un impacto duradero tanto en la mecánica celeste como en la geometría diferencial. Nació el 9 de abril de 1816 en Lusigny-sur-Barse, Francia. Ingresó a la *École Polytechnique* de París en 1834, donde destacó por sus excepcionales habilidades analíticas, y posteriormente continuó su formación en la *École des Mines* (15). Aunque es ampliamente reconocido por sus contribuciones al estudio del movimiento de la Luna, Delaunay realizó un aporte fundamental a la teoría de superficies al abordar el problema de la clasificación de las superficies de curvatura media constante.

En 1841, a la edad de 25 años, Delaunay publicó en el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* un artículo titulado "*Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*" (4). En este trabajo, abordó el problema de clasificar todas las superficies de revolución en el espacio euclidiano tridimensional que poseen curvatura media constante (CMC). Su enfoque fue sorprendentemente geométrico: demostró que la curva generatriz de dichas superficies podía obtenerse mediante el rodamiento de una cónica sobre una recta. Específicamente, si se hace rodar sin deslizamiento una elipse, una parábola o una hipérbola sobre una recta, el foco de la

cónica describe una curva que, al ser rotada alrededor de la recta (que se convierte en el eje de revolución), genera una superficie de curvatura media constante (4). De esta manera, Delaunay clasificó completamente las superficies de revolución con curvatura media constante: el cilindro, la esfera, la catenoide ($H = 0$, generada por la parábola), el onduloide (generado por la elipse) y el nodoide (generado por la hipérbola) (16, 17). Estas superficies se conocen hoy como superficies de Delaunay.

Un aspecto notable de la demostración de Delaunay es que proporcionó no solo una clasificación, sino también una construcción geométrica explícita. Este enfoque sintético contrasta con el tratamiento analítico basado en ecuaciones diferenciales que predominaba en su época, y su elegancia ha sido ampliamente reconocida (13, 17). La clasificación de Delaunay es exhaustiva: toda superficie de revolución completa con curvatura media constante es, salvo movimiento rígido, una esfera, un cilindro, una catenoide, un onduloide o un nodoide (16, 18).

Además de su trabajo en geometría, Delaunay realizó contribuciones fundamentales a la mecánica celeste. Su obra principal, *Théorie du mouvement de la lune* (1860-1867), fue un estudio exhaustivo del movimiento lunar en el que desarrolló métodos de aproximación que influyeron en generaciones posteriores de astrónomos (15). Por sus contribuciones, fue elegido miembro de la *Académie des Sciences* de Francia en 1855 y, en 1870, fue nombrado director del *Observatorio de París* (15). Lamentablemente, su vida se truncó prematuramente cuando falleció en un accidente de navegación el 5 de agosto de 1872, en Cherburgo, mientras cruzaba el Canal de la Mancha (15). A pesar de su muerte prematura, el nombre de Delaunay permanece firmemente ligado a la teoría de las superficies de curvatura media constante a través de las superficies que llevan su nombre y que continúan siendo objeto de estudio en la geometría diferencial contemporánea.

2. Fundamentos teóricos

2.1 Superficies regulares

Las superficies regulares constituyen el objeto básico de estudio de la geometría diferencial clásica. Intuitivamente, una superficie es un objeto bidimensional que se encuentra inmerso en el espacio tridimensional y que localmente se comporta como un plano suavemente deformado. Esta noción se formaliza mediante el uso de parametrizaciones diferenciables

Definición 2.1 (19) Una *superficie regular* $S \subset \mathbb{R}^3$ es un subconjunto tal que para todo punto $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una aplicación

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de clase C^∞ , llamada *parametrización*, que satisface:

- (i) X es un homeomorfismo de U sobre un abierto de S que contiene a p .
- (ii) Los vectores parciales X_u y X_v son linealmente independientes en todo punto de U .

Observación 2.1 La definición de superficie regular es suficiente para introducir las nociones locales de plano tangente, formas fundamentales y curvaturas. Sin embargo, en este trabajo también será necesario considerar superficies inmersas, pues algunas superficies de Delaunay pueden presentar autointersecciones globales sin perder regularidad local.

Definición 2.2 Sea M una superficie diferenciable de dimensión dos. Una aplicación suave

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

se llama una *inmersión* si, para todo $p \in M$, su diferencial

$$dX_p : T_p M \rightarrow T_{X(p)} \mathbb{R}^3$$

es inyectivo. Como $\dim M = 2$, esto equivale a

$$\text{rango}(dX_p) = 2$$

para todo $p \in M$.

En coordenadas locales (u, v) , esta condición se escribe como

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0.$$

La imagen $X(M) \subset \mathbb{R}^3$ se denomina una superficie inmersa.

Observación 2.2 La diferencia principal entre una superficie regular y una superficie inmersa es global. En una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$, se exige que localmente la parametrización sea un homeomorfismo sobre un abierto de S . En cambio, una superficie inmersa solo exige que el diferencial tenga rango dos en todo punto.

Por tanto, una superficie inmersa puede tener autointersecciones; es decir, pueden existir $p, q \in M$, con $p \neq q$, tales que

$$X(p) = X(q).$$

Aun así, localmente la superficie sigue siendo regular y se pueden definir plano tangente, formas fundamentales y curvaturas. Esta distinción permite incluir superficies de Delaunay como los nodoides, que pueden presentar autointersecciones.

La condición de independencia lineal garantiza que la matriz jacobiana de X tiene rango dos, lo que permite definir un plano tangente en cada punto de la superficie.

Definición 2.3 (19) Sea $X(u, v)$ una parametrización de una superficie regular. El *plano tangente* a la superficie en el punto $X(u, v)$ se define como el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los

vectores dados por las derivadas parciales

$$X_u(u, v), \quad X_v(u, v).$$

Este plano se denota por $T_{X(u,v)}S$

Observación 2.3 La existencia de un plano tangente bien definido en cada punto es la base para introducir todas las nociones métricas y geométricas de una superficie, tales como longitudes, áreas, ángulos y curvaturas. En particular, las superficies de Delaunay, al ser superficies de revolución suaves, cumplen naturalmente las condiciones de regularidad, lo que permite aplicar las herramientas de la geometría diferencial para su estudio.

Definición 2.4 (19) Dos parametrizaciones $X : U \rightarrow S$ y $Y : V \rightarrow S$ se dicen compatibles si, en la región donde sus imágenes se intersectan, el cambio de coordenadas

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \longrightarrow Y^{-1}(X(U) \cap Y(V))$$

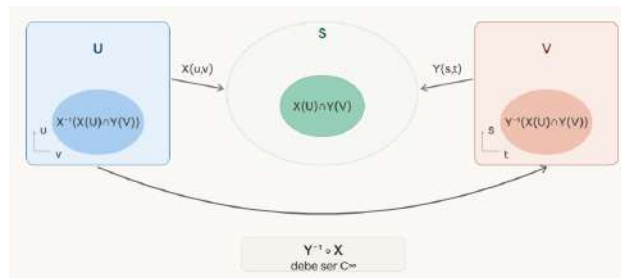
es un difeomorfismo de clase C^∞ . Es decir, $Y^{-1} \circ X$ es una aplicación suave, biyectiva, y su inversa

$$X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \longrightarrow X^{-1}(X(U) \cap Y(V))$$

también es suave.

Figura 2

Parametrizaciones compatibles y cambio de coordenadas en una superficie diferenciable



Esto garantiza que las cantidades geométricas definidas en una superficie no dependen de

la elección particular de la parametrización.

Las siguientes construcciones proporcionan ejemplos fundamentales de *superficies regulares* inmersas en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.1 (La esfera). Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria. Una parametrización regular de S^2 está dada por

$$X(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u)), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Los vectores derivadas parciales

$$X_u(u, v), \quad X_v(u, v)$$

son linealmente independientes para todo (u, v) en el dominio, lo que garantiza que X es una parametrización regular. Por lo tanto, la esfera es una superficie regular.

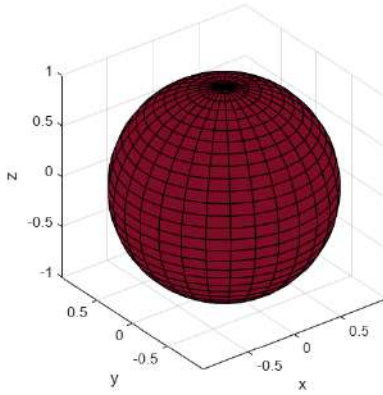
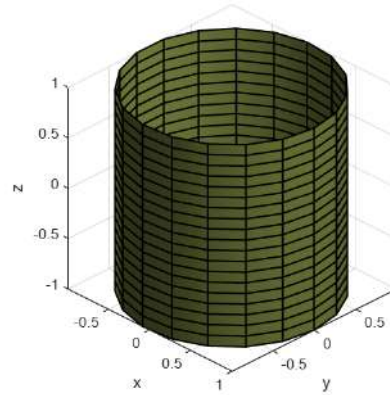
Ejemplo 2.2 (El cilindro). Sea

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

el cilindro circular de radio uno. Una parametrización regular viene dada por

$$X(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Los vectores derivadas parciales X_u y X_v son linealmente independientes en todo punto del dominio, por lo que esta aplicación define una superficie regular. En consecuencia, el cilindro es una superficie regular.

Figura 3*La esfera como superficie regular***Figura 4***El cilindro como superficie regular*

2.2 Primera y segunda forma fundamental

La geometría diferencial de una superficie regular se construye a partir de dos formas bilineales fundamentales que determinan, respectivamente, su estructura métrica y su curvatura extrínseca.

Definición 2.5 (19) Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de una superficie S . En cada punto $X(u, v) \in S$, los vectores $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ y $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ forman una base del espacio tangente $T_{X(u,v)}S$.

La **primera forma fundamental** es la restricción del producto interior euclidiano de $\mathbb{R}^3$ a cada plano tangente. Se define como la forma bilineal simétrica

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

Al evaluar esta forma en los vectores de la base $\{X_u, X_v\}$ se obtienen los **coeficientes de la**

primera forma fundamental:

$$E(u, v) = I(X_u, X_u) = \langle X_u, X_u \rangle,$$

$$F(u, v) = I(X_u, X_v) = \langle X_u, X_v \rangle,$$

$$G(u, v) = I(X_v, X_v) = \langle X_v, X_v \rangle.$$

En términos de estos coeficientes, la primera forma fundamental se escribe clásicamente como

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Esta expresión debe entenderse como una forma cuadrática que actúa sobre vectores tangentes. Más precisamente, si $w = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v \in T_p S$ es un vector tangente con componentes (α_1, α_2) en la base $\{X_u, X_v\}$, entonces su longitud al cuadrado es

$$I(w, w) = E\alpha_1^2 + 2F\alpha_1\alpha_2 + G\alpha_2^2.$$

En la notación clásica se escribe du y dv en lugar de α_1 y α_2 para enfatizar que estos coeficientes representan las componentes de un desplazamiento infinitesimal sobre la superficie, lo cual conecta esta expresión con el elemento de longitud de arco

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

La primera forma fundamental permite calcular cantidades geométricas sobre la superficie sin necesidad de recurrir al espacio ambiente:

- **Longitud de una curva:** Si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $t \in [a, b]$ es una curva sobre S , su longitud es

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

- **Ángulo entre dos curvas:** Si dos curvas se intersectan en un punto con vectores tangentes

w_1 y w_2 , el ángulo θ entre ellas satisface

$$\cos(\theta) = \frac{I(w_1, w_2)}{\sqrt{I(w_1, w_1)}\sqrt{I(w_2, w_2)}}.$$

- **Área de una región:** Para una región $R \subset S$ parametrizada por $Q \subset U$, el área es

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \times X_v\| \, du \, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Observación 2.4 La primera forma fundamental es una métrica riemanniana inducida en S por el producto interno de $\mathbb{R}^3$. Determina completamente la geometría intrínseca de la superficie, es decir, aquellas propiedades que pueden ser medidas sin hacer referencia al espacio ambiente, como longitudes, ángulos y áreas.

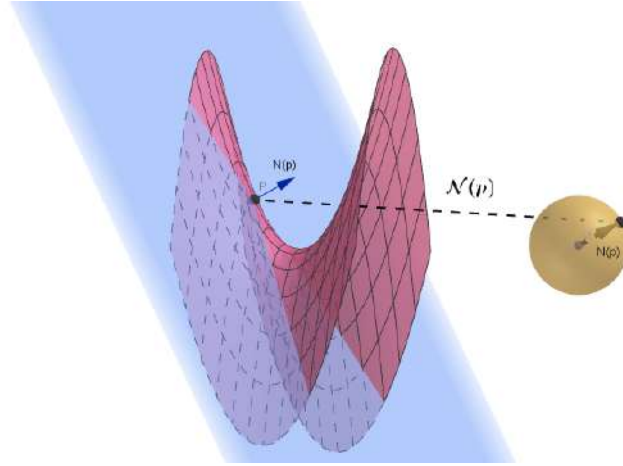
Definición 2.6 (20) Sea S una superficie regular. Un **campo continuo de vectores normales unitarios** sobre S es una aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$, $N(p)$ es un vector unitario ortogonal al plano tangente $T_p S$, y la asignación $p \mapsto N(p)$ es continua.

Definición 2.7 (20) Una superficie regular S se dice **orientable** si admite un campo continuo de vectores normales unitarios definido sobre toda ella. En caso contrario, se dice que S es *no orientable*.

Definición 2.8 (19) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y sea $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo continuo de vectores normales unitarios. La **aplicación de Gauss** (o mapeo de Gauss) es la función

$$N : S \rightarrow S^2, \quad N(p) = N(p),$$

que a cada punto de la superficie le asigna su vector normal unitario, visto como un punto de la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Figura 5*Aplicación de Gauss*

Observación 2.5 (21) Es importante destacar una distinción sutil pero esencial. La aplicación de Gauss puede definirse localmente para *cualquier* superficie regular, orientable o no. En efecto, dada una parametrización local $X : U \rightarrow S$, siempre podemos construir un campo normal unitario en ese parche mediante

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Esta definición es perfectamente válida en el abierto $X(U) \subset S$. El problema es de naturaleza global: cuando la superficie no es orientable, es imposible extender estas definiciones locales a toda la superficie de manera continua y coherente. Al intentar cubrir S con varios parches, las definiciones locales pueden diferir en un signo en las regiones de solapamiento, y no hay forma de elegir consistentemente uno de los dos signos para toda la superficie. Así pues, localmente toda superficie tiene una aplicación de Gauss bien definida, pero globalmente esta existe si, y sólo si, la superficie es orientable.

Observación 2.6 La diferencial de la aplicación de Gauss, $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S^2$, es un operador lineal sobre el plano tangente (pues $T_{N(p)} S^2$ es paralelo a $T_p S$). Este operador codifica la curvatura de la superficie y será la base para definir la segunda forma fundamental.

Definición 2.9 (19) Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de una superficie S y sea $N : S \rightarrow S^2$ la aplicación de Gauss. La **aplicación forma** (o *operador de Weingarten*) en

un punto $p = X(u, v) \in S$ se define como

$$L_p : T_p S \rightarrow T_p S, \quad L_p(v) = -dN_p(v),$$

donde $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ es la diferencial de la aplicación de Gauss.

Proposición 2.1 (19) La aplicación forma $L_p : T_p S \rightarrow T_p S$ es un operador lineal autoadjunto respecto al producto interno inducido por la primera forma fundamental. Es decir,

$$\langle L_p(v), w \rangle = \langle v, L_p(w) \rangle \quad \text{para todo } v, w \in T_p S.$$

Demostración. Fijemos una parametrización local $X(u, v)$ y escribamos $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$. Derivando las relaciones $\langle N, X_u \rangle = 0$ y $\langle N, X_v \rangle = 0$ obtenemos:

$$\langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0, \quad \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0, \quad \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0.$$

Como las derivadas cruzadas son iguales ($X_{uv} = X_{vu}$), se sigue que $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$. Ahora, para vectores tangentes $v = aX_u + bX_v$ y $w = cX_u + dX_v$, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle L(v), w \rangle &= -\langle dN(v), w \rangle = -\langle aN_u + bN_v, cX_u + dX_v \rangle \\ &= -ac\langle N_u, X_u \rangle - ad\langle N_u, X_v \rangle - bc\langle N_v, X_u \rangle - bd\langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Usando las relaciones anteriores y la simetría $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$, se verifica que esta expresión es simétrica en (v, w) , lo que demuestra que L es autoadjunto. $\square$

Observación 2.7 Al ser un operador autoadjunto sobre un espacio vectorial real con producto interno, L_p es diagonalizable y sus autovalores son números reales.

Definición 2.10 (19) En la base $\{X_u, X_v\}$ del plano tangente, la segunda forma fundamental

II_p se define como la forma bilineal simétrica asociada al operador L_p :

$$II_p(v, w) = \langle L_p(v), w \rangle.$$

Sus coeficientes, llamados **coeficientes de la segunda forma fundamental**, son:

$$e_{II} = II(X_u, X_u) = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$f_{II} = II(X_u, X_v) = -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle,$$

$$g_{II} = II(X_v, X_v) = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

La igualdad de las dos expresiones para f_{II} se debe a la simetría probada anteriormente, y las expresiones con X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} se obtienen derivando $\langle N, X_u \rangle = 0$ y $\langle N, X_v \rangle = 0$.

Observación 2.8 En notación diferencial clásica, la segunda forma fundamental se escribe como

$$II = e_{II} du^2 + 2f_{II} du dv + g_{II} dv^2,$$

entendiendo que actúa sobre un vector tangente $v = (du, dv)$ como $II(v, v) = e_{II} du^2 + 2f_{II} du dv + g_{II} dv^2$.

La primera y segunda forma fundamental son, por definición, formas bilineales simétricas definidas en el espacio tangente. Es decir, son funciones $I, II : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$. Sin embargo, al fijar una base del plano tangente, por ejemplo $\{X_u, X_v\}$, estas formas pueden representarse mediante matrices.

En efecto, para cualquier forma bilineal B , sus coeficientes en la base $\{X_u, X_v\}$ son los valores $B(X_u, X_u)$, $B(X_u, X_v)$ y $B(X_v, X_v)$. Con estos coeficientes se construye la matriz simétrica

$$[B] = \begin{pmatrix} B(X_u, X_u) & B(X_u, X_v) \\ B(X_v, X_u) & B(X_v, X_v) \end{pmatrix}.$$

En el caso de la primera forma fundamental, estos coeficientes son los clásicos E, F, G ; para la segunda forma, son e_{II}, f_{II}, g_{II} .

De manera análoga, la aplicación forma $L : T_p S \rightarrow T_p S$ es un operador lineal. En la misma base, su representación matricial se denota por

$$[L] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $L(X_u) = aX_u + cX_v$ y $L(X_v) = bX_u + dX_v$.

La relación fundamental que conecta estos tres objetos es

$$II(v, w) = I(L(v), w).$$

En términos de las matrices asociadas, esta relación se traduce en la igualdad matricial

$$[II] = [I] \cdot [L].$$

De esta manera, las tres estructuras (primera forma, segunda forma y aplicación forma) quedan vinculadas a través de sus representaciones matriciales en una base fija del plano tangente.

2.3 Curvaturas principales, curvatura media y curvatura de Gauss

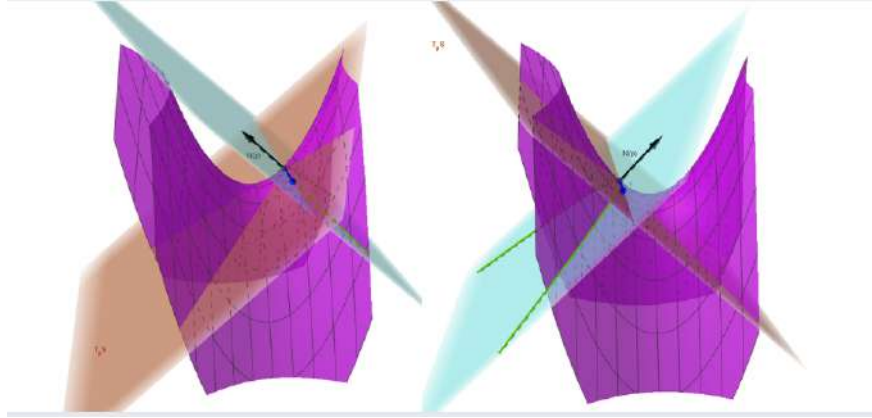
Sea S una superficie orientable y sea N su campo de vectores normales unitarios. Para un punto $p \in S$ y un vector tangente unitario $v \in T_p S$, con $\|v\| = 1$, consideremos el plano que contiene a v y a $N(p)$. Este plano intersecta a S en una curva plana γ que pasa por p con velocidad v . La **curvatura normal** de S en la dirección v se define como la curvatura de esta curva γ en p , tomada con signo positivo si la curva se curva hacia la dirección de $N(p)$ y negativo en caso contrario. En términos de la segunda forma fundamental, la curvatura normal en la dirección v está

dada por

$$\kappa_n(v) = II(v, v) = \langle L_p(v), v \rangle.$$

Figura 6

Curvatura Normal de una Superficie



Definición 2.11 (19) Sea $L_p : T_p S \rightarrow T_p S$ la aplicación forma en un punto p de una superficie orientable S . Como L_p es un operador lineal autoadjunto, es diagonalizable y sus autovalores son números reales. Dichos autovalores se denominan **curvaturas principales** de S en p y se denotan por $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$. Las direcciones de los autovectores asociados se llaman **direcciones principales**.

Las curvaturas principales corresponden a los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en el punto p , es decir, miden cuánto se dobla la superficie en las direcciones extremas.

Definición 2.12 (19) Se define la **curvatura de Gauss** de S en p como el determinante de la aplicación forma:

$$K(p) = \det(L_p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p).$$

Observación 2.9 A partir del teorema Egregium de Gauss se establece que la curvatura de Gauss es una medida *intrínseca* de la curvatura, lo que significa que puede ser calculada por un habitante de la superficie sin referencia al espacio ambiente, únicamente a partir de la primera forma fundamental (distancias y ángulos sobre la superficie).

Definición 2.13 (19) Se define la **curvatura media** de S en p como la traza (promedio) de la aplicación forma:

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$

Observación 2.10 A diferencia de la curvatura de Gauss, la curvatura media depende de cómo la superficie está inmersa en $\mathbb{R}^3$; es una propiedad *extrínseca*. Para un habitante de la superficie, la curvatura media no es accesible mediante mediciones sobre ella: requiere observar cómo se curva la superficie en el espacio ambiente. Esta distinción es crucial para las superficies de Delaunay, ya que la condición $H = \text{constante}$ que las define es una condición extrínseca, mientras que su curvatura de Gauss puede variar de un punto a otro.

Proposición 2.2 (20) En una parametrización local $X(u, v)$, con coeficientes de la primera forma fundamental E, F, G y coeficientes de la segunda forma fundamental e_{II}, f_{II}, g_{II} , se tiene:

$$K = \frac{e_{II}g_{II} - f_{II}^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{e_{II}G - 2f_{II}F + g_{II}E}{2(EG - F^2)}.$$

Demostración. La aplicación forma L_p tiene matriz asociada respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ dada por $L = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_{II} & f_{II} \\ f_{II} & g_{II} \end{pmatrix}$ (esto se obtiene de la relación $II(v, w) = I(L(v), w)$). Para un operador lineal sobre un espacio con producto interno, el determinante y la traza pueden calcularse a partir de sus matrices. En coordenadas, el determinante de L es el cociente de los determinantes de las matrices de la segunda y la primera forma fundamental:

$$\det(L) = \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{e_{II}g - f_{II}^2}{EG - F^2}.$$

Para la traza, usando la matriz de L en la base $\{X_u, X_v\}$ (que no es ortonormal), se tiene:

$$\operatorname{tr}(L) = \frac{e_{II}G - 2f_{II}F + g_{II}E}{EG - F^2}.$$

La curvatura media es entonces $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L)$. □

Tanto K como H son independientes de la parametrización elegida, como corresponde a cantidades geométricas: K es intrínseca y H es extrínseca.

Clasificación de puntos según las curvaturas principales.

A partir de los signos de las curvaturas principales, los puntos de una superficie se clasifican de la siguiente manera:

- **Puntos elípticos:** $\kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$ (ambas curvaturas principales tienen el mismo signo). La superficie es localmente convexa y tiene forma de cúpula. Ejemplo: todos los puntos de una esfera o un elipsoide.
- **Puntos hiperbólicos:** $\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$ (las curvaturas principales tienen signos opuestos). La superficie tiene localmente forma de silla de montar. Ejemplo: los puntos de un paraboloides hiperbólico.
- **Puntos parabólicos:** $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$ (una de las curvaturas principales es cero). La superficie es plana en una dirección. Ejemplo: los puntos de un cilindro.
- **Puntos umbilicales:** $\kappa_1 = \kappa_2$ (ambas curvaturas principales son iguales). En estos puntos, toda dirección es principal y la segunda forma fundamental es proporcional a la primera. Si además $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, se llaman *puntos umbilicales planos*. Ejemplo: todos los puntos de una esfera son umbilicales.

2.4 Superficies completas y extensiones suaves

La primera forma fundamental induce sobre una superficie regular una noción intrínseca de longitud. En efecto, si S es una superficie regular y $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ es una curva diferenciable, su longitud se calcula usando la métrica inducida por la primera forma fundamental. A partir de esta noción de longitud se define una distancia intrínseca sobre S mediante

$$d_S(p, q) = \inf L(\gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas diferenciables por tramos γ que unen p con q en la superficie

Definición 2.14 (22) Una superficie regular conexa S se dice **completa** si es completa como espacio métrico respecto a la distancia intrínseca inducida por su primera forma fundamental. Es decir, toda sucesión de Cauchy en S converge a un punto de S

Desde un punto de vista geométrico, la completitud significa que la superficie no tiene puntos faltantes a distancia finita. Por ejemplo, el plano euclidiano completo es una superficie completa. En cambio, el plano con un punto eliminado no es completo, pues una curva puede acercarse al punto eliminado recorriendo una longitud finita sin converger a un punto de la superficie

Es importante distinguir la completitud de la regularidad de una parametrización particular. Una parametrización puede dejar de ser regular en ciertos puntos sin que la superficie tenga una singularidad geométrica real. En tales casos, la falla puede deberse únicamente al sistema de coordenadas utilizado. El ejemplo clásico son las coordenadas polares en el plano:

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Esta parametrización no es regular en $r = 0$, pues todos los valores de θ representan el mismo punto. Sin embargo, el plano sí es una superficie suave en el origen; lo que falla son las coordenadas polares, no la superficie

Definición 2.15 (23) Sea S una superficie regular que omite un punto p a distancia finita. Diremos que p es un punto **removible suavemente** si existe una superficie regular $\tilde{S}$ tal que

$$S \subset \tilde{S}, \quad \tilde{S} = S \cup \{p\},$$

y existe una parametrización regular de $\tilde{S}$ alrededor de p . En tal caso, agregar p no produce una singularidad geométrica, sino que completa suavemente la superficie.

Por tanto, la posibilidad de agregar un punto debe entenderse con cuidado. La completitud

indica que no deben faltar puntos a distancia finita, pero no garantiza por sí sola que un punto omitido pueda añadirse de manera suave. Para que la extensión sea suave, debe existir una carta regular que cubra el punto agregado y sea compatible con la estructura diferenciable de la superficie

En consecuencia, cuando una parametrización no cubre un punto, pueden ocurrir dos situaciones distintas. La primera es que el punto omitido corresponda únicamente a una singularidad del sistema de coordenadas; en ese caso, si existe otra parametrización regular que lo cubre, el punto puede agregarse suavemente. La segunda es que el punto omitido represente una singularidad geométrica real; en tal caso, aunque pueda agregarse como límite métrico, la superficie resultante puede no ser regular en ese punto.

Esta distinción será importante al estudiar superficies de revolución. Una parametrización de la forma

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v))$$

es regular siempre que $f(t) > 0$ y la curva generatriz sea regular. Si $f(t) = 0$, las coordenadas de revolución se degeneran, pues

$$X_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v))$$

se anula. Sin embargo, esto no implica automáticamente que la superficie tenga una singularidad. Puede ocurrir que el punto correspondiente a $f(t) = 0$ sea simplemente un punto no cubierto por las coordenadas de revolución, pero que pueda ser cubierto por otra parametrización regular.

Así, en una superficie completa, si una parametrización omite un punto a distancia finita, dicho punto debe incorporarse en la superficie completa. La extensión será suave siempre que exista una parametrización regular que cubra el punto agregado. En ese caso, se dice que la superficie se ha completado suavemente en dicho punto.

2.5 Superficies mínimas

Una superficie se dice mínima si su curvatura media es idénticamente nula, es decir, $H = 0$ en todo punto. Esta condición tiene una interpretación variacional fundamental: entre todas las superficies que se apoyan en un mismo borde dado, las superficies mínimas son aquellas que minimizan (o hacen crítica) el área. Este problema, conocido como el problema de Plateau en honor al físico belga Joseph Plateau (1801-1883) (6), encuentra su manifestación física más evidente en las películas de jabón que se forman al sumergir un alambre en una solución jabonosa: la película se configura adoptando la forma de una superficie mínima.

El estudio sistemático de las superficies mínimas se remonta a Joseph-Louis Lagrange (1760) (1), quien, al aplicar el cálculo de variaciones al problema de encontrar la superficie de área mínima con un borde dado, derivó la ecuación diferencial que deben satisfacer dichas superficies. Lagrange consideró superficies expresadas como gráfica de una función $z = f(x, y)$ y demostró que el funcional de área

$$\mathcal{A}(f) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$$

tiene como ecuación de Euler-Lagrange:

$$(1 + f_x^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{yy} = 0. \quad (2.1)$$

Esta es la ecuación de las superficies mínimas en forma de gráfica. Equivalentemente, puede escribirse como

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) = 0,$$

lo que expresa que la divergencia del campo vectorial $\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$ es nula.

Fue Jean-Baptiste Meusnier (1776) (24) quien descubrió los dos primeros ejemplos no triviales de soluciones de esta ecuación: la catenoide (superficie de revolución generada por la catenaria) y el helicoides (superficie helicoidal generada por una recta que rota y se eleva uniformemente). Meusnier también demostró que la condición de área mínima equivale a la anulaci3n

de la curvatura media, estableciendo así la conexión entre el problema variacional y la geometría diferencial. En términos de los coeficientes de las formas fundamentales, la condición $H = 0$ se expresa como:

$$e_{II}G - 2f_{II}F + g_{II}E = 0, \quad (2.2)$$

donde e_{II}, f_{II}, g_{II} son los coeficientes de la segunda forma fundamental y E, F, G los de la primera.

Un avance crucial en la teoría se produjo con los experimentos de Joseph Plateau en el siglo XIX (6). Plateau sumergió estructuras de alambre en soluciones jabonosas y observó que las películas que se formaban eran superficies de área mínima, lo que dio lugar a la formulación del problema que lleva su nombre: ¿dada una curva cerrada, existe una superficie de área mínima que la tenga como borde? Este problema, cuya resolución requirió el desarrollo de nuevas técnicas matemáticas, fue finalmente resuelto en 1931 por Jesse Douglas y Tibor Radó utilizando métodos de análisis funcional (25). Este logro le valió a Douglas la primera medalla Fields en 1936.

Propiedades de las superficies mínimas. Las superficies mínimas poseen características geométricas notables que las distinguen de otras superficies con curvatura media constante. En primer lugar, su curvatura de Gauss es siempre no positiva ($K \leq 0$). Esta propiedad se deduce directamente de la relación $K = \kappa_1\kappa_2$ junto con la condición $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = 0$, que implica $\kappa_2 = -\kappa_1$ y por lo tanto $K = -\kappa_1^2 \leq 0$. Un punto donde $K = 0$ se denomina *punto plano* y corresponde a una curvatura principal nula.

Otra propiedad fundamental es el principio del máximo para superficies mínimas: si dos superficies mínimas son tangentes en un punto interior y una de ellas se encuentra localmente en un lado de la otra, entonces ambas superficies coinciden en una vecindad. Este principio tiene profundas implicaciones para la unicidad y la estructura de las superficies mínimas.

Además, las superficies mínimas admiten una representación paramétrica en términos de funciones holomorfas, conocida como la representación de Weierstrass-Enneper (26). Esta repre-

sentación establece que toda superficie mínima (excepto el plano) puede expresarse como

$$\mathbf{x}(u, v) = \operatorname{Re} \int (f(z)(1 - g(z)^2), if(z)(1 + g(z)^2), 2f(z)g(z)) dz,$$

donde f y g son funciones holomorfas, siendo g la aplicación de Gauss de la superficie. Esta formulación ha sido una herramienta esencial para la construcción de numerosos ejemplos de superficies mínimas.

Ejemplos fundamentales. Los ejemplos más simples de superficies mínimas son el plano, la catenoide y el helicoides. Sin embargo, la teoría moderna ha revelado una riqueza sorprendente de superficies mínimas con geometrías cada vez más complejas.

Ejemplo 2.3 (El plano).

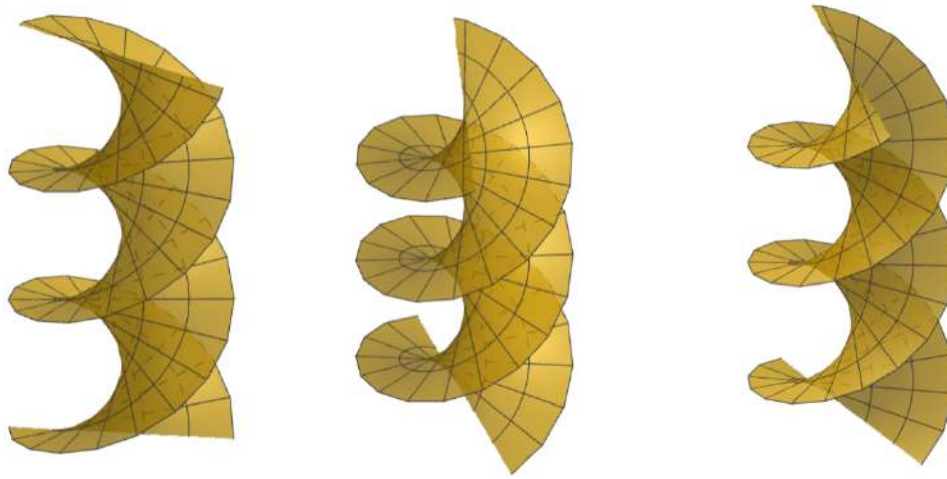
El plano es la superficie mínima más elemental, con curvatura media nula en todos sus puntos y curvatura de Gauss idénticamente cero. Su parametrización es $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$.

Ejemplo 2.4 (El Catenoide).

La catenoide es una superficie de revolución generada por la catenaria. Fue estudiada por Euler en 1744 (27) y redescubierta por Meusnier en 1776 (24).

Ejemplo 2.5 (El Helicoides).

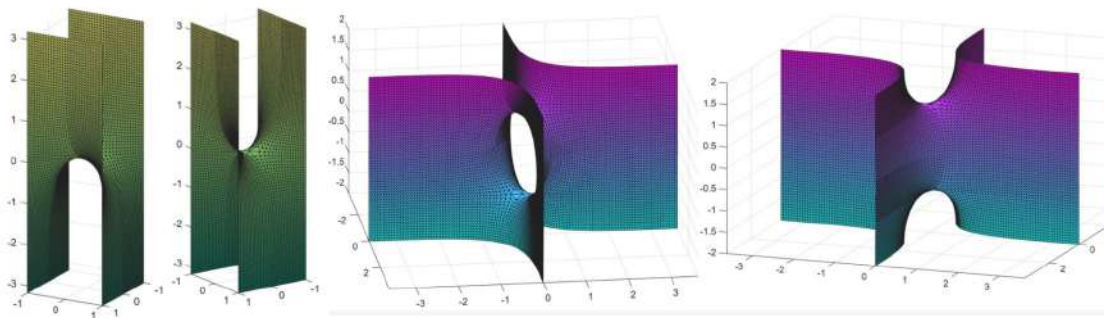
El helicoides fue descubierto por Euler en 1774 y por Meusnier en 1776 (24). Es una superficie reglada generada por una recta que rota mientras se eleva uniformemente. Su parametrización es $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$. En 1842, Catalan demostró que el helicoides y el plano son las únicas superficies mínimas regladas (28).

Figura 7*El helicoide, superficie mínima reglada***Ejemplo 2.6 (Superficie de Scherk).**

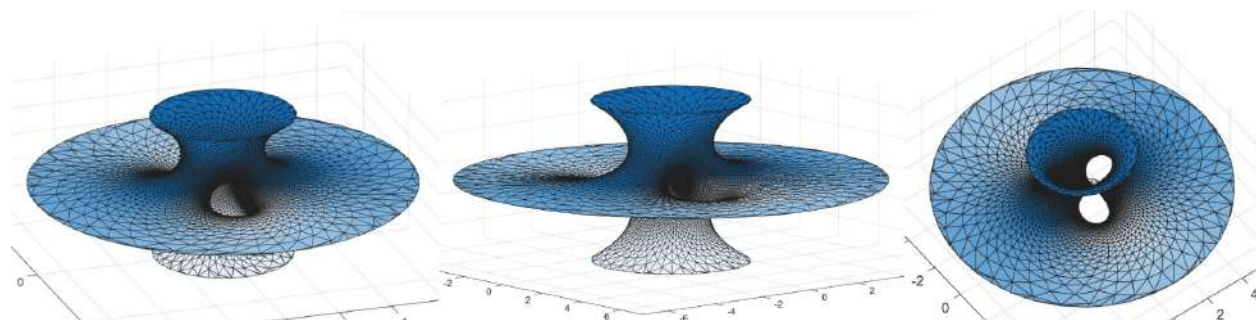
Descubierta por Heinrich Scherk en 1835 (29), esta superficie mínima es uno de los primeros ejemplos periódicos no triviales. Su representación paramétrica está dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \ln \frac{\cos(u)}{\cos(v)}\right), \quad |u| < \frac{\pi}{2}, \quad |v| < \frac{\pi}{2}.$$

La superficie de Scherk es doblemente periódica y está formada por una estructura de sillas de montar que se repiten infinitamente. Su aspecto se asemeja a un entramado de puentes que conectan planos verticales alternados.

Figura 8*Superficie de Scherk, ejemplo de superficie mínima periódica**Nota.* Adaptado de: Wikipedia (30).**Ejemplo 2.7 (Superficie de Costa).**

Construida por Celso Costa en 1982 (31), esta superficie revolucionó la teoría de superficies mínimas al demostrar que existían superficies mínimas completas, embebidas en $\mathbb{R}^3$, con género mayor que cero y un número finito de finales. La superficie de Costa tiene género 1 (topología de un toro) y tres finales asintóticos: dos planos horizontales y un extremo que se aproxima a una catenoide. Su descubrimiento, junto con las posteriores generalizaciones de Hoffman y Meeks, demostró que la clasificación de las superficies mínimas embebidas es mucho más rica de lo que se creía.

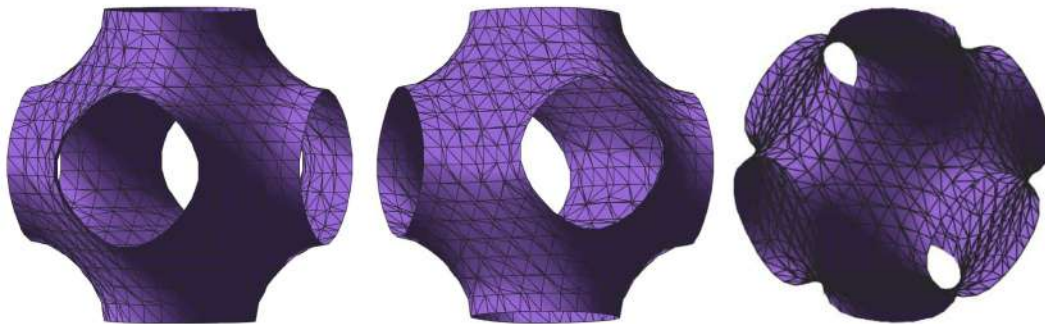
Figura 9*Superficie de Costa***Ejemplo 2.8 (Superficie de Schwarz).**

La superficie de Schwarz P es una de las superficies mínimas periódicas más estudiadas. Descubierta por Hermann Schwarz en 1865, es un ejemplo de superficie mínima triplemente

periódica que divide el espacio en dos regiones congruentes. Su estructura es topológicamente equivalente a una red de canales interconectados y aparece en sistemas biológicos como las membranas de ciertos organismos y en materiales como los cristales líquidos (32).

Figura 10

Superficie de Schwarz P



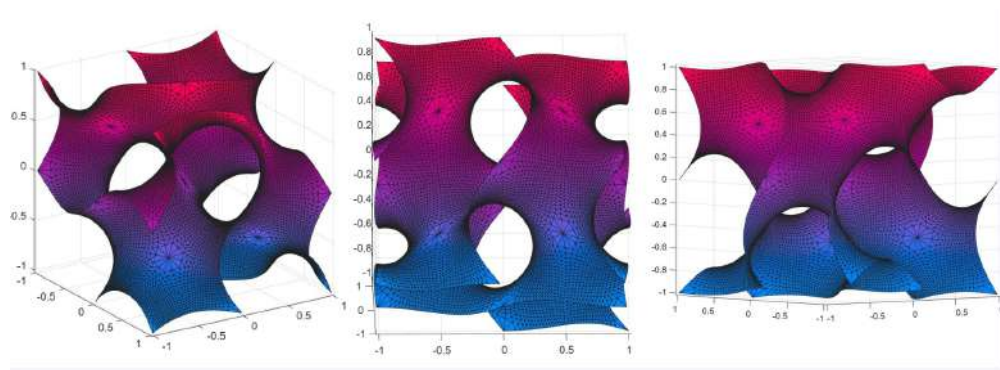
Nota. Adaptado de: Arranz (33).

Ejemplo 2.9 (Superficie de Gyroid).

Descubierta por Alan Schoen en 1970 , la superficie de Gyroid es una superficie mínima triplemente periódica que no contiene planos de simetría. Su nombre proviene de su forma retorcida y su estructura se encuentra en la naturaleza, por ejemplo en las alas de algunas mariposas y en sistemas de copolímeros de bloque (34). La Gyroid ha sido objeto de intenso estudio en física de materiales debido a sus propiedades ópticas y mecánicas únicas .

Figura 11

Superficie de Gyroid



Nota. Adaptado de: Wikimedia Commons (35).

2.6 Superficies de revolución

Definición 2.16 Sean $f, g : [l_1, l_2] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves tales que $f(t) > 0$ para todo $t \in [l_1, l_2]$, y supongamos además que la curva $(g(t), f(t))$ es regular, es decir, $(f'(t), g'(t)) \neq (0, 0)$ para todo $t \in [l_1, l_2]$. La superficie de revolución S generada al rotar la curva

$$(g(t), f(t))$$

alrededor del eje x está parametrizada por

$$\mathbf{x}(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

donde $(g(t), f(t))$ se denomina curva generatriz, $t \in [l_1, l_2]$ es el parámetro a lo largo de la curva generatriz o meridiano, y $v \in [v_1, v_2]$ es el ángulo de rotación o paralelo. La función $f(t)$ representa la distancia al eje de revolución y $g(t)$ la posición a lo largo del eje x .

Vectores tangentes. Calculamos las derivadas parciales de $\mathbf{x}$ con respecto a t y v :

$$\mathbf{x}_t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = (g'(t), f'(t) \cos(v), f'(t) \sin(v)),$$

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)).$$

Primera forma fundamental (coeficientes). Los coeficientes de la primera forma fundamental se definen como:

$$E = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Calculamos E :

$$E = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle = (g')^2 + (f' \cos(v))^2 + (f' \sin(v))^2 = (g')^2 + (f')^2(\cos^2(v) + \sin^2 v) = (g')^2 + (f')^2.$$

Calculamos F :

$$\begin{aligned} F = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_v \rangle &= g' \cdot 0 + f' \cos(v) \cdot (-f \sin(v)) + f' \sin(v) \cdot (f \cos(v)) \\ &= -f f' \cos(v) \sin(v) + f f' \sin(v) \cos(v) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Calculamos G :

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 0^2 + (-f \sin(v))^2 + (f \cos(v))^2 = f^2 \sin^2 v + f^2 \cos^2(v) = f^2.$$

Por lo tanto, la primera forma fundamental es:

$$I = E dt^2 + 2F dt dv + G dv^2 = ((g')^2 + (f')^2) dt^2 + f^2 dv^2.$$

Vector normal unitario. Calculamos el producto vectorial $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v$:

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ g' & f' \cos(v) & f' \sin(v) \\ 0 & -f \sin(v) & f \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante:

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = \mathbf{i} \begin{vmatrix} f' \cos(v) & f' \sin(v) \\ -f \sin(v) & f \cos(v) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} g' & f' \sin(v) \\ 0 & f \cos(v) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} g' & f' \cos(v) \\ 0 & -f \sin(v) \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante:

$$\begin{vmatrix} f' \cos(v) & f' \sin(v) \\ -f \sin(v) & f \cos(v) \end{vmatrix} = f' f \cos^2(v) + f' f \sin^2 v = f' f,$$

$$\begin{vmatrix} g' & f' \sin(v) \\ 0 & f \cos(v) \end{vmatrix} = g' f \cos(v) - 0 = g' f \cos(v),$$

$$\begin{vmatrix} g' & f' \cos(v) \\ 0 & -f \sin(v) \end{vmatrix} = -g' f \sin(v) - 0 = -g' f \sin(v).$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = (f' f, -g' f \cos(v), -g' f \sin(v)).$$

Calculamos la norma:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(f' f)^2 + (g' f \cos(v))^2 + (g' f \sin(v))^2} \\ &= \sqrt{f^2 (f')^2 + f^2 (g')^2 (\cos^2(v) + \sin^2 v)} \\ &= \sqrt{f^2 ((f')^2 + (g')^2)} = f \sqrt{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

El vector normal unitario es entonces:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{f \sqrt{(f')^2 + (g')^2}} (f' f, -g' f \cos(v), -g' f \sin(v)) = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} (f', -g' \cos(v), -g' \sin(v))$$

Segundas derivadas. Calculamos las derivadas de segundo orden necesarias:

$$\mathbf{x}_{tt} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = (g''(t), f''(t) \cos(v), f''(t) \sin(v)),$$

$$\mathbf{x}_{tv} = \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{x}_t = (0, -f'(t) \sin(v), f'(t) \cos(v)),$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} = (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)).$$

Coefficientes de la segunda forma fundamental. Los coeficientes se definen como:

$$e_{II} = \langle \mathbf{x}_{tt}, \mathbf{n} \rangle, \quad f_{II} = \langle \mathbf{x}_{tv}, \mathbf{n} \rangle, \quad g_{II} = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle.$$

Calculamos e_{II} :

$$\begin{aligned} e_{II} = \langle \mathbf{x}_{tt}, \mathbf{n} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \left[g'' \cdot f' + f'' \cos(v) \cdot (-g' \cos(v)) + f'' \sin(v) \cdot (-g' \sin(v)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \left[g'' f' - f'' g' (\cos^2(v) + \sin^2 v) \right] = \frac{f' g'' - f'' g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}. \end{aligned}$$

Calculamos f_{II} :

$$\begin{aligned} f_{II} = \langle \mathbf{x}_{tv}, \mathbf{n} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \left[0 \cdot f' + (-f' \sin(v))(-g' \cos(v)) + (f' \cos(v))(-g' \sin(v)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \left[f' g' \sin(v) \cos(v) - f' g' \cos(v) \sin(v) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Calculamos g_{II} :

$$\begin{aligned} g_{II} = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \left[0 \cdot f' + (-f \cos(v))(-g' \cos(v)) + (-f \sin(v))(-g' \sin(v)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \left[f g' \cos^2(v) + f g' \sin^2 v \right] = \frac{f g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda forma fundamental es:

$$II = e_{II} dt^2 + 2f_{II} dt dv + g_{II} dv^2 = \frac{f' g'' - f'' g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} dt^2 + \frac{f g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} dv^2.$$

Curvaturas principales. Dado que $F = f_{II} = 0$, los vectores $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{x}_v$ son ortogonales y constituyen direcciones principales. Las curvaturas principales son:

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E} = \frac{\frac{f' g'' - f'' g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}}{(f')^2 + (g')^2} = \frac{f' g'' - f'' g'}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}},$$

$$\kappa_2 = \frac{g_{II}}{G} = \frac{\frac{f g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}}{f^2} = \frac{g'}{f \sqrt{(f')^2 + (g')^2}}.$$

Curvatura de Gauss y curvatura media. La curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{f'g'' - f''g'}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}} \cdot \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} = \frac{g'(f'g'' - f''g')}{f((f')^2 + (g')^2)^2}.$$

La curvatura media es el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{f'g'' - f''g'}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}} + \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \right).$$

Observación 2.11 Si la curva generatriz $(g(t), f(t))$ está parametrizada por longitud de arco, se cumple la condición:

$$(f')^2 + (g')^2 = 1. \quad (2.5)$$

En este caso, las expresiones se simplifican notablemente:

$$E = 1, \quad G = f^2, \quad e_{II} = f'g'' - f''g', \quad g_{II} = fg',$$

$$\kappa_1 = f'g'' - f''g', \quad \kappa_2 = \frac{g'}{f}, \quad K = \frac{g'(f'g'' - f''g')}{f}, \quad H = \frac{1}{2} \left(f'g'' - f''g' + \frac{g'}{f} \right).$$

Observación 2.12 Los signos de $\mathbf{n}$, κ_1 , κ_2 y H dependen de la orientación escogida para el vector normal unitario. Si se toma el vector normal opuesto, entonces $\mathbf{n}$, κ_1 , κ_2 y H cambian de signo. Sin embargo, la curvatura de Gauss K no cambia, pues es el producto de las curvaturas principales

2.7 Ecuación de curvatura media constante para superficies de revolución

Sea S una superficie de revolución parametrizada por

$$\mathbf{x}(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

donde $f(t) > 0$ y la curva generatriz $(g(t), f(t))$ es regular. Supongamos además que dicha curva está parametrizada por longitud de arco. De los desarrollos anteriores, recordemos que las curvaturas principales son:

$$\kappa_1 = f'g'' - f''g', \quad \kappa_2 = \frac{g'}{f}.$$

La curvatura media es entonces:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \left(f'g'' - f''g' + \frac{g'}{f} \right). \quad (2.6)$$

Ahora derivamos la condición de que la superficie tenga curvatura media constante, es decir, $H = \text{constante}$. De (2.6) obtenemos:

$$f'g'' - f''g' + \frac{g'}{f} = 2H. \quad (2.7)$$

Dado que la curva $\alpha(t) = (g(t), f(t))$ está parametrizada por longitud de arco, se cumple

$$(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1,$$

por lo que existe una función $\varphi(t)$ tal que

$$f'(t) = \sin(\varphi)(t), \quad g'(t) = \cos(\varphi)(t).$$

donde $\varphi(t)$ es el ángulo que forma el vector tangente $\alpha'(t) = (g'(t), f'(t))$ a la curva generatriz con el eje de rotación en el instante t .

Derivando, se obtiene

$$f''(t) = \varphi'(t) \cos(\varphi)(t), \quad g''(t) = -\varphi'(t) \sin(\varphi)(t).$$

Sustituyendo en (2.7), se tiene

$$f'g'' = -\varphi' \sin^2 \varphi, \quad f''g' = \varphi' \cos^2(\varphi),$$

y por tanto

$$f'g'' - f''g' = -\varphi'(\sin^2 \varphi + \cos^2(\varphi)) = -\varphi'.$$

En consecuencia,

$$H = \frac{1}{2} \left(-\varphi' + \frac{\cos(\varphi)}{f} \right).$$

$$\varphi' = \frac{\cos(\varphi)}{f} - 2H.$$

Multipliando por $\sin(\varphi)$:

$$\varphi' \sin(\varphi) = \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{f} - 2H \sin(\varphi).$$

Observamos que

$$\frac{d}{dt}(\cos(\varphi)) = -\varphi' \sin(\varphi),$$

por lo que la ecuación anterior puede escribirse como

$$-\frac{d}{dt}(\cos(\varphi)) = \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{f} - 2H \sin(\varphi).$$

Multipliando por f :

$$-f \frac{d}{dt}(\cos(\varphi)) = \sin(\varphi) \cos(\varphi) - 2Hf \sin(\varphi).$$

Usando que $f' = \sin(\varphi)$ (2.8), el lado derecho se reescribe como

$$f' \cos(\varphi) - 2Hf f'.$$

Por tanto,

$$-f \frac{d}{dt}(\cos(\varphi)) = f' \cos(\varphi) - 2H f f'.$$

Reordenando términos:

$$f \frac{d}{dt}(\cos(\varphi)) + f' \cos(\varphi) = 2H f f'.$$

El lado izquierdo corresponde a la derivada del producto $f \cos(\varphi)$, esto es,

$$\frac{d}{dt}(f \cos(\varphi)) = 2H f f'.$$

Por otra parte,

$$\frac{d}{dt}(f^2) = 2f f',$$

por lo que se obtiene

$$\frac{d}{dt}(f \cos(\varphi)) = H \frac{d}{dt}(f^2).$$

Integrando respecto a t , se concluye que existe una constante C tal que

$$f(t) \cos(\varphi)(t) = H f(t)^2 + C.$$

Dado que, por definición

$$g'(t) = \cos \varphi(t),$$

la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$f(t)g'(t) = H f(t)^2 + C. \quad (2.9)$$

La identidad anterior constituye una primera integral de la ecuación de curvatura media constante. En efecto, permite reducir el problema de segundo orden para la curva generatriz a una ecuación diferencial de primer orden.

Conexión con la formulación de Delaunay.

En la notación moderna que hemos usado, $g(s)$ representa la coordenada axial y $f(s)$ la distancia al eje de revolución. Delaunay, en cambio, escribe la curva meridiana mediante coordenadas (x, y) , donde x corresponde a la coordenada axial y y a la distancia al eje. En adelante adoptaremos la notación de Delaunay, en la que x representa la coordenada axial y y la distancia al eje de revolución, tomamos

$$y = f(s).$$

Además, para reproducir la forma clásica de las ecuaciones de Delaunay, conviene permitir un cambio de orientación del eje axial. Este cambio no modifica la superficie geométrica obtenida, pues corresponde a la reflexión rígida del espacio que invierte el eje de revolución. Por ello podemos tomar

$$x = -g(s).$$

Entonces

$$\frac{dx}{ds} = -g'(s).$$

Sustituyendo en la primera integral,

$$f(s)g'(s) = Hf^2(s) + C,$$

se obtiene

$$y \left(-\frac{dx}{ds} \right) = Hy^2 + C.$$

Por tanto,

$$y \frac{dx}{ds} = -Hy^2 - C.$$

En los casos no mínimos, podemos escribir

$$H = \frac{1}{2a}, \quad a > 0.$$

Así,

$$y \frac{dx}{ds} = -\frac{1}{2a}y^2 - C.$$

Introducimos ahora una constante adimensional α definida por

$$\alpha = -\frac{2C}{a}.$$

Equivalentemente,

$$-C = \frac{a\alpha}{2}.$$

Luego,

$$y \frac{dx}{ds} = -\frac{1}{2a}y^2 + \frac{a\alpha}{2}. \quad (2.10)$$

Esta es la forma de la primera integral (2.9) compatible con la notación empleada por Delaunay.

Como la curva meridiana está parametrizada por longitud de arco (2.5), también se tiene

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Por consiguiente, localmente existe un ángulo φ tal que

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi.$$

Esta elección de φ solo fija una orientación local del vector tangente a la curva meridiana. Cambiar la orientación del eje axial, o cambiar la orientación con la que se recorre la curva, modifica los signos de estas expresiones, pero no cambia la superficie como objeto geométrico. Por tanto, es podemos escoger la orientación que permite escribir la ecuación en la forma anterior.

Sustituyendo

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$$

en (2.10), tenemos

$$y \cos \varphi = -\frac{1}{2a}y^2 + \frac{a\alpha}{2}.$$

Multiplicando por $2a$,

$$2ay \cos \varphi = -y^2 + a^2\alpha.$$

Reordenando,

$$y^2 + 2ay \cos \varphi - a^2\alpha = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática para y . Resolviendo, se obtiene

$$y = -a \cos \varphi \pm a\sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha}.$$

Como

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi,$$

podemos escribir

$$y = -a \cos \varphi \pm a \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi}.$$

Para considerar simultáneamente las dos posibilidades algebraicas, introducimos

$$\varepsilon \in \{-1, 1\}$$

y definimos

$$R(\varphi) = \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi}.$$

Entonces las dos ramas se escriben como

$$y_\varepsilon(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a R(\varphi).$$

Es decir,

$$y_\varepsilon(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi}.$$

La elección de ε no introduce una nueva hipótesis geométrica, sino a las dos ramas algebraicas que aparecen al resolver la ecuación cuadrática para y . En cada caso concreto se deberá escoger la rama compatible con la parametrización estudiada y con la condición $y > 0$.

Ahora buscamos la coordenada axial x en función de φ . Derivando

$$y_\varepsilon(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a R(\varphi),$$

se obtiene

$$\frac{dy_\varepsilon}{d\varphi} = a \sin \varphi + \varepsilon a R'(\varphi).$$

Como

$$R(\varphi) = \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi},$$

tenemos

$$R'(\varphi) = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R(\varphi)}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy_\varepsilon}{d\varphi} = a \sin \varphi - \varepsilon a \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R(\varphi)}.$$

Factorizando,

$$\frac{dy_\varepsilon}{d\varphi} = a \sin \varphi \left(1 - \varepsilon \frac{\cos \varphi}{R(\varphi)} \right).$$

Por otro lado,

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi.$$

Luego, en los intervalos donde $\sin \varphi \neq 0$,

$$\frac{ds}{d\varphi} = a \left(1 - \varepsilon \frac{\cos \varphi}{R(\varphi)} \right).$$

Esta expresión se extiende por continuidad en los puntos donde $\sin \varphi = 0$, siempre que la parametrización considerada sea regular.

Como

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi,$$

y además

$$\frac{dx_\varepsilon}{d\varphi} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\varphi}.$$

Se obtiene,

$$\frac{dx_\varepsilon}{d\varphi} = a \cos \varphi \left(1 - \varepsilon \frac{\cos \varphi}{R(\varphi)} \right).$$

Es decir,

$$\frac{dx_\varepsilon}{d\varphi} = a \cos \varphi - \varepsilon \frac{a \cos^2 \varphi}{R(\varphi)}.$$

Una primitiva de esta expresión es

$$x_\varepsilon(\varphi) = \beta + a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi R(\varphi) + \varepsilon \int_0^\varphi \frac{a \alpha d\theta}{\cos^2 \theta R(\theta)},$$

donde β es una constante de integración.

Verifiquemos esta primitiva. Derivando

$$a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi R(\varphi),$$

se obtiene

$$a \cos \varphi - \varepsilon a \left[\sec^2 \varphi R(\varphi) + \tan \varphi R'(\varphi) \right].$$

Como

$$R'(\varphi) = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R(\varphi)},$$

entonces

$$\tan \varphi R'(\varphi) = -\frac{\sin^2 \varphi}{R(\varphi)}.$$

Así,

$$\frac{d}{d\varphi} (a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi R(\varphi)) = a \cos \varphi - \varepsilon a \frac{R(\varphi)}{\cos^2 \varphi} + \varepsilon a \frac{\sin^2 \varphi}{R(\varphi)}.$$

Al sumar la derivada del término integral,

$$\varepsilon \frac{a\alpha}{\cos^2 \varphi R(\varphi)},$$

se obtiene

$$a \cos \varphi + \varepsilon a \left[-\frac{R(\varphi)}{\cos^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{R(\varphi)} + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi R(\varphi)} \right].$$

Usando

$$R^2(\varphi) = 1 + \alpha - \sin^2 \varphi,$$

se tiene

$$R^2(\varphi) - \alpha = 1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi.$$

Además,

$$-\frac{R(\varphi)}{\cos^2 \varphi} + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi R(\varphi)} = -\frac{R^2(\varphi) - \alpha}{\cos^2 \varphi R(\varphi)}.$$

Luego,

$$-\frac{R(\varphi)}{\cos^2 \varphi} + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi R(\varphi)} = -\frac{1}{R(\varphi)}.$$

Por tanto,

$$-\frac{1}{R(\varphi)} + \frac{\sin^2 \varphi}{R(\varphi)} = -\frac{\cos^2 \varphi}{R(\varphi)}.$$

De esta manera,

$$\frac{dx_\varepsilon}{d\varphi} = a \cos \varphi - \varepsilon \frac{a \cos^2 \varphi}{R(\varphi)},$$

como se quería.

En conclusión, la primera integral (2.9) de la ecuación de curvatura media constante conduce, después de adaptar la orientación axial y la notación, a las dos familias paramétricas

$$\boxed{y_\varepsilon(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi}.} \quad (2.11)$$

y

$$\boxed{x_\varepsilon(\varphi) = \beta + a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \int_0^\varphi \frac{a \alpha d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \theta}}.} \quad (2.12)$$

Estas expresiones son las ecuaciones paramétricas obtenidas por Delaunay para la curva meridiana, escritas aquí a partir de la primera integral (2.9) moderna y con la notación adaptada al presente trabajo. (4)

3. Cónicas y curvas ruleta

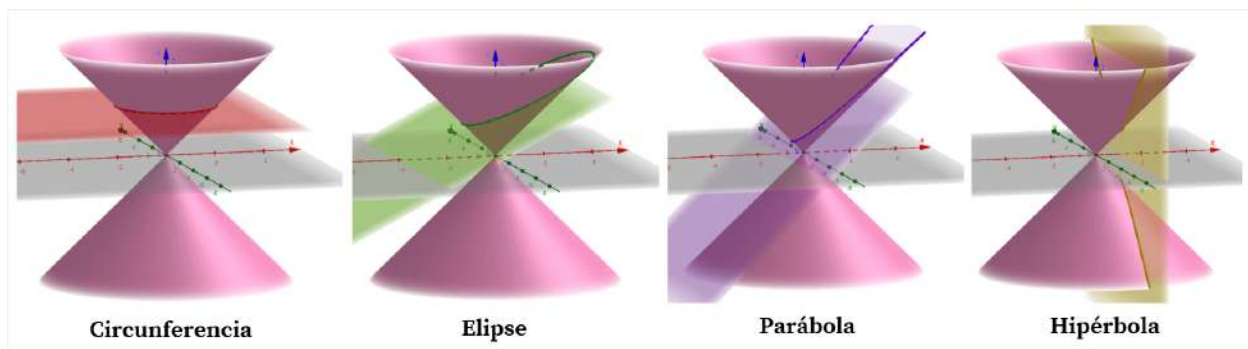
3.1 Cónicas

Definición 3.1 (36) Las **cónicas** son curvas planas que se obtienen al intersectar un cono circular recto de dos hojas con un plano que no pasa por el vértice. Según la inclinación del plano respecto al eje del cono, se obtienen los distintos tipos de cónicas.

- Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección es una **circunferencia**.
- Si el plano está inclinado de manera que corta todas las generatrices de una sola hoja, la intersección es una **elipse**.
- Si el plano es paralelo a una generatriz del cono, la intersección es una **parábola**.
- Si el plano está inclinado de manera que corta ambas hojas del cono, la intersección es una **hipérbola**.

Figura 12

Cónicas como intersección de un cono



Esta caracterización geométrica dio origen al nombre de *cónicas* y fue estudiada por los matemáticos griegos, en particular por Apolonio de Perga en el siglo III a.C.

Observación 3.1 (37) Existe una caracterización alternativa, equivalente a la anterior, que define las cónicas mediante una propiedad de distancias: son el conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado **foco**, y a una recta fija, llamada **directriz**, mantienen una razón constante $e > 0$, denominada **excentricidad**. Según el valor de e , se tiene:

- $0 < e < 1$: elipse,
- $e = 1$: parábola,
- $e > 1$: hipérbola.

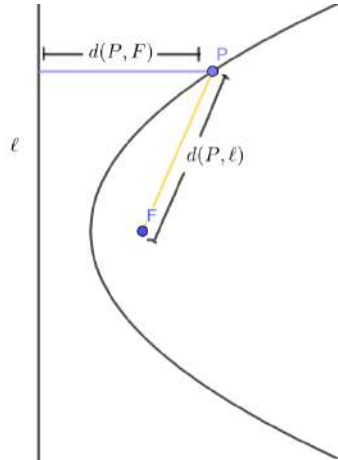
Esta caracterización geométrica permite deducir las ecuaciones y parametrizaciones de las cónicas

Parametrizaciones de las cónicas.

(a) Parábola.

Figura 13

Definición geométrica de la parábola



Consideremos una parábola con foco en $F = (p, 0)$ y directriz la recta $\ell : x = -p$, donde $p > 0$ es la distancia focal. Por definición, un punto $P = (x, y)$ pertenece a la parábola si satisface

$$d(P, F) = d(P, \ell).$$

Calculamos ambas distancias:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}, \quad d(P, \ell) = |x + p|.$$

Para los puntos de la parábola, consideramos $x \geq -p$, por lo que $|x + p| = x + p$. Elevando al cuadrado la igualdad:

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2.$$

Desarrollamos ambos cuadrados:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Cancelamos x^2 y p^2 :

$$-2px + y^2 = 2px \implies y^2 = 4px. \quad (3.1)$$

Esta es la ecuación cartesiana de la parábola. Ahora buscamos una parametrización que permita describir la curva de manera natural. Observamos que la ecuación (3.1) puede escribirse como:

$$y = \pm 2\sqrt{px}.$$

Sin embargo, esta forma no es adecuada para una parametrización suave que cubra toda la curva.

Introducimos un parámetro t mediante la sustitución $y = 2b \sinh(t)$, donde b es una constante positiva que relacionaremos con p . Sustituyendo en (3.1):

$$(2b \sinh(t))^2 = 4px \implies 4b^2 \sinh^2(t) = 4px \implies x = \frac{b^2}{p} \sinh^2(t).$$

Para que la parametrización sea lo más simple posible, elegimos $p = b$. Con esta elección, obtenemos:

$$x = b \sinh^2(t), \quad y = 2b \sinh(t).$$

Por lo tanto, la parábola admite la parametrización:

$$\alpha(t) = (b \sinh^2(t), 2b \sinh(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad b > 0. \quad (3.2)$$

Verifiquemos que esta parametrización satisface la ecuación de la parábola. Calculamos:

$$y^2 = (2b \sinh(t))^2 = 4b^2 \sinh^2(t),$$

$$4px = 4b(b \sinh^2(t)) = 4b^2 \sinh^2(t).$$

Efectivamente, $y^2 = 4px$ con $p = b$.

Observación 3.2 La función seno hiperbólico, $\sinh(t)$, es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, por lo que esta parametrización recorre toda la parábola una sola vez. Cuando $t = 0$, se tiene $\alpha(0) = (0, 0)$, que corresponde al vértice. Cuando $t \rightarrow \pm\infty$, tanto x como y tienden a infinito, cubriendo ambas ramas de la parábola.

La derivada de esta parametrización es:

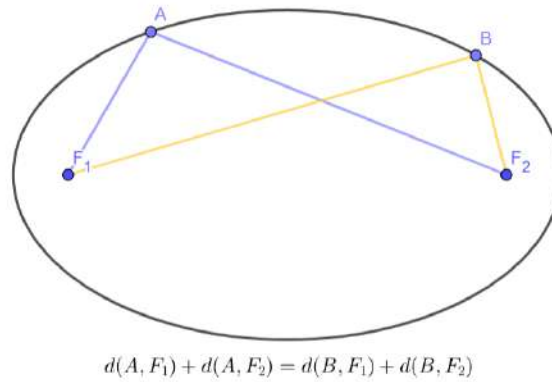
$$\alpha'(t) = (2b \sinh(t) \cosh(t), 2b \cosh(t)) = 2b \cosh(t) (\sinh(t), 1).$$

Su norma es:

$$\|\alpha'(t)\| = 2b \cosh(t) \sqrt{\sinh^2(t) + 1} = 2b \cosh(t) \cdot \cosh(t) = 2b \cosh^2(t).$$

(b) Elipse.

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, es constante e igual a $2a$, con $a > c > 0$:

Figura 14*Definición geométrica de la elipse*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Calculamos las distancias explícitamente:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Despejamos uno de los radicales:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Expandimos y cancelamos y^2 :

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

Cancelamos x^2 y c^2 :

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividimos entre -4 :

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado nuevamente:

$$(a^2 - cx)^2 = a^2 [(x-c)^2 + y^2]$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

Cancelamos el término $-2a^2cx$ en ambos lados:

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Reagrupamos:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividimos entre $a^2(c^2 - a^2)$. Como $a > c$, tenemos $c^2 - a^2 < 0$, definimos $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, entonces $c^2 - a^2 = -b^2$:

$$\frac{-b^2x^2}{a^2(-b^2)} + \frac{-a^2y^2}{a^2(-b^2)} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0} \quad (3.3)$$

Esta ecuación describe el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen esta relación. Observamos que los términos $\frac{x^2}{a^2}$ y $\frac{y^2}{b^2}$ son no negativos y suman 1, lo que sugiere una parametrización mediante

funciones trigonométricas.

Recordemos la identidad fundamental:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2 \theta = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Para que se cumpla (3.3), podemos hacer la siguiente correspondencia:

$$\frac{x}{a} = \cos(t), \quad \frac{y}{b} = \sin(t),$$

para algún parámetro $t \in \mathbb{R}$. De esta manera, automáticamente se satisface:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Despejando x e y obtenemos la parametrización:

$$\boxed{\beta(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.} \quad (3.4)$$

Propiedades de la parametrización.

- **Periodicidad.** Las funciones $\cos(t)$ y $\sin(t)$ son periódicas con período 2π . Por lo tanto, la parametrización $\beta(t)$ recorre toda la elipse cuando t varía en un intervalo de longitud 2π , por ejemplo, $t \in [0, 2\pi)$.
- **Orientación.** Cuando t aumenta de 0 a 2π , el punto $\beta(t)$ recorre la elipse en sentido antihorario

(contrario a las manecillas del reloj). En efecto,

$$\begin{aligned}
 t = 0 &\Rightarrow \beta(0) = (a, 0), \\
 t = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, b), \\
 t = \pi &\Rightarrow \beta(\pi) = (-a, 0), \\
 t = \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow \beta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -b), \\
 t = 2\pi &\Rightarrow \beta(2\pi) = (a, 0).
 \end{aligned}$$

- **Focos.** Los focos de la elipse se encuentran en los puntos $(\pm c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Esta distancia c está relacionada con la excentricidad $e = \frac{c}{a}$.
- **Derivada.** El vector derivado de la parametrización es:

$$\beta'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Su norma es:

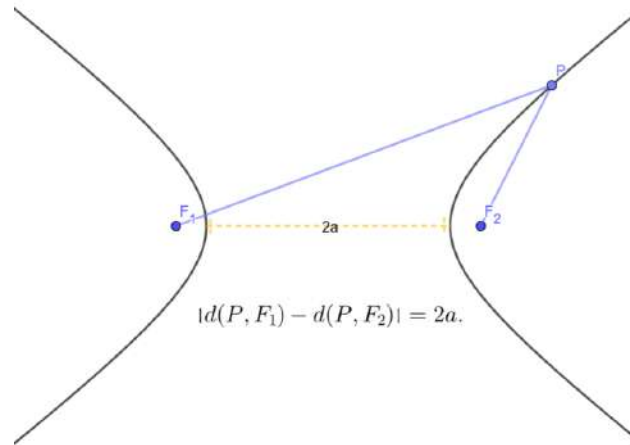
$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}.$$

Esta expresión no es constante, lo que indica que el parámetro t no es la longitud de arco de la elipse.

Observación 3.3 La parametrización $\beta(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ es la más natural para describir una elipse, ya que proviene directamente de la ecuación cartesiana y de la identidad trigonométrica fundamental. Cuando $a = b = r$, la elipse se reduce a una circunferencia de radio r y la parametrización se convierte en $\beta(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, que es la parametrización estándar del círculo.

(c) Hipérbola.

Consideremos una hipérbola con centro en el origen, focos en $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, donde $c > 0$. Por definición, una hipérbola es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ tales que el valor

Figura 15*Definición geométrica de la hipérbola*

absoluto de la diferencia de sus distancias a los dos focos es constante e igual a $2a$, con $0 < a < c$:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Sin pérdida de generalidad, consideramos la rama derecha de la hipérbola, donde $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$. Las distancias a los focos son

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Despejamos el primer radical:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Simplificamos cancelando y^2 y desarrollando los cuadrados:

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2.$$

Cancelamos x^2 y c^2 :

$$2cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx.$$

Reordenamos:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dividimos entre 4:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevamos al cuadrado nuevamente:

$$(cx - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2].$$

Desarrollamos el lado izquierdo:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2).$$

Expandimos el lado derecho:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Cancelamos el término $-2a^2cx$ en ambos lados:

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Reagrupamos términos con x^2 :

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Factorizamos:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Definimos $b^2 = c^2 - a^2$. Como $c > a$, tenemos $b > 0$. Sustituyendo:

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividimos toda la ecuación entre a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.5)$$

Se obtiene así la ecuación cartesiana de la hipérbola. Para obtener una parametrización, observamos que la identidad hiperbólica fundamental es:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta identidad tiene la misma estructura que la ecuación (3.5). Por lo tanto, podemos hacer la siguiente correspondencia:

$$\frac{x}{a} = \cosh(t), \quad \frac{y}{b} = \sinh(t),$$

para algún parámetro $t \in \mathbb{R}$. De esta manera, automáticamente se satisface:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

Despejando x e y obtenemos la parametrización de la rama derecha de la hipérbola:

$$\gamma(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Propiedades de la parametrización.

- **Dominio.** El parámetro t recorre todos los números reales. Cuando $t = 0$, se tiene $\gamma(0) = (a, 0)$, que es el vértice de la rama derecha. Cuando $t \rightarrow \pm\infty$, tanto x como y tienden a infinito, recorriendo toda la rama derecha.
- **Rama izquierda.** Para obtener la rama izquierda de la hipérbola (con $x < 0$), se puede usar la parametrización $\gamma(t) = (-a \cosh(t), b \sinh(t))$ o, equivalentemente, la misma parametrización con un cambio de signo en a .
- **Focos.** Los focos de la hipérbola se encuentran en $(\pm c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Su excentricidad es $e = \frac{c}{a} > 1$.
- **Derivada.** El vector derivado de la parametrización es:

$$\gamma'(t) = (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Su norma es:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sinh^2(t) + b^2 \cosh^2(t)}.$$

La norma no es constante, lo que indica que el parámetro t no es la longitud de arco de la hipérbola.

Observación 3.4 La parametrización $\gamma(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$ es la análoga hiperbólica de la parametrización de la elipse. Mientras que la elipse usa funciones trigonométricas (coseno y seno) debido a la identidad $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, la hipérbola usa funciones hiperbólicas (coseno hiperbólico y seno hiperbólico) debido a la identidad $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$. Esta correspondencia

refleja la profunda relación entre las cónicas y las funciones circulares e hiperbólicas. Estas parametrizaciones serán empleadas posteriormente para construir las curvas generatrices cuyas superficies de revolución dan lugar a las superficies de Delaunay.

3.2 Curvas ruleta

Definición 3.2 (38) Sean C y $\mathcal{F}$ dos curvas planas regulares, y sea A un punto fijo del plano asociado rígidamente a C . La **ruleta** generada por A cuando C rueda sin deslizamiento sobre $\mathcal{F}$ es el lugar geométrico descrito por A durante el movimiento de rodamiento.

Más precisamente, el **rodamiento sin deslizamiento** de C sobre $\mathcal{F}$ es una familia uniparamétrica de movimientos rígidos del plano $\{\phi_t\}_{t \in I}$ tal que:

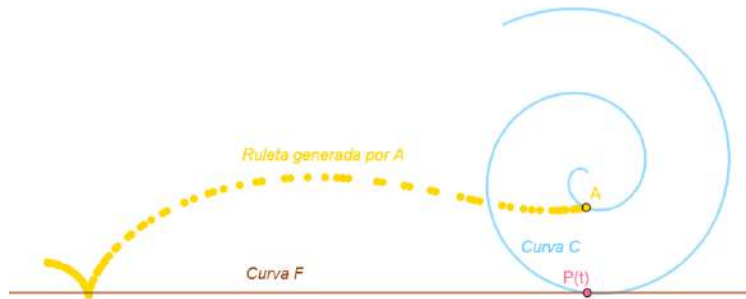
1. En cada instante t , existe un único punto de contacto $P(t) \in C$ con $\mathcal{F}$.
2. Las tangentes a C y $\mathcal{F}$ en el punto de contacto coinciden.
3. La longitud de arco recorrida sobre C desde el contacto inicial es igual a la longitud de arco recorrida sobre $\mathcal{F}$:

$$\int_{t_0}^t \|C'(u)\| du = \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}'(u)\| du.$$

La ruleta es entonces la curva $R(t) = \phi_t(A)$.

Figura 16

Ruleta generada por el punto A sobre la espiral de Arquímedes

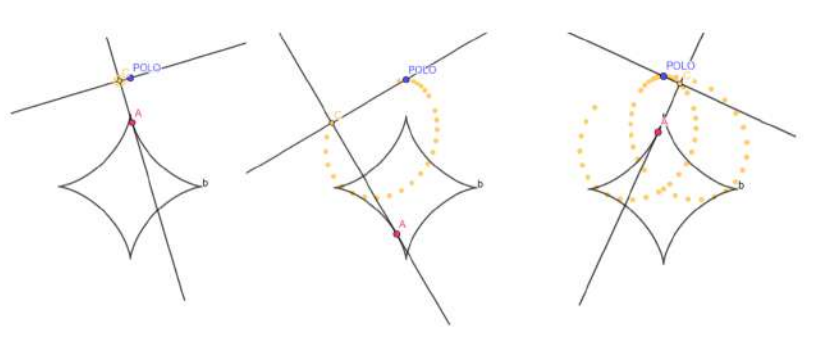


Una visualización interactiva de esta construcción puede verse en el video (39).

Definición 3.3 (40) Sea C una curva plana regular parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, y sea O un punto fijo del plano llamado **polo**. La **curva pedal** de C respecto al polo O es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde O hasta las tangentes a C .

Figura 17

Curva pedal de la curva paramétrica $(3 \cos(t) + \cos 3t, 3 \sin(t) - \sin 3t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, respecto al polo $O = (0, 6)$



Una visualización interactiva de esta construcción puede verse en el video (41).

Proposición 3.1 (40) Sea C una curva plana regular parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, y sea O un punto fijo del plano. Si

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

es el vector tangente unitario a C en $\alpha(t)$, entonces la curva pedal de C respecto a O admite la siguiente parametrización:

$$P(t) = \alpha(t) + \langle O - \alpha(t), T(t) \rangle T(t).$$

Demostración. Fijado $t \in I$, la recta tangente a C en el punto $\alpha(t)$ está dada por

$$\ell(s) = \alpha(t) + s T(t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Como α es regular, se tiene que $\alpha'(t) \neq 0$, y por tanto $T(t)$ está bien definido y es un vector unitario.

Por definición de curva pedal, el punto $P(t)$ es el pie de la perpendicular trazada desde O a la recta tangente en $\alpha(t)$. En particular, $P(t)$ pertenece a la recta ℓ , por lo que existe un único $s \in \mathbb{R}$

tal que

$$P(t) = \alpha(t) + s T(t).$$

Además, el vector $O - P(t)$ es ortogonal a la recta tangente, lo cual equivale a

$$\langle O - P(t), T(t) \rangle = 0.$$

Sustituyendo la expresión de $P(t)$, se obtiene:

$$\langle O - (\alpha(t) + s T(t)), T(t) \rangle = 0,$$

es decir,

$$\langle O - \alpha(t), T(t) \rangle - s \langle T(t), T(t) \rangle = 0.$$

Como $T(t)$ es unitario, $\langle T(t), T(t) \rangle = 1$, y por tanto

$$s = \langle O - \alpha(t), T(t) \rangle.$$

Sustituyendo este valor en la expresión de $P(t)$, se concluye que

$$P(t) = \alpha(t) + \langle O - \alpha(t), T(t) \rangle T(t),$$

lo que concluye la demostración. □

Observación 3.5 Se llama **radio de la curva pedal** de C respecto al polo O en el instante t a la distancia entre el polo y el pie de la perpendicular, es decir,

$$r_{\mathcal{P}}(t) = \|\mathcal{P}(t) - O\|.$$

Esta cantidad representa la distancia entre el polo y la curva pedal en el instante t .

Para obtener las parametrizaciones explícitas de las ruletas de las cónicas es necesario aplicar

un resultado geométrico general que relaciona la abscisa del punto trazador con la longitud de arco recorrida y la proyección del segmento que une el punto trazador con el punto de contacto sobre la tangente a la curva rodante. Este resultado, que enunciamos a continuación, es fundamental en la construcción de Delaunay y se deriva directamente de la condición de rodamiento sin deslizamiento.

Proposición 3.2 (42) Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular, parametrizada por $\alpha(t)$ y sea $F \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo asociado rígidamente a la curva. Supongamos que α rueda sin deslizamiento sobre el eje x , y que en el instante t el punto de contacto con el eje es

$$P(t) = \alpha(t).$$

Sea

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

la longitud orientada recorrida por la curva desde el instante inicial t_0 hasta el instante t . Además, sea $\tau(t)$ el vector tangente unitario en $P(t)$, elegido con la orientación inducida por el rodamiento, es decir, de modo que, después del movimiento rígido que coloca la tangente sobre el eje x , el vector $\tau(t)$ queda orientado en sentido opuesto al avance del punto de contacto sobre el eje.

Definimos el desplazamiento tangencial orientado de F respecto al punto de contacto $P(t)$ por

$$\mu(t) = \langle F - \alpha(t), \tau(t) \rangle.$$

Entonces el pie de la perpendicular desde F hasta la recta tangente a α en $P(t)$ está dado por

$$Q(t) = \alpha(t) + \mu(t)\tau(t).$$

La ruleta descrita por el punto F cuando α rueda sin deslizamiento sobre el eje x admite una parametrización de la forma

$$R(t) = (g(t), f(t)),$$

donde

$$g(t) = s(t) - \mu(t)$$

y

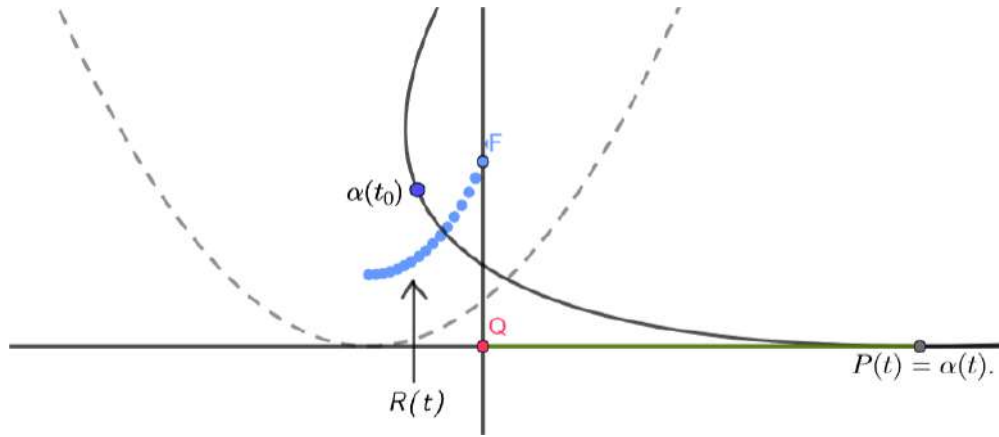
$$f(t) = \|F - Q(t)\|.$$

Es decir,

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du - \mu(t), \quad f(t) = \|F - Q(t)\|.$$

Figura 18

Representación gráfica de la proposición



Demostración. La condición de rodadura sin deslizamiento implica que la longitud de arco recorrida por la curva rodante coincide con la distancia recorrida por el punto de contacto sobre el eje x . Por tanto, si $P(t)$ es el punto de contacto en el instante t , entonces la abscisa del punto de contacto después del rodadura es

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Consideremos ahora la recta tangente a α en $P(t) = \alpha(t)$. Como α es regular, existe un vector tangente unitario bien definido. Tomamos dicho vector con la orientación inducida por el

rodamiento y lo denotamos por $\tau(t)$. La recta tangente en $P(t)$ puede escribirse como

$$\ell_t(r) = \alpha(t) + r\tau(t), \quad r \in \mathbb{R}.$$

El pie de la perpendicular desde F hasta esta recta tangente es un punto $Q(t) \in \ell_t$. Por tanto, existe un escalar $\mu(t)$ tal que

$$Q(t) = \alpha(t) + \mu(t)\tau(t).$$

Como $Q(t)$ es el pie de la perpendicular, el vector $F - Q(t)$ es ortogonal a la recta tangente. En consecuencia,

$$\langle F - Q(t), \tau(t) \rangle = 0.$$

Sustituyendo la expresión de $Q(t)$, se obtiene

$$\langle F - \alpha(t) - \mu(t)\tau(t), \tau(t) \rangle = 0.$$

Luego,

$$\langle F - \alpha(t), \tau(t) \rangle - \mu(t)\langle \tau(t), \tau(t) \rangle = 0.$$

Como $\tau(t)$ es unitario, $\langle \tau(t), \tau(t) \rangle = 1$, y por tanto

$$\mu(t) = \langle F - \alpha(t), \tau(t) \rangle.$$

Así,

$$Q(t) = \alpha(t) + \mu(t)\tau(t).$$

Ahora analizamos la posición del punto F después del rodamiento. En la configuración rodada, la recta tangente a la curva en el punto de contacto queda alineada con el eje x . Además, por la elección de la orientación de $\tau(t)$, el desplazamiento tangencial $\mu(t)$ se mide en sentido opuesto al avance del punto de contacto. Por esta razón, la abscisa del punto F se obtiene restando al avance

total $s(t)$ el desplazamiento tangencial orientado $\mu(t)$. Es decir,

$$g(t) = s(t) - \mu(t).$$

Como

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du,$$

se concluye que

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du - \mu(t).$$

Finalmente, el punto $Q(t)$ es la proyección ortogonal de F sobre la tangente. Cuando la curva rueda sobre el eje x , la tangente queda horizontal; por tanto, el segmento $FQ(t)$, al ser perpendicular a la tangente, queda en dirección vertical. En consecuencia, la ordenada de la ruleta es precisamente la distancia del punto F a la tangente, es decir,

$$f(t) = \|F - Q(t)\|.$$

Por lo tanto, la ruleta generada por F queda parametrizada por

$$R(t) = (g(t), f(t)),$$

donde

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du - \mu(t), \quad f(t) = \|F - Q(t)\|.$$

Esto prueba la proposición. □

Observación 3.6 En los cálculos explícitos de las cónicas suele ser más cómodo usar el vector tangente unitario natural

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

En ese caso, la proyección algebraica de $F - \alpha(t)$ sobre $T(t)$ es

$$\lambda(t) = \langle F - \alpha(t), T(t) \rangle.$$

Sin embargo, esta cantidad no siempre coincide con el desplazamiento $\mu(t)$ que aparece en la abscisa de la ruleta. En efecto, como la orientación inducida por el rodamiento puede coincidir o no con la orientación de $T(t)$, se tiene

$$\tau(t) = \varepsilon T(t), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Por tanto,

$$\mu(t) = \langle F - \alpha(t), \tau(t) \rangle = \varepsilon \langle F - \alpha(t), T(t) \rangle = \varepsilon \lambda(t).$$

Así, dependiendo de la orientación de la rama considerada,

$$\mu(t) = \lambda(t) \quad \text{o} \quad \mu(t) = -\lambda(t).$$

Esta distinción es importante porque el punto $Q(t)$ puede calcularse mediante

$$Q(t) = \alpha(t) + \lambda(t)T(t),$$

mientras que la abscisa de la ruleta debe escribirse como

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du - \mu(t).$$

Por esta razón, no conviene identificar automáticamente la proyección algebraica $\lambda(t)$ con la cantidad que se resta en la fórmula de $g(t)$.

Observación 3.7 (38) La ordenada $f(t)$ de la ruleta es simplemente la distancia del punto

F a la tangente en $P(t)$, es decir:

$$f(t) = \|FQ(t)\|,$$

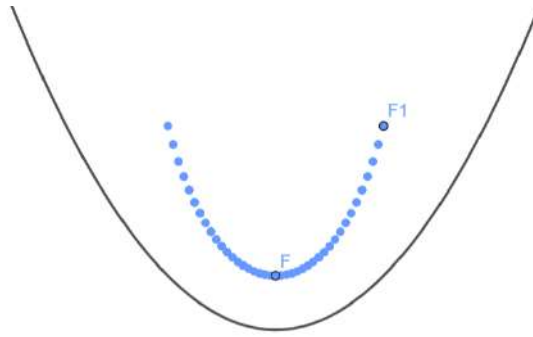
lo cual es, por definición, el **radio de la curva pedal** de α respecto a F . Juntas, $(g(t), f(t))$ dan la parametrización completa de la ruleta.

Parametrización de las ruletas generadas por las cónicas

(a) La Catenaria

Figura 19

Curva catenaria



Una visualización interactiva de esta construcción puede verse en el video (43). Consideramos la parábola parametrizada por

$$\alpha(t) = (b \sinh^2(t), 2b \sinh(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad b > 0.$$

El foco de esta parábola se encuentra en $F = (b, 0)$. Nuestro objetivo consiste en obtener la ruleta generada por F cuando la parábola rueda sin deslizamiento sobre el eje x .

Por la Proposición (3.2), la parametrización de la ruleta es $A(t) = (g_c(t), f_c(t))$ donde

$$g_c(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du - \mu(t), \quad f_c(t) = \|F - Q(t)\|.$$

Calculamos cada componente por separado.

Paso 1: Cálculo de $\|\alpha'(t)\|$

Derivando la parametrización, obtenemos

$$\alpha'(t) = (2b \sinh(t) \cosh(t), 2b \cosh(t)).$$

Su norma es

$$\|\alpha'(t)\| = 2b \cosh(t) \sqrt{\sinh^2(t) + 1}.$$

Usando la identidad hiperbólica $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, es decir $\sinh^2(t) + 1 = \cosh^2(t)$, obtenemos

$$\|\alpha'(t)\| = 2b \cosh(t) \sqrt{\cosh^2(t)} = 2b \cosh^2(t).$$

Paso 2: Cálculo de la longitud de arco $s(t)$

Tomando $t_0 = 0$,

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t 2b \cosh^2(u) du.$$

Usando la identidad $\cosh^2(u) = \frac{1 + \cosh(2u)}{2}$,

$$s(t) = 2b \int_0^t \frac{1 + \cosh(2u)}{2} du = b \int_0^t (1 + \cosh(2u)) du = b \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2} \right]_0^t = b \left(t + \frac{\sinh(2t)}{2} \right).$$

Aplicando la identidad $\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$ llegamos a

$$s(t) = b(t + \sinh(t) \cosh(t)).$$

Paso 3: Cálculo de la proyección tangencial

El vector tangente unitario a α en $P(t)$ es

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{2b \cosh(t)(\sinh(t), 1)}{2b \cosh^2(t)} = \frac{1}{\cosh(t)}(\sinh(t), 1).$$

El vector desde $P(t)$ hasta el foco $F = (b, 0)$ es

$$\overrightarrow{P(t)F} = F - \alpha(t) = (b - b \sinh^2(t), -2b \sinh(t)) = b(1 - \sinh^2(t), -2 \sinh(t)).$$

La proyección algebraica de $\overrightarrow{P(t)F}$ sobre $T(t)$ es

$$\lambda_c(t) = \left\langle \overrightarrow{P(t)F}, T(t) \right\rangle.$$

Entonces

$$\lambda_c(t) = \left\langle b(1 - \sinh^2(t), -2 \sinh(t)); \frac{1}{\cosh(t)}(\sinh(t), 1) \right\rangle.$$

Por tanto,

$$\lambda_c(t) = \frac{b}{\cosh(t)} [(1 - \sinh^2(t)) \sinh(t) - 2 \sinh(t)].$$

Luego,

$$\lambda_c(t) = \frac{b \sinh(t)}{\cosh(t)} [1 - \sinh^2(t) - 2].$$

Es decir,

$$\lambda_c(t) = \frac{b \sinh(t)}{\cosh(t)} [-1 - \sinh^2(t)].$$

Usando la identidad

$$1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t),$$

se obtiene

$$\lambda_c(t) = \frac{b \sinh(t)}{\cosh(t)} [-\cosh^2(t)].$$

Por consiguiente,

$$\lambda_c(t) = -b \sinh(t) \cosh(t).$$

Como el desplazamiento tangencial que se resta en la abscisa se mide con la orientación del rodamiento, en este caso se tiene

$$\mu_c(t) = -\lambda_c(t).$$

Por tanto,

$$\mu_c(t) = b \sinh(t) \cosh(t).$$

Paso 4: Cálculo de la abscisa $g_c(t)$

Aplicando la proposición (3.2),

$$g_c(t) = s(t) - \mu_c(t).$$

Como

$$s(t) = b(t + \sinh(t) \cosh(t))$$

y

$$\mu_c(t) = b \sinh(t) \cosh(t),$$

se obtiene

$$g_c(t) = b(t + \sinh(t) \cosh(t)) - b \sinh(t) \cosh(t).$$

Por lo tanto,

$$g_c(t) = bt.$$

Paso 5: Cálculo de la ordenada $f_c(t)$

La ordenada $f_c(t)$ es la distancia desde el foco $F = (b, 0)$ hasta el pie $Q(t)$ de la perpendicular sobre la tangente, es decir,

$$f_c(t) = \|F - Q(t)\|.$$

Calculamos $Q(t)$ explícitamente. Como

$$Q(t) = \alpha(t) + \lambda_c(t)T(t),$$

y ya obtuvimos que

$$\lambda_c(t) = -b \sinh(t) \cosh(t),$$

entonces

$$Q(t) = (b \sinh^2(t), 2b \sinh(t)) + (-b \sinh(t) \cosh(t)) \frac{1}{\cosh(t)} (\sinh(t), 1).$$

Por tanto,

$$Q(t) = (b \sinh^2(t), 2b \sinh(t)) + (-b \sinh^2(t), -b \sinh(t)).$$

Luego,

$$Q(t) = (0, b \sinh(t)).$$

Así,

$$f_c(t) = \|F - Q(t)\| = \|(b, 0) - (0, b \sinh(t))\|.$$

Entonces

$$f_c(t) = \sqrt{b^2 + b^2 \sinh^2(t)}.$$

Factorizando,

$$f_c(t) = b \sqrt{1 + \sinh^2(t)}.$$

Usando la identidad

$$1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t),$$

se obtiene

$$f_c(t) = b \cosh(t).$$

Resultado

La ruleta del foco de la parábola es la curva

$$A(t) = (g_c(t), f_c(t)) = (bt, b \cosh(t)), \quad (3.7)$$

que es precisamente la **catenaria** de parámetro b . Podemos calcular la longitud de arco de $A(t)$ así:

$$\|A'(t)\| = \|(b, b \sinh(t))\| = b\sqrt{1 + \sinh^2(t)} = b \cosh(t),$$

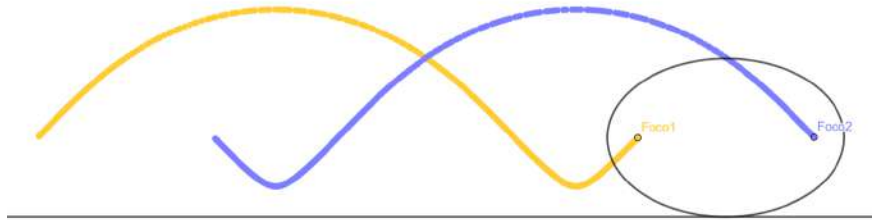
y por tanto

$$\ell_c(t) = \int_{t_0}^t \|A'(z)\| dz = b \sinh(z) \Big|_{t_0}^t,$$

(b) La ondularia

Figura 20

Curva ondularia



Una visualización interactiva de esta construcción puede verse en el video (44).

Consideramos la elipse parametrizada por

$$\beta(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad 0 < b < a,$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ es la distancia focal. Los focos de la elipse son $F = (-c, 0)$ y $F' = (c, 0)$. El objetivo es obtener las ruletas generadas por F y por F' cuando la elipse rueda sin deslizamiento sobre una recta horizontal.

Paso 1: Cálculo de $\|\beta'(t)\|$

Derivando la parametrización obtenemos

$$\beta'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Su norma es

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}.$$

Escribiendo $b^2 = a^2 - c^2$ y usando $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$,

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + (a^2 - c^2) \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) - c^2 \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}. \end{aligned}$$

Paso 2: Reducción de la longitud de arco a integral elíptica

La longitud de arco de β desde $t_0 = 0$ hasta t es

$$s(t) = \int_0^t \|\beta'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du.$$

Esta integral no admite expresión en términos de funciones elementales. Las integrales de esta forma fueron estudiadas sistemáticamente en el siglo XIX bajo el nombre de **integrales elípticas**, y constituyen uno de los ejemplos más clásicos de integrales que no se pueden resolver de forma cerrada (45). En lo que sigue trabajaremos directamente con esta expresión integral, lo cual es perfectamente válido para obtener las parametrizaciones de las ruletas.

Paso 3: Vector tangente unitario

El vector tangente unitario a β en $P(t) = \beta(t)$ es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Paso 4: Ruleta generada por el foco $F = (-c, 0)$

Abscisa $g_u^1(t)$. El vector desde $P(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ hasta $F = (-c, 0)$ es

$$\overrightarrow{P(t)F} = F - \beta(t) = (-c - a \cos(t), -b \sin(t)).$$

La proyección algebraica de $\overrightarrow{P(t)F}$ sobre $T(t)$ es

$$\lambda_u^1(t) = \left\langle \overrightarrow{P(t)F}, T(t) \right\rangle.$$

Entonces

$$\lambda_u^1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [(-c - a \cos(t))(-a \sin(t)) + (-b \sin(t))(b \cos(t))].$$

Por tanto,

$$\lambda_u^1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [a \sin(t)(c + a \cos(t)) - b^2 \sin(t) \cos(t)].$$

Factorizando $\sin(t)$, se obtiene

$$\lambda_u^1(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [ac + a^2 \cos(t) - b^2 \cos(t)].$$

Usando que $a^2 - b^2 = c^2$, tenemos

$$a^2 \cos(t) - b^2 \cos(t) = c^2 \cos(t).$$

Luego,

$$\lambda_u^1(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [ac + c^2 \cos(t)].$$

Por consiguiente,

$$\lambda_u^1(t) = \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

En esta rama, el desplazamiento tangencial que se resta en la abscisa coincide con la proyección algebraica calculada, es decir,

$$\mu_u^1(t) = \lambda_u^1(t).$$

Aplicando la proposición (3.2),

$$g_u^1(t) = s(t) - \mu_u^1(t).$$

Como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du,$$

se obtiene

$$g_u^1(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

Ordenada $f_u^1(t)$. Calculamos las coordenadas del pie $Q^1(t)$ de la perpendicular desde F a la tangente. Como

$$Q^1(t) = \beta(t) + \lambda_u^1(t)T(t),$$

y

$$\lambda_u^1(t) = \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}},$$

entonces

$$Q^1(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) + \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Por tanto,

$$Q^1(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) + \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{a^2 - c^2 \cos^2(t)}(-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Observamos que

$$a^2 - c^2 \cos^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t)).$$

Luego,

$$\frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{a^2 - c^2 \cos^2(t)} = \frac{c \sin(t)}{a - c \cos(t)}.$$

Sustituyendo,

$$Q^1(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) + \frac{c \sin(t)}{a - c \cos(t)}(-a \sin(t), b \cos(t)).$$

De esta manera,

$$Q^1(t) = \left(a \cos(t) - \frac{ac \sin^2(t)}{a - c \cos(t)}, b \sin(t) + \frac{bc \sin(t) \cos(t)}{a - c \cos(t)} \right).$$

Calculamos cada coordenada por separado. Para la primera coordenada,

$$Q_1^1(t) = \frac{a \cos(t)(a - c \cos(t)) - ac \sin^2(t)}{a - c \cos(t)}.$$

Entonces

$$Q_1^1(t) = \frac{a^2 \cos(t) - ac \cos^2(t) - ac \sin^2(t)}{a - c \cos(t)}.$$

Usando $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, se obtiene

$$Q_1^1(t) = \frac{a^2 \cos(t) - ac}{a - c \cos(t)}.$$

Por tanto,

$$Q_1^1(t) = \frac{a(a \cos(t) - c)}{a - c \cos(t)}.$$

Para la segunda coordenada,

$$Q_2^1(t) = \frac{b \sin(t)(a - c \cos(t)) + bc \sin(t) \cos(t)}{a - c \cos(t)}.$$

Luego,

$$Q_2^1(t) = \frac{ab \sin(t) - bc \sin(t) \cos(t) + bc \sin(t) \cos(t)}{a - c \cos(t)}.$$

Por consiguiente,

$$Q_2^1(t) = \frac{ab \sin(t)}{a - c \cos(t)}.$$

Así,

$$Q^1(t) = \left(\frac{a(a \cos(t) - c)}{a - c \cos(t)}, \frac{ab \sin(t)}{a - c \cos(t)} \right).$$

Ahora calculamos

$$f_u^1(t) = \|F - Q^1(t)\|$$

con $F = (-c, 0)$. Entonces

$$f_u^1(t) = \left\| \left(-c - \frac{a(a \cos(t) - c)}{a - c \cos(t)}, -\frac{ab \sin(t)}{a - c \cos(t)} \right) \right\|.$$

Es decir,

$$f_u^1(t) = \frac{1}{a - c \cos(t)} \|(-c(a - c \cos(t)) - a(a \cos(t) - c), -ab \sin(t))\|.$$

Simplificando la primera componente,

$$-c(a - c \cos(t)) - a(a \cos(t) - c) = -ac + c^2 \cos(t) - a^2 \cos(t) + ac.$$

Por tanto,

$$-c(a - c \cos(t)) - a(a \cos(t) - c) = (c^2 - a^2) \cos(t).$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$, se tiene

$$c^2 - a^2 = -b^2.$$

Luego,

$$f_u^1(t) = \frac{1}{a - c \cos(t)} \left\| \begin{pmatrix} -b^2 \cos(t) \\ -ab \sin(t) \end{pmatrix} \right\|.$$

Por consiguiente,

$$f_u^1(t) = \frac{1}{a - c \cos(t)} \sqrt{b^4 \cos^2(t) + a^2 b^2 \sin^2(t)}.$$

Factorizando b^2 , obtenemos

$$f_u^1(t) = \frac{b}{a - c \cos(t)} \sqrt{b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}.$$

Ahora,

$$b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) = (a^2 - c^2) \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t).$$

Entonces

$$b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) = a^2 (\cos^2(t) + \sin^2(t)) - c^2 \cos^2(t).$$

Por tanto,

$$b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) = a^2 - c^2 \cos^2(t).$$

Así,

$$f_u^1(t) = \frac{b \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}{a - c \cos(t)}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}$, se obtiene

$$f_u^1(t) = \frac{b(a^2 - c^2 \cos^2(t))}{(a - c \cos(t))\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

Como

$$a^2 - c^2 \cos^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t)),$$

concluimos que

$$f_u^1(t) = \frac{b(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

La ruleta generada por el foco $F = (-c, 0)$ es entonces

$$B_1(t) = (g_u^1(t), f_u^1(t)),$$

donde

$$B_1(t) = \left(\int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{b(a + c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \right). \quad (3.8)$$

Norma de $B_1'(t)$ y longitud de arco. Diferenciando y calculando la norma del vector resultante se obtiene

$$\|B_1'(t)\| = \frac{ab}{a - c \cos(t)},$$

y la longitud de arco es

$$\ell_u^1(t) = \int_{t_0}^t \|B_1'(z)\| dz = 2a \arctan \left(\sqrt{\frac{a+c}{a-c}} \tan \frac{z}{2} \right) \Big|_{t_0}^t.$$

Paso 5: Ruleta generada por el foco $F' = (c, 0)$

Abscisa $g_u^2(t)$. El vector desde $P(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ hasta $F' = (c, 0)$ es

$$\overrightarrow{P(t)F'} = F' - \beta(t) = (c - a \cos(t), -b \sin(t)).$$

La proyección algebraica de $\overrightarrow{P(t)F'}$ sobre el tangente unitario natural $T(t)$ es

$$\lambda_u^2(t) = \left\langle \overrightarrow{P(t)F'}, T(t) \right\rangle.$$

Entonces

$$\lambda_u^2(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [(c - a \cos(t))(-a \sin(t)) + (-b \sin(t))(b \cos(t))].$$

Por tanto,

$$\lambda_u^2(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [-ac + a^2 \cos(t) - b^2 \cos(t)].$$

Usando que $a^2 - b^2 = c^2$, se tiene

$$a^2 \cos(t) - b^2 \cos(t) = c^2 \cos(t).$$

Luego,

$$\lambda_u^2(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} [-ac + c^2 \cos(t)].$$

Factorizando c , obtenemos

$$\lambda_u^2(t) = \frac{c \sin(t)(c \cos(t) - a)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

Es decir,

$$\lambda_u^2(t) = -\frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

En esta rama, el desplazamiento tangencial que se resta en la abscisa se mide con la orientación opuesta a la del tangente unitario natural $T(t)$. Por tanto,

$$\mu_u^2(t) = -\lambda_u^2(t).$$

Así,

$$\mu_u^2(t) = \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

Aplicando la proposición (3.2),

$$g_u^2(t) = s(t) - \mu_u^2(t).$$

Como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du,$$

se concluye que

$$g_u^2(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

Ordenada $f_u^2(t)$. Calculamos las coordenadas del pie $Q^2(t)$ de la perpendicular desde F' a la tangente. Como

$$Q^2(t) = \beta(t) + \lambda_u^2(t)T(t),$$

y

$$\lambda_u^2(t) = -\frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}},$$

entonces

$$Q^2(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Por tanto,

$$Q^2(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{a^2 - c^2 \cos^2(t)} (-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Usando que

$$a^2 - c^2 \cos^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t)),$$

se tiene

$$\frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{a^2 - c^2 \cos^2(t)} = \frac{c \sin(t)}{a + c \cos(t)}.$$

Sustituyendo,

$$Q^2(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) - \frac{c \sin(t)}{a + c \cos(t)}(-a \sin(t), b \cos(t)).$$

Luego,

$$Q^2(t) = \left(a \cos(t) + \frac{ac \sin^2(t)}{a + c \cos(t)}, b \sin(t) - \frac{bc \sin(t) \cos(t)}{a + c \cos(t)} \right).$$

Calculamos cada coordenada por separado. Para la primera coordenada,

$$Q_1^2(t) = \frac{a \cos(t)(a + c \cos(t)) + ac \sin^2(t)}{a + c \cos(t)}.$$

Entonces

$$Q_1^2(t) = \frac{a^2 \cos(t) + ac \cos^2(t) + ac \sin^2(t)}{a + c \cos(t)}.$$

Usando $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, obtenemos

$$Q_1^2(t) = \frac{a^2 \cos(t) + ac}{a + c \cos(t)}.$$

Por tanto,

$$Q_1^2(t) = \frac{a(a \cos(t) + c)}{a + c \cos(t)}.$$

Para la segunda coordenada,

$$Q_2^2(t) = \frac{b \sin(t)(a + c \cos(t)) - bc \sin(t) \cos(t)}{a + c \cos(t)}.$$

Luego,

$$Q_2^2(t) = \frac{ab \sin(t) + bc \sin(t) \cos(t) - bc \sin(t) \cos(t)}{a + c \cos(t)}.$$

Por consiguiente,

$$Q_2^2(t) = \frac{ab \sin(t)}{a + c \cos(t)}.$$

Así,

$$Q^2(t) = \left(\frac{a(a \cos(t) + c)}{a + c \cos(t)}, \frac{ab \sin(t)}{a + c \cos(t)} \right).$$

Ahora calculamos

$$f_u^2(t) = \|F' - Q^2(t)\|$$

con $F' = (c, 0)$. Entonces

$$f_u^2(t) = \left\| \left(c - \frac{a(a \cos(t) + c)}{a + c \cos(t)}, -\frac{ab \sin(t)}{a + c \cos(t)} \right) \right\|.$$

Es decir,

$$f_u^2(t) = \frac{1}{a + c \cos(t)} \|(c(a + c \cos(t)) - a(a \cos(t) + c), -ab \sin(t))\|.$$

Simplificando la primera componente,

$$c(a + c \cos(t)) - a(a \cos(t) + c) = ac + c^2 \cos(t) - a^2 \cos(t) - ac.$$

Por tanto,

$$c(a + c \cos(t)) - a(a \cos(t) + c) = (c^2 - a^2) \cos(t).$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$, se tiene

$$c^2 - a^2 = -b^2.$$

Luego,

$$f_u^2(t) = \frac{1}{a + c \cos(t)} \left\| \begin{pmatrix} -b^2 \cos(t) \\ -ab \sin(t) \end{pmatrix} \right\|.$$

Por consiguiente,

$$f_u^2(t) = \frac{1}{a + c \cos(t)} \sqrt{b^4 \cos^2(t) + a^2 b^2 \sin^2(t)}.$$

Factorizando b^2 , obtenemos

$$f_u^2(t) = \frac{b}{a + c \cos(t)} \sqrt{b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}.$$

Ahora,

$$b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) = (a^2 - c^2) \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t).$$

Entonces

$$b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) = a^2 (\cos^2(t) + \sin^2(t)) - c^2 \cos^2(t).$$

Por tanto,

$$b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) = a^2 - c^2 \cos^2(t).$$

Así,

$$f_u^2(t) = \frac{b \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}{a + c \cos(t)}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}$, se obtiene

$$f_u^2(t) = \frac{b(a^2 - c^2 \cos^2(t))}{(a + c \cos(t)) \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

Como

$$a^2 - c^2 \cos^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t)),$$

concluimos que

$$f_u^2(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}.$$

La ruleta generada por el foco $F' = (c, 0)$ es entonces

$$B_2(t) = (g_u^2(t), f_u^2(t)),$$

donde

$$B_2(t) = \left(\int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)} du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}}, \frac{b(a - c \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}} \right). \quad (3.9)$$

Norma de $B_2'(t)$ y longitud de arco. Análogamente al caso anterior,

$$\|B_2'(t)\| = \frac{ab}{a + c \cos(t)},$$

y la longitud de arco es

$$\ell_u^2(t) = \int_{t_0}^t \|B_2'(z)\| dz = 2a \arctan \left(\sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \tan \frac{z}{2} \right) \Big|_{t_0}^t.$$

Resultado

Los unduloides son las superficies de revolución generadas por $B_1(t)$ y $B_2(t)$ alrededor del eje x , con parametrizaciones

$$Y_1(t, v) = (g_u^1(t), f_u^1(t) \cos(v), f_u^1(t) \sin(v)),$$

$$Y_2(t, v) = (g_u^2(t), f_u^2(t) \cos(v), f_u^2(t) \sin(v)),$$

donde $v \in [0, 2\pi]$

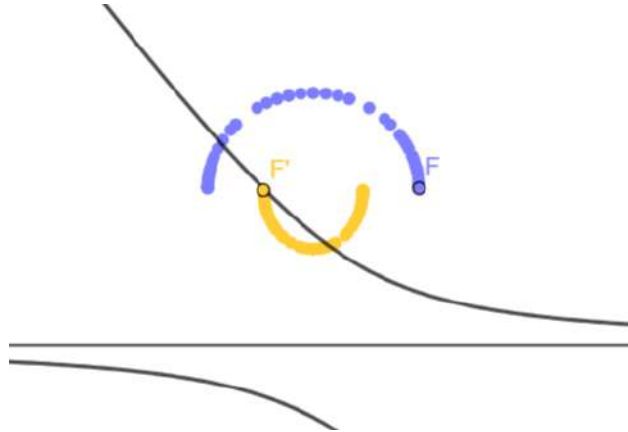
Observación 3.8 Las ruletas $B_1(t)$ y $B_2(t)$, asociadas a los dos focos de la elipse, generan, al rotar alrededor del eje x , dos parametrizaciones complementarias del unduloide. De acuerdo con Bendito–Medina (13), no es necesario estudiar por separado ambas ruletas: la ruleta completa generada por uno de los focos al tomar $t \in [-\pi, \pi]$ contiene la misma información geométrica que la unión de las ruletas generadas por ambos focos cuando se restringe el parámetro a $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Observación 3.9 Por la elección de los focos adoptada en este trabajo, las etiquetas B_1 y B_2 quedan intercambiadas respecto a la notación de Bendito–Bowick–Medina. En particular, la curva que aquí denotamos B_1 corresponde a la rama que en dicho artículo aparece con el factor $a + c \cos(t)$, mientras que la curva que aquí denotamos B_2 corresponde a la rama con el factor $a - c \cos(t)$. Esta diferencia es solo notacional y no afecta la geometría de la ondularia.

(c) La nodaria

Figura 21

Curva Nodaria



Una visualización interactiva de esta construcción puede verse en el video (46).

Consideramos la hipérbola parametrizada por

$$\gamma(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0,$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ es la distancia focal. Los focos de la hipérbola son $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$. El objetivo es obtener las ruletas generadas por F y por F' cuando la hipérbola rueda sin deslizamiento

sobre una recta horizontal.

Denotamos $\Phi(t) = \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}$ para aligerar la notación. Notamos que $\Phi(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ pues $c > a$ implica $c \cosh(t) \geq c > a$.

Paso 1: Cálculo de $\|\gamma'(t)\|$

Derivando la parametrización obtenemos

$$\gamma'(t) = (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Su norma es

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sinh^2(t) + b^2 \cosh^2(t)}.$$

Escribiendo $b^2 = c^2 - a^2$ y usando la identidad $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sinh^2(t) + (c^2 - a^2) \cosh^2(t)} \\ &= \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2(\cosh^2(t) - \sinh^2(t))} \\ &= \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2} = \Phi(t). \end{aligned}$$

Paso 2: Longitud de arco

La longitud de arco de γ desde $t_0 = 0$ hasta t es

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du.$$

Al igual que en el caso de la elipse, esta integral no admite expresión en términos de funciones elementales y pertenece a la familia de las integrales elípticas (45). En lo que sigue trabajaremos directamente con esta expresión.

Paso 3: Vector tangente unitario

El vector tangente unitario a γ en $P(t) = \gamma(t)$ es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\Phi(t)}(a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Paso 4: Cálculo de $\Phi'(t)$

Derivando $\Phi(t) = (c^2 \cosh^2(t) - a^2)^{1/2}$:

$$\Phi'(t) = \frac{c^2 \cosh(t) \sinh(t)}{\Phi(t)}.$$

Paso 5: Ruleta generada por el foco $F = (c, 0)$

Abscisa $g_n^1(t)$. El vector desde $P(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$ hasta $F = (c, 0)$ es

$$\overrightarrow{P(t)F} = F - \gamma(t) = (c - a \cosh(t), -b \sinh(t)).$$

La proyección algebraica de $\overrightarrow{P(t)F}$ sobre el tangente unitario natural $T(t)$ es

$$\lambda_n^1(t) = \left\langle \overrightarrow{P(t)F}, T(t) \right\rangle.$$

Entonces

$$\lambda_n^1(t) = \frac{1}{\Phi(t)} [(c - a \cosh(t))(a \sinh(t)) + (-b \sinh(t))(b \cosh(t))].$$

Por tanto,

$$\lambda_n^1(t) = \frac{\sinh(t)}{\Phi(t)} [ac - a^2 \cosh(t) - b^2 \cosh(t)].$$

Usando que $a^2 + b^2 = c^2$, se tiene

$$a^2 \cosh(t) + b^2 \cosh(t) = c^2 \cosh(t).$$

Luego,

$$\lambda_n^1(t) = \frac{\sinh(t)}{\Phi(t)} [ac - c^2 \cosh(t)].$$

Factorizando,

$$\lambda_n^1(t) = -\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}.$$

En esta rama, el desplazamiento tangencial que se resta en la abscisa se mide con la orientación opuesta a la del tangente unitario natural $T(t)$. Por tanto,

$$\mu_n^1(t) = -\lambda_n^1(t).$$

Así,

$$\mu_n^1(t) = \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}.$$

Aplicando la proposición (3.2),

$$g_n^1(t) = s(t) - \mu_n^1(t).$$

Como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du,$$

se concluye que

$$g_n^1(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}.$$

Ordenada $f_n^1(t)$. Calculamos las coordenadas del pie $Q^1(t)$ de la perpendicular desde F a la tangente. Como

$$Q^1(t) = \gamma(t) + \lambda_n^1(t)T(t),$$

y

$$\lambda_n^1(t) = -\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)},$$

entonces

$$Q^1(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)) - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)} \cdot \frac{1}{\Phi(t)} (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Por tanto,

$$Q^1(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)) - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi^2(t)} (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Usando que

$$\Phi^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2 = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

se tiene

$$\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi^2(t)} = \frac{c \sinh(t)}{c \cosh(t) + a}.$$

Sustituyendo,

$$Q^1(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)) - \frac{c \sinh(t)}{c \cosh(t) + a} (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Luego,

$$Q^1(t) = \left(a \cosh(t) - \frac{ac \sinh^2(t)}{c \cosh(t) + a}, b \sinh(t) - \frac{bc \sinh(t) \cosh(t)}{c \cosh(t) + a} \right).$$

Calculamos cada coordenada por separado. Para la primera coordenada,

$$Q_1^1(t) = \frac{a \cosh(t)(c \cosh(t) + a) - ac \sinh^2(t)}{c \cosh(t) + a}.$$

Usando que $\sinh^2(t) = \cosh^2(t) - 1$, obtenemos

$$Q_1^1(t) = \frac{ac \cosh^2(t) + a^2 \cosh(t) - ac(\cosh^2(t) - 1)}{c \cosh(t) + a}.$$

Por tanto,

$$Q_1^1(t) = \frac{a^2 \cosh(t) + ac}{c \cosh(t) + a}.$$

Así,

$$Q_1^1(t) = \frac{a(a \cosh(t) + c)}{c \cosh(t) + a}.$$

Para la segunda coordenada,

$$Q_2^1(t) = \frac{b \sinh(t)(c \cosh(t) + a) - bc \sinh(t) \cosh(t)}{c \cosh(t) + a}.$$

Luego,

$$Q_2^1(t) = \frac{ab \sinh(t)}{c \cosh(t) + a}.$$

Por consiguiente,

$$Q^1(t) = \left(\frac{a(a \cosh(t) + c)}{c \cosh(t) + a}, \frac{ab \sinh(t)}{c \cosh(t) + a} \right).$$

Ahora calculamos

$$f_n^1(t) = \|F - Q^1(t)\|$$

con $F = (c, 0)$. Entonces

$$f_n^1(t) = \left\| \left(c - \frac{a(a \cosh(t) + c)}{c \cosh(t) + a}, -\frac{ab \sinh(t)}{c \cosh(t) + a} \right) \right\|.$$

Es decir,

$$f_n^1(t) = \frac{1}{c \cosh(t) + a} \|(c(c \cosh(t) + a) - a(a \cosh(t) + c), -ab \sinh(t))\|.$$

Simplificando la primera componente,

$$c(c \cosh(t) + a) - a(a \cosh(t) + c) = c^2 \cosh(t) + ac - a^2 \cosh(t) - ac.$$

Por tanto,

$$c(c \cosh(t) + a) - a(a \cosh(t) + c) = (c^2 - a^2) \cosh(t).$$

Como $c^2 - a^2 = b^2$, se obtiene

$$f_n^1(t) = \frac{1}{c \cosh(t) + a} \left\| \left(b^2 \cosh(t), -ab \sinh(t) \right) \right\|.$$

Así,

$$f_n^1(t) = \frac{1}{c \cosh(t) + a} \sqrt{b^4 \cosh^2(t) + a^2 b^2 \sinh^2(t)}.$$

Factorizando,

$$f_n^1(t) = \frac{b}{c \cosh(t) + a} \sqrt{b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t)}.$$

Ahora,

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = (c^2 - a^2) \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t).$$

Entonces

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2 (\cosh^2(t) - \sinh^2(t)).$$

Como $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, se sigue que

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2.$$

Es decir,

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = \Phi^2(t).$$

Por tanto,

$$f_n^1(t) = \frac{b\Phi(t)}{c \cosh(t) + a}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\Phi(t)$, se obtiene

$$f_n^1(t) = \frac{b\Phi^2(t)}{(c \cosh(t) + a)\Phi(t)}.$$

Como

$$\Phi^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

concluimos que

$$f_n^1(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}.$$

La ruleta generada por el foco $F = (c, 0)$ es entonces

$$C_1(t) = \left(\int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \right). \quad (3.10)$$

Norma de $C_1'(t)$ y longitud de arco. Diferenciando y calculando la norma del vector resultante se obtiene (véase (13)).

$$\|C_1'(t)\| = \frac{ab}{c \cosh(t) + a},$$

y la longitud de arco es

$$\ell_n^1(t) = \int_{t_0}^t \|C_1'(z)\| dz = 2a \arctan\left(\sqrt{\frac{c-a}{c+a}} \tanh \frac{z}{2}\right) \Big|_{t_0}^t.$$

En particular, la longitud total de C_1 para $t \in (-\infty, \infty)$ es $4a \arctan \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$.

Paso 6: Ruleta generada por el foco $F' = (-c, 0)$

Abscisa $g_n^2(t)$. El vector desde $P(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$ hasta $F' = (-c, 0)$ es

$$\overrightarrow{P(t)F'} = F' - \gamma(t) = (-c - a \cosh(t), -b \sinh(t)).$$

La proyección algebraica de $\overrightarrow{P(t)F'}$ sobre el tangente unitario natural $T(t)$ es

$$\lambda_n^2(t) = \left\langle \overrightarrow{P(t)F'}, T(t) \right\rangle.$$

Entonces

$$\lambda_n^2(t) = \frac{1}{\Phi(t)} [(-c - a \cosh(t))(a \sinh(t)) + (-b \sinh(t))(b \cosh(t))].$$

Por tanto,

$$\lambda_n^2(t) = -\frac{\sinh(t)}{\Phi(t)} [ac + a^2 \cosh(t) + b^2 \cosh(t)].$$

Usando que $a^2 + b^2 = c^2$, se obtiene

$$\lambda_n^2(t) = -\frac{\sinh(t)}{\Phi(t)} [ac + c^2 \cosh(t)].$$

Factorizando,

$$\lambda_n^2(t) = -\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)}.$$

En esta rama, el desplazamiento tangencial que se resta en la abscisa se mide con la orientación opuesta a la del tangente unitario natural $T(t)$. Por tanto,

$$\mu_n^2(t) = -\lambda_n^2(t).$$

Así,

$$\mu_n^2(t) = \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)}.$$

Aplicando la proposición (3.2),

$$g_n^2(t) = s(t) - \mu_n^2(t).$$

Como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du,$$

se concluye que

$$g_n^2(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}.$$

Ordenada $f_n^2(t)$. Calculamos las coordenadas del pie $Q^2(t)$ de la perpendicular desde F' a la tangente. Como

$$Q^2(t) = \gamma(t) + \lambda_n^2(t)T(t),$$

y

$$\lambda_n^2(t) = -\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)},$$

entonces

$$Q^2(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)) - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)} \cdot \frac{1}{\Phi(t)} (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Por tanto,

$$Q^2(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)) - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi^2(t)} (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Usando que

$$\Phi^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2 = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

se tiene

$$\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi^2(t)} = \frac{c \sinh(t)}{c \cosh(t) - a}.$$

Sustituyendo,

$$Q^2(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)) - \frac{c \sinh(t)}{c \cosh(t) - a} (a \sinh(t), b \cosh(t)).$$

Luego,

$$Q^2(t) = \left(a \cosh(t) - \frac{ac \sinh^2(t)}{c \cosh(t) - a}, b \sinh(t) - \frac{bc \sinh(t) \cosh(t)}{c \cosh(t) - a} \right).$$

Calculamos cada coordenada por separado. Para la primera coordenada,

$$Q_1^2(t) = \frac{a \cosh(t)(c \cosh(t) - a) - ac \sinh^2(t)}{c \cosh(t) - a}.$$

Usando que $\sinh^2(t) = \cosh^2(t) - 1$, obtenemos

$$Q_1^2(t) = \frac{ac \cosh^2(t) - a^2 \cosh(t) - ac(\cosh^2(t) - 1)}{c \cosh(t) - a}.$$

Por tanto,

$$Q_1^2(t) = \frac{ac - a^2 \cosh(t)}{c \cosh(t) - a}.$$

Así,

$$Q_1^2(t) = \frac{a(c - a \cosh(t))}{c \cosh(t) - a}.$$

Para la segunda coordenada,

$$Q_2^2(t) = \frac{b \sinh(t)(c \cosh(t) - a) - bc \sinh(t) \cosh(t)}{c \cosh(t) - a}.$$

Luego,

$$Q_2^2(t) = -\frac{ab \sinh(t)}{c \cosh(t) - a}.$$

Por consiguiente,

$$Q^2(t) = \left(\frac{a(c - a \cosh(t))}{c \cosh(t) - a}, -\frac{ab \sinh(t)}{c \cosh(t) - a} \right).$$

Ahora calculamos

$$f_n^2(t) = \|F' - Q^2(t)\|$$

con $F' = (-c, 0)$. Entonces

$$f_n^2(t) = \left\| \left(-c - \frac{a(c - a \cosh(t))}{c \cosh(t) - a}, \frac{ab \sinh(t)}{c \cosh(t) - a} \right) \right\|.$$

Es decir,

$$f_n^2(t) = \frac{1}{c \cosh(t) - a} \|(-c(c \cosh(t) - a) - a(c - a \cosh(t)), ab \sinh(t))\|.$$

Simplificando la primera componente,

$$-c(c \cosh(t) - a) - a(c - a \cosh(t)) = -c^2 \cosh(t) + ac - ac + a^2 \cosh(t).$$

Por tanto,

$$-c(c \cosh(t) - a) - a(c - a \cosh(t)) = (a^2 - c^2) \cosh(t).$$

Como $c^2 - a^2 = b^2$, se tiene

$$a^2 - c^2 = -b^2.$$

Luego,

$$f_n^2(t) = \frac{1}{c \cosh(t) - a} \left\| \begin{pmatrix} -b^2 \cosh(t), ab \sinh(t) \end{pmatrix} \right\|.$$

Así,

$$f_n^2(t) = \frac{1}{c \cosh(t) - a} \sqrt{b^4 \cosh^2(t) + a^2 b^2 \sinh^2(t)}.$$

Factorizando,

$$f_n^2(t) = \frac{b}{c \cosh(t) - a} \sqrt{b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t)}.$$

Ahora,

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = (c^2 - a^2) \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t).$$

Entonces

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2 (\cosh^2(t) - \sinh^2(t)).$$

Como $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, se sigue que

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2.$$

Es decir,

$$b^2 \cosh^2(t) + a^2 \sinh^2(t) = \Phi^2(t).$$

Por tanto,

$$f_n^2(t) = \frac{b\Phi(t)}{c \cosh(t) - a}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\Phi(t)$, se obtiene

$$f_n^2(t) = \frac{b\Phi^2(t)}{(c \cosh(t) - a)\Phi(t)}.$$

Como

$$\Phi^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

concluimos que

$$f_n^2(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}.$$

La ruleta generada por el foco $F' = (-c, 0)$ es entonces

$$C_2(t) = (g_n^2(t), f_n^2(t)),$$

donde

$$C_2(t) = \left(\int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}} \right). \quad (3.11)$$

Norma de $C_2'(t)$ y longitud de arco. Análogamente al caso anterior ,

$$\|C_2'(t)\| = \frac{ab}{c \cosh(t) - a},$$

y la longitud de arco es

$$\ell_n^2(t) = \int_{t_0}^t \|C_2'(z)\| dz = 2a \arctan \left(\sqrt{\frac{c+a}{c-a}} \tanh \frac{z}{2} \right) \Big|_{t_0}^t.$$

Observación 3.10 A diferencia del caso elíptico, en el caso hiperbólico las dos ruletas $C_1(t)$ y $C_2(t)$ no deben entenderse como dos nodoides independientes, sino como dos ramas complementarias de una misma nodaria. La nodaria completa se obtiene al pegar ambas ramas después de realizar una traslación en la dirección del eje de revolución. Esta idea, así como el cálculo de la traslación axial y la parametrización suave de la curva pegada, fue desarrollada por Scharrer en su estudio sobre toros de Delaunay (47).

Figura 22
Curvas C_1 y C_2



Figura 23
Nodaria con traslación axial

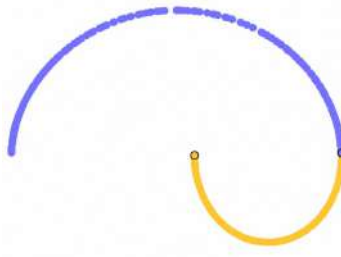
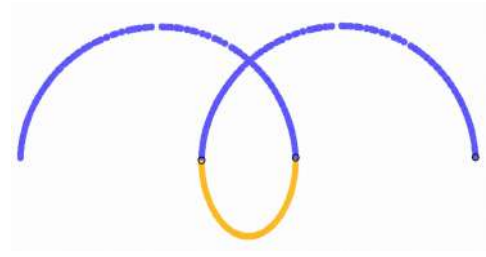


Figura 24
Nodaria completa periódica



Para la hipérbola de semiejes $a, b > 0$ se tiene

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Las dos ramas obtenidas a partir de los focos de la hipérbola son

$$C_1(t) = (g_1(t), f_1(t)), \quad C_2(t) = (g_2(t), f_2(t)).$$

Para ver cómo se pegan estas dos ramas, se introduce el cambio de parámetro

$$t = \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{c} \tan s \right), \quad -\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}.$$

Con este cambio, las dos ramas pueden reescribirse en términos del parámetro s . Al extender dichas expresiones para todo $s \in \mathbb{R}$, se obtiene que las componentes radiales y axiales satisfacen las relaciones

$$f_1(s + \pi) = f_2(s),$$

y

$$g_1(s + \pi) = g_2(s) - \frac{L}{2}.$$

Por tanto, la segunda rama debe trasladarse axialmente una distancia $L/2$ para que ambas ramas se unan formando una sola curva. Con la orientación escogida en las expresiones anteriores, esta

traslación se escribe como

$$\tilde{C}_2(s) = \left(g_2(s) - \frac{L}{2}, f_2(s) \right).$$

Si se invierte la orientación del eje de revolución, cambia el signo de la traslación, pero su magnitud sigue siendo $L/2$.

La longitud axial de un período completo de la nodaria está dada por

$$L = 4c \left(E(k) - k'^2 K(k) \right), \quad k = \frac{a}{c}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{b}{c}.$$

Aquí $K(k)$ y $E(k)$ son, respectivamente, las integrales elípticas completas de primera y segunda especie:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Estas integrales aparecen de manera natural al calcular longitudes asociadas a ruletas de cónicas, en particular en el caso hiperbólico.

De manera equivalente, en lugar de describir la nodaria completa como la unión por tramos de C_1 con una traslación de C_2 , se puede escribir una parametrización suave de la curva obtenida tras el pegado de ambas ramas. Definimos

$$Q(s) = \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2(s)}.$$

Entonces la nodaria completa puede parametrizarse como

$$\Gamma(s) = (g(s), f(s)), \quad s \in \mathbb{R},$$

donde

$$f(s) = Q(s) - a \cos(s),$$

y

$$g(s) = -a^2 b^2 \int_0^s \frac{\sin^2 u}{(c^2 - a^2 \sin^2 u)^{3/2}} du - \frac{a^2 \sin(s) \cos(s)}{Q(s)} + a \sin(s).$$

Esta parametrización incorpora el pegado de ambas ramas de la nodaria. En efecto, se cumple

$$f(s + 2\pi) = f(s),$$

mientras que la coordenada axial satisface

$$g(s + 2\pi) = g(s) - L.$$

Por tanto, la nodaria completa es periódica en su componente radial y se repite axialmente con período extrínseco L , salvo un cambio de orientación. Al rotar esta curva alrededor del eje de revolución se obtiene el nodoide completo. (Figura 30).

4. Superficies de Delaunay y el teorema de clasificación

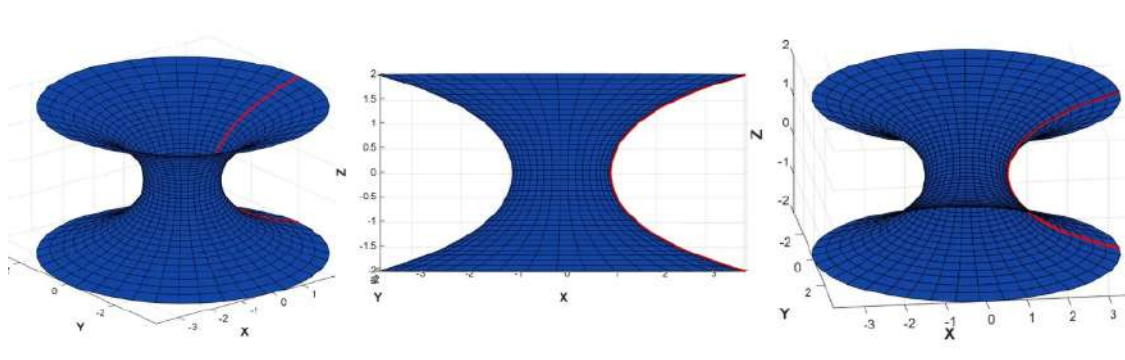
4.1 Superficies de Delaunay

En el capítulo anterior se construyeron las ruletas de los focos de las cónicas cuando estas ruedan sin deslizamiento sobre una recta. Se obtuvo que la ruleta generada por el foco de la parábola es la catenaria $A(t) = (bt, b \cosh(t))$, que las ruletas de los focos de una elipse son las undularias $B_1(t)$ y $B_2(t)$, y que las ruletas de los focos de una hipérbola son las nodarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$. El paso natural es ahora rotar cada una de estas curvas alrededor del eje x , que fue el eje sobre el cual rodaron las cónicas, generando así superficies de revolución. Este procedimiento produce precisamente las **superficies de Delaunay**: superficies de revolución cuya curvatura media es constante. En esta sección presentamos cada una de ellas, deducimos sus propiedades geométricas fundamentales y calculamos sus curvaturas.

El Catenoide

Figura 25

Catenoide



La catenaria $A(t) = (bt, b \cosh(t))$, con $b > 0$, es la curva generatriz del catenoide. Identificando $g(t) = bt$ con la componente axial y $f(t) = b \cosh(t)$ con la distancia al eje de revolución, la parametrización del catenoide como superficie de revolución alrededor del eje x es

$$\mathbf{x}(t, v) = (bt, b \cosh(t) \cos(v), b \cosh(t) \sin(v)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi]. \quad (4.1)$$

Como $b > 0$ y $\cosh(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene $f(t) = b \cosh(t) > 0$. Además, $g'(t) = b$ y $f'(t) = b \sinh(t)$, de modo que $(f'(t), g'(t)) = (b \sinh(t), b) \neq (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, la curva generatriz es regular. .

Vectores tangentes (derivadas parciales). Calculamos las derivadas parciales respecto de t y de v . Derivando con respecto a t , se obtiene

$$\mathbf{x}_t(t, v) = (b, b \sinh(t) \cos(v), b \sinh(t) \sin(v)).$$

Derivando con respecto a v , se obtiene

$$\mathbf{x}_v(t, v) = (0, -b \cosh(t) \sin(v), b \cosh(t) \cos(v)).$$

Primera forma fundamental. Los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por $E = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_v \rangle$ y $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$.

Calculamos primero E :

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle \\ &= \langle (b, b \sinh(t) \cos(v), b \sinh(t) \sin(v)), (b, b \sinh(t) \cos(v), b \sinh(t) \sin(v)) \rangle \\ &= b^2 + b^2 \sinh^2(t) \cos^2(v) + b^2 \sinh^2(t) \sin^2 v \\ &= b^2 + b^2 \sinh^2(t) (\cos^2(v) + \sin^2 v) \\ &= b^2 (1 + \sinh^2(t)). \end{aligned}$$

Usando la identidad hiperbólica $1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$, resulta

$$E = b^2 \cosh^2(t).$$

Por la identidad (2.3), el coeficiente mixto F se anula.

Finalmente, calculamos G :

$$\begin{aligned} G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= \langle (0, -b \cosh(t) \sin(v), b \cosh(t) \cos(v)), (0, -b \cosh(t) \sin(v), b \cosh(t) \cos(v)) \rangle \\ &= 0^2 + (-b \cosh(t) \sin(v))^2 + (b \cosh(t) \cos(v))^2 \\ &= b^2 \cosh^2(t) \sin^2 v + b^2 \cosh^2(t) \cos^2(v) \\ &= b^2 \cosh^2(t) (\sin^2 v + \cos^2(v)). \end{aligned}$$

Como $\sin^2 v + \cos^2(v) = 1$, se tiene

$$G = b^2 \cosh^2(t).$$

Por lo tanto, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = b^2 \cosh^2(t), \quad F = 0, \quad G = b^2 \cosh^2(t).$$

En consecuencia, la primera forma fundamental del catenoide es

$$I = E dt^2 + 2F dt dv + G dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes encontrados,

$$I = b^2 \cosh^2(t) dt^2 + b^2 \cosh^2(t) dv^2.$$

Por tanto,

$$I = b^2 \cosh^2(t) (dt^2 + dv^2).$$

Vector normal unitario. A partir de los vectores tangentes calculamos el producto cruz:

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & b \sinh(t) \cos(v) & b \sinh(t) \sin(v) \\ 0 & -b \cosh(t) \sin(v) & b \cosh(t) \cos(v) \end{vmatrix}.$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v &= (b^2 \sinh(t) \cosh(t) (\cos^2(v) + \sin^2 v), -b^2 \cosh(t) \cos(v), -b^2 \cosh(t) \sin(v)) \\ &= (b^2 \sinh(t) \cosh(t), -b^2 \cosh(t) \cos(v), -b^2 \cosh(t) \sin(v)). \end{aligned}$$

Su norma es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{b^4 \sinh^2(t) \cosh^2(t) + b^4 \cosh^2(t) \cos^2(v) + b^4 \cosh^2(t) \sin^2 v} \\ &= \sqrt{b^4 \cosh^2(t) (\sinh^2(t) + \cos^2(v) + \sin^2 v)} \\ &= \sqrt{b^4 \cosh^2(t) (\sinh^2(t) + 1)} \\ &= \sqrt{b^4 \cosh^4 t}. \end{aligned}$$

Como $b > 0$ y $\cosh(t) > 0$, se tiene

$$\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v\| = b^2 \cosh^2(t).$$

Por tanto, el vector normal unitario es

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Luego,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{b^2 \cosh^2(t)} (b^2 \sinh(t) \cosh(t), -b^2 \cosh(t) \cos(v), -b^2 \cosh(t) \sin(v)).$$

Así,

$$\mathbf{n} = \left(\tanh t, -\frac{\cos(v)}{\cosh(t)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(t)} \right).$$

Derivadas de segundo orden. Derivando nuevamente las expresiones de $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{x}_v$, obtenemos

$$\mathbf{x}_{tt}(t, v) = (0, b \cosh(t) \cos(v), b \cosh(t) \sin(v)),$$

$$\mathbf{x}_{tv}(t, v) = (0, -b \sinh(t) \sin(v), b \sinh(t) \cos(v)),$$

$$\mathbf{x}_{vv}(t, v) = (0, -b \cosh(t) \cos(v), -b \cosh(t) \sin(v)).$$

Segunda forma fundamental. Los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por $e_{II} = \langle \mathbf{x}_{tt}, \mathbf{n} \rangle$, $f_{II} = \langle \mathbf{x}_{tv}, \mathbf{n} \rangle$ y $g_{II} = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$.

Calculamos e_{II} :

$$\begin{aligned}
e_{II} &= \langle \mathbf{x}_{tt}, \mathbf{n} \rangle \\
&= \left\langle (0, b \cosh(t) \cos(v), b \cosh(t) \sin(v)), \left(\tanh t, -\frac{\cos(v)}{\cosh(t)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(t)} \right) \right\rangle \\
&= -b \cos^2(v) - b \sin^2 v \\
&= -b.
\end{aligned}$$

Por la identidad (2.4), el coeficiente mixto f_{II} se anula.

Calculamos g_{II} :

$$\begin{aligned}
g_{II} &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle \\
&= \left\langle (0, -b \cosh(t) \cos(v), -b \cosh(t) \sin(v)), \left(\tanh t, -\frac{\cos(v)}{\cosh(t)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(t)} \right) \right\rangle \\
&= b \cos^2(v) + b \sin^2 v \\
&= b.
\end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e_{II} = -b, \quad f_{II} = 0, \quad g_{II} = b.$$

En consecuencia,

$$II = e_{II} dt^2 + 2f_{II} dt dv + g_{II} dv^2.$$

Sustituyendo,

$$II = -b dt^2 + b dv^2.$$

Curvaturas principales. Como los coeficientes mixtos de la primera y segunda forma fundamental son nulos, es decir, $F = 0$ y $f_{II} = 0$, las curvas coordenadas determinan direcciones principales. Por tanto, las curvaturas principales se calculan como

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{II}}{G}.$$

De la primera forma fundamental se obtuvo

$$E = b^2 \cosh^2(t), \quad G = b^2 \cosh^2(t),$$

y de la segunda forma fundamental,

$$e_{II} = -b, \quad g_{II} = b.$$

Entonces,

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E} = \frac{-b}{b^2 \cosh^2(t)}.$$

Simplificando,

$$\kappa_1 = -\frac{1}{b \cosh^2(t)}.$$

De igual forma,

$$\kappa_2 = \frac{g_{II}}{G} = \frac{b}{b^2 \cosh^2(t)}.$$

Por tanto,

$$\kappa_2 = \frac{1}{b \cosh^2(t)}.$$

Así, las curvaturas principales del catenoide son

$$\kappa_1 = -\frac{1}{b \cosh^2(t)}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{b \cosh^2(t)}.$$

Curvatura de Gauss. La curvatura de Gauss se define como el producto de las curvaturas principales:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Sustituyendo los valores obtenidos,

$$K = \left(-\frac{1}{b \cosh^2(t)} \right) \left(\frac{1}{b \cosh^2(t)} \right).$$

Por tanto,

$$K = -\frac{1}{b^2 \cosh^4 t}.$$

Curvatura media. La curvatura media se define como el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Sustituyendo,

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{b \cosh^2(t)} + \frac{1}{b \cosh^2(t)} \right).$$

Por consiguiente,

$$H = 0.$$

Esto muestra que el catenoide es una superficie mínima.

El Onduloide

Figura 26
Onduloide

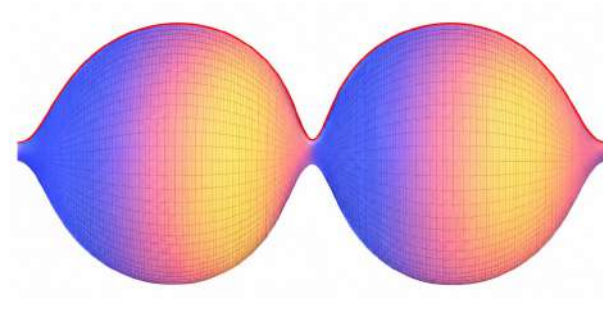
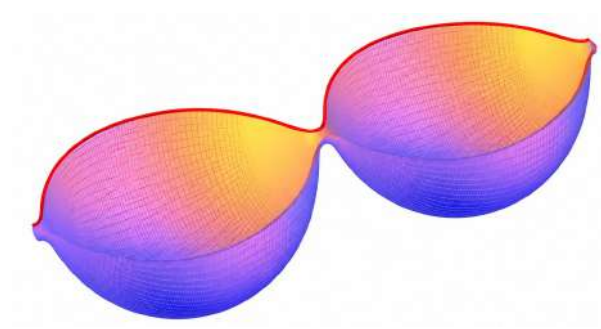


Figura 27
Parte inferior del Onduloide cortado por el plano xy



Consideremos la elipse de semiejes $a > b > 0$, con distancia focal $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Definimos

$$\Delta(t) = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)}.$$

La ruleta $B_2(t)$ está dada por

$$B_2(t) = (g(t), f(t)),$$

donde

$$f(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}$$

y

$$g(t) = \int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}.$$

Al rotar la curva generatriz $B_2(t)$ alrededor del eje x , se obtiene la superficie de revolución

$$Y(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

donde $t \in [-\pi, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Sustituyendo las expresiones de $f(t)$ y $g(t)$, la parametrisación

zación queda

$$Y(t, v) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}, \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \cos(v), \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \sin(v) \right). \quad (4.2)$$

Como $a > c$ y $\cos(t) \leq 1$, se tiene $a - c \cos(t) \geq a - c > 0$. Además, $\Delta(t) > 0$ para todo t .

Por tanto, $f(t) > 0$, de modo que la curva generatriz no corta el eje de revolución.

Para calcular los vectores tangentes, primero derivamos las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Como

$$\Delta(t) = (a^2 - c^2 \cos^2(t))^{1/2},$$

se obtiene

$$\Delta'(t) = \frac{c^2 \sin(t) \cos(t)}{\Delta(t)}.$$

Ahora, derivando:

$$f(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)},$$

por la regla del cociente, se tiene

$$f'(t) = \frac{bc \sin(t) \Delta(t) - b(a - c \cos(t)) \Delta'(t)}{\Delta^2(t)}.$$

Sustituyendo $\Delta'(t)$,

$$f'(t) = \frac{bc \sin(t) \Delta^2(t) - bc^2 \sin(t) \cos(t)(a - c \cos(t))}{\Delta^3(t)}.$$

Factorizando $bc \sin(t)$, resulta

$$f'(t) = \frac{bc \sin(t) [\Delta^2(t) - c \cos(t)(a - c \cos(t))]}{\Delta^3(t)}.$$

Como $\Delta^2(t) = a^2 - c^2 \cos^2(t)$, entonces

$$\Delta^2(t) - c \cos(t)(a - c \cos(t)) = a^2 - c^2 \cos^2(t) - ac \cos(t) + c^2 \cos^2(t).$$

Por tanto,

$$\Delta^2(t) - c \cos(t)(a - c \cos(t)) = a^2 - ac \cos(t) = a(a - c \cos(t)).$$

Luego,

$$f'(t) = \frac{abc \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta^3(t)}.$$

Usando la identidad

$$\Delta^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t)),$$

se simplifica

$$f'(t) = \frac{abc \sin(t)}{\Delta(t)(a + c \cos(t))}.$$

Definimos ahora la función auxiliar

$$h_u(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(a + c \cos(t))}.$$

Con esta notación,

$$f'(t) = c \sin(t) h_u(t).$$

Por otra parte, derivando $g(t)$ se obtiene

$$g'(t) = \Delta(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \right).$$

Después de simplificar usando $\Delta^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t))$ y $b^2 = a^2 - c^2$, resulta

$$g'(t) = \frac{ab^2}{\Delta(t)(a + c \cos(t))}.$$

Por tanto,

$$g'(t) = b h_u(t).$$

Vectores tangentes (derivadas parciales). Calculamos ahora los vectores tangentes a la superficie. Derivando $Y(t, v)$ con respecto a t , se obtiene

$$Y_t(t, v) = (g'(t), f'(t) \cos(v), f'(t) \sin(v)).$$

Sustituyendo las expresiones de $f'(t)$ y $g'(t)$,

$$Y_t(t, v) = (b h_u(t), c \sin(t) h_u(t) \cos(v), c \sin(t) h_u(t) \sin(v)).$$

Factorizando $h_u(t)$,

$$Y_t(t, v) = h_u(t) (b, c \sin(t) \cos(v), c \sin(t) \sin(v)).$$

Derivando ahora con respecto a v , se tiene

$$Y_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)).$$

Sustituyendo $f(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}$, obtenemos

$$Y_v(t, v) = \left(0, -\frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \sin(v), \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \cos(v) \right).$$

Primera forma fundamental. Los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por

$$E = \langle Y_t, Y_t \rangle, \quad F = \langle Y_t, Y_v \rangle, \quad G = \langle Y_v, Y_v \rangle.$$

Calculamos primero E :

$$E = \langle h_u(t)(b, c \sin(t) \cos(v), c \sin(t) \sin(v)), h_u(t)(b, c \sin(t) \cos(v), c \sin(t) \sin(v)) \rangle.$$

Entonces

$$E = h_u^2(t) [b^2 + c^2 \sin^2(t) \cos^2(v) + c^2 \sin^2(t) \sin^2 v].$$

Factorizando,

$$E = h_u^2(t) [b^2 + c^2 \sin^2(t) (\cos^2(v) + \sin^2 v)].$$

Como $\cos^2(v) + \sin^2 v = 1$, se obtiene

$$E = h_u^2(t) (b^2 + c^2 \sin^2(t)).$$

Usando $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos

$$b^2 + c^2 \sin^2(t) = a^2 - c^2 + c^2 \sin^2(t).$$

Como $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, se sigue que

$$b^2 + c^2 \sin^2(t) = a^2 - c^2 + c^2(1 - \cos^2(t)) = a^2 - c^2 \cos^2(t).$$

Por definición,

$$b^2 + c^2 \sin^2(t) = \Delta^2(t).$$

Luego,

$$E = h_u^2(t) \Delta^2(t).$$

Sustituyendo $h_u(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(a + c \cos(t))}$, obtenemos

$$E = \left(\frac{ab}{\Delta(t)(a + c \cos(t))} \right)^2 \Delta^2(t).$$

Por tanto,

$$E = \frac{a^2 b^2}{(a + c \cos(t))^2}.$$

Por la identidad (2.3), el coeficiente mixto F se anula.

Finalmente, calculamos G :

$$G = \langle Y_v, Y_v \rangle.$$

Como

$$Y_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)),$$

tenemos

$$G = f^2(t) \sin^2 v + f^2(t) \cos^2(v).$$

Por tanto,

$$G = f^2(t)(\sin^2 v + \cos^2(v)).$$

Como $\sin^2 v + \cos^2(v) = 1$, se obtiene

$$G = f^2(t).$$

Sustituyendo la expresión de $f(t)$,

$$G = \left(\frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \right)^2.$$

Así,

$$G = \frac{b^2(a - c \cos(t))^2}{\Delta^2(t)}.$$

Usando nuevamente

$$\Delta^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t)),$$

resulta

$$G = \frac{b^2(a - c \cos(t))}{a + c \cos(t)}.$$

En consecuencia, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \frac{a^2 b^2}{(a + c \cos(t))^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{b^2(a - c \cos(t))}{a + c \cos(t)}.$$

Por consiguiente, la primera forma fundamental del onduloide generado por la ruleta $B_2(t)$

es:

$$I = E dt^2 + 2F dt dv + G dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos,

$$I = \frac{a^2 b^2}{(a + c \cos(t))^2} dt^2 + \frac{b^2(a - c \cos(t))}{a + c \cos(t)} dv^2.$$

Vector normal unitario. Calculamos el producto cruz $Y_t \times Y_v$:

$$\begin{aligned} Y_t \times Y_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b h_u(t) & c \sin(t) h_u(t) \cos(v) & c \sin(t) h_u(t) \sin(v) \\ 0 & -f(t) \sin(v) & f(t) \cos(v) \end{vmatrix} \\ &= f(t) h_u(t) (c \sin(t), -b \cos(v), -b \sin(v)). \end{aligned}$$

Su norma es

$$\begin{aligned} \|Y_t \times Y_v\| &= f(t) h_u(t) \sqrt{c^2 \sin^2(t) + b^2} \\ &= f(t) h_u(t) \sqrt{a^2 - c^2 + c^2 \sin^2(t)}. \end{aligned}$$

Como $b^2 = a^2 - c^2$, se tiene

$$a^2 - c^2 + c^2 \sin^2(t) = a^2 - c^2 \cos^2(t) = \Delta^2(t).$$

Luego,

$$\|Y_t \times Y_v\| = f(t) h_u(t) \Delta(t).$$

Por tanto, el vector normal unitario es

$$\mathbf{n} = \frac{Y_t \times Y_v}{\|Y_t \times Y_v\|}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$\mathbf{n}(t, v) = \frac{1}{\Delta(t)} (c \sin(t), -b \cos(v), -b \sin(v)).$$

Es decir,

$$\mathbf{n}(t, v) = \left(\frac{c \sin(t)}{\Delta(t)}, -\frac{b \cos(v)}{\Delta(t)}, -\frac{b \sin(v)}{\Delta(t)} \right).$$

Derivadas de segundo orden. Para calcular las derivadas de segundo orden, primero derivamos la función auxiliar $h_u(t)$. Como

$$h_u(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(a + c \cos(t))},$$

se obtiene

$$h'_u(t) = h_u(t) \left(\frac{c \sin(t)}{a + c \cos(t)} - \frac{c^2 \sin(t) \cos(t)}{\Delta^2(t)} \right).$$

Equivalentemente,

$$h'_u(t) = \frac{abc \sin(t)(a - 2c \cos(t))}{\Delta^3(t)(a + c \cos(t))}.$$

Como $g'(t) = b h_u(t)$ y $f'(t) = c \sin(t) h_u(t)$, se tiene

$$g''(t) = b h'_u(t),$$

y

$$f''(t) = c \cos(t) h_u(t) + c \sin(t) h'_u(t).$$

Por tanto, las derivadas segundas de la parametrización

$$Y(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v))$$

son

$$Y_{tt}(t, v) = (bh'_u(t), (c \cos(t) h_u(t) + c \sin(t) h'_u(t)) \cos(v), (c \cos(t) h_u(t) + c \sin(t) h'_u(t)) \sin(v)),$$

$$Y_{tv}(t, v) = (0, -c \sin(t) h_u(t) \sin(v), c \sin(t) h_u(t) \cos(v)),$$

y

$$Y_{vv}(t, v) = (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)).$$

Sustituyendo $f(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}$, también podemos escribir

$$Y_{vv}(t, v) = \left(0, -\frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \cos(v), -\frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \sin(v)\right).$$

Segunda forma fundamental. Los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por $e_{II} = \langle Y_{tt}, \mathbf{n} \rangle$, $f_{II} = \langle Y_{tv}, \mathbf{n} \rangle$ y $g_{II} = \langle Y_{vv}, \mathbf{n} \rangle$.

Calculamos primero e :

$$\begin{aligned} e_{II} &= \langle Y_{tt}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \left\langle (bh'_u, (c \cos(t) h_u + c \sin(t) h'_u) \cos(v), (c \cos(t) h_u + c \sin(t) h'_u) \sin(v)), \frac{1}{\Delta} (c \sin(t), -b \cos(v), -b \sin(v)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Delta} [bc \sin(t) h'_u - b(c \cos(t) h_u + c \sin(t) h'_u) \cos^2(v) - b(c \cos(t) h_u + c \sin(t) h'_u) \sin^2 v] \\ &= \frac{1}{\Delta} [bc \sin(t) h'_u - b(c \cos(t) h_u + c \sin(t) h'_u)(\cos^2(v) + \sin^2 v)] \\ &= \frac{1}{\Delta} [bc \sin(t) h'_u - bc \cos(t) h_u - bc \sin(t) h'_u] \\ &= -\frac{bc \cos(t) h_u(t)}{\Delta(t)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $h_u(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(a + c \cos(t))}$, obtenemos

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cos(t)}{\Delta^2(t)(a + c \cos(t))}.$$

Por la identidad (2.4), el coeficiente mixto f_{II} se anula.

Finalmente, calculamos g_{II} :

$$\begin{aligned} g_{II} &= \langle Y_{vv}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \left\langle (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)), \frac{1}{\Delta(t)} (c \sin(t), -b \cos(v), -b \sin(v)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Delta(t)} [bf(t) \cos^2(v) + bf(t) \sin^2 v] \\ &= \frac{bf(t)}{\Delta(t)} (\cos^2(v) + \sin^2 v) \\ &= \frac{bf(t)}{\Delta(t)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $f(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}$, resulta

$$g_{II} = \frac{b^2(a - c \cos(t))}{\Delta^2(t)}.$$

Como $\Delta^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t))$, se simplifica a

$$g_{II} = \frac{b^2}{a + c \cos(t)}.$$

En conclusión, los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cos(t)}{\Delta^2(t)(a + c \cos(t))}, \quad f_{II} = 0, \quad g_{II} = \frac{b^2}{a + c \cos(t)}.$$

Por consiguiente, la segunda forma fundamental del onduloide es

$$II = e_{II} dt^2 + 2f_{II} dt dv + g_{II} dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos,

$$II = -\frac{ab^2c \cos(t)}{\Delta^2(t)(a + c \cos(t))} dt^2 + \frac{b^2}{a + c \cos(t)} dv^2.$$

Curvaturas principales. Como $F = 0$ y $f_{II} = 0$, las curvas coordenadas determinan direcciones principales. Por tanto, las curvaturas principales se calculan mediante

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{II}}{G}.$$

De la primera forma fundamental se obtuvo

$$E = \frac{a^2b^2}{(a + c \cos(t))^2}, \quad G = \frac{b^2(a - c \cos(t))}{a + c \cos(t)}.$$

Además, de la segunda forma fundamental se obtuvo

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cos(t)}{\Delta^2(t)(a + c \cos(t))}, \quad g_{II} = \frac{b^2}{a + c \cos(t)}.$$

Calculamos primero κ_1 :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{e_{II}}{E} \\ &= \frac{-\frac{ab^2c \cos(t)}{\Delta^2(t)(a + c \cos(t))}}{\frac{a^2b^2}{(a + c \cos(t))^2}} \\ &= -\frac{ab^2c \cos(t)}{\Delta^2(t)(a + c \cos(t))} \cdot \frac{(a + c \cos(t))^2}{a^2b^2} \\ &= -\frac{c \cos(t)(a + c \cos(t))}{a\Delta^2(t)}. \end{aligned}$$

Usando la identidad $\Delta^2(t) = (a - c \cos(t))(a + c \cos(t))$, se obtiene

$$\kappa_1 = -\frac{c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))}.$$

Calculamos ahora κ_2 :

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \frac{g_{II}}{G} \\ &= \frac{\frac{b^2}{a + c \cos(t)}}{\frac{b^2(a - c \cos(t))}{a + c \cos(t)}} \\ &= \frac{1}{a - c \cos(t)}.\end{aligned}$$

Por tanto, las curvaturas principales del onduloide son

$$\kappa_1 = -\frac{c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{a - c \cos(t)}.$$

Curvatura de Gauss. La curvatura de Gauss se define como el producto de las curvaturas principales:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$\begin{aligned}K &= \left(-\frac{c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))} \right) \left(\frac{1}{a - c \cos(t)} \right) \\ &= -\frac{c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))^2}.\end{aligned}$$

Así,

$$K = -\frac{c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))^2}.$$

Curvatura media. La curvatura media se define como el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Sustituyendo κ_1 y κ_2 , se tiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))} + \frac{1}{a - c \cos(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-c \cos(t) + a}{a(a - c \cos(t))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a - c \cos(t)}{a(a - c \cos(t))} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H = \frac{1}{2a}.$$

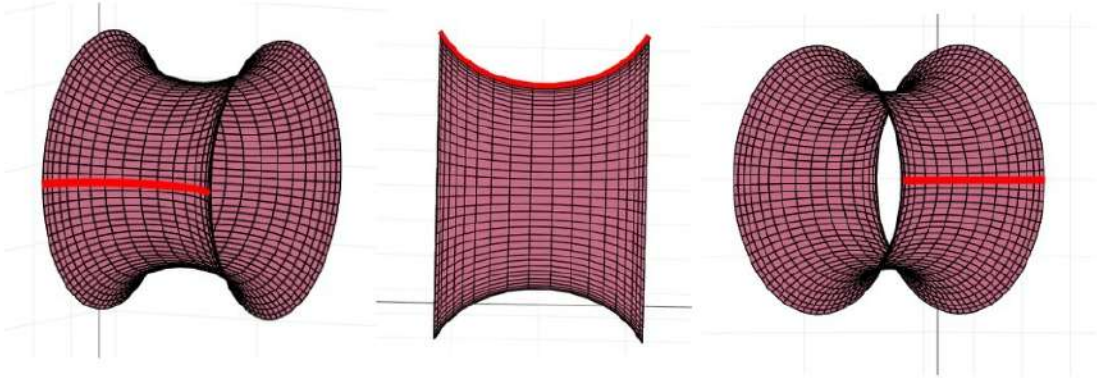
En consecuencia, el onduloide tiene curvatura media constante:

$$H \equiv \frac{1}{2a}.$$

El Nodoide

Las nodarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$, ruletas de los focos $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$ de la hipérbola de semiejes $a, b > 0$, generan al rotar alrededor del eje x los dos tipos de nodoide. A diferencia del caso elíptico, para el nodoide es necesario considerar ambas ruletas, pues cada una describe una parte geoméricamente distinta de la superficie.

NODOIDE 1

Figura 28*Nodoide generado por la nodaria $C_1(t)$* 

La nodaria $C_1(t)$, ruleta del foco $F = (c, 0)$, tiene componentes

$$f_n^1(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}, \quad g_n^1(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t) (c \cosh(t) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}.$$

Definimos

$$\Delta(t) = \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}.$$

Entonces

$$C_1(t) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)}, \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \right).$$

Identificando $g(t) = g_n^1(t)$ con la componente axial y $f(t) = f_n^1(t)$ con la distancia al eje de revolución, la parametrización de la superficie generada al rotar la nodaria alrededor del eje x es

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)).$$

Por tanto,

$$X(t, v) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)}, \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \cos(v), \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \sin(v) \right), \quad (4.3)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $v \in [0, 2\pi]$.

Para calcular los vectores tangentes, derivamos primero las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Como

$$\Delta(t) = (c^2 \cosh^2(t) - a^2)^{1/2},$$

se tiene

$$\Delta'(t) = \frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Delta(t)}.$$

Ahora, derivando:

$$f(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)},$$

por la regla del cociente, obtenemos

$$f'(t) = \frac{bc \sinh(t) \Delta(t) - b(c \cosh(t) - a) \Delta'(t)}{\Delta^2(t)}.$$

Sustituyendo $\Delta'(t)$,

$$f'(t) = \frac{bc \sinh(t) \Delta^2(t) - bc^2 \sinh(t) \cosh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Delta^3(t)}.$$

Factorizando $bc \sinh(t)$, resulta

$$f'(t) = \frac{bc \sinh(t) [\Delta^2(t) - c \cosh(t)(c \cosh(t) - a)]}{\Delta^3(t)}.$$

Como $\Delta^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2$, se obtiene

$$\Delta^2(t) - c \cosh(t)(c \cosh(t) - a) = a(c \cosh(t) - a).$$

Luego,

$$f'(t) = \frac{abc \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Delta^3(t)}.$$

Usando la identidad

$$\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

se simplifica a

$$f'(t) = \frac{abc \sinh(t)}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)}.$$

Definimos ahora la función auxiliar

$$h_1(t) = \frac{ab}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}(c \cosh(t) + a)} = \frac{ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)}.$$

Con esta notación,

$$f'(t) = c \sinh(t) h_1(t).$$

Por otra parte, derivando $g(t)$ se obtiene

$$g'(t) = \frac{ab^2}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)}.$$

Por tanto,

$$g'(t) = b h_1(t).$$

Vectores tangentes (derivadas parciales). A partir de

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

se tiene

$$X_t(t, v) = (g'(t), f'(t) \cos(v), f'(t) \sin(v)).$$

Sustituyendo $g'(t) = b h_1(t)$ y $f'(t) = c \sinh(t) h_1(t)$, obtenemos

$$X_t(t, v) = (b h_1(t), c \sinh(t) h_1(t) \cos(v), c \sinh(t) h_1(t) \sin(v)).$$

Factorizando $h_1(t)$,

$$X_t(t, v) = h_1(t) (b, c \sinh(t) \cos(v), c \sinh(t) \sin(v)).$$

Derivando ahora con respecto a v , se obtiene

$$X_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)).$$

Como $f(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)}$, entonces

$$X_v(t, v) = \left(0, -\frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \sin(v), \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \cos(v) \right).$$

Primera forma fundamental. Los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por $E = \langle X_t, X_t \rangle$, $F = \langle X_t, X_v \rangle$ y $G = \langle X_v, X_v \rangle$.

Calculamos primero E :

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_t, X_t \rangle \\
&= \langle h_1(t)(b, c \sinh(t) \cos(v), c \sinh(t) \sin(v)), h_1(t)(b, c \sinh(t) \cos(v), c \sinh(t) \sin(v)) \rangle \\
&= h_1^2(t) [b^2 + c^2 \sinh^2(t) \cos^2(v) + c^2 \sinh^2(t) \sin^2 v] \\
&= h_1^2(t) [b^2 + c^2 \sinh^2(t)(\cos^2(v) + \sin^2 v)] .
\end{aligned}$$

Como $\cos^2(v) + \sin^2 v = 1$, se tiene

$$E = h_1^2(t) (b^2 + c^2 \sinh^2(t)) .$$

Usando $b^2 = c^2 - a^2$, obtenemos

$$b^2 + c^2 \sinh^2(t) = c^2 - a^2 + c^2 \sinh^2(t) .$$

Como $1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$, resulta

$$b^2 + c^2 \sinh^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2 .$$

Por definición,

$$c^2 \cosh^2(t) - a^2 = \Delta^2(t) .$$

Luego,

$$E = h_1^2(t) \Delta^2(t) .$$

Sustituyendo

$$h_1(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)} ,$$

obtenemos

$$E = \left(\frac{ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)} \right)^2 \Delta^2(t).$$

Por tanto,

$$E = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) + a)^2}.$$

Por la identidad (2.3), el coeficiente mixto F se anula.

Finalmente, calculamos G :

$$G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Como

$$X_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)),$$

tenemos

$$\begin{aligned} G &= 0^2 + (-f(t) \sin(v))^2 + (f(t) \cos(v))^2 \\ &= f^2(t) \sin^2 v + f^2(t) \cos^2(v) \\ &= f^2(t) (\sin^2 v + \cos^2(v)). \end{aligned}$$

Como $\sin^2 v + \cos^2(v) = 1$, se obtiene

$$G = f^2(t).$$

Sustituyendo la expresión de $f(t)$,

$$G = \left(\frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \right)^2.$$

Así,

$$G = \frac{b^2(c \cosh(t) - a)^2}{\Delta^2(t)}.$$

Usando nuevamente

$$\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

resulta

$$G = \frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{c \cosh(t) + a}.$$

En conclusión, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) + a)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{c \cosh(t) + a}.$$

Por consiguiente, la primera forma fundamental de la superficie generada por la nodaria es

$$I = E dt^2 + 2F dt dv + G dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos,

$$I = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) + a)^2} dt^2 + \frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{c \cosh(t) + a} dv^2.$$

Vector normal unitario. Calculamos el producto cruz:

$$\begin{aligned} X_t \times X_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b h_1(t) & c \sinh(t) h_1(t) \cos(v) & c \sinh(t) h_1(t) \sin(v) \\ 0 & -f(t) \sin(v) & f(t) \cos(v) \end{vmatrix} \\ &= f(t) h_1(t) (c \sinh(t), -b \cos(v), -b \sin(v)). \end{aligned}$$

Su norma es

$$\|X_t \times X_v\| = f(t)h_1(t)\sqrt{c^2 \sinh^2(t) + b^2}.$$

Usando $b^2 = c^2 - a^2$, se tiene

$$c^2 \sinh^2(t) + b^2 = c^2 \sinh^2(t) + c^2 - a^2 = c^2 \cosh^2(t) - a^2 = \Delta^2(t).$$

Luego,

$$\|X_t \times X_v\| = f(t)h_1(t)\Delta(t).$$

Por tanto, el vector normal unitario es

$$\mathbf{n}(t, v) = \frac{X_t \times X_v}{\|X_t \times X_v\|} = \frac{1}{\Delta(t)}(c \sinh(t), -b \cos(v), -b \sin(v)).$$

Es decir,

$$\mathbf{n}(t, v) = \left(\frac{c \sinh(t)}{\Delta(t)}, -\frac{b \cos(v)}{\Delta(t)}, -\frac{b \sin(v)}{\Delta(t)} \right).$$

Derivadas de segundo orden. Para calcular las derivadas de segundo orden, primero derivamos la función auxiliar $h_1(t)$. Como

$$h_1(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)},$$

se obtiene

$$h'_1(t) = h_1(t) \left(-\frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Delta^2(t)} - \frac{c \sinh(t)}{c \cosh(t) + a} \right).$$

Equivalentemente,

$$h_1'(t) = -\frac{abc \sinh(t)(2c \cosh(t) - a)}{\Delta^3(t)(c \cosh(t) + a)}.$$

Como $g'(t) = bh_1(t)$ y $f'(t) = c \sinh(t) h_1(t)$, se tiene

$$g''(t) = bh_1'(t),$$

y

$$f''(t) = c \cosh(t) h_1(t) + c \sinh(t) h_1'(t).$$

Por tanto, a partir de la parametrización

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

las derivadas segundas son

$$X_{tt}(t, v) = (bh_1'(t), (c \cosh(t) h_1(t) + c \sinh(t) h_1'(t)) \cos(v), (c \cosh(t) h_1(t) + c \sinh(t) h_1'(t)) \sin(v)),$$

$$X_{tv}(t, v) = (0, -c \sinh(t) h_1(t) \sin(v), c \sinh(t) h_1(t) \cos(v)),$$

y

$$X_{vv}(t, v) = (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)).$$

Sustituyendo $f(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)}$, también se tiene

$$X_{vv}(t, v) = \left(0, -\frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \cos(v), -\frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)} \sin(v) \right).$$

Segunda forma fundamental. Los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por $e_{II} = \langle X_{tt}, \mathbf{n} \rangle$, $f_{II} = \langle X_{tv}, \mathbf{n} \rangle$ y $g_{II} = \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle$.

Calculamos primero el coeficiente e_{II} :

$$\begin{aligned}
 e_{II} &= \langle X_{tt}, \mathbf{n} \rangle \\
 &= \left\langle (bh'_1, (c \cosh(t) h_1 + c \sinh(t) h'_1) \cos(v), (c \cosh(t) h_1 + c \sinh(t) h'_1) \sin(v)), \frac{1}{\Delta} (c \sinh(t), -b \cos(v), -b \sin(v)) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\Delta} [bc \sinh(t) h'_1 - b(c \cosh(t) h_1 + c \sinh(t) h'_1) \cos^2(v) - b(c \cosh(t) h_1 + c \sinh(t) h'_1) \sin^2 v] \\
 &= \frac{1}{\Delta} [bc \sinh(t) h'_1 - b(c \cosh(t) h_1 + c \sinh(t) h'_1)(\cos^2(v) + \sin^2 v)] \\
 &= \frac{1}{\Delta} [bc \sinh(t) h'_1 - bc \cosh(t) h_1 - bc \sinh(t) h'_1] \\
 &= -\frac{bc \cosh(t) h_1(t)}{\Delta(t)}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $h_1(t) = \frac{ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) + a)}$, obtenemos

$$e_{II} = -\frac{ab^2 c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) + a)}.$$

Por la identidad (2.4), el coeficiente mixto f_{II} se anula.

Finalmente, calculamos el coeficiente g_{II} :

$$\begin{aligned}
 g_{II} &= \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle \\
 &= \left\langle (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)), \frac{1}{\Delta(t)} (c \sinh(t), -b \cos(v), -b \sin(v)) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\Delta(t)} [bf(t) \cos^2(v) + bf(t) \sin^2 v] \\
 &= \frac{bf(t)}{\Delta(t)} (\cos^2(v) + \sin^2 v) \\
 &= \frac{bf(t)}{\Delta(t)}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $f(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Delta(t)}$, resulta

$$g_{II} = \frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{\Delta^2(t)}.$$

Como $\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a)$, se simplifica a

$$g_{II} = \frac{b^2}{c \cosh(t) + a}.$$

En conclusión, los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) + a)}, \quad f_{II} = 0, \quad g_{II} = \frac{b^2}{c \cosh(t) + a}.$$

Por consiguiente, la segunda forma fundamental de la superficie generada por la nodaria (3.10) es

$$II = e_{II} dt^2 + 2f_{II} dt dv + g_{II} dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes encontrados,

$$II = -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) + a)} dt^2 + \frac{b^2}{c \cosh(t) + a} dv^2.$$

Curvaturas principales. Como $F = 0$ y $f_{II} = 0$, las curvas coordenadas determinan direcciones principales. Por tanto, las curvaturas principales se calculan mediante

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{II}}{G}.$$

De la primera forma fundamental se obtuvo

$$E = \frac{a^2b^2}{(c \cosh(t) + a)^2}, \quad G = \frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{c \cosh(t) + a}.$$

Además, de la segunda forma fundamental se obtuvo

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) + a)}, \quad g_{II} = \frac{b^2}{c \cosh(t) + a}.$$

Calculamos primero la curvatura principal κ_1 :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{e_{II}}{E} \\ &= \frac{-\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) + a)}}{\frac{a^2b^2}{(c \cosh(t) + a)^2}} \\ &= -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) + a)} \cdot \frac{(c \cosh(t) + a)^2}{a^2b^2} \\ &= -\frac{c \cosh(t)(c \cosh(t) + a)}{a\Delta^2(t)}. \end{aligned}$$

Usando la identidad $\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a)$, se obtiene

$$\kappa_1 = -\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)}.$$

Calculamos ahora κ_2 :

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{g_{II}}{G} \\ &= \frac{\frac{b^2}{c \cosh(t) + a}}{\frac{b^2(c \cosh(t) - a)}{c \cosh(t) + a}} \\ &= \frac{1}{c \cosh(t) - a}. \end{aligned}$$

Por tanto, las curvaturas principales de la superficie generada por la nodaria son

$$\kappa_1 = -\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{c \cosh(t) - a}.$$

Curvatura de Gauss. La curvatura de Gauss se define como el producto de las curvaturas

principales:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$\begin{aligned} K &= \left(-\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)} \right) \left(\frac{1}{c \cosh(t) - a} \right) \\ &= -\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)^2}. \end{aligned}$$

Así,

$$K = -\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)^2}.$$

Curvatura media. La curvatura media se define como el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Sustituyendo κ_1 y κ_2 , se tiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) - a)} + \frac{1}{c \cosh(t) - a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-c \cosh(t) + a}{a(c \cosh(t) - a)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c \cosh(t) - a}{a(c \cosh(t) - a)} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H = -\frac{1}{2a}.$$

En consecuencia, la superficie generada por la nodaria (3.10) tiene curvatura media cons-

tante:

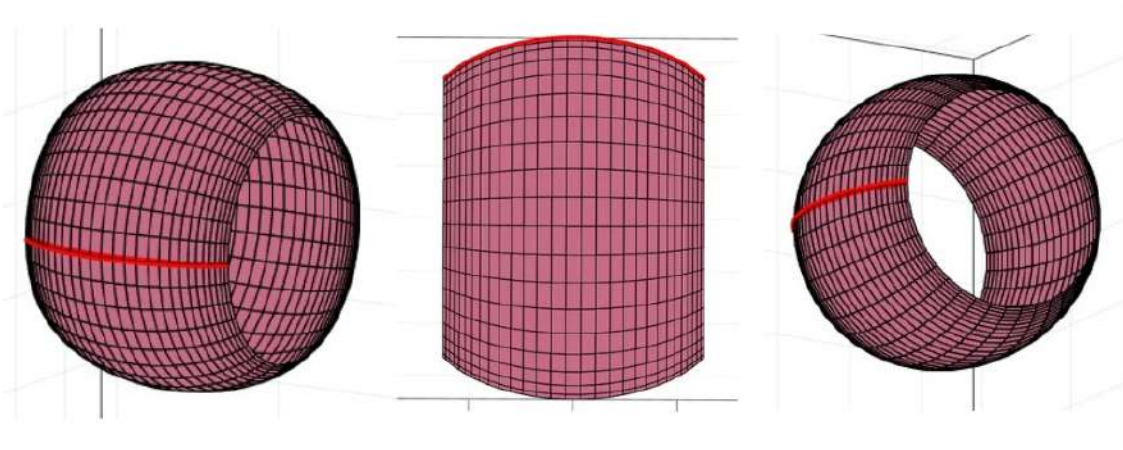
$$H \equiv -\frac{1}{2a}.$$

Observación 4.1 El signo de H depende de la orientación escogida para el vector normal unitario. Con la orientación opuesta, se obtendría $H = \frac{1}{2a}$.

NODOIDE 2

Figura 29

Nodoide generado por la nodaria $C_2(t)$



Consideremos la curva generatriz

$$C_2(t) = (g_n^2(t), f_n^2(t)),$$

donde

$$g_n^2(t) = \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2} du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}},$$

y

$$f_n^2(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}.$$

Definimos

$$\Delta(t) = \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}.$$

Entonces la curva generatriz puede escribirse como

$$C_2(t) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)}, \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \right).$$

Identificando $g(t) = g_n^2(t)$ con la componente axial y $f(t) = f_n^2(t)$ con la distancia al eje de revolución, la parametrización de la superficie generada al rotar la nodaria (3.11) alrededor del eje x es

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)).$$

Por tanto,

$$X(t, v) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)}, \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \cos(v), \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \sin(v) \right), \quad (4.4)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $v \in [0, 2\pi]$. Además, si $c > a > 0$, entonces $\Delta(t) > 0$ y $c \cosh(t) + a > 0$, por lo que $f(t) > 0$.

Para calcular los vectores tangentes, derivamos primero las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Como

$$\Delta(t) = (c^2 \cosh^2(t) - a^2)^{1/2},$$

se tiene

$$\Delta'(t) = \frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Delta(t)}.$$

Ahora, derivando:

$$f(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)},$$

por la regla del cociente, obtenemos

$$f'(t) = \frac{bc \sinh(t) \Delta(t) - b(c \cosh(t) + a) \Delta'(t)}{\Delta^2(t)}.$$

Sustituyendo $\Delta'(t)$, resulta

$$f'(t) = \frac{bc \sinh(t) \Delta^2(t) - bc^2 \sinh(t) \cosh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Delta^3(t)}.$$

Factorizando $bc \sinh(t)$, tenemos

$$f'(t) = \frac{bc \sinh(t) [\Delta^2(t) - c \cosh(t)(c \cosh(t) + a)]}{\Delta^3(t)}.$$

Como $\Delta^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2$, se obtiene

$$\Delta^2(t) - c \cosh(t)(c \cosh(t) + a) = -a(c \cosh(t) + a).$$

Luego,

$$f'(t) = -\frac{abc \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Delta^3(t)}.$$

Usando la identidad

$$\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

se simplifica a

$$f'(t) = -\frac{abc \sinh(t)}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)}.$$

Definimos ahora la función auxiliar

$$h_2(t) = \frac{-ab}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}(c \cosh(t) - a)} = \frac{-ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)}.$$

Con esta notación,

$$f'(t) = c \sinh(t) h_2(t).$$

Por otra parte, derivando $g(t)$ se obtiene

$$g'(t) = -\frac{ab^2}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)}.$$

Por tanto,

$$g'(t) = b h_2(t).$$

Vectores tangentes (derivadas parciales). A partir de

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

se tiene

$$X_t(t, v) = (g'(t), f'(t) \cos(v), f'(t) \sin(v)).$$

Sustituyendo $g'(t) = b h_2(t)$ y $f'(t) = c \sinh(t) h_2(t)$, obtenemos

$$X_t(t, v) = (b h_2(t), c \sinh(t) h_2(t) \cos(v), c \sinh(t) h_2(t) \sin(v)).$$

Factorizando $h_2(t)$,

$$X_t(t, v) = h_2(t) (b, c \sinh(t) \cos(v), c \sinh(t) \sin(v)).$$

Derivando ahora con respecto a v , se obtiene

$$X_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)).$$

Como $f(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)}$, entonces

$$X_v(t, v) = \left(0, -\frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \sin(v), \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \cos(v)\right).$$

Primera forma fundamental. Los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por $E = \langle X_t, X_t \rangle$, $F = \langle X_t, X_v \rangle$ y $G = \langle X_v, X_v \rangle$.

Calculamos primero el coeficiente E :

$$\begin{aligned} E &= \langle X_t, X_t \rangle \\ &= \langle h_2(t)(b, c \sinh(t) \cos(v), c \sinh(t) \sin(v)), h_2(t)(b, c \sinh(t) \cos(v), c \sinh(t) \sin(v)) \rangle \\ &= h_2^2(t) [b^2 + c^2 \sinh^2(t) \cos^2(v) + c^2 \sinh^2(t) \sin^2 v] \\ &= h_2^2(t) [b^2 + c^2 \sinh^2(t) (\cos^2(v) + \sin^2 v)]. \end{aligned}$$

Como $\cos^2(v) + \sin^2 v = 1$, se tiene

$$E = h_2^2(t) (b^2 + c^2 \sinh^2(t)).$$

Usando $b^2 = c^2 - a^2$, obtenemos

$$b^2 + c^2 \sinh^2(t) = c^2 - a^2 + c^2 \sinh^2(t).$$

Como $1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$, resulta

$$b^2 + c^2 \sinh^2(t) = c^2 \cosh^2(t) - a^2.$$

Por definición,

$$c^2 \cosh^2(t) - a^2 = \Delta^2(t).$$

Luego,

$$E = h_2^2(t) \Delta^2(t).$$

Sustituyendo

$$h_2(t) = \frac{-ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)},$$

obtenemos

$$E = \left(\frac{-ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)} \right)^2 \Delta^2(t).$$

Por tanto,

$$E = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) - a)^2}.$$

Por la identidad (2.3), el coeficiente mixto F se anula.

Finalmente, calculamos el coeficiente G :

$$G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Como

$$X_v(t, v) = (0, -f(t) \sin(v), f(t) \cos(v)),$$

tenemos

$$\begin{aligned}
G &= 0^2 + (-f(t) \sin(v))^2 + (f(t) \cos(v))^2 \\
&= f^2(t) \sin^2 v + f^2(t) \cos^2(v) \\
&= f^2(t)(\sin^2 v + \cos^2(v)).
\end{aligned}$$

Como $\sin^2 v + \cos^2(v) = 1$, se obtiene

$$G = f^2(t).$$

Sustituyendo la expresión de $f(t)$,

$$G = \left(\frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \right)^2.$$

Así,

$$G = \frac{b^2(c \cosh(t) + a)^2}{\Delta^2(t)}.$$

Usando nuevamente

$$\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a),$$

resulta

$$G = \frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{c \cosh(t) - a}.$$

En conclusión, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) - a)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{c \cosh(t) - a}.$$

Por consiguiente, la primera forma fundamental de la superficie generada por la nodaria (3.11) es

$$I = E dt^2 + 2F dt dv + G dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos,

$$I = \frac{a^2 b^2}{(c \cosh(t) - a)^2} dt^2 + \frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{c \cosh(t) - a} dv^2.$$

Vector normal unitario. Calculamos el producto cruz:

$$\begin{aligned} X_t \times X_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b h_2(t) & c \sinh(t) h_2(t) \cos(v) & c \sinh(t) h_2(t) \sin(v) \\ 0 & -f(t) \sin(v) & f(t) \cos(v) \end{vmatrix} \\ &= f(t) h_2(t) (c \sinh(t), -b \cos(v), -b \sin(v)). \end{aligned}$$

Su norma es

$$\|X_t \times X_v\| = |f(t) h_2(t)| \sqrt{c^2 \sinh^2(t) + b^2}.$$

Como $b^2 = c^2 - a^2$, entonces

$$c^2 \sinh^2(t) + b^2 = c^2 \sinh^2(t) + c^2 - a^2 = c^2 \cosh^2(t) - a^2 = \Delta^2(t).$$

Luego,

$$\|X_t \times X_v\| = |f(t) h_2(t)| \Delta(t).$$

Puesto que $h_2(t) < 0$, se tiene $|h_2(t)| = -h_2(t)$. Por tanto, tomando la orientación inducida por $X_t \times X_v$, el vector normal unitario es

$$\mathbf{n}(t, v) = \frac{X_t \times X_v}{\|X_t \times X_v\|}.$$

Así,

$$\mathbf{n}(t, v) = \frac{1}{\Delta(t)} (-c \sinh(t), b \cos(v), b \sin(v)).$$

Es decir,

$$\mathbf{n}(t, v) = \left(-\frac{c \sinh(t)}{\Delta(t)}, \frac{b \cos(v)}{\Delta(t)}, \frac{b \sin(v)}{\Delta(t)} \right).$$

Derivadas de segundo orden. Para calcular las derivadas de segundo orden, primero derivamos la función auxiliar $h_2(t)$. Como

$$h_2(t) = \frac{-ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)},$$

se obtiene

$$h'_2(t) = h_2(t) \left(-\frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Delta^2(t)} - \frac{c \sinh(t)}{c \cosh(t) - a} \right).$$

Equivalentemente,

$$h'_2(t) = \frac{abc \sinh(t)(2c \cosh(t) + a)}{\Delta^3(t)(c \cosh(t) - a)}.$$

Como $g'(t) = b h_2(t)$ y $f'(t) = c \sinh(t) h_2(t)$, se tiene

$$g''(t) = b h'_2(t),$$

y

$$f''(t) = c \cosh(t) h_2(t) + c \sinh(t) h'_2(t).$$

Por tanto, a partir de la parametrización

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

las derivadas segundas son

$$X_{tt}(t, v) = (bh'_2(t), (c \cosh(t) h_2(t) + c \sinh(t) h'_2(t)) \cos(v), (c \cosh(t) h_2(t) + c \sinh(t) h'_2(t)) \sin(v)),$$

$$X_{tv}(t, v) = (0, -c \sinh(t) h_2(t) \sin(v), c \sinh(t) h_2(t) \cos(v)),$$

y

$$X_{vv}(t, v) = (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)).$$

Como

$$f(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)},$$

también se puede escribir

$$X_{vv}(t, v) = \left(0, -\frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \cos(v), -\frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)} \sin(v) \right).$$

Segunda forma fundamental. Los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por $e_{II} = \langle X_{tt}, \mathbf{n} \rangle$, $f_{II} = \langle X_{tv}, \mathbf{n} \rangle$ y $g_{II} = \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle$.

Calculamos primero e_{II} :

$$\begin{aligned}
e_{II} &= \langle X_{tt}, \mathbf{n} \rangle \\
&= \left\langle (bh'_2, (c \cosh(t) h_2 + c \sinh(t) h'_2) \cos(v), (c \cosh(t) h_2 + c \sinh(t) h'_2) \sin(v)), \frac{1}{\Delta} (-c \sinh(t), b \cos(v), b \sin(v)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\Delta} [-bc \sinh(t) h'_2 + b(c \cosh(t) h_2 + c \sinh(t) h'_2) \cos^2(v) + b(c \cosh(t) h_2 + c \sinh(t) h'_2) \sin^2 v] \\
&= \frac{1}{\Delta} [-bc \sinh(t) h'_2 + b(c \cosh(t) h_2 + c \sinh(t) h'_2)(\cos^2(v) + \sin^2 v)] \\
&= \frac{1}{\Delta} [-bc \sinh(t) h'_2 + bc \cosh(t) h_2 + bc \sinh(t) h'_2] \\
&= \frac{bc \cosh(t) h_2(t)}{\Delta(t)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $h_2(t) = \frac{-ab}{\Delta(t)(c \cosh(t) - a)}$, resulta

$$e_{II} = -\frac{ab^2 c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) - a)}.$$

Por la identidad (2.4), el coeficiente mixto f_{II} se anula.

Finalmente, calculamos g_{II} :

$$\begin{aligned}
g_{II} &= \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle \\
&= \left\langle (0, -f(t) \cos(v), -f(t) \sin(v)), \frac{1}{\Delta(t)} (-c \sinh(t), b \cos(v), b \sin(v)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\Delta(t)} [-bf(t) \cos^2(v) - bf(t) \sin^2 v] \\
&= -\frac{bf(t)}{\Delta(t)} (\cos^2(v) + \sin^2 v) \\
&= -\frac{bf(t)}{\Delta(t)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $f(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Delta(t)}$, se obtiene

$$g_{II} = -\frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{\Delta^2(t)}.$$

Como $\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a)$, se simplifica a

$$g_{II} = -\frac{b^2}{c \cosh(t) - a}.$$

En conclusión, los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) - a)}, \quad f_{II} = 0, \quad g_{II} = -\frac{b^2}{c \cosh(t) - a}.$$

Por consiguiente, la segunda forma fundamental de la superficie generada por la nodaria (3.11) es

$$II = e_{II} dt^2 + 2f_{II} dt dv + g_{II} dv^2.$$

Sustituyendo los coeficientes encontrados,

$$II = -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) - a)} dt^2 - \frac{b^2}{c \cosh(t) - a} dv^2.$$

Curvaturas principales. Como $F = 0$ y $f_{II} = 0$, las curvas coordenadas determinan direcciones principales. Por tanto, las curvaturas principales se calculan mediante

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{II}}{G}.$$

De la primera forma fundamental se obtuvo

$$E = \frac{a^2b^2}{(c \cosh(t) - a)^2}, \quad G = \frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{c \cosh(t) - a}.$$

Además, de la segunda forma fundamental se obtuvo

$$e_{II} = -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) - a)}, \quad g_{II} = -\frac{b^2}{c \cosh(t) - a}.$$

Calculamos primero κ_1 :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{e_{II}}{E} \\ &= \frac{-\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) - a)}}{\frac{a^2b^2}{(c \cosh(t) - a)^2}} \\ &= -\frac{ab^2c \cosh(t)}{\Delta^2(t)(c \cosh(t) - a)} \cdot \frac{(c \cosh(t) - a)^2}{a^2b^2} \\ &= -\frac{c \cosh(t)(c \cosh(t) - a)}{a\Delta^2(t)}. \end{aligned}$$

Usando la identidad $\Delta^2(t) = (c \cosh(t) - a)(c \cosh(t) + a)$, se obtiene

$$\kappa_1 = -\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)}.$$

Calculamos ahora κ_2 :

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{g_{II}}{G} \\ &= \frac{-\frac{b^2}{c \cosh(t) - a}}{\frac{b^2(c \cosh(t) + a)}{c \cosh(t) - a}} \\ &= -\frac{1}{c \cosh(t) + a}. \end{aligned}$$

Por tanto, las curvaturas principales de la superficie generada por la nodaria (3.11) son

$$\kappa_1 = -\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{c \cosh(t) + a}.$$

Curvatura de Gauss. La curvatura de Gauss se define como el producto de las curvaturas

principales:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$\begin{aligned} K &= \left(-\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)} \right) \left(-\frac{1}{c \cosh(t) + a} \right) \\ &= \frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)^2}. \end{aligned}$$

Así,

$$K = \frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)^2}.$$

Curvatura media. La curvatura media se define como el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Sustituyendo κ_1 y κ_2 , se tiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c \cosh(t)}{a(c \cosh(t) + a)} - \frac{1}{c \cosh(t) + a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-c \cosh(t) - a}{a(c \cosh(t) + a)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{c \cosh(t) + a}{a(c \cosh(t) + a)} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H = -\frac{1}{2a}.$$

En consecuencia, la superficie generada por la nodaria (3.11) tiene curvatura media cons-

tante:

$$H \equiv -\frac{1}{2a}.$$

Observación 4.2 El signo de H depende de la orientación escogida para el vector normal unitario. Con la orientación opuesta, las curvaturas principales cambian de signo y se obtiene $H = \frac{1}{2a}$, mientras que la curvatura de Gauss K permanece igual.

NODOIDE COMPLETO

Figura 30

Nodoide completo

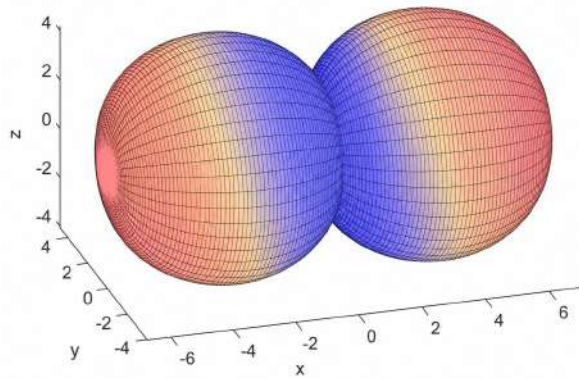
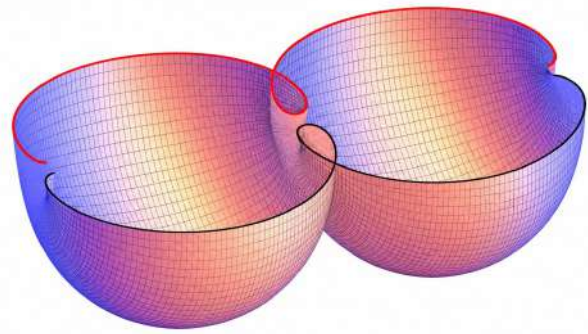


Figura 31

Parte inferior del Nodoida cortado por el plano xy



Ahora vamos a encontrar la información geométrica de la superficie de revolución que se obtiene al girar la nodaria completa alrededor del eje x . Recordemos que la nodaria completa está parametrizada por

$$\Gamma(s) = (g(s), f(s)), \quad s \in \mathbb{R},$$

donde

$$Q(s) = \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2(s)},$$

$$f(s) = Q(s) - a \cos(s),$$

y

$$g(s) = -a^2 b^2 \int_0^s \frac{\sin^2 u}{(c^2 - a^2 \sin^2 u)^{3/2}} du - \frac{a^2 \sin(s) \cos(s)}{Q(s)} + a \sin(s).$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, también podemos escribir

$$Q(s) = \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 s}.$$

Además, como $b > 0$, se tiene $Q(s) > |a \cos(s)|$ para todo s , y por tanto

$$f(s) = Q(s) - a \cos(s) > 0.$$

Esto garantiza que la curva generatriz no corta el eje de revolución.

La superficie de revolución generada al rotar la nodaria completa alrededor del eje x está dada por

$$X(s, v) = (g(s), f(s) \cos(v), f(s) \sin(v)), \quad s \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Derivadas de la curva generatriz.

Primero calculamos las derivadas de $f(s)$ y $g(s)$. Como

$$Q(s) = \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2 s},$$

se tiene

$$Q'(s) = -\frac{a^2 \sin(s) \cos(s)}{Q(s)}.$$

Entonces

$$f'(s) = Q'(s) + a \sin(s).$$

Sustituyendo $Q'(s)$,

$$f'(s) = -\frac{a^2 \sin(s) \cos(s)}{Q(s)} + a \sin(s).$$

Factorizando,

$$f'(s) = a \sin(s) \left(1 - \frac{a \cos(s)}{Q(s)} \right).$$

Como $f(s) = Q(s) - a \cos(s)$, obtenemos

$$f'(s) = \frac{af(s) \sin(s)}{Q(s)}.$$

Por otra parte, derivando la expresión de $g(s)$ se obtiene

$$g'(s) = \frac{af(s) \cos(s)}{Q(s)}.$$

Por tanto,

$$(f'(s))^2 + (g'(s))^2 = \left(\frac{af(s)}{Q(s)} \right)^2 (\sin^2 s + \cos^2 s).$$

Así,

$$(f'(s))^2 + (g'(s))^2 = \frac{a^2 f^2(s)}{Q^2(s)}.$$

Vectores tangentes (derivadas parciales).

Calculamos las derivadas parciales de $X(s, v)$. Derivando respecto a s , se obtiene

$$X_s(s, v) = (g'(s), f'(s) \cos(v), f'(s) \sin(v)).$$

Usando las expresiones de $f'(s)$ y $g'(s)$,

$$X_s(s, v) = \left(\frac{af(s) \cos(s)}{Q(s)}, \frac{af(s) \sin(s)}{Q(s)} \cos(v), \frac{af(s) \sin(s)}{Q(s)} \sin(v) \right).$$

Factorizando,

$$X_s(s, v) = \frac{af(s)}{Q(s)} (\cos(s), \sin(s) \cos(v), \sin(s) \sin(v)).$$

Derivando respecto a v , se obtiene

$$X_v(s, v) = (0, -f(s) \sin(v), f(s) \cos(v)).$$

Primera forma fundamental.

Los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por

$$E = \langle X_s, X_s \rangle, \quad F = \langle X_s, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Calculamos primero E :

$$E = \left\langle \frac{af}{Q}(\cos(s), \sin(s) \cos(v), \sin(s) \sin(v)), \frac{af}{Q}(\cos(s), \sin(s) \cos(v), \sin(s) \sin(v)) \right\rangle.$$

Entonces

$$E = \frac{a^2 f^2}{Q^2} (\cos^2 s + \sin^2 s \cos^2 v + \sin^2 s \sin^2 v).$$

Como $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, resulta

$$E = \frac{a^2 f^2}{Q^2} (\cos^2 s + \sin^2 s).$$

Por tanto,

$$E = \frac{a^2 f^2}{Q^2}.$$

Por la identidad (2.3), el coeficiente mixto F se anula.

Finalmente,

$$G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Como

$$X_v = (0, -f \sin(v), f \cos(v)),$$

se tiene

$$G = f^2 \sin^2 v + f^2 \cos^2 v.$$

Luego,

$$G = f^2.$$

En conclusión,

$$E = \frac{a^2 f^2}{Q^2}, \quad F = 0, \quad G = f^2.$$

Por tanto, la primera forma fundamental del nodoide completo es

$$I = \frac{a^2 f^2(s)}{Q^2(s)} ds^2 + f^2(s) dv^2.$$

Vector normal unitario.

Calculamos el producto cruz

$$X_s \times X_v.$$

Usando la forma general de una superficie de revolución,

$$X_s \times X_v = f(s) (f'(s), -g'(s) \cos(v), -g'(s) \sin(v)).$$

Sustituyendo $f'(s)$ y $g'(s)$,

$$X_s \times X_v = f(s) \left(\frac{a f(s) \sin(s)}{Q(s)}, -\frac{a f(s) \cos(s)}{Q(s)} \cos(v), -\frac{a f(s) \cos(s)}{Q(s)} \sin(v) \right).$$

Por tanto,

$$X_s \times X_v = \frac{a f^2(s)}{Q(s)} (\sin(s), -\cos(s) \cos(v), -\cos(s) \sin(v)).$$

Su norma es

$$\|X_s \times X_v\| = \frac{a f^2(s)}{Q(s)} \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s \cos^2 v + \cos^2 s \sin^2 v}.$$

Como $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, se obtiene

$$\|X_s \times X_v\| = \frac{a f^2(s)}{Q(s)}.$$

Así, el vector normal unitario es

$$n(s, v) = (\sin(s), -\cos(s) \cos(v), -\cos(s) \sin(v)).$$

Segunda forma fundamental.

Calculamos las derivadas de segundo orden. A partir de

$$X_s = (g', f' \cos(v), f' \sin(v)),$$

se obtiene

$$X_{ss} = (g'', f'' \cos(v), f'' \sin(v)).$$

Además,

$$X_{sv} = (0, -f' \sin(v), f' \cos(v)),$$

y

$$X_{vv} = (0, -f \cos(v), -f \sin(v)).$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por

$$e_{II} = \langle X_{ss}, n \rangle, \quad f_{II} = \langle X_{sv}, n \rangle, \quad g_{II} = \langle X_{vv}, n \rangle.$$

Para calcular e_{II} , usamos que

$$g'(s) = \frac{af(s) \cos(s)}{Q(s)}, \quad f'(s) = \frac{af(s) \sin(s)}{Q(s)}.$$

Definamos

$$\rho(s) = \frac{af(s)}{Q(s)}.$$

Entonces

$$g'(s) = \rho(s) \cos(s), \quad f'(s) = \rho(s) \sin(s).$$

Por tanto,

$$g''(s) = \rho'(s) \cos(s) - \rho(s) \sin(s),$$

y

$$f''(s) = \rho'(s) \sin(s) + \rho(s) \cos(s).$$

Ahora,

$$e_{II} = \langle X_{ss}, n \rangle.$$

Sustituyendo,

$$e_{II} = \langle (g'', f'' \cos(v), f'' \sin(v)), (\sin(s), -\cos(s) \cos(v), -\cos(s) \sin(v)) \rangle.$$

Entonces

$$e_{II} = g'' \sin(s) - f'' \cos(s) (\cos^2 v + \sin^2 v).$$

Como $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$,

$$e_{II} = g'' \sin(s) - f'' \cos(s).$$

Sustituyendo g'' y f'' ,

$$e_{II} = (\rho' \cos(s) - \rho \sin(s)) \sin(s) - (\rho' \sin(s) + \rho \cos(s)) \cos(s).$$

Desarrollando,

$$e_{II} = \rho' \sin(s) \cos(s) - \rho \sin^2 s - \rho' \sin(s) \cos(s) - \rho \cos^2 s.$$

Por tanto,

$$e_{II} = -\rho(\sin^2 s + \cos^2 s).$$

Luego,

$$e_{II} = -\rho(s).$$

Es decir,

$$e_{II} = -\frac{af(s)}{Q(s)}.$$

Por la identidad (2.4), el coeficiente mixto f_{II} se anula.

Finalmente,

$$g_{II} = \langle X_{vv}, n \rangle.$$

Sustituyendo,

$$g_{II} = \langle (0, -f \cos(v), -f \sin(v)), (\sin(s), -\cos(s) \cos(v), -\cos(s) \sin(v)) \rangle.$$

Luego,

$$g_{II} = f \cos(s) \cos^2 v + f \cos(s) \sin^2 v.$$

Así,

$$g_{II} = f \cos(s).$$

En conclusión,

$$e_{II} = -\frac{af(s)}{Q(s)}, \quad f_{II} = 0, \quad g_{II} = f(s) \cos(s).$$

Por tanto, la segunda forma fundamental es

$$II = -\frac{af(s)}{Q(s)} ds^2 + f(s) \cos(s) dv^2.$$

Curvaturas principales.

Como $F = 0$ y $f_{II} = 0$, las curvas coordenadas determinan direcciones principales. Por

tanto, las curvaturas principales son

$$\kappa_1 = \frac{e_{II}}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{II}}{G}.$$

Usando

$$e_{II} = -\frac{af}{Q}, \quad E = \frac{a^2 f^2}{Q^2},$$

se obtiene

$$\kappa_1 = \frac{-\frac{af}{Q}}{\frac{a^2 f^2}{Q^2}}.$$

Simplificando,

$$\kappa_1 = -\frac{Q}{af}.$$

Por otra parte,

$$\kappa_2 = \frac{f \cos(s)}{f^2}.$$

Luego,

$$\kappa_2 = \frac{\cos(s)}{f}.$$

Así, las curvaturas principales del nodoide completo son

$$\kappa_1(s) = -\frac{Q(s)}{af(s)}, \quad \kappa_2(s) = \frac{\cos(s)}{f(s)}.$$

Curvatura de Gauss.

La curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales:

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$K(s) = \left(-\frac{Q(s)}{af(s)} \right) \left(\frac{\cos(s)}{f(s)} \right).$$

Por tanto,

$$K(s) = -\frac{Q(s) \cos(s)}{af^2(s)}.$$

Como

$$f(s) = Q(s) - a \cos(s),$$

también podemos escribir

$$K(s) = -\frac{Q(s) \cos(s)}{a(Q(s) - a \cos(s))^2}.$$

Curvatura media.

La curvatura media es el promedio de las curvaturas principales:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Sustituyendo,

$$H(s) = \frac{1}{2} \left(-\frac{Q(s)}{af(s)} + \frac{\cos(s)}{f(s)} \right).$$

Factorizando,

$$H(s) = \frac{1}{2f(s)} \left(\cos(s) - \frac{Q(s)}{a} \right).$$

Como

$$f(s) = Q(s) - a \cos(s),$$

se tiene

$$a \cos(s) - Q(s) = -f(s).$$

Por tanto,

$$\cos(s) - \frac{Q(s)}{a} = -\frac{f(s)}{a}.$$

Luego,

$$H(s) = \frac{1}{2f(s)} \left(-\frac{f(s)}{a} \right).$$

Finalmente,

$$H(s) = -\frac{1}{2a}.$$

4.2 Teorema de clasificación

En las secciones anteriores se construyeron explícitamente las familias no elementales de Delaunay: el catenoide, el onduloide y el nodoide. Junto con los casos elementales —el plano, la esfera y el cilindro—, se obtiene la lista completa de superficies de revolución con curvatura media constante.

Teorema (Delaunay, 1841). (4) Toda superficie conexa y completa de revolución, inmersa en $\mathbb{R}^3$, con curvatura media constante, es, salvo movimiento rígido y cambio de orientación, una de las siguientes: el plano, la esfera, el cilindro circular recto, el catenoide, el onduloide o el nodoide.

Demostración. Sea S una superficie conexa y completa de revolución en $\mathbb{R}^3$, con curvatura media constante H . Salvo un movimiento rígido, podemos suponer que el eje de revolución es el eje x . Por tanto, en los puntos donde la curva generatriz no corta el eje de revolución, la superficie puede parametrizarse como

$$X(t, v) = (g(t), f(t) \cos(v), f(t) \sin(v)),$$

donde $f(t) > 0$ representa la distancia al eje de revolución y $g(t)$ representa la coordenada axial.

Reparametrizamos la curva generatriz por longitud de arco. Así,

$$(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1.$$

Por la primera integral obtenida anteriormente en (2.9), existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(t)g'(t) = Hf(t)^2 + C.$$

Como $f(t) > 0$ en el intervalo considerado, podemos escribir

$$g'(t) = Hf(t) + \frac{C}{f(t)}.$$

Sustituyendo esta expresión en la condición de longitud de arco (2.5), se obtiene

$$(f'(t))^2 + \left(Hf(t) + \frac{C}{f(t)}\right)^2 = 1.$$

Por tanto,

$$(f'(t))^2 = 1 - \left(Hf(t) + \frac{C}{f(t)}\right)^2.$$

Esta ecuación será el punto de partida de la clasificación. El análisis se realiza en los intervalos donde $f(t) > 0$. Si la curva generatriz llega al eje de revolución, es decir, si $f(t) = 0$ en algún punto, la parametrización de revolución deja de ser regular en esas coordenadas; sin embargo, la superficie puede completarse suavemente agregando el punto correspondiente del eje. Esta precisión será importante en los casos del plano y de la esfera.

Caso 1: $H = 0$.

Supongamos primero que la curvatura media constante es nula. Entonces la primera integral (2.9) se reduce a

$$f(t)g'(t) = C.$$

Como $f(t) > 0$, se obtiene

$$g'(t) = \frac{C}{f(t)}.$$

La ecuación para f queda

$$(f'(t))^2 = 1 - \left(\frac{C}{f(t)}\right)^2.$$

Analizamos ahora los posibles valores de la constante C .

Subcaso 1.1: $C = 0$.

Si $C = 0$, entonces

$$f(t)g'(t) = 0.$$

Como $f(t) > 0$ en el intervalo considerado, necesariamente

$$g'(t) = 0.$$

Por tanto, existe una constante g_0 tal que

$$g(t) = g_0.$$

Usando la condición de longitud de arco,

$$(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1,$$

y como $g'(t) = 0$, se tiene

$$(f'(t))^2 = 1.$$

Luego,

$$f'(t) = \pm 1.$$

Por consiguiente,

$$f(t) = \pm t + f_0,$$

para alguna constante f_0 . Esto significa que, en el plano meridiano, la curva generatriz es una recta perpendicular al eje de revolución, contenida en la recta $g = g_0$. Al rotar esta recta alrededor del eje x , se obtiene una porción del plano perpendicular al eje de revolución, $x = g_0$

En efecto, la parametrización

$$X(t, v) = (g_0, f(t) \cos(v), f(t) \sin(v))$$

describe dicho plano en coordenadas polares, pero solamente en la región donde $f(t) > 0$. El punto correspondiente a $f = 0$, es decir, el punto del eje de revolución, no está cubierto por estas coordenadas. Como la superficie considerada es completa, se agrega ese punto por continuidad suave, obteniendo el plano completo

$$x = g_0.$$

Por tanto, en el caso $H = 0$ y $C = 0$, la superficie es un plano.

Subcaso 1.2: $C \neq 0$.

Supongamos ahora que $C \neq 0$. Definimos $b = |C| > 0$.

La primera integral (2.9) da

$$g'(t) = \frac{C}{f(t)}.$$

Además,

$$(f'(t))^2 = 1 - \frac{C^2}{f(t)^2} = 1 - \frac{b^2}{f(t)^2}.$$

Por tanto,

$$(f'(t))^2 = \frac{f(t)^2 - b^2}{f(t)^2}.$$

Como $f(t) > 0$, esto implica que las soluciones reales deben satisfacer

$$f(t) \geq b.$$

Para identificar la curva generatriz, consideramos a f como función de la coordenada axial g . Como

$$g'(t) = \frac{C}{f(t)},$$

y

$$f'(t) = \pm \frac{\sqrt{f(t)^2 - b^2}}{f(t)},$$

se tiene, en los intervalos donde $f' \neq 0$,

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(t)}{g'(t)} = \pm \frac{\sqrt{f(t)^2 - b^2}}{C}.$$

Como $C = \pm b$, el signo puede absorberse mediante una inversión de la orientación del eje x . Por tanto, salvo orientación, podemos escribir

$$\frac{df}{dg} = \frac{\sqrt{f^2 - b^2}}{b}.$$

Separando variables,

$$\frac{b df}{\sqrt{f^2 - b^2}} = dg.$$

Integrando en una rama donde $f > b$, se obtiene

$$b \operatorname{arcosh} \left(\frac{f}{b} \right) = g - g_0,$$

para alguna constante g_0 . De aquí,

$$\operatorname{arcosh} \left(\frac{f}{b} \right) = \frac{g - g_0}{b}.$$

Aplicando coseno hiperbólico en ambos lados, obtenemos

$$\frac{f}{b} = \cosh \left(\frac{g - g_0}{b} \right).$$

Por tanto,

$$f(g) = b \cosh \left(\frac{g - g_0}{b} \right).$$

La integración anterior describe una de las ramas de la curva, correspondiente a $f > b$. El punto

$$f = b$$

corresponde al mínimo de la catenaria, donde $f' = 0$. Las dos ramas obtenidas se unen suavemente en ese punto mínimo, dando la catenaria completa.

Equivalentemente, tomando

$$u = \frac{g - g_0}{b},$$

la curva generatriz puede escribirse como

$$(g(u), f(u)) = (g_0 + bu, b \cosh(u)).$$

Al rotar esta catenaria alrededor del eje x , se obtiene el catenoide

$$X(u, v) = (g_0 + bu, b \cosh(u) \cos(v), b \cosh(u) \sin(v)).$$

Como $u \in \mathbb{R}$ y $b \cosh(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, esta superficie no corta el eje de revolución y se extiende completamente para todo u . Por tanto, en el caso $H = 0$ y $C \neq 0$, la superficie es un catenoide.

En conclusión, cuando $H = 0$, las únicas posibilidades son el plano, si $C = 0$, y el catenoide, si $C \neq 0$.

Caso 2: $H \neq 0$.

Supongamos ahora que la curvatura media constante no es nula. Como el signo de la curvatura media depende de la orientación escogida para el campo normal unitario, podemos elegir dicha orientación de manera que $H > 0$. Esta elección no cambia la superficie como conjunto geométrico; únicamente fija el signo con el cual se mide la curvatura media. En lo que sigue, la constante C es la constante de integración correspondiente a esta elección de orientación.

Partimos nuevamente de la primera integral

$$f(t)g'(t) = Hf(t)^2 + C.$$

Como $f(t) > 0$ en el intervalo considerado, se tiene

$$g'(t) = Hf(t) + \frac{C}{f(t)}.$$

Usando la condición de longitud de arco,

$$(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1,$$

obtenemos

$$(f'(t))^2 = 1 - \left(Hf(t) + \frac{C}{f(t)} \right)^2.$$

Para analizar las soluciones, definimos

$$R(f) = 1 - \left(Hf + \frac{C}{f} \right)^2.$$

Entonces el radio f debe satisfacer

$$(f'(t))^2 = R(f(t)).$$

Por tanto, una solución real solo puede existir para valores $f > 0$ tales que

$$R(f) \geq 0,$$

es decir,

$$\left| Hf + \frac{C}{f} \right| \leq 1.$$

Esta desigualdad es la restricción fundamental que determina los posibles perfiles de la curva generatriz. Analizaremos los casos según el valor de la constante C .

Subcaso 2.1: $C = 0$.

Si $C = 0$, la primera integral (2.9) se reduce a

$$f(t)g'(t) = Hf(t)^2.$$

Como $f(t) > 0$, se obtiene

$$g'(t) = Hf(t).$$

La ecuación para f queda

$$(f'(t))^2 = 1 - H^2 f(t)^2.$$

En consecuencia, necesariamente

$$0 < f(t) \leq \frac{1}{H}.$$

En los intervalos donde $f'(t) \neq 0$, podemos escribir

$$f'(t) = \pm \sqrt{1 - H^2 f(t)^2}.$$

Separando variables,

$$\frac{df}{\sqrt{1 - H^2 f^2}} = \pm dt.$$

Integrando,

$$\frac{1}{H} \arcsin(Hf) = \pm t + t_0,$$

para alguna constante t_0 . Equivalentemente,

$$\arcsin(Hf) = \pm H(t - t_0).$$

Por tanto, salvo una elección de orientación del parámetro,

$$f(t) = \frac{1}{H} \sin(H(t - t_0)).$$

Tomamos el intervalo

$$0 < H(t - t_0) < \pi,$$

de manera que

$$f(t) > 0.$$

Ahora, como

$$g'(t) = Hf(t),$$

se obtiene

$$g'(t) = \sin(H(t - t_0)).$$

Integrando,

$$g(t) = g_0 - \frac{1}{H} \cos(H(t - t_0)),$$

para alguna constante g_0 .

Por tanto, la curva generatriz puede escribirse como

$$(g(t), f(t)) = \left(g_0 - \frac{1}{H} \cos(H(t - t_0)), \frac{1}{H} \sin(H(t - t_0)) \right).$$

De esta parametrización se deduce que

$$(g(t) - g_0)^2 + f(t)^2 = \frac{1}{H^2} \cos^2(H(t - t_0)) + \frac{1}{H^2} \sin^2(H(t - t_0)).$$

Luego,

$$(g(t) - g_0)^2 + f(t)^2 = \frac{1}{H^2}.$$

Así, la curva generatriz es un semicírculo de radio

$$\frac{1}{H}$$

centrado en $(g_0, 0)$ en el plano meridiano.

Al rotar este semicírculo alrededor del eje x , se obtiene una esfera de radio

$$\frac{1}{H}$$

centrada en $(g_0, 0, 0)$. La parametrización de revolución es regular únicamente en los puntos donde $f(t) > 0$, es decir, fuera de los extremos del semicírculo. En dichos extremos se tiene

$$f(t) = 0,$$

lo cual corresponde a los polos de la esfera sobre el eje de revolución. Aunque las coordenadas de revolución degeneran en esos puntos, la superficie se completa suavemente agregando ambos polos.

Por tanto, en el caso $H \neq 0$ y $C = 0$, la superficie obtenida es una esfera.

Subcaso 2.2: $C < 0$.

Como se explicó anteriormente, al cambiar la orientación del normal unitario, la curvatura media cambia de signo. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos trabajar con la orientación para la cual

$$H > 0.$$

Siguiendo la notación de Delaunay, escribimos

$$H = \frac{1}{2a}, \quad a > 0.$$

En la sección dedicada a la conexión con la formulación de Delaunay se mostró que la primera integral

$$f(s)g'(s) = Hf^2(s) + C$$

puede reescribirse, después de una elección adecuada de orientación axial y de un cambio de notación, mediante las ecuaciones paramétricas

$$y_{\varepsilon}(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi},$$

y

$$x_{\varepsilon}(\varphi) = \beta + a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \int \frac{a \alpha d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi}},$$

donde

$$\varepsilon \in \{-1, 1\},$$

β es una constante de traslación axial y

$$\alpha = -\frac{2C}{a}.$$

Como

$$H = \frac{1}{2a},$$

también se tiene

$$\alpha = -4HC.$$

En el presente subcaso estamos suponiendo que

$$C < 0.$$

Puesto que $H > 0$, se sigue que

$$-4HC > 0.$$

Por tanto,

$$\alpha > 0.$$

Así, podemos escribir

$$1 + \alpha = e^2, \quad e > 1.$$

Definimos entonces

$$e = \frac{c}{a}, \quad c > a,$$

y, equivalentemente,

$$\alpha = e^2 - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}.$$

Tomamos

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Entonces

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2}.$$

Con esta notación,

$$\sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi} = \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}.$$

Trabajaremos con la rama de radio positivo, es decir, con $\varepsilon = 1$. Por tanto,

$$y(\varphi) = -a \cos \varphi + a\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$

y

$$x(\varphi) = \beta + a \sin \varphi - a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} + \int \frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

A partir de estas ecuaciones se obtienen las dos ramas hiperbólicas C_1 y C_2 .

Obtención de C_1 .

Consideremos el cambio de parámetro

$$\tan \varphi = \frac{c}{b} \sinh(t),$$

tomando la rama angular dada por

$$\cos \varphi = \frac{b}{\Phi(t)}, \quad \sin \varphi = \frac{c \sinh(t)}{\Phi(t)},$$

donde

$$\Phi(t) = \sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}.$$

En efecto,

$$1 + \tan^2 \varphi = 1 + \frac{c^2}{b^2} \sinh^2 t = \frac{b^2 + c^2 \sinh^2 t}{b^2}.$$

Como $b^2 = c^2 - a^2$, tenemos

$$b^2 + c^2 \sinh^2 t = c^2 - a^2 + c^2 \sinh^2 t = c^2 \cosh^2 t - a^2 = \Phi^2(t).$$

Usando la identidad trigonométrica

$$1 + \tan^2 \varphi = \sec^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

se tiene que,

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{\Phi^2(t)}{b^2}.$$

Por consiguiente,

$$\cos^2 \varphi = \frac{b^2}{\Phi^2(t)}.$$

Tomando la rama angular para la cual $\cos \varphi > 0$, queda

$$\cos \varphi = \frac{b}{\Phi(t)}.$$

Por tanto,

$$\cos \varphi = \frac{b}{\Phi(t)}, \quad \sin \varphi = \frac{c \sinh(t)}{\Phi(t)}.$$

Además,

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2 \sinh^2 t}{\Phi^2(t)}}.$$

Llevando a común denominador,

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{c}{a\Phi(t)} \sqrt{\Phi^2(t) - a^2 \sinh^2 t}.$$

Como

$$\Phi^2(t) = c^2 \cosh^2 t - a^2,$$

se tiene

$$\Phi^2(t) - a^2 \sinh^2 t = c^2 \cosh^2 t - a^2 - a^2 \sinh^2 t.$$

Usando $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, resulta

$$\Phi^2(t) - a^2 \sinh^2 t = (c^2 - a^2) \cosh^2 t = b^2 \cosh^2 t.$$

Luego,

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{bc \cosh(t)}{a\Phi(t)}.$$

Sustituyendo en la coordenada radial,

$$y = -a \cos \varphi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$

obtenemos

$$y = -a \frac{b}{\Phi(t)} + a \frac{bc \cosh(t)}{a\Phi(t)}.$$

Por tanto,

$$y = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}.$$

Así,

$$f_n^1(t) = \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}.$$

Ahora transformamos la coordenada axial. Primero,

$$a \sin \varphi = \frac{ac \sinh(t)}{\Phi(t)}.$$

Además,

$$a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = a \left(\frac{c}{b} \sinh(t) \right) \left(\frac{bc \cosh(t)}{a\Phi(t)} \right).$$

Entonces

$$a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Phi(t)}.$$

Por tanto,

$$a \sin \varphi - a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{ac \sinh(t) - c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Phi(t)}.$$

Factorizando,

$$a \sin \varphi - a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = -\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}.$$

Finalmente, del cambio

$$\tan \varphi = \frac{c}{b} \sinh(t)$$

se obtiene

$$d\varphi = \frac{bc \cosh(t)}{\Phi^2(t)} dt.$$

Además,

$$\cos^2 \varphi = \frac{b^2}{\Phi^2(t)}$$

y

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{bc \cosh(t)}{a\Phi(t)}.$$

Como

$$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2},$$

se sigue que

$$\frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = \Phi(t) dt.$$

Así,

$$\int \frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = \int \Phi(t) dt.$$

Escogiendo el origen de la integral de manera compatible con $t = 0$, obtenemos

$$x = \beta + \int_0^t \Phi(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}.$$

Por tanto, salvo una traslación axial β , la primera rama queda dada por

$$C_1(t) = \left(\int_0^t \Phi(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)}, \frac{b(c \cosh(t) - a)}{\Phi(t)} \right).$$

Obtención de C_2 .

Para obtener la segunda rama con radio positivo, no cambiamos el signo algebraico de la raíz, sino que tomamos la rama angular opuesta. Consideramos nuevamente

$$\tan \varphi = \frac{c}{b} \sinh(t),$$

pero ahora con

$$\cos \varphi = -\frac{b}{\Phi(t)}, \quad \sin \varphi = -\frac{c \sinh(t)}{\Phi(t)}.$$

Esta elección corresponde, localmente, a tomar

$$\varphi = \pi + \arctan\left(\frac{c}{b} \sinh(t)\right).$$

Con esta rama se sigue cumpliendo

$$\tan \varphi = \frac{c}{b} \sinh(t).$$

Además, como $\sin^2 \varphi$ no cambia, tenemos de nuevo

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{bc \cosh(t)}{a\Phi(t)}.$$

Sustituyendo en la coordenada radial,

$$y = -a \cos \varphi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$

obtenemos

$$y = -a \left(-\frac{b}{\Phi(t)} \right) + a \frac{bc \cosh(t)}{a\Phi(t)}.$$

Por tanto,

$$y = \frac{b(a + c \cosh(t))}{\Phi(t)}.$$

Así,

$$f_n^2(t) = \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)}.$$

Ahora, para la coordenada axial,

$$a \sin \varphi = -\frac{ac \sinh(t)}{\Phi(t)}.$$

Además,

$$a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Phi(t)}.$$

Luego,

$$a \sin \varphi - a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = -\frac{ac \sinh(t)}{\Phi(t)} - \frac{c^2 \sinh(t) \cosh(t)}{\Phi(t)}.$$

Factorizando,

$$a \sin \varphi - a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = -\frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)}.$$

El término integral se transforma de la misma manera, pues depende de $\cos^2 \varphi$, $\sin^2 \varphi$ y $d\varphi$.

Por tanto,

$$\frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = \Phi(t) dt.$$

Escogiendo el origen de la primitiva en la rama angular correspondiente, cualquier constante adicional se absorbe en la traslación axial β . Así,

$$x = \beta + \int_0^t \Phi(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)}.$$

Por tanto, salvo una traslación axial β , la segunda rama queda dada por

$$C_2(t) = \left(\int_0^t \Phi(u) du - \frac{c \sinh(t)(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)}, \frac{b(c \cosh(t) + a)}{\Phi(t)} \right).$$

En conclusión, cuando $C < 0$, la condición $\alpha > 0$ permite escribir las ecuaciones paramétricas de Delaunay en términos de $e = c/a > 1$. A partir de ellas se obtienen las dos ramas C_1 y C_2 , que corresponden a las ruletas hiperbólicas. Al rotar estas curvas alrededor del eje de revolución, se obtienen las superficies nodoides.

Subcaso 2.3: $C > 0$.

Supongamos ahora que

$$C > 0.$$

La primera integral (2.9) queda

$$g'(t) = Hf(t) + \frac{C}{f(t)}.$$

Por tanto,

$$(f'(t))^2 = 1 - \left(Hf(t) + \frac{C}{f(t)} \right)^2.$$

Definimos, para $f > 0$,

$$B(f) = Hf + \frac{C}{f}.$$

Entonces

$$(f')^2 = 1 - B(f)^2.$$

Como $H > 0$, $C > 0$ y $f > 0$, se tiene

$$B(f) > 0.$$

Por tanto, la condición para que existan soluciones reales es

$$B(f) \leq 1.$$

Estudiemos la función B . Su derivada es

$$B'(f) = H - \frac{C}{f^2}.$$

Así,

$$B'(f) = 0$$

si y solo si

$$f^2 = \frac{C}{H}.$$

Como $f > 0$, el único punto crítico es

$$f_0 = \sqrt{\frac{C}{H}}.$$

Además,

$$B''(f) = \frac{2C}{f^3} > 0.$$

Por tanto, f_0 es un mínimo global de B .

Evaluando B en f_0 , se obtiene

$$B(f_0) = H\sqrt{\frac{C}{H}} + \frac{C}{\sqrt{C/H}}.$$

Luego,

$$B(f_0) = \sqrt{HC} + \sqrt{HC} = 2\sqrt{HC}.$$

Así, el mínimo global de B es

$$2\sqrt{HC}.$$

Para que exista algún valor de $f > 0$ tal que $B(f) \leq 1$, es necesario y suficiente que

$$2\sqrt{HC} \leq 1.$$

Equivalentemente,

$$4HC \leq 1.$$

Como $H > 0$, esto equivale a

$$C \leq \frac{1}{4H}.$$

Por tanto, el caso $C > 0$ se divide en dos posibilidades:

$$0 < C < \frac{1}{4H}, \quad C = \frac{1}{4H}.$$

Subcaso 2.31: $0 < C < \frac{1}{4H}$.

En este subcaso seguimos trabajando con las ecuaciones paramétricas obtenidas en la conexión con la formulación de Delaunay. Allí se vio que, a partir de la primera integral

$$f(s)g'(s) = Hf^2(s) + C,$$

y usando la notación clásica

$$H = \frac{1}{2a}, \quad a > 0,$$

se llega a las ecuaciones paramétricas

$$y_\varepsilon(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi},$$

y

$$x_\varepsilon(\varphi) = \beta + a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \int \frac{a\alpha d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi}},$$

donde

$$\varepsilon \in \{-1, 1\},$$

β es una constante de traslación axial, y

$$\alpha = -\frac{2C}{a}.$$

Como

$$H = \frac{1}{2a},$$

también se tiene

$$\alpha = -4HC.$$

En el presente subcaso suponemos que

$$0 < C < \frac{1}{4H}.$$

Multiplicando por $4H > 0$, se obtiene

$$0 < 4HC < 1.$$

Por tanto,

$$-1 < -4HC < 0.$$

Como $\alpha = -4HC$, concluimos que

$$-1 < \alpha < 0.$$

Así, podemos escribir

$$1 + \alpha = e^2, \quad 0 < e < 1.$$

Definimos entonces

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 < c < a.$$

De esta manera,

$$\alpha = e^2 - 1 = \frac{c^2}{a^2} - 1 = -\frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Tomamos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Entonces

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \alpha = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Con esta notación,

$$\sqrt{1 + \alpha - \sin^2 \varphi} = \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas quedan

$$y_\varepsilon(\varphi) = -a \cos \varphi + \varepsilon a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$

y

$$x_\varepsilon(\varphi) = \beta + a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \int \frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

A continuación se obtiene una de las ruletas elípticas a partir de estas ecuaciones.

Obtención de la ruleta elíptica B_2 por ramas locales.

Definimos

$$\Delta(t) = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t},$$

y hacemos el cambio

$$\tan \varphi = \frac{c}{b} \sin(t).$$

Escogemos la rama angular dada por

$$\cos \varphi = -\frac{b}{\Delta(t)}, \quad \sin \varphi = -\frac{c \sin(t)}{\Delta(t)}.$$

Esta elección es compatible con el cambio anterior, pues

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-\frac{c \sin(t)}{\Delta(t)}}{-\frac{b}{\Delta(t)}} = \frac{c}{b} \sin(t).$$

Ahora calculamos la raíz que aparece en las ecuaciones de Delaunay:

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2 \sin^2 t}{\Delta^2(t)}}.$$

Llevando a común denominador,

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{c}{a\Delta(t)} \sqrt{\Delta^2(t) - a^2 \sin^2 t}.$$

Como

$$\Delta^2(t) = a^2 - c^2 \cos^2 t,$$

se tiene

$$\Delta^2(t) - a^2 \sin^2 t = a^2 - c^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t.$$

Usando la identidad

$$1 - \sin^2 t = \cos^2 t,$$

obtenemos

$$\Delta^2(t) - a^2 \sin^2 t = a^2 \cos^2 t - c^2 \cos^2 t.$$

Por tanto,

$$\Delta^2(t) - a^2 \sin^2 t = (a^2 - c^2) \cos^2 t = b^2 \cos^2 t.$$

Luego,

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{bc |\cos(t)|}{a\Delta(t)}.$$

Esta igualdad muestra que la obtención debe realizarse por ramas locales. Sea I un intervalo en el cual $\cos(t) \neq 0$ y su signo permanece constante. Escribimos

$$\sigma = \operatorname{sgn}(\cos(t)), \quad \sigma \in \{-1, 1\}.$$

En dicho intervalo tomamos

$$\varepsilon = -\sigma.$$

Entonces

$$\varepsilon |\cos(t)| = -\sigma |\cos(t)| = -\cos(t).$$

Sustituyendo en la componente radial, tenemos

$$y_\varepsilon(t) = -a \left(-\frac{b}{\Delta(t)} \right) + \varepsilon a \left(\frac{bc |\cos(t)|}{a\Delta(t)} \right).$$

Por tanto,

$$y_\varepsilon(t) = \frac{ab}{\Delta(t)} + \varepsilon \frac{bc |\cos(t)|}{\Delta(t)}.$$

Como

$$\varepsilon |\cos(t)| = -\cos(t),$$

se sigue que

$$y_\varepsilon(t) = \frac{ab}{\Delta(t)} - \frac{bc \cos(t)}{\Delta(t)}.$$

Así,

$$y_\varepsilon(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}.$$

Esta es la componente radial de la ruleta elíptica B_2 .

Estudiemos ahora la componente axial. Primero,

$$a \sin \varphi = a \left(-\frac{c \sin(t)}{\Delta(t)} \right) = -\frac{ac \sin(t)}{\Delta(t)}.$$

Además,

$$a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = a \left(\frac{c}{b} \sin(t) \right) \left(\frac{bc |\cos(t)|}{a \Delta(t)} \right).$$

Luego,

$$a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{c^2 \sin(t) |\cos(t)|}{\Delta(t)}.$$

Multiplicando por

$$\varepsilon = -\sigma,$$

obtenemos

$$\varepsilon a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = -\frac{c^2 \sin(t) \cos(t)}{\Delta(t)}.$$

Por tanto,

$$a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = -\frac{ac \sin(t)}{\Delta(t)} + \frac{c^2 \sin(t) \cos(t)}{\Delta(t)}.$$

Factorizando,

$$a \sin \varphi - \varepsilon a \tan \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = -\frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}.$$

Falta transformar el término integral. Del cambio

$$\tan \varphi = \frac{c}{b} \sin(t)$$

se obtiene, derivando respecto a t ,

$$\sec^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{b} \cos(t).$$

Como

$$\cos^2 \varphi = \frac{b^2}{\Delta^2(t)},$$

entonces

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{b} \cos(t) \frac{b^2}{\Delta^2(t)} = \frac{bc \cos(t)}{\Delta^2(t)}.$$

Por tanto,

$$d\varphi = \frac{bc \cos(t)}{\Delta^2(t)} dt.$$

Ahora usamos

$$\cos^2 \varphi = \frac{b^2}{\Delta^2(t)}, \quad \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{bc |\cos(t)|}{a\Delta(t)},$$

y

$$a(e^2 - 1) = -\frac{b^2}{a}.$$

Entonces,

$$\frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = \frac{-\frac{b^2}{a} \frac{bc \cos(t)}{\Delta^2(t)} dt}{\frac{b^2}{\Delta^2(t)} \frac{bc |\cos(t)|}{a\Delta(t)}}.$$

Simplificando,

$$\frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = -\frac{\cos(t)}{|\cos(t)|} \Delta(t) dt.$$

Como

$$\frac{\cos(t)}{|\cos(t)|} = \operatorname{sgn}(\cos(t)) = \sigma,$$

queda

$$\frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = -\sigma \Delta(t) dt.$$

Multiplicando por

$$\varepsilon = -\sigma,$$

se obtiene

$$\varepsilon \frac{a(e^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}} = \Delta(t) dt.$$

Por consiguiente, el término integral aporta

$$\int_0^t \Delta(u) du,$$

salvo una constante de integración, la cual se absorbe en la constante β .

Así, en cada intervalo donde el signo de $\cos(t)$ permanece fijo, obtenemos

$$x_\varepsilon(t) = \beta + \int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta(t)},$$

y

$$y_\varepsilon(t) = \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}.$$

Tomando $\beta = 0$, resulta

$$B_2(t) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sin(t)(a - c \cos(t))}{\Delta(t)}, \frac{b(a - c \cos(t))}{\Delta(t)} \right).$$

La deducción anterior es local porque el signo de $\cos(t)$ cambia y porque la raíz

$$\sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}$$

se anula cuando

$$\cos(t) = 0.$$

Sin embargo, la expresión final de $B_2(t)$ está bien definida para todo t . Por ello, la parametrización global se obtiene empalmando por continuidad las ramas locales correspondientes.

Aclaración sobre la ruleta elíptica B_1 .

La otra ruleta elíptica considerada previamente es

$$B_1(t) = \left(\int_0^t \Delta(u) du - \frac{c \sin(t)(a + c \cos(t))}{\Delta(t)}, \frac{b(a + c \cos(t))}{\Delta(t)} \right).$$

Con las convenciones adoptadas en la deducción anterior, para recuperar la componente radial de B_1 sería necesario tomar, por ramas,

$$\varepsilon = \sigma = \text{sgn}(\cos(t)).$$

En efecto, con esta elección se obtiene

$$y_\varepsilon(t) = \frac{ab}{\Delta(t)} + \frac{bc \cos(t)}{\Delta(t)} = \frac{b(a + c \cos(t))}{\Delta(t)}.$$

Sin embargo, con esa misma elección, el término integral de la componente axial cambia de signo.

En efecto,

$$\varepsilon \frac{a(e_{\text{el}}^2 - 1) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e_{\text{el}}^2 - \sin^2 \varphi}} = -\Delta(t) dt.$$

Por tanto, la coordenada axial resultante contiene

$$- \int_0^t \Delta(u) du$$

en lugar de

$$\int_0^t \Delta(u) du.$$

Esta diferencia no puede corregirse mediante una traslación axial, ya que no es una constante, sino una función del parámetro t .

Por esta razón, con las elecciones de rama angular, orientación y signo utilizadas en esta deducción, se recupera directamente la ruleta B_2 , pero no la parametrización exacta de B_1 . No obstante, esto no deja incompleto el caso elíptico del teorema de clasificación. El objetivo de esta

parte no es recuperar simultáneamente todas las parametrizaciones posibles de la ondularia, sino identificar el subcaso

$$0 < C < \frac{1}{4H}$$

con el caso elíptico de Delaunay.

Para lograrlo basta exhibir una ruleta elíptica cuya rotación alrededor del eje de revolución genere un onduloide. La ruleta B_2 cumple precisamente este papel. La ruleta B_1 , asociada al otro foco de la elipse, fue obtenida previamente mediante la construcción geométrica directa de las ruletas.

En consecuencia, al recuperar B_2 a partir de las ecuaciones paramétricas de Delaunay, se concluye que este subcaso corresponde a la familia de los onduloides.

Subcaso 2.32: $C = \frac{1}{4H}$.

Supongamos ahora que

$$C = \frac{1}{4H}.$$

Entonces

$$2\sqrt{HC} = 1.$$

Por tanto, el mínimo global de B es exactamente igual a 1.

Como $B(f) \geq 1$ para todo $f > 0$, la condición necesaria para que existan soluciones reales,

$$B(f) \leq 1,$$

solo puede cumplirse en el punto donde B alcanza su mínimo. Ese punto es

$$f_0 = \sqrt{\frac{C}{H}}.$$

Sustituyendo

$$C = \frac{1}{4H},$$

obtenemos

$$f_0 = \sqrt{\frac{1}{4H^2}}.$$

Como $H > 0$,

$$f_0 = \frac{1}{2H}.$$

Así, el único valor admisible para el radio es

$$f(t) = \frac{1}{2H}.$$

Como el dominio de la curva generatriz es conexo y $f(t)$ solo puede tomar ese valor, se concluye que f es constante. Por tanto,

$$f'(t) = 0.$$

Ahora calculamos $g'(t)$. Como

$$g'(t) = Hf(t) + \frac{C}{f(t)},$$

sustituyendo

$$f(t) = \frac{1}{2H}, \quad C = \frac{1}{4H},$$

se obtiene

$$g'(t) = H \left(\frac{1}{2H} \right) + \frac{\frac{1}{4H}}{\frac{1}{2H}}.$$

Luego,

$$g'(t) = 1.$$

$$g'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Por tanto,

$$g(t) = t + g_0,$$

para alguna constante g_0 .

La curva generatriz es entonces

$$(g(t), f(t)) = \left(t + g_0, \frac{1}{2H}\right).$$

Esta es una recta paralela al eje de revolución, situada a distancia constante

$$\frac{1}{2H}$$

del eje x .

Al rotar esta recta alrededor del eje x , se obtiene un cilindro circular recto de radio

$$\frac{1}{2H}.$$

Por tanto, en el caso

$$C = \frac{1}{4H},$$

la superficie correspondiente es un cilindro circular recto.

Con esto queda concluido el análisis del caso $C > 0$.

Exhaustividad de los casos y conclusión de la demostración.

Por los análisis anteriores, toda superficie de revolución con curvatura media constante queda descrita localmente por la primera integral

$$f(s)g'(s) = Hf^2(s) + C,$$

junto con la condición

$$(f'(s))^2 = 1 - \left(Hf(s) + \frac{C}{f(s)}\right)^2.$$

Por tanto, la clasificación se reduce al estudio de los valores posibles de las constantes H y C .

Si

$$H = 0,$$

entonces solo hay dos posibilidades:

$$C = 0 \quad \text{o} \quad C \neq 0.$$

El primer caso produce el plano y el segundo produce el catenoide.

Supongamos ahora que

$$H \neq 0.$$

Como cambiar la orientación del normal unitario cambia el signo de H , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$H > 0.$$

Entonces los valores posibles de C quedan exhaustivamente separados en los cinco subcasos

$$C < 0, \quad C = 0, \quad 0 < C < \frac{1}{4H}, \quad C = \frac{1}{4H}, \quad C > \frac{1}{4H}.$$

Estos intervalos cubren todos los valores reales de C , de modo que no queda ningún caso por analizar.

En los subcasos ya estudiados se obtuvo lo siguiente:

$$C < 0 \implies \text{nodoides},$$

$$C = 0 \implies \text{esfera,}$$

$$0 < C < \frac{1}{4H} \implies \text{onduloides,}$$

$$C = \frac{1}{4H} \implies \text{cilindro.}$$

Finalmente, si

$$C > \frac{1}{4H},$$

entonces no aparecen perfiles reales admisibles. En efecto, la condición

$$(f'(s))^2 = 1 - \left(Hf(s) + \frac{C}{f(s)} \right)^2$$

exige que

$$\left| Hf(s) + \frac{C}{f(s)} \right| \leq 1.$$

Pero, para $f > 0$, la función

$$Hf + \frac{C}{f}$$

alcanza su mínimo en

$$f = \sqrt{\frac{C}{H}},$$

y dicho mínimo es

$$2\sqrt{HC}.$$

Si

$$C > \frac{1}{4H},$$

entonces

$$2\sqrt{HC} > 1.$$

Por tanto,

$$Hf + \frac{C}{f} > 1$$

para todo $f > 0$, y la ecuación diferencial no admite soluciones reales regulares. Así, este último caso no produce ninguna nueva superficie.

En consecuencia, los casos anteriores agotan todas las posibilidades. Por tanto, toda superficie de revolución completa, conexa e inmersa en $\mathbb{R}^3$, con curvatura media constante, es, salvo movimientos rígidos, cambios de orientación y reparametrizaciones, una de las siguientes:

plano, catenoide, esfera, cilindro, onduloide o nodoide.

Esto prueba la clasificación de Delaunay.

5. Aplicaciones

5.1 Puentes capilares y superficies líquido-aire

Una aplicación importante de las superficies de Delaunay aparece en el estudio de los puentes capilares. Un puente capilar es una pequeña cantidad de líquido que queda sostenida entre dos superficies sólidas, como ocurre entre dos placas, entre dos anillos coaxiales o entre la punta de un microscopio de fuerza atómica y una superficie plana. La frontera visible de ese líquido se conoce como interfaz líquido-aire, es decir, la superficie que separa el líquido del aire que lo rodea.

El interés geométrico de este fenómeno está en que la curvatura que toma la superficie del líquido cuando está en contacto con el sólido, también conocido como *menisco* no es casual. Cuando el puente es suficientemente pequeño, la gravedad puede despreciarse frente a la tensión superficial. La tensión superficial, denotada por γ , puede entenderse como la tendencia del líquido a reducir el área de su superficie libre. Por esta razón, en equilibrio, la interfaz adopta una forma determinada por dos efectos principales: la tensión superficial y la diferencia de presión entre el líquido y el aire.

Esta diferencia de presión se describe mediante la ecuación de Young–Laplace:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\Delta P}{\gamma}, \quad (5.1)$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la superficie, $\Delta P = P_{\text{líquido}} - P_{\text{aire}}$ es el salto de presión a través de la interfaz y γ es la tensión superficial. El término salto de presión se refiere simplemente a la diferencia entre la presión de un lado de la superficie y la presión del otro lado.

Como se vio anteriormente, la curvatura media de una superficie está dada por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

donde κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales. Estas curvaturas miden cómo se dobla la superficie en dos direcciones principales. Dado que, salvo la convención de signos, las curvaturas principales corresponden a los inversos de los radios principales, la ecuación de Young–Laplace puede escribirse como

$$2H = \frac{\Delta P}{\gamma}.$$

Por tanto,

$$H = \frac{\Delta P}{2\gamma}. \quad (5.2)$$

Esta igualdad es el punto donde la física del problema se encuentra con la geometría diferencial. Si la tensión superficial γ es constante y el salto de presión ΔP también lo es, entonces la interfaz líquido-aire tiene curvatura media constante. Así, la condición $H = \text{constante}$ no aparece únicamente como una hipótesis abstracta, sino como una consecuencia natural del equilibrio de una superficie líquida.

El teorema de Delaunay clasifica las superficies de revolución con curvatura media constante. Por eso, si un puente capilar tiene simetría axial, es decir, si su forma se obtiene al rotar una curva plana alrededor de un eje, entonces su interfaz debe estar relacionada con una superficie de Delaunay.

Para precisar esta relación, consideremos una superficie de revolución parametrizada por

$$X(s, v) = (g(s), f(s) \cos(v), f(s) \sin(v)),$$

donde s es el parámetro de longitud de arco de la curva generatriz, $g(s)$ representa la posición sobre el eje de revolución y $f(s) > 0$ representa la distancia al eje. Como se vio anteriormente, la

condición de curvatura media constante conduce a la primera integral

$$f(s)g'(s) = Hf(s)^2 + C.$$

Aquí, una primera integral es una ecuación que se obtiene al integrar una vez la ecuación diferencial original. Su importancia está en que permite reducir el problema y estudiar la curva generatriz de manera más sencilla.

En el artículo de van Honschoten, Tas y Elwenspoek (48) se obtiene una ecuación análoga para describir el perfil de un puente capilar axisimétrico. En su notación, si ρ representa la distancia al eje de revolución y θ es el ángulo que forma la curva generatriz con el eje, la ecuación central puede escribirse como

$$\rho \cos \theta = \frac{\Delta P}{2\gamma} \rho^2 + C'. \quad (5.3)$$

La correspondencia con la ecuación usada en este escrito es clara:

$$\rho = f(s), \quad \cos \theta = g'(s), \quad H = \frac{\Delta P}{2\gamma}.$$

Así, ambas ecuaciones tienen la misma estructura. Esto muestra que el modelo físico del puente capilar y el estudio geométrico de las superficies de Delaunay están describiendo el mismo tipo de fenómeno desde dos lenguajes distintos.

El primer caso importante ocurre cuando no hay salto de presión entre los dos lados de la interfaz, es decir, $\Delta P = 0$. Físicamente, esto significa que la presión del líquido y la presión del aire se equilibran a través de la superficie. En tal situación, la interfaz ya no está siendo curvada por una diferencia de presión; la forma de equilibrio queda determinada principalmente por la tensión superficial, que tiende a reducir el área de la superficie libre.

Por la ecuación de Young–Laplace,

$$2H = \frac{\Delta P}{\gamma},$$

se obtiene inmediatamente que

$$H = 0.$$

El artículo de van Honschoten llega al catenoide a partir de la ecuación central para una interfaz axisimétrica (5.3). Si $\Delta P = 0$, esta ecuación se reduce a

$$\rho \cos \theta = C'.$$

Como el perfil se puede escribir como una curva $\rho = \rho(\zeta)$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho')^2}},$$

donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\zeta}$. Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 + (\rho')^2}} = C'.$$

Esta ecuación diferencial describe el perfil de una catenaria. En efecto, tomando $C' = \rho_1 > 0$, se obtiene

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \sqrt{1 + (\rho')^2},$$

y por tanto

$$(\rho')^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1.$$

Separando variables,

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}},$$

de donde

$$\zeta - \zeta_0 = \rho_1 \operatorname{arcosh} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right).$$

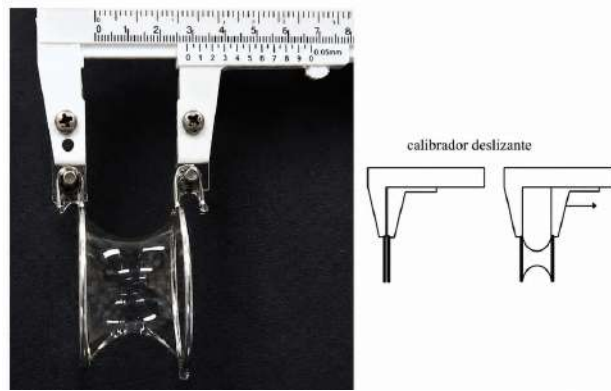
Equivalentemente,

$$\rho(\zeta) = \rho_1 \cosh \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\rho_1} \right).$$

Es decir, el perfil del menisco es una catenaria. Al rotar esta catenaria alrededor del eje de simetría, se obtiene un catenoide. Un ejemplo físico clásico de este caso es la película de jabón sostenida entre dos anillos coaxiales.

Figura 32

Fotografía de un calibrador deslizante con dos anillos coaxiales formando un catenoide de película de jabón



Nota. Adaptado de: Ito y Sato (49).

Cuando el salto de presión entre el líquido y el aire no es nulo, es decir,

$$\Delta P \neq 0,$$

la interfaz líquido-aire ya no se modela, en general, como una superficie mínima. En este caso, la tensión superficial sigue actuando sobre la superficie libre del líquido, pero ahora debe equilibrarse con una diferencia de presión entre ambos lados de la interfaz. Como consecuencia, la superficie adopta una curvatura media constante no nula.

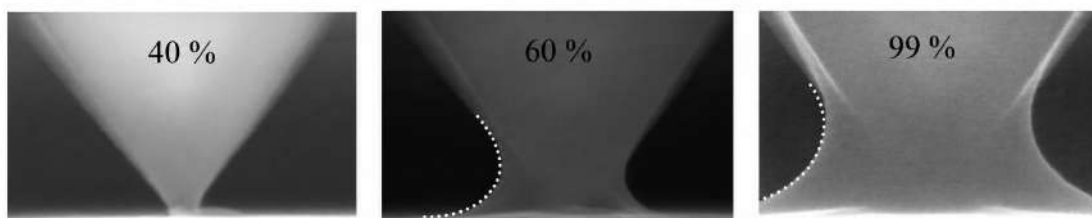
En estos casos, la forma concreta de la interfaz depende de las condiciones físicas del sistema, como la separación entre los sólidos, los ángulos de contacto, el volumen de líquido, la humedad relativa y la presión ejercida sobre el fluido.

Un ejemplo importante aparece en microscopía de fuerza atómica. En presencia de humedad,

puede formarse un pequeño menisco de agua entre la punta del microscopio y la superficie de la muestra. Este menisco constituye un puente capilar microscópico cuya frontera visible es una interfaz líquido-aire. Debido a su pequeño tamaño, el efecto de la gravedad puede despreciarse frente a la tensión superficial, de modo que la forma del menisco queda determinada principalmente por el equilibrio entre la tensión superficial, el salto de presión y las condiciones de contacto con la punta y el sustrato.

Figura 33

Secuencia de imágenes de un menisco de agua en una punta de microscopio de fuerza atómica, obtenidas mediante un microscopio electrónico de barrido a diferentes humedades relativas



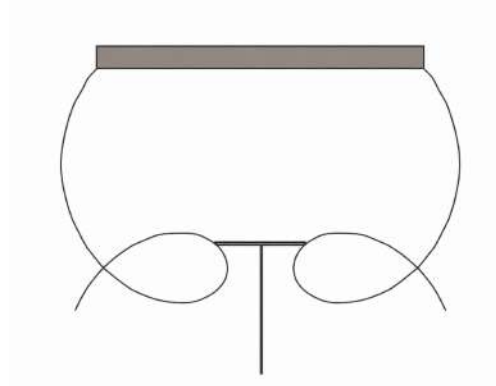
Nota. Adaptado de: van Honschoten et al. (48).

También pueden aparecer perfiles onduloidales en gotas o puentes líquidos sostenidos entre dos sólidos. De manera general, un perfil onduloidal se presenta cuando la interfaz se comporta como una superficie de revolución que se ensancha y se estrecha suavemente, de forma semejante a un cilindro ondulante. Este tipo de geometría puede aparecer cuando el puente líquido se mantiene estable entre dos superficies y la presión interna del líquido, junto con la tensión superficial, permite una configuración sin autointersecciones.

Por otra parte, los perfiles nodoidales pueden aparecer como modelos idealizados de gotas comprimidas entre sólidos con geometrías adecuadas. En este caso, no se interpreta el nodoide completo como una interfaz física global, pues el nodoide puede presentar autointersecciones en su perfil generador. Lo físicamente relevante es una porción no autointersectante de dicho perfil, determinada por las condiciones de contacto con los sólidos que contienen o comprimen el líquido.

Figura 34

Cuerpo capilar axisimétrico con forma de nodoide: una gota que adopta la forma de un nodoide cuando es comprimida por placas sólidas de forma especial



Nota. Adaptado de: Honschoten, Tas y Elwenspoek (48).

5.2 Superficies CMC completas con extremos de Delaunay

Una aplicación geométrica importante de las superficies de Delaunay aparece en la construcción de superficies completas con curvatura media constante no nula con un número finito de extremos. En el artículo de Mazzeo y Pacard (50), el problema central consiste en construir superficies CMC completas en $\mathbb{R}^3$ a partir de dos tipos de piezas: k -noids mínimos y medias superficies de Delaunay.

Una superficie es completa si no le faltan puntos que estén a distancia finita respecto a la métrica inducida; es decir, las geodésicas pueden prolongarse indefinidamente mientras permanezcan sobre la superficie. Además, una superficie tiene topología finita si es homeomorfa a una superficie compacta de género finito a la que se le han removido finitamente muchos puntos. Estos puntos removidos representan los extremos de la superficie.

Por ejemplo, el catenoide completo

$$X(t, v) = (bt, b \cosh(t) \cos(v), b \cosh(t) \sin(v)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in S^1,$$

es una superficie no compacta pero completa. Topológicamente es homeomorfo a $S^2 \setminus \{p_+, p_-\}$, donde los puntos p_+ y p_- representan sus dos extremos, correspondientes a $t \rightarrow +\infty$ y $t \rightarrow -\infty$. Al agregar estos dos puntos ideales se obtiene la compactificación $C \cup \{p_+, p_-\} \cong S^2$. Como la compactificación es una esfera, el catenoide tiene género 0. Por tanto, el catenoide completo tiene topología finita, género 0 y dos extremos.

En contraste, si al catenoide completo se le remueve una cantidad finita de puntos reales de la superficie, $C \setminus \{q_1, \dots, q_m\}$, la superficie resultante sigue teniendo topología finita, pues es homeomorfa a $S^2 \setminus \{p_+, p_-, q_1, \dots, q_m\}$. Su compactificación sigue siendo homeomorfa a S^2 ; por tanto, también tiene género 0. Sin embargo, ya no es completa, porque los puntos $q_1, \dots, q_m$ estaban a distancia finita respecto a la métrica inducida. Al removerlos, aparecen puntos faltantes alcanzables mediante curvas de longitud finita.

En el artículo de Mazzeo y Pacard (50) se utiliza la convención $H = k_1 + k_2$, es decir, define la curvatura media como la suma de las curvaturas principales y no como su promedio. Esta convención difiere de la usada en este trabajo por un factor 2, pues aquí se toma $H = \frac{k_1+k_2}{2}$. Por tanto, los valores $H = 1$ y $H = -1$ del artículo corresponden, en nuestra convención, a $H = \frac{1}{2}$ y $H = -\frac{1}{2}$, respectivamente.

Observación 5.1 La parametrización usada por Mazzeo y Pacard difiere de la utilizada anteriormente solo en la elección del eje de revolución y del parámetro de la curva generatriz. En este trabajo se ha escrito una superficie de revolución alrededor del eje x como $X(s, v) = (g(s), f(s) \cos(v), f(s) \sin(v))$, donde $g(s)$ representa la coordenada axial y $f(s)$ la distancia al eje de revolución. En cambio, el artículo escribe las superficies de Delaunay en coordenadas cilíndricas alrededor del eje z : $X(t, \theta) = (\rho(t) \cos \theta, \rho(t) \sin \theta, t)$. Aquí t es la coordenada axial, θ es el ángulo de rotación y $\rho(t)$ es la distancia de la superficie al eje z .

Para esta parametrización, la curvatura media de la superficie, queda dada por

$$H = -\rho_{tt}(1 + \rho_t^2)^{-3/2} + \rho^{-1}(1 + \rho_t^2)^{-1/2}.$$

Para obtener superficies de curvatura media constante se impone $H = c$, donde $c \in \mathbb{R}$. En el caso no mínimo, $c \neq 0$ se obtiene

$$-\rho_{tt}(1 + \rho_t^2)^{-3/2} + \rho^{-1}(1 + \rho_t^2)^{-1/2} = c.$$

Equivalentemente,

$$\rho_{tt} - \frac{1}{\rho}(1 + \rho_t^2) + c(1 + \rho_t^2)^{3/2} = 0.$$

Como $c \neq 0$, se puede normalizar el valor de la curvatura media mediante una homotecia. En efecto, si una superficie se reescala por $\tilde{X} = \lambda X$, entonces sus curvaturas principales se dividen por λ , y por tanto $\tilde{H} = \frac{H}{\lambda}$. Tomando $\lambda = |c|$, la constante c se transforma en $\tilde{H} = \frac{c}{|c|} = \pm 1$. Por esta razón, el artículo reduce el estudio de las superficies CMC no mínimas a los dos casos normalizados $H = 1$ y $H = -1$.

Si $H = 1$, la ecuación diferencial para el perfil es

$$\rho_{tt} - \frac{1}{\rho}(1 + \rho_t^2) + (1 + \rho_t^2)^{3/2} = 0.$$

mientras que si $H = -1$, se obtiene

$$\rho_{tt} - \frac{1}{\rho}(1 + \rho_t^2) - (1 + \rho_t^2)^{3/2} = 0.$$

El signo de H depende de la orientación escogida para la normal de la superficie. Cambiar la normal N por $-N$ cambia el signo de las curvaturas principales y, por tanto, cambia H por $-H$.

El artículo introduce entonces la función

$$\mathcal{W}(\rho, \rho_t) = \rho^2 - \frac{2\rho}{\sqrt{1 + \rho_t^2}}.$$

Esta función es una primera integral de la ecuación anterior. Esto significa que, si $\rho(t)$ es una

solución de la ecuación con $H = 1$, entonces

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(\rho(t), \rho_t(t)) = 0,$$

y por tanto

$$\mathcal{W}(\rho(t), \rho_t(t)) = \text{constante}.$$

La utilidad de esta primera integral es que reduce el estudio de la ecuación de segundo orden a una relación de primer orden entre ρ y ρ_t . De hecho, al fijar $\mathcal{W}(\rho, \rho_t) = C$, se obtiene

$$\rho^2 - \frac{2\rho}{\sqrt{1 + \rho_t^2}} = C,$$

lo que permite despejar ρ_t en función de ρ . De esta manera se puede estudiar el comportamiento del perfil sin resolver directamente la ecuación diferencial de segundo orden.

En particular se considera la solución ρ_ε que alcanza un mínimo en $t = 0$:

$$\rho_\varepsilon(0) = \varepsilon, \quad (\rho_\varepsilon)_t(0) = 0.$$

Geométricamente, ε representa el radio mínimo del perfil, es decir, el tamaño del cuello de la superficie. Al sustituir estas condiciones iniciales en la primera integral, se obtiene

$$\mathcal{W}(\rho_\varepsilon, (\rho_\varepsilon)_t) = \varepsilon^2 - 2\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon - 2).$$

Por tanto, el valor de ε fija la constante conservada.

Los puntos donde el perfil tiene radio extremo satisfacen $\rho_t = 0$. En esos puntos,

$$\mathcal{W}(\rho, 0) = \rho^2 - 2\rho.$$

Como la constante es $\varepsilon^2 - 2\varepsilon$, se tiene

$$\rho^2 - 2\rho = \varepsilon^2 - 2\varepsilon.$$

De aquí se obtienen los dos valores

$$\rho = \varepsilon \quad \text{y} \quad \rho = 2 - \varepsilon.$$

Así, para $0 < \varepsilon < 1$, el radio oscila entre un mínimo ε y un máximo $2 - \varepsilon$. Esta oscilación periódica genera los onduloides.

El caso $\varepsilon = 1$ produce la solución constante

$$\rho(t) \equiv 1,$$

que corresponde al cilindro. En cambio, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, los onduloides degeneran hacia una cadena de esferas tangentes. La esfera, aunque también es una superficie de revolución con curvatura media constante, es compacta y por tanto no funciona como modelo de un extremo no compacto. Por eso, en el contexto de superficies completas con extremos de Delaunay, los modelos relevantes son principalmente los cilindros, onduloides y nodoides.

Para la orientación opuesta, el caso normalizado $H = -1$ conduce a una primera integral

$$\mathcal{H}(\rho, \rho_t) = \rho^2 + \frac{2\rho}{\sqrt{1 + \rho_t^2}}.$$

Si

$$\rho_\varepsilon(0) = \varepsilon, \quad (\rho_\varepsilon)_t(0) = 0,$$

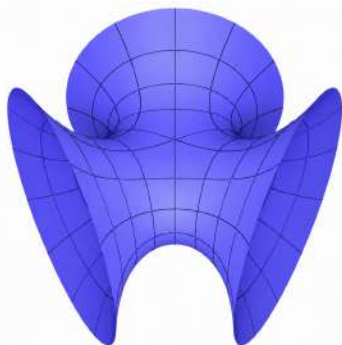
entonces

$$\mathcal{H}(\rho_\varepsilon, (\rho_\varepsilon)_t) = \varepsilon(\varepsilon + 2) > 0.$$

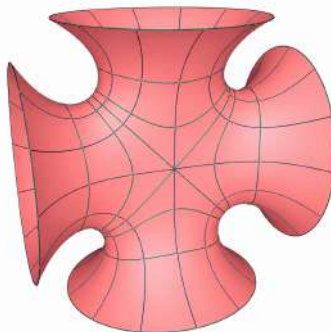
Estas soluciones dan lugar a los nodoides, que son superficies de Delaunay inmersas. A diferencia de los onduloides, pueden presentar autointersecciones cuando se prolongan como superficies completas.

El segundo bloque de la construcción son los k -noids mínimos. Un k -noid mínimo es una superficie mínima completa, de curvatura total finita, con k extremos. La condición de curvatura total finita significa que $\int_{\Sigma} |K| dA < \infty$, donde K denota la curvatura de Gauss y dA el elemento de área. Esta hipótesis es más fuerte que la sola topología finita y, en el caso de superficies mínimas completas en $\mathbb{R}^3$, permite describir el comportamiento asintótico de los extremos. En superficies mínimas completas de curvatura total finita, los extremos pueden ser planares o catenoidales. Para la construcción de Mazzeo y Pacard, los extremos catenoidales son los relevantes, porque sobre ellos se pueden pegar medias superficies de Delaunay.

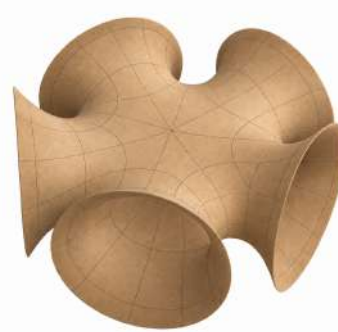
Una familia especialmente importante de ejemplos está dada por los k -noids de Jorge–Meeks. Estas superficies son mínimas, completas, de género cero y poseen k extremos catenoidales.

Figura 35*Jorge–Meeks 3-noid*

Nota. Adaptado de:
minimalsurfaces.blog (51).

Figura 36*Jorge–Meeks 4-noid*

Nota. Adaptado de:
minimalsurfaces.blog (51).

Figura 37*Jorge–Meeks 5-noid*

Nota. Adaptado de: Wolfram
Demonstrations Project (52).

En general, los k -noids mínimos pueden organizarse según varios datos geométricos y topológicos. El primero es el género g , que mide el número de asas de la compactificación. El segundo es el número de extremos k . Así, una superficie mínima completa de topología finita

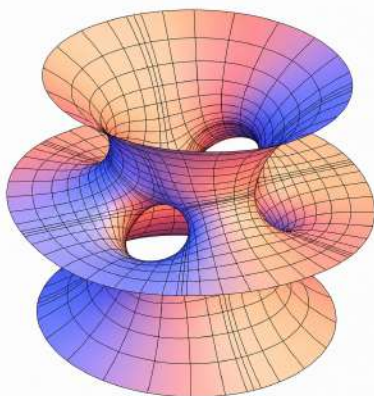
puede escribirse como

$$\Sigma \cong \bar{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_k\},$$

donde $\bar{\Sigma}$ es compacta de género g . Si $g = 0$, la compactificación es una esfera; si $g = 1$, la compactificación es un toro; y así sucesivamente. Por esta razón se habla de superficies mínimas de género g con k extremos.

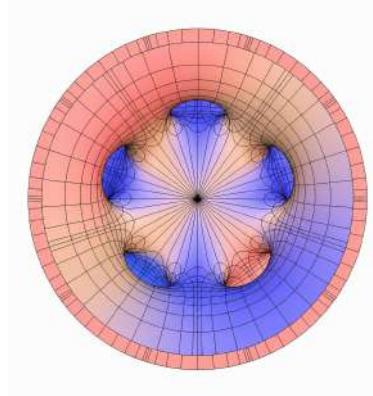
Otra familia importante de k -noids mínimos es la familia de Costa–Hoffman–Meeks. Sus elementos tienen género g , tres extremos, dos de ellos catenoidales y un extremo planar medio. Esta familia permite ver que los k -noids mínimos no se restringen al caso de género cero ni necesariamente a extremos exclusivamente catenoidales.

Figura 38
Costa-Hoffman-Meeks de género 2



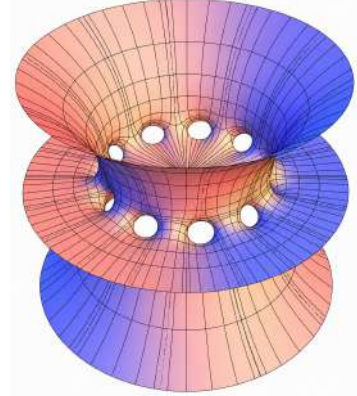
Nota. Adaptado de: Virtual Math Museum (53).

Figura 39
Costa-Hoffman-Meeks de género 4



Nota. Adaptado de: Virtual Math Museum (53).

Figura 40
Costa-Hoffman-Meeks de género 9



Nota. Adaptado de: Virtual Math Museum (53).

Como los k -noids considerados en la construcción tienen extremos catenoidales, si Σ_0 es un k -noid mínimo cada extremo de Σ_0 es asintótico a un catenoide. Esta propiedad no se usa solamente como una descripción geométrica, sino que se escribe de forma analítica para poder realizar el procedimiento de pegado.

Fijemos el extremo ℓ -ésimo de Σ_0 . Fuera de una región compacta, dicho extremo puede escribirse como un gráfico normal sobre una copia trasladada, rotada y dilatada de un catenoide.

Después de escoger coordenadas adecuadas, el catenoide modelo se puede parametrizar como

$$X_{a_\ell}(s, \theta) = (a_\ell \cosh(s) \cos \theta, a_\ell \cosh(s) \sin \theta, a_\ell s),$$

donde s mide la dirección hacia el infinito del extremo y θ es la variable angular.

El parámetro $a_\ell > 0$ se llama el peso del extremo. Geométricamente, representa la escala del catenoide asintótico asociado al extremo ℓ . En particular, el catenoide modelo X_{a_ℓ} es una homotecia del catenoide estándar, y su cuello tiene radio a_ℓ . Sin embargo, no debe entenderse que el extremo real sea exactamente ese catenoide, sino que se aproxima a él cuando $s \rightarrow +\infty$.

En el artículo de Mazzeo y Pacard (50) se afirma que el extremo es un gráfico normal, esto implica que puede escribirse en la forma

$$X_w(s, \theta) = X_{a_\ell}(s, \theta) + w(s, \theta)\nu(s, \theta),$$

donde $\nu(s, \theta)$ es el campo normal unitario del catenoide modelo X_{a_ℓ} , y $w(s, \theta)$ es una función escalar que mide la separación entre el extremo real y dicho modelo. Es decir, para cada punto del catenoide modelo se avanza una distancia $w(s, \theta)$ en dirección normal.

Esta parametrización es asintótica porque describe el extremo en la región $s \rightarrow +\infty$. La función w decae en ese límite:

$$w(s, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad s \rightarrow +\infty.$$

Por tanto, el extremo real se aproxima cada vez más al catenoide modelo. De manera más precisa, el artículo usa expansiones asintóticas del tipo

$$w(s, \theta) \sim \sum_{|j| \geq 1} c_j X_j(\theta) e^{-js},$$

donde $X_j(\theta)$ son modos angulares. Como los términos e^{-js} tienden a cero cuando $s \rightarrow +\infty$,

esta expansión expresa que la diferencia entre el extremo real y el catenoide modelo desaparece progresivamente al alejarse por el extremo.

Esta representación es fundamental para el pegado: permite truncar el extremo catenoidal del k -noid en una región donde ya es muy cercano al catenoide modelo, y pegar allí una media superficie de Delaunay controlando el error geométrico producido por la unión.

El procedimiento de Mazzeo y Pacard puede entenderse como una construcción por aproximación, pegado y corrección. La idea general consiste en partir de una superficie mínima conocida, modificarla a pequeña escala, pegarle extremos de Delaunay y luego corregir el error producido durante el pegado para obtener finalmente una superficie de curvatura media constante.

El punto de partida es un k -noide mínimo no degenerado, que denotamos por Σ_0 . El primer paso consiste en reescalar la superficie mínima inicial mediante una homotecia:

$$\Sigma_0 \mapsto \varepsilon \Sigma_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Este reescalamiento permite trabajar en una escala en la cual los extremos catenoidales del k -noide son compatibles con las medias superficies de Delaunay que se van a pegar. El parámetro ε se escoge suficientemente pequeño para que el error geométrico producido en las zonas de transición sea controlable.

Después se truncan los k extremos catenoidales de $\varepsilon \Sigma_0$. Truncar significa cortar cada extremo en una región adecuada, obteniendo una pieza interior compacta con k curvas de borde. A cada una de estas curvas se le pega una media superficie de Delaunay. Según la orientación del extremo y las condiciones geométricas del pegado, estas medias superficies pueden corresponder a onduloides o nodoides.

Luego del pegado se obtiene una superficie aproximada, que denotamos por X_ε . Esta superficie todavía no tiene curvatura media constante exactamente igual a la deseada. En general, presenta un pequeño error concentrado principalmente en las zonas donde se unieron la pieza

interior truncada y los extremos de Delaunay. Si se busca una superficie final con curvatura media

$$H = 1,$$

el error se mide mediante

$$E_\varepsilon = H(X_\varepsilon) - 1.$$

Para corregir este error se introduce una perturbación normal de la superficie aproximada. Es decir, se busca una nueva superficie de la forma

$$X_{\varepsilon,u} = X_\varepsilon + uN_\varepsilon,$$

donde N_ε es el campo normal unitario de X_ε y u es una función pequeña que debe determinarse.

Al expandir la curvatura media de la superficie perturbada se obtiene una ecuación de la forma

$$H(X_{\varepsilon,u}) - 1 = E_\varepsilon + L_\varepsilon u + Q_\varepsilon(u),$$

donde L_ε es el operador lineal asociado a la superficie aproximada y $Q_\varepsilon(u)$ contiene los términos no lineales, de orden superior en u .

En una primera aproximación, se resuelve el problema lineal

$$L_\varepsilon u = -E_\varepsilon.$$

La hipótesis de no degeneración de la superficie mínima inicial permite resolver este problema con estimaciones adecuadas. Intuitivamente, esta condición asegura que la corrección normal u puede escogerse de manera controlada para compensar el error producido por el pegado.

Una vez resuelto el problema lineal, se considera la ecuación completa,

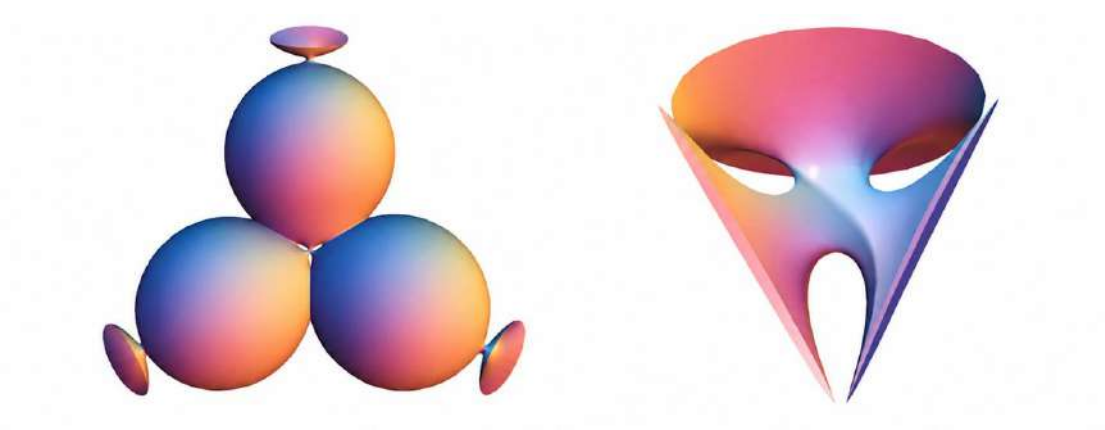
$$L_\varepsilon u = -E_\varepsilon - Q_\varepsilon(u).$$

Como el error E_ε es pequeño y los términos no lineales son de orden superior, se puede aplicar un argumento de perturbación o de punto fijo para encontrar una solución u pequeña. Con esta corrección, la superficie perturbada adquiere curvatura media constante.

Finalmente, no basta con corregir la curvatura media en cada pieza por separado. También es necesario garantizar que las piezas empalmen suavemente en las zonas de pegado. Para ello se ajustan los parámetros geométricos de las piezas, como traslaciones, rotaciones y pequeñas variaciones en los parámetros de Delaunay. Estos ajustes permiten hacer coincidir los datos de borde entre la pieza interior y los extremos pegados, evitando esquinas o discontinuidades en la superficie final.

Figura 41

Ejemplo: Un CMC 3-noid (izquierda) y un 3-noid mínimo (derecha)



Nota. Adaptado de: Traizet (54).

5.3 Aplicación a membranas biológicas, energía de Willmore-Helfrich y beta barrels

Una aplicación geométrica de las superficies de Delaunay aparece en el modelamiento de ciertas estructuras biológicas elásticas. Para entender esta relación, conviene partir de los objetos biológicos básicos involucrados.

Una molécula es una agrupación de átomos unidos mediante enlaces químicos. En los seres vivos existen moléculas pequeñas, como el agua, y moléculas grandes o macromoléculas, como las proteínas, los ácidos nucleicos y algunos polisacáridos. Las proteínas son macromoléculas formadas

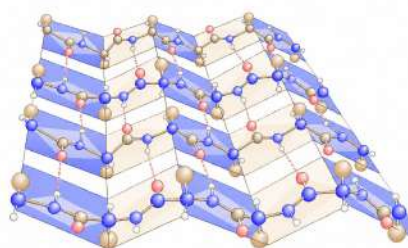
por cadenas de aminoácidos. Cada aminoácido puede entenderse como una unidad elemental de la cadena, y el orden en que aparecen estos aminoácidos determina en gran medida la forma y la función de la proteína.

La estructura de una proteína suele describirse en varios niveles. La estructura primaria corresponde a la secuencia de aminoácidos. La estructura secundaria describe formas locales y repetitivas que toma la cadena en el espacio. Las dos estructuras secundarias más comunes son las hélices alfa y las láminas beta. La estructura terciaria, por su parte, corresponde a la forma tridimensional global de la proteína.

Una hebra beta es un segmento de la cadena proteica que se encuentra relativamente extendido. Cuando varias hebras beta se ubican una al lado de otra y se estabilizan mediante enlaces de hidrógeno, forman una lámina beta. Estas láminas no son necesariamente planas; pueden curvarse, torcerse o cerrarse dependiendo de la proteína y de las interacciones moleculares presentes.

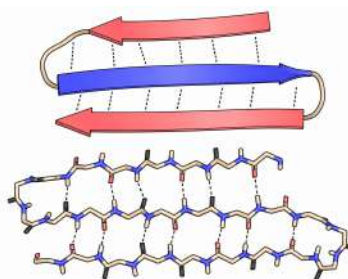
Un β -barrel, o barril beta, se forma cuando varias hebras beta se organizan de tal manera que la lámina beta se cierra sobre sí misma, generando una estructura tubular semejante a un barril. Esta forma no debe entenderse como un cilindro perfecto, sino como una arquitectura molecular tubular que puede presentar curvatura, estrechamientos, abombamientos o deformaciones. Por esta razón, los β -barrels pueden estudiarse geométricamente mediante superficies que aproximen su forma global.

Figura 42
Lámina beta



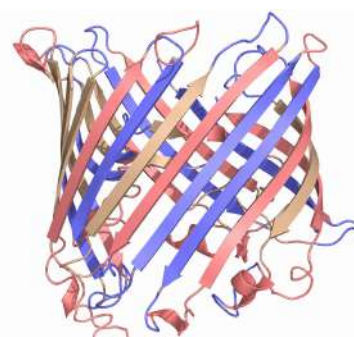
Nota. Adaptado de: Wikipedia (55).

Figura 43
Hebra beta



Nota. Adaptado de: Pauling y Corey (56).

Figura 44
Barril beta



Nota. Adaptado de: Wikipedia (55).

Los β -barrels aparecen en distintos contextos biológicos. En bacterias Gram negativas, muchas proteínas de la membrana externa tienen estructura de barril beta y funcionan como canales o poros que permiten el paso controlado de moléculas pequeñas, nutrientes o iones. También aparecen en membranas externas de mitocondrias y cloroplastos, donde participan en procesos de transporte molecular. Además, existen β -barrels en proteínas solubles; un ejemplo importante es la proteína verde fluorescente, en la cual el barril beta protege el cromóforo responsable de la fluorescencia.

Desde el punto de vista biológico, estudiar los β -barrels permite comprender cómo la forma de una proteína se relaciona con su estabilidad y con su función. Por ejemplo, en una proteína de membrana, la geometría tubular del barril puede determinar la formación de un canal; en una proteína fluorescente, la forma del barril puede proteger una región interna activa. Por tanto, la forma no es un aspecto puramente visual, sino una propiedad relacionada con la función molecular.

Desde el punto de vista geométrico, el objetivo es encontrar superficies suaves que aproximen adecuadamente estas estructuras moleculares. Esta aproximación es útil porque permite estudiar cantidades como la curvatura media, la curvatura de Gauss y ciertas energías elásticas asociadas a la forma. Si una superficie aproxima bien un β -barrel, entonces su geometría puede ayudar a describir la estabilidad de la estructura, su deformación y su posible comportamiento energético.

Una primera forma de medir la energía de flexión de una superficie consiste en integrar el cuadrado de la curvatura media:

$$\int_M H^2 dA.$$

Esta cantidad mide, de manera global, cuánto se curva la superficie. Por esta razón, aparece naturalmente en problemas donde la forma de equilibrio depende de la flexión, como ocurre en membranas elásticas, películas delgadas y ciertas estructuras biológicas.

Una versión más refinada de esta idea es la energía de Willmore,

$$\mathcal{W}(M) = \int_M (H^2 - K) dA,$$

donde H es la curvatura media y K es la curvatura de Gauss. Cuando la superficie es cerrada, el término asociado a K queda determinado por la topología de la superficie mediante el teorema de Gauss-Bonnet. Por ello, controlar la energía de Willmore está estrechamente relacionado con controlar la curvatura media de la superficie.

Para membranas lipídicas, Helfrich propuso un modelo de energía que depende principalmente de la curvatura media, de una curvatura espontánea propia de la membrana y de ciertos parámetros físicos como la rigidez de flexión, la presión y la tensión superficial. Este modelo es especialmente importante porque permite describir formas de equilibrio en membranas biológicas, vesículas y estructuras flexibles donde la curvatura juega un papel fundamental.

En versiones más especializadas del modelo, como las consideradas por Toda y Athukorale (57), se incluyen términos adicionales para describir efectos producidos por estructuras moleculares internas. Estos términos permiten adaptar el modelo clásico de Helfrich a membranas o proteínas que presentan direcciones preferentes de deformación.

La conexión con las superficies de Delaunay aparece cuando se buscan soluciones con simetría de revolución y curvatura media constante. En ese caso, por la clasificación clásica de superficies de revolución con curvatura media constante, las superficies relevantes son precisamente las superficies de Delaunay.

Este hecho es útil en el estudio de estructuras conocidas como *beta barrels*. Las observaciones experimentales sugieren que estas estructuras pueden tener una curvatura media aproximadamente constante, pero no nula. Por tanto, el modelo mínimo $H = 0$ resulta demasiado restrictivo. En cambio, superficies como onduloides y nodoides, que poseen curvatura media constante distinta de cero, aparecen como modelos geométricos más adecuados para representar este tipo de formas.

Referencias Bibliográficas

1. Lagrange JL. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. *Miscellanea Taurinensia* 1760; 2:173-95
2. Laplace PS. Sur l'action capillaire. Supplément au dixième livre du *Traité de Mécanique Céleste* 1805
3. Young T. An Essay on the Cohesion of Fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 1805; 95:65-87. doi: 10.1098/rstl.1805.0005
4. Delaunay CE. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1841; 6:309-20. Disponible en: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16382x/f318.item>
5. Sturm JCF. Mémoire sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1841; 6:321-32
6. Plateau JAF. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Vol. 1-2. Paris: Gauthier-Villars, 1873
7. Hopf H. *Differential Geometry in the Large*. Berlin: Springer-Verlag, 1956
8. Alexandrov AD. Uniqueness theorems for surfaces in the large. *Vestnik Leningradskogo Universiteta* 1962; 11:5-17
9. Wente HC. Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific Journal of Mathematics* 1986; 121:193-243. doi: 10.2140/pjm.1986.121.193
10. Kapouleas N. Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space. *Annals of Mathematics* 1987; 131:239-330. doi: 10.2307/1971421

11. Kapouleas N. Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori. *Inventiones Mathematicae* 1995; 119:349-90. DOI: 10.1007/BF01245186
12. Kenmotsu K. Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tôhoku Mathematical Journal* 1980; 32:147-53. DOI: 10.2748/tmj/1178229848
13. Bendito E, Bowick MJ y Medina A. Delaunay Surfaces. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* 2014; 33:27-45. DOI: 10.7546/jgsp-33-2014-27-45
14. Maravillas del Mundo. Eugène Delaunay [Internet]. Disponible en: <https://www.maravillas-del-mundo.com/Torre-Eiffel/Pantheon/Eugene-Delaunay.php> [citado 11 jun 2026]
15. Delaunay CE. *Théorie du mouvement de la lune*. Vol. 1-2. Paris: Mallet-Bachelier, 1867
16. Meeks III WH y Pérez J. The classical theory of minimal surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society* 2011; 48:325-407. DOI: 10.1090/S0273-0979-2011-01334-9
17. Eells J. On the surfaces of Delaunay and their Gauss maps. *Proceedings of the IV International Colloquium on Differential Geometry*. Ed. por Vidal E. Universidad de Santiago de Compostela, 1979:97-116
18. Dorfmeister J y Kenmotsu K. On a theorem by Hsiang and Yu. *Annals of Global Analysis and Geometry* 2008; 33:245-52. DOI: 10.1007/s10455-007-9083-7
19. Do Carmo MP. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976
20. Warner FW. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer, 1983
21. Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3.^a ed. Vol. 1-5. Houston: Publish or Perish, 1999
22. Lee JM. *Introduction to Riemannian Manifolds*. 2.^a ed. Cham: Springer, 2018
23. Lee JM. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.^a ed. New York: Springer, 2013

24. Meusnier JB. Mémoire sur la courbure des surfaces. Mémoires des savants étrangers 1776; 10:477-510
25. Douglas J. Solution of the problem of Plateau. Transactions of the American Mathematical Society 1931; 33:263-321. doi: 10.1090/S0002-9947-1931-1501590-9
26. Weierstrass K. Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1866 :612-25
27. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Apén-dice: De curvis elasticis. 1744
28. Catalan EC. Sur les surfaces réglées dont la courbure moyenne est constante. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1842; 7:203-11
29. Scherk HF. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1835; 13:185-208
30. Wikipedia. Superficie de Scherk [Internet]. Fundación Wikimedia. 2023 oct 23. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_de_Scherk [citado 11 jun 2026]
31. Costa C. Imersões mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ de gênero um e três finais. Anais da Academia Brasileira de Ciências 1982; 54:471-4
32. Schwarz HA. Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1865 :618-22
33. Arranz JM. Superficie de Schwarz P [Internet]. GeoGebra. 2020. Disponible en: <https://www.geogebra.org/m/wczsdzsn> [citado 11 jun 2026]
34. Schoen AH. Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections. NASA Technical Note TN D-5541. NASA Electronics Research Center, 1970

35. Wikimedia Commons. Archivo: Gyroid unit cell.stl [Internet]. Wikimedia Commons. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Gyroid%5C#/media/File:Gyroid_unit_cell.stl [citado 11 jun 2026]
36. Cátedra Miguel de Guzmán. Las Cónicas de Apolonio [Internet]. Universidad Complutense de Madrid. 2020. Disponible en: <http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/las-conicas-de-apolonio/>
37. OpenStax. Cálculo Volumen 2. OpenStax, 2020. Cap. 7.5 Secciones cónicas. Disponible en: <https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/7-5-secciones-conicas>
38. Besant WH. Notes on Roulettes and Glisettes. 2.^a ed. viii, 99 p. : il. ; 19 cm. (Cambridge mathematical series). Cambridge: Deighton, Bell y Co., 1890
39. Basto L. Visualización, ejemplo de ruleta. [video]. YouTube. 2026. Disponible en: <https://youtu.be/NkUKZw5sA3Y>
40. Lockwood EH. A Book of Curves. Cambridge: Cambridge University Press, 1967
41. Basto L. Visualización, ejemplo de curva pedal. [video]. YouTube. 2026. Disponible en: <https://youtu.be/c7MPRBOV9U4>
42. Bendito E y Medina JA. Delaunay Surfaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications 2008; 340:883-95
43. Basto L. Visualización, catenaria como ruleta de la parábola. [video]. YouTube. 2026. Disponible en: <https://youtu.be/3DIC3K2-US4>
44. Basto L. Visualización, Ondularia como ruleta de la Elipse. [video]. YouTube. 2026. Disponible en: <https://youtu.be/SX41Xvd549U>
45. Abramowitz M y Stegun IA. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Capítulo 17: Integrales elípticas. New York: Dover Publications, 1964

46. Basto L. Visualización, Nodaria como ruleta de la Hiperbola. [video]. YouTube. 2026. Disponible en: <https://youtu.be/2LKQkS06YUQ>
47. Scharrer C. Embedded Delaunay tori and their Willmore energy. arXiv preprint 2022 jun; arXiv:2206.00184. DOI: 10.48550/arXiv.2206.00184. arXiv: 2206.00184 [math.DG]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2206.00184>
48. Honschoten JW van, Tas NR y Elwenspoek M. The profile of a capillary liquid bridge between solid surfaces. American Journal of Physics 2010; 78:277-86. DOI: 10.1119/1.3273854
49. Ito M y Sato T. In situ observation of a soap-film catenoid—a simple educational physics experiment. European Journal of Physics 2010; 31:357-65. DOI: 10.1088/0143-0807/31/2/013. Disponible en: https://www.rose-hulman.edu/~moloney/Ph425/0143-0807_31_2_013%20soap%20film%20catenoid.pdf
50. Mazzeo R y Pacard F. Constant mean curvature surfaces with Delaunay ends. Communications in Analysis and Geometry 2001; 9:169-237. DOI: 10.4310/CAG.2001.v9.n1.a6. Disponible en: <https://projecteuclid.org/euclid.cag/1067824994>
51. minimalsurfaces.blog. Jorge-Meeks k-Noids [Internet]. 2018 oct. Disponible en: <https://minimalsurfaces.blog/home/repository/symmetrizations/jorge-meeks-k-noids/> [citado 11 jun 2026]
52. Wolfram Demonstrations Project. Jorge-Meeks k-Noids [Internet]. Wolfram Demonstrations Project. Disponible en: <https://demonstrations.wolfram.com/JorgeMeeksKNoids/> [citado 11 jun 2026]
53. Virtual Math Museum. Costa-Hoffman-Meeks Surface [Internet]. Virtual Math Museum. Disponible en: <https://virtualmathmuseum.org/Surface/costa-h-m/costa-h-m.html> [citado 11 jun 2026]
54. Traizet M. Gluing Delaunay ends to minimal n -noids using the DPW method. arXiv preprint 2024. Versión PDF directa desde la página personal del autor en Institut Denis Poisson.

arXiv: 2401.12345 [math.DG]. Disponible en: <https://www.idpoisson.fr/traizet/minoids.pdf> [citado 11 jun 2026]

55. Wikipedia. Barril beta [Internet]. Última modificación significativa indicada en la fuente consultada: 5 de agosto de 2009. Fundación Wikimedia. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Barril_beta [citado 11 jun 2026]
56. Pauling L y Corey RB. The pleated sheet, a new layer configuration of polypeptide chains. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 1951; 37:251-6. doi: 10.1073/pnas.37.5.251
57. Toda M y Athukoralage B. Geometry of Biological Membranes and Willmore Energy. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1558. 1. AIP Publishing, 2013:883-6. doi: 10.1063/1.4825638