UNA INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO PARABÓLICO

ADRIANA LEON VALDERRAMA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

UNA INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO PARABÓLICO

ADRIANA LEON VALDERRAMA

Monografía presentada como requisito para optar al título de *Licenciada en Matemáticas*

Rafael Castro Triana
Director

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A Dios y mi familia
por su amor incondicional

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente :

- A **Dios**, por las oportunidades que me ha brindado para seguir adelante, por ser mi luz y mi guía durante mi vida.
- A mis **padres Ignacio León y Martha Valderrama**, por su amor, comprensión y apoyo incondicional, por su gran esfuerzo para la realización de mi vida.
- A mi **tía Tere**, por su bondad, amor y apoyo, por sus palabras y deseos que me impulsan a seguir adelante a triunfar para lograr las metas propuestas.
- A mi **novio Hugo Aldemar Gomez**, por su cariño, amor y apoyo para la culminación de este trabajo. Por los sueños que tenemos y que con la ayuda y compañia de Dios se nos harán realidad.
- A mis **hermanos Martha y Andrés** por su apoyo, amor, compañía y afecto.
- A mi **sobrinita Valentina** por ser fuente de inspiración amor y ternura.
- Al profesor **Rafael Castro**, por su colaboración y por su acertada orientación para la realización de este trabajo.
- A los **profesores**, por su contribución en mi formación académica.

- A mis **compañeros Melissa, Erika, Elver, Andrea, Diana María**, que de una u otra manera me apoyaron, colaboraron y me brindaron una amistad incondicional.

- A la **UIS**, institución que me dio la oportunidad de formarme profesionalmente.

TITLE: AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF PARABOLIC TYPE *

AUTHOR: ADRIANA LEON VALDERRAMA**

KEY WORDS: Heat equation, parental differential parabolic type equation, cotour first problem, maximum principle .

DESCRIPTION

An example od differential part parabolic type equation is heat equation, this model describes temperature evolving inside a solid, such as a length 1 metal bar. At first, it is heated at $u(x_1, t_0)$ and from point t_0, temperature evolves freeely. The solving of this model predicts temperature $u(x, t)$ at point x on time t, for $x \in [0, 1]$ and $t > t_0$.

To determine the unity of some problems related to the model previously described we go to the energy method and at the beginning of the maximum, the latter establishes that whether temperature in the frontier and at the initial moment doesn't overcome certain value M and there aren't heat sources inside the body, temperature of it should be lesser or equal than M over the time.

The energy technique, besides it's use for the case the bar is finite, it also may used when the bar is finite.

For obtaining the solution of the problems, several methods are used, such as the Fourier's transformed equation and Laplace's transformed equation, where the solving of some models depend continuously on the initial data.

---

*Monograph.

** Faculty of Sciences. Mathematics School. Director: Rafael Castro Triana.

TITULO: UNA INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO PARABÓLICO *
AUTOR: ADRIANA LEON VALDERRAMA**

PALABRAS CLAVES: Ecuación del calor, ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, primer problema de contorno, principio del máximo .

DESCRIPCIÓN

Un ejemplo de ecuación diferencial parcial de tipo parabólico es la ecuación del calor, este modelo describe la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido, como por ejemplo en una barra metálica de longitud uno. Inicialmente se calienta a una temperatura $u(x, t_0)$ a partir del instante t_0 la temperatura evoluciona libremente. La solución de este modelo predice la temperatura $u(x,t)$ en el punto x en el instante t, para $x \in [0,1]$ y $t > t_0$.
Para determinar la unicidad de ciertos problemas, relacionados con el modelo descrito anteriormente se recurre al método de la energía, y al principio del máximo, este último establece que si la temperatura en la frontera y en el momento inicial no supera cierto valor M y no hay fuentes del calor dentro del cuerpo, la temperatura del cuerpo será menor o igual a M a través del tiempo.

La técnica de la energía, además de utilizarse para el caso en que la varilla sea finita, también puede utilizarse cuando la varilla es infinita.

Para obtener la solución de los problemas se usan varios métodos, como el método de Fourier o separación de variables, transformada de Fourier y transformada de Laplace, cuya solución de algunos modelos depende continuamente de los datos iniciales.

---

*Monografía.
** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Castro Triana.

Índice general

Introducción

Esta monografía presenta: la deducción de la ecuación del calor, el estudio del comportamiento de las soluciones del primer problema de contorno como el principio del máximo y unicidad. También presenta varias Técnicas para la solución del primer problema de contorno como: series de Fourier, Transformadas de Fourier y de Laplace.

Segun Luis Caffaelli profesor de la University of Texas at Austin, en su Lección inagural del curso 2003-2004 del 22 de septiembre de 2003 dice: "La ecuación del calor fue propuesta por Fourier en 1807 en su memoria sobre la propagación del calor en los cuerpos solidos. En ella proponia además el germen de lo que pasaría a ser la Teoría de las Series de Fourier. Tan controvertida fue esta ultima que tomo 15 años, hasta 1822, para que la Academia de Ciencias decidiese publicarla."La ecuación del calor es un modelo matemático que trata de describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido teniendo encuenta algunas propiedades como: si la temperatura es constante en una región, la energía térmica no fluye, la energía térmica fluye de la región más caliente a la más fría, el flujo de energía térmica es proporcional a la temperatura para un mismo material, y es diferente para distintos materiales.

Además, en la dedución del la ecuación del calor no tendremos en cuenta la existencia de fuentes internas, que hacen variar la energía térmica, y tomaremos las propiedades térmicas del material como constantes.

Capítulo 1

Formulación del problema

1.1. Deducción de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

En este capitulo presentamos el modelo matemático de la ecuación del calor, el cual describe la evolución de la temperatura en un cuerpo solido. Consideramos una barra metálica aislada de longitud uno, que hacemos coincidir con el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Inicialmente a temperatura cero, que después de un cierto tiempo t_0 hemos calentado a una temperatura $u(x, t_0)$, manteniendo sus extremos, en $x = 0$ y $x = 1$ a temperatura cero.

A partir del instante t_0 dejamos que la temperatura $u(x, t_0)$ evolucione libremente. Estamos interesados en un modelo matemático que nos permita predecir la temperatura $u(x, t)$ del punto x en el instante t, para $x \in [0, 1]$ y $t > t_0$, a partir de nuestro conocimiento de $u(x, t_0) = u_0(x)$ y el hecho que en $x = 0$ o $x = 1$ la temperatura permanece igual a cero.

Naturalmente no hay un "único modelo". Hay infinitos, dependiendo de la precisión y el rango de valores en que pretendamos sea válido (altas o bajas temperaturas cambiarán el comportamiento del material, impurezas del material de la barra podrían ser relevantes, etc).

Los fenómenos de calor y radiación frecuentemente son modelados por la ecuación del calor, la cual describe la transferencia de energía térmica causada por la agitación de moléculas.

Existen dos procesos básicos que intervienen en la transterencia de la energía térmica: conducción y convección.

La Conducción resulta de los choques de móleculas cercanas, por las que la energía cinética de vibración de una molécula se transfiere a su vecina más cercana, este es el caso del flujo de calor en solidos, o incluso en fluidos (liquidos y gases) en los que la velocidad es suficientemente pequeña.

La Convección resulta cuando una mólecula vibrante se traslada de una región a otra.

Llamamos **densidad de energía térmica** a la cantidad de energía térmica por unidad de volumen. Notamos esta densidad por $e(x, t)$.

Si suponemos que todas las cantidades térmicas son constantes a lo largo de cada sección transversal, podemos considerar idealmente la varilla como un objeto unidimensional. La forma más facil de llevar esto a cabo es aislar perfectamente el área de la superficie lateral de la varilla. De esta manera la energía térmica no puede atravesar la superficie lateral. Supongamos que la varilla no se caliente de manera uniforme, esto significa que la energía térmica depende de x (además de t), es decir, la densidad de energía térmica varía de una sección transversal a otra.

La siguiente figura muestra la asociación de una sección de la barra con la coordenada x.

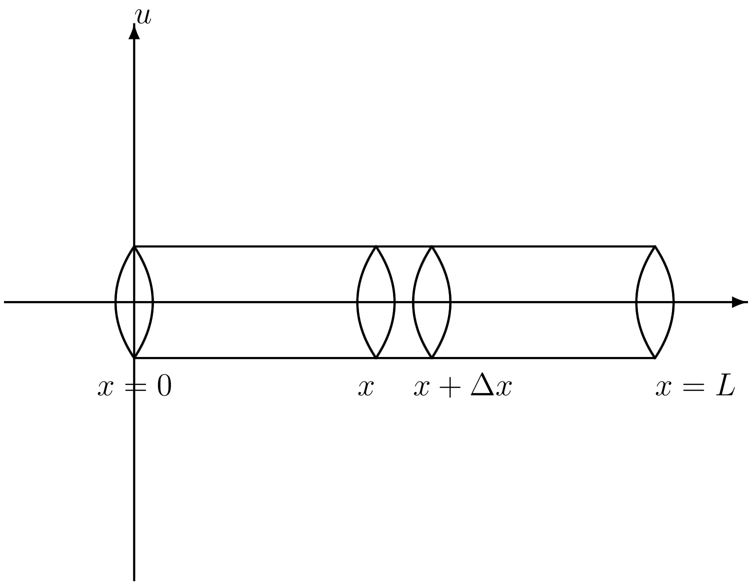

Figura 1

Energía térmica. Consideremos el volumen de la varilla comprendido entre dos secciones transversales cercanas,de área constante A, correspondientes a x y $x + \Delta x$, que llamaremos sección infinitesimal. Si la densidad de energía térmica es constante en esta sección infinitesimal, entonces la energía total allí es el producto de la densidad de energía térmica por el volumen. En general, la densidad de energía no es constante. Sin embargo, si Δx es muy pequeño, entonces $e(x,t)$ se puede aproximar por una constante en ese volumen de tal manera que

$$\text{energía térmica} = e(x,t)A\Delta x,$$

ya que el volumen de la sección infinitesimal es $A\Delta x$.

Conservación de la energía térmica. La energía térmica entre x y $x + \Delta x$ varía con el tiempo debido al flujo a través de las fronteras (Secciones x y $x + \Delta x$) y a la energía generada en el interior (debido a fuentes positivas o negativas de energía térmica). Como hemos supuesto que la superficie lateral esta aislada, no hay flujo de

energía térmica a traves de esta superficie.
Finalmente, todo el proceso de flujo de calor se puede describir mediante la siguiente ecuación en palabras,

la variacion de la energía térmica en el tiempo es igual al flujo de calor a través de las fronteras por unidad de tiempo más la energía térmica generada en el interior por unidad de tiempo

Esta ley se llama conservación de la energía térmica.

En una varilla unidimensional, la energía térmica solo puede fluir hacia la derecha o hacia la izquierda.

El Flujo de calor
El flujo de calor es la cantidad de energía térmica por unidad de tiempo. Notamos este flujo por $\phi(x, t)$, ϕ es positivo si la energía térmica fluye hacia la derecha y negativo si lo hace a la izquierda.

Fuentes de Calor
La energía térmica tambien puede variar debido a la existencia de fuentes internas:

$$Q(x, t) = \text{energía térmica generada por unidad de volumen y por unidad de tiempo}$$

que puede ser debida a reacciones químicas o calentamiento eléctrico. $Q(x, t)$ es aproximadamente constante en la variable espacial en cada sección infinitesimal, y así la energía térmica total generada por unidad de tiempo en dicha sección es aproximadamente $Q(x, t)A\Delta x$.

Conservación de la energía térmica en una sección infinitesimal. La variación de energía térmica se debe al flujo a través de las fronteras y a las fuentes internas, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x, t)A\Delta x] \approx \phi(x, t)A - \phi(x + \Delta x, t)A + Q(x, t)A\Delta x \tag{1.1}$$

Esta ecuación no es exacta porque hemos supuesto que varias cantidades son aproximadamente contantes en la sección infinitesimal. Sin embargo es más precisa cuanto mas pequeño es Δx. Ahora si dividimos por Δx y luego tomamos el limite cuando $\Delta x \to 0$, en (1.1) obtenemos

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\phi(x,t) - \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + Q(x,t) \tag{1.2}$$

.

Este resultado es exacto, y por lo tanto reemplazamos el simbolos $\approx$ en (1.1) por el simbolo $\doteq$ en (1.2). Al tomar el límite $\Delta x \to 0$, t se mantiene fija y por la definición de derivada parcial se obtiene

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \tag{1.3}$$

Temperatura y calor especifico Normalmente describimos los materiales por su temperatura, no por su densidad de energía térmica. Distinguir los conceptos de temperatura y energía térmica no es algo trivial. Sólo a mediados del siglo dieciocho la posibilidad de realizar mediciones experimentales precisas permitio a los físicos descubrir que pueden necesitarse diferentes cantidades de energía térmica para elevar la temperatura una misma cantidad en dos materiales distintos.

Calor específico es la energía térmica necesaria para elevar una unidad de temperatura a una unidad de masa de una sustancia. Notamos el calor especifico con c.

Ejemplo 1.1.0.1. *La enegía térmica necesaria para elevar la temperatura una unidad de masa de $0^o c$ a $1^o c$ podría ser diferente de la que necesitamos para elevarla de $85^o c$ a $86^o c$ para la misma sustancia.*

A menudo, para intervalos de temperatura no demasido grandes, el calor específico es aproximadamente independiente de la temperatura. Sin embargo, los experimentos sugieren que diferentes materiales requieren distintas cantidades de energía térmica para calentarse. En algunas situaciones en las que la composición de nuestra varilla podría variar de un punto a otro, el calor específico dependerá de x, $c = c(x)$.
En muchos problemas la varilla esta compuesta por un único material en cuyo caso tomaremos el calor específico como una constante.

La energía térmica. La energía térmica concentrada en una sección infinitesimal es $e(x,t)A\triangle x$. Sin embargo, también se define como la energía necesaria para elevar la temperatura desde $0^o c$, a su temperatura actual $u(x,t)$. Como consideramos el calor específico independiente de la temperatura, la energía térmica por unidad de masa es justamente $c(x)u(x,t)$.

La Densidad de masa (masa por unidad de volumen) es una funcion de x y la denotamos por $\rho(x)$.

Ejemplo 1.1.0.2. *Si tenemos una varilla de un material no uniforme, la densidad de masa varia con respecto a x.*

La masa total de la sección infinitesimal es $\rho A\Delta x$ y por tanto la energía térmica es $c(x)u(x,t)\rho A\Delta x$ entonces

$$e(x,t)A\Delta x = c(x)u(x,t)\rho(x)A\Delta x.$$

De aquí deducimos que la relación básica entre energía térmica y la temperatura es:

$$e(x,t) = c(x)u(x,t)\rho(x). \tag{1.4}$$

Esta nos dice que la energía térmica por unidad de volumen es igual a la energía térmica por unidad de masa y por la densidad de masa.

Derivando con respecto a t la igualdad (1.4), obtenemos

$$\frac{\partial e}{\partial t} = c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{1.5}$$

Sustituyendo (1.5) en (1.3) obtenemos:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \tag{1.6}$$

La ecuación diferencial parcial (1.6) tiene dos funciones incognitas u y ϕ.
A continucación presentamos una relacion entre el flujo de energía térmica ϕ y la temperatura u, para ello enumeraremos algunas propiedades cualitativas del flujo de calor.

1. Si la temperatura es constante en una región, la energía térmica no fluye.

2. Si hay diferencia de temperaturas, la energía térmica fluye de la región más caliente a la más fría.

3. A mayor diferencia de temperatura (para el mismo material) mayor es el flujo de energía térmica.

4. El flujo de energía térmica es diferente para distintos materiales, incluso con la misma diferencia de temperatura.

Fourier (1768-1830) observó las anteriores propiedades y las resumió (junto con númerosos experimentos) en la fórmula

$$\phi = -k_o \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.7}$$

conocida como **Ley de Fourier de la conducción del calor**.

La ecuación (1.7) establece que el flujo de calor $\phi(x)$ es proporcional a la diferencia de temperaturas. Si la temperatura u crece, cuando x crece, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ y como la energía térmica fluye de la región más caliente a la más fría, esto quiere decir que en este caso la energía térmica fluye hacia la izquierda, de aqui el signo negativo de la ecuación (1.7).

El coeficiente de proporcionalidad k_0 mide la capacidad del material para conducir el calor, el cual depende del tipo de material y se llama **conductividad térmica**. Cuanto más grande sea k_0 mayor será el flujo de calor, para la misma diferencia de temperatura.

Si tenemos una varilla compuesta de diferentes materiales, k_0 será función de x. Mas aún, los experimentos demuestran que la capacidad de conducir calor para la mayoria de los materiales varía según la temperatura, es decir, k_0 será función de x y u pero la dependencia respecto a la temperatura es a menudo poco significativa en problemas concretos, por lo tanto supondremos que la conductividad térmica k_0 solo depende de x, es decir $k_0 = k_0(x)$.

Si la ley de Fourier (1.7) se sustituye en la ecuación de la conservación de la energía térmica (1.6) aparece una ecuación en derivadas parciales con una única incognita,

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k_0\frac{\partial u}{\partial x}) + Q \tag{1.8}$$

Ya que normalmente las fuentes de energía calorifica Q son conocidas, los coeficientes térmicos c, ρ y k_0 dependen del material y por ello pueden ser funciones de x. En el caso especial de una varilla uniforme c, ρ y k_0 son constantes, y la ecuación en derivadas parciales (1.8) se convierte en

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k_0(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + Q$$

Si además no hay fuentes, es decir $Q = 0$ y después de dividir por la constante $c\rho$ la ecuación queda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \tag{1.9}$$

donde la constante, $k^2 = \frac{k_0}{c\rho}$ se conoce como difusividad térmica. Esta ecuación nos describe como la temperatura se dispersa.

Capítulo 2

UNICIDAD

2.1. Condiciones iniciales y en la frontera

En este capítulo hablaremos sobre dos técnicas para determinar la unicidad de ciertos problemas: Principios del máximo y el método de la energía.
La ecuación (1.9) del capítulo anterior no determina la función temperatura $u(x,t)$ de manera única. Por ejemplo si $u(x,t)$ es una solución, también lo es $u(x,t)+c$ para cualquier número real cEsto lo podemos enunciar en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.0.1. *Si u(x,t) es una solución de la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}). \tag{2.1}$$

entonces u(x,t)+c tambien es solución, para cualquier número real c.

Demostración.
Sea $u(x,t)$ una solución de (2.1), entonces

$$\frac{\partial (u(x,t)+c)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 (u+c)}{\partial x^2}.$$

Concluimos que la ecuación (2.1) no determina la función temperatura $u(x,t)$ de manera única. ▼

Para la unicidad de la solución de la ecuación (2.1) se requieren ciertas condiciones iniciales y en la frontera.
En el caso de la temperatura en nuestra varilla que coincide con el intervalo $0 \leq x \leq 1$, descrita en el primer capítulo tenemos:
Las condiciones en la frontera, son temperaturas dadas en los extremos $x = 0$ y $x = 1$.
Condicion inicial, es la temperatura en la barra cuando el tiempo es igual a cero.

Los siguientes ejemplos muestra modelos de la de la temperatura en una barra, con condiciones en la frontera (CF) e iniciales (CI).

Ejemplo 2.1.0.3. *La temperatura $u(x,t)$ de una barra de longitud L, con extremos izquierdo y derecho a temperaturas constantes T_1, T_2 y temperatura inicial $\varphi(x)$. Satisface el siguiente modelo:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}, &= k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \quad para \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\
u(0,t) = T_1, &\quad u(L,t) = T_2 \quad para \quad t \geq 0, \quad (CF), \\
u(x,0) &= \varphi(x) \quad para \quad 0 \leq x \leq L. \quad (CI).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.0.4. *El modelo para la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una barra que no tiene pérdida de calor por sus extremos es:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \quad para \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad para \quad t \geq 0, \quad (C.F) \\
u(x,0) &= \varphi(x) \quad para \quad 0 \leq x \leq L. \quad (C.I)
\end{aligned}$$

Las condiciones dadas en la frontera (C.F) en este problema se llaman condiciones de aislamiento.

Ejemplo 2.1.0.5. *Aún se pueden especificar otras condiciones en la frontera, podemos tener una coombinación de temperatura fija y condiciones de aislamiento. Si el extremo izquierdo se mantiene a temperatura constante T y el extremo derecho esta aislado, entonces tenemos las condiciones :*

$$u(x,0) = T \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

La ecuación del calor, junto con las condiciones iniciales y en la frontera determina de manera única la distribución de la temperatura en toda la barra en todo tiempo posterior,como lo veremos a continuación en el teorema 1 y su corolario.

2.2. Principios del Máximo y Unicidad

En esta sección continuamos con el estudio de las soluciones de la ecuación diferencial del calor (2.1). Un conjunto importante en este estudio es el llamado cuadrilátero curvilíneo.

Definición 2.2.0.1 (Cuadrilátero curvilíneo)**.** *El conjunto de puntos del plano xt limitado por las rectas $t = t_0$, $t = T$ y las curvas $x = f(t), x = g(t)$ continuas y $f(t) < g(t)$ para todo t en el intervalo $[t_0, T]$, lo notamos por G y lo llamaremos cuadrilátero curvilíneo. Este conjunto se muestra en la siguiente figura.*

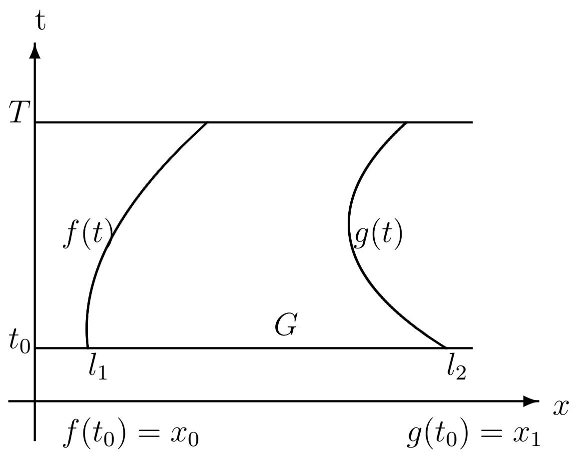

Figura cuadrilatero curvilineo

Definición 2.2.0.2. *Sean $G \subset \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}^2$. Se dice que x es un punto frontera de G si todo disco con centro en x y radio arbitrario pero mayor que 0 contiene puntos tanto de G y de su complemento G^C. El conjunto de todos los puntos frontera del conjunto G se denomina frontera de G y se denota por ∂G.*

Definición 2.2.0.3 (Frontera parabólica)**.** *La frontera parabólica del cuadrilátero curvilíneo G es un subconjunto de la frontera de G, notado por Γ y constituido por las curvas $x = f(t)$, $x = g(t)$, y el subconjunto $[x_0, x_1]$ de la recta $t = t_0$, esto es $[x_0, x_1] = \{(x, t_0)/x_0 \leq x \leq x_1\}$, donde $x_0 = f(t_0), \quad x_1 = g(t_0)$.*

Definición 2.2.0.4. *Sea $G \subset \mathbb{R}^2$, se dice que x es un punto de adherencia de G si todo disco con centro en x contiene puntos de G. El conjunto de los puntos de adherencia de un conjunto G se denomina adherencia de G, se denota por $\bar{G}$, y $\bar{G} = G \cup \partial G$.*

Definición 2.2.0.5. *Sean $G \subset \mathbb{R}^2$, se dice que x es un punto interior de G si existe un disco centrado en x, totalmente contenido en G. El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto G se denomina interior de G y se denota por $\mathring{G}$*

2.2.1. Primer problema de contorno

Sean: G el cuadrilátero curvilíneo descrito en la definición (2.2.0.1) y φ una función continua en Γ. El problema de encontrar una función $u \in C(\bar{G})$ tal que

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad \text{si } (x,t) \in \mathring{\mathrm{G}} \tag{2.2a}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad \text{si } (x,t) \in \Gamma. \tag{2.2b}$$

Se llama primer problema de contorno para la ecuación (2.2a).
La restricción: $u(x, t_0) = \varphi(x, t_0)$, se llama condición inicial y las restricciones $u(f(t), t)$ y $u(g(t), t)$ son las condiciones de contorno o condiciones en la frontera.

Definición 2.2.1.1. *Sea f una función definida en una región R que contiene al punto $(x_* y_*)$ y $(x^* y^*)$*

1. *La función f tiene un mínimo local en $(x_* y_*)$ si $f(x,y) \geq f(x_* y_*)$ para todo (x,y) en un disco que contiene a $(x_* y_*)$.*

2. *La función f tiene un máximo local en (x^*y^*) si $f(x,y) \leq f(x^*y^*)$ para todo (x,y) en un disco que contiene a (x^*y^*).*

2.2.2. Principio del máximo para el primer problema de contorno

Teorema 2.2.2.1. *Toda solución $u \in c^2(\bar{G})$ del problema* (2.2a) - (2.2b)*, alcanza su máximo y su mínimo en la frontera parabólica Γ, es decir, los valores máximo y mínimo de la función $u(x,t)$ se alcanzan o bien en el momento inicial $t = t_0$ o bien en los puntos de la frontera $x = f(t)$ o $x = g(t)$.*

Demostración.
Por el método de reducción al absurdo. Sea u una solución continua en $\bar{G}$ tal que, $M = \max_{x\in\bar{G}} u(x,t)$ y $m = \max_{x\in\bar{\Gamma}} u(x,t)$, donde $M > m$ y supongamos que $u(x_1,t_1) = M$, entonces (x_1,t_1) estará en el interior de G o en el conjunto $A = \{\bar{G} - G^\circ \bigcup \Gamma\} = \{(x,T)/f(T) < x < g(T)\}$.

Comparando signos en ambos miembros de la ecuación (2.2a)

$$u_t(x_1,t_1) = u_{xx}(x_1,t_1),$$

Como $u(x_1,t_1) = M$ entonces por el corolario 42.2 en la página 397 y el teorema 42.4 en la página 399 en [1] se tiene que $u_x(x_1,t_1) = 0$ y $u_{xx}(x_1,t_1) \leq 0$.
Ahora, la función $u(x_1,t)$ alcanza su valor máximo en $t = t_1$, entonces si $t_1 < T$, $u_t(x_1,t_1) = 0$, si $t_1 = T$ entonces $u_t(x_1,t_1) \geq 0$, luego

$$0 \leq u_t(x_1,t_1) = u_{xx}(x_1,t_1) \leq 0 \tag{2.3}$$

La expresión (2.3) no implica contradicción, porque ambos miembro pueden ser cero. Para conseguir una contradicción consideramos la siguiente función

$$v(x,t) = u(x,t) + (M-m)(x-x_1)^2/4l^2 \tag{2.4}$$

donde

$$l_2 = \text{máx}\{g(t) : t_0 \leq t \leq T\}, \quad l_1 = \text{mín}\{f(t); t_0 \leq t \leq T\}, \quad l = l_2 - l_1.$$

$$y \quad v(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) = M.$$

Veamos que v restringido a Γ es estrictamente menor que M. Sea (x, t) un punto arbitrario de Γ entonces

$$\begin{aligned} v(x,t) = u(x,t) + (M-m)(x-x_1)^2/4l^2 &< m + (M-m)l^2/4l^2 \\ &= m + (M-m)/4 \\ &= m + M/4 - m/4 \\ &= M/4 + 3m/4 \\ &< M/4 + 3M/4 \\ &= M \end{aligned}$$

$$luego \quad v(x,t) < M.$$

Lo anterior implica que v no alcanza su máximo en Γ. Si (x_2, t_2) es un punto en el cual v alcanza su punto máximo, este estará en el interior de G o en el conjunto A. Como $v \in C^2(\bar{G})$, entonces

$$v_{xx}(x_2, t_2) \leq 0 \quad v_t(x_2, t_2) \geq 0. \tag{2.5}$$

Por otro lado, por la definición de v se tiene

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) &= u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - (M-m)/2l^2 \\ &= u_t(x,t) - u_t(x,t) - (M-m)/2l^2 \qquad = -(M-m)/2l^2 < 0. \end{aligned}$$

Esto es

$$v_t(x,t) < v_{xx}(x,t) \tag{2.6}$$

entonces de (2.5) y (2.6) se tiene $v_t(x_2,t_2) < 0$, lo que contradice la desigualdad $v_t(x_2,t_2) \geq 0$. ▼

Para el mínimo puede aplicarse este resultado a la función $-u$.

OBSERVACIÓN
El sentido físico de este teorema establece: que si la temperatura en la frontera y en el momento inicial no supera cierto valor M y no hay fuentes del calor dentro del cuerpo, la temperatura del cuerpo será menor o igual a M a través del tiempo.
La interpretación del resultado es evidente, si no hay fuentes de calor, el máximo valor de la temperatura tiene que alcanzarse en un extremo de la barra o en el instante inicial.

Corolario 1. *Si dos funciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$, definidas y continuas en la región $\bar{G}$, satisfacen el siguiente problema:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad (x,t) \in \mathring{\mathrm{G}}, \qquad u \in C^2(\bar{G}), \\ u(x,t) = \varphi(x,t) \qquad (x,t) \in \Gamma \qquad u \in C(\Gamma), \end{cases} \tag{2.7}$$

entonces $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ para todo $(x,t) \in \bar{G}$.

Demostración.
Sea $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$, como las funciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ son continuas en $\bar{G}$ entonces v es continua en $\bar{G}$.

Veamos que v es solución de la ecuación diferencial en (2.7).

$$v_t = u_{1t} - u_{2t} = u_{1xx} - u_{2xx} = (u_1 - u_2)_{xx} = v_{xx},$$

por lo tanto, v es solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad (x,t) \in \mathring{\mathrm{G}}, \\ u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.8}$$

Por el principio del valor máximo v alcanza su máximo y su mínimo en Γ esto es $0 \leq v(x,t) \leq 0$ entonces $v(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \bar{G}$ por lo tanto $u_1 = u_2$. ▼

2.3. Método de la energía

2.3.1. Unicidad de la solución del problema de Cauchy

En el caso de la varilla infinita aparece la técnica de la energía para demostrar la unicidad de ciertos problemas como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1.1. *Si u es una solución continua y acotada en $\mathbb{R}$ del siguiente problema*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \textit{donde} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

entonces esta es única.

Demostración.
En este caso, podemos demostrar la unicidad de la solución del problema de cauchy usando el método de energía. Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones. Consideramos $w = u_1 - u_2$ entonces w satisface

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0)$$

$$w(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

Además supongamos que w y sus derivadas son continuas, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = \lim_{x \to \infty} \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = 0, \forall t \tag{2.9}$$

Consideremos la función del tiempo

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)dx \quad con \quad I(0) = 0, \quad I(t) \geq 0 \quad \forall t.$$

Teniendo en cuenta que la integral anterior converge uniformemente respecto a t, por ser u_1 u_2 soluciones continuas y acotadas e integrables en $\mathbb{R}$, entonces la derivada se puede introducir en la integral.

$$Como \quad \frac{\partial w^2}{\partial t}(x,t) = 2w(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \quad entonces$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w^2}{\partial t}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w\frac{\partial w}{\partial t}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

Integramos por partes

$$u = w \qquad\qquad dv = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad\qquad v = \frac{\partial w}{\partial x}$$

De manera que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx = w\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx$$

usando (2.9) se concluye

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \leq 0$$

Entonces

$$\frac{dI}{dt}(t) \leq 0, \quad \forall t > 0,$$

$$0 \leq I(t) \leq I(0) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Luego

$$I(t) = 0, \quad w = 0 \quad esto \quad es \quad u_1 = u_2.$$

▼

2.3.2. Unicidad de la solución del problema de valor inicial

Teorema 2.3.2.1. *Si u es una solución continua y acotada en $\mathbb{R}$ del siguiente problema de Dirichlet o Neumann*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad x \in (0,l)$$
$$u(0,t) = g_0(t) \quad y \quad u(l,t) = g_1(t), \quad \forall t > 0 \quad (Dirichlet)$$
$$o \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g_0(t) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = g_1(t) \quad \forall t > 0 \quad (Neumann)$$

entonces esta es única

Demostración.
Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones y consideraremos $w = u_1 - u_2$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 - u_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$w(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = f(x) - f(x) = 0 \quad 0 < x < l$$
$$w(0,t) = u_1(0,t) - u_2(0,t) = g_0(t) - g_0(t) = 0 \quad \forall t > 0$$
$$w(l,t) = u_1(l,t) - u_2(l,t) = g_1(t) - g_1(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t) = g_0(t) - g_0(t) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(L,t) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(L,t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(L,t) = g_1(t) - g_1(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Luego w satisface

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$w(x,0) = 0 \quad (0 < x < L)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad o$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Consideremos la función del tiempo

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L w^2(x,t)dx \quad con \quad I(0) = 0, \quad I(t) \geq 0 \quad \forall t \quad w^2 \geq 0$$

la cual representa la energía de la función w. entonces,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial w^2}{\partial t}dx = \int_0^L w\frac{\partial w}{\partial t}dx = \int_0^L w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx.$$

Integramos por partes

$$u = w \qquad\qquad dv = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad\qquad v = \frac{\partial w}{\partial x}$$

De manera que

$$\int_0^L w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx = w\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_0^L - \int_0^L (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx = -\int_0^L (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \leq 0$$

Entonces

$$\frac{dI}{dt}(t) \leq 0, \quad \forall t > 0,$$

$$0 \leq I(t) \leq I(0) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Luego

$$I(t) = 0, \quad w = 0 \quad esto \quad es \quad u_1 = u_2.$$

▼

Capítulo 3

SOLUCIÓN DEL PRIMER PROBLEMA DE CONTORNO

En este capítulo usaremos varios métodos de solución como: Método de Fourier o Separación de variables, Transformada de Fourier, Transformada de Laplace, y presentaremos la definición de las funciones de Green, para obtener soluciones de ciertos problemas de contorno. La teoría de existencia de soluciones no la consideraremos.

3.1. Método de las series de Fourier

Ejemplo 3.1.0.1. *Extremos de la barra mantenidos a temperatura cero.*
Determinaremos la temperatura u(x,t) en el punto x y tiempo t de una barra delgada, homogenea y de longitud L, cuya temperatura inicial en la sección transversal en x y perpendicular al eje x es $\varphi(x)$*. Supongamos que* $\varphi(x)$ *es continua en* $[0, L]$ *y los extremos de la barra son mantenidos a temperatura cero durante todo el tiempo. El modelo de este problema es:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \quad para \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad para \quad t \geq 0, \quad (C.F) \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad para \quad 0 \leq x \leq L. \quad (C.I) \end{cases} \tag{3.1}$$

Suponemos además que φ y su primera derivada son continuas en el $[0, L]$, y satisface las siguiente condición de concordancia.

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0. \tag{3.2}$$

SOLUCIÓN.
Buscamos una solución $u(x,t)$ continua en el rectángulo R donde

$$R = \{(x,t) \in \Re^2 / \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T\}.$$

El método de Fourier supone que la solución $u(x,t)$ tiene la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.3}$$

Entonces

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t),$$

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t),$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t).$$

Ahora, sustituimos en la ecuación $u_t - ku_{xx} = 0$, para obtener:

$$u_t - ku_{xx} = X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0,$$

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t),$$

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

El lado izquierdo depende solo del tiempo, y el lado derecho sólo de la posición x. Como estas variables son independientes, entonces para alguna constante λ se tiene.

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{3.4}$$

De (3.4) se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$y \qquad u(0,t) = X(0)T(t) = 0.$$

Si $T(t) = 0$ para todo t, entonces la función temperatura u(x,t) tiene el valor constante cero, lo que ocurre si la temperatura inicial $\varphi(x) = 0$ para $0 \leq x \leq L$. De otra manera, $T(t)$ no podría ser idénticamente cero, de manera que

$$X(0) = 0.$$

Análogamente

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

$$X(L) = 0$$

El problema para X es por tanto

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Los valores propios del problema (3.5) son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.6}$$

entonces (3.5) toma la forma:

$$X''(x) + (\frac{n\pi}{L})^2 X(x) = 0.$$

Entonces obtenemos la siguiente sucesión de soluciones para $X(x)$

$$X_n(x) = c_2 sen(\frac{n\pi x}{L}) \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.7}$$

De (3.4) obtenemos

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0,$$
$$T'(x) + (\frac{n\pi}{L})^2 k T(t) = 0.$$

Luego la solución general es

$$T(t) = C_3 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Entonces obtenemos la siguiente sucesión de soluciones para $T(t)$

$$T_n(t) = C_3 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.8}$$

De la ecuación (3.3)

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= C_2 \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x) C_3 e^{-k^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \\ &= C_2 C_3 \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x) e^{-k^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \\ &= C_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x) e^{-k^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \quad n = 1, 2, 3, .. \end{aligned}$$

Llamando $C_n = C_2 C_3$ obtenemos una sucesión de soluciones, de la ecuación de calor y las condiciones de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Falta encontrar una solución que satisfaga la condición inicial $u(x,0) = \varphi(x)$. Podemos elegir n y C_n de manera que

$$u_n(x,0) = C_n sen\frac{n\pi x}{L} = \varphi(x),$$

sólo si la función $\varphi(x)$ es un múltiplo del seno. No siempre es así. En general debemos intentar construir una solución usando la superposición, de la siguiente forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Ahora necesitamos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \varphi(x).$$

La anterior expresión es el desarrollo de Fourier en senos de $\varphi(x)$ en $[0,L]$. Sí elegimos

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi) sen\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi,$$

con esta elección, tenemos la solución,

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi\xi}{L} d\xi\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}. \tag{3.9}$$

OBSERVACION

Como buscamos una función $u(x,t)$ continua tenemos los siguientes limites

$$0 = \lim_{t\to 0} 0 = \lim_{t\to 0} u(0,t) = \lim_{x\to 0} u(x,0) = \lim_{x\to 0}\varphi(x)$$

$$entonces \quad \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0 \quad y \quad por \quad ser \quad \varphi \quad continua \quad en \quad [0,L]$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$0 = \lim_{t\to 0} 0 = \lim_{t\to 0} u(L,t) = \lim_{x\to L} u(x,0) = \lim_{x\to L}\varphi(x)$$

$$esto \quad es \quad \lim_{x\to L}\varphi(x)=0 \quad y \quad por \quad ser \quad \varphi \quad continua \quad en \quad [0,L]$$

$$\varphi(L)=0$$

Luego φ satisface la condición (3.2)

3.2. Función de Green para el problema mixto

Recordando el problema

$$\begin{cases} u_t-k^2u_{xx}=0 \quad 0\leq x\leq L\\ u(x,0)=\varphi(x) \quad 0\leq x\leq L\\ u(0,t)=u(L,t)=0 \quad 0\leq t\leq T\end{cases} \tag{3.10}$$

tiene solución

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n sen\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{(cn\pi)^2}{L^2}t} \tag{3.11}$$

donde

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)sen(\frac{n\pi\xi}{L})d\xi \tag{3.12}$$

son los coeficientes de Fourier de $\varphi(x)$ y

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})=\varphi(x).$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11) se obtiene

$$u(x,t)=\left\{\int_0^L\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi^2c^2/L^2t}sen\frac{n\pi x}{L}sen\frac{n\pi\xi}{L}\right\}\varphi(\xi)d\xi. \tag{3.13}$$

Puede introducirse el simbolo $\sum$ bajo la integral porque la serie encerrada entre llaves en (3.13) converge uniformemente respecto a cada $\xi \in [0, L]$.

Definición 3.2.0.1. *La función G definida por*

$$G(x, \xi, t) = (\frac{2}{L}) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{sen}(n\pi\xi) e^{-}(\frac{n\pi c}{L})^2 t$$

se llama función de Green del problema (3.10)*.*
Con la anterior notación la solución del problema (3.10) *es*

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, \xi, t)\varphi(\xi) d\xi \tag{3.14}$$

Supongamos que en el instante inicial t=0, en el punto $x = \xi \in (0, L)$ se libera una cantidad de calor $Q = \rho$. Esta situación se modela considerando que la cantidad de calor se libera en una pequeña vecindad del punto, digamos $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, y tomando límite para $\delta \to 0$. Entonces, en dicha vecindad se producirá un aumento de temperatura $\varphi_\delta(x)$, y sabemos que tiene que ser tal que

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \rho\varphi_\delta(x) dx = Q$$

Como ρ puede considerarse constante si la vecindad es pequeña,

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varphi_\delta(x) dx = 1$$

Supongamos que $\varphi_\delta \in C^1, \varphi_\delta \geq 0$ y $\varphi_\delta \equiv 0$ fuera de la vecindad. Entonces para cada δ, tenemos un problema mixto con condiciones de contorno nulas y condición inicial

$$U(x, 0) = \varphi_\delta(x), \quad x \in [0, L] \tag{3.15}$$

La solucion de este problema es

$$u_\delta(x, t) = \int_0^L G(x, \xi, t)\varphi_\delta(\xi) d\xi = \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} G(x, \xi, t)\varphi_\delta(\xi) d\xi$$

$$= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varphi_\delta(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t),$$

donde $\xi \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Como G es continua, tenemos que $\lim_{\delta \to 0} u_\delta(x,t) = G(x, \xi t)$. Por eso la función $G_{\xi t}(x) = G(x, \xi, t)$ representa la distribución de temperatura en la barra, en el instante t, si en el instante inicial $t = 0$ se libera una cantidad de calor $Q = \rho$ en el punto $x = \xi$. G tambien se denomina función de fuente puntual instantánea. Se puede comprobar directamente que G es solución de la ecuación del calor. Nótese que (3.14) nuevamente representa un principio de superposición.

Observación 1. *Aquí también ocurre que las restricciones impuestas a φ son demasiado restrictivas en la práctica. Por ejemplo, a veces es necesario resolver problemas en que φ es continua a trozos. En muchos casos importantes puede demostrarse que la fórmula* (3.15) *es una solución (al menos generalizada) del problema, y que u es continua en los puntos de continuidad de φ. Esta observación es válida para el problema de Cauchy.*

3.3. Transformada de Fourier

Otro método para resolver la ecuación del calor es la transformada de Fourier y buscamos la solución en el espacio schwartz. El espacio schwartz esta constituido por las funciones definidas en $\mathbb{R}$, con derivadas de todos los ordenes continuas y dichas funciones junto con sus derivadas se anulan en el infinito. Este espacio se denota por $S(R)$.

Definición 3.3.0.2. *Si $f \in S(R)$ entonces la integral*

$$\mathfrak{F}[f](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

converge para todo w en $\mathbb{R}$ y se llama transformada de Fourier de la función f, que también se denota $\hat{f}(w)$. Donde $i = \sqrt{-1}$.

Teorema 3.3.0.2. *si $f \in S(R)$ entonces $\frac{d^n \hat{f}}{dx^n} = (iw)^n \hat{f}(w)$.*

Presentamos un esbozo de la demostración para el caso particular $n = 2$

Demostración.
Hallaremos la transformada de la segunda derivada, es decir comprobaremos el teorema (3.3.0.2) cuando n=2

$$\mathfrak{F}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}](w,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi,t)e^{-iw\xi}d\xi$$

integramos por partes

$$u = e^{-iw\xi} \qquad dv = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi,t)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -iwe^{-iw\xi} \qquad v = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi,t)e^{-iw\xi}d\xi = e^{-iw\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)iwe^{-iw\xi}d\xi$$

$$= iw\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)e^{-iw\xi}d\xi$$

nuevamente integrando por partes

$$u = e^{-iw\xi} \qquad dv = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = iwe^{-iw\xi} \qquad v = u(\xi,t)$$

$$iw\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)e^{-iw\xi}d\xi = iwe^{-iw\xi}u(\xi,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + (iw)^2\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)e^{-iw\xi}$$

$$= (iw)^2\hat{u}(w,t) = -w^2\hat{u}(w,t)$$

Luego

$$\mathfrak{F}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}](w,t) = -w^2\hat{u}(w,t). \tag{3.16}$$

▼

Definición 3.3.0.3. ***Convolución*** *Sean f y g funciones definidas en la recta real. Entonces f tiene convolución con g si*

1. $\int_a^b f(t)dt$ *y* $\int_a^b g(t)dt$ *existen para todo intervalo [a,b].*
2. *Para todo número real t,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t-\tau)g(\tau)\right|d\tau$$

converge. En este caso, definimos la convolución $f * g$ de f con g como la función dada por:

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Teorema 3.3.0.3. *Supongamos que f y g son acotadas y continuas en la recta real y que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ ambas convergen. Entonces,*

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} f*g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt.$$
2. *Transformada de la Convolución y su inversa*

$$\mathfrak{F}[f(t)*g(t)](w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w).$$

3. $$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(w)\hat{g}(w)](t) = (f*g)(t)$$

Ejemplo 3.3.0.2. *Conducción de calor en la recta*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{3.17}$$

Como x varía sobre la recta real, tomamos la transformada de Fourier en la variable x y dejamos t como parámetro. La transformada de la ecuación del calor es:

$$\mathfrak{F}[\frac{\partial u}{\partial t}](w,t) = k\mathfrak{F}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}](w,t), \tag{3.18}$$

debido a que x y t son independientes, la transformada pasa a través de la derivada parcial respecto a t

$$\mathfrak{F}[\frac{\partial u}{\partial t}](w,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)e^{-iw\xi}d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)e^{-iw\xi}d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t).$$

Luego

$$\mathfrak{F}[\frac{\partial u}{\partial t}](w,t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t). \tag{3.19}$$

Remplazando (3.16) y (3.19)en la ecuacion (3.18) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t) = -w^2 k\hat{u}(w,t)$$

con solución general

$$\hat{u}(w,t) = ae^{-w^2kt}.$$

Para determinar el coeficiente a, tomamos la transformada de la condición inicial para obtener

$$\mathfrak{F}[u(x,0)](w,0) = \hat{f}(w) = \hat{u}(w,0)$$

haciento $t = 0$ entonces

$$\hat{u}(w,0) = ae^0 = a = \hat{f}(w)$$

y la solución es

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-w^2kt}. \tag{3.20}$$

De la tabla de transformada de Fourier que se encuentra en [5] en la página 99 tomamos la fórmula

$$\mathfrak{F}[e^{-a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{-w^2}{4a^2}}, \quad a > 0,$$

esto es

$$\mathfrak{F}\left[\frac{a}{\sqrt{n}} e^{-a^2x^2}\right] = e^{\frac{-w^2}{4a^2}} = e^{-w^2kt}, \tag{3.21}$$

de la anterior igualdad tenemos

$$\frac{-w^2}{4a^2} = -w^2kt$$

entonces

$$kt = \frac{1}{4a^2}, \qquad a^2 = \frac{1}{4kt}, \qquad a = \frac{1}{2\sqrt{kt}}.$$

Por lo tanto

$$\mathfrak{F}\left[\frac{a}{\sqrt{n}} e^{-a^2x^2}\right] = \mathfrak{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{ktn}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right] = e^{-w^2kt} \tag{3.22}$$

Ahora reemplazando (3.22) en (3.20) obtenemos

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f(w)}\mathfrak{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{ktn}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right]$$

Del teorema (3.3.0.3) se concluye

$$\mathfrak{F}\{u\}(w,t) = \mathfrak{F}\left[f(y) * \frac{1}{2\sqrt{ktn}} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\right]$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$u(x,t) = \left[f(y) * \frac{1}{2\sqrt{ktn}} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\right]$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{2\sqrt{ktn}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy.$$

3.4. Transformada de Laplace

Definición 3.4.0.4. *Sea $f(t)$ una función en $[0, \infty]$. La transformada de Laplace de f es la función $F(s)$ definida mediante la integral*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

El dominio de $F(s)$ está formado por todos los valores de s para los que la integral anterior existe. La Transformada de Laplace de f se denota como F o $\mathfrak{L}\{f\}$.

En el siguiente ejemplo se debe usar la transformada de Laplace.

Ejemplo 3.4.0.3. *Consideremos el problema en una semirrecta:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad x > 0, \qquad t > 0,$$
$$u(x, 0) = A \qquad x > 0,$$

$$u(0, t) = \begin{cases} B & \text{para } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{para } t > t_0 \end{cases}$$

en donde A, B y t_0 son constantes positivas. Esto define un problema con una temperatura inicial constante distinta de cero y una distribución de temperatura discontinua en el extremo izquierdo de la barra.
Podemos escribir la condición en la frontera más nítidamente en términos de la función de Heaviside H:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq t_0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$u(0, t) = B[1 - H(t - t_0)].$$

Tomamos la transformada de Laplace de la ecuación del calor, respecto a t y consideramos a x como parámetro,

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = k\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

Para la transformada de $\partial u/\partial t$, la derivada de la variable transformada, usamos la fórmula operacional para la transformada de Laplace:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](s) = sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) - A.$$

La transformada pasa a través de $\partial^2 u/\partial x^2$ debido a que x y t son independientes:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s).$$

Transformando la ecuación de calor se obtiene

$$sU(x,s) - A = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s).$$

Escribimos esta ecuación como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s) - \frac{s}{k}U(x,s) = -\frac{A}{k},$$

que es una ecuación diferencial ordinaria en x. La solución general de esta ecuación es

$$U(x,s) = a_s e^{\sqrt{s/k}x} + b_s e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}.$$

Para que la solución sea acotada, necesitamos que $\lim_{t\to\infty} U(x,s) < \infty$

$$\lim_{x\to\infty}(a_s e^{\sqrt{s/k}x} + b_s e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}) = \quad a_s \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{s/k}x} + b_s \lim_{x\to\infty} se^{-\sqrt{s/k}x} + \lim_{x\to\infty}\frac{A}{s} =$$

$$= a_s \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{s/k}x} + \lim_{x\to\infty} \frac{A}{s} \qquad \textit{entonces} \quad a_s = 0 \quad \textit{ya} \quad \textit{que} \quad \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{s/k}x} = 0-$$

Luego la solución general es

$$U(x,s) = b_s e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}. \tag{3.23}$$

Para obtener b_s, aplicamos la transformada de Laplace de $u(0,t) = B[1 - H(t - t_0)]$, para obtener

$$U(0,s) = B\mathfrak{L}[1](s) - B\mathfrak{L}[H(t-t_0)](s) = B\frac{1}{s} - B\frac{1}{s}e^{-t_0 s}.$$

$$U(0,s) = B\frac{1}{s} - B\frac{1}{s}e^{-t_0 s} = b_s + \frac{A}{s},$$

así

$$b_s = \frac{B-A}{s} - \frac{B}{s}e^{-t_0 s}$$

Reemplazando b_s en (3.23) para obtener

$$U(x,s) = \left[\frac{B-A}{s} - \frac{B}{s}e^{-t_0 s}\right] e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}$$

$$= (B-A)\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s} - Be^{-t_0 s}\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s} + \frac{A}{s}$$

Ahora obtenemos la solución usando la inversa de la transformada de Laplace:

$$u(x,t) = \mathfrak{L}^{-1}[U(x,s)].$$

$$u(x,t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[(B-A)\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s} - Be^{-t_0 s}\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s} + \frac{A}{s}\right] \tag{3.24}$$

Esta inversa puede ser calculada usando tablas estándar y haciendo uso de la función error y la función de error complementario, las cuales tienen un uso frecuente en estadística. Estas funciones están definidas por

$$erf(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

y

$$erfc(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - erf(x). \tag{3.25}$$

De la tabla de Transformada de Laplace que se encuentra en [2] en la página 226 tomamos la fórmula

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right] = erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \tag{3.26}$$

de (3.24)

$$u(x,t) = (B-A)\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s}\right] - B\mathfrak{L}^{-1}\left[e^{-t_0 s}\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s}\right] + A\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

de (3.26)

$$\begin{aligned}
=&(B-A)erfc\left(\frac{x/\sqrt{k}}{2\sqrt{t}}\right) - B\,H(t-t_0)\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}}{s}\right]\Bigg|_{t\leftrightarrow(t-t_0)} + A\\
=&B\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - A\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - B\,H(t-t_0)erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{k(t-t_0)}}\right) + A\\
=&B\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + A\left(1 - erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right) - B\,H(t-t_0)erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{k(t-t_0)}}\right)
\end{aligned}$$

De (3.25)

$$u(x,t) = Berfc\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + Aerf\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - BH(t-t_0)erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{k(t-t_0)}}\right)$$

Bibliografía

[1] BARTLE, R. G. *The Elements of Real Analysis*. John Wiley y Sons, New York, Second Edition, 1976

[2] DYKE Phil. P. G. *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*. Springer-Verlag, London Limited 2000.

[3] CASTRO FIGUEROA Abel. *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[4] TIJONOV, A. N. and SUMARSKY A. A. *Ecuaciones de la Física Maatemática*. Editorial Mir Nauka, 1974.

[5] O´ NEIL Peter V. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Análisis de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales y análisis complejo. Thomson, Quinta Edición.

[6] IORIO Rafael Junior, IORIO Valeria. *equações diferenciais parciais: uma introdução*. IMPA, Río de Janeiro, 1988.