DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE TALLERES DIRIGIDOS A ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, SOBRE NOCIONES BÁSICAS DE SISTEMAS DINÁMICOS.

DIANA MARCELA ROA VILLAMIZAR
SERGIO ANDRÉS CÓRDOBA ALVARADO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE TALLERES DIRIGIDOS A ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, SOBRE NOCIONES BÁSICAS DE SISTEMAS DINÁMICOS.

DIANA MARCELA ROA VILLAMIZAR.
SERGIO ANDRÉS CÓRDOBA A.

TRABAJO DE GRADO PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR DEL PROYECTO:
SONIA SABOGAL
PROFESORA ESCUELA DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

A Dios... que me dio la oportunidad de seguir viviendo, por él estoy acá.

A todas las personas que creyeron en mí, las cuales con una frase expresaron que lo podía lograr... También a las que no confiaron... Pero especialmente a ti... ya que fuiste tu, quien me fortaleció cuando sentí que definitivamente no lo podía lograr... pero sobretodo gracias por tu amor...

Suchen Sie Bitte Schatz
Sergio C.

A Dios que me ha regalado la vida, la salud y la sabiduría.

A mis padres quienes se convirtieron en mi compañía y fortaleza, los cuales hicieron posible el cumplimiento de este sueño y a todas aquellas personas que me brindaron su confianza.
En especial a ti, ya que en todas las circunstancias presentadas siempre conté con tu apoyo, por tu paciencia y comprensión, porque con tu cariño y amor he logrado cosas que para mí antes parecían inalcanzables.

Diana Marcela Roa

AGRADECIMIENTOS

A Dios por todas las oportunidades que se nos han presentado, por brindarnos la sabiduría, fortaleza y paciencia para asumir las situaciones presentadas.

A nuestros padres, los cuales nos apoyaron en todo y no dudaron nunca de nuestras capacidades, también agradecemos todos esos valiosos consejos que hicieron de nosotros lo que hoy somos, al igual que por todas las palabras de aliento necesarias en situaciones difíciles.

A todos los profesores de la UIS, cuyas experiencias, conocimientos y amistad nos impulsaron a no desfallecer cuando nos sentíamos derrotados.

A la profesora Sonia quien se convirtió en nuestra amiga y cómplice, por su comprensión y ayuda la cual fue de vital importancia en este trabajo.

Y a nuestros alumnos del 10 – 15 “The best”, por su colaboración y a los profesores del INEM por su tolerancia y participación en las actividades realizadas.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

TITULO: DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE TALLERES DIRIGIDOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, SOBRE NOCIONES BÁSICAS SISTEMAS DINÁMICOS♦.

AUTORES: SERGIO ANDRÉS CÓRDOBA ALVARADO, DIANA MARCELA ROA VILLAMIZAR.♦♦

PALABRAS CLAVES: RELACIÓN, FUNCIÓN, SISTEMAS DINÁMICOS, ITERACIÓN, PUNTO FIJO, PUNTO FIJO REPULSOR, PUNTO FIJO ATRACTOR.

El presente proyecto se realizó en el Colegio INEM de Bucaramanga, con la colaboración de todo el grupo 10 - 15. La idea nuestra fue tratar de mostrar que se pueden enseñar otros temas en la matemática de secundaria, por lo tanto iniciamos buscando un tema diferente a lo que usualmente se enseña en el bachillerato, y a la vez necesitábamos que fuera atractivo, diferente y que se pudiera utilizar equipos como: computadores y calculadoras, por tal motivo nos inclinamos hacia los Sistemas Dinámicos.

Se realizaron 7 guías, 5 talleres y 4 evaluaciones. Todas estas actividades pretendían que el estudiante construyera el concepto intuitivo de sistemas dinámicos y algunas nociones básicas de la teoría de los sistemas dinámicos. Para obtener unos mejores resultados decidimos empezar con temas básicos como: producto cartesiano, relaciones y funciones, para luego empezar con conceptos como: iteración, punto fijo, punto atractor y punto repulsor.

Para el desarrollo de las clases creamos un sistema novedoso a base de punt en el cual cada estudiante recibe 100 puntos al comenzar el periodo académico – serán descontados cierta cantidad dependiendo de las faltas que cometa en clases. De forma similar se hizo con los talleres y evaluaciones.

♦ Trabajo de Grado.

♦♦ Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemática. Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza. Doctora en Matemáticas.

SUMARY

TITLE: DESIGN, IMPLEMENTATION AND EVALUATION OF WORKSHOPS AIMED AT TENTH GRADE STUDENTS ON BASIC CONCEPTS OF DYNAMIC SYSTEMS♦.

AUTHORS: SERGIO ANDRÉS CÓRDOBA ALVARADO, DIANA MARCELA ROA VILLAMIZAR♦♦.

KEY WORDS: RELATION, FUNCTION, DYNAMIC SYSTEMS, ITERATION, FIXED POINT, FIXED POINT REPULSOR, FIXED POINT ATTRACTORS.

This project was undertaken at the College of INEM Bucaramanga, with the collaboration of the entire group 10-15. The idea was our attempt to show that they can teach other subjects in mathematics in high school, so we started looking for a different theme to what is usually taught in high school, and at the same time we needed it to be attractive, different and could be using equipment such as computers and calculators, for that reason we are inclined towards the Dynamic Systems.

There were 7 guides, 5 workshops and 4 assessments. All these activities aimed that the student built the intuitive concept of dynamic systems and some basic knowledge of the theory of dynamical systems. To get better results we decided to start with basic issues such as Cartesian product, relationships and functions, then start with concepts such as iteration, fixed point, and point repulsor point attractor.

For the development of the classes we created a novel system based on points, in which each student receives 100 points at the start of the academic period, it will be discounted depending on a number of offenses committed in the classes. In a similar way was done with the workshops and evaluations.

♦ Work degree

♦♦ Faculty of Science, School of Mathematics, BS in Mathematics.
Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza. PhD in Mathematics.

PRESENTACIÓN

Desde el momento en que llegamos al INEM, el año pasado, encontramos que los estudiantes tienen múltiples falencias en matemáticas, además hay temas que se han abandonado parcialmente, entre esos las funciones.

Por tal razón queríamos enseñar un tema relacionado con funciones y más, si es un tema en el cual los estudiantes pueden ver una aplicación matemática un poco más profunda, novedosa y a la vez sencilla. Pero quizá lo que queríamos realmente era demostrar que sí se puede enseñar otros temas en secundaria, de gran importancia en grados posteriores y más aún en la universidad.

Este trabajo cuenta de la manera más sutil la forma como se enseñaron algunos conceptos básicos de sistemas dinámicos en un curso de décimo grado, iniciando por un capítulo en cual se cuentan los cimientos metodológicos y teóricos matemáticos que soportan nuestro proyecto.

En un segundo capítulo se analiza el por qué del tema, se cuenta de forma jocosa cómo fue la llegada nuestra a la institución, luego se comento cada una de las guías, en las cuales se presentaba el tema, se daban algunos ejemplos y se proponían algunos ejercicios para desarrollar en clase, y en algunas ocasiones otros para desarrollar en casa. Se hace un completo estudio de los talleres, los cuales pretendían reforzar y aclarar los conceptos, preparando de esta manera a los estudiantes para las evaluaciones. Finalmente el capitulo narra la forma como fueron hechas las evaluaciones, se describe cada uno de los puntos y se analiza que era lo que se esperaba que el alumno contestara.

En un tercer capítulo se estudia detalladamente los resultados de las diferentes guías, talleres y evaluaciones; de manera gráfica se puede observar las respuestas de los estudiantes y se agrega una pequeña reflexión de dichas respuestas.

En este mismo capítulo se realiza una serie de conclusiones y reflexiones, en las cuales se plantean algunas posibilidades para construir un nuevo proyecto de grado partiendo del nuestro.

Finalmente queremos comentar que uno de los grandes logros tanto para la institución como a titulo personal, fue la creación del 1er ENCUENTRO DE INNOVACION MATEMATICA EN LA SECUNDARIA UIS – INEM♦, el cual buscaba que se creara conciencia en los profesores del colegio de la necesidad de innovar en la educación matemática en secundaria. Por otra parte cabe anotar que se contó con la valiosa ayuda de la profesora Sonia Sabogal en el comité organizador y de los profesores: Edilberto Reyes, Rafael Isaac, Sonia Sabogal y Carolina Mejia en calidad de ponentes, además de la colaboración de las directivas del INEM, las cuales estuvieron de acuerdo con la realización del evento y de su importancia.

♦ Evento desarrollado en el Colegio INEM el 29 de septiembre de 2008.

CAPITULO 1: MARCO TEÓRICO

Es importante como futuros docentes tener claros los conceptos de las diferentes "teorías del aprendizaje" para saberlas aplicar en el aula de clase. Existen varias corrientes tales como: el **cognitivismo**, el **conductismo**, el **constructivismo** entre otras. Pensamos que el profesor no debe apegarse a una sola, lo ideal es que se mezclen entre si, para "crear" una teoría apropiada, adaptable al tiempo, al espacio y a los tipos de estudiantes.

Como ya lo hemos comentado, nuestras clases buscaban: primero que todo innovar, tanto en la forma de enseñar como en la temática, creamos una, para nosotros, novedosa forma de enseñar a base de puntos; con los cuales buscábamos que los estudiantes rindieran tanto académica como disciplinariamente.

Para un mejor desarrollo de las clases durante el periodo escolar, diseñamos la siguiente estrategia:

Cada estudiante tenía un puesto fijo, previamente asignado, por lo tanto pertenecía a una fila, la cual se convertiría en su equipo de trabajo. Todos los equipos recibieron 100 puntos; cada uno contaba con un capitán el cual estaba encargado de reportar las ausencias, los trabajos, tareas, participaciones, la

indisciplina y notificar si sus compañeros realizaban actividades de otras asignaturas durante la clase de matemáticas (el capitán recibió una planilla).
Al inicio de cada clase se reportó en el tablero el número de puntos acumulados por cada grupo a la fecha, y se registrará en el mismo, lo trabajado en clase.

Se realizarán pequeños quices sin previo aviso, con el objetivo de controlar la puntualidad de los integrantes del equipo, ya que serán descontados 2 puntos si se llega tarde. Si alguien falta a una clase♦, de acuerdo con las reglas serán descontados 5 puntos, al igual para aquellos que no cumplan con las tareas o trabajos propuestos. Los actos de indisciplina también tienen como consecuencia el descuento de 3 puntos, aquí cabe aclarar que trabajar en otras materias durante la clase de matemáticas se cuenta como indisciplina.

Faltar a clases	-5 puntos
Llegar tarde	-2 puntos
No trabajar, ni hacer tareas o trabajos	-3 puntos
Trabajar en otras materias	-3 puntos
Participación	+5 puntos
Decir quien no trabaja	+2 puntos

♦ Debido a la dimensión del colegio INEM, los estudiantes entran a las clases que consideran importantes.

En lo que se refiere a las evaluaciones serán restados los puntos que le hagan falta para completar un total de 50; ejemplo: si obtiene en un examen 38 pts se le restarán 12 al puntaje que lleve acumulado su equipo, (la nota de la evaluación será individual).

(Recuerde que los puntos son descontados o sumados para todos los integrantes del equipo, además su participación activa y positiva aumenta los puntos de su equipo).

Las reglas, aunque poco ortodoxas y extrañas a la vez, fueron muy bien acogidas por el grupo, todos estaban de acuerdo con ellas y entendieron que hacían parte de un grupo y que del desempeño individual dependía el desempeño general.

.

Revisando todas las teorías del aprendizaje nos inclinamos un poco más por la teoría conductista teniendo en cuenta el juego de los puntos en el desarrollo de nuestras clases.

CONDUCTISMO

Diversas teorías nos ayudan a comprender, predecir, y controlar el comportamiento humano y tratan de explicar cómo los sujetos acceden al conocimiento. Su objeto de estudio se centra en la adquisición de destrezas y habilidades, en el razonamiento y en la adquisición de conceptos.

Por ejemplo, la **teoría del condicionamiento clásico de Pávlov**: explica cómo los estímulos simultáneos llegan a evocar respuestas semejantes, aunque tal respuesta fuera evocada en principio sólo por uno de ellos. La teoría del condicionamiento instrumental u operante de Skinner describe cómo los refuerzos forman y mantienen un comportamiento determinado.

La influencia inicial del conductismo en la psicología fue minimizar el estudio introspectivo de los procesos mentales, las emociones y los sentimientos, sustituyéndolo por el estudio objetivo de los comportamientos de los individuos en relación con el medio, mediante métodos experimentales.

Este nuevo enfoque sugería un modo de relacionar las investigaciones animales y humanas y de reconciliar la psicología con las demás ciencias naturales, como la física, la química o la biología.

El conductismo actual ha influido en la psicología de tres maneras[♦]**:**

[♦] Tomado de: www.monografias.com/trabajo16/teoria - piaget/teoria piaget.html.

- Ha reemplazado la concepción mecánica de la relación estímulo-respuesta por otra más funcional que hace hincapié en el significado de las condiciones estimulantes para el individuo.

- Ha introducido el empleo del método experimental para el estudio de los casos individuales.

- Ha demostrado que los conceptos y los principios conductistas son útiles para ayudar a resolver problemas prácticos en diversas áreas de la psicología aplicada.

Albert Bandura describe las condiciones en que se aprende a imitar modelos. **La teoría psicogenética de Piaget** aborda la forma en que los sujetos construyen el conocimiento teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo. La teoría del procesamiento de la información se emplea a su vez para comprender cómo se resuelven problemas utilizando analogías y metáforas.

No hay unanimidad de criterios al denominar al conductismo o a la terapia conductista. En general no se la considera una escuela psicológica sino más bien como una orientación clínica, que se enriquece con otras concepciones. La historia de esta terapia ha evolucionado bastante por lo que hoy sería difícil que una persona se autodefina como un conductista puro o clásico. Por esta razón otros autores no conductistas llaman a los continuadores de los lineamientos conductistas como "neo-conductistas", pero esto tampoco satisface a los protagonistas.♦

Cuando se habla de conductismo aparece una referencia a palabras tales como "estímulo", "respuesta", "refuerzo", "aprendizaje" lo que suele dar la idea de un esquema de razonamiento acotado y calculador. Pero ese tipo de palabras se convierten en un metalenguaje científico sumamente útil para comprender la psicología.♦♦

En un proceso de enseñanza – aprendizaje el docente debe tener ideas claras no solo de las teorías del aprendizaje que fundamentan el proceso, sino además del los conceptos que se están estudiando, es decir tener muy clara la teoría que se va a enseñar. Por tal motivo a continuación presentaremos los soportes teóricos matemáticos que cimientan el tema que trabajamos en nuestro proyecto de grado.

♦Tomado de: www.monografias.com/trabajo16/teoria - piaget/teoria piaget.html.

♦♦ Tomado de: http://produceideas.blogspot.com/2006/04/conductismo - en - soc – de – la – educación.html.

PAREJAS ORDENADAS

El orden de los términos en un conjunto de dos elementos no interesa, por ejemplo: {3, 5} = {5, 3}

Por otra parte, una **pareja ordenada** consta de dos elementos, de los cuales uno será el **primer elemento**, y el otro el **segundo**. Una pareja ordenada se escribe (a, b), en donde a es el primer elemento y b es el segundo. Dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales si y solamente si a = c y b = d.

PRODUCTO CARTESIANO

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B, denotado por A x B, es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B.♦

Ejemplo:

Si A= {a,b,c} y B={1,2}, determinar el producto cartesiano A x B y B x A.

A x B = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

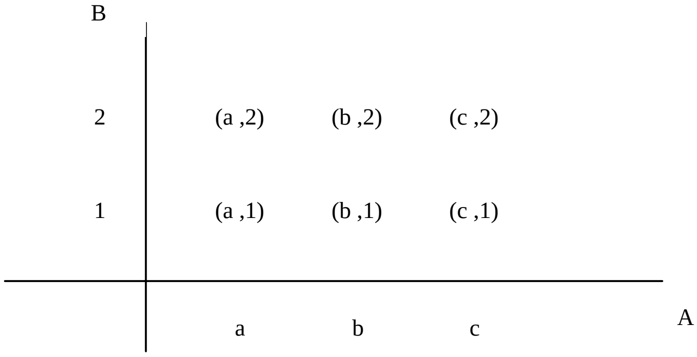
B x A = {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)}

♦ Tomado de: BAUTISTA BALLÉN, RAMÍREZ MENDEZ. NUEVAS MATEMATICAS 10: EDITORIAL SANTILLANA. AÑO 2005.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano de dos conjuntos se representa gráficamente en un sistema de coordenadas, según las convenciones del plano cartesiano.

Sobre el eje horizontal, se ubican los elementos del primer conjunto y sobre el eje vertical, se ubican los elementos del segundo conjunto (también se puede hacer al contrario). Luego se ubican las parejas ordenadas correspondientes.



Como se puede observar, el producto cartesiano no es conmutativo.

RELACIÓN

Una **relación** R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano A x B. A se denomina **conjunto de salida** y B se **conjunto de llegada**.

En general, la relación R es representada por el conjunto R determinado por comprensión♦.

♦ tomado de: BAUTISTA BALLÉN, RAMÍREZ MENDEZ. NUEVAS MATEMATICAS 10: EDITORIAL SANTILLANA. AÑO 2005.

Así:

R= {(a,b) / $a \in A \wedge b \in B\} \subseteq$ A x B

Por ejemplo, dados A={m,n} y B={0,1}, algunas de las relaciones que se pueden definir de A en B son:

R_1= {(m,0), (m,1)}

R_2= {(n,1)}

R_3= {(m,0), (m,1), (n,1)}

RELACIÓN TOTALMENTE DEFINIDA

Una relación establecida entre dos conjuntos está **totalmente definida**, si está dada por una regla o condición que permite determinar cuáles de las parejas del producto cartesiano pertenecen a ella.♦

Ejemplos:

La relación R_1 definida de A = {0,1} en B = {0,1,2}, cuya condición es "ser menor que".

Por extensión, R_1 = {(0,1), (0,2), (1,2)}

La relación R_2 = {(x,y)/ y=x^2} definida del conjunto X = {0,1,2,3} en el conjunto Y= {0,1,2,3,4,9}.

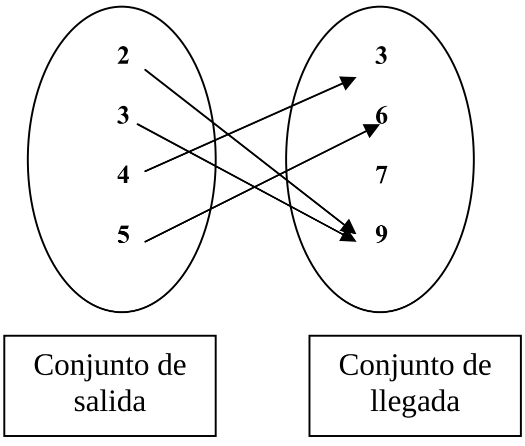
La relación R_2 = {(0,0), (1,1), (2,4),(3,9)}

♦ tomado de: BAUTISTA BALLÉN, RAMÍREZ MENDEZ. NUEVAS MATEMATICAS 10: EDITORIAL SANTILLANA. AÑO 2005.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA RELACIÓN

De forma análoga al producto cartesiano, la representación gráfica de una relación está conformada por todos los puntos correspondientes a las parejas de la relación que están ubicados en un sistema de coordenadas.

Las relaciones también se representan mediante un diagrama llamado sagital o diagrama de flechas.



PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Una relación R definida de un conjunto A en si mismo, se denomina **relación** en A. Algunas relaciones de este tipo cumplen ciertas propiedades que permiten su clasificación. De acuerdo con esas propiedades, algunas de las relaciones se pueden clasificar en: reflexivas, simétricas, transitivas o antisimétricas.

R es **Reflexiva**: si $\forall$ a $\in$ A, se tiene que (a, a) $\in$ R

R es **Simétrica**: si $\forall$ (a, b)$\in$ R, también la pareja (b, a) $\in$ R

R es **Transitiva** si (a,b) $\in$ R y (b, c) $\in$ R, entonces (a,c) $\in$ R.

R es **Antisimétrica** si (a,b) $\in$ R y (b,a) $\in$ R entonces a = b[♦]

Ejemplo

Clasificar la siguiente relación como: reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica.

La relación “ser múltiplo de”, definida en el conjunto de los enteros.

Es reflexiva ya que, todo número entero es múltiplo de si mismo.

No es simétrica porque aunque 27 es múltiplo de 3, 3 no es múltiplo de 27.

Es transitiva ya que por ejemplo 6 es múltiplo de 2 y 12 es múltiplo de 6 y 12 es múltiplo de 2.

No es antisimétrica ya que aunque 5 es múltiplo de -5 y -5 es multiplo de 5, 5 no es igual a -5.

[♦] Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/propiedades de las relaciones

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Muchas relaciones que se establece entre los diferentes conjuntos numéricos, tienen infinito número de elementos, por esta razón es imposible escribir todas sus parejas ordenadas. En estos casos se describe la relación enunciando la condición que satisfacen sus elementos, mediante una ecuación o una desigualdad[♦].

Ejemplo, la relación $R:Q \rightarrow Z$ definida por:

$R = \{(n, q) / n \in Z, q \in Q \text{ y } q = n/3\}$

Esta es una relación totalmente definida, que consiste en el conjunto solución de una ecuación en dos variables que toman valores en distintos conjuntos.

DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA RELACIÓN

En una relación R definida de un conjunto A en un conjunto B, se denomina **dominio** de la relación R y se denota Dom R, al conjunto formado por los elementos de A que están relacionados con algún elemento de B, mediante R.

[♦] Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/propiedades de las relaciones

Además, el conjunto formado por los elementos de B tales que algún elemento de A está relacionado por R, recibe el nombre de **rango** de la relación R y se denota Rec R.

Ejemplo

Determinar el dominio y el recorrido de la siguiente relación.

$R_1 = \{(x,y) / x \in Z, y \in Z, y = x^2 - 5\}$

En esta relación x puede ser cualquier valor entero, luego Dom R_1= Z. cualquiera que sea el valor entero x, se observa que el valor de y nunca será menor que – 5, por lo tanto, Rec $R_1 = \{y \in Z / y \geq -5\}$

FUNCIÓN

Una **función** f definida del conjunto X en el conjunto Y es una relación tal que, a cada elemento de X, le hace corresponder un único elemento de Y, y el dominio de f es todo el conjunto X. se denota: $f: X \rightarrow Y$.

Las funciones suelen expresarse mediante ecuaciones de la forma y = f(x), lo cual indica que si x es cualquier elemento del conjunto de partida, f le hace corresponder un único elemento y.

Así el conjunto de parejas que conforman la función se determina de la siguiente manera: $f = \{(x, y) / y = f(x)\}$

En la expresión $y = f(x)$, y depende de x, por esta razón a la variable x se le llama **variable independiente** y a la variable y se le conoce como **variable dependiente**.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Un caso particular de magnitudes dependientes, se presenta entre las magnitudes que se relacionan en forma proporcional.

Las magnitudes que aumentan o disminuyen en la misma razón son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes para las cuales una aumenta y la otra disminuye en una razón constante, son inversamente proporcionales.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El **dominio** de una función $f: X \rightarrow Y$ es el conjunto formado por las primeras componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a f.

Se simboliza $\text{Dom } f = \{x / (x, y) \in f\}$

Cuando una función está dada por una ecuación o fórmula, el dominio está constituido por todos los números para los cuales la fórmula está definida. Por esta razón, se deben tener en cuenta algunas restricciones tales como divisiones entre cero (0), los radicales negativos de una raíz par.

Ejemplo:

El dominio de la función y = f(x) = $\frac{5}{x-2}$, la cual esta definida de los reales en los reales, está formado por todos los valores reales diferentes a 2, pues si x = 2, el denominador es igual a cero y la división por cero no está definido. Por lo tanto, Dom f = R – {2}.

FUNCIONES INYECTIVAS

Se denomina **función inyectiva** o **función uno a uno,** aquella en la que dos elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas en el conjunto de llegada. Es decir; ningún elemento del conjunto de llegada es imagen de dos elementos distintos del dominio.

RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

El **recorrido** de una función f: X→Y es el conjunto formado por las segundas componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a f; se simboliza

Rec f = {y / (x, y) $\in$ f}.

En general, el recorrido de una función es el conjunto de imágenes que producen los elementos del dominio, mediante la función.

Para determinar el recorrido de una función se tienen en cuenta las mismas restricciones que en el caso del dominio.

Ejemplo:

Determinemos el recorrido de y = g(x) = $\frac{3}{x+1}$

Tomemos x = g(y), es decir, despejando x en términos de y, así:

y = $\frac{3}{x+1} \Rightarrow$ x+1 = $\frac{3}{y} \Rightarrow$ x = $\frac{3}{y} - 1$

Por lo tanto el recorrido de esta expresión es cualquier elemento de R excluyendo al cero, es decir Rec g = R – {0}.

FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Una función es **sobreyectiva** si el recorrido de la función coincide con el conjunto de llegada. Es decir, todo elemento del conjunto de llegada es imagen de algún elemento del dominio de la función.

Por ejemplo:

La función f: **R** $\rightarrow$ **R^+ U {0}**, tal que y = x^2 es sobreyectiva ya que Rec f es igual al conjunto de llegada de f.

FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

La ecuación o fórmula de una función permite determinar el dominio y el recorrido por medio de la regla específica que la describe.

Una función también se puede representar mediante una tabla de valores. La tabla es un arreglo, en el cual se escriben los elementos del dominio y los elementos del recorrido en columnas.

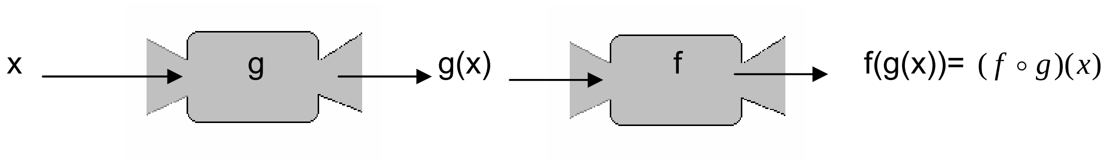
La gráfica de una función, se obtiene al representar un número suficiente de parejas ordenadas que satisfacen la ecuación que define la función. La información que se obtiene de estas parejas ordenadas permite hacer un trazo muy aproximado de la función, en el plano cartesiano.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

En general dadas dos funciones cualesquiera f y g, partimos de un número x en el dominio de g y encontramos su imagen g(x); si este número g(x) está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de f(g(x)). El resultado es una nueva función h(x) = f(g(x)) obtenida al sustituir g en f; esta se conoce como la **composición** (o la **compuesta**) de f y g y se denota ♦ $f \circ g$.

En otras palabras, dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la composición de f y g) esta definida por: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que g(x) esté en el dominio de f. En otras palabras $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que g(x) y f(g(x)) lo están.



Para realizar la composición de tres o más funciones $(f \circ g \circ h)(x)$, se calcula primero h, luego g y luego f:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

♦ Tomado de: http://www.wikipedia.org/wiki/funciones

SISTEMAS DINÁMICOS

Ahora presentamos un resumen de definiciones y conceptos básicos relacionados con los sistemas dinámicos. La palabra discreto se utiliza para diferenciarlos de los sistemas continuos, basados en ecuaciones diferenciales. La terminología que se presenta a continuación no es la misma que vieron los estudiantes debido a su complejidad.

Un **sistema dinámico** es una función f: X$\rightarrow$ X definida en un espacio métrico (X,d). Se denota como la pareja {X; f}. La órbita de un punto x es la sucesión de puntos del espacio que se obtienen iterando la función indefinidamente. La órbita de x_0 se define como una sucesión de la siguiente forma:

$$o(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\} = (f^n(x_0))_{n \in N \cup \{0\}} \ . ^{\blacklozenge}$$

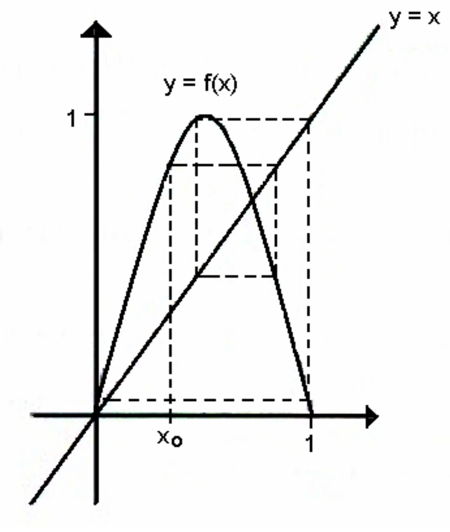
Sea f: X$\rightarrow$ X una función, llamaremos las **iteraciones** de f a las funciones en X, que resultan de la repetida composición de f consigo misma. Estas se denotan así: f^0, f, f^2, f^3,…, f^n,…, con $n \in N$.

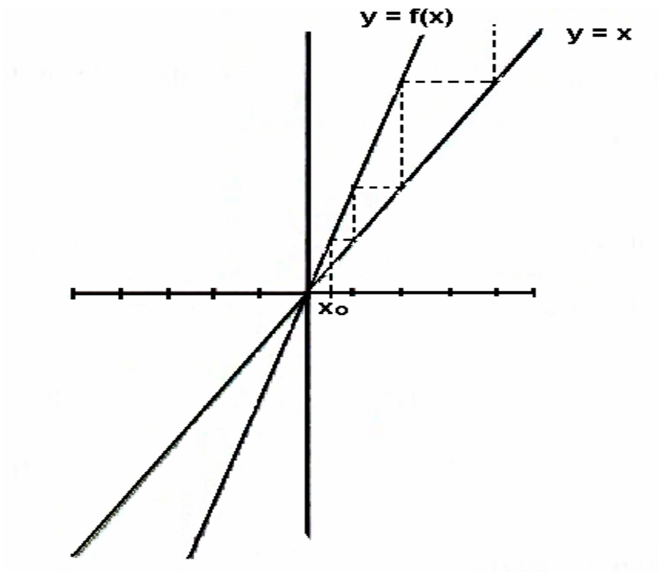
En algunas ocasiones, abusando del lenguaje, al hablar de la cardinalidad de la órbita nos referimos a ella como un conjunto. Las órbitas de cada punto del espacio describen la dinámica del sistema.

♦ Tomado de: González Calderón William. CAOS Y EL CONJUNTO DE CANTOR. Universidad Industrial de Santander. 2007

ANÁLISIS GRÁFICO

“Ver” la trayectoria de un punto hace más comprensible el estudio de su dinámica. Una representación grafica conocida es el “trazo de telaraña” en el plano cartesiano. Al dibujarse asemeja a una telaraña, de allí su nombre; para este se dibuja sobre el plano la recta y = x que corresponde a la función identidad Id(x) = x y se bosqueja la gráfica de la función f dada en el mismo plano. Ubicamos x_0 en el eje x, luego nos desplazamos verticalmente hasta $f(x_0)$, el cual queda justo en la gráfica de f; ahora como debemos aplicar f a $f(x_0)$ necesitamos $f(x_0)$ en el eje x como punto de entrada; para esto nos movemos horizontalmente hasta interceptar y = x (si f está por encima de Id, nos movemos hacia la derecha, si f está por debajo de Id nos movemos a la izquierda), lo cual se da en $(f(x_0),f(x_0))$ de esta forma insertamos a $f(x_0)$ como punto de entrada y repetimos el proceso sin necesidad de ir hasta el eje x♦.





♦ Tomado de: Gómez Flórez Nayibe Carolina INTRODUCCION AL CAOS A PARTIR DE LOS SISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS. Universidad Industrial de Santander. 2005

PUNTOS FIJOS

Si el espacio en el que se trabaja es infinito, tendremos infinitos puntos y por ende infinitas órbitas por analizar. Para facilitar y optimizar el trabajo utilizaremos algunos conceptos y resultados sobre puntos y órbitas. Un punto es fijo si al aplicar la función sobre é, no se mueve.

Sea f: $X \to X$ y $x_0 \in X$. decimos que x_0 es un **punto fijo** de f si $f(x_0) = x_0$. En este caso $o(x_0, f) = \{x_0\}$

Sea $S \subseteq R$, se dice que un número $u \in R$ es una **cota superior** de S si y sólo si $s \leq u \ \forall \ s \in S$.

Se dice que un número $w \in R$ es una **cota inferior** de S si y sólo si $w \leq s \ \forall \ s \in S$

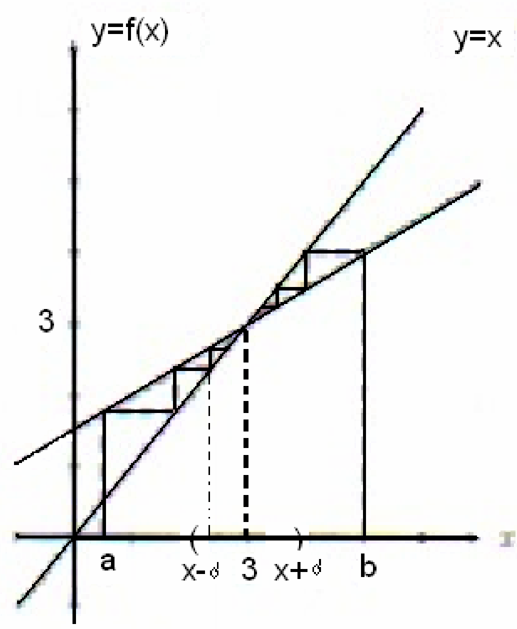
Se dice que S está **acotado por arriba** si tiene una cota superior, además decimos que S es **acotado por abajo** si tiene una cota inferior. Si S está acotado por arriba y abajo, decimos que S es **acotado**.

Decimos que x es un **punto atrapado** si su órbita bajo f es un conjunto acotado. Al conjunto de todos los puntos atrapados lo denotamos así:

$A(f) = \{x / o(x, f)$ está acotada$\}$

No todos los puntos fijos se comportan de esta manera, como un punto fijo atrapado, algunos se caracterizan por “atraer” y otros por “alejar” con el paso del tiempo, a los puntos que se encuentran “cerca”.

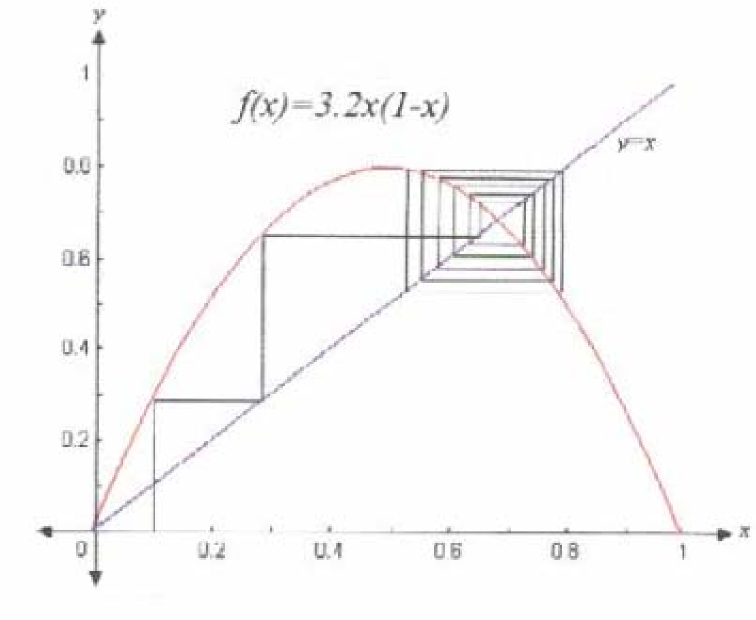
Sea $I \subseteq R$ y $f : I \to I$ con x_0 punto fijo de f. Decimos que x_0 es un **punto fijo atractor** de f si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se tiene que $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x_0$



PUNTO FIJO REPULSOR

Sea $I \subseteq R$ y $f : I \to I$, x_0 es un punto fijo de f. Decimos que x_0 es un **punto fijo repulsor** de f si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$, existen n $\in$ **N** (n depende de x) tal que $f^n(x)$ no está en $V_\delta(x_0)$.

La definición dice que todos los puntos que pertenezcan a la δ- vecindad del punto fijo repulsor, excepto él mismo, "saldrán" eventualmente de ella. Note que la definición no niega que en algún momento pueden retornar.



ITERGRAF

Teniendo en cuenta la importancia de implementar el uso de la tecnología en la educación y que el tema de sistemas dinámicos se presta para esto; se tomo un programa, en el cual los estudiantes pueden ver la iteración grafica y las órbitas de la función y = cx (1-x) en las calculadoras TI 92 Plus y VOYAGE llamado **Itergraf**[♦] creado por Carlos Julio Daza, el cual fue acondicionado y mejorado por ABAK calculadoras.

[♦] Se encuentra disponible en algunas calculadoras de la Escuela de Matemáticas de UIS

En un principio se decidió trabajar con el programa diseñado por Carlos Julio Daza, pero viendo que presentaba varios errores se modifico de la siguiente manera:

```
Itergraf ( )
Prgm
Local a,i,io,j,it,n,k,xmn,xmx,ymn,ymx,esc
setMode (“Display Digits”,”Fix 3”)
1 →xmx
1 →ymx
0→xmn
0→ymn
ClrDraw
ClrGraph
FnOff
xmn→xmin
xmx→xmax
ymn→ymin
ymx→ymax
ClrIO
Disp “Ingrese valor de c”
Imput a
Disp “Ingrese punto inicial x0”
Imput io
Disp “Cuantas iteraciones va realizar”
Imput it
ClrGraf
Lbl abak1
DrawFunc a*x*(1-x)
DrawFunc x
io→i
0→n
o→k
If k=0
Goto 12
Lbl 11
a*(i-a) *i*i→i
n+1→n
if n<k
Goto 11
```

```
Goto 13
Lbl 12
Line i,0,i,i
Lbl 13
a*i-a*i*i→j
Line i,i,i,j
Line i,j,j,j
Pause
Disp "Valor siguiente de x”
Disp j
Pause
j→i
n+1→n
If n<k+it
Goto 13
Dialog
Title “Repetir”
DropDown “Repetir?”,{“No”,”Si”} esc
Request “Valor de Xmin”,xmn,0
Request ”Valor de Xmax”,xmx,0
Request ”Valor de Ymin”,ymn,0
Request ”Valor de Ymax”,ymx,0
EndDlog
If esc = 2 then
ClrDraw
ClrGraph
ClrIO
expr (xmx) →xmx
expr (ymx) →ymx
expr (xmn) →xmn
expr (ymn) →ymn
xmn →xmin
xmx →xmax
ymn →ymin
ymx →ymax
Goto abak1
EndIf
ClrIO
Disp “CODIGO CREADO POR CARLOS DAZA”
Disp”ACONDICIONADO Y MEJORADO POR”
Disp”ABAK CALCULADORAS”
Pause
DispHome
EndPrgm
```

Ahora realizaremos una breve explicación del programa que desarrollamos: inicialmente el programa solicita el valor de la constate c que determina la función particular que se va a graficar dentro de la familia de funciones $f(x) = cx(1-x)$.

Ya digitado el valor de c y luego de dar enter, el programa nos solicita el valor inicial de la órbita. Luego se pide el número de iteraciones que se van a realizar.

Con el valor inicial de la órbita, y el valor de *c* se genera las iteraciones gráficas correspondientes, finalmente se muestra en la pantalla la iteración gráfica (hallar el punto fijo).

Es en esta parte en donde el estudiante puede volver a repetir la iteración gráfica, teniendo en cuenta que se puede modificar la escala utilizada en un principio, esto en caso de que en un principio no se observe claramente el comportamiento de la iteración.

CAPITULO 2: SISTEMAS DINÁMICOS TODO UN CUENTO

Al terminar el **1er Encuentro de Innovación Matemática en la secundaria UIS-INEM**[♦], el cual nos sentimos orgullosos de haber propuesto y orientado, nos hicimos varias preguntas: ¿Cómo nos metimos en este cuento?, ¿Cómo fue el proceso para llegar hasta donde estamos?. Haciendo una reflexión nos pudimos dar cuenta de que el camino no fue nada fácil, pero realmente fue muy enriquecedor para nosotros como futuros docentes, por lo tanto lo queremos compartir con usted en una pequeña historia.

EL TEMA

La idea esencial de nuestro proyecto siempre fue innovar, por lo tanto queríamos un tema diferente a lo que usualmente se enseña en la secundaria, y a la vez necesitábamos que fuera atractivo para los estudiantes.

Teniendo en cuenta que a los jóvenes de hoy les gusta todo lo referente a la tecnología y que ya están cansados del tablero y la tiza, nos pusimos en la tarea de buscar un tema llamativo y que además involucrara el uso de computadores o calculadoras; por tal motivo nos inclinamos por los sistemas dinámicos, ya que este tema muy pocas veces ha sido estudiado en la matemática de secundaria y además recibe todos los siguientes atributos:

[♦] Evento realizado en el colegio INEM el día 29 de septiembre de 2008

- Es un tema moderno.
- Es un tema diferente.
- El uso de la tecnología para su enseñanza es muy útil.
- Constituye una oportunidad para que los estudiantes vean una aplicación de las funciones en matemáticas.

Todas estas razones acompañadas de la alta competencia en el tema de nuestra directora del proyecto **Sonia Sabogal**, hicieron que optáramos por enseñar sistemas dinámicos en 10º grado.

SIN ESTUDIANTES

El **Proyecto de Grado I**, lo realizamos en el colegio INEM con la ayuda de la profesora **Otilia Vargas**, quien muy gentilmente nos colaboró "prestándonos" a sus estudiantes para realizar nuestra práctica docente. La idea desde un principio era seguir trabajando con sus estudiantes, dado que ella se encontraba vinculada a la UIS y además estaba convencida de que intercambios como este (Colegio – Universidad) son de gran importancia especialmente para la institución.

En el momento de iniciar el **Proyecto de Grado II**, nos encontramos con la noticia de que la profesora Otilia renunciaba tanto al colegio, como a la universidad; lo cual nos dejaba automáticamente sin estudiantes para realizar nuestro trabajo.

La situación parecía realmente devastadora, sin embargo optamos por hablar con algunos docentes de la institución y pedir su colaboración para poder trabajar con sus estudiantes por lo menos durante 2 o 3 meses, ya que el tema a trabajar estaba fuera del programa académico de la institución y requería algo de tiempo y paciencia.

Fue ahí cuando llegamos a donde el director del departamento de matemáticas **Ricardo Angarita** quien muy amablemente nos abrió las puertas nuevamente y de esa manera llegamos a la sección 10 – 15.

MUCHO TIEMPO PARA ENSEÑAR

Dados algunos inconvenientes presentados en la institución, el profesor Ricardo Angarita debía “librarse” de 2 horas semanales de su carga académica, por lo tanto este tiempo fue asignado para el desarrollo de nuestro proyecto de grado, durante todo el año 2008

Uno de los secretos para lograr los resultados obtenidos fue precisamente que se contó con una buena cantidad de tiempo, lo cual nos sirvió para poder partir de temas básicos como: producto cartesiano, pasando luego por funciones, composición de funciones; vitales a la hora de abordar los conceptos básicos de los sistemas dinámicos.

LOS ESTUDIANTES

El proyecto se desarrolló con estudiantes de décimo grado (10 – 15) de la modalidad de académico ciencias, Contamos con un grupo de 36 estudiantes, con edades entre 15 y 16 años.
La modalidad de académico ciencias está conformada por los estudiantes que se destacan en las áreas de ciencias y matemáticas durante sus primeros cuatro años de bachillerato. Por esta razón estos alumnos fueron escogidos para el desarrollo de las actividades.

Contrariamente al perfil de la modalidad, el grupo 10 – 15 no se destaca por su formación académica, pues encontramos en él unas grandes "lagunas" en temas tales como operaciones con enteros, operaciones con fracciones, solución de ecuaciones, todo esto sumado a una creciente indisciplina que aunque no fue tan fácil, pudimos combatir positivamente.

Al principio fue muy complicado llegar a los estudiantes, parecían reacios a los nuevos temas y la nueva metodología. Además nos encontramos con que no tenían ninguna clase de conocimiento acerca de conjuntos, ni de relaciones y mucho menos de funciones, por lo tanto tuvimos que empezar de cero.

COMENZAR DE CERO

Aunque realmente no esperábamos encontrar tantas lagunas en los temas básicos de matemáticas, quizá fue comenzar de cero uno de los secretos del éxito del proyecto, dado que los estudiantes se encontraban ahora muy bien preparados para afrontar un tema nuevo, cada vez más complejo.

De no haberlo hecho nos hubiéramos enfrentado a graves inconvenientes ya que muchos estudiantes presentarían un bajo nivel de entendimiento y por ende una mayor desmotivación.

LA PRIMERA CLASE

Como es lógico, antes de dar la primera clase sentíamos muchos nervios y a la vez mucha ansiedad, no sabíamos cómo iban a responder los estudiantes a unos profesores nuevos (además jóvenes) y a un tema que no se ve normalmente en el colegio.

La clase inició haciendo una breve presentación de los temas que se iban a estudiar:

PRODUCTO CARTESIANO

RELACIONES

FUNCIONES

- Dominio y recorrido de una función.
- Composición de funciones.

CONCEPTOS BÁSICOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

- Iteración de funciones.
- Órbita.
- Punto fijo, punto atractor y repulsor.
- Iteración gráfica.

Después de aclarados los temas que se iban a trabajar, dimos paso a la primera guía.

CAPITULO 3: PREPARACION DE LAS GUIAS, TALLERES Y EVALUACIONES

GUIA No 1 (ANEXO 1)

El objetivo de la guía era proporcionar a los estudiantes los conocimientos básicos del concepto de relación, para ello iniciamos dando la definición de producto cartesiano con su respectiva notación, lo cual era de vital importancia en la construcción de los conceptos.

Con un ejemplo muy sencillo quisimos que el estudiante pudiera visualizar el concepto de producto cartesiano y a la vez notara por su propia cuenta si cumple o no con la propiedad conmutativa.

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, determinar A x B y B x A. Observe si el producto cartesiano es conmutativo.

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Luego se procedió a dar el concepto de relación con su respectiva notación, partiendo de la definición anterior.
Se dio un ejemplo de lo que es una relación utilizando una propiedad aritmética como “ser menor que”.

Ya con los conceptos un poco más claros se procedió a proponer algunos ejercicios, en los cuales se esperaba que los estudiantes aplicaran conceptos tales como “divisible por”, “ser múltiplo de”, “ser el cuadrado de”.

Se propusieron también una serie de ejercicios para trabajar en casa en los cuales se buscaba reforzar el concepto de relación.

GUIA No 2 (ANEXO 2)

El objetivo de esta guía esta enfocado en brindar a los estudiantes el concepto de dominio y recorrido de una relación.

En primera instancia se hizo una pequeña observación, para que los estudiantes pudieran detallar que muchas relaciones se establecen entre conjuntos numéricos, lo cual hace imposible escribir todas las parejas que la conforman, por lo tanto se utiliza lo que se conoce como ecuación o desigualdad, siempre y cuando se cumpla con las condiciones establecidas por la relación.

Se dieron unos ejemplos sencillos en los cuales se podía detallar la forma como se puede escribir una relación entre conjuntos numéricos.
Luego se procedió a representar gráficamente estas relaciones.

$$R_1 = \{(x, y) / x \in R \wedge y \in R, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) / x \in R \wedge y \in R, y = x^2\}$$

A continuación se dio la definición de dominio y recorrido; es de gran importancia que los estudiantes comprendan estos conceptos ya que más adelante tendrán que aplicarlos.

Se analizó la siguiente relación:

$$R_3 = \{(x, y) / x \in Z \wedge y \in Z, y = x^2 - 5\}$$

La cual se graficó, se hallo su dominio y su recorrido, hicimos especial énfasis al momento de graficar dada la importancia que este hecho tiene para el desarrollo del proyecto.

Luego se dejaron algunos ejercicios, en los cuales se les pedía a los estudiantes que graficaran las parejas que forman las relaciones e identificaran su dominio y recorrido.

TALLER 1 (ANEXO 3)

El objetivo del primer taller era reforzar los conceptos de relación, dominio y recorrido, al igual que se buscaba que el estudiante desarrollara la habilidad para realizar gráficas.

Para esto, se pidió a los estudiantes que llevaran una hoja milimetrada, calculadora, lápiz y borrador.

En el primer punto se propusieron algunas ecuaciones en las cuales el estudiante debía hallar su dominio y recorrido, además tenía que hacer su respectiva gráfica.

Dado el gusto que sienten los estudiantes por la biología se diseñó un segundo punto, el cual plantea una problemática relacionada con esta ciencia. El ejercicio pretendía que cada estudiante realizara un diagrama, teniendo en cuenta los datos proporcionados por una tabla (los chirridos de una especie animal con respecto a la temperatura).

En un tercer punto el cual era opcional, se buscaba que los estudiantes graficaran algunas ecuaciones un poco mas complejas, con términos quizá desconocidos como la constante de euler (e) y la función **Logaritmo natural** (Ln), con ayuda de la calculadora.

Para este taller se dispuso de 1 hora de clase (50 min.); los estudiantes trabajaron en grupos de 2 personas y contaron con nuestra supervisión permanente.

EVALUACIÓN RELACIONES Y FUNCIONES. (ANEXO 4)

El examen se llevó a cabo en grupos de 2 estudiantes, tenia un total de 3 puntos, se contó con un tiempo aproximado de 50 minutos, aunque se dejó un tiempo adicional.

El primer punto buscaba que los estudiantes dieran la definición de:

- producto cartesiano;
- relación;
- dominio de una relación;
- recorrido de una relación.

En el segundo punto se pedía que el estudiante graficara algunas ecuaciones, para esto contaban con una hoja milimetrada y su calculadora.

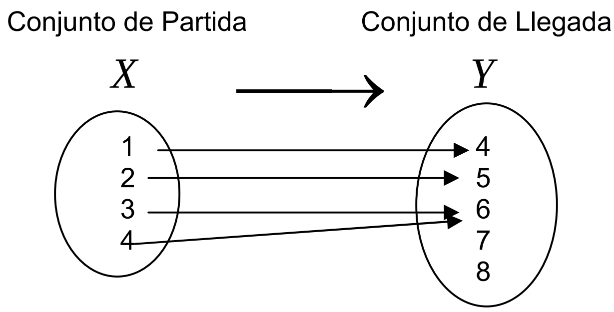
El punto 3 pedía que el estudiante realizara una gráfica con los datos que arroja una tabla, la cual relaciona el número de chillidos de una especie animal con la temperatura.

Teniendo en cuenta que los estudiantes no tienen el hábito de estudiar y a la vez queríamos mirar cuales estudiantes habían hecho el taller 1 y cuales únicamente se dedicaron a copiar, hicimos el tercer punto igual al que se tenía en la actividad anterior. Podemos decir que se hizo de esta manera, para que los estudiantes encontraran en los talleres una motivación adicional.

GUIA No 3 (ANEXO 5)

El objetivo de esta guía es que el estudiante describa el concepto de función al igual que de dominio y de recorrido.

La guía comienza dando la definición de función, partiendo del concepto de relación, además se establecen los conceptos de imagen, conjunto de llegada y conjunto de salida. Se da un pequeño ejemplo utilizando diagramas sagitales, en los cuales se puede ver fácilmente cuál es el conjunto de salida, el conjunto de llegada, así como las imágenes de la función.



Con temas un poco jocosos se quiso plantear la diferencia entra relación y función. Utilizamos para esto la relación “ser novio de”, se le preguntaba a los estudiantes si esta era o no función.

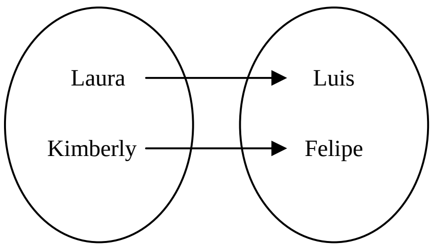


Fig 1

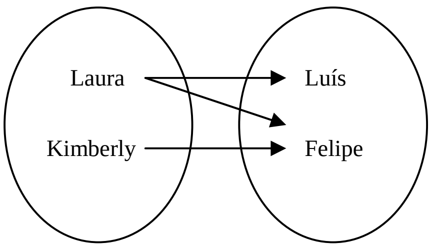


Fig 2

Propusimos que este podía ser un ejemplo de una función, puesto que cada novia tiene su novio (fig 1), los estudiantes para nuestra sorpresa dijeron que este no era precisamente un ejemplo de función, puesto que una niña podía tener 2 o más novios, por lo tanto ya no seria función (fig 2)

Luego se propusieron unos ejercicios para desarrollar en clase, estos buscaban que el estudiante determinara si los conjuntos de parejas dados eran o no funciones. Para esto tenían que aplicar todos los conceptos vistos antes.

En un segundo punto se daba una función y se pedía a los alumnos que determinaran las imágenes de algunos valores específicos

A continuación se procedió a dar la definición de dominio y recorrido de una función, utilizando para esto su respectiva notación.
Con un ejemplo sencillo se quiso mostrar claramente los conceptos de dominio y recorrido, haciendo énfasis en la importancia que esto tiene en temas posteriores.

Se puso un ejercicio en clase para que los estudiantes afianzaran los conceptos y aclararan las posibles dudas; pedimos que determinaran el dominio y el recorrido de unas funciones dadas. Para esto podían graficar primero.

Posteriormente se dejaron unos ejercicios extra clase en los cuales los estudiantes pondrían en práctica los nuevos conceptos. En el primer punto se buscaba que el alumno escribiera la regla general que asigna a cada elemento del conjunto A una imagen en el conjunto B.

En el segundo punto se dieron dos conjuntos M y N. Luego se presentan unos conjuntos de parejas ordenadas y se le pregunta al estudiante: ¿Cuáles de los conjuntos de parejas ordenadas corresponden a una función? y, ¿cuáles no?, dando la justificación pertinente.

M = {1,2,3,4,5 } ; N = { 0,2,2,3,4,5 }

h = { (1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0) }

M = { 1,2,3,4,5 } ; N = { 2,4,6,8 }

g = { (1,2),(2,4),(3,6),(4,8) }

M = {1,2,3,4, 5 } ; N = { 5,10,15,20,25 }

f = { (1,5),(1,10),(2,15),(3,20),(4,25),(5,25) }

En un tercer punto se buscaba que el estudiante hallara ciertas imágenes, para algunas ecuaciones dadas.

$$f(x) = x + 4;\ f(-1),\ f(0),\ f(10)$$

$$f(x) = -x + x^2 + 1;\ f(-2),\ f(0),\ f(4)$$

$$f(x) = x^2 - x;\ f(-3),\ f(1),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$$

TALLER 2 (ANEXO 6)

El objetivo de este taller era reforzar los conceptos de función, dominio y recorrido, así como practicar las gráficas de funciones.

Para el desarrollo de este taller utilizamos el programa WINPLOT, un software que permite que los estudiantes vean gráficamente el comportamiento de algunas funciones, puedan hacer modificaciones y a la vez ver el resultado de este tipo de cambios.

En el primer punto se le pedía a los estudiantes que con la ayuda del software WINPLOT graficaran y determinaran el dominio y el recorrido de algunas funciones.

En el segundo y tercer punto los estudiantes debían graficar una ecuación, luego le tenían que hacer ciertas modificaciones, tales como sumar un termino, multiplicar o dividir.

Se hizo lo mismo con funciones cuadráticas, cúbicas y otras un poco más complejas como seno y coseno, por último se le pedía a los estudiantes que sacaran una conclusión acerca de qué le ocurre a una función cuando se multiplica, divide o suma un término ya sea positivo o negativo.

Este taller fue muy bien aceptado por los estudiantes, para ellos los computadores son útiles únicamente para chatear o jugar, pero muy pocas veces eran vistos como una herramienta educativa y mucho menos en matemáticas.

EVALUACIÓN: FUNCIONES (ANEXO 7)

El objetivo del examen era observar que tantos conocimientos tenían los estudiantes respecto al concepto de función, dominio y recorrido; también hicimos especial énfasis en la gráfica de funciones.

La evaluación tuvo una duración de 50 minutos, se hizo en forma individual, para esto el estudiante debía llevar: hoja milimetrada, calculadora, lápiz y otra hoja en blanco. Contaron con nuestra supervisión permanente.

En el primer punto se le pedía al estudiante que definiera los conceptos de:

- Función
- Dominio de una función
- Recorrido de una función

En el segundo punto el alumno debía graficar ciertas funciones, luego hallar su dominio y recorrido.

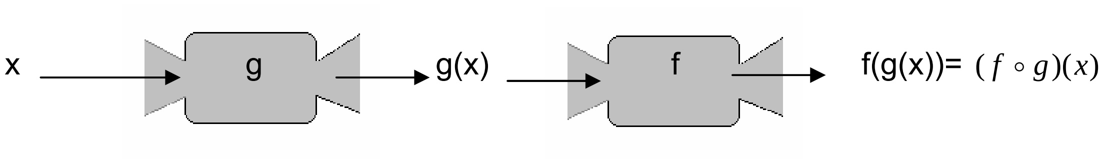
En el tercer punto se daba una gráfica, partiendo de esta los estudiantes tenían que argumentar si era o no una función; de serlo debían hallar su dominio y recorrido.

Los resultados del examen, aunque en general no fueron los mejores, algunos estudiantes lograron muy buenos resultados.

GUIA No 4 (ANEXO 8)

El objetivo de esta guía es introducir a los estudiantes en el concepto de composición de funciones, pieza fundamental para los sistemas dinámicos. Dada la importancia de este tema decidimos hacer una guía completa, compuesta por ejemplos y ejercicios, buscando con esto aclarar todas las dudas para evitar inconvenientes posteriores.

Comenzamos dando la definición de composición de funciones, con su respectiva notación. En un comienzo se ilustró el tema utilizando un "sistema de máquinas", las cuales se llamaron composición de funciones. De esta manera los estudiantes podían ver el comportamiento de cada función y por ende de la composición.



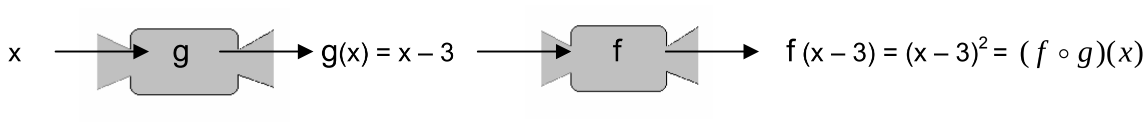
La figura anterior muestra el "sistema" $f \circ g$, compuesto por la "máquina g" y la "máquina f".

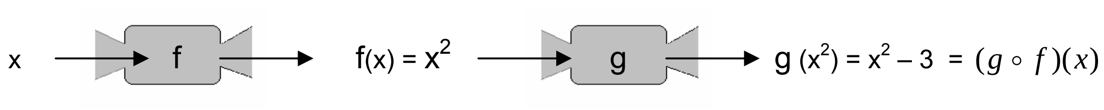
Realizamos también algunos ejemplos utilizando "el sistema de máquinas".

Ejemplo:

Si f(x) = x^2 y g(x) = x - 3, encuentre las funciones compuestas:

- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$





Luego se propuso unos ejercicios en clase, los cuales buscaban que los estudiantes, a partir de tres funciones f, g, h encontraran las composiciones: $f \circ g$ $g \circ f$, $h \circ f$, $f \circ g \circ h$.

TALLER 3 (ANEXO 9)

El objetivo de este taller era reforzar el concepto de composición de funciones, para esto los estudiantes contaron con un tiempo aproximado de 50 minutos, quizá debido al tiempo que dedicamos para explicar el tema, no se presentaron inconvenientes para el desarrollo de la actividad.

En el primer punto se daban algunas funciones, luego se le pedia a los estudiantes que hallaran la composición $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, también se exigía encontrar el dominio y el recorrido.

En el segundo punto se daban ahora tres funciones f, g, h, el estudiante debía escribir la función $f \circ g \circ h$.

En el tercer ejercicio se presentaba una situación contraria a lo que los estudiantes habían hecho normalmente, ya que ahora se daba la función compuesta $f \circ g$ y se pedía hallar f y g. Utilizando para esto funciones con un grado de dificultad un poco mayor, tales como cocientes y la función seno. Pensábamos que este ejercicio causaría algún traumatismo, pero fue bien desarrollado en la mayoría de los casos.

El ejercicio cuarto estaba dedicado al igual que los anteriores a reforzar el concepto de composición, la única diferencia era que las funciones eran más “exigentes”; se utilizó funciones cuadráticas, cúbicas, raíces.

EVALUACIÓN DE COMPOSICIÓN DE FUNCIONES (ANEXO 10)

Teniendo en cuenta que los estudiantes podían hacer copia diseñamos un examen con dos temas (a) y (b). El examen se desarrolló de forma individual, se contó con un tiempo de 50 minutos, se exigió a los estudiante llevar únicamente una hoja milimetrada, lápiz, calculadora y otra hoja auxiliar.

En el primer punto se daban tres funciones f, g, h; los estudiantes debían hallar la composición entre ellas, dependiendo del tema podrían ser:

$(f \circ g)(x)$ $(h \circ f)(x)$

$(h \circ h)(x)$ $(g \circ h)(x)$

$(h \circ g)(x)$ $(f \circ f)(x)$

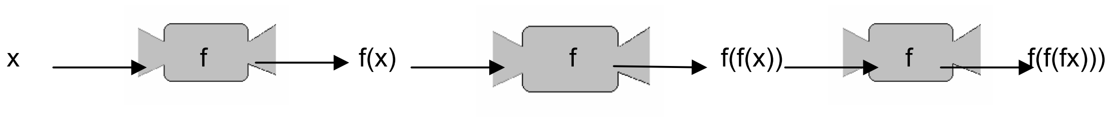
De la misma forma como se hizo en el taller se le pedía al estudiante que teniendo la función $f \circ g$ dada, dijera quién es: f(x) y g(x). Estos ejercicios eran un poco más complejos ya que mezclaban funciones trigonométricas con otras operaciones como raíces cúbicas, cocientes, potenciación.

El último ejercicio era el más exigente de todos, ya que se le pedía al estudiante hallar la composición de dos funciones, luego tenía que hallar su dominio y su recorrido y por último realizar la gráfica. Este ejercicio combinaba los dos temas anteriores: dominio y recorrido de una función y gráficas de funciones.

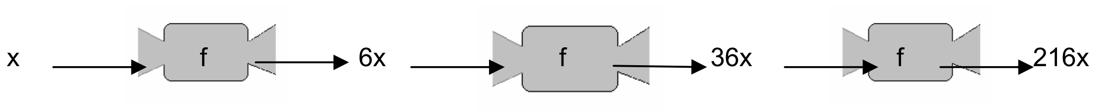
GUÍA 5 (ANEXO 11)

Esta guía marcaba el inicio del tema de sistemas dinámicos; era aquí en donde se iban a ver reflejados los frutos de haber empezado de cero, ya que de no haberlo hecho muy posiblemente se hubiesen presentado grandes inconvenientes.

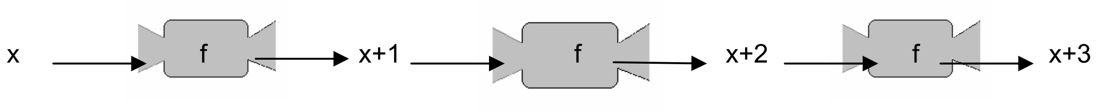
Comenzamos dando la definición de iteración, vista como el proceso de componer una función consigo misma n veces (n iteraciones).
En un principio la iteración de funciones fue vista de la misma manera que se hizo al componer funciones: con "máquinas", al hacerlo de esta forma los estudiantes captaron el concepto más rápidamente.



Luego propusimos algunos ejemplos, vistos desde el concepto de "maquinas".
Sea f(x) = 6x



Sea f(x) = x+1



Luego se plantearon algunos ejercicios para que los estudiantes practicaran y a la vez aclararan el concepto de iteración.

La guía continúa con la definición de órbita, la cual hace parte de los conceptos básicos en sistemas dinámicos. Teniendo en cuenta que ya se tenía una idea acerca de la iteración de funciones, se definió la órbita como una sucesión de valores, obtenidos al iterar una función a partir de un valor inicial x_0.

Se dio un ejemplo sencillo y a la vez muy concreto de cómo obtener las órbitas de una función partiendo de un valor inicial.

Si $f(x) = 2x$ y tomamos un valor inicial $x_0 = 1$ obtenemos:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 8$

.
.
.

Y así sucesivamente.

De la misma forma se plantearon unos ejercicios para realizar en clase, los cuales buscaban que los estudiantes practicaran los conceptos de iteración y órbita; para esto se utilizaron valores iniciales x_0 tanto enteros como racionales, no enteros.

Dimos estos valores debido a que los alumnos presentan una alta dificultad al trabajar especialmente con racionales no enteros.

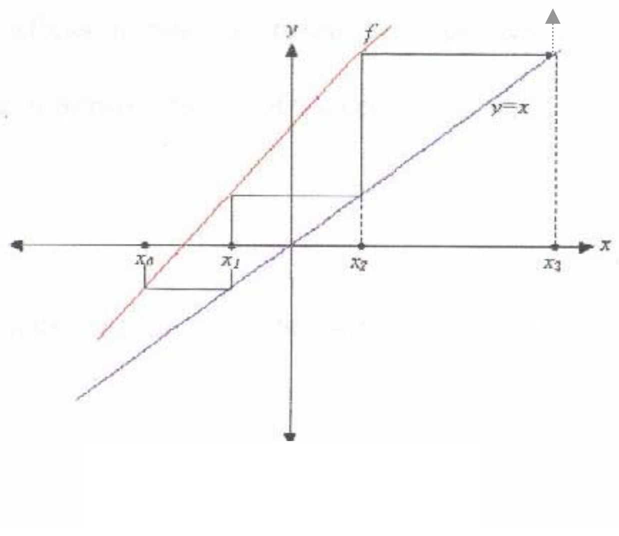
GUÍA No 6 (ANEXO 12)

Es quizá esta guía una las más importantes ya que si el estudiante logra entender el proceso de iteración gráfica, podrá entender los conceptos posteriores; por lo tanto el objetivo está centrado en mostrar que la iteración también se puede hacer de manera gráfica y que las órbitas se pueden representar en el plano cartesiano.

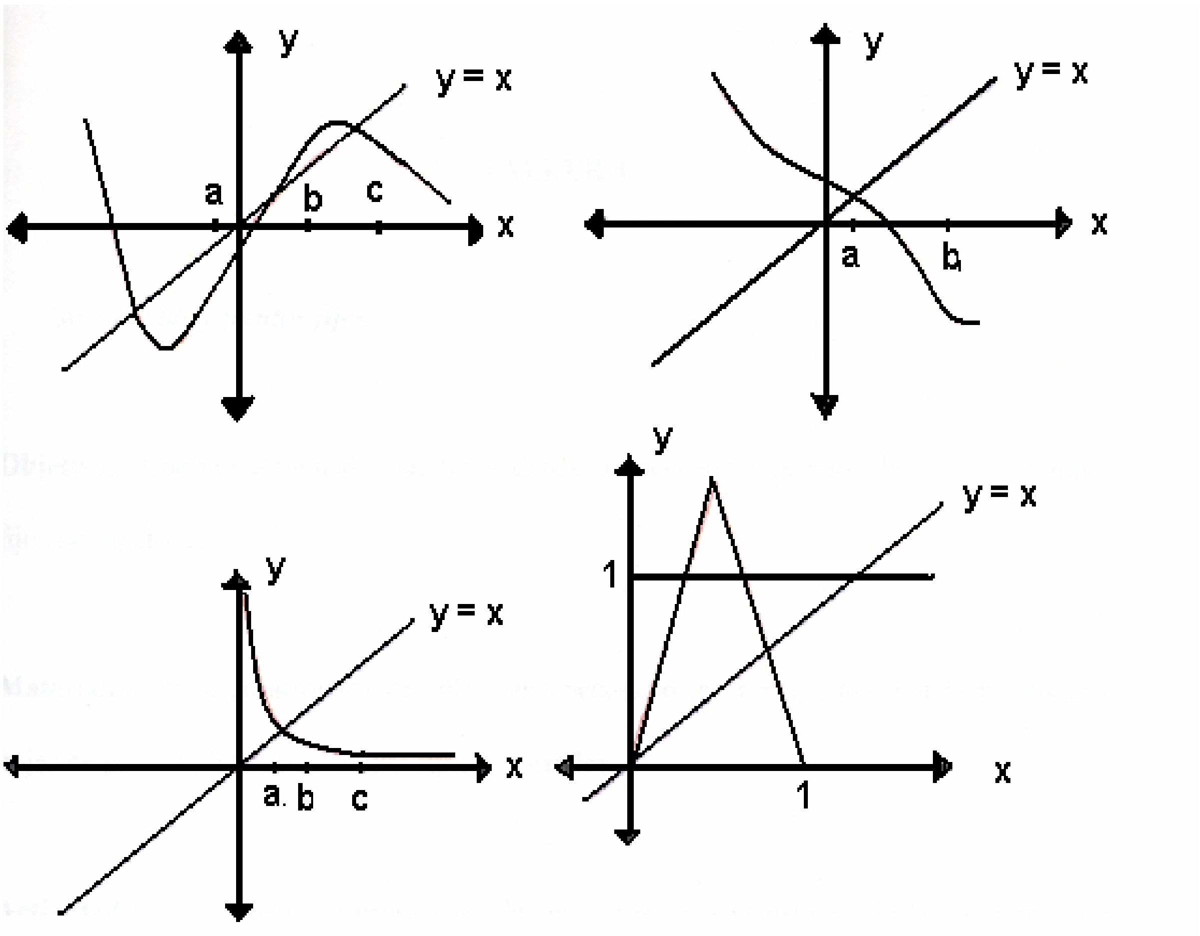
El juego de la iteración gráfica es un proceso muy sencillo en el que se traza un camino de puntos en el plano, que parte de un valor fijo x_0 (el cual pertenece al dominio de la función f) y repetidamente se va moviendo entre la gráfica de la función f y la diagonal y = x.

Para esto creamos un pequeño algoritmo:

1. Se mueve verticalmente hasta tocar la curva (la gráfica de f);
2. Se mueve horizontalmente hasta tocar la diagonal (y = x).



Luego se propuso unos ejercicios en los cuales se buscaba que los estudiantes realizaran la iteración gráfica de algunas funciones partiendo de diferentes valores iniciales x_0.



GUÍA No 7 (ANEXO 13)

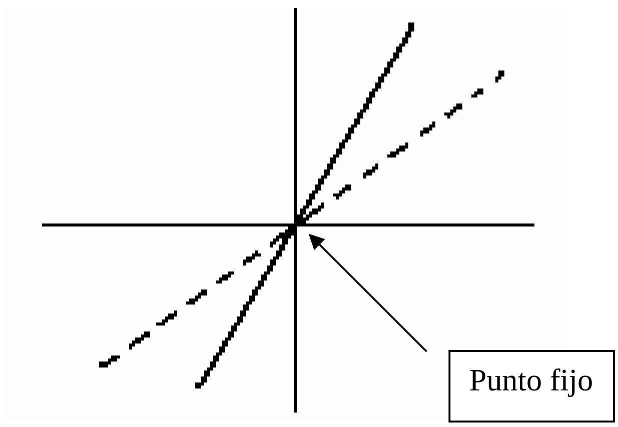
Para terminar, tenemos la última guía, la cual encierra conceptos centrales "fuertes" de los sistemas dinámicos. Pensábamos en un principio que los estudiantes no serian capaces de asimilar estos conceptos, debido a sus precarios conocimientos en muchos temas básicos en matemáticas, esto no ocurrió y el tema se cerró con éxito.

El objetivo de esta guía era conocer y aplicar los conceptos de: punto fijo, punto fijo atractor y punto fijo repulsor.

La guía comienza dando la definición de punto fijo: un punto del dominio de una función f se dice que es **punto fijo** de f, si al aplicarle la función no cambia, es decir si cumple f(x)=x

Se dio un ejemplo para aclarar el concepto

Si f(x) = 2x



Para mirar cual sería el punto fijo igualamos las funciones f(x) = x con f(x) = 2x, por lo tanto obtenemos:

2x = x, luego 2x – x = 0, entonces x = 0, por lo tanto el punto fijo se encuentra cuando x = 0

Luego se resolvió otro ejemplo, esta vez con la función f(x) = $\frac{1}{2}x$

Siguiendo el mismo proceso tenemos:

$$x = \frac{1}{2}x$$
$$x - \frac{1}{2}x = 0$$
$$\frac{1}{2}x = 0$$
$$x = 0$$

Luego el punto fijo es x = 0

Se da un ejemplo en el cual se puede ver que al realizar cierto número de iteraciones, la órbita tiende a un punto, luego se concluye que este es un ejemplo en el cual existe un punto fijo atractor. Se da otro ejemplo similar para mostrar un caso en cual se puede ver un punto fijo repulsor.

TALLER 4 (ANEXO 14)

El objetivo de este taller es llevar a que el estudiante adquiera habilidades en hacer la iteración gráfica y analítica; además en encontrar los puntos fijos.

En el primer punto se le pedía al estudiante que iterara una función especifica, partiendo de una valor inicial x_0 dado.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x_0 = 1$ $\quad x_0 = 0.5$ $\quad x_0 = -3$ $\quad x_0 = -0.25$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 2$ $\quad x_0 = 1$ $\quad x_0 = -3$ $\quad x_0 = \frac{1}{8}$

c) $f(x) = 3x + 2$; $x_0 = -3$ $\quad x_0 = 0.33$ $\quad x_0 = 1.5$ $\quad x_0 = 0$

En un segundo punto se exigía que el estudiante, utilizando las funciones anteriores, realizara la iteración grafica, partiendo del valor inicial x_0 que quisiera.
El tercer punto buscaba que el alumno graficara algunas funciones, luego hiciera la iteración gráfica partiendo del valor inicial que cada uno quisiera, por último tenia que hallar los puntos fijos y clasificarlos en punto fijos atractores o puntos fijos repulsares.

Para este taller los estudiantes contaron con un tiempo de 50 minutos, debido a que la clase no alcanzó para terminar la actividad, el ejercicio quedo como tarea.

TALLER 5 (ANEXO 15)

El objetivo de la actividad era vincular las nuevas tecnologías en el desarrollo de la matemática. Específicamente en sistemas dinámicos el objetivo era visualizar rápidamente el comportamiento dinámico de un tipo específico de funciones. Utilizamos las calculadoras TI – 92 PLUS y VOYAGE con un programa tomado de la monografía de Carlos Julio Daza♦ y perfeccionado por ABAK calculadoras, llamado Itergraf.

Este programa esta diseñado para que el estudiante observe el comportamiento de las órbitas partiendo de un punto inicial dado, a través del cual se realiza la gráfica conocida como el "trazo de telaraña", es aquí donde se puede ver para posteriormente clasificar los puntos fijos.

Utilizando el programa Itergraf y dada la función y = cx(1-x) con un valor inicial X_0 = 0.1 y con los parámetros dados, se trata de clasificar cada uno de sus puntos fijos en puntos fijos atractores en escalera, punto atractor en espiral o punto fijo repulsor, de la forma que indica la tabla (realiza mínimo 15 iteraciones).

C	1.5	2.05	2	2.7	3.1	4	1.7	3.9	3	1
Punto Atractor Escalera										
Punto atractor espiral										
Pto. Repulsor Espiral										

♦ DAZA Carlos Julio. ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL POR SISTEMAS DINÁMICOS, Universidad Industrial de Santander. Monografía, 1998

El segundo punto daba unos parámetros, y pedía que el estudiante hallara la órbita de la función y = cx(1-x) con un valor inicial X_0 = 0.25 utilizando el mismo programa.

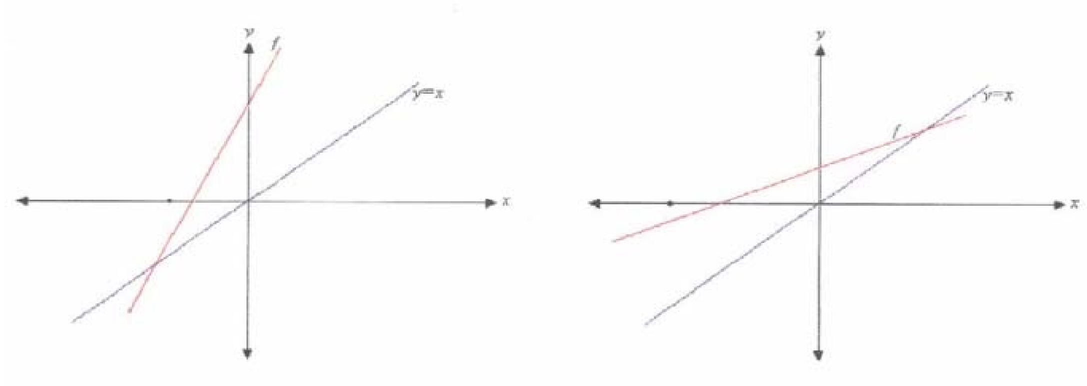
C	2.95	3.05	3.68	2.02	1.25
X1					
X2					
X3					
X4					
X5					

El tercer punto plantea una pequeña pregunta, la cual buscaba establecer si el estudiante realmente había comprendido el funcionamiento del programa ¿Que efecto causa el valor c en la función y = cx(1-x)?

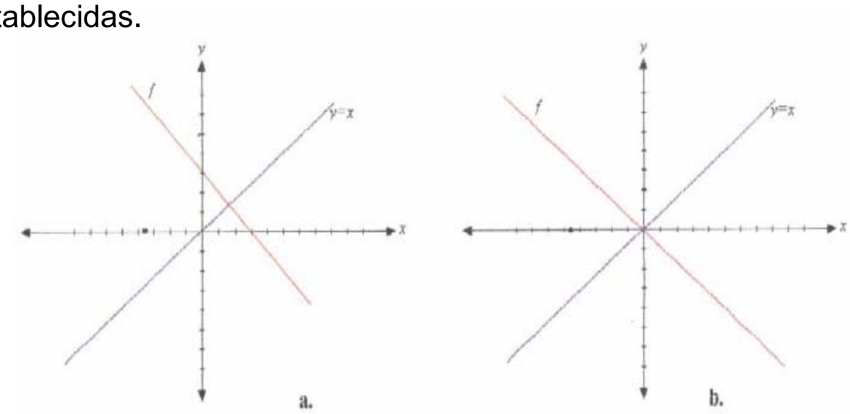
EVALUACIÓN ITERACION Y PUNTOS FIJOS (ANEXO 16)

Esta es la evaluación que encierra todo el tema trabajado durante casi 6 meses, por lo tanto su objetivo se centra en revisar los conceptos aprendidos, especialmente en el tema de iteración, iteración gráfica y puntos fijos (atractores y repulsores).

En el primer punto se pedía a los estudiantes que hicieran la iteración gráfica de ciertas funciones, y a su vez determinaran si existen o no punto fijos.



En el segundo punto el alumno tenía que hallar los puntos fijos de unas gráficas preestablecidas.



En el tercer punto los estudiantes tenían que clasificar los puntos fijos en atractores o repulsores, para esto debían primero realizar la gráfica de la función y luego hacer la iteración gráfica.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ b) $g(x) = (x+1)^2$

CAPITULO 4: UN CUENTO HECHO REALIDAD

En la vida nos suceden muchas cosas buenas y malas, algunas de ellas recordadas y contadas, otras por el contrario que quisiéramos olvidar; pero lo que si es cierto es que esta vivencia es una de esas, que desearíamos divulgar.

Siendo éste un trabajo enriquecedor tanto para nosotros como para los estudiantes, deseamos compartir con usted todas aquellas cosas que surgieron a lo largo de nuestro proyecto de grado. ¿Cómo fue la reacción de los estudiantes?, en especial: ¿cómo se desarrollaron todas y cada una de las actividades aplicadas?

Teniendo en cuenta que el curso es de 36 estudiantes, contaremos solo con los apuntes y trabajos de 10 estudiantes que compartieron con nosotros este trabajo.

Debido a que se trabajaron Guías, Talleres y Evaluaciones, nos vemos en la necesidad de recalcar que se analizarán con más detalle los talleres y evaluaciones, sin menospreciar el trabajo realizado en las guías, ya que ellas se convirtieron en una base para una posterior aplicación de estos trabajos.

Análisis de la Guía No 1

Como lo hemos dicho anteriormente esta guía pretendía que los estudiantes adquirieran los conceptos básicos de producto cartesiano y relación.

Iniciamos dando la definición de producto cartesiano, para luego pasar a un pequeño ejemplo, el cual se dio de dos formas: por extensión y con diagramas sagitales.

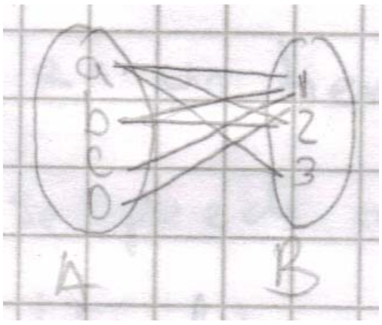


Figura 1♦.

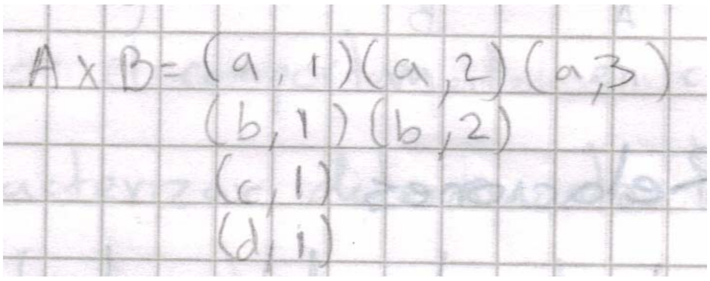


Figura 2.

Pretendíamos que los estudiantes observaran estas dos formas de expresión y que analizaran tal vez la más adecuada o práctica de representar el producto cartesiano.

A la hora de pedir a los estudiantes que determinaran por extensión la relación "ser menor que", esto fue lo que realizaron:

♦ Las Figuras 1 y 2 fue tomadas de los apuntes de Diego Guarín, un estudiante de 10-15 del INEM.

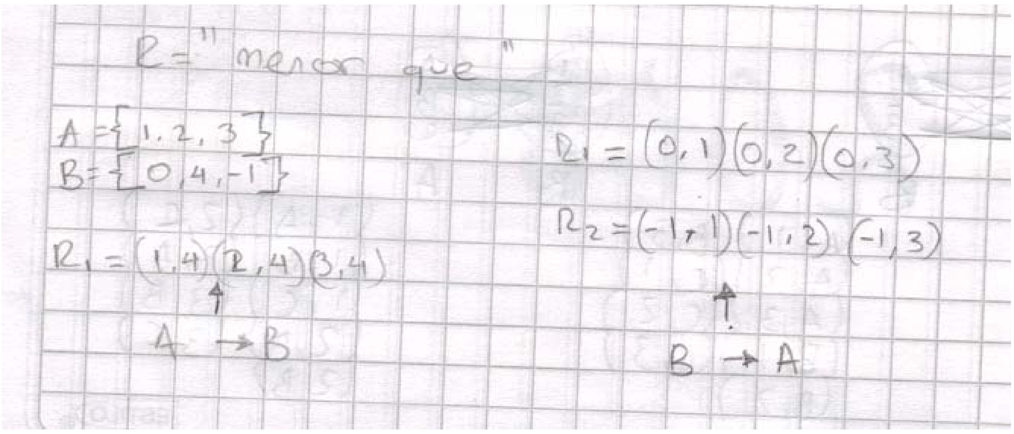


Figura 3♦♦

Al parecer los estudiantes tenían muy presente la propiedad "ser menor que", al igual que varias otras como "divisible por" y el "cuadrado de", las cuales fueron dejadas como ejercicio para trabajar en clase.

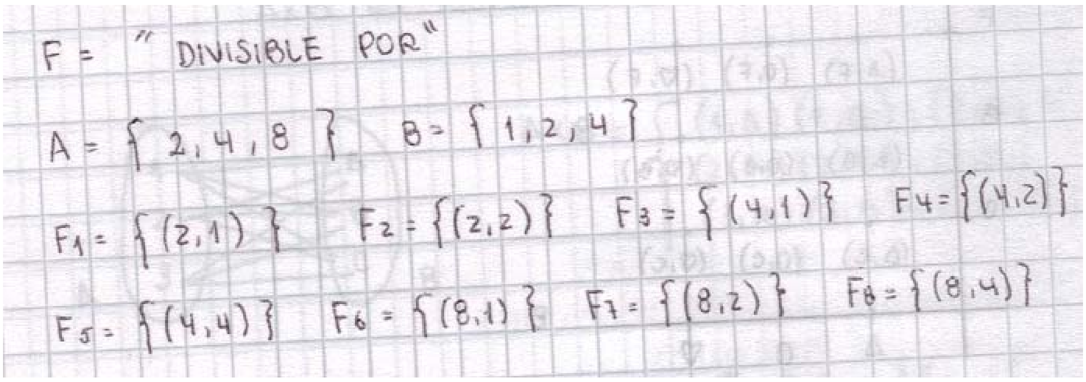


Figura 4♦♦♦

♦♦ La Figura 3 fue tomada de los apuntes de Diego Guarín, un estudiante de 10-15 del INEM.
♦♦♦ La Figura 4 fue tomada de los apuntes de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM

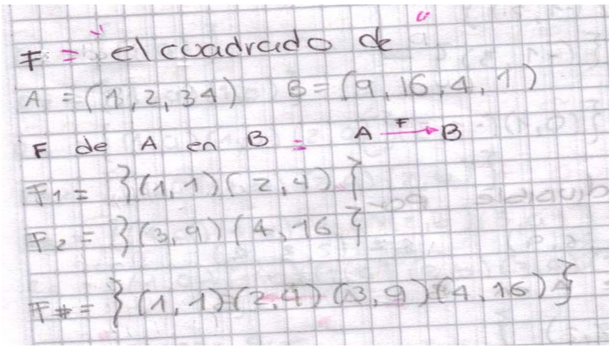


Figura 5♦♦♦♦.

♦♦♦♦ La Figura 5 fue tomada de los apuntes de Kimberly Bautista, una estudiante de 10-15 del INEM.

Análisis de la Guía No 2.

Recordando un poco, en esta guía se esperaba que los estudiantes adquirieran el concepto de dominio y recorrido de una relación, pues esto permitiría una mejor comprensión cuando se abordara el tema de funciones.

Se hizo un pequeño comentario respecto a las relaciones entre conjuntos numéricos, ya que estas se presentan en forma de ecuaciones y desigualdades. Es aquí donde iniciamos el hábito de graficar, el cual es importante para la continuación de este proyecto.

Es muy común presentar un ejemplo luego de dar una definición, ya que esto permite una mayor comprensión por parte de los estudiantes, aprovechando esto se dio la siguiente relación la cual fue graficada. $R_1 = \{(x, y) / x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z}, y = x^2 - 5\}$

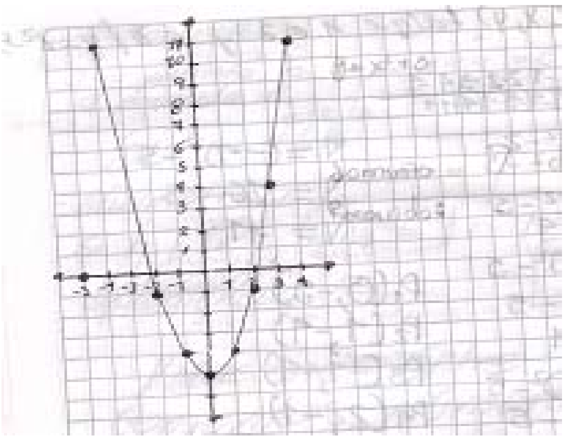


Figura 1♦.

♦ La Figura 1 fue tomada de los apuntes de Mónica Díaz, una estudiante de 10-15 del INEM.

Por ser la primera gráfica realizada por los estudiantes, se siguieron todas las indicaciones dadas por nosotros. Vale la pena aclarar que los estudiantes ya habían realizado gráficas, sin embargo algunos presentaban cierta dificultad para hacerlo.

Debido a esto se dejaron algunos ejercicios en los que se pedía la gráfica al igual que su dominio y recorrido. Algunas de estas fueron:

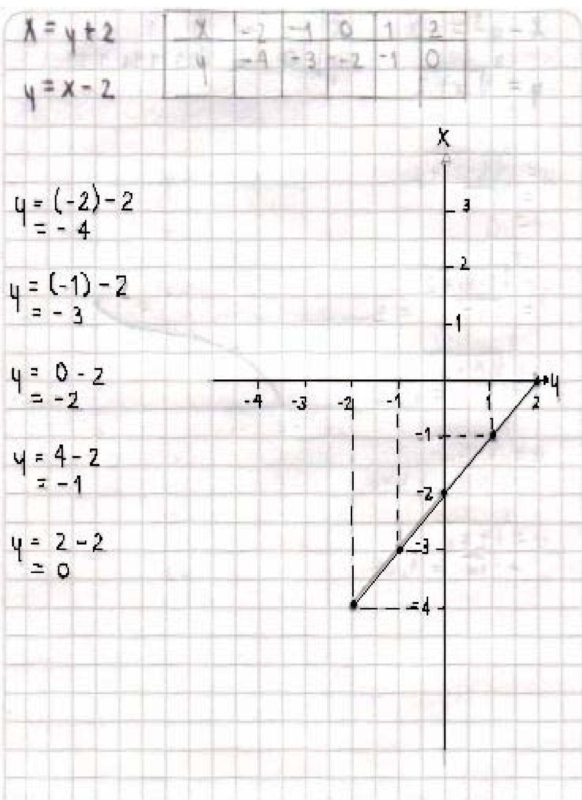


Figura 2[♦♦].

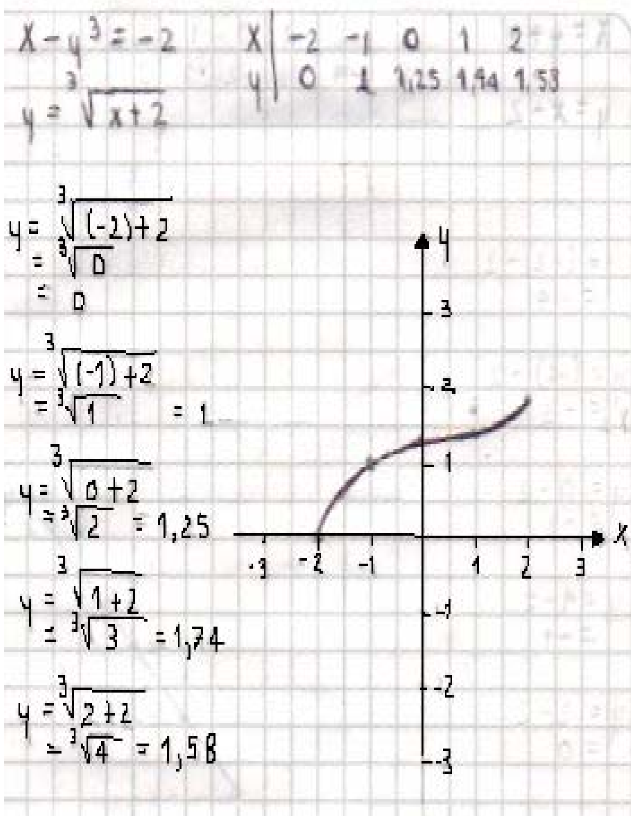


Figura 3

[♦♦] La Figura 2 y 3 fueron tomada de los apuntes de Fabián Patiño, un estudiante de 10-15 del INEM.

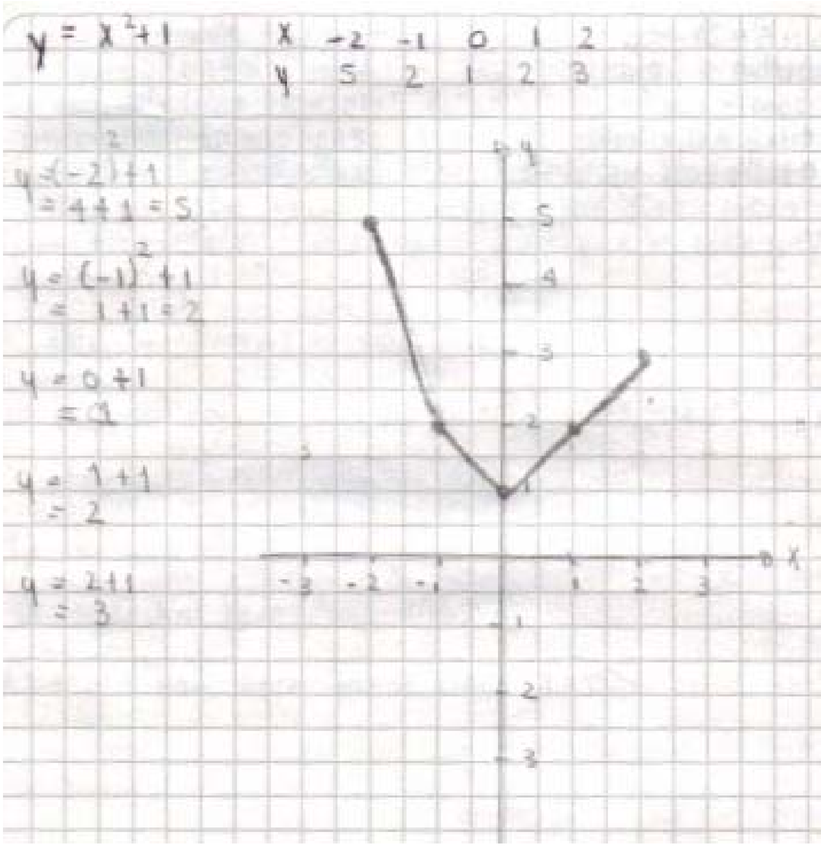


Figura 4♦♦♦

♦♦♦ La Figura 4 fue tomada de los apuntes de Fabián Patiño, un estudiante de 10-15 del INEM.

Análisis del Taller 1

De nuevo se recuerda que el objetivo de este taller es reforzar los conceptos de relación, dominio y recorrido de una relación, al igual que realizar gráficas. Cabe también recordar que este fue realizado por parejas.

En el primer punto se plantearon una serie de gráficas, además de hallar su dominio y recorrido.

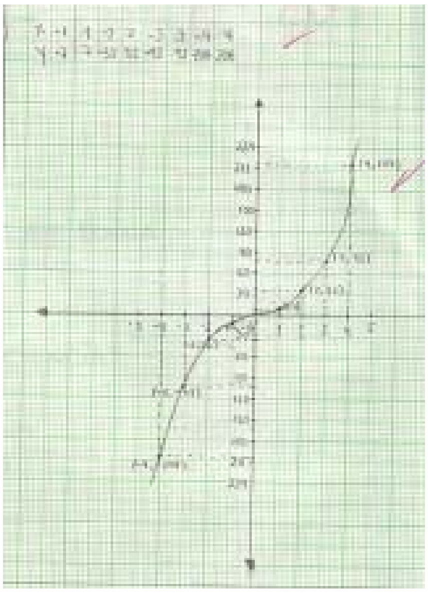


Figura 1♦.

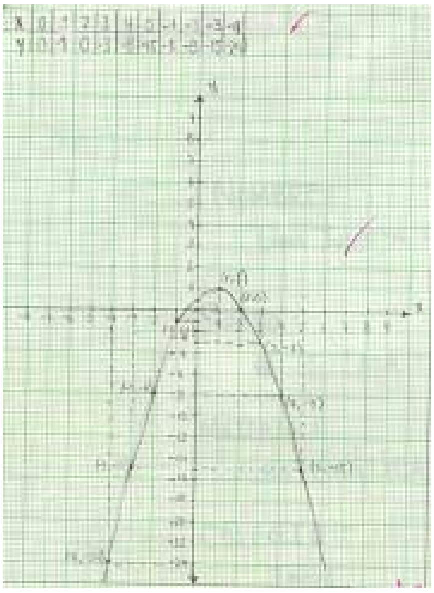


Figura 2

Sinceramente era muy gratificante para nosotros ver que los estudiantes realizaban este tipo de gráficas muy bien, luego de saber que en pocas oportunidades las habían realizado.

♦ Las Figuras 1 y 2 fueron tomadas del taller de Lina Muñoz y Leidy Villamizar, estudiantes de 10-15 del INEM.

En el segundo punto se pedía hacer un diagrama teniendo en cuenta una serie de datos proporcionados en una tabla y esto fue lo que realizaron:

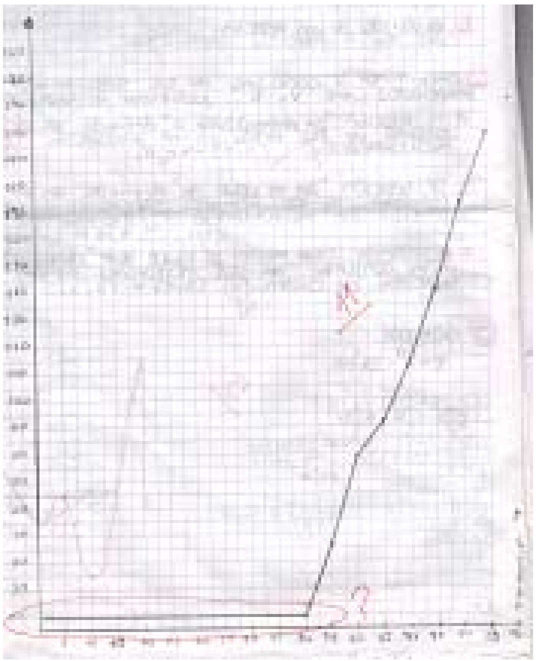


Figura 3♦♦♦.

Como se puede observar en esta gráfica algunos estudiantes presentaban ciertas dudas, respecto a que hacer cuando se cuando los valores de la variable x, no comienzan en 0.

Lamentablemente el tercer punto era opcional por tal motivo los alumnos no realizaron este punto.

♦♦♦ La Figura 3 fue tomada del taller de Kimberly Bautista y Edinson Jaimes, estudiantes de 10-15 del INEM.

Análisis de la Evaluación

El objetivo primordial es el de evaluar los conceptos adquiridos por los estudiantes, tales como: relación, dominio, recorrido y gráfica de relaciones. Esta actividad fue realizada en parejas.

El primer ejercicio consistía en definir con sus palabras y de la forma más adecuada los conceptos de: producto cartesiano, relación, dominio y recorrido.

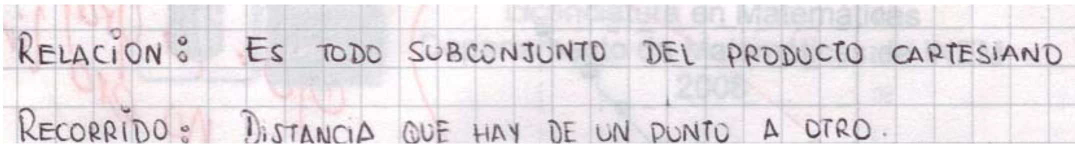

RELACIÓN: ES TODO SUBCONJUNTO DEL PRODUCTO CARTESIANO
RECORRIDO: DISTANCIA QUE HAY DE UN PUNTO A OTRO.

Figura1[♦].

En el siguiente punto se pedía a los estudiantes hacer la gráfica de una relación y hallar su dominio y recorrido. A continuación se presentará lo hecho por los estudiantes en este punto de la evaluación.

[♦] La Figura 1 fue tomada de la evaluación de Lina Muñoz y Leidy Villamizar, estudiantes de 10-15 del INEM.

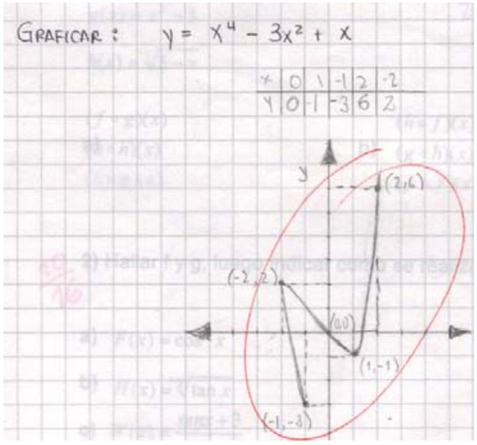


Figura 2♦♦

Se observa que las estudiantes en esta oportunidad reemplazaron los valores de x en la ecuación dada muy bien, pero al realizar la grafica presentaron cierta dificultad pues debían ubicar las parejas ordenadas en el plano cartesiano y unirlas teniendo en cuenta el valor de la primera componente ya que esta corresponde al dominio; el cual es un conjunto numérico ordenado.

En cuanto se refiere al tercer punto el cual era sacado del taller anterior, esto fue lo que se observó:

♦♦ Las Figuras 2 y 3 fueron tomadas de la evaluación de Lina Muñoz y Leidy Villamizar, estudiantes de 10-15 del INEM.

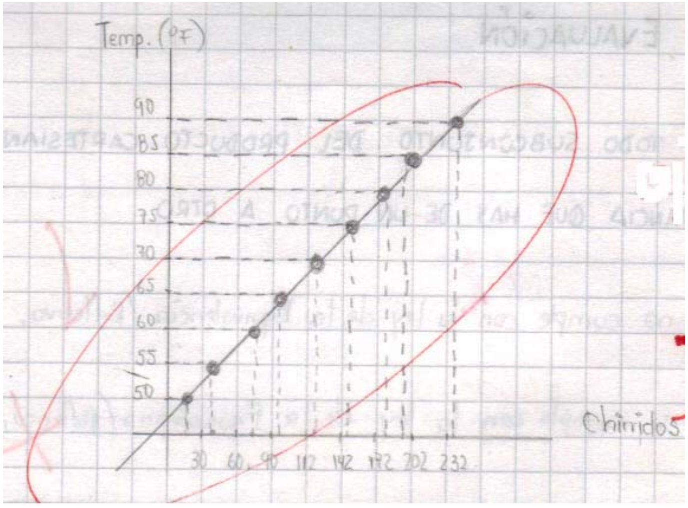


Figura 3.

Aquí se observó un error de escala, ya que en el eje y, la distancia entre cero y el primer termino (50), es la misma que de este al siguiente (55).

Análisis de la Guía No 3

El objetivo de esta guía era que los estudiantes conocieran el concepto de función, conjunto de partida, conjunto de llegada, dominio y recorrido. También que continuaran graficando.

Teniendo en cuenta que ya se tenía la idea de producto cartesiano y relación, se hizo mucho más fácil introducir el concepto de función, eso sin dejar de lado el de conjunto de partida, pues en este punto los estudiantes podían observar que éste correspondía también al de dominio.

Mientras que a la par se veían los conceptos de recorrido y conjunto de llegada, en donde se podía contemplar que el recorrido es el conjunto de imágenes de la función y el conjunto de llegada corresponde a un conjunto que puede contener más elementos que el conjunto de imágenes.

Es en este momento cuando se empiezan a construír muchas gráficas, mostramos algunas conclusiones obtenidas por los estudiantes

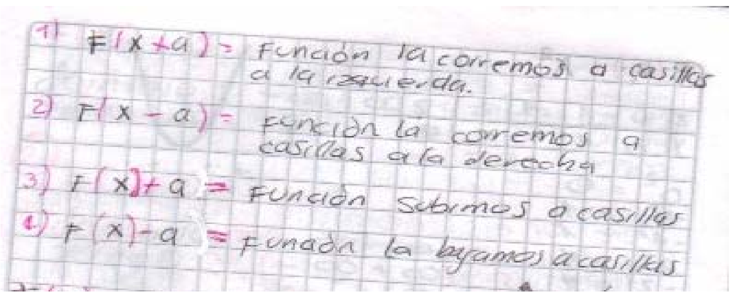


Figura1♦.

♦ Las Figuras 1 y 2 fueron tomadas de los apuntes de Kimberly Bautista, una estudiante de 10-15 del INEM.

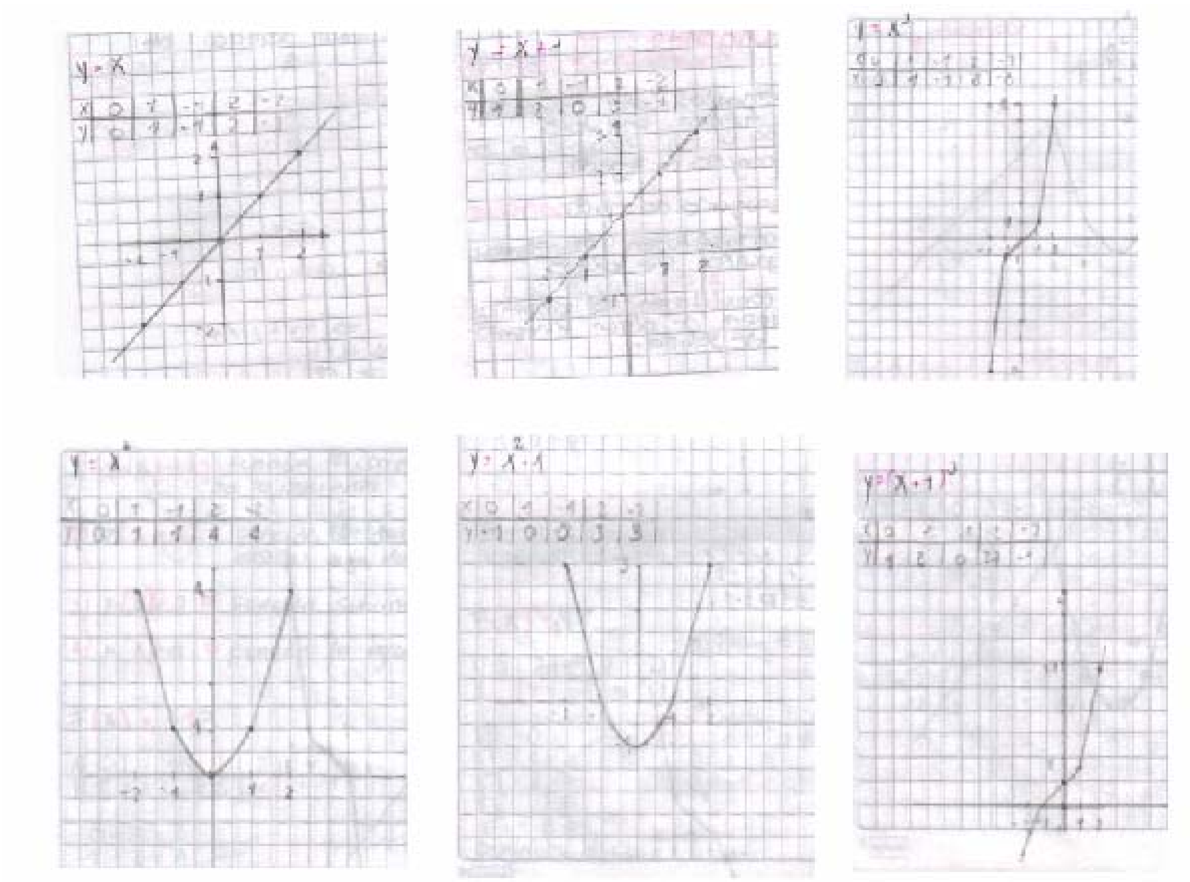


Figura 2.

Los estudiantes pudieron realizar algunas gráficas de funciones y así hacer algunas observaciones, lo cual les permitió sacar ciertas conclusiones que en un futuro serviría par realizarlas de manera más rápida.

Luego pasamos a hallar el dominio de otras funciones, haciendo énfasis en su gráfica.

En algunas ocasiones se noto en los estudiantes la importancia de realizar la gráfica de las funciones, pues permite hacer un análisis del dominio y recorrido.

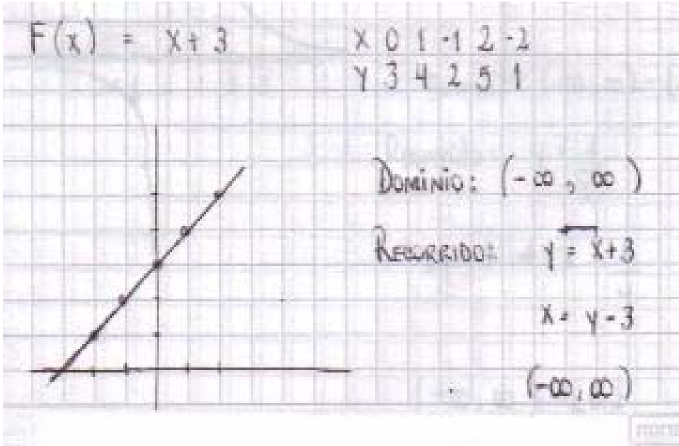


Figura 3♦♦

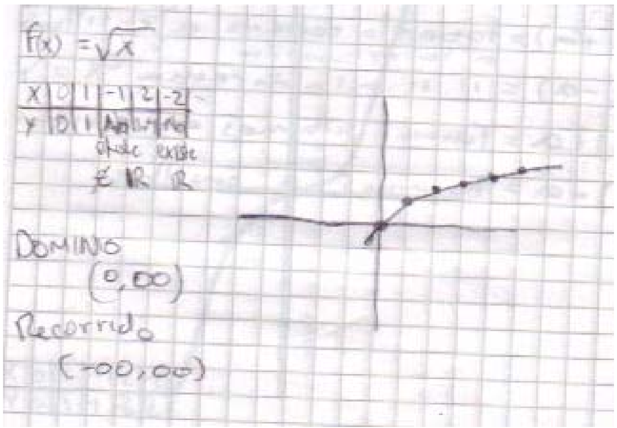


Figura 4♦♦♦

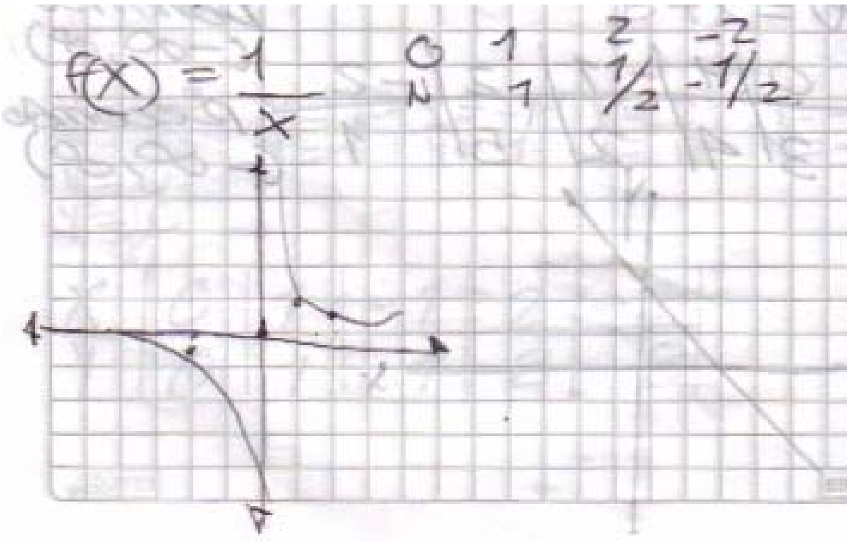


Figura 5♦♦♦♦

En algunas ocasiones se vió en los estudiantes cierta de comprensión hacia la importancia de realizar la gráfica de una función, pues permite hacer un análisis del dominio y recorrido.

♦♦ La Figura 3 fue tomada de los apuntes de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM.
♦♦♦ La Figura 4 fue tomada de los apuntes de Diego Guarín, un estudiante de 10-15 del INEM.
♦♦♦♦ La Figura 5 fue tomada de los apuntes de Mónica Díaz, una estudiante de 10-15 del INEM.

Análisis del Taller 2

Para este taller contamos con una de las salas de informática que posee la institución, se trabajó con un programa llamado Winplot, el cuál es bien sencillo de utilizar, lo cual facilitó el manejo del curso.

Estas salas son bastante amplias, sin embargo trabajamos por parejas y aún así era un poco complicado atender las inquietudes que surgían por parte de los estudiantes. Como se ha dicho anteriormente la edad promedio del curso es de 15 a 16 años; sin embargo observamos reacciones como niños de "5 años cuando tienen un juguete nuevo". Finalmente se pudieron superar estas dificultades, permitiendo el buen desarrollo de la actividad.

El trabajo que debían realizar era muy sencillo pues esta vez solo se limitaban a transcribir las gráficas realizadas por el programa, además de hallar el dominio y recorrido de dichas funciones. Luego hacer una pequeña observación, la que consistía en identificar ciertas características de las funciones de la misma clase, decir que ocurre con esta cuando se le suma o resta una constante, al igual que cuando se multiplica o divide por una constante. Otro aspecto muy importante es el de compara las gráficas teniendo en cuenta su grado.

Esto fueron los resultados obtenidos a la hora de aplicar este taller.

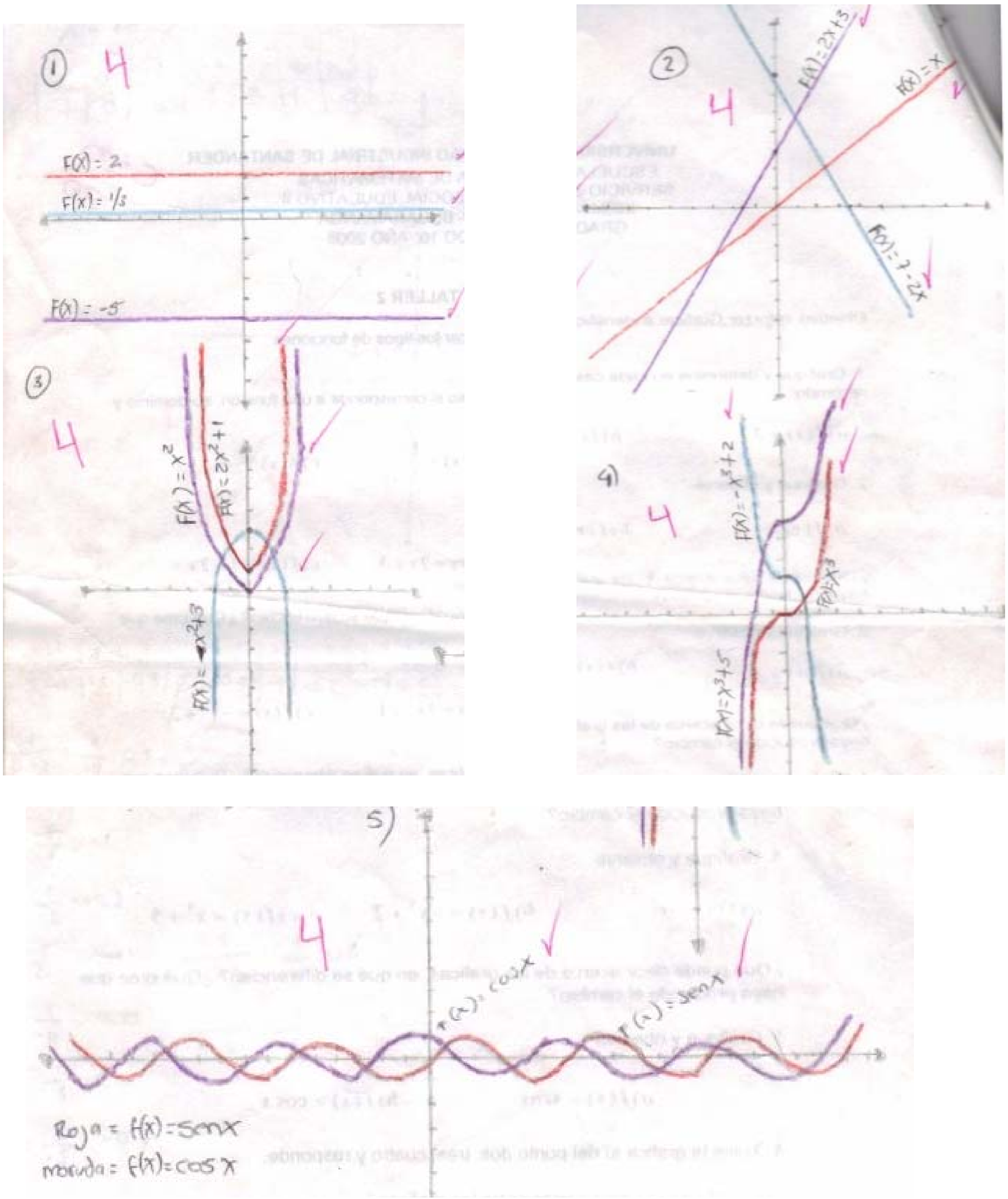


Figura 1[♦].

[♦] La Figura 1 fue tomada del taller de Kimberly Bautista y Jorge Cárdenas, estudiantes de 10-15 del INEM.

El trabajo realizado en esta ocasión fue muy enriquecedor para los estudiantes, notaron la facilidad con la que se podían realizar las gráficas, además de que se realizaban varias en el mismo plano lo que permitía hacer una pequeña comparación entre las gráficas del mismo punto, al igual que las de cada uno de estos.

Análisis de la Evaluación

Se tenía como objetivo evaluar los conceptos de función, dominio, recorrido y gráfica de funciones. Veamos algo de lo que los estudiantes escribieron:

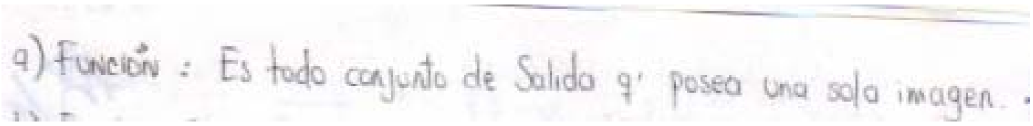

a) Función : Es todo conjunto de Salida q' posea una sola imagen.

Figura 1♦.

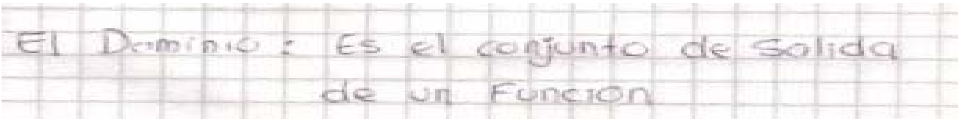

El Dominio : Es el conjunto de Salida de un Funcion

Figura 2♦♦.

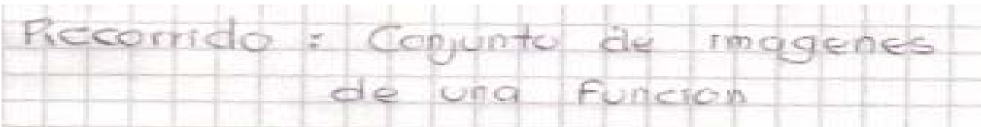

Recorrido : Conjunto de imagenes de una Funcion

Figura 3

Se observa que los estudiantes de manera burda pero clara poseen los conceptos.

En un siguiente punto se pedía hacer algunas gráficas y hallar su dominio y recorrido.

Las imágenes que se encuentran a continuación corresponden a las siguientes ecuaciones:

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \qquad y = (x+3)^3$$

♦ La Figura 1 fue tomada de la evaluación de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM.

♦♦ Las Figuras 2 y 3 fueron tomadas de la evaluación de Vanesa Colmenares, una estudiante de 10-15 del INEM.

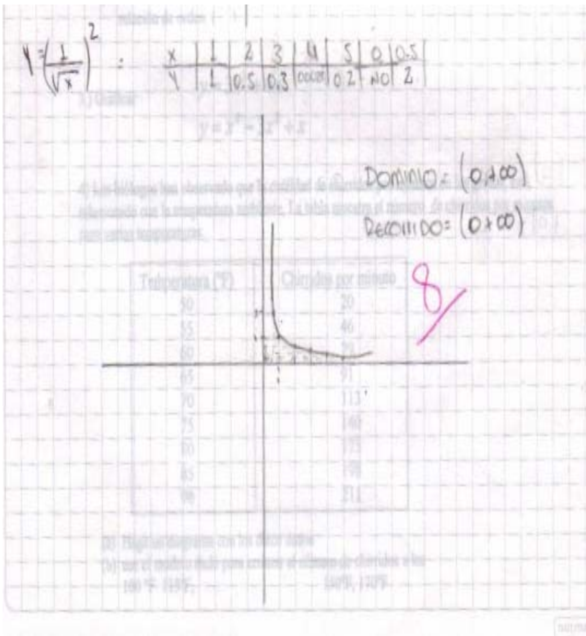


Figura 4♦♦♦♦.

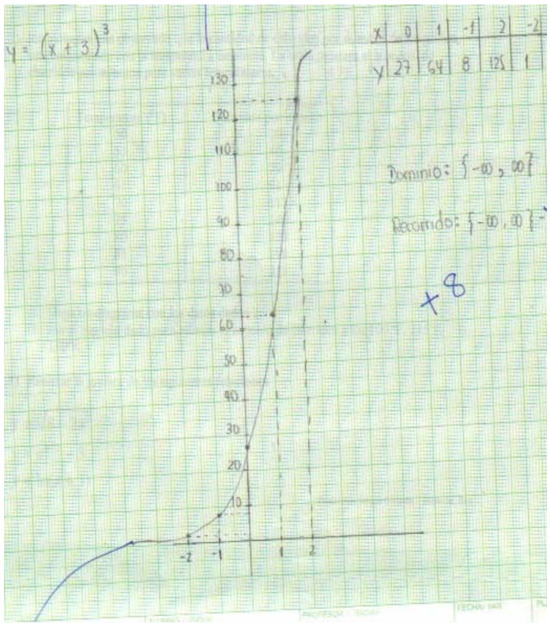


Figura 5♦♦♦♦♦.

Se puede observar la forma en que los estudiantes realizan la gráfica utilizando una tabla para dar valores a la variable independiente, al igual que se ve que comprendieron los conceptos de dominio y recorrido de una función, en esta oportunidad ellos lo dedujeron observando la gráfica.

En un tercer punto se presentaban dos diagramas y se debía indicar cual correspondía a una función, además de hallar el dominio y recorrido.

♦♦♦♦ La Figura 4 y 6 fueron tomadas de la evaluación de Leidy Villamizar, una estudiante de 10-15 del INEM.
♦♦♦♦♦ La Figura 5 fue tomada de la evaluación de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM

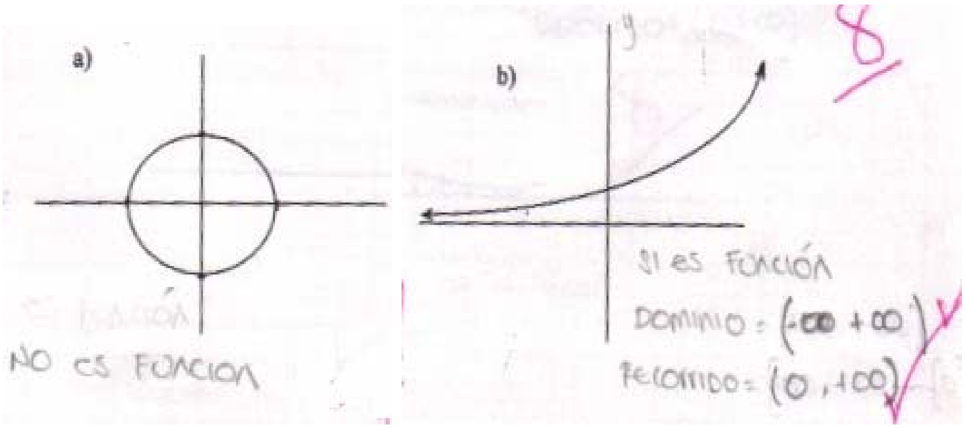
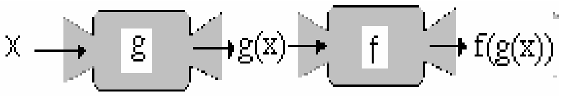


Figura 6

Análisis de la Guía No 4.

La actividad tenía como objetivo introducir el concepto de composición de funciones.

En esta guía iniciamos dando el concepto de composición de funciones con su respectiva notación, a diferencia de que en esta oportunidad, lo explicamos con máquinas las cuales correspondían a cada una de las funciones, por lo tanto al ser introducido un valor cualesquiera es transformado al ingresar en la máquina.



Se presentaron varios ejemplos a los cuales en cierta ocasión se halló el dominio y el recorrido.

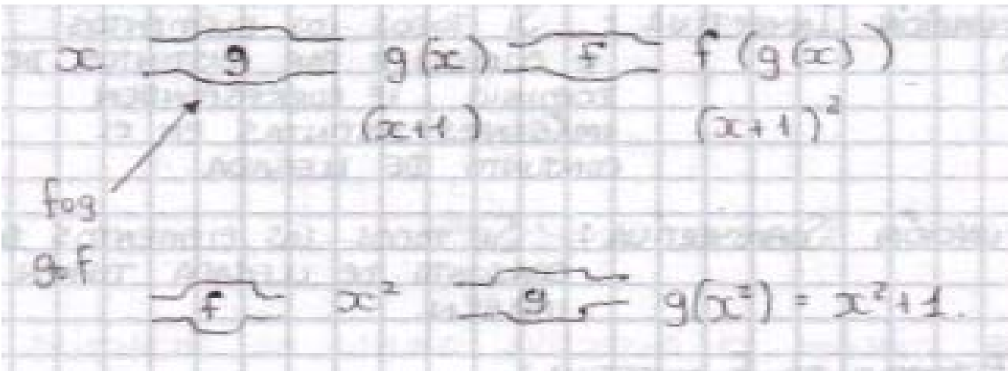


Figura 1[♦].

[♦] La Figura 1 fue tomada de los apuntes de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM

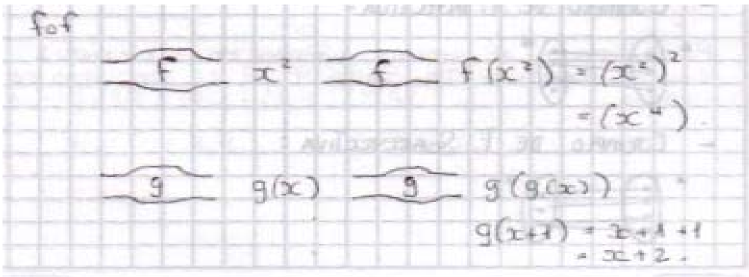


Figura 2♦♦.

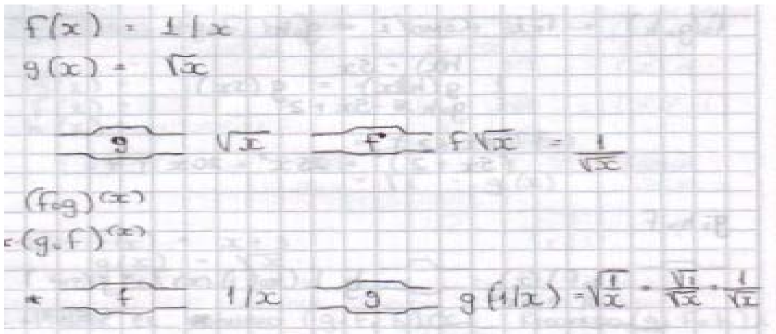


Figura 3.

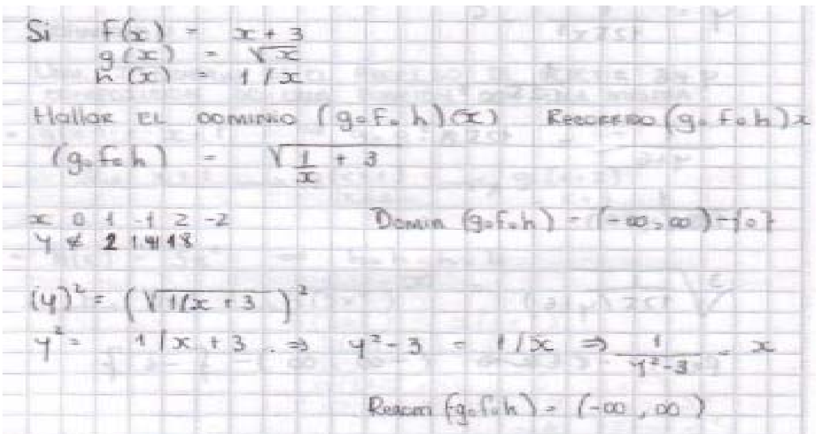


Figura 4.

Para la mayoría de estudiantes la forma de realizar la composición mediante maquinas fue de gran ayuda para la comprensión de este tema

♦♦ Las Figuras 2, 3 y 4 fueron tomadas de los apuntes de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM

Análisis del Taller 3.

El objetivo primordial en esta actividad era la de reforzar los conceptos de composición de funciones al igual que su dominio y recorrido.

Inicialmente se pedía hallar la composición de varias funciones, a lo cual los alumnos respondieron de la mejor forma, pues la mayoría de éstos no presentó dificultades a la hora de hallar la composición.

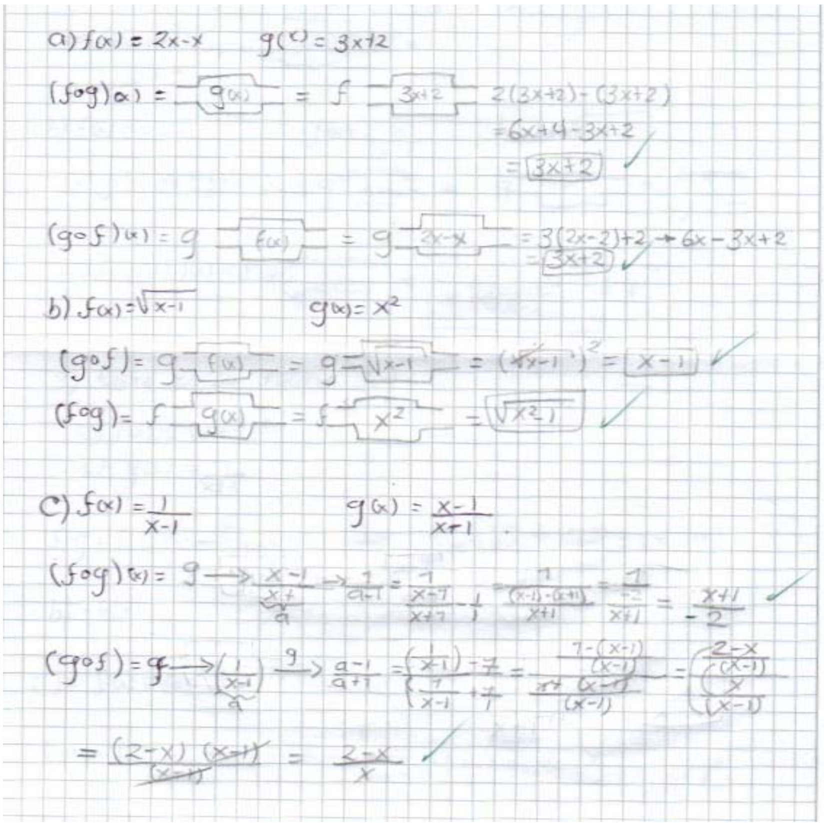
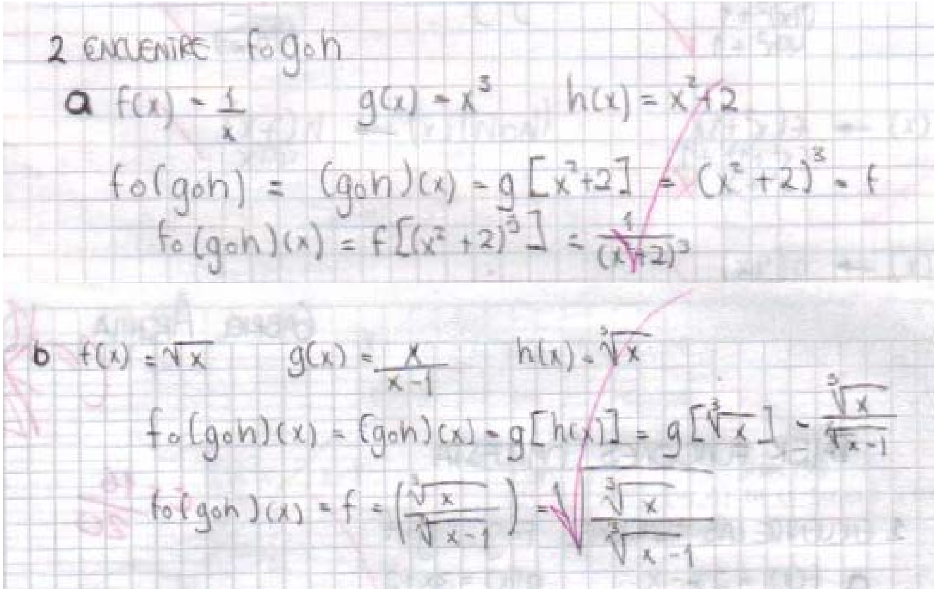


Figura 1.♦

♦ La Figura 1 fue tomada del Taller de Fabián Pimiento, un estudiante de 10-15 del INEM



2 ENCUENTRE $f \circ g \circ h$

a $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^3$ $h(x) = x^2+2$

$f \circ (g \circ h) = (g \circ h)(x) = g[x^2+2] = (x^2+2)^3 = f$

$f \circ (g \circ h)(x) = f[(x^2+2)^3] = \frac{1}{(x^2+2)^3}$

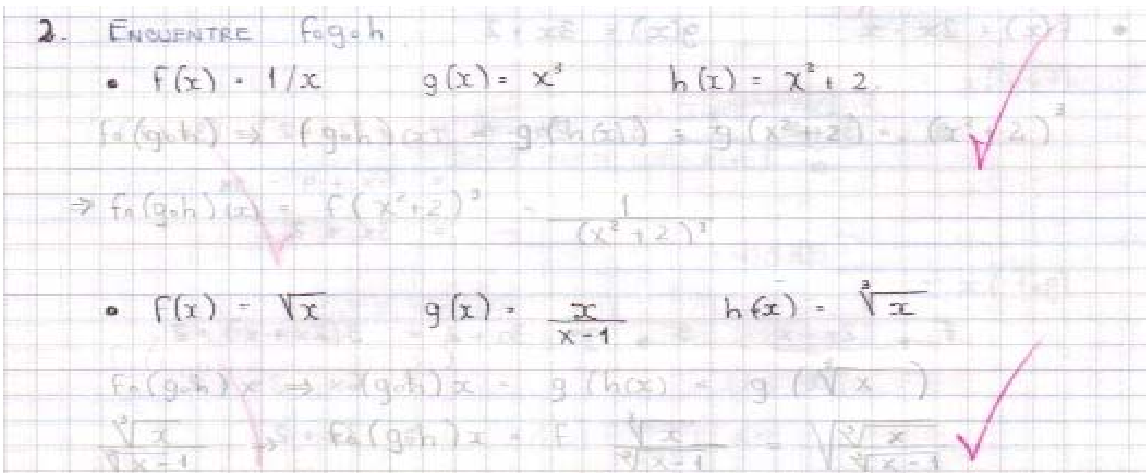
b $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \frac{x}{x-1}$ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

$f \circ (g \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g[h(x)] = g[\sqrt[3]{x}] = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$

$f \circ (g \circ h)(x) = f = \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}}}$

Figura 2♦♦.

Lo único que cambió en este punto fue la utilización de tres funciones para realizar la composición.



2. ENCUENTRE $f \circ g \circ h$

• $f(x) = 1/x$ $g(x) = x^3$ $h(x) = x^2+2$

$f \circ (g \circ h) \Rightarrow (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2+2) = (x^2+2)^3$

$\Rightarrow f \circ (g \circ h)(x) = f(x^2+2)^3 = \frac{1}{(x^2+2)^3}$

• $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \frac{x}{x-1}$ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

$f \circ (g \circ h)x \Rightarrow (g \circ h)x = g(h(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$

$\Rightarrow f \circ (g \circ h)x = f \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}}}$

Figura 3.♦♦♦

♦♦ La Figura 2 fue tomada del Taller de Gabriel Archila, un estudiante de 10-15 del INEM

♦♦♦ La Figura 3 fue tomada del Taller de Lina Muñoz, una estudiante de 10-15 del INEM.

Tal vez este es uno de esos puntos en el que los estudiantes se sintieron un poco perdidos, al parecer no comprendieron el enunciado, además de que no se habían realizado muchos ejemplos y ejercicios de este estilo. Por esta razón nos vimos en la necesidad de hacer una breve aclaración, con un ejemplo mostramos a los estudiantes que era lo que se quería que hicieran, en esta oportunidad se buscaban las funciones f y g las cuales al hacerle la composición daba como resultado la presentada en cada punto.

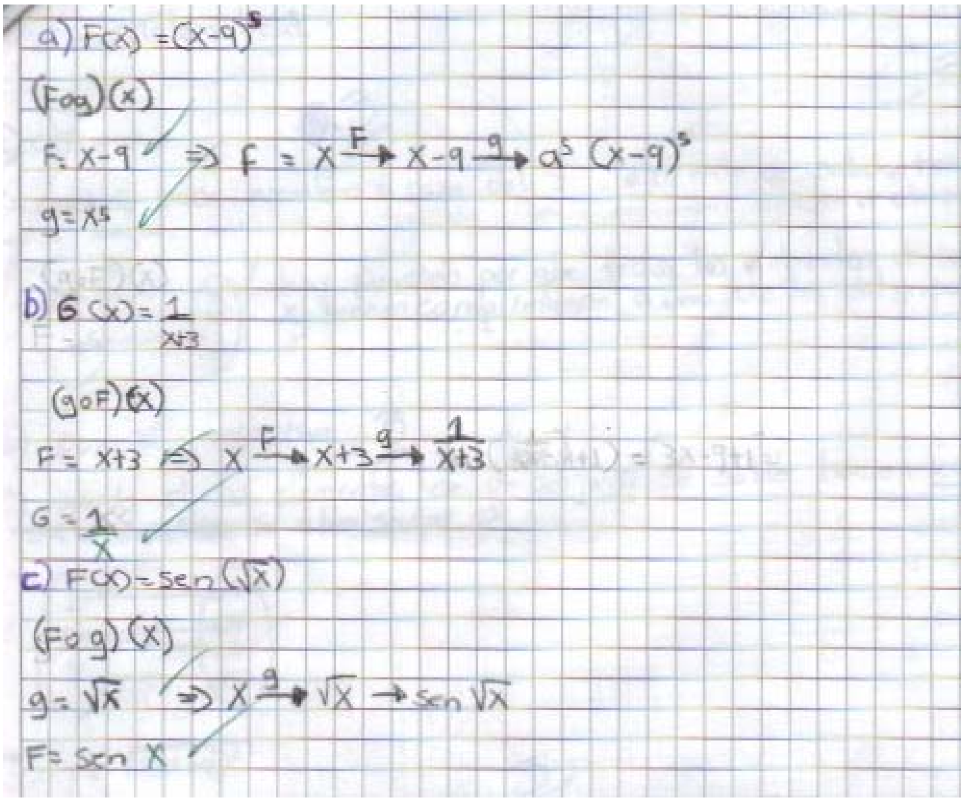


Figura 4[♦♦♦♦].

El siguiente punto pretende seguir practicando la composición de funciones.

♦♦♦♦ La Figura 4 fue tomada del Taller de Edinson Jaimes, un estudiante de 10-15 del INEM

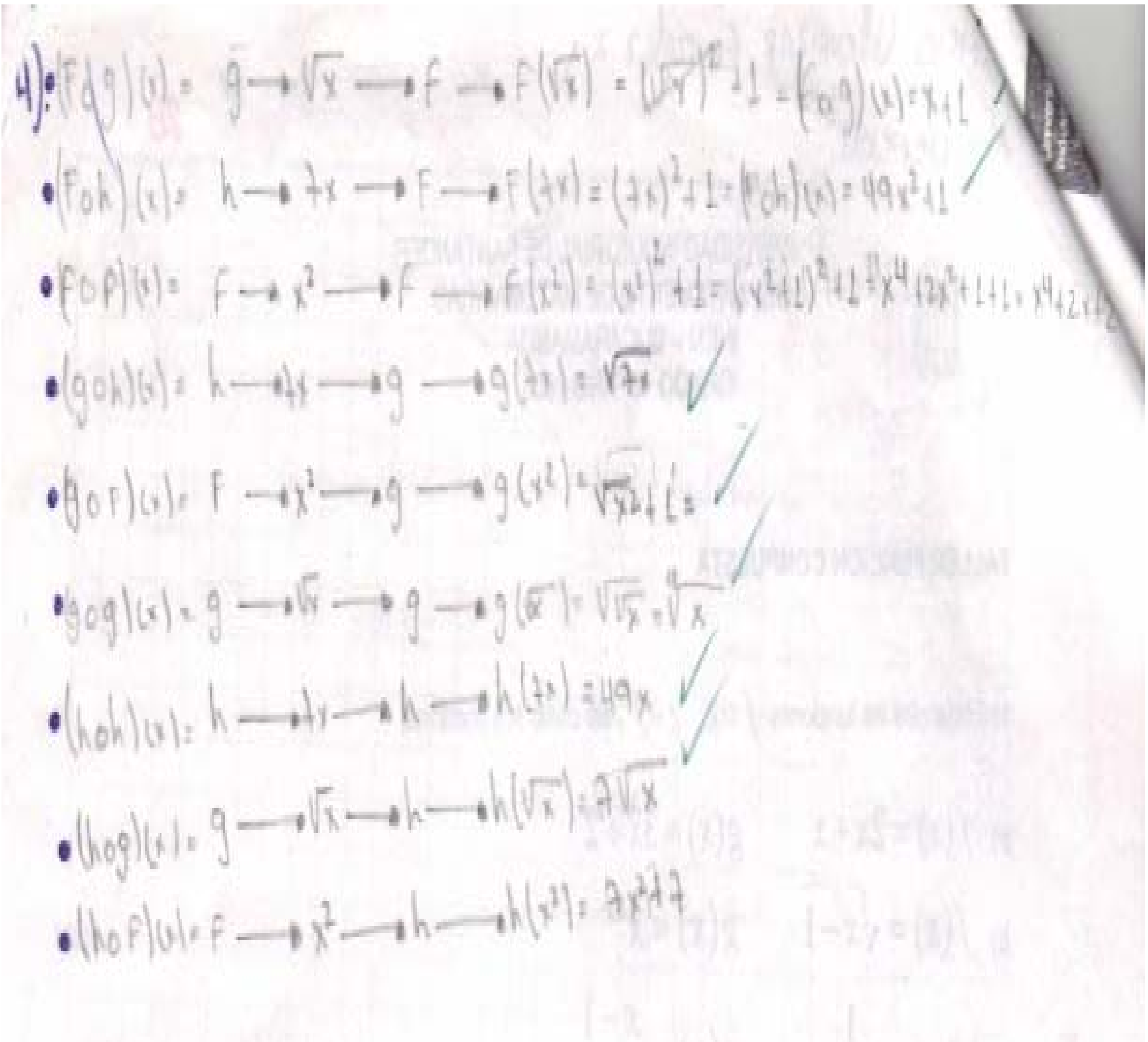


Figura 5[◆◆◆◆◆].

Con la práctica los estudiantes mostraron su dominio a la hora de realizar la composición entre funciones.

◆◆◆◆◆ La Figura 5 fue tomada del Taller de Leidy Villamizar, una estudiante de 10-15 del INEM

Análisis de la Guía No 5

Se tenía como objetivo que los estudiantes aplicaran el concepto de iteración y órbita, por lo tanto se inició con la definición de iteración, la cuál no produjo dudas entre los estudiantes ya que en las clases anteriores se pudo trabajar lo que es composición de funciones.

A continuación daremos algunas respuestas a los ejercicios propuestos.

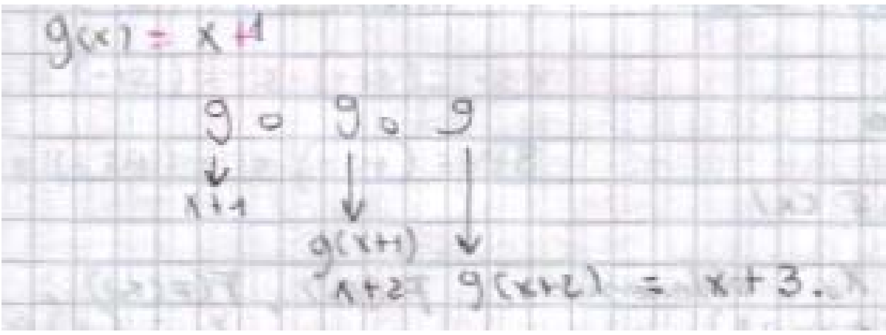


Figura 1♦.

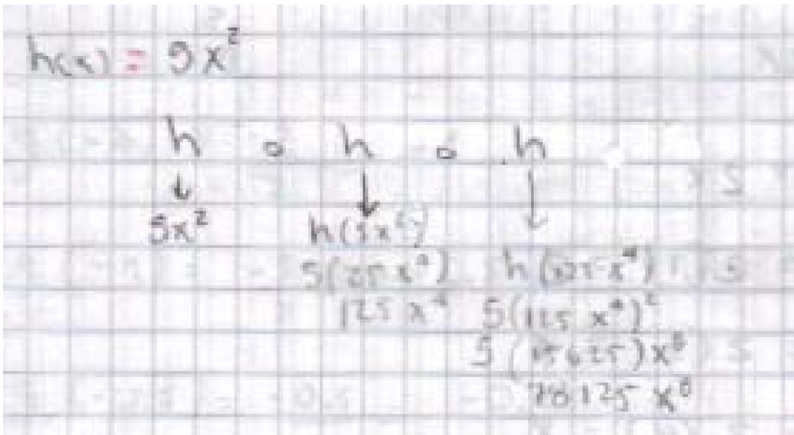


Figura 2.

♦ Las Figuras 1 y 2 fueron tomadas de los apuntes de Kimberly Bautista, una estudiante de 10-15 del INEM

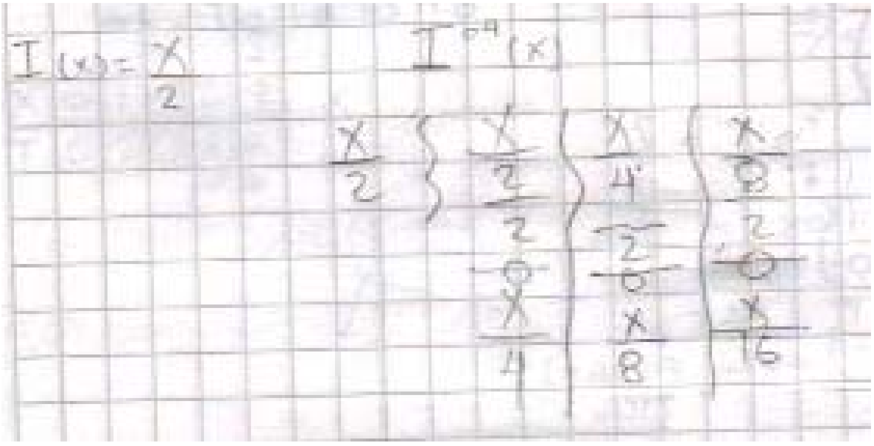
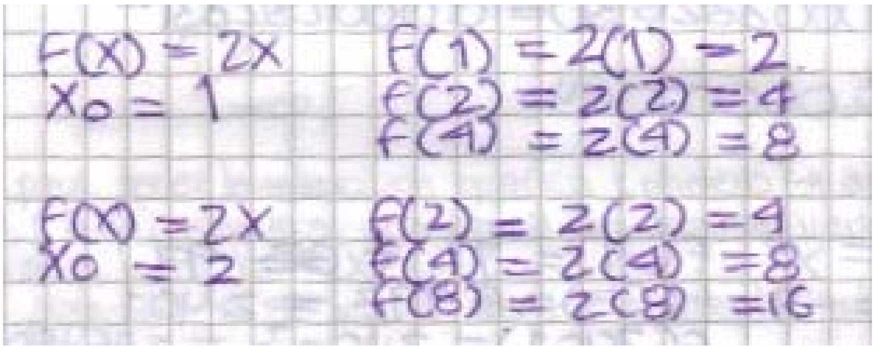


Figura 3♦♦♦.

Como se puede observar en los apuntes anteriores, los alumnos, utilizaron una notación tal vez no muy adecuada, pero la cual consideraron conveniente para un mejor entendimiento de este tema, más adelante comprendieron la importancia de seguir la notación dada en la guía, pues observaron que si se utilizaba la misma esto hacía que todos comprendieran.

Cuando se dio la definición de órbita, se observó su asombro, pero al mirar un ejemplo, se dieron cuenta de que era mucho más fácil que la composición de funciones; se plantearon algunos ejercicios para resolver en clase y esto fue lo que realizaron:

♦♦♦ La Figura 3 fue tomada de los apuntes de Diego Guarín, un estudiante de 10-15 del INEM



$F(x) = 2x$ $\quad F(1) = 2(1) = 2$

$X_0 = 1$ $\quad f(2) = 2(2) = 4$

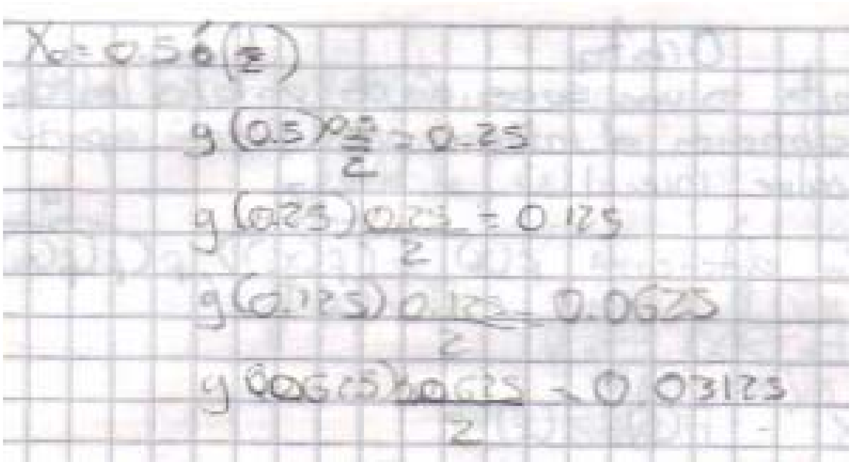
$f(4) = 2(4) = 8$

$F(x) = 2x$ $\quad f(2) = 2(2) = 4$

$X_0 = 2$ $\quad F(4) = 2(4) = 8$

$f(8) = 2(8) = 16$

Figura 4♦♦♦♦.



$X_0 = 0.5$ [illegible]

$g(0.5)\ \frac{0.5}{2} = 0.25$

$g(0.25)\ \frac{0.25}{2} = 0.125$

$g(0.125)\ \frac{0.125}{2} = 0.0625$

$g(0.0625)\ \frac{0.0625}{2} = 0.03125$

Figura 5♦♦♦♦♦.

Este tema fue para los estudiantes uno de los más atractivos, tal vez debido a su buen manejo y comprensión.

♦♦♦♦ La Figura 4 fue tomada de los apuntes de Mónica Díaz, una estudiante de 10-15 del INEM

♦♦♦♦♦ La Figura 5 fue tomada de los apuntes de Edinson Jaimes, un estudiante de 10-15 del INEM

Análisis de la Guía No 6

Se pretendía que los estudiantes observaran una de las aplicaciones de las funciones en matemáticas.

Se realizó un breve ejemplo para que ellos pudieran percibir la forma de trabajar las iteraciones, pero ahora gráficamente.

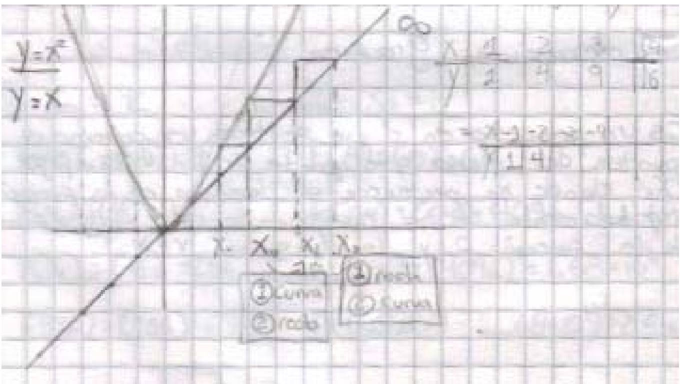


Figura 1♦.

Los puntos fijos, puntos fijos atractores y repulsores, fueron definidos luego, se dieron de las dos formas, algebraicamente y gráficamente.

♦ La Figura 1 fue tomada de los apuntes de Edinson Jaimes, un estudiante de 10-15 del INEM

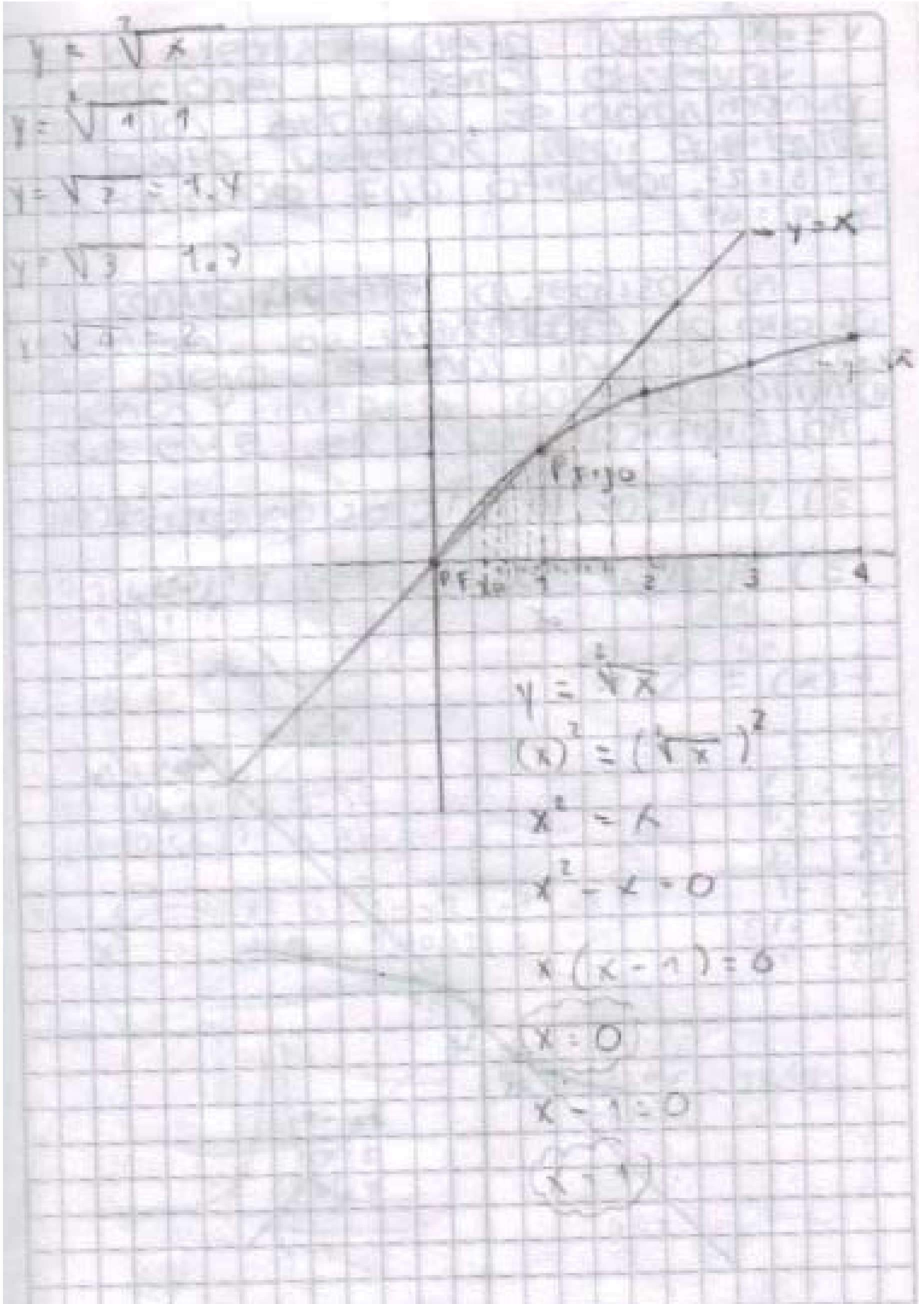


Figura 2**.

Al parecer para los alumnos este tema fue muy significativo y lo mejor de todo fue realmente interesante.

** La Figura 2 fue tomada de los apuntes de Kimberly Bautista, una estudiante de 10-15 del INEM

Análisis del Taller 4.

Con este taller buscábamos que los estudiantes adquirieran habilidades en la realización de iteraciones, tanto gráfica como analítica, al igual que la identificación de los puntos fijos y su posterior clasificación en puntos fijos atractores y repulsores.

En el primer punto se pedían varias órbitas de funciones diferentes. A lo cual los estudiantes respondieron muy bien.

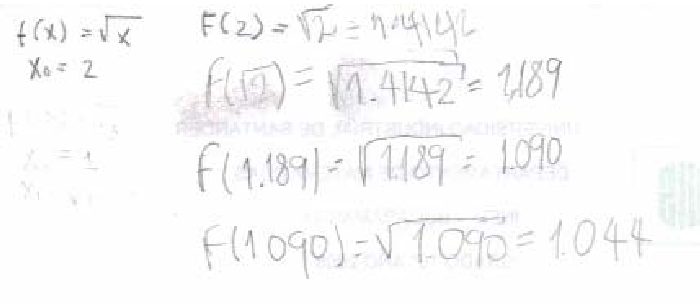


Figura 1♦.

En el siguiente punto se pide a los estudiantes la realización de la iteración gráfica, para diferentes funciones.

♦ Las Figuras 1, 2 y 3 fueron tomadas de los apuntes de Felipe Gallego, un estudiante de 10-15 del INEM

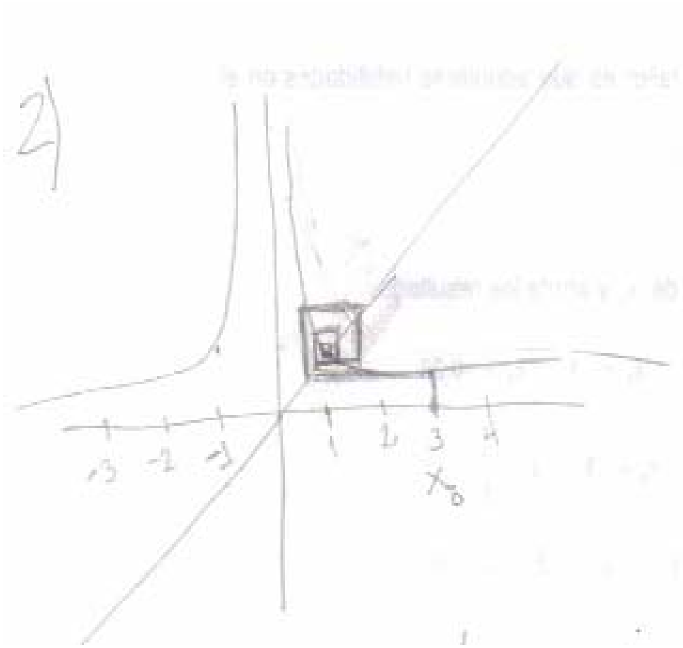


Figura 2.

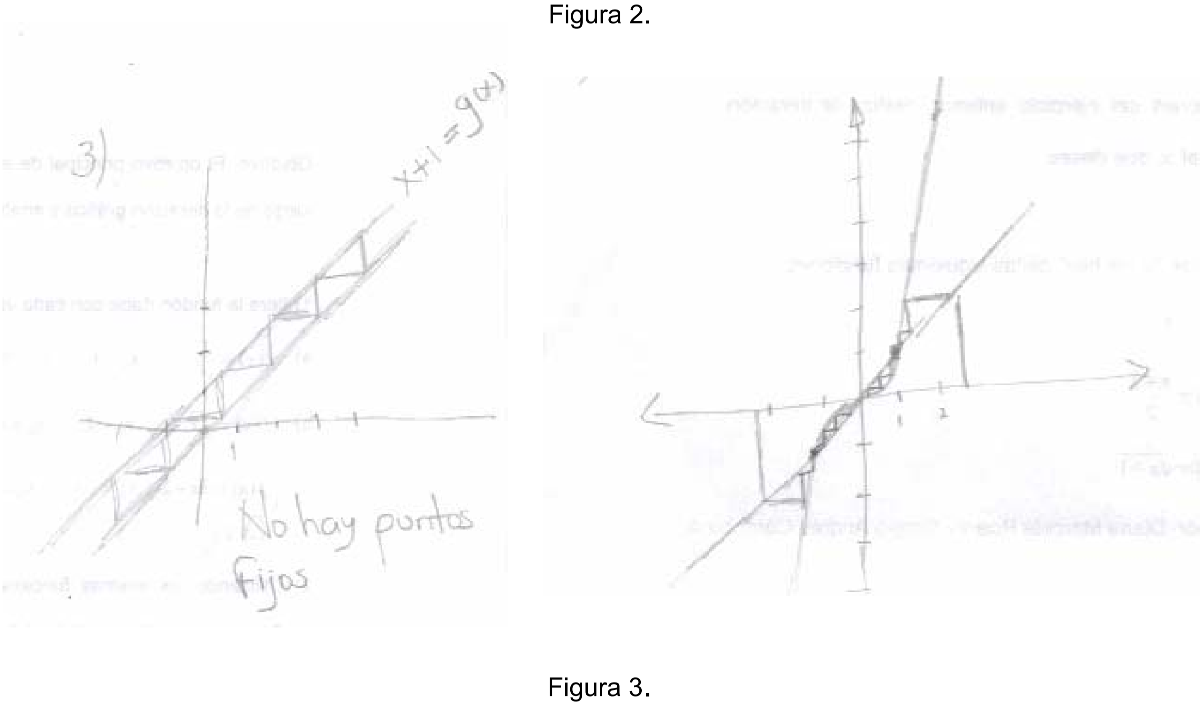


Figura 3.

En esta oportunidad los estudiantes elaboraron las gráficas sin realizar la tabla de puntos, teniendo en cuenta que muchas de ellas se habían trabajado en clase.

Análisis del taller 5

Este taller se trabajó en la salón de calculadoras, para ello tomamos el programa diseñado por **Carlos Julio Daza**♦, el cual fue mejorado por **ABAK** calculadoras. Nosotros llevamos el programa listo para ser ejecutado, hay que tener en cuenta que todo se realizó con un tipo específico de funciones, $y = cx(1-x)$, donde el valor de c corresponde a una constante.

En los ejercicios propuestos a los estudiantes, según el diseño del programa, debían escribir el valor de la constante c al igual que el del valor inicial x_0. Estos fueron propuestos con el objetivo de que los estudiantes observaran mediante la tecnología la iteración gráfica e identificaran los puntos fijos, clasificándolos así en atractores o repulsores; se hallaron las órbitas en algunas funciones cambiando la constante c y por último creímos conveniente preguntar a los estudiantes el efecto provocado por esta constante.

♦ DAZA Carlos Julio. ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL POR SISTEMAS DINÁMICOS, Universidad Industrial de Santander. Monografía, 1998.

C	1.5	2.05	2	2.7	3.1	4	1.7	3.9	3	1
Punto Atractor Escalera	X	X	X				X			X
Punto atractor espiral				X	X	\			X	
Pto. Repulsor Espiral						X		X		

Figura 1[◆◆].

2) Dados los parámetros, halle la orbita con un valor inicial $X_0 = 0.25$

C	2.95	3.05	3.68	2.02	1.25
X_1	0.553	0.572	0.690	0.399	0.234
X_2	0.729	0.747	0.789	0.495	0.224
X_3	0.583	0.577	0.614	0.504	0.217
X_4	0.717	0.745	0.870	0.505	0.213
X_5	0.598	0.580	0.416	0.505	0.209
X_6	0.709	0.743	0.894	0.505	0.207
X_7	0.608	0.583	0.348	0.505	0.205
X_8	0.703	0.742	0.835	0.505	0.204
X_9	0.616	0.584	0.506	0.505	0.203
X_{10}	0.698	0.741	0.920	0.505	0.202

Figura 2[◆◆◆]

[◆◆] La Figura 1 fue tomada del taller de Duvian Manrique, un estudiante de 10-15 del INEM.
[◆◆◆] La Figura 2 fue tomada del taller de Diana Rincón, una estudiante de 10-15 del INEM

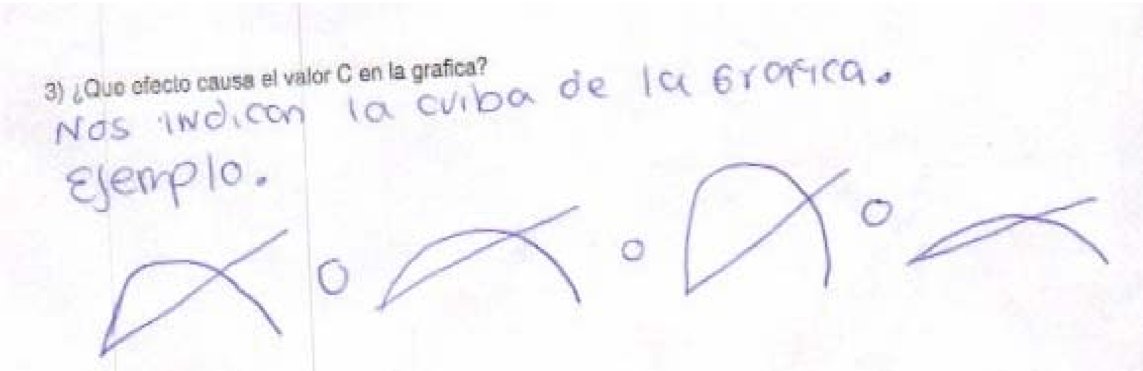


Figura 3♦♦♦.

Fue sorprendente ver que los estudiantes se esmeraron por dar y hacerlo lo mejor posible; la conclusión de la estudiante aunque un poco burda mostró lo que ella comprendió.

♦♦♦ La Figura 3 fue tomada del taller de Maryith Ríos, una estudiante de 10-15 del INEM

Análisis de la Evaluación

Durante todo el tiempo trabajado, siempre se enfatizó en la gráfica de funciones, por lo tanto esta no podía ser la excepción. Teniendo en cuenta que esta era la última evaluación y tal vez la que nos permitiría medir qué tanto habían aprendido nuestros estudiantes, se planteó como objetivo la evaluación de los conceptos básicos de sistemas dinámicos.

No esperábamos que los estudiantes realizaran los ejercicios mecánicamente, por eso se pensó en algo más analítico, lo cual tenía un poco más de observación.

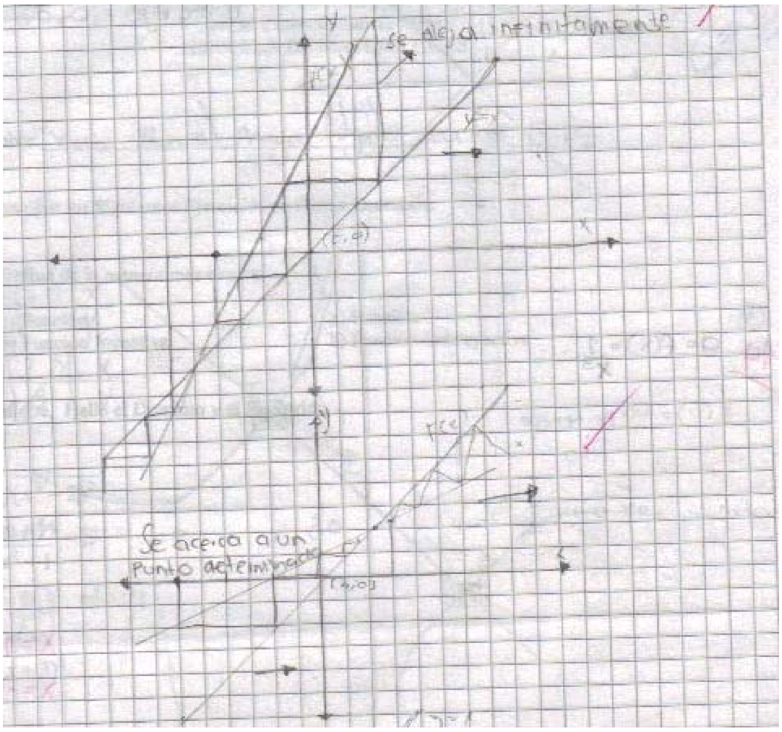


Figura 1[♦].

[♦] La Figura 1 fue tomada de la evaluación de Xair Anaya y Jesús Caez, estudiantes de 10-15 del INEM.

Teniendo en cuenta que no se daba la ecuación de la función f, se vieron en la necesidad de dar un calculo aproximado de las coordenadas del punto fijo, de acuerdo a la escala.

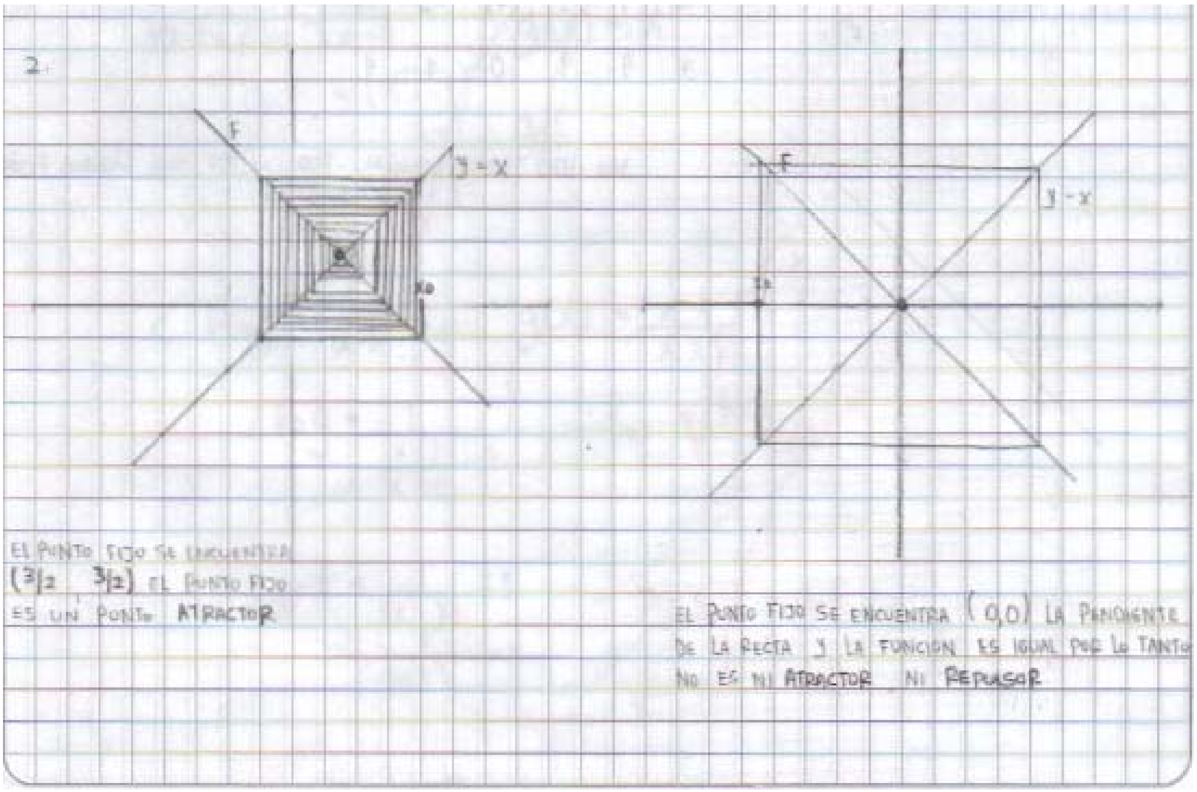


Figura 2◆◆.

Al realizar las gráficas se puede ver el avance obtenido por los estudiantes.

◆◆ La Figura 2 fue tomada de la evaluación de Gabriel Archila y Fabián Patiño, estudiantes de 10-15 del INEM.

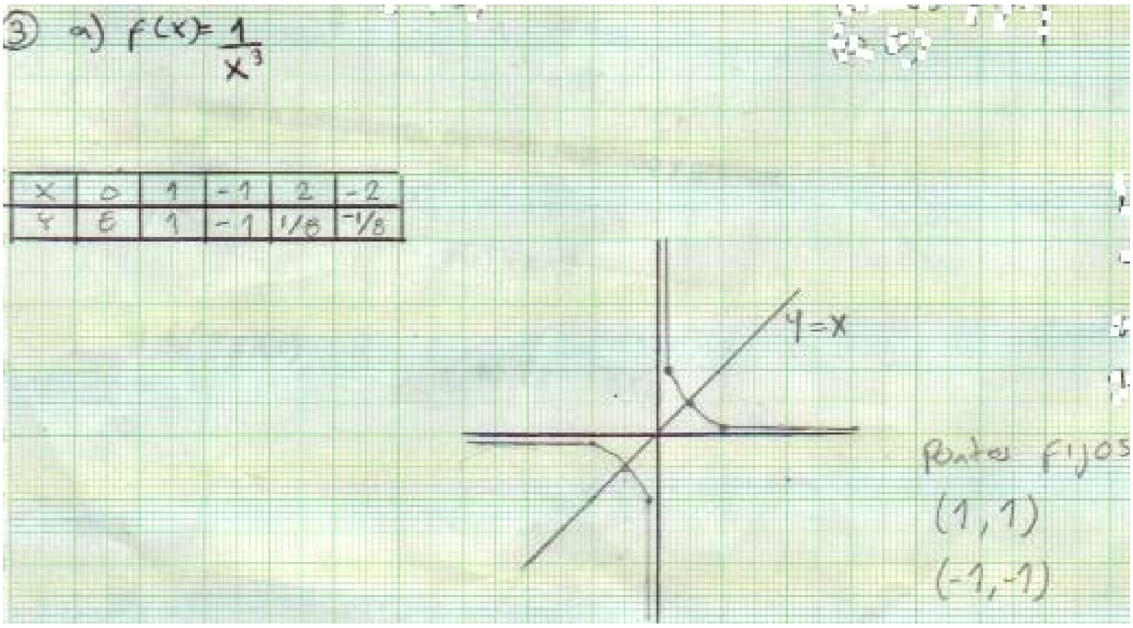


Figura 3♦♦♦.

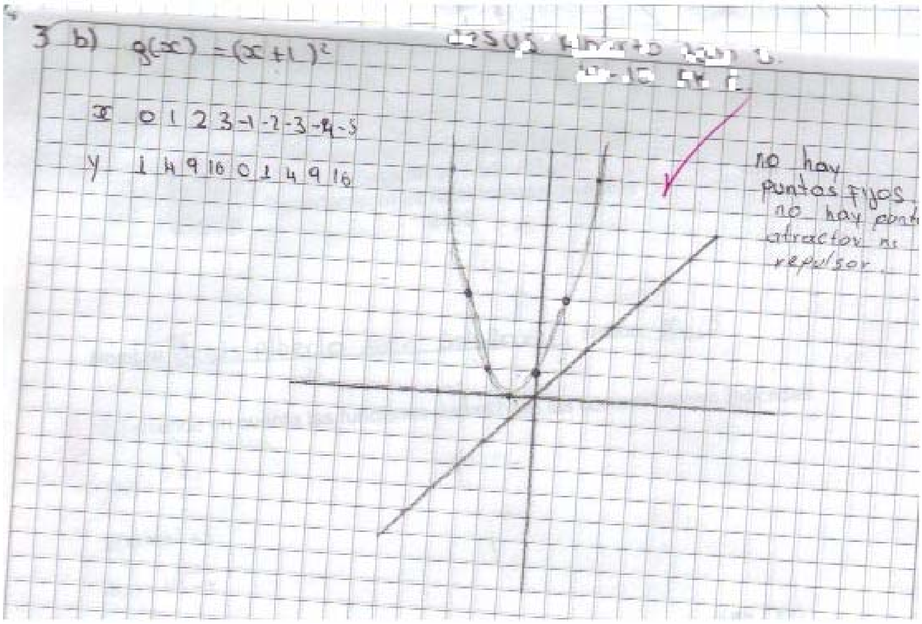


Figura 4♦♦♦♦

♦♦♦ La Figura 3 fue tomada de la evaluación de Diego Guarín y Sandy Ojeda, estudiantes de 10-15 del INEM

♦♦♦♦ La Figura 4 fue tomada de la evaluación de Jesús Leon, un estudiante de 10-15 del INEM

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Esperamos que este proyecto hubiese sido de su total agrado. Después de haber recorrido esta experiencia únicamente no resta hacer algunas anotaciones finales en tono de reflexión.

En general los estudiantes tienen muchas falencias en conceptos básicos de Matemáticas, esto dificulta aún más el trabajo al abordar temas un poco más complejos, para ello se debería reforzar y estudiar profundamente los conceptos fundamentales en matemáticas, aunque hay que tener en cuenta que el sistema actual permite que el estudiante sea promovido sin mayor esfuerzo.

Por tal motivo los docentes están a la expectativa de la vida universitaria de la primera promoción de bachilleres con “promoción automática” que sale graduada este año, para demostrar que el nuevo sistema de evaluación es sumamente mediocre, lo que perjudica principalmente a los mismos estudiantes.

Uno de los resultados que vale la pena comentar es que efectivamente se pueden introducir en la matemática de secundaria “nuevos” temas, como los sistemas dinámicos, únicamente falta un poco más de empeño y compromiso por parte de los docentes.

Los sistemas dinámicos son un tema muy interesante y falta mucho por estudiar, en una próxima monografía se podría avanzar con otros temas relacionados, por ejemplo ver el comportamiento de las órbitas al iterar funciones trigonométricas como: seno, coseno y tangente, tanto gráfica como analíticamente, utilizando también calculadoras y algún software gráfico.
También cabe mencionar que en una próxima ocasión se pueden mostrar algunas aplicaciones prácticas o reales que poseen los sistemas dinámicos, ya que de esta forma los alumnos adquieran un poco más de interés hacia temas nuevos, para ellos, de la matemática.

Es importante comentar que el método basado en puntos que nosotros "creamos", fue de gran ayuda para el funcionamiento de las clases, ya que permitió que los estudiantes desarrollaran cierto sentido de responsabilidad y competencia en el aula. En un principio los alumnos vieron con temor el método, pero luego entendieron que el objetivo era precisamente crear un compromiso de convivencia, de que "mis actos repercuten directamente en la sociedad".

Desde un principio queríamos que proyectos de grado como este, que buscan introducir "nuevos conceptos" en la matemática de secundaria, no se quedaran archivados en bibliotecas, sino que fueran divulgados a los docentes de matemática de bachillerato para que fueran aplicados en el aula de clase; por esta razón surgió el 1er ENCUENTRO DE INNOVACION MATEMATICA UIS –INEM, el cual abre puertas para crear una estrecha relación entre la universidad y el colegio, intercambiando información y permitiendo que los docentes se actualicen tanto académica como pedagógicamente.

ANEXOS

ANEXO 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Guía No1: Producto cartesiano y relaciones

Objetivo: Lograr que el estudiante aplique los conocimientos básicos del concepto de relación.

Definición: Dados dos conjuntos A, B, diremos que el **producto cartesiano** es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B. Se denota:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B \}$$

Ejemplo:

a) Si A={a,b,c) y B={1,2} determinar A x B y B x A. Observe si el producto cartesiano es conmutativo.

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$
$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

Se puede observar entonces que A x B es distinto de B x A, por lo tanto, el producto cartesiano no es conmutativo.

Definición: Una **relación** R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano A x B. A se denomina **conjunto de salida** y B se denomina **conjunto de llegada**. En general, la relación R es representada por el conjunto R así:

$$R = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\} \subset A \times B$$

.

Ejemplo: Determinar por extensión la relación de R_1 definida de $A = \{0,1\}$ en, $B = \{0,1,2\}$ cuya condición es "ser menor que"

$$R_1 = \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$$

Ejercicio en clase:

1) Escribir los conjunto A y B en los cuales se va a establecer la relación R_2 cuya condición es “ser divisible por”.

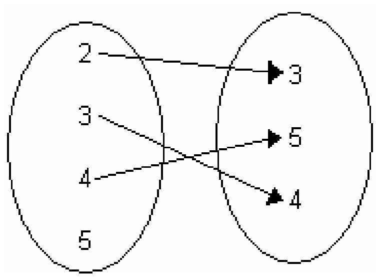
2) Dado $X = \{0,1,2,3\}$ y $Y = \{0,1,2,3,4,9\}$, defina la relación R_3,”ser el cuadrado de”

3) Establecer los conjuntos C y D en los cuales se va a establecer la relación R_4, cuya condición es “ser múltiplo de”

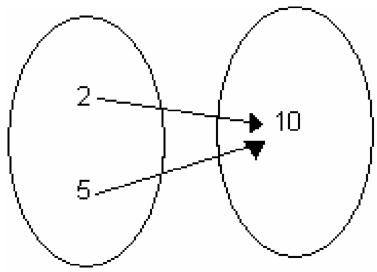
Ejercicio extra clase:

1) Escribir con palabras, una relación que represente las parejas ordenadas del cada diagrama.

a)



b)



2) Teniendo en cuenta el conjunto en el que se define cada relación, escribir tres parejas ordenadas que formen parte de ella.

a) R definida de **Z** en **Z**. R: "ser menor que".

b) R definida de **Q** en **Q**. R: "ser la mitad de".

c) R definida de **R** en **R**. R: "ser la raíz cuadrada de".

d) R definida de **R** en **R**. R: "ser igual a".

ANEXO 2

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Guía No 2: Dominio y Recorrido de una Relación

Objetivo: Brindar a los estudiantes el concepto de dominio y recorrido de una relación.

Definición: Se denomina **dominio** de la relación R y se denota Dom R, al conjunto formado por elementos de A que están relacionados con algún elemento de B, mediante R.

Definición: Se denomina **recorrido** de la relación R y se denota Ran R, al conjunto formado por los elementos de B tales que algún elemento de A, esta relacionado con ellos por R.

Ejemplo:

Determinar el dominio y recorrido de la siguiente relación. Luego representarla en el plano cartesiano.

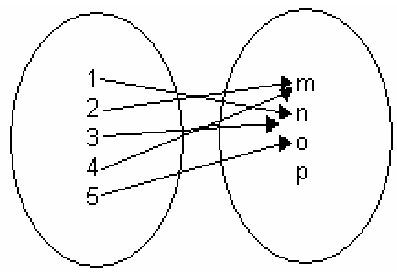
$$R_1 = \{(x, y) / x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z}, y = x^2 - 5\}$$

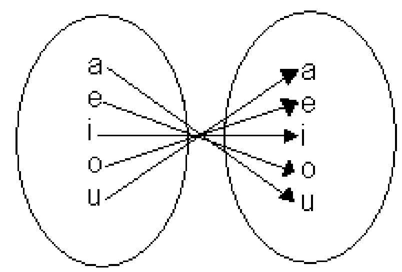
Haciendo la gráfica podemos observar que en esta relación x puede ser cualquier valor entero, $Dom R_1 = Z$, además se observa que cualquiera que sea el valor entero x, se observa que el valor de y nunca será menor que -5, por lo tanto, Ran $R_1 = \{ y \in \mathbf{Z} \ / \ y > -5 \}$

Ejercicio en clase:

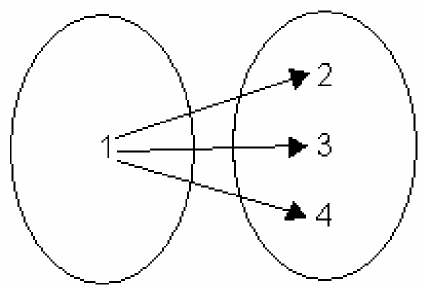
1) Indicar los elementos del dominio y los elementos del recorrido.

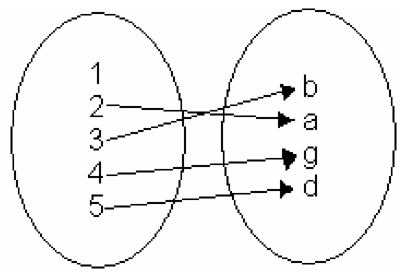
a)





c)





2) Determinar el dominio y recorrido de cada relación, luego graficar.

a) $x = y + 2$ b) $y = x^2 + 1$ c) $x - y^3 = -2$

ANEXO 3

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Taller 1

Objetivo: Reforzar los conceptos de relación, dominio y recorrido. Desarrollar la habilidad de graficar.

Para el desarrollo de este taller se necesita una hoja milimetrada, calculadora, lápiz y borrador, (en grupos de 2)

1) Halle el dominio y el recorrido de las siguientes relaciones, luego grafique.

$$y = 2x - x^2$$
$$y = 3x^3 + 4x$$
$$y = x^4 - 3x^2 + x$$
$$y = \sqrt[3]{x} + 3$$
$$y = x^{2/3}.(x-2)^2$$

2) Los biólogos han observado que la cantidad de chirridos por minuto de los grillos, esta relacionado con la temperatura del ambiente. La tabla muestra el número de chirridos por minuto para varias temperaturas.

Temperatura (ºF)	Chirridos por minuto
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

Haga un diagrama con los datos observados.

3) Realizar la gráfica de las siguientes relaciones.

a) $y = \sqrt{8 - 2x^2}$

b) $y = e^{x+2} - 3$

c) $y = \ln(x + 3)$

ANEXO 4

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

EVALUACIÓN

Objetivo: Evaluar los conceptos de relación, dominio y recorrido. Graficar.

Nombre: ____ Sección: ________

En grupos de MÁXIMO 2 PERSONAS, desarrollar los siguientes ejercicios en forma ordenada.

1) Defina de la manera más exacta:

a) Producto Cartesiano.

b) Dominio de una relación.

c) Relación.

d) Recorrido de una relación.

2) Graficar, determinar su dominio y recorrido.

a) $y = 3x^3 + 4x$

b) $y = x^4 - 3x^2 + x$

3) Los biólogos han observado que la cantidad de chirridos por minuto de los grillos, esta relacionado con la temperatura del ambiente.

La tabla muestra el número de chirridos por minutos para varias temperaturas.

Temperatura (ºF)	Chirridos por minuto
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

Haga un diagrama con los datos observados.

ANEXO 5

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Guía No 3: Funciones, Dominio y Recorrido.

Objetivo: identificar y aplicar conceptos básicos sobre funciones

Definición: Una **función** f de un conjunto X en un conjunto Y, es una relación que asigna a cada elemento de x en X, un único elemento de Y.

Se denota:

$$f : X \longrightarrow Y$$

Se lee la función f de X en Y. Al elemento $x \in X$ que corresponde a f se le llama la **imagen** de x por la función f .

Ejemplo:

x	Imagen: y
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8

¿Puede este ejemplo describir una función?

Las funciones pueden expresarse mediante fórmulas algebraicas de la forma y=f(x), lo cual se lee “y es igual a f de x”.

Ejemplo:

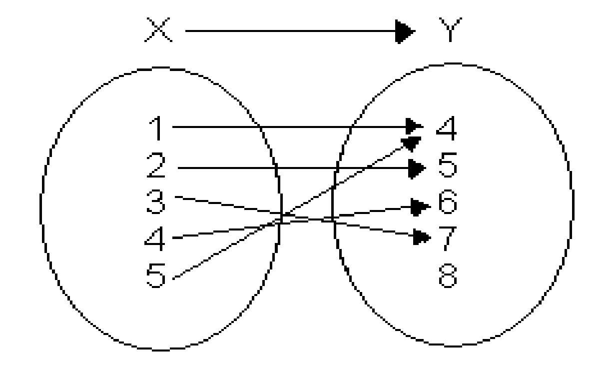
La fórmula algebraica de la función cuya regla es “sumar 3 al número”, se puede expresar como:

$$f(x) = x + 3$$

Si una función se define de un conjunto X en un conjunto Y, al conjunto X se le llama **conjunto de partida,** (finalmente el conjunto de salida se denomina el dominio de una función) y al conjunto Y se le llama **conjunto de llegada**.

Ejemplo:

Conjunto de partida f Conjunto de llegada



Ejercicio en clase:

1) Determinar en cada caso, si el conjunto de parejas ordenadas corresponde a una función del conjunto X en el conjunto Y.

a) X = {1,2,3,4,5 } ; Y = { 0,2,3,4,5 }

h = {(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0)}

b) X = { 1,2,3,4,5 } ; Y = { 2,4,6,8 }

g = {(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)}

c) X = {1,2,3,4, 5 } ; Y = { 5,10,15,20,25 }

f = {(1,5), (1,10), (2,15), (3,20), (4,25), (5,25)}

2) Dada la función $f : Z \longrightarrow Z$, $f(x) = 2x + 1$. Determinar:

a) $f(2), f(-1)$

b) El conjunto de imágenes de la función.

Definición: El **dominio** de una función $f : X \longrightarrow Y$ es el conjunto formado por las primeras componentes de las parejas que pertenecen al conjunto $f = \{(x, y) / y = f(x)\}$

Se simboliza:

$$Domf = \{x/(x, y) \in f\}$$

Ejemplo:

Determinar el dominio de la función definida mediante la siguiente fórmula algebraica.

$f(x) = \frac{1}{x}$ Debido al que el denominador no puede ser igual a cero, el dominio de la función es el conjunto de los reales sin incluir el cero. Es decir: Dom f = R – {0}

Definición: El **rango o recorrido** de una función $f : X \longrightarrow Y$ es el conjunto formado por las segundas componentes de las parejas ordenadas que pertenecen a la función.

Se simboliza:

$$\operatorname{Re}cf = \{y/(x, y) \in f\}$$

De lo anterior se deduce que el rango de una función es el conjunto de imágenes de la función. Al conjunto de llegada de una función se le llama **codominio** de la función.

Ejemplo:

Para la función f = {(1,4),(2,5),(3,6),(4,7)} definida del conjunto X={1,2,3,4} en el conjunto Y ={4,5,6,7,8} , el rango es $Ranf = \{4,5,6,7\}$, mientras que el conjunto de llegada o codominio es $Y = \{4,5,6,7,8\}$.

Ejercicio en clase:

1) Determinar el dominio y rango de las funciones definidas mediante las siguientes fórmulas algebraicas.

a) $h(x) = 3x$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$

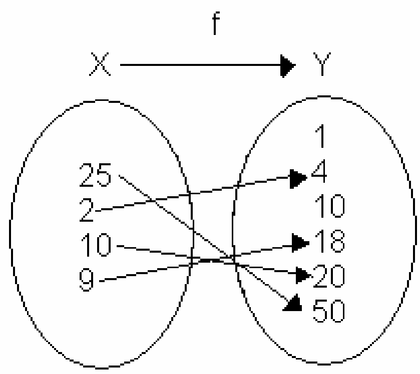
Ejercicio extra clase:

1) Escribir la regla que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B.

a)

A	B
-1	0
-2	-7
3	28
2	9

b)



c) f = { (0,1),(2,5),(1,3),(4,9),(3,7) }

2) Sean M = { 0,1.2,3,4,5,6 } y N = { 0,2,4,6,8,10,12,14 }, determinar si cada conjunto corresponde a una función de M en N.

a) C = {(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12)}

b) D = {(0,0), (2,2), (4,4), (6,6)}

c) E = {(0,14), (1,12), (2,10), (3,8), (4,6), (4,4), (6,2)}

d) F = {(0,0), (1,2), (2,14), (0,8), (3,6), (4,8)}

3) En cada caso hallar las imágenes pedidas.

a) $f(x) = x + 4;\ f(-1),\ f(0),\ f(10)$

b) $f(x) = x^2 - x;\ f(-3),\ f(1),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x) = -x + x^2 + 1;\ f(-2),\ f(0),\ f(4)$

ANEXO 6

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

TALLER 2

Objetivo: Graficar e identificar los tipos de funciones.

Para el desarrollo de este taller, se usará el programa computacional Winplot.

1) Grafique y determine en cada caso si la “fórmula” dada corresponde a una función, y en tal caso determine su dominio y recorrido.

$a)\ f(x) = 2$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{3}$ $\qquad c)\ f(x) = -5$

2) Grafique y observe,

$a)\ f(x) = x$ $\qquad b)\ f(x) = 2x + 3$ $\qquad c)\ f(x) = 7 - 2x$

¿Qué puede decir acerca de las gráficas?, ¿En qué se diferencian? , ¿Qué cree que haya producido el cambio?

3) Grafique y observe,

$a)\ f(x) = x^2$ $\quad b)\ f(x) = 2x^2 + 1$ $\quad c)\ f(x) = -x^2 + 3$

¿Qué puede decir acerca de las gráficas?, ¿En qué se diferencian?, ¿Qué cree que haya producido el cambio?

4) Grafique y observe,

$a)\ f(x) = x^3$ $\quad b)\ f(x) = -x^3 + 2$ $\quad c)\ f(x) = x^3 + 5$

¿Qué puede decir acerca de las gráficas?, ¿En qué se diferencian?, ¿Qué cree que haya producido el cambio?

5) Grafique y observe,

$a)\ f(x) = senx$ $\quad b)\ f(x) = \cos x$

6) Tome la gráfica a) del punto 2), 3), 4) y responda. ¿Qué diferencia encuentra entre las gráficas?

ANEXO 7

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Evaluación

Objetivo: Evaluar el concepto de función, dominio, recorrido y gráficas de funciones.

Nombre: ____ Sección: ________

1) Defina de la manera más exacta:

Tema A	Tema B
a) Función	c) Función
b) Dominio de una función	d) Recorrido de una función

2) Grafique, halle dominio y recorrido.

Tema A

a) $y = \sqrt{(x^2 - 2)^2}$

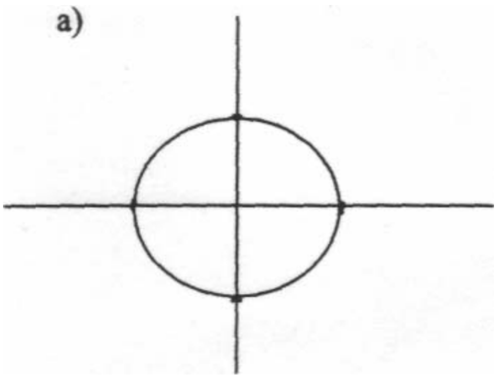
$y = \dfrac{x+1}{x^2 - 1}$

Tema B

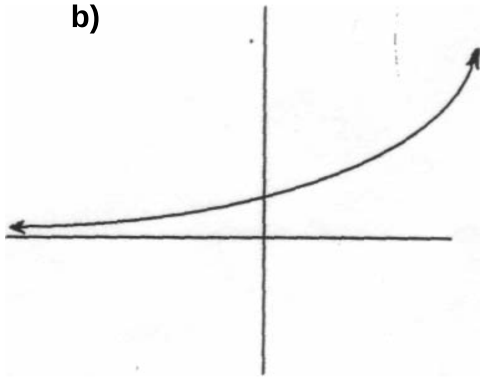
b) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$

$y = (x+3)^3$

3) Determinar si las siguientes graficas corresponden a una función.



b)



ANEXO 8

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

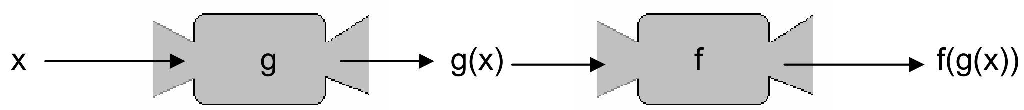
Guía No 4: Composición de Funciones.

Objetivo: Introducir a los estudiantes en el concepto de composición de funciones

Definición: Dadas dos funciones f, y g, donde g: X→Y y f: Y→Z la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada la **composición** de f y g) esta definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los x en el dominio de g tales que g(x) este en el dominio de f.



La figura muestra “la máquina” $f \circ g$ que esta compuesta por la máquina g (primera) y luego por la máquina f.

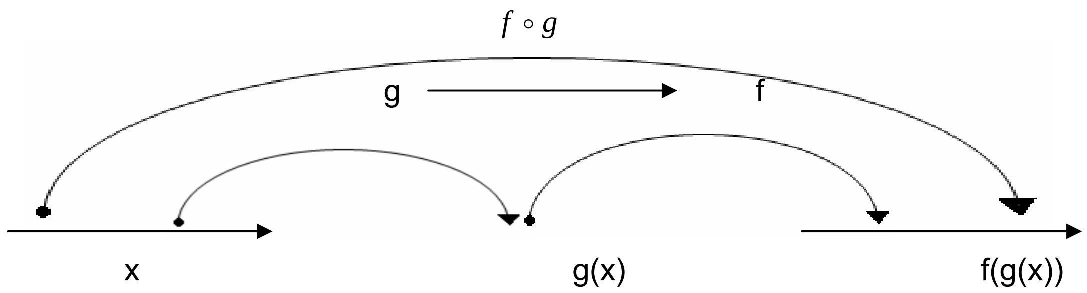


Diagrama de flechas para $f \circ g$.

Ejemplo:

Si f(x) = x^2 y g(x) = x – 3, encuentre la función compuesta $f \circ g$ y $g \circ f$.

Tenemos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Ejercicio en clase:

1) Ecuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)}$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

2) Dada la función $F(x) = \cos^2(x+9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

ANEXO 9

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

TALLER 3

Objetivo: Reforzar los conceptos de composición de funciones.

1) Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, así como sus dominios.

a) $f(x) = 2x - x$ $\qquad g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad g(x) = x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

2) Encuentre $f \circ g \circ h$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = x^3$ $\qquad h(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad h(x) = \sqrt[3]{x}$

3) Exprese en la forma $f \circ g$.

a) $F(x) = (x-9)^5$

b) $G(x) = \dfrac{1}{x+3}$

c) $F(x) = sen(\sqrt{x})$

4) Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$
$$h(x) = 7x$$

Hallar:

$$(f \circ g)(x)$$
$$(f \circ h)(x)$$
$$(f \circ f)(x)$$
$$(g \circ h)(x)$$
$$(g \circ f)(x)$$
$$(g \circ g)(x)$$
$$(h \circ h)(x)$$

ANEXO 10

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Evaluación

Objetivo: evaluar el concepto de composición de funciones.

Nombre: ____ Sección: ____________

1) Teniendo en cuenta las funciones dadas, halle las composiciones indicadas.

$$f(x) = \frac{(x+3)}{2}$$
$$g(x) = x^2 + 5$$
$$h(x) = \sqrt[3]{5-x}$$

a) $(f \circ g)(x)$, $(h \circ h)(x)$, $(h \circ g)(x)$

b) $(h \circ f)(x)$, $(g \circ h)(x)$, $(f \circ f)(x)$

c) $(g \circ f)(x)$, $(f \circ h)(x)$, $(f \circ g)(x)$

2) Exprese de la forma $f \circ g$.

a) $F(x) = \cos^2 x$

b) $H(x) = \sqrt[3]{\tan x}$

c) $W(x) = \dfrac{senx + 3}{2}$

3) Hallar la composición indicada, dominio, recorrido y gráfica.

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = x - 2$$

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

ANEXO 11

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

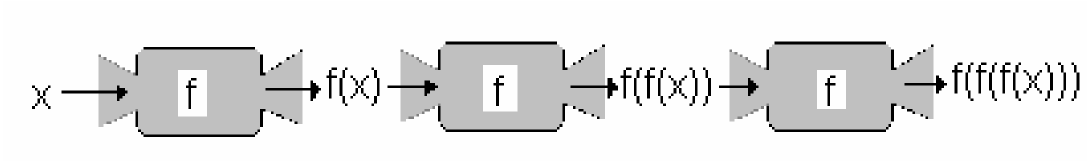
INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Guía No 5: Iteración y órbita

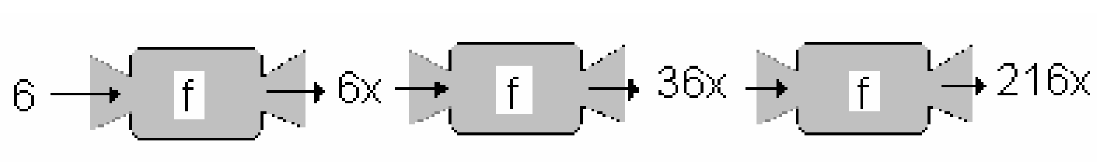
Objetivo: Aplicar el concepto de iteración y órbita.

Definición: Una **iteración** es el proceso de repetir la composición de una función, en el cual su dominio t recorrido pertenecen al mismo conjunto, con ella misma



Ejemplo:

Si f(x) = 6x



Ejercicios en clase:

a) $g(x) = x+1$ c) $h(x) = 5x^2$

b) $f(x) = 3x+2$ d) $w(x) = \frac{x}{2}$

Definición: La **órbita** es una sucesión de valores, los cuales se obtienen al iterar una función a partir de un valor inicial.

Dado x_0 obtenemos: $f(x_0); f(f(x_0)); f(f(f(x_0))),...$

Y se denomina "la órbita x_0 bajo la función f "

Ejemplo:

Si f(x) = 2x

$x_0 = 1$	$x_0 = -1$	$x_0 = -3$	$x_0 = 2$
$x_1 = 2$	$x_1 = -2$	$x_1 = -6$	$x_1 = 4$
$x_2 = 4$	$x_2 = -4$	$x_2 = -12$	$x_2 = 8$
$x_3 = 8$	$x_3 = -8$	$x_3 = -24$	$x_3 = 16$

Ejercicio en clase:

1) Iterar la función f(x)= $\frac{1}{2}x$ con punto inicial.

x_0 = 0.2 x_0 = 0.85 x_0 = 0.64 x_0 = 13.25

2) Iterar la función f(x)= x^2 con punto inicial.

x_0 = 2 x_0 = 8 x_0 = 0.85 x_0 = -7

ANEXO 12

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Guía No 6: Iteración Gráfica

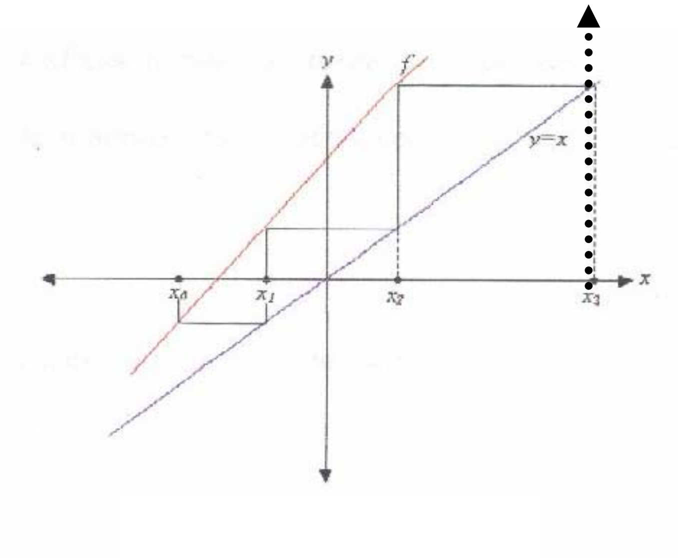
Objetivo: identificar el proceso de iterar una función.

El juego de la **iteración gráfica** es un proceso muy sencillo en el que se traza un camino de puntos en el plano que parte de un valor fijo x (pertenece al dominio de la función f) y repetidamente se va moviendo entre la gráfica de la función f y la diagonal $y = x$.

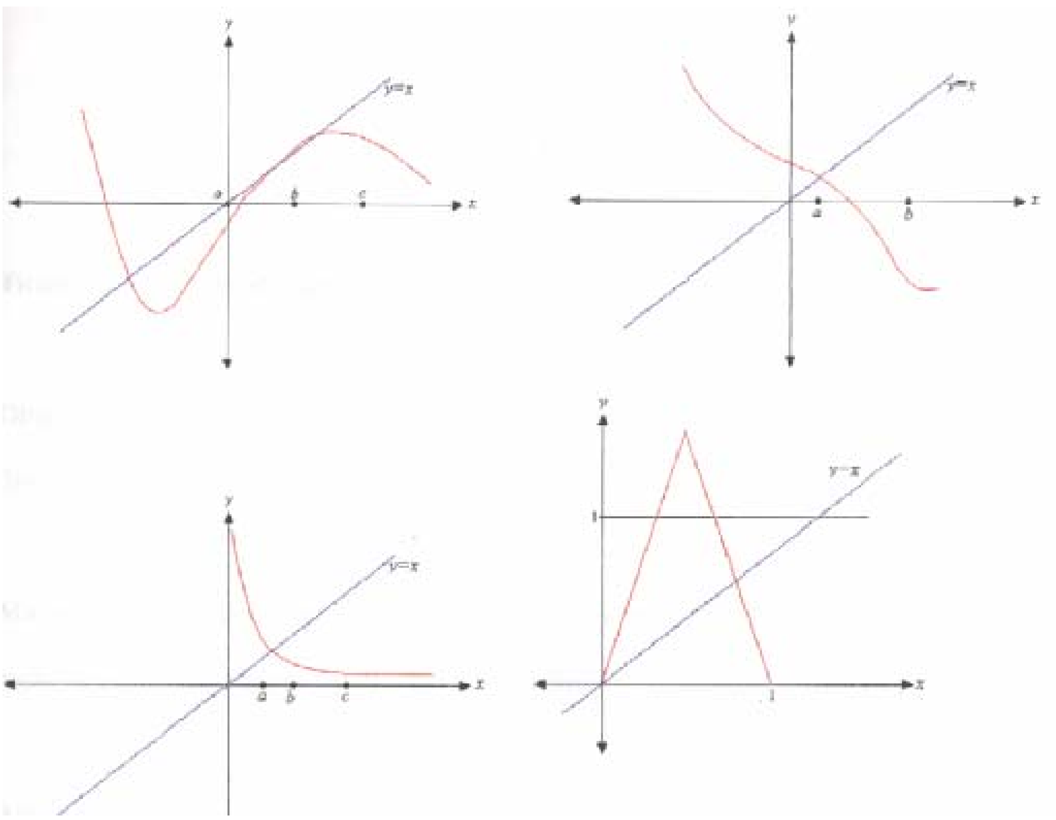
1) Se mueve verticalmente hasta tocar la curva (la gráfica de f);

2) Se mueve horizontalmente hasta tocar la diagonal;

3) Continuar con este proceso.



Realizar la representación gráfica de una iteración.



ANEXO 13 UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

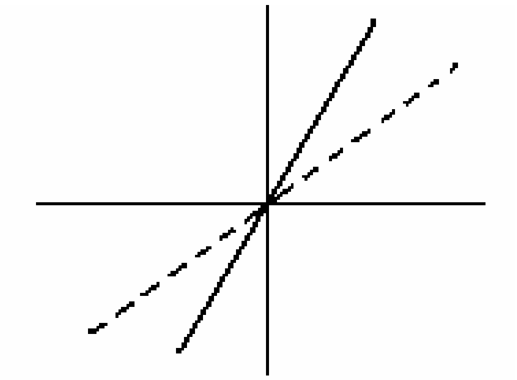
Guía No 7: Puntos Fijos, Puntos Fijos Atractores y Puntos Fijos Repulsares.

Objetivo: Conocer y aplicar los conceptos de punto fijo, punto fijo atractor y punto fijo repulsor.

Definición: Un punto del dominio de una función f se dice que es **punto fijo** de f, si al aplicarle la función no cambia, es decir si cumple f(x)=x

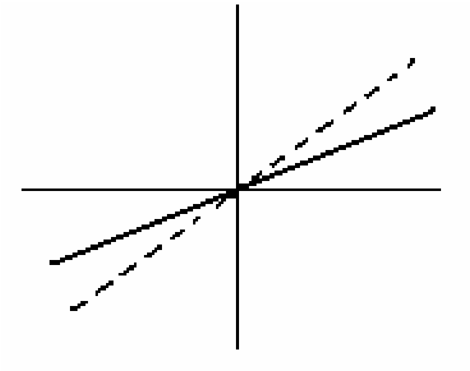
Ejemplo:

Si y = 2x



Para mirar cual seria el punto fijo igualamos y=x, por lo tanto obtenemos 2x=x, luego tendríamos 2x – x = 0, entonces x = 0, por lo tanto el punto fijo se encuentra cuando x = 0

y = $\frac{1}{2}x$



Entonces igualamos y = x

$$x = \frac{1}{2}x$$
$$x - \frac{1}{2}x = 0$$
$$\frac{1}{2}x = 0$$
$$x = 0$$

Luego el punto fijo se encuentra en x = 0

Ejercicios en clase:

1) Graficar y hallar los puntos fijos “si los hay” de:

a) y = 3x

b) y = $4x^2$

c) y = x^2+3

d) y= x +1

Definición: Si al realizar cierto numero de iteraciones podemos observar que las orbitas se aproximan a un punto, podemos decir que este es un **punto fijo atractor**.

Definición: Si contrariamente al realizar un numero de iteraciones la orbita se aleja $(\infty,-\infty)$ podemos afirmar que este es un **punto fijo repulsor**.

ANEXO 14

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Taller 4

Objetivo: reforzar las habilidades en el juego de la iteración gráfica y analítica.

1) Itera la función dada con cada valor de x_0 y anota los resultados.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; $x_0=1$ $\quad x_0=0.5$ $\quad x_0=-3$ $\quad x_0=-0.25$

b) $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0=2$ $\quad x_0=1$ $\quad x_0=-3$ $\quad x_0=\dfrac{1}{8}$

c) $f(x)=3x+2$; $x_0=-3$ $\quad x_0=0.33$ $\quad x_0=1.5$ $\quad x_0=0$

2) Utilizando las mismas funciones del ejercicio anterior, realiza la iteración gráfica, partiendo del punto inicial x_0 que quiera.

3) Grafique y halle los puntos fijos "si los hay" de las siguientes funciones:

a). $g(x)=x+1$ $\qquad f(x)=x^3$

b). $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ $\qquad f(x)=\dfrac{x+3}{2}$

c). $g(x)=5x-1$ $\qquad f(x)=\sqrt{x-1}$

ANEXO 15

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

GRADO 10° AÑO 2008

Taller 5

OBJETIVO: Visualizar rápidamente el comportamiento dinámico de un tipo especifico de funciones, mediante la utilización de calculadoras.

Nombre:____ Sección:______________

1) Con un valor inicial $X_0 = 0.1$ y con los parámetros dados, trata de ubicar los comportamientos de las iteraciones de la función **y = cx (1-x)**, marcando sobre la tabla en la columna y la fila que corresponda (mínimo 15 iteraciones).

c	1.5	2.05	2	2.7	3.1	4	1.7	3.9	3	1
Punto Atractor Escalera										
Punto atractor espiral										
Pto. Repulsor Espiral										

2) Dados los parámetros, halle la órbita de la función **y = cx (1-x)** con un valor inicial $X_0 = 0.25$

c	2.95	3.05	3.68	2.02	1.25
X1					
X2					
X3					
X4					
X5					
X6					
X7					
X8					
X9					
X10					

3) ¿Qué efecto causa el valor c en la grafica de la función **y = cx (1-x)**?

ANEXO 16

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INEM – BUCARAMANGA

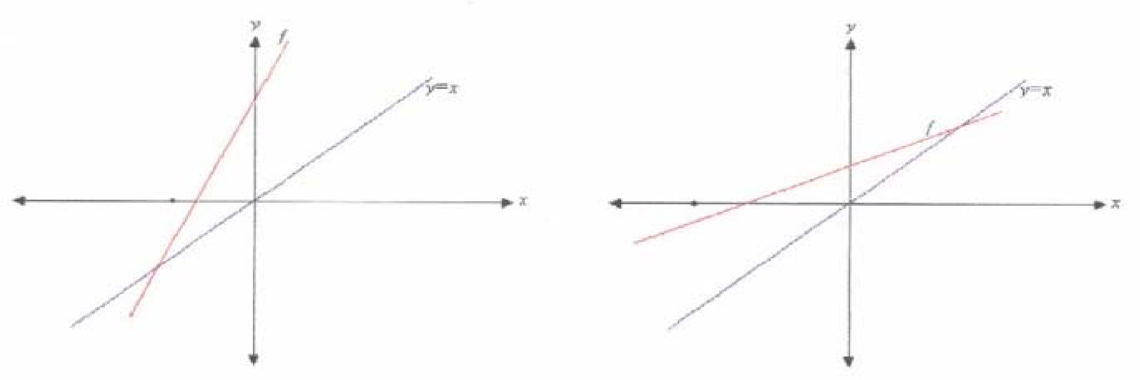
GRADO 10° AÑO 2008

EVALUACION

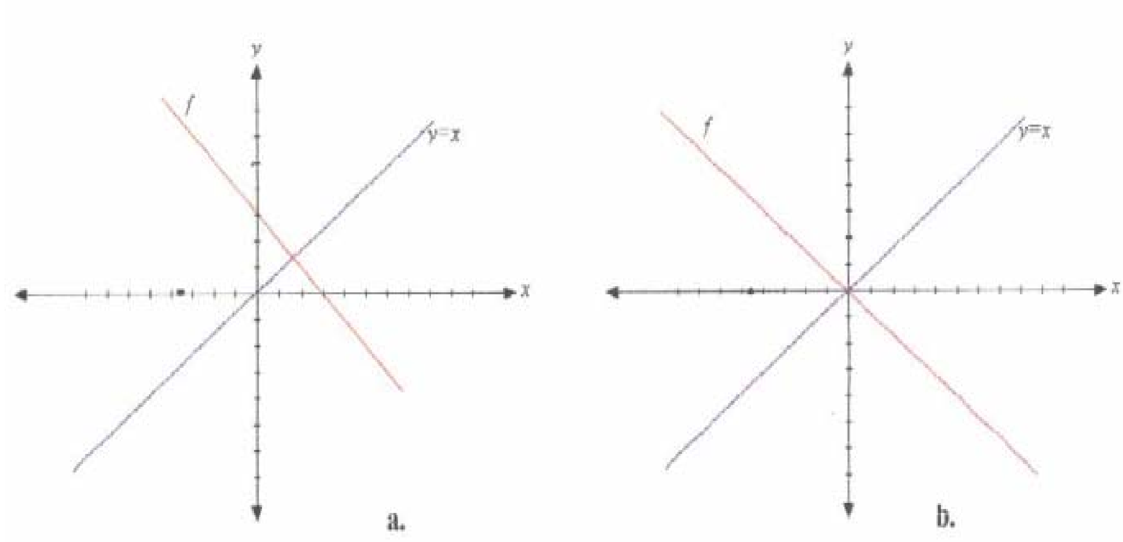
Objetivo: Evaluar los conceptos de iteración, iteración gráfica, punto fijo, punto fijo atractor y repulsor.

NOMBRE: ______________________________________ SECCION: _________

1) Trace el camino de iteración (escalera) partiendo de los puntos señalados y observa si la trayectoria de la iteración tiende a acercarse a un punto determinado o por el contrario tiende a "alejarse" infinitamente.



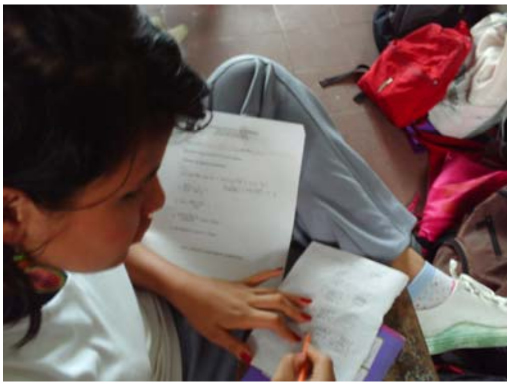
2) Realice la iteración gráfica y halle los puntos fijos (si los hay)



3) Realice la gráfica en todo su dominio (valores negativos y positivos), halle los puntos fijos (si los hay) y clasifíquelos en repulsores o atractores.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ b) $g(x)=(x+1)^2$

ALGUNAS FOTOS



BIBLIOGRAFIA

[1] BAUTISTA BALLÉN. RAMÍREZ MENDEZ. NUEVAS MATEMÁTICAS 10: Editorial Santillana. Año 2005.

[2] DAZA Carlos Julio. ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL POR SISTEMAS DINÁMICOS, Universidad Industrial de Santander. Monografía, 1998.

[3]SIERRA William. UN ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL EN EL BACHILLERATO, Trabajo de Grado de la Especialización en Educación Matemáticas, 2006.

[4] GONZALEZ William. CAOS Y CONJUNTO DE CANTOR. Universidad Industrial de Santander. Monografía. 2007.

[5] GÓMEZ Nayibe. INTRODUCCIÓN AL CAOS A PARTIR DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS. Universidad Industrial de Santander. Monografía. 2005

[6] Rivero Joselin, MARTINEZ Sergio. DISEÑO, APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE GUÍAS, PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL GRADO ONCE, USANDO GEOMETRIA FRACTAL. Universidad Industrial de Santander. Monografía. 2008.

[7] Teoría cognitiva de Piaget. Recuperado de www.monografias.com/trabajo16/teoria - piaget/teoria piaget.html.

[8] El conductismo. Recuperado de http : // produceidea s .blogspot.com /2006/04/ conductismo - en - soc – de – la – educación.html.

[9] Propiedades de las Relaciones. Recuperado de http: //es. Wikipedia .org /wiki/ propiedades de las relaciones.

[10] Funciones. Recuperado de http://www.wikipedia.org/wiki/funciones.