RECONCEPTUALIZACIÓN DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS EN EL GRADO NOVENO

ALIRIO VÁSQUEZ GARCÍA
RAMÓN CAMACHO BARAJAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2008

RECONCEPTUALIZACIÓN DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS EN EL GRADO NOVENO

ALIRIO VÁSQUEZ GARCÍA
RAMÓN CAMACHO BARAJAS

Tesis de grado como requisito para optar al título de:
ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Directora
EDITH JOHANNA MENDOZA HIGUERA
Esp. En Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2008

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo nuestros agradecimientos a Dios todo poderoso por habernos dado la posibilidad de realizar estos estudios y a la vez prestarnos su orientación en momentos difíciles para así superar estas dificultades y alcanzar los objetivos que nos trazamos desde el comienzo de nuestra especialización.

A nuestro grupo colaborador: Yadira, Marcy Daniela, Smith, Wilmer, Yoheni Tatiana y Marinela; estudiantes del colegio "El Centenario" quienes siempre estuvieron dispuestos para el desarrollo de las clases.

Al centro Educativo El Centenario del municipio El Carmen de Chucurí y a sus directivas que siempre nos permitieron el desarrollo de la propuesta.

A nuestra asesora Edith Johanna Mendoza Higuera quien siempre estuvo dispuesta a ayudarnos y a hacernos reflexionar para sacar adelante el proyecto.

A nuestras familias y esposas por su compresión y colaboración en el proceso de la especialización.

A la señorita Claudia, secretaria de la escuela de matemáticas de la UIS, por su gran amabilidad y orientación facilitándonos la información necesaria en las diferentes actividades, lo cual ha facilitado el desarrollo de nuestro proyecto.

Alirio Vásquez García
Ramón Camacho Barajas

CONTENIDO

LISTA DE FOTOS

RESUMEN

TÍTULO: RECONCEPTUALIZACIÓN DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS EN EL GRADO NOVENO[1]

AUTORES: CAMACHO BARAJAS, Ramón[**]
VÁSQUEZ GARCÍA, Alirio

PALABRAS CLAVES: FACTORIZACIÓN, MATERIAL DIDÁCTICO, ESTRATEGIAS METODOLÓGICA, POLINOMIOS.

CONTENIDO

Este trabajo tiene como objetivo identificar las ventajas y desventajas de la utilización de material didáctico en la reconceptualización del proceso de factorización.

La pregunta orientadora de este estudio de caso fue: ¿Cuales son las ventajas y desventajas de la reconceptualización del proceso de factorización con material didáctico?

Para responder a esta pregunta se desarrollaron actividades con estudiantes del grado noveno del Centro Educativo El Centenario ubicado en el municipio El Carmen de Chucurí, orientadas a la solución de problemas que presentan los estudiantes para la factorización de polinomios de grado dos. Para esto fue necesario realizar un trabajo con seis estudiantes seleccionados con los que se utilizaron regletas especiales para la factorización.

Se aplicó una estrategia metodológica en la cual se trabaja con material didáctico denominado Regletas de Factorización, con las cuales los estudiantes podrian interpretar con mayor claridad los procesos de factorizar a través la visualización, la manipulación y modelación para llegar finalmente a la generalización de los métodos de descomposición factorial y al mismo tiempo pasar de lo concreto a lo simbólico.

Después de haber desarrollado los diferentes talleres con los estudiantes, se pudo constatar que fue de gran valor para ellos porque aclararon un poco más los conceptos algebraicos y se pudo comprobar la importancia que tiene el material didáctico en la adquisición de saberes.

---

[1] Trabajo de Grado

[**] Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas, Especialización en educación matemática. Directora: Edith Johanna Mendoza Higuera, Esp. en Educación Matemática.

ABSTRAC

TITLE: Reconceptualization of Polynomials Factoring in Ninth Grade.

AUTHORS:
CAMACHO BARAJAS, Ramón**
VÁSQUEZ GARCÍA, Alirio

KEY WORDS: 1. Factoring. 2. Teaching material. 3. Methodological Strategies. 4. Polynomials.

CONTENT

This work looks for identify the advantages and disadvantages of using teaching materials in the reconceptualization of factoring process.

The principal question of this case was: What are the advantages and disadvantages of the teaching materials in the reconceptualization of factoring process?

To answer this question were developed activities with ninth grade students in the "Centenario School" located in El Carmen de Chucurí, aimed to solving problems presented by students for factoring two grade polynomials. To solve this problem was necessary to do a job with six selected students with special rules, which was used for the factoring process.

We applied a methodological strategy in which it works with a teaching material denominated "Regletas de Factorizacion" just for students could interpret more clearly the factoring processes through visualization, modeling and manipulation, to obtain a factoring descomposition methods and at the same time pass from the concrete to the symbolic space.

After the developed workshops, it was clear that this activity had a great value to the students, because it clarified algebraic concepts and noted the importance of teaching materials in the acquisition of knowledge.

---

*Project Grade.
** Science Faculty, Mathematics School, Mathematical Education Specialization
Director: Edith Johanna Mendoza Higuera, Master in Mathematical Education.

PRESENTACIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática han sido y es el centro de atención en congresos y eventos que involucran la educación básica, secundaria e incluso universitaria. Variados artículos en periódicos, revistas, ensayos y comentarios, expresan un malestar general tanto de las autoridades educativas como de profesores, estudiantes y padres de familia ante los resultados obtenidos en el aprendizaje de las matemáticas, principalmente a nivel de educación básica y media.

En el presente trabajo se hizo un estudio acerca de los problemas que presentan los estudiantes de la educación básica para el aprendizaje de la matemática, especialmente en lo que se refiere a procesos algebraicos, entendiendo que es una de las dificultades que siempre han estado presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, específicamente los casos de factorización de polinomios de grado dos. Aquí se presenta un diseño metodológico donde a través de talleres elaborados para usar un material concreto, los estudiantes exploran, argumentan y crean patrones que los llevarán a la formulación de las posibles formas de factorizar. El material que se trabajó consta de regletas que representan rectángulos de área x^2, x y la unidad, que al combinarlas representan polinomios de grado dos. Con esto se buscó relacionar el álgebra con la geometría, teniendo en cuenta los conceptos de longitud y área, necesarios para factorizar este tipo de polinomios con las regletas.

Se pudo establecer que presentan dificultad en la comprensión del álgebra y su interpretación de la misma, parecen no tener claro los conceptos de polinomio, grado de un polinomio y menos lo que significa factorizarlo o descomponerlo en dos o más factores. El aprendizaje meramente memorístico que se da en las clases de matemáticas se queda en la memoria a corto plazo de los estudiantes, lo que conlleva a presentar dificultades para la interpretación de los conceptos del cálculo en los grados superiores de la educación media y hasta en la educación universitaria.

Mediante la aplicación de los talleres los alumnos representaron polinomios como factores, relacionando este proceso con el cálculo del área de rectángulos, de esta manera, encontraron generalizaciones que los llevaron a los clásicos “casos de factorización de binomios y trinomios”. Es importante hacer ver, que el material didáctico aportó al entendimiento del lenguaje algebraico, ya que era necesario hacer una representación simbolica de un concepto geométrico.

Esta metodología de trabajo también permitió desarrollar la capacidad de trabajo individual y colectivo, al igual que crear habilidades como: la argumentación, la confrontación y la socialización, haciendo el ambiente de trabajo en el aula, muy cercano al de un laboratorio de matemáticas. También podemos resaltar que este resultó novedoso y divertido para los estudiantes, mostrando así un mayor interés por el aprendizaje de la matemática. Cabe resaltar que la interacción entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor en las clases tradicionales era muy poco, y somos conscientes que la metodología implementada favoreció esta interacción al igual que desarrollo del temática en cuestión.

Con este trabajo también se buscó potenciar el desarrollo matemático en lo correspondiente al pensamiento variacional y espacial para mostrar la matemática como una herramienta útil en el proceso del desarrollo intelectual de las personas, aplicando lo aprendido en el salón de clases en el desempeño de actividades cotidianas, llegando así a que el trabajo aporte a la institución mejores resultados en el aprendizaje de sus estudiantes, y la aceptación por parte de la comunidad educativa. La idea de buscar una estrategia que permita acercar más al estudiante a la factorización surgió de la experiencia que hemos tenido en los grados superiores donde se han encontrado grandes dificultades en el trabajo del cálculo porque es aquí donde precisamente se detectan las deficiencias acerca de los procesos algebraicos.

ACERCA DE LOS PROCESOS ALGEBRAICOS

„El desarrollo de los procesos algebraicos desde los primeros niveles educativos, exige la interacción de los estudiantes con actividades y situaciones que propicien la reflexión frente a lo que cambia y lo que se conserva, generando un contexto para la comunicación de relaciones invariantes estructurales, pero fundamentalmente, que les permita expresar lo que observan, así sea inicialmente desde el lenguaje natural, mientras construyen niveles de simbolización mediados por diferentes representaciones.

En todas estas representaciones siempre va a estar presente el razonamiento visual, a partir del cual se puede promover momentos de exploración, análisis y sistematización de ideas que tienen que ver, poco a poco, con la formalización y generalización. Como puede apreciarse, un trabajo dinámico que promueva formas particulares de expresar la generalización, hasta relacionarla con las formas socialmente establecidas, exige la participación activa de los estudiantes.

Entonces, la movilización de habilidades algebraicas por parte de los estudiantes tendrá que ver con las formas de expresar y comunicar ideas matemáticas; para ello se necesita de diferentes niveles de representación, que olvidamos que resolver un problema no es más que una parte del trabajo, encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones. Para hacer posible una actividad de este tipo, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos matemáticos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno puede descubrir. En matemática, hay conocimientos que se adquieren con solidez y que se retienen durante toda la vida. Son conocimientos que resultan de una comprensión acompañada de una emoción. Tradicionalmente el aprendizaje de los conceptos y relaciones asociadas a la factorización se le destina gran parte de los grados 8...y 9...de la educación básica. La forma de proceder está reducida a la memorización y mecanización de los llamados 10 casos convencionales y algunos especiales, con los cuales se pretende factorizar polinomios de segundo grado con coeficientes generalmente racionales. Dicho de otra manera, lo que se estudia son los algoritmos que permiten pasar de un polinomio dado en su forma canónica, a un producto de polinomios lineales que sean equivalentes al dado. Esto a espaldas, de lo que dicho proceso significa, tanto desde el punto de vista matemático como fenomenológico; anteponiendo a los procesos de pensamiento matemático según los lineamientos curriculares, mecanismos de memorización algorítmica‰Posada B, Fabián · Múnera C, John Jairo (1980)

Según nuestra experiencia como docentes en el área de matemáticas, algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en cuanto a los procesos algebraicos es, además de aprender a factorizar, aprender los nombres de los casos que se aplican en la descomposición polinomial, debido a que tradicionalmente se aplica un orden donde los estudiantes deben aprenderse cada caso por individual, pero se trata de un aprendizaje netamente memoristico sin tener la oportunidad de generalizar los casos particulares en la descomposición factorial.

Una de las dificultades presentes en el desarrollo del pensamiento algebraico es la interpretación que el estudiantes hace de la variable, aunque nosotros en nuestro análisis no hacemos énfasis en esto, queremos mostrar algunas propuestas alrededor de este aspecto, siendo así que La NCTM propone que se empiece a trabajar con variables desde preescolar y nosotros lo trabajamos a partir del grado sexto de educación básica secundaria con la resolución de ecuaciones, y aún así es muy poco o nada lo que los estudiantes entienden acerca del uso y significado de la variable, es por esto que se debe acentuar y hacer énfasis en el concepto.

Como lo afirman Posada Balvín y Múnera Córdoba (1980) en El Razonamiento Algebraico y el Proceso de Factorización „en el campo del álgebra una variable es un símbolo, usualmente representado por una letra, que da cuenta de cualquier elemento de un conjunto, los cuales son números u otros objetos. A través de ellas es que podemos expresar regularidades presentes en situaciones matemáticas, dar cuenta de diferentes niveles de abstracción y generalidad, operar con lo desconocido como si lo fuera y comunicar matemáticamente, sin el perjuicio de la ambigüedad, relaciones entre objetos, tanto de las mismas matemáticas como de otras ciencias. De acuerdo a Godino (2000) las variables en matemáticas tienen cuatro usos principales‰

1. las variables como incógnita: cuando se usa para representar números, uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un número desconocido que se manipula como si fuera conocido.

   Ejemplo $9 + \_\_\_\_ = 15$ ó $4x + 2 = 3x + 5$

2. las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales: es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números(o elementos del conjunto que se trate).

   Ejemplos:

   Para todos los números se cumple que $a.b = b.a$, el área de cualquier rectángulo es $A = b.a$ (a = altura y b = base).

3. las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente: la relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en

una variable determina el cambio en la otra. Ejemplo $y = 5x + 6$. Cuando cambia x también lo hace y.

4. las variables como constantes o parámetros: es el caso de la letra a en la fórmula de la función de proporcionalidad $y = ax$. En un primer momento se ha de considerar que la letra a no varía y que solo lo hacen de manera conjunta la x y la y. De esta manera se obtiene una función de proporcionalidad directa. En este primer momento no hay diferencia entre tener $y = ax$ ó $y = 2x$. En un segundo momento se ha de considerar que a puede variar y tomar cualquier valor, con lo que obtenemos la familia de todas las funciones de proporcionalidad simple directa.

Una forma de ver como los diferentes significados de la variable juegan un papel importante en los procesos algebraicos, es el caso de la factorización de polinomios desde un punto de vista escolar. Esto porque la factorización puede asumirse como una alternativa de razonamiento, donde sus formas de representación vinculan a la variable en los diferentes significados anteriores. Posada Balvín y Múnera Córdoba (1980)

IMPORTANCIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

„La importancia del uso de estrategias generales y particulares en la resolución de problemas ha propiciado diversas discusiones relacionadas con el énfasis o tendencias en cuanto a su papel en la educación. Por un lado existe la idea de poner en un primer plano el desarrollo de estrategias con amplio margen de aplicación en la resolución de problemas; mientras que por otro lado, se argumenta que para que una estrategia pueda realmente asimilarse tiene que estar necesariamente ligada a un concepto o a un contenido específico. Una característica de las matemáticas en términos de resolución de problemas refleja una dirección que cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos, procedimientos, o reglas que el estudiante tiene que memorizar o ejercitar: los estudiantes participan activamente en el desarrollo de ideas matemáticas, los problemas son definidos con menos precisión, y el aprendizaje se relaciona con la práctica de desarrollar matemáticas. Es decir el estudiante aprende matemáticas al ser inmerso en un medio similar de la gente que hace matemáticas.

En un contexto general, la propuesta de aprendizaje que identifica a la resolución de problemas como una actividad esencial aparece en varios campos incluyendo a la física, la psicología, la historia y el aprendizaje del lenguaje. Además, esta propuesta ha estado íntimamente relacionada con lo que se identifica como desarrollo de la inteligencia o desarrollo de un pensamiento crítico. En áreas como la psicología hay grupos que han explorado el desarrollo de un pensamiento crítico a través de estrategias similares a las que aparecen en la resolución de problemas matemáticos.

Al estudiar matemáticas en los niveles medio básico y medio superior, los estudiantes son expuestos a una variedad de contenidos matemáticos. El contenido de algunos ejemplos está relacionado con temas como propiedades de los números, álgebra, geometría euclidiana y analítica, y algunos conceptos del cálculo. Durante el proceso de aprendizaje emplean diferentes métodos en la resolución de diversos problemas. Existe la idea que cuando el estudiante llegue a la universidad dominará algunos contenidos y utilizará varias estrategias para resolver problemas" Santos Luz Manuel (2000)

El PROCESO DE LA FACTORIZACIÓN

"Tradicionalmente el aprendizaje de los conceptos y relaciones asociadas a la factorización se le destina gran parte de los grados 8° y 9° de la educación básica. La forma de proceder está reducida a la memorización y mecanización de los llamados diez casos convencionales y algunos especiales, con los cuales se pretende factorizar polinomios de segundo con coeficientes generalmente racionales. Dicho de otra manera lo que se estudia son los algoritmos que permiten pasar de un polinomio dado en su forma canónica, a un producto de polinomios lineales que sean equivalentes al dado. Esto a espaldas, de lo que dicho proceso significa, tanto desde el punto de vista matemático como fenomenológico; anteponiendo a los procesos de pensamiento matemático según los lineamientos curriculares, mecanismos de memorización algorítmica.

Esta práctica ha sido reconocida como un problema que año tras año se sostiene en la educación matemática, bajo la hipótesis que es muy importante porque este conocimiento algún día será necesario y útil. Sin embargo, para muchos estudiantes incluso profesores ese día nunca llega. La necesidad del estudio de factorización puede entenderse a través de dos vías: uno matemático y otro fenomenológico, íntimamente relacionados. Por un lado, desde el punto de vista matemático, factorizar es algo que va mas allá que construir casos de factorización para polinomios particulares (generalmente de segundo grado); es una forma de comprender el teorema fundamental del álgebra (TFA) y por tanto, es este, el concepto matemático que debe ser comprendido por los estudiantes. Por otro lado, desde el punto de vista fenomenológico, la factorización tiene sentido en la medida que permite encontrar soluciones numéricas a ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$ con $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones polinómicas. Es decir, ecuaciones algebraicas. Posada Balvín y Múnera Córdoba (1980)

CONCEPTO DE FACTORIZACIÓN:

Factorizar un polinomio en un cierto conjunto numérico, es obtener otros polinomios cuyos coeficientes pertenezcan al conjunto numérico señalado, y cuyo producto sea igual al polinomio dado, es decir que es la transformación de una expresión algebraica racional entera en el producto de sus factores racionales y enteros entre sí.

La factorización se utiliza normalmente para reducir algo en sus partes constituyentes. Factorizar enteros en números primos se describe en el teorema fundamental de la aritmética; factorizar polinomios en el teorema fundamental del álgebra.

Si un polinomio puede escribirse como producto de otros polinomios, entonces cada polinomio del producto es un factor del polinomio original. Al proceso de expresar un polinomio como un producto se le da el nombre de factorización. Uribe Julio A (1987).

Monomio: Expresión algebraica que consta de un solo término.

Un monomio es el producto en el que participan un número y una o varias letras. También a un número se le llama monomio. Se llama coeficiente de un monomio al número que aparece multiplicando a las letras, normalmente se coloca al principio, si es uno (1) no se escribe y nunca es cero ya que la expresión completa sería cero (0).

Son monomios:

Por ejemplo $15x$, $2ab$, $5xy$, $25{,}4x^2y$; $3ax$; $15ab$, $(4 - 2y)\, xz^2$;

Polinomio: Expresión compuesta de dos o más términos algebraicos unidos por los signos más o menos. Los de dos o tres términos reciben los nombres especiales de binomio y trinomio, respectivamente.

En matemática un polinomio es una expresión que se construye por una o más variables, usando solamente las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

Polinomio, suma de monomios, cada uno de los cuales se denomina término del polinomio. También los monomios son considerados polinomios de un solo término. Los polinomios con dos términos se llaman binomios, y los de tres, trinomios.

Ejemplo:

$x^4 - 3x^2 - 5x - 39 \qquad 25x^2 - 30xy + 9y^2$

Muchos problemas referentes a las ecuaciones, desigualdades y fracciones se simplifican enormemente mediante la factorización. **Uribe Julio A (1987).**

Factorizar un monomio

Para factorizar un monomio se debe llevar los coeficientes o las variables a sus factores, o sea, que al multiplicarlos entre si, su resultado será el monomio inicial.

$$15ab^2 = 3*5*a*b*b.$$

¿Por qué del 15 se saca 3 x 5? Porque si multiplicamos, su resultado es 15. ¿Pero, cómo se buscan estos números? Lo más común es utilizar el método de la tablita o parrilla, este método es muy sencillo y normalmente se enseña en las escuelas básicas. Consiste en hacer una cruz y colocar el número que se desea descomponer y a la derecha ir colocando sus divisores más pequeños; es decir se descompone el número en sus factores primos.

Factorización de un polinomio

Se dice que un número a es raíz de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$, es decir, si el valor numérico del polinomio para $x = a$ es cero, se suele decir también, que el polinomio $P(x)$ se anula para $x = a$.

Por el teorema del resto, si a es una raíz del polinomio P(x), entonces *P(x)* es divisible por x - a, pues el resto de dividir *P(x)* entre $x – a$ es cero.

Por tanto, $P(x) = (x – a) P_1(x)$, y si *P(x)* es de grado *n*, entonces $P_1(x)$ es de grado $n – 1$. De este modo se puede ir descomponiendo *P(x)* en sus factores primos.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

En matemáticas ciertos productos se utilizan tan a menudo que es importante dedicarles el tiempo suficiente para dominarlos. El éxito para factorizarlos depende de la habilidad que se tenga en la identificación de patrones en cualquier forma que se presenten. A continuación se presentan algunos ejemplos de polinomios y la forma como se solucionan aplicando la factorización correspondiente dependiendo el tipo de polinomio.

Propiedad distributiva $a(x + y) = ax + ay$

$8(4m + 3n) = 8(4m) + 8(3n) = 32m + 24n$

En este caso $a = 8$, $x = 4m$, $y = 3n$. Se puede observar que la variable *x* puede representar el producto de una constante por una variable.

$$3x (2y + 5ax) = (3x) (2y) + (3x)(5ax) = 6xy + 15ax^2$$

El término a en la ley distributiva puede representar una constante, una variable o el producto de una constante por una variable. Peterson John C. (1890)

Factor común: Para este caso se utiliza la propiedad recolectiva, opuesta a la propiedad distributiva.

$3ax^2 + 5bx = x (3ax + 5b)$, factor común *“x”*

El factor común de un polinomio es el máximo común divisor de los términos del polinomio, para obtener el otro factor común se divide el polinomio dado por el factor común. Uribe Julio A (1987).

Diferencia de cuadrados: una diferencia de cuadrados es igual a la suma de las raíces cuadradas de los términos, multiplicada por las raíces de las mismas

- $(x + 3)\ (x - 3) = x^2 - 9$ cuadrado perfecto

  cuadrado perfecto

- $(2a + 5)\ (2a - 5) = 4a^2 - 25$

Se observa que cada término a la derecha del signo de la igualdad es un cuadrado perfecto Uribe Julio A (1987).

Trinomio cuadrático general

$(ax + b)\ (cx + d) = acx^2 + (ad + bc)\ x + bd$

- $(4x + 2)\ (3x + 5)$

  En este caso, $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 5$ de modo que

$$(4x + 2)\ (3x + 5) = 4 * 3x^2 + (4 * 5 + 2 * 3)\ x + 2 * 5$$
$$= 12x^2 + (20 + 6)\ x + 10$$
$$= 12x + 26x + 10$$

Trinomio De La Forma: $x^{2n} + bx^n + c$

Las características de estos trinomios

uno de los términos es un cuadrado perfecto

$x^{2n} + bx^n + c$ el tercer término no depende de x

El segundo término contiene x con exponente $\frac{2n}{2} = n$

- $(x + 2)(x + 5) = x^2 + x(2 + 5) + 2 * 5$

$= X^2 + 2x + 5x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

Trinomio De La Forma: $ax^{2n} + bx^n + c$

Estos trinomios se factorizan fácilmente llevándolos a la forma $y^{2n} + by^n + c$ y siguiendo los pasos:

$ax^2 + Bx^n + c$, multiplicando y dividiendo por el coeficiente de x^2.

$\frac{a(ax^{2n} + bx^n + c)}{a} = \frac{a^2x^{2n} + abx^n + ac}{a}$; pero $a^2x^{2n} = (ax^n)^2 = \frac{(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac}{a}$

Ej. Factorizar $3x^2 + 17x + 10$, para esto se multiplica y se divide por 3 que es el coeficiente de x^2.

$$\frac{3(3x^2 + 17x + 10)}{3}$$

$= \frac{3^2x^2 + (3x)*17 + 30}{3}$; pero $3^2x^2 = (3x)^2$

$$= \frac{(3x)^2 + 17(3x) + 30}{3} = \frac{(3x + \ldots)(3x + \ldots)}{3} = \frac{(3x + 15)(3x + 2)}{3}$$

$= \frac{\cancel{3}(x + 5)(3x + 2)}{\cancel{3}}$, entonces $3x^2 + 17x + 10 = (x + 5)(3x + 2)$.

Uribe Julio A (1987).

Trinomio Cuadrado Perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es aquel que tiene la forma $x^{2n} + bx^n + c$, pero que a la vez debe cumplir que el término bx^n debe ser el doble del producto de de las raíces cuadradas de x^{2n} y c, es decir que $bx^n =$

$$2\sqrt{x^{2n}} * \sqrt{c}.$$

En conclusión: $x^2 + 4x + 4$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Para reconocer un trinomio es cuadrado perfecto, se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término, si al multiplicarlo por dos es igual al segundo término, entonces el trinomio es cuadrado perfecto y se procede a factorizarlo. Julio A Uribe Calad (Matemáticas Básicas y Operativas) Susaeta Ediciones.

Por ejemplo el trinomio $x^2 + 6x + 9 \longleftarrow 3$ es la raíz cuadrado.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se extrae la raíz cuadrada del primero y tercer término y la suma de estas raíces se eleva al cuadrado.

- **Factorizar:** $x^2 + 6x + 9$

$x \qquad 3, \qquad (x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

Por lo tanto la factorización de $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Uribe Julio A (1987).

ANTECEDENTES DE LA MATEMÁTICA

UN POCO DE HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

La historia del álgebra se remonta al antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de plantear y resolver problemas que contenían ecuaciones de primer y segundo grado. Los antiguos babilonios resolvieron ecuaciones, utilizando en esencia los mismos métodos que utilizamos hoy.

Los descubrimientos algebraicos de los babilonios son dignos de admiración, pero los motivos que pudiera haber tras ellos no son fáciles de entender. Se suele admitir que casi toda la matemática y la ciencia prehelénica en general fueron completamente utilitarias, pero ¿qué situación de la vida real pudo conducir en la antigua Babilonia a problemas en los que aparecieran la suma de un número y su inverso o la diferencia entre un área y una longitud? Si el motivo era utilitario, pues no era tan fuerte como lo es hoy, puesto que las conexiones directas entre los fines y la práctica, están lejos de ser evidentes en la matemática babilónica. Carl Boyer, (1870).

Hace algunos años era una opinión generalizada la de que los babilonios habían sido mejores algebristas que los egipcios, pero en cambio, habían contribuido menos a la geometría. En el valle mesopotámico se solía calcular el área del círculo tomando tres veces el cuadrado del radio, lo cual queda muy por debajo del método egipcio en grado de aproximación. Sin embargo se ha dicho que el número de decimales exactos en una aproximación de π no es en absoluto una buena medida de la talla geométrica de una civilización, y un descubrimiento reciente ha anulado incluso este débil argumento. En 1936 se desenterró una colección de tablillas procedentes de Susa, a unos 300 kilómetros al este de Babilonia, y algunas de estas tablillas de Susa, siguiendo la persistente tendencia mesopotámica a hacer listas y tablas, compara las áreas y los cuadrados de los lados de los polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y siete lados.

Hay división de opiniones acerca de si los babilonios estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque parece muy probable que sí lo estuviesen. La semejanza entre todas las circunferencias parece haber sido dada por descontado en Mesopotamia, como lo fue también en Egipto, y los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza. Carl Boyer, (1870).

Los babilonios desarrollaron técnicas y métodos para medir y contar, impulsados en parte por la necesidad de resolver problemas prácticos de agrimensura, de intercambio comercial y del desarrollo de las técnicas cartográficas. Entre las tablillas babilónicas descubiertas se han encontrado ejemplos de tablas de raíces cuadradas y cúbicas, y el enunciado y solución de varios problemas puramente algebraicos, entre ellos algunos equivalentes a lo que hoy se conoce como una ecuación cuadrática. Un examen cuidadoso de las tablillas babilónicas muestra claramente que mediante esos cálculos sus autores no sólo intentaban resolver problemas del mundo real, sino otros más abstractos y artificiales, y que lo hacían para desarrollar técnicas de solución y ejercitarse en su aplicación. Puig. Luis (1860).

La resolución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas en Mesopotamia constituyó un logro notable que hay que admirar no tanto por el nivel de habilidad técnica puesta en juego como por el nivel de validez y de flexibilidad de los conceptos algebraicos que intervienen en el proceso. Es muy fácil ver, con el simbolismo moderno que la ecuación $(ax)^3 + (ax)^2 = b$ es esencialmente del mismo tipo que la $y^3 + y^2 = b$, pero el conseguir darse cuenta de ello sin utilizar nuestra notación constituye un avance mucho mas importante incluso para el desarrollo de la matemática que el celebrado principio posicional en aritmética, que debemos a la misma civilización. El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones $ax^4 + bx^2 = c$ y $ax^8 + bx^4 = c$ fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas en x^2 y x^4 respectivamente. Carl Boyer, (1870).

HISTORIA DEL ORIGEN DE LA GEOMETRÍA

Las afirmaciones que se hagan acerca del origen de las, ya sea de la matemática o de la geometría, serán necesariamente y conjeturales, ya que en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura. Solo durante la última docena de milenios, ha sido capaz el hombre de poner por escrito sus pensamientos y aquello que quería dejar registrado. Así pues en lo que se refiere a los datos correspondientes de la época prehistórica, nos vemos obligados a depender de interpretaciones que se basan en los pocos utensilios que se han conservado, de la evidencia que puede suministrar la antropología actual y de la exploración conjetural hacia atrás hecha a partir de los documentos que se han conservado. Herodoto y Aristóteles no querían arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia, pero está claro que la geometría en la que ellos pensaban tenía sus raíces en una antigüedad mucho mayor.

La historia del origen de la geometría es muy similar a la de la aritmética, siendo sus conceptos más antiguos consecuencias de las actividades prácticas. Los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza. El sabio griego Eudemo de Rodas, como también Herodoto atribuyó a los egipcios el descubrimiento de la geometría, ya que, según él, necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras. Aristóteles sostenía en cambio que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa. El hecho de que a los geómetras egipcios se les llamase a veces “los tensadores de la cuerda” (o agrimensores) se puede utilizar para apoyar cualquiera de las dos teorías, porque las cuerdas se usaron indudablemente para bosquejar los planos de los templos como para construir las fronteras borradas entre los terrenos. No podemos rechazar con seguridad ni la teoría de Herodoto ni la de Aristóteles sobre los motivos que condujeron a la matemática, pero lo que si está bien claro es que los dos subestimaron la edad de dicha ciencia. El hombre neolítico puede haber disfrutado de escaso tiempo de ocio y haber tenido poca necesidad de utilizar la agrimensura, y sin embargo sus dibujos y diseños revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental. El interés del hombre prehistórico por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma, motivo que también anima frecuentemente al matemático actual. Nos gustaría pensar que por lo menos algunos de los geómetras primitivos realizaban su trabajo sólo por el placer de hacer matemáticas y no como una ayuda práctica para la medición, pero hay otras alternativas. Una de ellas es que la geometría, lo mismo que la numeración, tuviera su origen en ciertas prácticas rituales primitivas. Los resultados geométricos más antiguos descubiertos en la India constituyen lo que se llamó los “sulvasutras” (reglas de cuerdas), se trata de relaciones muy sencillas que al parecer se usaban en la construcción de altares y templos. Se suele pensar que las motivaciones geométricas de los “tensadores de cuerda” en Egipto eran más prácticas que las de sus colegas en la India, pero se ha sugerido[1] que ambas geometrías, tanto la egipcia como la hindú, pudieron derivarse de una fuente común, una especie de protogeometría que estaría relacionada con algunos ritos primitivos más o menos de la misma manera en la que la ciencia se desarrolló a partir de la mitología y la filosofía de la teología.

Los descubrimientos algebraicos de los babilonios son dignos de admiración, pero los motivos que pudiera haber tras ellos no son fáciles de entender. Se suele admitir que casi toda la matemática y la ciencia prehelénica en general fueron completamente utilitarias, pero ¿qué situación de la vida real puedo conducir en la antigua Babilonia a problemas en los que aparecieran la suma de un número y su inverso o la diferencia entre un área y una longitud? Si el motivo era utilitario, pues no era tan fuerte como lo es hoy.

Existieron tres escuelas de pensamiento principales sobre los orígenes del álgebra árabe: una pone en énfasis más bien en las influencias hindúes, otra subraya la tradición mesopotámica o sirio-persa y la tercera apunta inspiración griega Carl Boyer, (1870).

ALGO CURIOSO DEL ÁLGEBRA

Luego del gran florecimiento de la ciencia y de la matemática alejandrina del siglo III a.C., hubo un periodo de estancamiento hasta el siglo conocido como la edad de plata (250 a 350 d.C.), cuando aparecen las grandes figuras de Diofanto y Pappus de Alejandría. No se sabe con exactitud cuándo vivió el primero de estos matemáticos, pero se asume que alrededor del 250 d.C. La principal obra de es su *Arithmetica,* en trece libros, de los cuales sobrevivieron solo los seis primeros. La Aritmética no es una exposición sistemática de operaciones o funciones algebraicas o de la solución de ecuaciones algebraicas, sino una colección de 150 problemas concebidos en términos de ejemplos numéricos específicos (no es un texto de álgebra, sino una colección de problemas de álgebra aplicada). Se aleja de la tradición euclidiana del álgebra geométrica y se aproxima más al álgebra babilónica numérica, aunque se diferencia de esta última (a) por buscar soluciones exactas, positivas y racionales a ecuaciones determinadas e indeterminadas, (b) por ser sus números totalmente abstractos y no referirse a medidas concretas, como dimensiones de campos o unidades monetarias, lo cual era característico de la tradición matemática del cercano oriente. Las Ecuaciones Diofánticas Diofanto de Alejandría

DIOFANTO ALEJANDRIA:

Muy poco se sabe de la vida de Diofanto. Por referencias históricas se sabe que vivió entre el año 150 a.C. y el 350 d.C. La obra más conocida de Diofanto es Aritmética, una colección de 130 problemas, distribuidos en 13 libros, de los que sólo se conservan 6. La mayoría de los problemas son de ecuaciones lineales y cuadráticas, pero siempre con solución positiva y racional, pues en aquella época no tenían sentido los números negativos y mucho menos los irracionales.

Nació: alrededor del año 200
Murió: alrededor del año 284

Diofanto consideró tres tipos de ecuaciones de segundo grado:

$ax^2 + bx = c$ $ax^2 = bx + c$ $ax^2 + c = bx$

El motivo de no considerar estas ecuaciones como una sola es que en aquella época no existía el cero ni los números negativos. (Revista científica volumen 6)

MIGUEL DE ASUA

Cuenta la leyenda que Sessa, inventor del ajedrez, presentó el juego a Sherán, príncipe de la India, quien quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él eran posibles. Con el fin de recompensarle, le preguntó qué deseaba. Sessa le pidió un corto plazo para meditar la respuesta. Al día siguiente se presentó ante el soberano y le hizo la siguiente petición: “Soberano, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos granos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente hasta la casilla sesenta y cuatro”. Sessa pedía, por tanto, que le recompensaran con el siguiente número de granos: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$; ¡más de 18 trillones!, que es la cosecha que se recogería al sembrar 65 veces toda la tierra. Por supuesto que el príncipe no pudo cumplir su promesa… (Curiosidades Algebraicas. El Rincón de Norbert)

El símbolo de la raíz se empezó a usar en 1525 y apareció por primera vez en un libro alemán de álgebra. Antes, para indicar la raíz de un número se escribía “raíz de…”. Luego para abreviar, se empezó a poner “r”. Pero si el número era largo, el trazo horizontal de la “r” se alargaba hasta abarcar todas las cifras. Así nació el símbolo de la raíz como una “r” mal hecha. (Curiosidades Algebraicas. El Rincón de Norbert)

Las dos rayas = que indican igualdad las empezó a utilizar un matemático inglés llamado Robert Recorde que vivió hace más de cuatrocientos años. En uno de sus libros cuenta que eligió ese signo porque “dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas”. (Curiosidades Algebraicas. El Rincón de Norbert)

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), actualmente afirmados con los Estándares Básicos de Matemáticas (2003), el Ministerio de Educación Nacional propone unos nuevos elementos teóricos y metodológicos que pretenden actualizar la estructura curricular de la educación matemática en nuestro país, respetando la autonomía institucional consagrada en cada Proyecto Educativo Institucional. Estos elementos se pueden identificar al menos en dos aspectos básicos: La introducción a los diferentes tipos de pensamientos (numérico, espacial, métrico, variacional y estadístico), y el llamado de atención sobre la importancia del desarrollo de unos procesos de aula que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos, tomando como eje central para dicha contextualización las situaciones problema.

Al introducir el concepto de pensamiento matemático como un eje central sobre el cual estructurar el currículo de matemáticas, se trata de mostrar la importancia del desarrollo centrados en los procesos de conceptualización de los alumnos que los lleven a la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida cotidiana, integrado en unidades complejas que le brinden autonomía intelectual, y sobre todo, que se logre la formación de un ciudadano con una cultura matemática mínima que le permita mejorar su calidad de vida. De otra parte, la contextualización de los procesos del aula a través de las situaciones problema busca la creación de ambientes de trabajo que sean inteligibles a los alumnos, y que por lo tanto, la conceptualización que de ellos se derive les sea significativa. Tomado (GOBERNACIÝN DE ANTIOQUIA. Secretaría de educación para la Cultura.)

Una situación problema puede interpretarse como: “contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación”. El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio.

Los lineamientos curriculares (MEN 1998) permiten interpretar una nueva manera de reorganiza todos aquellos contenidos que se han constituido en los desarrollos curriculares para el área de las matemáticas en los grados 8° y 9°, tradicionalmente etiquetados con el nombre de álgebra. Por lo tanto es importante acercarnos a la comprensión del pensamiento variacional al interior de los sistemas algebraicos y analíticos. Solo así podemos continuar comprendiendo el por qué de la necesidad de una propuesta curricular que mejore los desempeños de nuestros estudiantes en lo relativo al álgebra escolar. El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio.

En este sentido “el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2003). Así pues, dicha forma de comprender el pensamiento variacional, el carácter estático de la presentación de los objetos matemáticos en un curso normal de álgebra ojo pie de pagina se constituye en el punto de llegada de un camino iniciado con el estudio y modelación de situaciones de variación. Esto es, a partir del análisis matemático de contexto de las matemáticas, desde las ciencias, desde la vida cotidiana, etc., en los cuales se puede modelar procesos de variación entre variables, se abre un camino fructífero para el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo. Vincular las condiciones de contexto en donde las situaciones de cambio sean el ingrediente primordial en la actividad matemática del estudiante permite ver que el desarrollo de pensamiento algebraico deja de ser exclusivo de los grados 8º y 9º y que por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado 1º hasta el grado 11º, tal como se propone desde los Estándares Básicos de matemáticas (MEN; 2003). Tomado (Gobernación de Antioquia, p 49).

METODOLOGÍA

El tipo de estudio o de nivel de investigación que se realizó es descriptivo. Se trabajó en la elaboración de material didáctico aplicable en la factorización de trinomios de segundo orden, donde se hizo una prueba diagnóstica para la comprobación de fallas en el trabajo de factorización a través de preguntas previamente diseñadas. Luego se desarrolló el trabajo sobre factorización aplicando el material didáctico haciendo un estudio acerca de las dificultades presentadas en los estudiantes comparables con las dificultades encontradas antes de aplicar estas metodologías.

Se trata de un diseño descriptivo, en cuanto busca mostrar los avances o dificultades en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la factorización de polinomios de segundo grado en estudiantes de noveno grado.

Para alcanzar este propósito se realizaron los siguientes pasos:

Observación y análisis dentro del aula de clase para identificar las dificultades y los aciertos que los estudiantes de noveno grado presentan sobre la temática en cuestión;

a) Diseño de propuesta de trabajo en el aula (talleres y actividades varias);
b) Aplicación de la propuesta y
c) Descripción de los resultados obtenidos una vez aplicada la propuesta diseñada.

LOGÍSTICA PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO

El trabajo se llevó a cabo en el Centro Educativo El Centenario del municipio El Carmen de Chucurí (Santander), distante aproximadamente 170 kilómetros de la capital santandereana, en este municipio la mayoría de su geografía es netamente rural, se encuentran todos los pisos térmicos, es de los llamados municipios pequeños por su extensión urbana, pero si se tiene en cuenta la parte rural bien podría ser uno de los municipios más grandes que tiene el departamento de Santander, su economía se basa en la ganadería, producción de aguacate (el mejor del país),capital cacaotera de Colombia, explotación minera (carbón) y en menor renglón la producción de frutas y se está fomentando la explotación del caucho.

El Centro Educativo El Centenario, está ubicado a 14 kilómetros de la cabecera municipal por vía carreteable en mal estado y ofrece la educación desde el grado cero hasta el grado once, consta de la sede principal o sede A y nueve sedes anexas donde se ofrece la educación primaria, con una población estudiantil de 320 estudiantes en la sede A. La primera promoción de bachilleres se llevó a cabo en el año 2007 y para el presente año se espera graduar la segunda promoción. La comunidad educativa vive de la explotación agropecuaria. La fruta es poco comercializada y en menor escala de la explotación minera (como empleados).

Aquí los estudiantes son personas con calidad humana, son disciplinados, amantes del estudio y el trabajo, respetuosos con sus compañeros y profesores, con ellos se trabaja en armonía y con un ambiente fraternal. Para nuestra investigación realizamos inicialmente una prueba diagnóstica a todos los estudiantes del grado noveno, para después seleccionar a seis de ellos, a continuación encontrará la descripción de ellos:

Foto 1. Parte de las instalaciones del centro educativo el centenario

ESTUDIANTES DEL CENTRO EDUCATIVO EL CENTENARIO

Foto 2. Inauguración de las interclases del colegio realizado el día mayo primero

LOS SEIS ESTUDIANTES SELECCIONADOS PARA EL TRABAJO

Para la selección de los seis estudiantes se tuvo en cuenta que tuvieran disposición de colaboración y trabajo, que los padres dieran el aval y que sean estudiantes que viven relativamente cerca a la institución para trabajar en jornada contraria a la ordinaria, además porque hay estudiantes que viven muy distante y que aunque tuvieran deseos de colaboración no lo pudieron hacer debido a que solo se cuenta con un transporte que los lleva y los trae diariamente.

Foto 3. Los seis estudiantes seleccionados para el trabajo

ASÍ VEO A MIS SEIS ESTUDIANTES COLABORADORES

Yadira Lizeth puerto lozano, esta niña tiene 15 años de edad, es muy disciplinada y es bastante hábil para la matemática, además es la presidenta del gobierno estudiantil del colegio, es líder en el salón y nunca ha habido quejas de ella por parte de los compañeros ni de los profesores. Es un ejemplo. ¡Qué bueno trabajar con estudiantes de esta gran calidad!

Marcy Daniela Meneses, esta niña tiene 16 años de edad, entiende las clases de matemáticas, junto con Yadira son las primeras en desarrollar los ejercicios matemáticos propuestos en clase, es una niña divertida y siempre se ve alegre, juiciosa y disciplinada. Así debieran ser todos los estudiantes.

Smith Vargas Sánchez, en algunos casos se le dificulta la matemática, tiene 16 años de edad, presenta una dificultad que es la de sumar números entero cuando son de signo negativo o la combinación del más y el menos, aunque he buscado diferentes estrategias en las operaciones con números enteros la dificultad persiste aunque un poco mas leve, esta niña es la monitora de matemática en el salón.

Wílmer Arley Cruz Puerto, tiene 15 años de edad, entiende la matemática cuando se lo propone, pero le gusta ser muy comunicativo con sus amigos en el salón en las horas de trabajo, es buen estudiante y fácilmente desarrolla los ejercicios propuestos en clase, buen deportista, disciplinado y muy noble, acepta fácilmente las normas del colegio.

Yoheni Tatiana Niño Zapata, tiene 13 años de edad, en algunos casos es muy lenta cuando se trata de trabajar matemática, en muchas ocasiones es de las últimas en entregar los trabajos desarrollados en la clase y manifiesta no entender algunos temas por lo que es necesario volverlos a explicar, se distrae con facilidad, en ocasiones no atiende y esto hace se que le dificulte en la presentación de evaluaciones, es respetuosa con sus compañeros y los profesores.

Marinela Alfonso Marín, tiene 16 años de edad, se le dificulta aprender matemáticas, sobre todo en lo referente al álgebra, los casos de factorización son siempre difíciles para ella, en el desarrollo de talleres en clase manifiesta no entender, se le debe colaborar siempre, las notas en matemáticas en los periodos son generalmente bajas, esta niña necesita mucha atención y ayuda, en la parte disciplinaria nunca ha habido quejas. ¡Qué bueno!

ACERCA DE LOS TALLERES

Inicialmente queremos mostrar brevemente lo que se quería lograr con cada uno de los talleres propuestos a los estudiantes.

En el TALLER DIAGNÓSTICO se buscó identificar las dificultades y aciertos que presentan los estudiantes sobre los conceptos y conocimientos que tienen acerca de los polinomios, conocer como interpretan las variables y constantes, identificar qué recuerdan de los conocimientos aprendidos el año anterior, qué entienden por un polinomio y lo relacionado con este, qué recuerdan de la descomposición factorial de números enteros en sus factores primos y de polinomios de grado dos

En el taller dos se buscó que los estudiantes reconocieran y manipularan el material adquiriendo la destreza para representar polinomios como producto de de dos factores, teniendo en cuenta las dimensiones de los lados de un rectángulo que se forma al acomodar las regletas de factorización. También se pretendió que: construyeran rectángulos dado el polinomio que representa su área, escribieran el polinomio que representa el área de un rectángulo dado, al igual que su equivalente como producto de sus lados.

En el taller tres los estudiantes debían reconocer trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ como trinomios cuadrados perfectos, y a través de ejercicios con las regletas, observar patrones que les permitieran generalizar o encontrar un proceso para todos los polinomios con estas características. También se busca que el estudiante observe que lo que comúnmente llamamos productos notables, no es más que el desarrollo de una expresión algebraica factorizada.

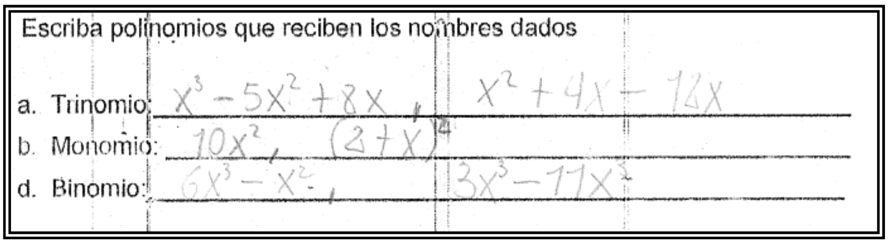
El propósito taller cuatro era desarrollar en el estudiante la capacidad para factorizar polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, lo mismo que factorizar diferencia de cuadrados. Nuevamente se utilizan la representación de estos con las regletas para llegar a la factorización, buscando así que el estudiantes identifique regularidades que le permitan dar el salto a lo simbólico sin el uso del material.

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

A continuación presentamos un análisis más detallado de cada una de las actividades realizadas, resaltando aspectos observados en cada una de ellas.

En el TALLER DIAGNÓSTICO, que se realizó el día 9 de junio de 2008 a veinte estudiantes del grado noveno del Centro Educativo El Centenario quedó en evidencia que los estudiantes presentan muchas dificultades en lo relacionado con el tema de polinomios. Los conceptos básicos y lo aprendido en el grado octavo, son poco recordados por la mayoría de los estudiantes debido tal vez a que no han estudiado estos temas desde el año anterior o que no sienten atracción por la matemática y menos en la parte que concierne al álgebra.

De manera especifica, se observa que no clasifican muy bien los polinomios teniendo en cuenta el número de términos con el que cuentan, como se puede observar en las respuestas dadas por Yadira y Katherine.

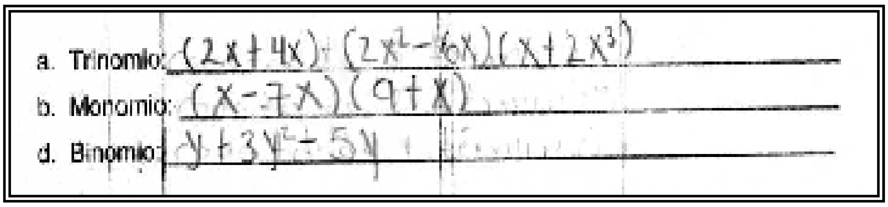


Escriba polinomios que reciben los nombres dados

a. Trinomio: x^3-5x^2+8x , $x^2+4x-14x$

b. Monomio: $10x^2$, $(2+x)^4$

d. Binomio: $6x^3-x^2$, $3x^3-11x^3$



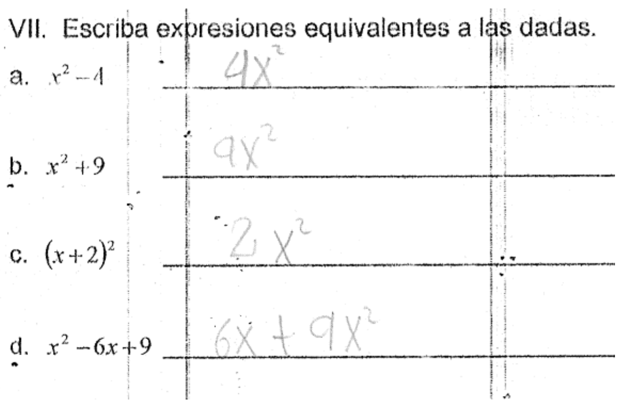
a. Trinomio: $(2x+4x)$ $(2x^2-6x)(x+2x^3)$

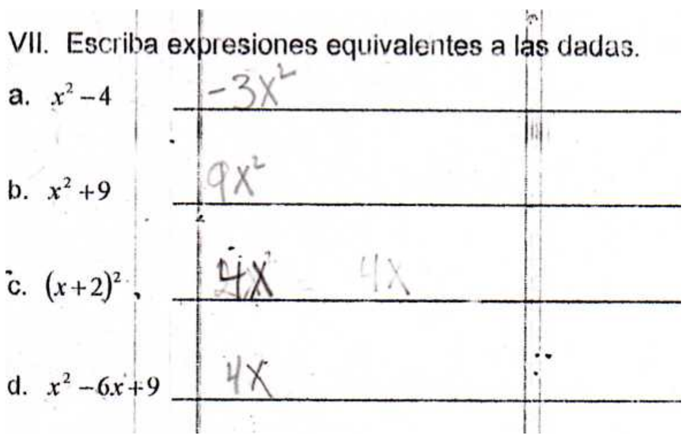
b. Monomio: $(x-7x)(9+x)$

d. Binomio: $y+3y^2-5y$

Al respecto, creemos que al iniciar los procesos de factorización clasificándolos por casos, enseñanza de la forma tradicional, el error antes comentado es uno de los obstáculos para que esta enseñanza no sea del todo exitosa, puesto que al estudiante se le dice: *„Vamos a factorizar un trinomio cuadrado perfecto”*, y él aún no reconoce lo que es un trinomio, mucho menos que es cuadrado perfecto.

Ahora bien, cuando se trata de descomponer los números enteros en el producto de sus factores primos, trabajan fácilmente, al igual que lo relacionado con la aritmética, pero al trabajar con constantes y variables presentan inconsistencias, como las observadas en las siguientes respuestas:


VII. Escriba expresiones equivalentes a las dadas.
a. x^2-4 $4X^2$
b. x^2+9 $9X^2$
c. $(x+2)^2$ $2X^2$
d. x^2-6x+9 $6X+9X^2$


VII. Escriba expresiones equivalentes a las dadas.
a. x^2-4 $-3X^2$
b. x^2+9 $9X^2$
c. $(x+2)^2$ $4X$ $4X$
d. x^2-6x+9 $4X$

Ahora bien, al observar las respuestas de dos de los estudiantes podemos darnos cuenta que suman los términos sin tener en cuenta que no son semejantes, error que es frecuente en los estudiantes que han iniciado el estudio de estos meses.

Por lo anterior, este primer taller diagnóstico resultó ser útil para comprobar que la mayoría de los estudiantes no tienen claro los conceptos algebraicos y que lo aprendido en su momento fue un aprendizaje memorístico ya que acertaron en muy pocas preguntas, inicialmente los estudiantes se mostraron temerosos para contestar el taller, pensando que se trataba de calificarlos y perderían la evaluación, pero luego de darles confianza contestaron sin temores lo que cada uno sabía, en algunos casos hicieron preguntas que fueron negadas.

Ignacio Morales G. y Armando Sepúlveda L. en su trabajo Propuesta para la Enseñanza de la Factorización afirman:

> *"los estudiantes de secundaria y bachillerato regularmente manifiestan dificultades de aprendizaje en el álgebra; el nivel de competencia alcanzado por muchos de ellos les impide resolver satisfactoriamente los problemas algebraicos que se les presentan".*

Esto nos lleva concluir que los problemas de aprendizaje de procesos algebraicos son de forma general para cualquier clase de estudiantes, nos lleva a convencernos que no solamente son los nuestros los que tienen dificultades para aprender significativamente, y también nos induce a hacernos preguntas como: ¿será que siempre enseñamos matemáticas con tiza y tablero?, ¿será que los docentes de esta área poco buscamos estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática?, los estudiantes no quieren aprender matemática? o crees que es difícil aprender y enseñar matemática? Según la experiencia como docentes de .matemáticas podemos deducir que algunos maestros poco nos preocupamos por buscar alternativas para enseñanza.

Finalmente, vale la pena comentar que cuando los estudiantes se enteraron que se les iba a aplicar un taller diagnóstico, hicieron los siguientes comentarios:

Yadira: *„profesor ¿nos van a calificar?. Si es así perdemos la evaluación*

Tatiana*:"yo no me acuerdo de nada eso lo vimos el año pasado, pero ya se olvidó".*

La mayoría o casi todos se sorprendieron y dijeron lo mismo: *„yo no sé nada, yo pierdo esta evaluación"*.

Esto demuestra que la evaluación produce temor en los estudiantes, y no solo en los estudiantes sino que todos sentimos temores a ser evaluados. Por eso para lograr un mejor aprendizaje es importante mejorar los ambientes de trabajo que garanticen tranquilidad en los aprendices donde estén libres de presiones y temores, buscando así un ambiente de confianza y de libertad, debe haber un ambiente lúdico donde el niño interactúe con el mundo exterior a través de material concreto que lo lleve a crear sus propias apreciaciones y sacar las conclusiones particulares.

TALLER DOS

El taller número dos fue aplicado el día 10 de julio de 2008. Para el desarrollo de este taller se les pidió a los estudiantes que construyeran figuras geométricas a partir de un polinomio dado a partir de la longitud de los lados de la figura, que encontraran el área de la misma y lo escribieran como un polinomio de segundo grado, que construyeran la figura y escribieran el polinomio correspondiente a su área

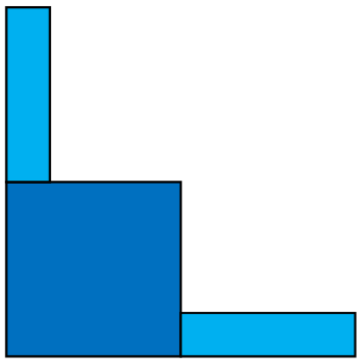
Hasta este momento no se les mencionó que se trataba de factorizar polinomios, puesto que se buscaba que el estudiante descubriera que un polinomio de grado dos representa el área de un rectángulo y que por lo tanto se puede descomponer en dos factores que corresponden a la longitud de los lados del rectángulo.

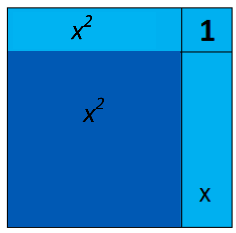
Este taller estuvo dinámico, a diferencia de otras clases de matemáticas donde se muestran desinteresados (los más regulares), en estas estuvieron muy atentos y contentos, inclusive se sentían orgullosos ante los demás estudiantes de estar trabajando el material, saberlo manipular y ver representada una expresión algebraica en forma concreta utilizando solo las regletas, apartándose de los procesos puramente tradicionales que se trabajan a diario.

Que ¿cómo se desarrolló el taller? Fue necesario ante todo dar a conocer el material a los estudiantes, explicar el concepto de área y perímetro de las figuras geométricas, que la variable *"x"* o *"y"* representa la longitud de los lados de las regletas, si una figura tiene x de lado, su área es x^2.

¿Cuáles fueron las dificultades? El no tener muy claro la diferencia entre área y longitud y las unidades en que se da cada una, por ejemplo confundir que el largo de una regleta puede ser x^2, es decir que al cuadrado de lado x lo confundían con la longitud x y aunque no fue difícil familiarizarlos con el material si hubo la necesidad de explicar muy bien el funcionamiento de las regletas, explicar que si una figura tiene x de largo por uno de ancho, el área es igual x, y que el cuadrado que tiene x de lado, el área es x^2 como producto de (x) (x).

Inicialmente se equivocaron para armar las figuras, por ejemplo cuando se les pide formar la figura de $(x + 1)$ por $(x + 1)$, Marinela y a Yoheni Tatiana hicieron la siguiente representación





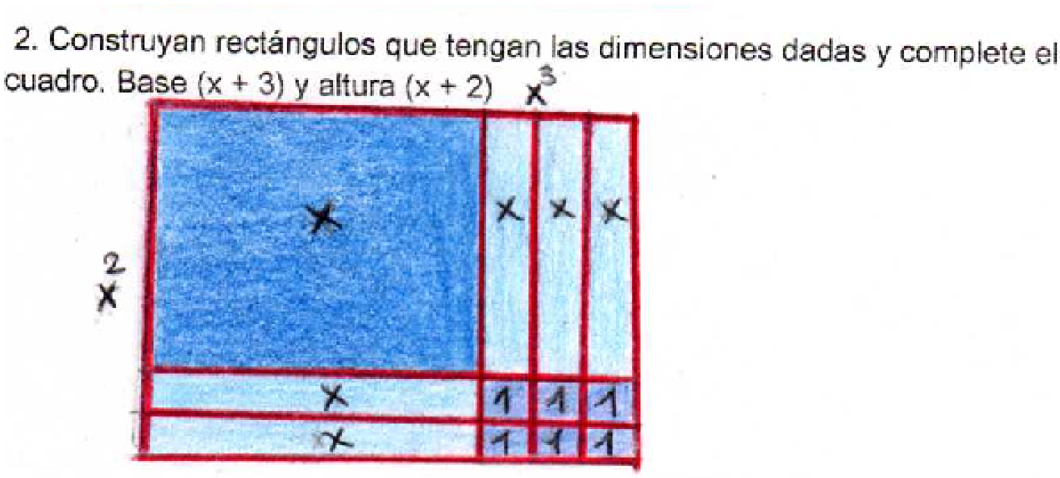
y no así

Esto les ocurrió en varias ocasiones dejando ver la dificultad de los estudiantes para interpretar el concepto de área y de longitud, no solamente tienen falencias en la parte algebraica sino que también se debe revisar y reforzar los conceptos matemáticos y geométricos. También confunden la longitud de los lados del cuadrado con el área del mismo. Se debió trabajar bastante en la interpretación y la diferencia que existe entre el área de una superficie plana y el perímetro de esta.

En la siguiente foto podemos ver a Yadira, Marcy y Marinela tratando de desarrollar los ejercicios propuestos en el taller 2. ¿Será que lo lograron? Lo más seguro es que sí. Porque así lo demostraron en las diferentes actividades ya trabajadas, superaron las dificultades presentadas con el trabajo mutuo.

Foto 4. Yadira, Marcy y Marinela tratando de desarrollar los ejercicios

Otra de las dificultades surgió cuando se les pidió que, formaran un cuadrado de base *(x +3)* y altura *(x + 2),* logran hacer la representación grafica, pero al hacer la representación simbólica llaman a $3x$, x^3. Así por ejemplo:

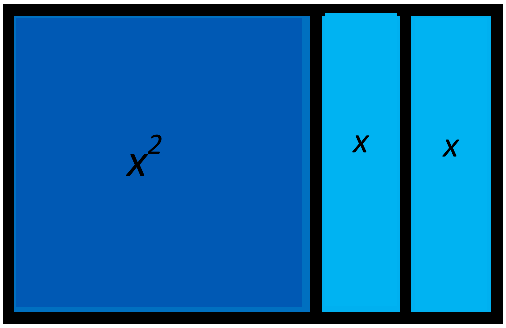


Dirían ellos al principio que este rectángulo tiene como base $x^2 + x^3$ y no $x + 3$, porque confunden la longitud del lado con el valor del área y confunden $3x$ con x^3 ó $2x$ con x^2, pero este problema fue solucionado y en los talleres siguientes no cometieron más este error.

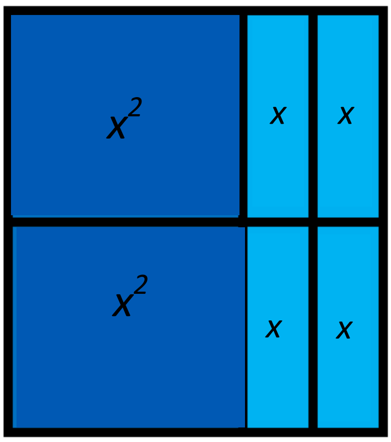
TALLER TRES

Se diseñó y se trabajó un tercer taller donde se espera que los estudiantes con el uso de las regletas apliquen la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma para descomponer polinomios de segundo grado en dos factores aplicando el caso tradicionalmente llamado de factor común, no se trataba de enseñarles en qué consiste el factor común, sino que descubrieran la forma como se puede descomponer un polinomio en dos factores y que entendieran que este es divisible por uno de esos factores, además que se dieran cuenta que el factor común es aquel término que divide al polinomio.

A continuación nos permitimos mostrar un ejemplo que ilustre la forma en que se debe usar las regletas. Para $x^2 + 2x$, se puede descomponer en $x(x + 2)$, es decir el polinomio es divisible entre x, para esto arma la siguiente figura.



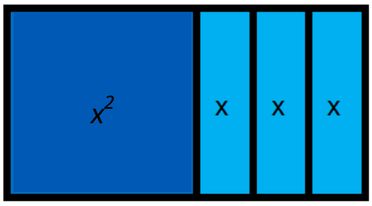
La descomposición en dos factores del polinomio $x^2 + 2x$ que corresponde al área del rectángulo, es $x(x + 2)$ correspondiente al producto de las longitudes de sus lados, es decir, este polinomio es divisible por x, que es lo que se esperaba que el estudiante descubriera.

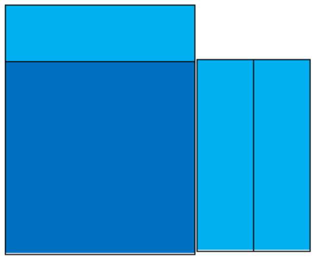


El anterior grafico representa un rectángulo cuyos lados miden $(x + 2)$ y $(2x)$, igualmente esta figura geométrica tiene un área de $2x^2 + 4x$.

Es así como se les presenta el polinomio para descomponerlo en dos factores o también se da como producto para hallar el polinomio, es decir se hace el proceso en las dos direcciones, por ejemplo se da el polinomio $2x^2 + 6x$ para que sea descompuesto en sus factores correspondientes o por el contrario se presenta $3x\ (x + 3)$ para desarrollar este producto y hallar el polinomio que representa el área del rectángulo de base $3x$ y altura $x + 3$, apoyándose en las regletas correspondientes.

Para esto arman la figura geométrica utilizando el material correspondiente, es decir el rectángulo debe tener como base (x + 3) y de altura x, de esta forma el estudiante debe concluir que la descomposición factorial de un polinomio no es nada mas que el producto de los lados del rectángulo, así se muestra en la siguiente figura.





La segunda figura representa alguna de las posibles formas de ordenar las regletas, pero se dieron cuenta que no forma un rectángulo, por lo que descartan esa posibilidad y otras mas. Para formar las figuras geométricas debieron intercambiar la posición de las regletas de diferentes maneras hasta lograrlo, siempre buscando formar rectángulos.

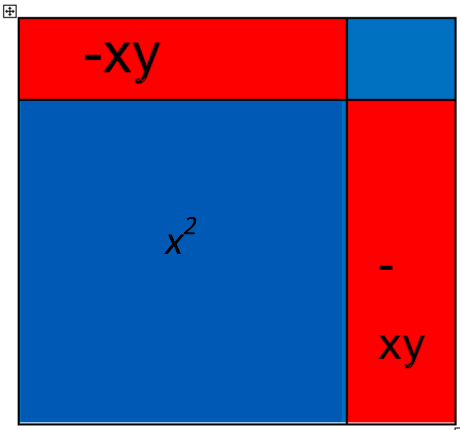
También se trabajó en este taller ejercicios donde se pretendía que el estudiante interpretara y descubriera el proceso para hallar el desarrollo de un binomio elevado al cuadrado. Por ejemplo en este caso se tiene un trinomio conformado por $x^2 + 6x + 9$, debe comprobar que es igual a $(x + 3)$

$(x + 3)$ o lo mismo que $(x + 3)^2$, es decir las longitudes de sus lados son iguales a la raíz cuadrada del primer término mas la raíz cuadrada del tercer término elevada esta suma al cuadrado.

Igualmente se trabajó en ejercicios de la forma $(x + y)$ $(x + y)$, es decir $(x + y)^2$, sabiendo que son cuadrados de base $(x + y)$, donde las variables "x, y" pueden tomar un valor arbitrario y su área son unidades cuadradas. Al desarrollar esta clase de ejercicios, se buscaba encontrara el resultado de elevar la suma de dos números elevados al cuadrado, es decir no hay diferencia en resolver $(a + b)^2$ $(x + y)^2$, $(x + 2)^2$ u otro par de números elevados al cuadrado porque todos se desarrollan de igual forma.

Resumiendo, el propósito de este taller era que el estudiante analizara la propiedad distributiva para encontrar el factor común en un polinomio y de esta manera factorizarlo sin dificultad y que además encontrara o generalizara la forma de factorizar un trinomio cuadrado perfecto, pero que además sea capaz de deducir el proceso inverso, es decir encontrar el producto de la suma o la diferencia de dos números elevados al cuadrado.

Fue así como se trabajaron ejercicios de la forma $(x - y)^2$, para encontrar la opinión del alumno acerca de lo que piensa de la factorización de la suma o diferencia de dos números elevados al cuadrado, si el proceso es igual o si por el contrario hay alguna diferenciación por el signo. Aquí en esta parte tuvieron cierta dificultad en cuanto a la organización de las regletas, puesto que se dificultó entender la parte negativa y el uso de las regletas de color rojo.

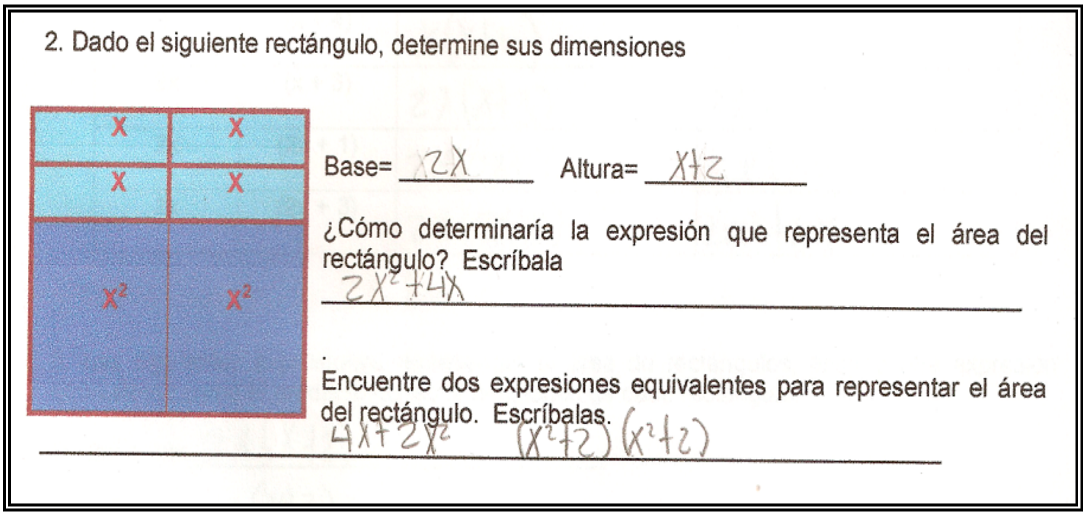


En estos ejercicios se trata de encontrar el cuadrado de la resta de dos términos, es decir que a un cuadrado de lado “x” se le disminuye “y” por cada lado. En este caso el área es igual al cuadrado grande sombreado de azul. Lo que hay que resaltar es el hecho de que al aplicar este material de trabajo en la factorización los estudiantes ven con más claridad lo que es un polinomio y cómo se factoriza, no ven esta clase de ejercicios y la misma álgebra tan abstracta.

Fue por esto que se propusieron ejercicios como representar en dos productos y formar el cuadrado que representan los polinomios $x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 + 6x + 9$ y otros, como también hallar los lados del cuadrado y el polinomio que representan las siguientes áreas, $(2x - 2)^2$, $(x - 1)^2$, $(x - y)^2$ entre otros..

Foto 5. Los seis colaboradores desarrollando el taller número tres el día 10 de julio de 2008.

Es importante hacer ver que en el ejercicio número dos de este taller, los estudiantes dijeron que la base de este rectángulo es $x^2 + 2$, porque confunden el concepto de longitud con el de área, que ha sido la constante de este trabajo. Como se puede observar en la última línea de la respuesta dada por Tatiana



Algunos tuvieron dificultad para resolver ejercicios como $(50 + 2)^2$ ó como por ejemplo $(100 + 5)^2$, debido a que aquí se les hace imposible aplicar las regletas, por lo que fue necesario hacerles caer en cuenta que es lo mismo que si se tuviera $(x + y)^2$ o también $(x + 3)^2$, y que por lo tanto deberían aplicar las reglas para elevar al cuadrado la suma de dos números. Cuando se les explicó, aplicaron la regla y desarrollaron los ejercicios propuestos.

Los estudiantes que trabajaron en este proyecto no tuvieron dificultad para identificar el proceso para desarrollar estas potencias aplicando las regletas, igualmente entendieron que factorizar un trinomio cuadrado perfecto es exactamente el proceso inverso, que se trata de encontrar las longitudes de los lados de un cuadrado.

De la aplicación de este tercer taller se puede comentar que fue muy valioso en el propósito que se tiene de dar al estudiante una manera diferente a la tradicional de ver y aplicar la matemática y mas concretamente en la parte del álgebra que es donde el alumno presenta muchas dificultades, sino se volvieron expertos estos estudiantes en aplicar los casos de factorización vistos en los anteriores talleres, si se puede afirmar que se les facilitó mucho más en la comprensión y visión que se pueda tener en la parte algebraica, máxime cuando se trata de estudiantes del grado noveno que es una etapa donde el estudiante no ha podido asimilar ni reconocido la importancia del pensamiento variacional y tampoco es capaz de trabajar con facilidad los casos de factorización en polinomios de segundo grado.

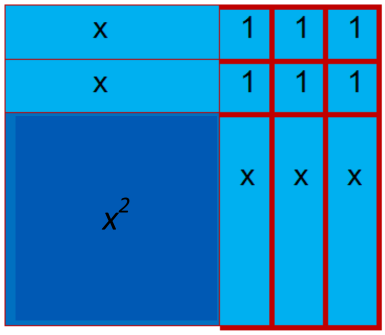
TALLER CUARTO

Aquí los estudiantes desarrollando el taller número cuatro el día 11 de julio de 2008. Se trabajó en el restaurante escolar por ser un sitio más cómodo que el salón de clases.

Foto 6. Estudiantes desarrollando el taller número cuatro

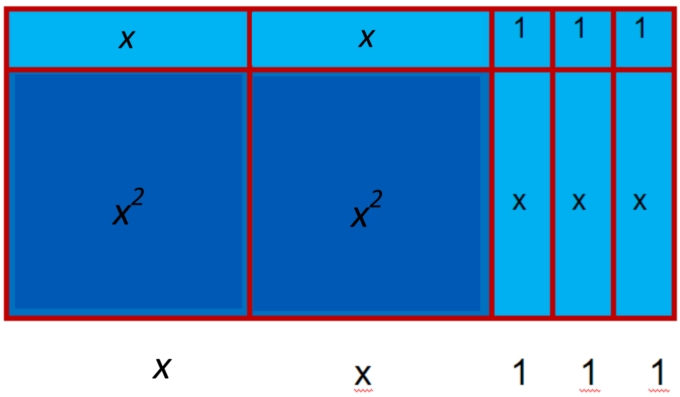
En el taller número 4, buscó trabajar polinomios de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c$, de la forma $ax^2 + bx + c$ y también trabajar la diferencia de cuadrados perfectos, siempre aplicando las regletas de factorización para luego evaluar efectividad del material didáctico y saber si es conveniente usarlo en la enseñanza de la factorización de polinomios como recurso para lograr un mayor aprendizaje en los estudiantes.

Se trabajó en figuras como la siguiente.



El rectángulo anterior representa el polinomio $x^2 + 5x + 6$, para el cual, los estudiantes debían descubrir que la descomposición factorial es $(x + 3)\ (x + 2)$, es decir que el área del rectángulo es el producto de las dimensiones de sus lados.

Ejercicios como el siguiente sirvieron para que los estudiantes factorizaran polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

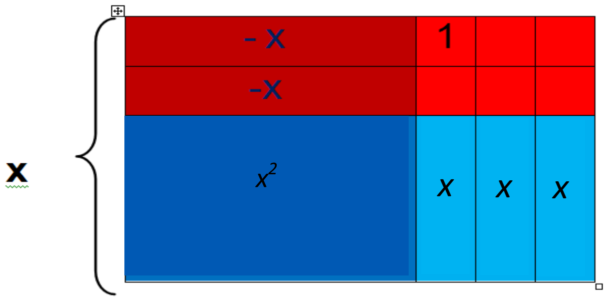


El polinomio que representa el rectángulo anterior es $2x^2 + 5x + 3$ y se puede descomponer en dos factores identificando las dimensiones del rectángulo $(2x + 3)\ (x + 1)$

A polinomios como los siguientes $2x^2 + 7x + 6$, $2x^2 + 4x + 4$ que representan áreas de rectángulos se les pidió graficarlos y asignarles sus dimensiones con el propósito de adquirir la habilidad y a la vez generalizar la forma para factorizar este tipo de polinomios.

Queremos aclarar en este momento, que el estudiante debe saber muy bien las reglas para graficar estos rectángulos, como es el hecho de que las gráficas deben quedar perfectas y nunca una unidad mayor debe completarse con unidades menores, por ejemplo no se debe completar una regleta de área x con unidades como tampoco completar x^2 con regletas de área x.

También los siguientes ejercicios representan el área de rectángulos, pero esta vez a un cuadrado de lado x se le adiciona por un lado mientras que por el otro lado se le resta.

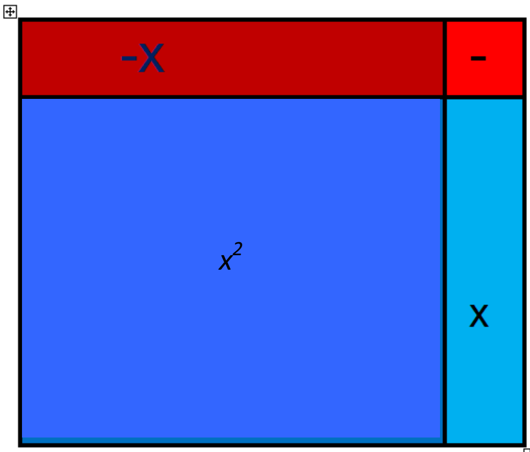


A este cuadrado de lado x se le adicionan 3 a la base y se restan 2 a su altura, es decir que las dimensiones del rectángulo es $(x + 3)$ y $(x - 2)$, por lo tanto para hallar el área se halla el producto $(x + 3)(x - 2) = x^2 + 3x - 2x - 6$, al reducir los términos semejantes se tiene $x^2 + x - 6$ que corresponde al área del rectángulo.

Para comprobar que el polinomio si corresponde al área del rectángulo se le dió un valor a la variable x de cuatro unidades (porque cada regleta de área x es una cuarta parte del área de la regleta de x^2), entonces la figura tendría una base de $(4 + 3)$ y una altura $(4 - 2)$ igual $(7 * 2) = 14$ unidades cuadradas es el área del rectángulo.

También se manejaron ejercicios donde se les pedía que hallaran las dimensiones, el área y dibujaran la figura aplicando las regletas. De la misma manera se pide que dibujen figuras y hallen el área de rectángulos a partir de la base y la altura. Por ejemplo cuando la base es $(x + 2)$ y la altura $(x + 1)$, altura $(x - 2)$ y de base $(x + 1)$. En otras ocasiones se pidió que a partir del polinomio dado hallen los lados del rectángulo.

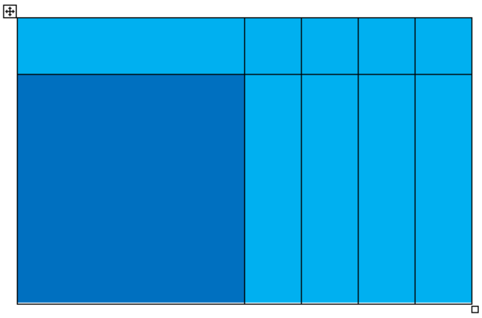
Además de los ejercicios anteriores también se trabajó la factorización de diferencia de cuadrados, ejercicios de la forma $(x + a)(x - a)$, igualmente mediante la aplicación del material didáctico formando las figuras correspondientes en cada caso y hallando sus áreas



Esta figura corresponde a un cuadrado de lado x, a la base se le suma uno y a la altura se le resta uno. Para calcular su área se halla el producto de sus lados $(x + 1)(x - 1)$, su área es igual a $x^2 + x - x - 1$, reduciendo términos semejantes se tiene que el área es $(x^2 - 1)$.

En el desarrollo del taller se observo lo siguiente:

Cuando se les preguntó por ejemplo el polinomio $x^2 + 5x + 6$, ¿cómo se factoriza?, contestaron que lo primero que se acomoda es la regleta de x^2 y luego se acomodan las cinco regletas de área x de tal manera que el producto de las regletas sea seis que son las unidades que se deben acomodar. Por ejemplo, explican, podría ser:



En este caso, se tiene $x^2 + 5x + 3$, es decir que debieran haber 6 unidades y no 3. De ahí concluyen que el valor de c, debe ser el producto de dos factores que al sumarlos debe ser igual a b. Igualmente para factorizar la diferencia de cuadrados, $x^2 - 4$, generalizaron que es igual a extraer las raíces de cada término y multiplicar la suma por la diferencia $= (x + 2)(x - 2)$.

Estos fueron los casos de factorización que se trabajaron con este grupo de 6 colaboradores estudiantes: factor común para generalizar la propiedad distributiva, trinomio cuadrado perfecto y en proceso inverso productos notables, trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ y diferencia de cuadrados. Se trata no solo enseñar al estudiante a factorizar polinomios de grado dos, sino también aplicar un material didáctico con fin de estudiar el proceso que siguen los estudiantes para descomponer en dos factores polinomios de segundo grado y ver si es realmente oportuno y conveniente aplicar otras formas y métodos mas didácticos de enseñanza del álgebra saliéndose un poco de los métodos netamente tradicionales, saber qué piensa y cómo trabaja el estudiante, si el rendimiento y el aprendizaje es mas significativo o por el contrario no se alcanzan los logros propuestos con la utilización de las regletas.

¿Qué Podemos Decir Del Trabajo?

Durante el proceso desarrollado los estudiantes a pesar de presentar ciertas dificultades para aprender a manejar las regletas, mostraron mucho interés en el trabajo, los talleres los desarrollaron en un tiempo de cuatro horas y media cada uno, como lo fue el taller tres y el taller cuatro, esto no impidió que ellos tuvieran siempre el mismo entusiasmo y dispuestos a trabajar.

Se pudo establecer con este trabajo que los estudiantes además de presentar dificultades para trabajar la parte algebraica, también se comprobó que no tienen muy claro los conceptos de áreas, perímetros y longitudes, pero que fueron superadas en gran parte, que se debe trabajar en ellos y con otros grados los conceptos relacionados al pensamiento espacial y variacional. Cuando se les presentaron cuadrados y rectángulos formados por las regletas confundían áreas con perímetro, se presentaron dificultades en el reconocimiento del tipo de polinomios e igualmente los métodos de factorización.

Se llegó a comprobar que los estudiantes que participaron en este proyecto, desarrollaron más los conceptos algebraicos. Al estudiar y trabajar las funciones y ecuaciones cuadráticas, lo hacen con mayor facilidad, entienden mas los conceptos de factorización en la resolución de las ecuaciones de segundo grado, encontrando las raíces de estas ecuaciones para la solución de problemas de este tipo, igualmente desarrollan con más prontitud las gráficas de las funciones de segundo grado.

Después del desarrollo del taller número cuatro como era de esperarse, ya los estudiantes son capaces de relacionar un polinomio con el área de un rectángulo y las dimensiones de sus lados con los factores en los cuales se compone dicho polinomio, además que han adquirido destrezas y habilidades para reconocer fácilmente la descomposición factorial de un polinomio sin importar si tiene o no el material para hacerlo, es decir ya aquí factorizan de una manera mas fácil que cuando se empezó a desarrollar el primero y segundo taller, que a generalizar la estructura y forma de los distintos tipos de polinomios y los métodos de solución.

Esto no quiere decir que con el desarrollo de este proyecto, los estudiantes participantes se vuelvan expertos algebristas, ni tampoco pretender esperar que sean expertos en factorizar polinomios de segundo grado, se espera que los alumnos objeto de estudio adquieran un poco mas de habilidad en factorización, que entiendan en mayor grado lo que es un polinomio y su forma de descomposición factorial y que en el proceso de desarrollo de ejercicios propuestos en otros temas de matemáticas entiendan mejor los pasos algebraicos si se trata de factorizarlos para buscar la solución.

TALLER NÚMERO CINCO

Con este taller se pretendía evaluar lo aprendido en los talleres anteriores.

El taller fue resuelto satisfactoriamente, aunque aquellos a quienes se les ha dificultado las matemáticas „como es el caso de Yoheni y Smith% aquí también tuvieron ciertas dudas las cuales fueron resueltas por los otros estudiantes a quienes se les facilita en mayor grado el trabajo con los números, aunque hay que destacar que por una parte sirvió de mucho el trabajo con las regletas para factorizar y a la vez en la aplicación para la resolución de problemas.

Cabe anotar que con el grado noveno desde el mes de julio se ha venido trabajando sobre funciones y ecuaciones cuadráticas, sus métodos de solución como es el método gráfico, por factorización y la ecuación general de solución de la ecuación cuadrática, también se ha trabajado sobre la aplicación de los métodos de factorización en la resolución de problemas donde intervienen ecuaciones de grado dos, esto ha servido para que los estudiantes afiancen más sus conocimientos acerca de los procesos de factorización.

Por el hecho de haber trabajado estos temas, para dar cumplimiento al desarrollo del plan de estudios de la institución, según lo dispuesto en el plan de área, los estudiantes desarrollaron este último taller relativamente fácil aplicando los conceptos de factorización aprendidos con el trabajo con el material didáctico y que ahora les es más fácil su aplicación.

CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS

APRENDIENDO A TRABAJAR CON EL MATERIAL DIDÁCTICO

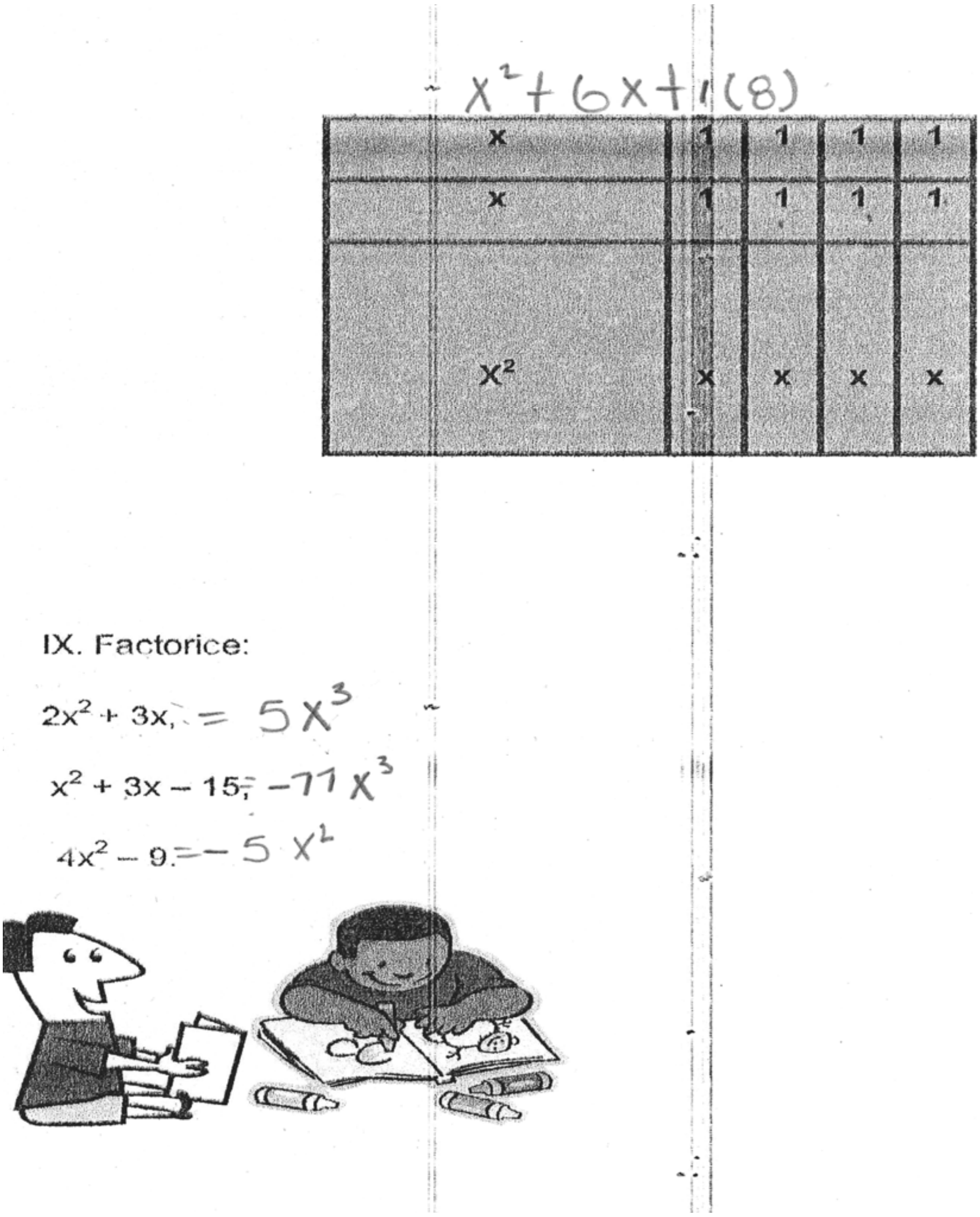
"Me gustó, porque aprendí mucho, me sentí bien aplicando la factorización con regletas porque es una forma fácil y sencilla de aprender y aplicar la factorización". Es la apreciación que tiene Yadira acerca de la factorización aplicando las regletas.

"Uno no se confunde y entiende mejor el ejercicio". Es lo que opina Marinela respecto a la utilización de las regletas en la factorización. A pesar de que Marinela es una niña que se le dificulta el aprendizaje de la matemática, opina que la utilización de las regletas le facilita el aprender la factorización. Igualmente los demás colaboradores de este trabajo opinan lo mismo, es decir que la aplicación del material didáctico facilita el aprendizaje.

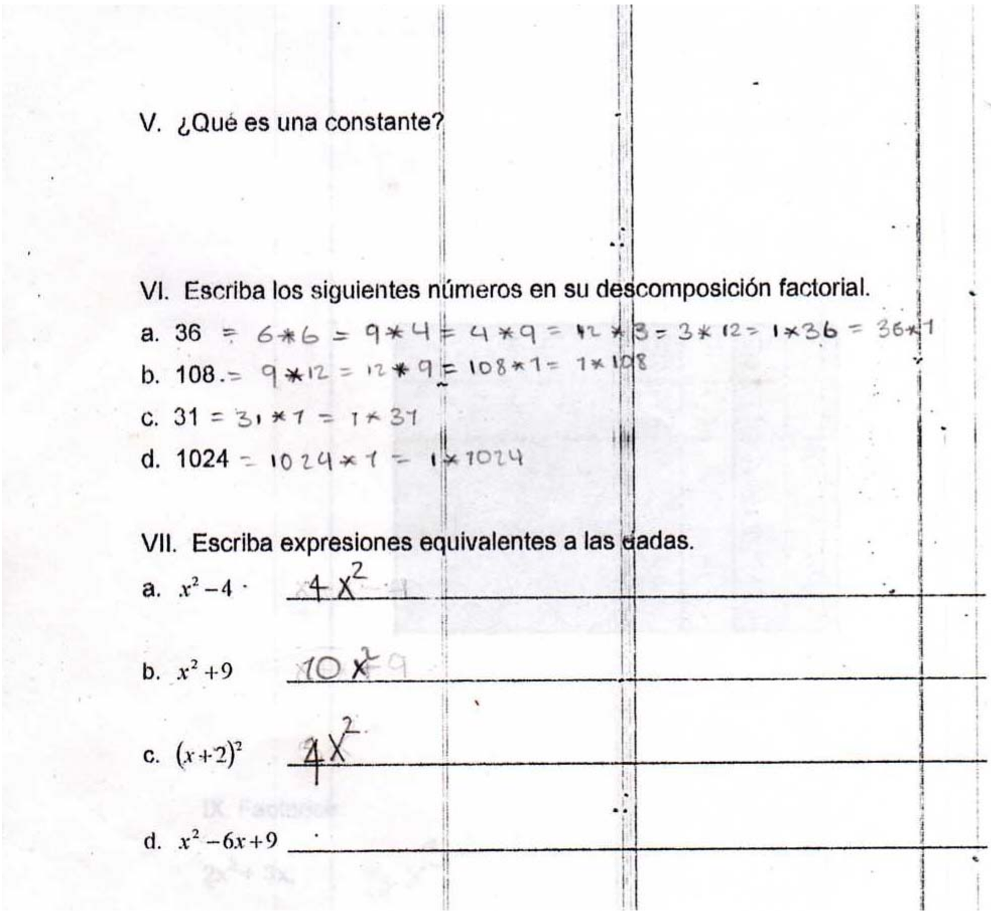
Las regletas de factorización de polinomios fueron una herramienta pedagógica para que los estudiantes entendieran mejor el proceso de descomposición factorial, a través de la manipulación del material concreto para pasar del juego a las tareas del trabajo escolar combinando el trabajo con la lúdica.

En la solución de uno de los ejercicios de la prueba diagnóstica, se observó lo siguiente:

Escriba una expresión para el polinomio representado en la gráfica.



Aquí nos damos cuenta que Yadira y Marcy Daniela „que son las que mejor les va en matemáticas‰ no acertaron a factorizar los polinomios porque no tenían presentes los casos de factorización para saberlos aplicar, igualmente los demás estudiantes tampoco lo desarrollaron de la manera adecuada. Analizamos que se les pide que escriba una expresión que representa la figura geométrica y en esta si acertaron, esto se debe a que en el año anterior se les había dado a conocer de manera muy somera este material, aunque no se aplicó en la factorización. Como dijeron al principio cuando se socializó el proyecto con ellos y se les pidió que contestaran el taller „Profesor, no sabemos nada, si nos va a hacer evaluación la perdemos‰ Hubo necesidad de explicarles que no se trataba de una evaluación para el sistema de calificaciones del periodo académico, sino de hacer un estudio de casos.


V. ¿Qué es una constante?

VI. Escriba los siguientes números en su descomposición factorial.

a. 36 = 6*6 = 9*4 = 4*9 = 12*3 = 3*12 = 1*36 = 36*1

b. 108 = 9*12 = 12*9 = 108*1 = 1*108

c. 31 = 31*1 = 1*31

d. 1024 = 1024*1 = 1*1024

VII. Escriba expresiones equivalentes a las dadas.

a. x^2-4 $4x^2$

b. x^2+9 $10x^2$

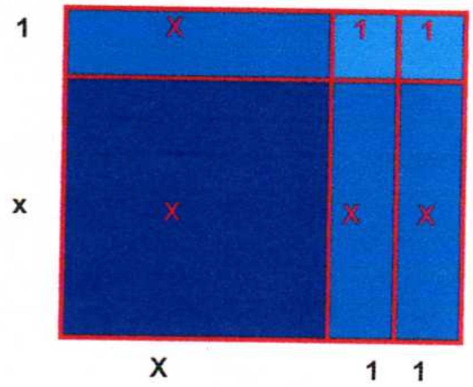
c. $(x+2)^2$ $4x^2$

d. x^2-6x+9

Como podemos observar la encuesta aplicada a Smith y a Sandra Paola (esta niña no está involucrada en el grupo de los seis colaboradores), fue bastante deficiente en cuanto a la descomposición factorial de polinomios. Hay que tener en cuenta que Smith es una niña que se le dificulta en reiteradas ocasiones la matemática, argumentó que ella pierde esa evaluación porque no se acuerda nada del año anterior. Aquí no hubo diálogo entre profesor y estudiantes, aunque ellos quisieron que se les aclararan dudas, no se hizo y se les aclaró que la intención conocer el estado de compresión de la parte algebraica. Así la totalidad de los estudiantes tuvieron pocos aciertos en la entrada diagnóstica.

En esta actividad hubo diálogo entre profesores y estudiantes con el fin de proporcionar al grupo de colaboradores la información necesaria para entender el funcionamiento del material, esto fue lo que todos preguntaron, ¿Cómo funciona o cómo se deben armar las regletas? Para formar la figura geométrica o lo mismo que el polinomio.

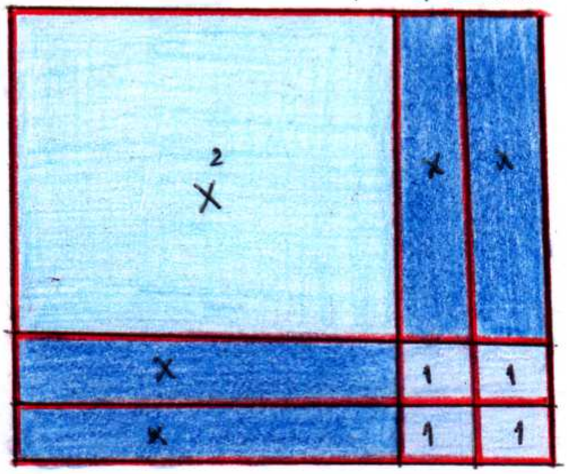
Se dio amplia explicación acerca del funcionamiento del material, teniendo en cuenta las características de cada uno de los tipos de regletas, su funcionamiento, el significado de los colores rojo y azul, el área y las dimensiones de cada una de las regletas, además que cada polinomio se representa por una figura geométrica formada por un rectángulo. Podemos afirmar que fue aquí donde se inicio todo el trabajo, donde empezamos a incentivar a nuestros estudiantes colaboradores y a darles todas las herramientas necesarias para el desarrollo de las actividades lúdicas y de trabajo, que por cierto estuvo pesado.



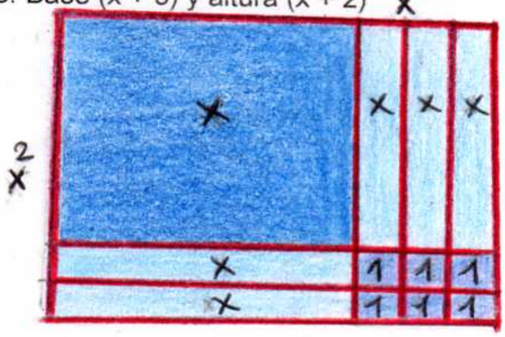
El polinomio formado es $X^2 + 3X + 2$. La base del rectángulo es $(x + 2)$ y la altura es $(x + 1)$, el polinomio resultante es el producto de la base por la altura.

1. Construya un rectángulo con las regletas indicadas. **x^2, x, x, x, x, 1, 1, 1,1.**

Dibújelos y escriba el polinomio que representa.



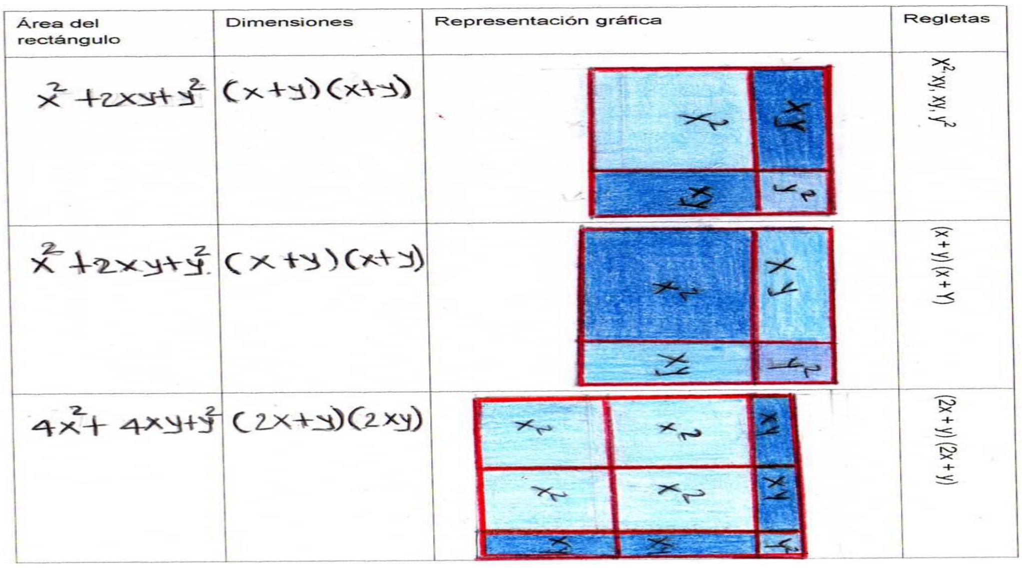
2. Construyan rectángulos que tengan las dimensiones dadas y complete el cuadro. Base $(x + 3)$ y altura $(x + 2)$ x^3



En el desarrollo del trabajo se observó que los estudiantes estaban contentos y entusiasmados, hubo participación y todos querían aprender a manejar el material, por esto tomaron muy lúdica la actividad. Smith lo hizo correctamente, claro estás, después de haber recibido toda la explicación pertinente, supo identificar cada una de las regletas y armar la figura geométrica, pero no escribió el polinomio correspondiente, tal vez por el afán de contestar el siguiente punto, pero el segundo a pesar de haberlo desarrollado bien y de haber dibujado bien la figura, confunde que $x + x + x = x^3$ y no $3x$, y también $x + x = x^2$ y no $2x$. Esta fue quizá la mayor dificultad que se presentó y que más se tuvo que corregir en reiteradas ocasiones con los seis estudiantes de la prueba, así que fue uno de los errores más comunes observados en este segundo taller y que se pudo corregir el transcurso del trabajo.

Cuando se le preguntó a Smith si le había parecido difícil, contestó: „*es fácil porque es armar fichitas y al final podemos saber el resultado*‰

.

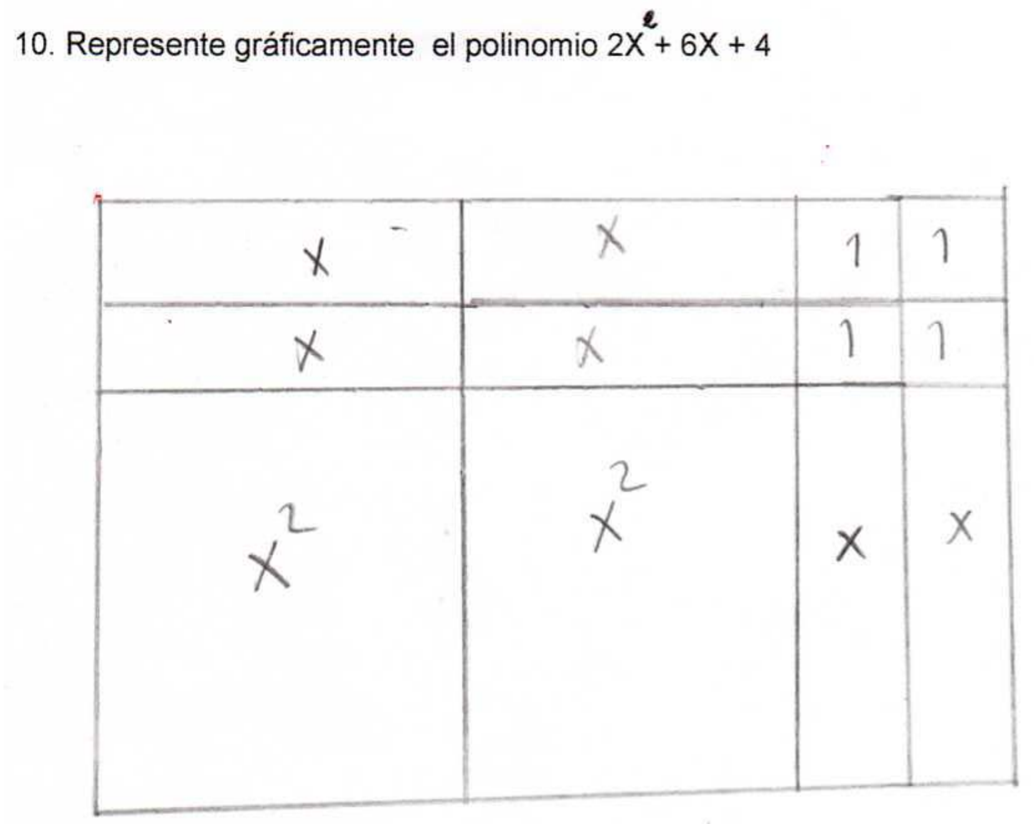


Área del rectángulo	Dimensiones	Representación gráfica	Regletas
$x^2+2xy+y^2$	$(x+y)(x+y)$	x^2, xy, xy, y^2	X^2, xy, xy, y^2
$x^2+2xy+y^2$	$(x+y)(x+y)$	x^2, xy, xy, y^2	$(x+y)(x+Y)$
$4x^2+4xy+y^2$	$(2x+y)(2xy)$	x^2, x^2, x^2, x^2, xy, xy, xy, xy, y^2	$(2x+y)(2x+y)$

Podemos observar que en este punto donde se les pide hallar el polinomio, las dimensiones del rectángulo y la representación gráfica, fue desarrollado por Yadira y lo hizo bien, dedujo que simplemente lo que debe hacer es acomodar las regletas de tal manera que coincidan todas, forme el rectángulo y luego para hallar las dimensiones simplemente cuenta las regletas utilizadas. Yadira adquirió los conocimientos para representar polinomios de segundo grado por medio de material concreto, lo mismo hicieron los demás colaboradores.

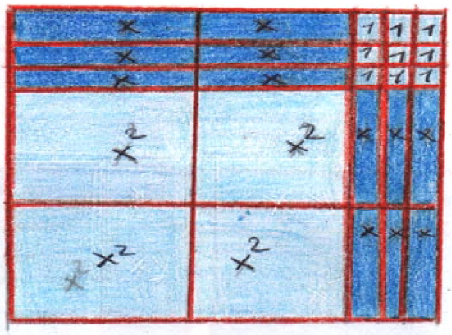
Como es apenas lógico en un principio se les dificultó representar los polinomios que se les pedía, pero poco a poco lo fueron logrando. Si consideramos que los estudiantes deben empezar a ver las clases de matemáticas desde la realidad del mundo que nos rodea y que tiene gran utilidad en la vida práctica, es importante la utilización de material concreto en el aprendizaje de la misma, ya que como lo plantean los Lineamientos Curriculares „ el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica‰ También los mismos lineamientos curriculares (1998, p, 122), plantean „el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en la que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y descubrible en los problemas planteados‰

Un ejemplo de esto fue lo que se hizo con nuestros seis colaboradores, a los que inicialmente se les presentó el material para su reconocimiento en cuanto forma, tamaño y color, su manipulación y la aplicación en la representación de polinomios de segundo grado. Es importante recalcar que no solo los estudiantes tienen la necesidad de aprender la parte lúdica y aplicación del material, sino que nosotros como docentes debemos primero que todo aprender su correcta manipulación para luego enseñársela a nuestros educandos con el fin de lograr en ellos un aprendizaje mas significativo.

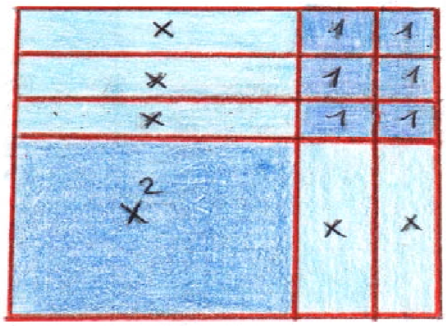


Aquí Yohemi Tatiana representó bien el polinomio pedido, aunque no lo hizo adecuadamente de primera porque acomodaba las regletas en otro orden, es decir que las regletas grandes las acomodaba bien, pero cuando quería hacerlo con las pequeñas (las de área uno), le faltaban, le sobraban o no le quedaba una figura geométrica regular. „Profesor, esta no se puede hacer porque no da‰fue cuando hubo la necesidad de insistirle para que cambiara el orden de las regletas las veces que fuera necesario de tal manera que forme la figura de un rectángulo y el polinomio quede bien representado. Pues precisamente esa es la función del docente, llevar al estudiante hasta que sea capaz de expresar matemáticamente las ideas para construir su conocimiento. Como dijo Marinela „me gustó el trabajo con las regletas porque uno no se confunde‰es decir que el mismo estudiante puede juzgar si el ejercicio le queda bien hecho o si de lo contrario debe experimentar otras opciones.

Forme un rectángulo que tenga como base (2x + 3) y altura (2x + 3)

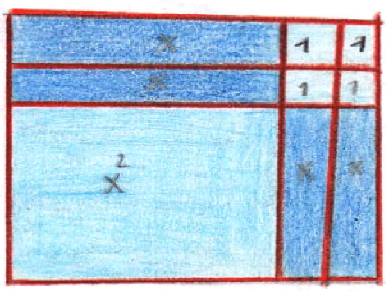


8. Escriba el polinomio formado por un rectángulo que tiene como base (x + 3) y altura (x + 2).



$x^2 + 5x + 6$

9. Diga cuál es la base y la altura del rectángulo que se forma del polinomio $X^2 + 4X + 4$



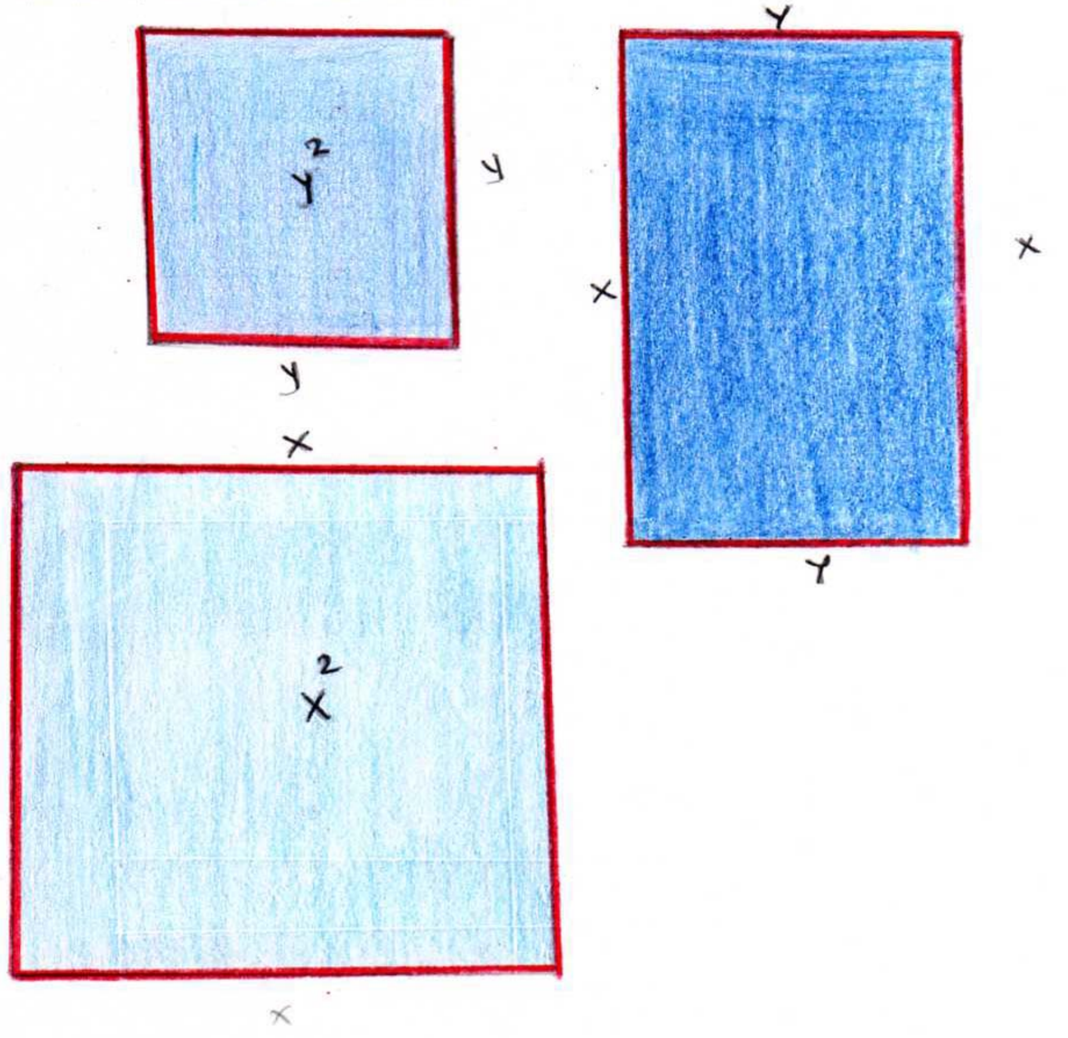
(x+2)(x+2)

Aquí este ejercicio que lo trabajó Marinela, después de haberle explicado lo que debía hacer, aunque como es notorio no tuvo tanta precisión en las medidas de las regletas y también al principio presentó dificultades porque no encontraba la forma de organizar el rectángulo, comprendió la técnica para representar el polinomio y lo hizo de la forma correcta. Precisamente de esto se trató este taller, entrenar a los estudiantes para que adquieran la habilidad y destreza en el manejo del material didáctico y la posterior aplicación en el desarrollo de ejercicios de descomposición factorial.

Es importante anotar que no solo se debe enseñar el álgebra en el grado octavo y menos que este aprendizaje sea pasajero solo para este grado, sino que debe servir de bases para grados posteriores, es decir vincular las condiciones de contexto en donde las situaciones de cambio sea el ingrediente primordial en la actividad matemática del estudiante que le permite ver que el desarrollo del pensamiento algebraico deja de ser exclusivo de los grados 8... y 9... y que por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar desde el grado 1... al grado 11... tal como se propone desde los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2003).según el módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico de la Gobernación de Antioquia(p. 31).

3. Elabore en (cartulina, foami, cartón) los cuadriláteros indicados representando las dimensiones con las variables dadas.

Un cuadrado de lado por X, un rectángulo con dimensiones X e Y, y un cuadrado de lado Y, teniendo en cuenta que X>Y.



Yoheni Tatiana aquí lo hizo muy bien de acuerdo a lo que se pide en la actividad, lo mismo hicieron los demás compañeros. ¡Qué bien!, esto nos ayudó a tener confianza en el trabajo a desarrollar.

Foto 7. Vemos a Wílmer Arley en el desarrollo del taller dos

Aquí vemos a Wilmer Arley en el desarrollo del taller dos. Junio 10, tratando de formar figuras geométricas de acuerdo a lo pedido en la actividad.

De esta manera evidenciamos que se realizó un trabajo muy importante con el fin explicar el proceso de manipulación de las regletas de factorización para garantizar el aprendizaje en la representación de polinomios de segundo grado.

Ahora el siguiente paso a seguir es la aplicación de estos conceptos aprendidos para la generalización de la descomposición factorial de polinomios de grado dos. Para esto analizaron muy bien cada uno de los ejercicios propuestos y cuidadosamente fueron acomodando todas y cada una de las regletas, a través del diálogo entre ellos fueron superando las dificultades encontradas hasta lograr el desarrollo correcto.

Es importante para la enseñanza de la matemática que el docente busque recursos y material didáctico que lleven a mejorar el proceso de aprendizaje en los educandos, como lo afirma Ed Labinowicz en su libro Introducción a Piaget, “el papel del maestro es, entonces, asegurarse que los materiales que utilice sean lo suficientemente ricos como para permitir preguntas sencillas al principio, y tengan soluciones que abran cada vez nuevas posibilidades”

Al aplicar este material con los estudiantes en la factorización de polinomios deja ver con claridad que es una manera fácil para que el alumno entienda y los vea representados como el área de figuras geométricas, pues se trata que el estudiante compare y comprenda los procesos que se llevan a cabo, como afirman Lauren B Resnick y Wendy F Ford en el libro La Enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos. Aprendizaje constructivo. Piaget ha dicho (1973): “comprender es inventar, es construir uno mismo. Aunque se puede ayudar a los niños a adquirir conceptos matemáticos por medio de materiales especiales y de preguntas de los profesores, sólo por su propio esfuerzo pueden comprender verdaderamente”

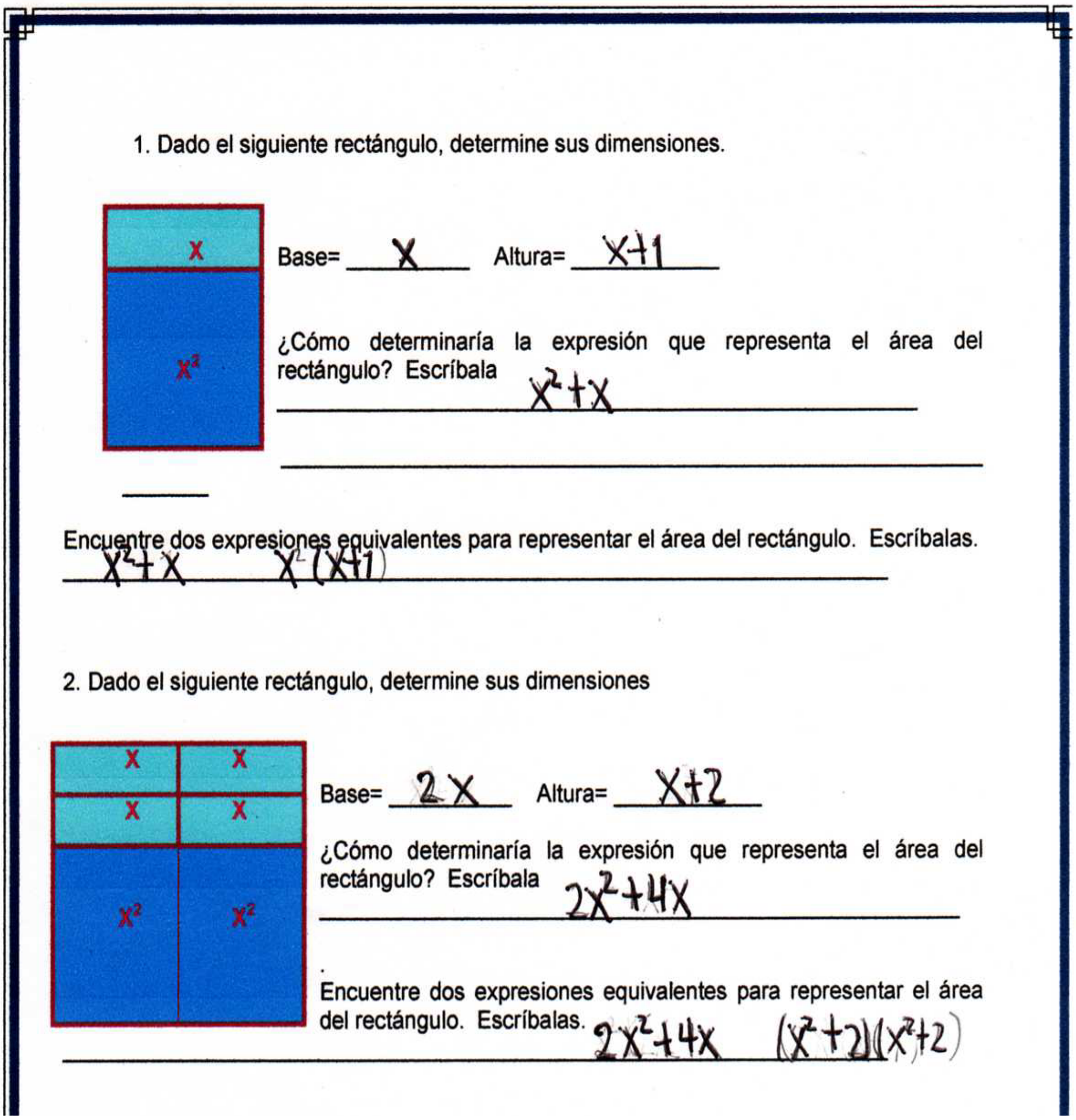
CAMINO A LA FACTORIZACIÓN

Como el propósito de este trabajo es la “reconceptualización de la factorización de polinomios en el grado noveno” en esta parte explicaremos lo que fue el desarrollo de talleres donde se espera que los estudiantes apliquen lo aprendido en la fase inicial que se trató de reconocimiento y manipulación del material para que en esta hagan uso de él en la generalización de los métodos de descomposición factorial.

Como la aplicación de las regletas posibilita a los estudiantes de grado noveno la construcción y la aplicación del concepto de factorización observaremos en este aparte los pasos seguidos para alcanzar los conocimientos acerca de la descomposición polinomial a través de la construcción de figuras geométricas teniendo en cuenta los conceptos de longitud y área.

El concepto de factorización se trabajó dándole un enfoque de figuras geométricas, comparando el área de las figuras con los polinomios representados con las regletas, partiendo de los presaberes que los estudiantes poseían respecto a los conocimientos algebraicos y la factorización de polinomios, para lo cual se aplicó la prueba diagnóstica que nos dejó ver claramente que estaban lejos de los logros esperados en materia del pensamiento variacional por estudiantes de grado noveno y un taller de entrenamiento en la manipulación y aplicación del material didáctico para luego avanzar en el desarrollo del proceso de factorización. Como ellos mismos dijeron: no me acuerdo nada de lo que vimos el año pasado.

„No es difícil aprender álgebra, porque si ponemos atención a la clase de álgebra, será más fácil aprender‰ Es la opinión de Yoheni Tatiana quien es la más jocosa del grupo.



1. Dado el siguiente rectángulo, determine sus dimensiones.

Base= x Altura= $x+1$

¿Cómo determinaría la expresión que representa el área del rectángulo? Escríbala x^2+x

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas. x^2+x $x^2(x+1)$

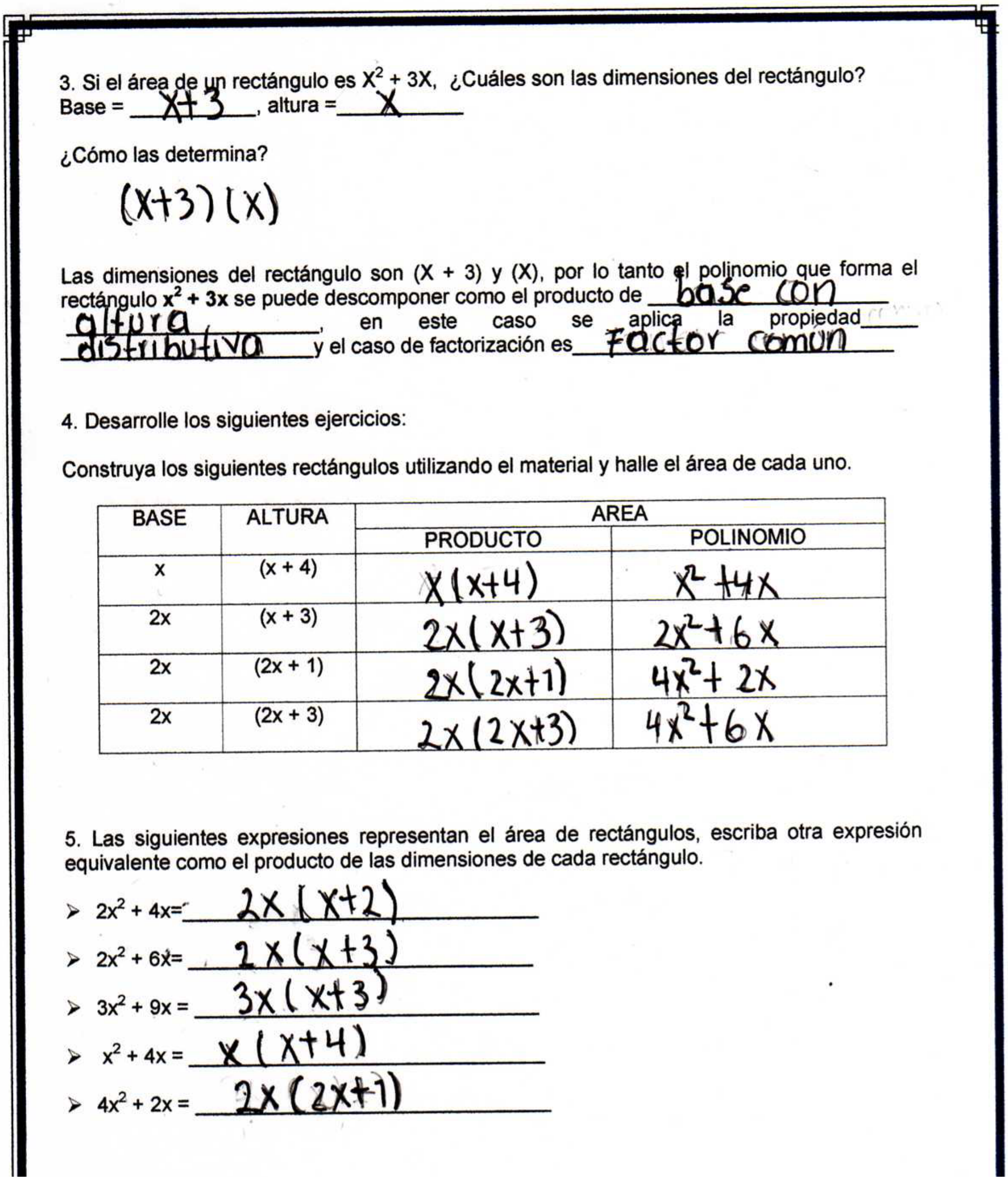
2. Dado el siguiente rectángulo, determine sus dimensiones

Base= $2x$ Altura= $x+2$

¿Cómo determinaría la expresión que representa el área del rectángulo? Escríbala $2x^2+4x$

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas. $2x^2+4x$ $(x^2+2)(x^2+2)$

Aquí Yoheni Tatiana fue muy cuidadosa al desarrollar esta actividad, identificó claramente la longitud de la base y la altura del rectángulo, es decir los conceptos de longitud y área, determinó que el área de la figura la obtiene de multiplicar la base por la altura. Aunque según la pregunta, se esperaba que lo dijera con sus propias palabras, sin embargo, dijo que si el área se divide por uno de sus lados, se obtiene el valor o la longitud del otro lado. Así de esta manera se pretende llevar al estudiante a que identifique la aplicación de factor común en la factorización.



3. Si el área de un rectángulo es $X^2 + 3X$, ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
Base = X+3, altura = X

¿Cómo las determina?

(X+3) (X)

Las dimensiones del rectángulo son (X + 3) y (X), por lo tanto el polinomio que forma el rectángulo $x^2 + 3x$ se puede descomponer como el producto de base con altura, en este caso se aplica la propiedad distributiva y el caso de factorización es factor comun

4. Desarrolle los siguientes ejercicios:

Construya los siguientes rectángulos utilizando el material y halle el área de cada uno.

BASE	ALTURA	AREA	
		PRODUCTO	POLINOMIO
x	(x + 4)	X(X+4)	X^2+4X
2x	(x + 3)	2X(X+3)	$2X^2+6X$
2x	(2x + 1)	2X(2X+1)	$4X^2+2X$
2x	(2x + 3)	2X(2X+3)	$4X^2+6X$

5. Las siguientes expresiones representan el área de rectángulos, escriba otra expresión equivalente como el producto de las dimensiones de cada rectángulo.

- $2x^2 + 4x =$ 2X(X+2)
- $2x^2 + 6x =$ 2X(X+3)
- $3x^2 + 9x =$ 3X(X+3)
- $x^2 + 4x =$ X(X+4)
- $4x^2 + 2x =$ 2X(2X+1)

„No me es difícil aprender álgebra, porque le pongo muchísimo interés y me gusta la matemática y creo que con eso basta para aprender‰ Fue lo que contestó Yadira cuando se le preguntó si se le presenta dificultad para aprender álgebra, claro, ella se está refiriendo a que es fácil cuando se trabaja con las regletas; así como dijo Smith en otra ocasión, “fácil porque es solo acomodar fichitas”.

Estos ejercicios hicieron que los estudiantes entendieran mejor el concepto de factor común, cuándo se puede sacar factor común para descomponer un polinomio, saber que no todos los polinomios se las puede factorizar por este método y que en estos casos se aplica la propiedad distributiva.

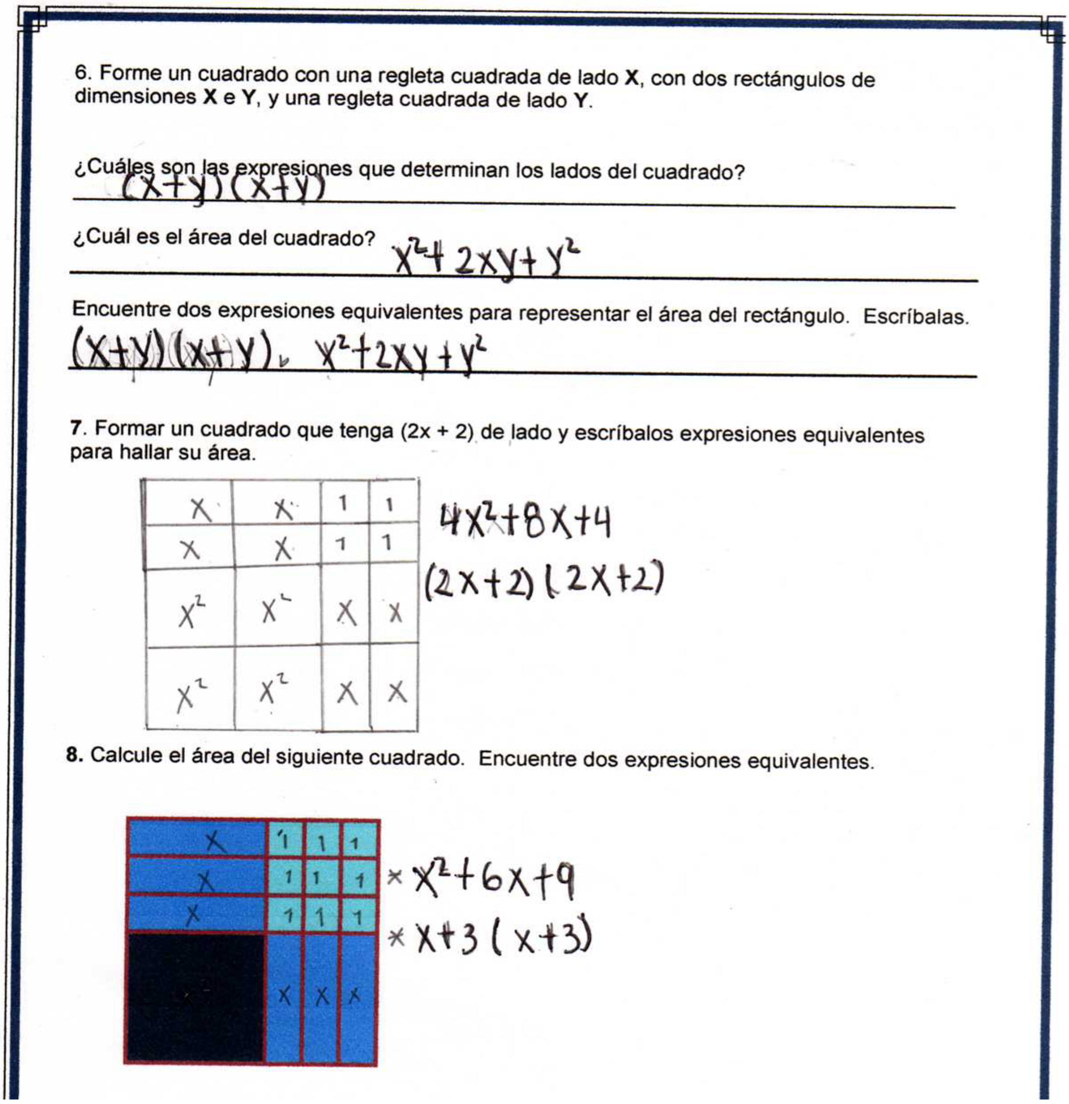
Aquí para desarrollar esta serie de ejercicios, hicieron uso de las regletas, las acomodaban representando el polinomio, para luego observar las longitudes de sus lados, que vienen siendo cada uno de los factores que al multiplicarlos dan como resultado el polinomio dado. Es de anotar que estos ejercicios los desarrollaban primero Yadira y Marcy Daniela, también Wílmer Arley lo hizo a la par de estas dos niñas. En este taller las cosas se facilitaron un poco más que en el taller porque ya tienen habilidad para el manejo del material. En algunas ocasiones debían “darles una manita” a los que se les dificultaban ciertos ejercicios, pero no de mucha ayuda, como era el caso de Marinela, o Smith quienes se quedaban un poco atrás en el desarrollo del taller.

Pero no fue para preocuparse porque ellas entendían, sino que iban un poco más despacio. ¿o no? Hasta este momento se ha notado el progreso de los estudiantes en el manejo del material y los conceptos acerca de los polinomios de manera visual y gráfica.

“Si se pone mucha atención podemos aprender”. Fue la explicación que dio Wílmer Arley

„No es difícil aprender álgebra, porque si uno le pone atención, de lógico que la vamos a entender‰ dijo Marinela.

Comentario: cuando dicen que es fácil si ponen atención, se refieren a que en el trabajo con las regletas les gustó, estuvieron pendientes del trabajo y lo hicieron con esmero y por esto les pareció fácil, porque en otras oportunidades manifestaban que la factorización es difícil, tal vez porque las clases no les era agradables como si lo fue el trabajo con las regletas.



6. Forme un cuadrado con una regleta cuadrada de lado **X**, con dos rectángulos de dimensiones **X** e **Y**, y una regleta cuadrada de lado **Y**.

¿Cuáles son las expresiones que determinan los lados del cuadrado? $(X+Y)(X+Y)$

¿Cuál es el área del cuadrado? $X^2+2XY+Y^2$

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas.
$(X+Y)(X+Y)$, $X^2+2XY+Y^2$

7. Formar un cuadrado que tenga (2x + 2) de lado y escríbalos expresiones equivalentes para hallar su área.

X	X	1	1
X	X	1	1
X^2	X^2	X	X
X^2	X^2	X	X

$4X^2+8X+4$
$(2X+2)(2X+2)$

8. Calcule el área del siguiente cuadrado. Encuentre dos expresiones equivalentes.

X	1	1	1
X	1	1	1
X	1	1	1
	X	X	X

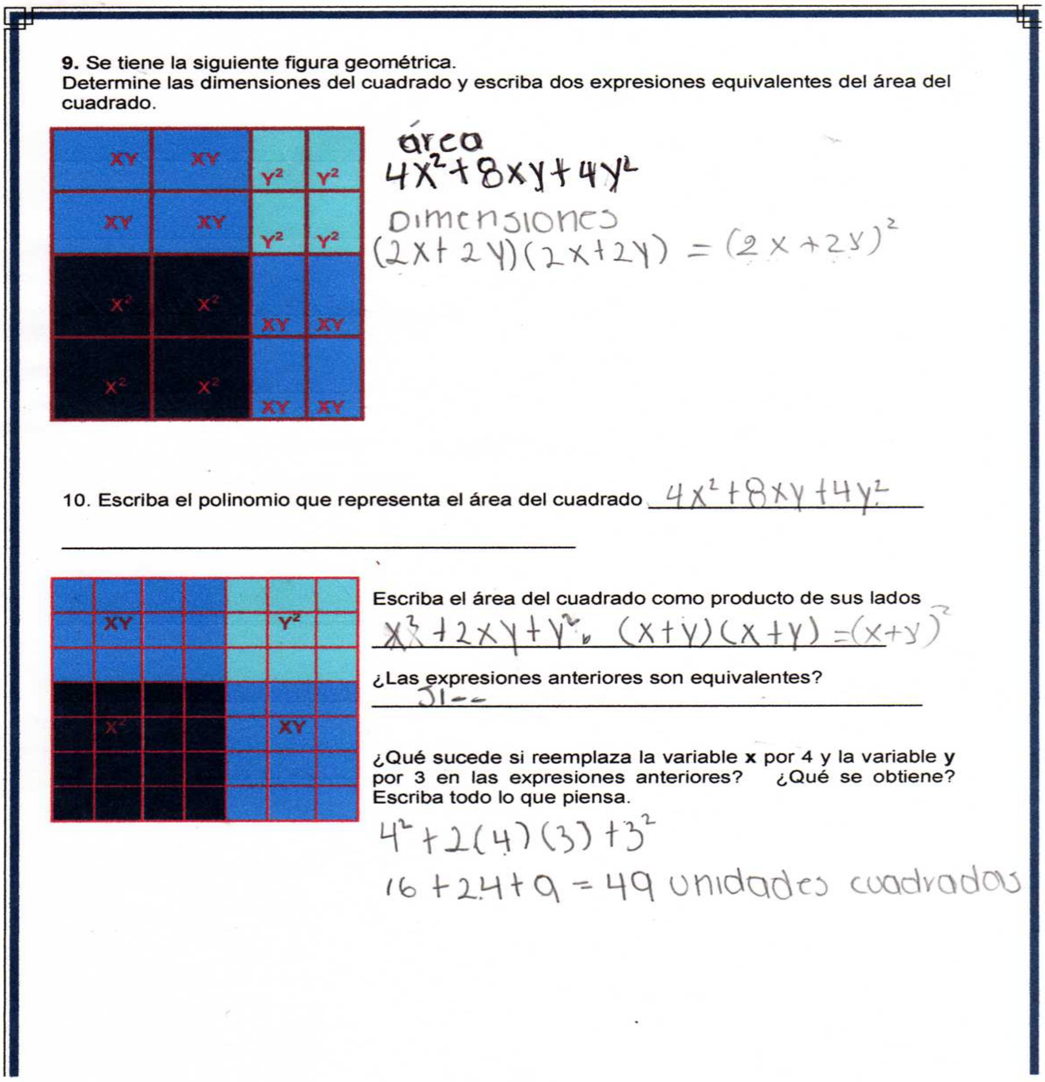
* X^2+6X+9
* $X+3\ (X+3)$

Podemos observar el desarrollo de actividad perteneciente al taller número tres el 11 de julio. Aquí facilitamos el espacio para que los estudiantes se divirtieran organizando figuras geométricas con el material, deduciendo las longitudes de sus lados y calculando el área de las mismas como una forma intuitiva para aplicar la descomposición factorial de polinomios. Se pretende aquí que descompongan polinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$ sin la necesidad de memorizar sino que por el contrario deduzcan y generalicen la forma de factorizar estos polinomios.

Para ampliar la interpretación de los procesos algebraicos como el resultado de formas particulares de comunicar la generalidad desde un contexto dinámico, citamos las palabras de John Mason „la expresión de la generalidad forma la raíz básica del álgebra porque esta les da significado a los símbolos que después hay que manipular. Expresar la generalidad que uno percibe es tanto un placer como un esfuerzo. Prestar atención a las generalizaciones de otras personas es con frecuencia mucho menos interesante. Hacer nuestra propia álgebra es motivante porque es nuestra propia producción. Hacer el álgebra de otros, es generalmente aburrido‰ (199, p. 106). Tomado Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Gobernación de Antioquia.

Lo que Mason expresa hace referencia al importante papel que juega la participación de los estudiantes en los procesos de matematización que posibilitan expresar la generalidad, en la medida que pueden atribuir diferentes significados y pensar los procesos algebraicos desde los conceptos de variación. Entonces podemos interpretar los procesos algebraicos en la escuela como un espacio rico en actividad matemática que convoque a la búsqueda de significados y relaciones, a la reflexión, a la comunicación de las observaciones y a la organización de los aprendizajes;

solo así estaremos incorporando formas de generalizar, desde el aporte de la vivencia personal. (Interpretación e implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas).



9. Se tiene la siguiente figura geométrica.
Determine las dimensiones del cuadrado y escriba dos expresiones equivalentes del área del cuadrado.

área
$4x^2+8xy+4y^2$
dimensiones
$(2x+2y)(2x+2y) = (2x+2y)^2$

10. Escriba el polinomio que representa el área del cuadrado $4x^2+8xy+4y^2$

Escriba el área del cuadrado como producto de sus lados
$x^2+2xy+y^2$, $(x+y)(x+y) = (x+y)^2$

¿Las expresiones anteriores son equivalentes?
Si

¿Qué sucede si reemplaza la variable **x** por 4 y la variable y por 3 en las expresiones anteriores? ¿Qué se obtiene? Escriba todo lo que piensa.

$4^2+2(4)(3)+3^2$
$16+24+9 = 49$ unidades cuadradas

Aquí se enfrentaron a una actividad donde se pretende es que los estudiantes analicen y generalicen la forma de desarrollar la suma de dos números elevados al cuadrado, o mejor se trata de trabajar productos notables $(x + y)^2$, pero sin que se le dé ese rótulo a este tipo de ejercicios para que no tengan que memorizar el método, sino que por el contrario generalicen el proceso sin importar las cantidades con las cuales se está trabajando ya que la operatoria algebraica con las regletas se ejecuta de una manera tangible y los polinomios pueden representarse de diversas maneras a través de una expresión algebraica por medio de un plano bidimensional.

Con estos ejercicios se pretende que los estudiantes aprendan el proceso de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, es decir que desarrollen la suma de dos números elevados al cuadrado como el cuadrado de la primera cantidad, mas o menos el doble del producto de las dos cantidades, mas el cuadrado de la segunda cantidad; igualmente que tengan la capacidad de identificar cuándo un trinomio es cuadrado perfecto y lo factorice como la suma de las dos raíces elevadas al cuadrado, así si se le presenta $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, igualmente, sabiendo que un trinomio tiene raíces enteras el primero y tercer término y que el segundo es el doble producto de las dos raíces, entonces se puede factorizar como la suma de los dos elevados al cuadrado.

Así que las dos expresiones son equivalentes, o sea el proceso inverso al anterior $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. Pretendemos enseñarle al estudiante que los dos procesos son uno solo, únicamente que va en las dos direcciones y no como se hacía antes o como lo proponen los viejos libros de álgebra donde se enseñaban por separados y los estudiantes no identificaban la igualdad existente en los dos casos.

Vemos como en este caso Marinela resuelve acertadamente la suma de dos números elevados al cuadrado y a la vez teniendo el polinomio lo descompone en dos factores sin ninguna complicación.

11. Utilizando el material calcule las dimensiones de un cuadrado que tiene un área de $X^2 + 6X + 9$.

Entonces $x^2 + 6x + 9 =$ $(x+3)$ x $(x+3)$ $= (x+3)^2$

12. Un procedimiento alternativo para encontrar el cuadrado de un número, es separar como la suma de 2 términos y utilizar lo trabajado anteriormente. ¿Cómo lo harías?

- $(105)^2$ descomponiéndolo como $(100 + 5)^2 =$ $(100)^2 + 2(100)(5) + 5^2$
  10000 + 1000 + 25 = 11.025
- $(55)^2$ descomponiéndolo como $(50 + 5)^2 =$ $(50)^2 + 2(50)(5) + 5^2$
  2550 + 500 + 25 = 3075
- $(32)^2$ descomponiéndolo como $(30 + 2)^2 =$ $(30)^2 + 2(30)(2) + 2^2$
  930 + 120 + 4 = 1054

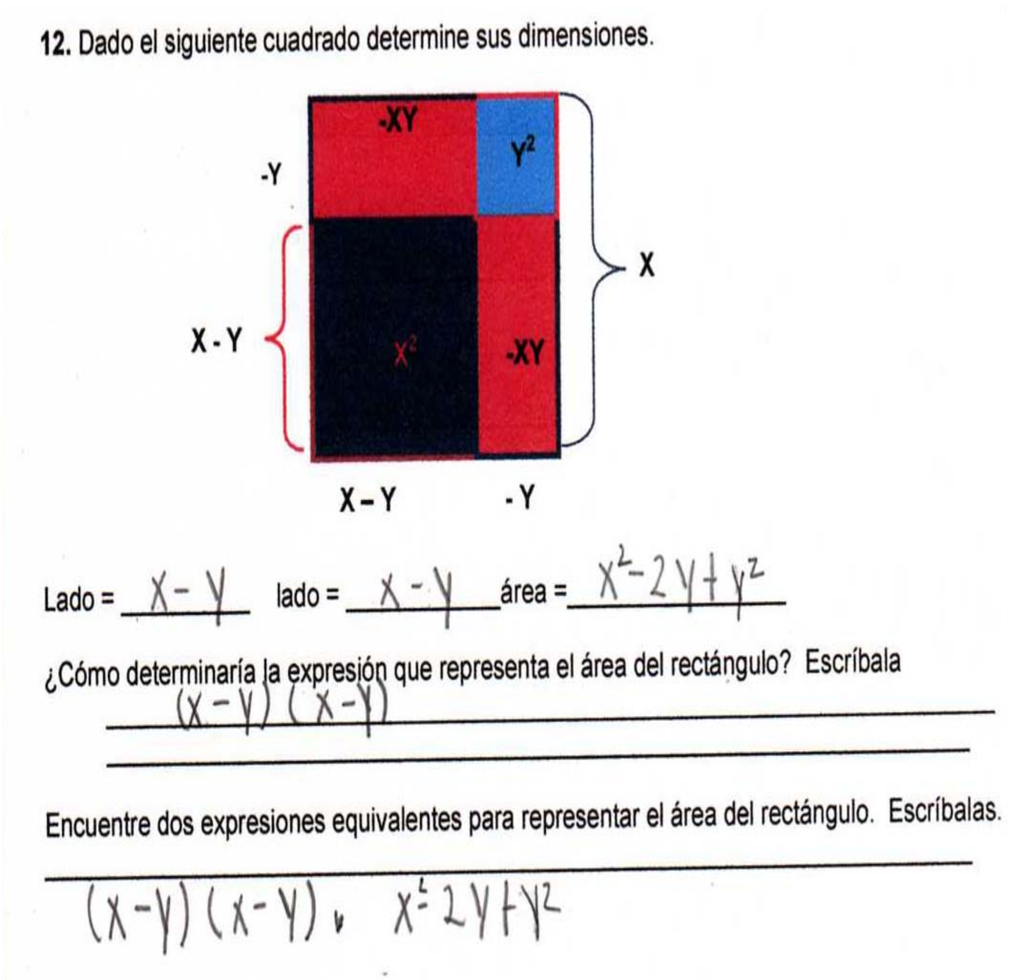
13. Construya los siguientes cuadrados, si su lado es la expresión algebraica dada.

LADO	AREA	AREA COMO POLINOMIO
$(2X + 2)$	$(2X + 2)^2$	$4x^2 + 8x + 4$
$(X + 5)$	$(X + 5)^2$	$x^2 + 10x + 25$
$(X + Y)$	$(X + Y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(2x + Y)$	$(2X + Y)^2$	$4x^2 + 4xy + y^2$
$(2X + 2Y)$	$(2X + 2Y)^2$	$9x^2 + 8xy + 4y^2$

Del taller 3, los ejercicios 11, 12 y 13 se aplicaron con el fin que practiquen lo aprendido en los ejercicios anteriores. Este lo desarrolló Yoheni Tatiana y no lo hizo muy bien, porque cuando elevó 50 y 30 al cuadrado, tuvo una equivocación, pero ya no se refiere a la parte algebraica sino a lo relacionado con la aritmética. Se quiso que aparte de lo ya trabajado anteriormente, se aplicara la regla para elevar un número al cuadrado mediante la descomposición de dos sumandos, es así que no necesariamente debe ser un polinomio sino que a un número cualquiera también se le puede aplicar esta regla. Aquí se tomó por ejemplo $(105)^2$ y se descompuso en 100 + 5, como dijo Wílmer Arley: „Profesor pero también se puede descomponer en 50 + 55", efectivamente si, pero se debe buscar dos números fáciles de multiplicar.

POLINOMIO	LADO	LADO
$X^2 + 4X + 4$	X+2	X+2.
$4X^2 + 12X + 9$	2X+3	2X+3
$X^2 + 2XY + Y^2$	X+Y	X+Y
$X^2 + 6X + 9$	X+3	X+3

Taller 3, según el cuadro anterior, teniendo como guía el polinomio y contando con las regletas, fácilmente encontraron la longitud de sus lados, aunque aquí ya con el desarrollo de varios ejercicios, los estudiantes identificaron y generalizaron que la longitud de los lados del cuadrado es igual a la suma de las raíces cuadradas del primero y el tercer término porque el segundo término es el doble producto de las dos raíces. Si al primer término se le puede extraer la raíz cuadrada al igual que el tercer término, y el segundo es igual al producto de las dos raíces multiplicado por dos, entonces es igual a la suma o diferencia de estas dos elevadas al cuadrado como producto de lado por lado. Así nos lo hizo saber Yadira y seguidamente Marcy Daniela llegó a la misma conclusión y lo explicaron a todo el grupo.



12. Dado el siguiente cuadrado determine sus dimensiones.

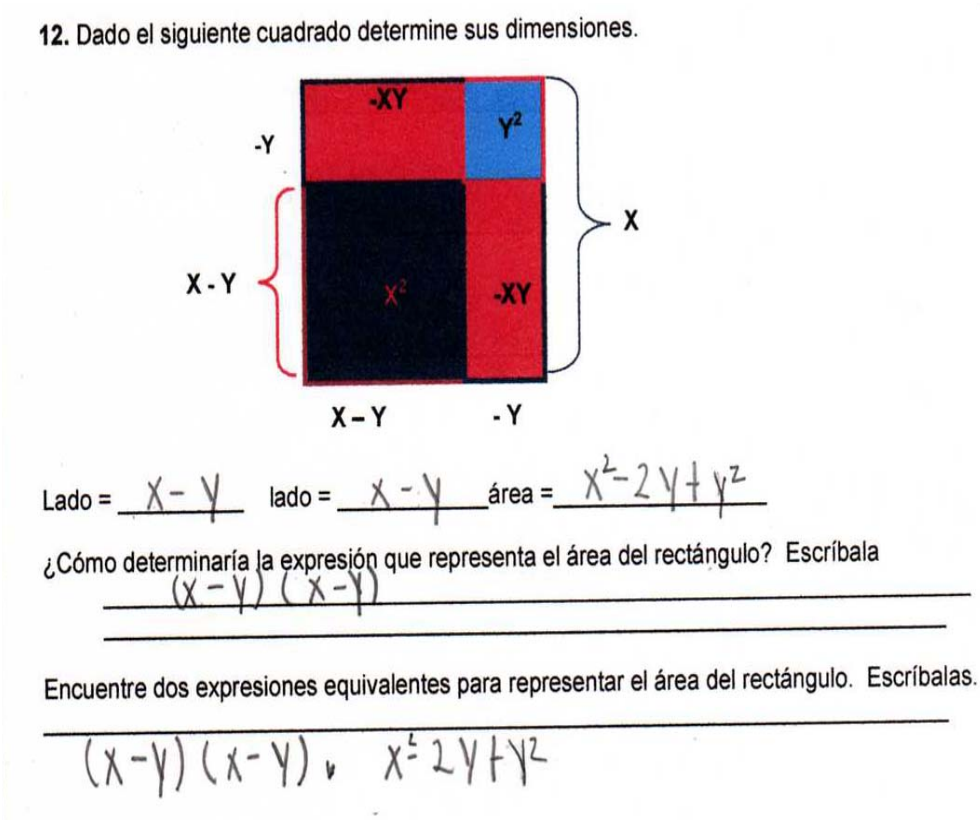
Lado = $X - Y$ lado = $X - Y$ área = $X^2 - 2Y + Y^2$

¿Cómo determinaría la expresión que representa el área del rectángulo? Escríbala

$(X - Y)(X - Y)$

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas.

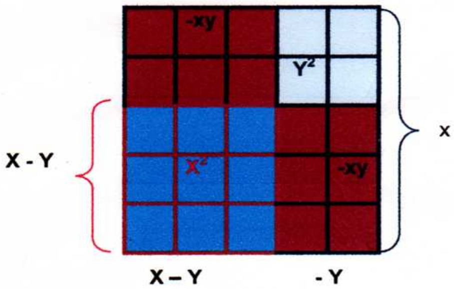
$(X - Y)(X - Y)$, $X^2 - 2Y + Y^2$



Este ejercicio del taller 3. Se quiso trabajar con regletas negativas para que los estudiantes identifiquen el mismo proceso pero con el signo menos, es decir que en vez de sumarle a x, se le debe restar.

Esta fue una de las cosas que se les dificultó a los estudiantes. Cuando se les preguntó ¿cuál fue la dificultad que encontró en el trabajo con el material? no dudaron contestar así: Dijo Yadira: ubicar en forma negativa los polinomios. Para Marcy Daniela: encontrar la manera de ubicar la forma negativa. Esto contestó Wílmer Arley: cuando trabajamos con números negativos, con las regletas rojas.

Aunque los demás estudiantes no dijeron lo mismo, pero si se notó cierta dificultad para trabajar con las regletas que representan valores negativos del polinomio.



Escriba el polinomio que representa el área del cuadrado $x^2-2xy+y^2$

Escriba el área del cuadrado como producto de sus lados

$(x-y)\ (x-y)$

¿Las expresiones anteriores son equivalentes?

Si..

¿Qué sucede si reemplaza la variable **x** por 3 (5) y la variable **y** por 2 en las expresiones anteriores? ¿Qué se obtiene? Escriba todo lo que piensa.

$5^2-2(5)(2)+2^2=$

$25-20+4=9$

13. Con la ayuda del material resuelva los siguientes ejercicios hallando las dimensiones de sus lados y el polinomio que representa.

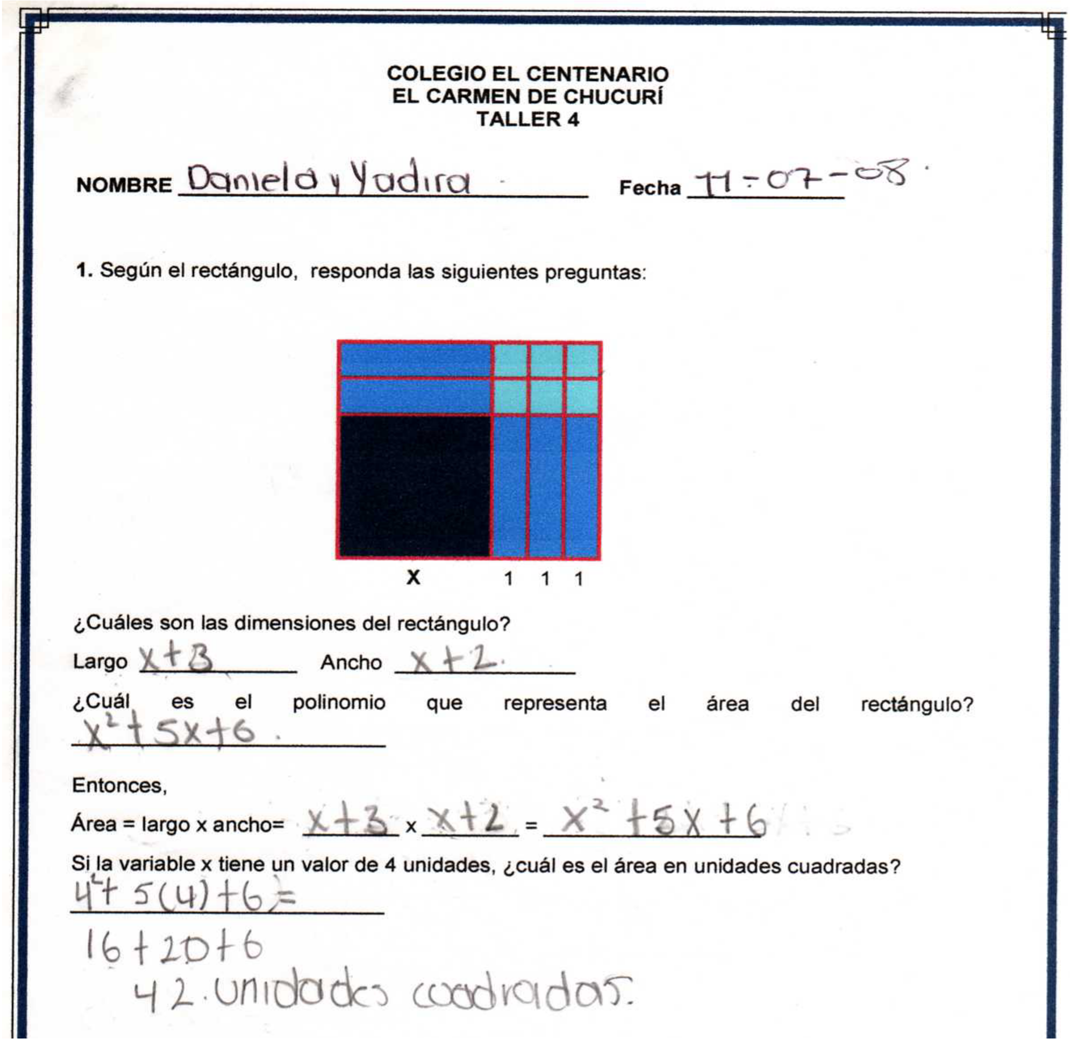
área	lado por lado	polinomio
$(2X-2)^2$	$(2x-2)(2x-2)$	$4x^2-8x+4$
$(X-1)^2$	$(x-1)(x-1)$	x^2-2x+1
$(X-3)^2$	$(x-3)(x-3)$	x^2-6x+9
$(3X-3)^2$	$(3x-3)(3x-3)$	$9x^2-18x+9$

Con esto se terminó el desarrollo del taller tres, en esta parte se trabajaron ejercicios con valores negativos, es decir la diferencia de dos números elevados al cuadrado. Aquí en esta parte se les dificultó mas acomodar las regletas porque en vez de sumar debían restar y como ellos mismos lo manifestaron se les hace mas dificil acomodar las regletas negativas. No tuvieron inconveniente en factorizar porque ya habían generalizado en los casos anteriores, solo que aquí cambiamos el signo mas por el signo menos como manifestó Marinela y Yoheni Tatiana. En este taller se trabajaron los casos de factor común, la suma y la diferencia de dos números elevados al cuadrado y trinomio cuadrado perfecto.

Comentario: aquí cuando los estudiantes dicen que se les dificultó ubicar los polinomios con las regletas negativas, se están refiriendo a los casos de factorización de trinomio cuadrado perfecto, por ejemplo $x^2 - 4x + 4$ que debían encontrar las longitudes de los lados $(x - 2)$ $(x - 2)$, es decir, lo mismo que tener $(x - 2)^2$, la dificultad es que a una longitud x se le debía restar un valor, lo demás no presentó dificultad porque igualmente es extraer las raíces del primero y tercer término y el proceso es el mismo a cuando los valores son todos positivos.

Foto 8. Yadira y Marcy Daniela, desarrollando $(x – 1)^2$, taller 3, julio 11.

Seguimos con el análisis del taller número cuatro donde aplicamos ejercicios que involucran otros casos de descomposición factorial siguiendo la misma metodología de los talleres anteriores.



COLEGIO EL CENTENARIO
EL CARMEN DE CHUCURÍ
TALLER 4

NOMBRE Daniela y Yadira Fecha 11-07-08

1. Según el rectángulo, responda las siguientes preguntas:

X 1 1 1

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo $x+3$ Ancho $x+2$

¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo?

x^2+5x+6

Entonces,

Área = largo x ancho= $x+3$ x $x+2$ = x^2+5x+6

Si la variable x tiene un valor de 4 unidades, ¿cuál es el área en unidades cuadradas?

$4^2+5(4)+6=$

$16+20+6$

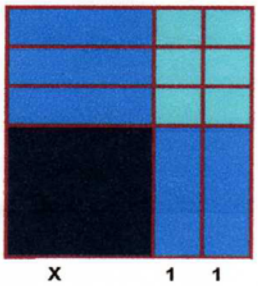
42 unidades cuadradas.

Yadira y Marcy Daniela desarrollaron esta parte del talle cuatro, con mucho talento trabajaron este polinomio de la forma $x^2 + bx + c$, por ahora sin ninguna dificultad, como nos damos cuenta supieron calcular el largo, el ancho y el área del polinomio representado en el rectángulo. Dijo Yadira: Estas figuras no son iguales en las longitudes de sus lados, o sea no son cuadradas como las anteriores, es decir que se deben factorizar diferente estos polinomios.

Se evidencio que la manipulación del material didáctico a través de las regletas de factorización contribuyó a la construcción del concepto de áreas y longitudes de figuras geométricas y su descomposición factorial del polinomio que la representa.

Concluyeron que aunque tiene mucha similitud con los polinomios trabajados en el ejercicio anterior, no son iguales las formas de factorización, en este caso al tercer término no se le puede extraer la raíz cuadrada, concluyó Smith y tampoco el segundo término es el doble producto de las dos raíces, como lo dijo Wílmer Warley.

Aquí concluyeron que para factorizar un polinomio de esta clase se debe descomponer las x de tal forma que al sumarlas deben ser iguales al coeficiente del segundo término, pero que al multiplicarlos serán iguales al valor de las unidades, por ejemplo $(x + 3)(x + 2)$, el primer término es la variable al cuadrado, el segundo término es $3 + 2 = 5x$ y el tercer término $(3)(2)$ y la variable estará elevada a la potencia cero.



¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo $X+3$ Ancho $X+2$

¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo?

x^2+5x+6

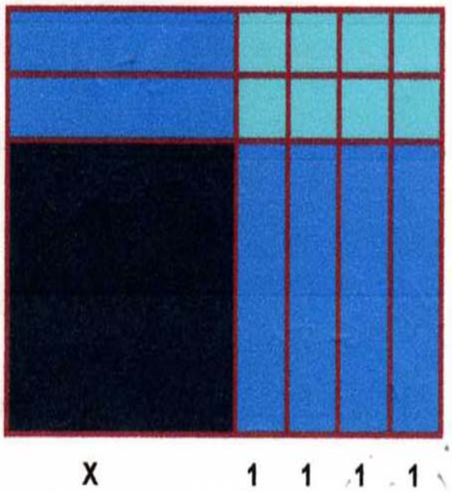
Entonces,

Área = largo x ancho= $X+3$ x $X+2$ = X^2+5X+6

Si la variable x tiene un valor de 3 unidades, ¿cuál es el área en unidades cuadradas?

$3^2+5(3)+6=$ $9+15+6=$

30 unidades cuadradas.



¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo $X+2$ Ancho $X+4$

¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo? X^2+6X+8

Entonces,

Área = largo x ancho= $X+2$ x $X+4$ = $X^2+4X+2X+8$

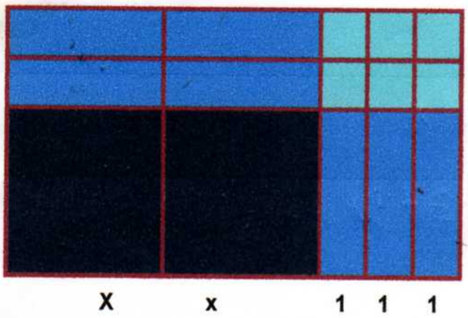
Si la variable x tiene un valor de 4 unidades, ¿cuál es el área en unidades cuadradas?

$4^2+4(4)+2(4)+8$

$16+16+8+8=$

48 unidades cuadradas

Aquí se evidenció que tienen la capacidad y destreza para reconocer el área de una figura geométrica está representada en un polinomio de segundo grado, además calculan el área en unidades cuadradas sabiendo el valor de la variable x, previamente cuando se les presentó el material se explicó que la regleta más pequeña cabe un número exacto de veces en la de mayor área. Eso hizo en este ejercicio para calcular el área del rectángulo.



¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo $X+2$ Ancho $2X+3$

¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo $2X^2+7X+6$

Entonces,

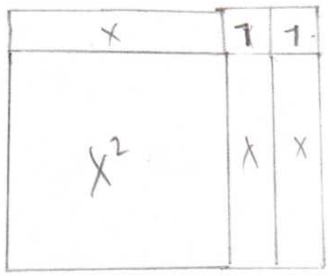
Área = largo x ancho= $X+2$ x $2X+3$ = $2X^2+7X+6$

Si la variable x tiene un valor de 3 unidades, ¿cuál es el área en unidades cuadradas?

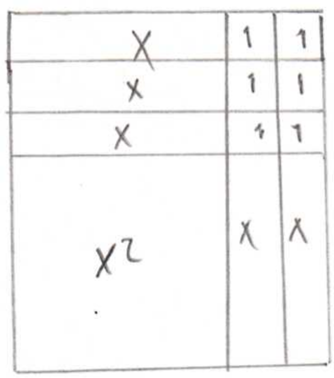
$3^2+7(3)+6=9+21+6=36$

2. Los siguientes polinomios representan el área de rectángulos, graficarlo y asignar sus dimensiones.

- $X^2 + 3x + 2 = (X+2)(X+1)$.



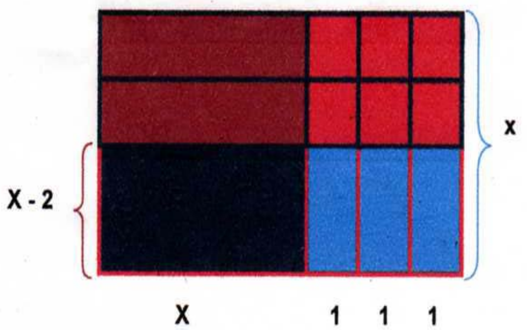
- $X^2 + 5x + 6$ $(X+2)(X+3)$



Taller número cuatro, julio 14, aquí se nota la habilidad para jugar con las regletas y factorizar polinomios, como lo hizo Smith que teniendo la figura escribe el polinomio que representa, también el proceso inverso, si tiene el polinomio hace la gráfica y además lo descompone como el producto de dos factores.

Sin dudas van progresando en el proceso de factorización con la utilización de las regletas.

3. Según el rectángulo, responda las siguientes preguntas: teniendo en cuenta que las fichas azules son positivas y las fichas rojas son negativas.



Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo X-2 Ancho X+3

¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo X-2+ X+3-6

Entonces,

Área = largo x ancho= X-2 x X+3 = $X^2+3X-2X-6$

Si la variable x tiene un valor de 4 unidades, ¿cuál es el área en unidades cuadradas?

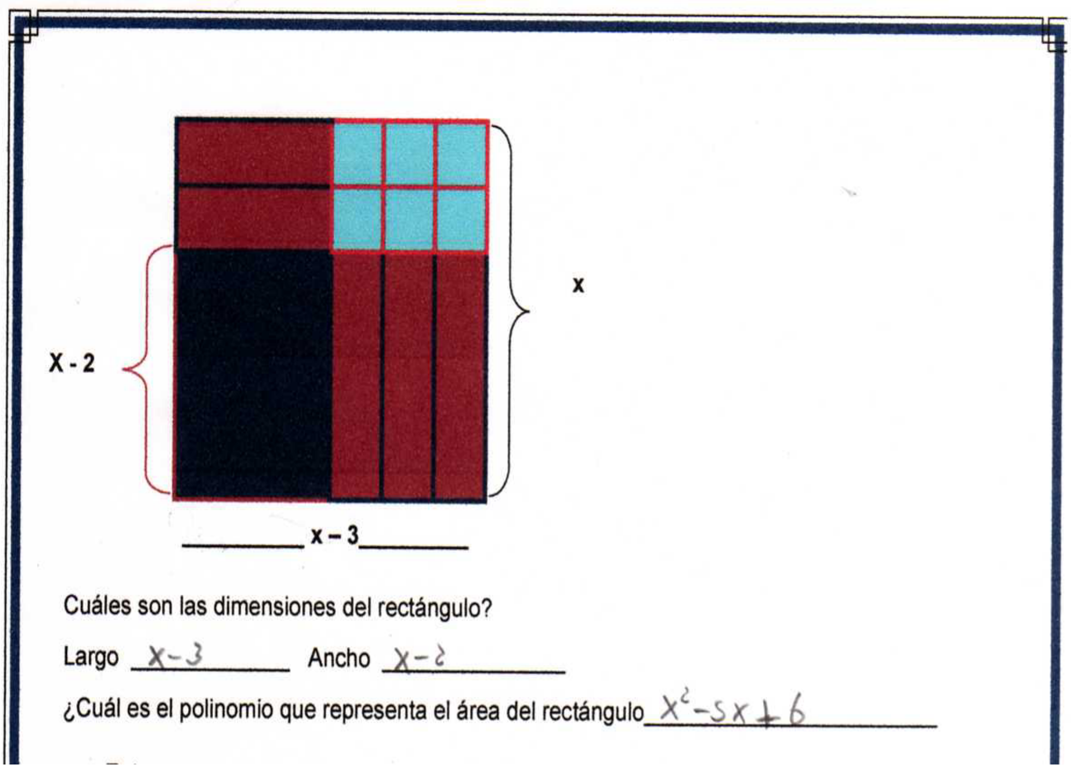
$4^2+3(4)-2(4)-6$

16+12-8-6

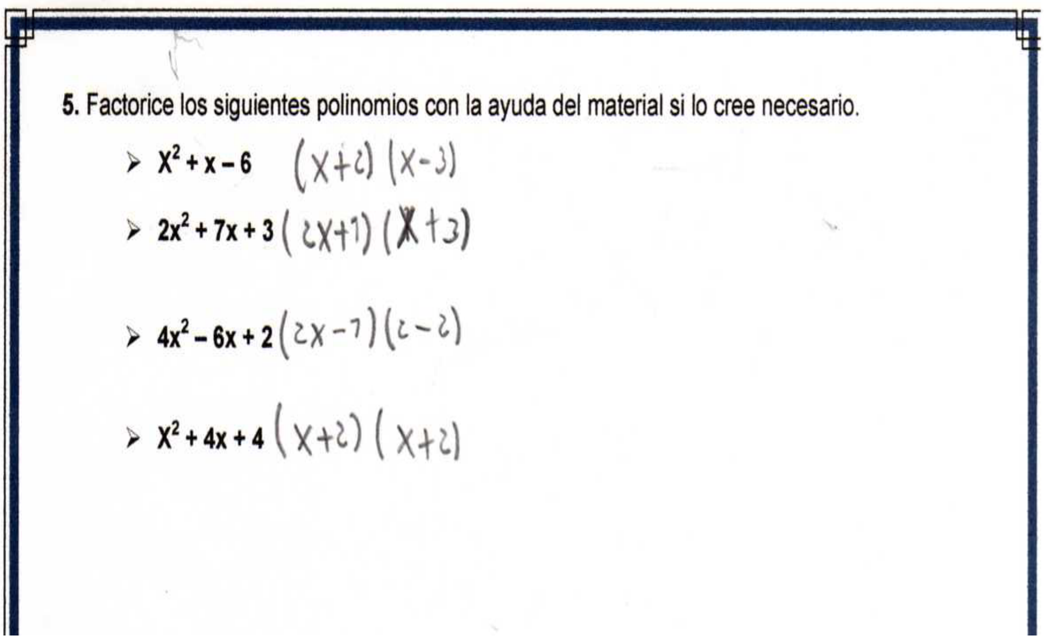
28-14

14

Julio 14, taller 4, aquí se trabajó la diferencia de cuadrados y como los estudiantes manifestaron, lo que se les dificultó un poco fue aprender a trabajar con las regletas negativas, en este ejercicio tuvieron un pequeño error para escribir el área del polinomio dado. Deberían escribirlo así según la figura dada $x^2 + 3x \cdot 2x \cdot 6 = x^2 + x - 6$ pero se analiza la pequeña dificultad, de todas maneras desarrollaron el ejercicio como lo demostraron Marinela y Yoheni Tatiana. Dedujeron la forma de calcular el área de un cuadrado al cual se le aumenta al largo y se le disminuye al ancho, pero que no es trinomio cuadrado perfecto.



Aquí Wílmer Arley lo hizo bien, o mejor, lo hizo excelente, y también los otros colaboradores nuestros lo hicieron sin equivocarse, esto significa el progreso que van teniendo en el manejo de las regletas y la comprensión y generalización de los casos de factorización de polinomios de grado dos.



5. Factorice los siguientes polinomios con la ayuda del material si lo cree necesario.

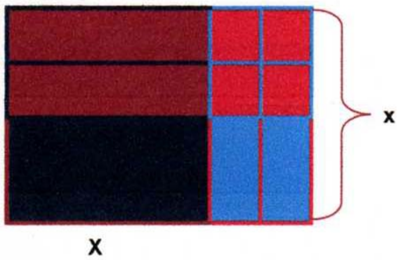
- $X^2 + x - 6$ $(X+2)(X-3)$
- $2x^2 + 7x + 3$ $(2X+1)(X+3)$
- $4x^2 - 6x + 2$ $(2X-1)(2-2)$
- $X^2 + 4x + 4$ $(X+2)(X+2)$

Aquí en este aparte del taller 4, se quiso que los estudiantes factorizaran polinomios aplicando lo aprendido con las regletas. Como se observa la descomposición factorial fue correcta y aplicaron muy bien los conceptos aprendidos. En el punto 5 se trató de factorizar polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, los pasos que siguieron fue el de abrir dos paréntesis, en cada uno escribir la raíz cuadrada del primer término, cuando el tercer término es negativo se escribe el signo menos y el signo mas, porque el producto de las regletas rojas por la azules producen unidades negativas y luego se deben escribir el número de regletas positivas y las regletas negativas según corresponda en cada paréntesis.

Por ejemplo $x^2 + x - 6$, para el segundo término se sabe que la suma entre las regletas azules y rojas debe ser uno (podría ser 3 y 4, 4 y 5, 3 y 2), y que el producto sea igual a -6, por lo que se descartan los dos primeros. Tres regletas rojas y dos regletas azules suman x y (3) (-2) = - 6.

DIFERENCIA DE CUADRADOS

.6. Calcular el área de un rectángulo de base (x + 2) y altura (x – 2)



Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Largo $x+2$ Ancho $x-2$

¿Cuál es el polinomio que representa el área del rectángulo $x^2+2x-2x-4$ Entonces,

Área = largo x ancho= $x+2$ x $x-2$ = $x^2+2x-2x-4$

Si la variable x tiene un valor de 5 unidades, ¿cuál es el área en unidades cuadradas?

$5^2-4=21$ unidades cuadradas

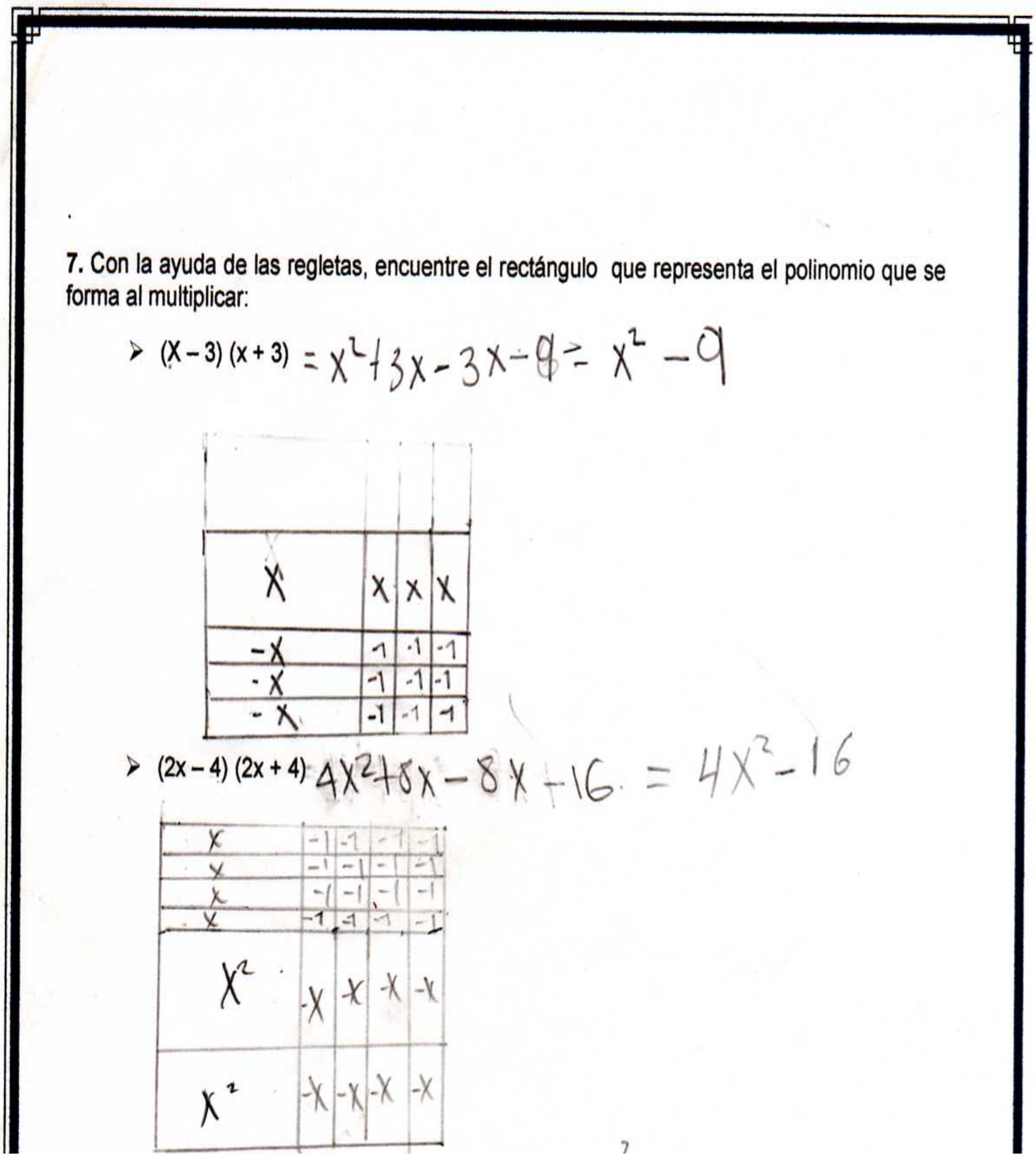
En el Taller 4, trabajamos diferencia de cuadrados aplicando las regletas y utilizaron regletas de color rojo o negativas. Esto “según ellos” fue lo que se les dificultó, sobre todo acomodar las regletas. Aquí no tuvo dificultad Smith para hallar las longitudes de los lados del rectángulo y escribir el polinomio que representa el área.

Recordamos lo que opinaron los estudiantes acerca de las dificultades que encontraron en el trabajo con las regletas.

Dijo Yadira: ubicar en forma negativa los polinomios. Para Marcy Daniela: encontrar la manera de ubicar la forma negativa. Wílmer Arley: cuando trabajamos con números negativos, con las regletas rojas.

Foto 9. Aquí los estudiantes ubican la regletas para representar el polinomio de longitudes

Aquí los estudiantes ubican la regletas para representar el polinomio de longitudes $(x - 2)(x - 2)$ y hallaron el área igual a $x^2 - 4x + 4$. Aunque manifestaron tener dificultades en el trabajo con regletas negativas, evidenciamos que sí fueron capaces y adquirieron la destreza para hacerlo.



7. Con la ayuda de las regletas, encuentre el rectángulo que representa el polinomio que se forma al multiplicar:

- $(X-3)(x+3) = x^2+3x-3x-9 = x^2-9$

- $(2x-4)(2x+4)\ 4x^2+8x-8x+16 = 4x^2-16$

Taller 4, julio 14, aquí Yadira con la ayuda del material trabaja la diferencia de cuadrados, haciéndolo en las dos direcciones y tratando de generalizar la fórmula para la descomposición factorial en polinomios de este tipo. Se observa que no armó bien la figura, aunque numéricamente lo hizo bien.

Fue así como en este taller número cuatro se trabajaron los casos de factorización correspondientes a polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, también cuando el término bx es negativo y además se trabajó la factorización de diferencia de cuadrados.

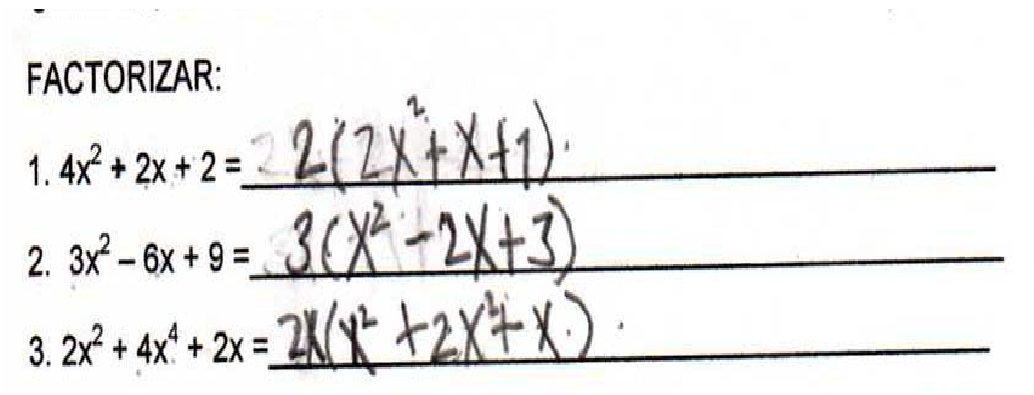
Foto 10. Aquí observamos a Yadira y Marcy Daniela en el desarrollo del taller número cuatro.

APLICANDO LOS CONCEPTOS DE FACTORIZACIÓN

Después de haber trabajado y construido los conceptos de los diferentes casos de factorización de polinomios de segundo grado a través de las regletas, nos proponemos analizar lo aprendido por los estudiantes que nos colaboraron en este proyecto, es claro y podemos decir con certeza que estas representaciones de polinomios que se hicieron con el material didáctico ayudaron en gran manera para aclarar los conceptos de variable y coeficiente en una expresión algebraica y para tener en cuenta los métodos de descomposición en dos o mas factores generalizando y modelando de esta manera el aprendizaje del álgebra, ya que no es exclusiva de los grados octavo y noveno sino que debe darse desde los primeros años escolares como lo dice el documento „Razonamiento Algebraico y du Didáctica Para Maestros‰ „Una visión tradicional y limitada del álgebra (que se ha denominado aritmética generalizada), es considerada simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados. Es necesario, sin embargo, que los profesores tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas‰Juan D Godino (1885).

Fue así que se aplicó un último taller encaminado a conocer el aprendizaje elaborado por los estudiantes durante el proceso de construcción y generalización de los métodos de factorización en el desarrollo de los talleres anteriores con el fin de estudiar y medir los logros alcanzados por el grupo colaborador y a la vez medir la eficacia y el alcance que tuvo la estrategia pedagógica y también para reformular los métodos aplicados por los profesores para que sean mas efectivos en el momento de enseñar la matemática en caso de que vea falencia en sus estudiantes, de hecho la importancia de aplicar algún material, sabiendo que si en la interacción de enseñanza aprendizaje de la matemática se parte de una actividad real vivida por los estudiantes y la manipulación de material concreto, el aprendizaje será mas significativo, como lo planteado en los Lineamientos Curriculares (1998, p, 122) „el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en la que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y descubrible en los problemas planteados‰

Es evidente la importancia del trabajo realizado porque este grupo de estudiantes colaboradores sobresalieron en el aprendizaje de los conceptos algebraicos porque así lo demostraron en el desarrollo de temas posteriores donde el grado noveno debía aplicar lo relacionado con estos procesos del álgebra que se aplican a partir del grado octavo.


FACTORIZAR:

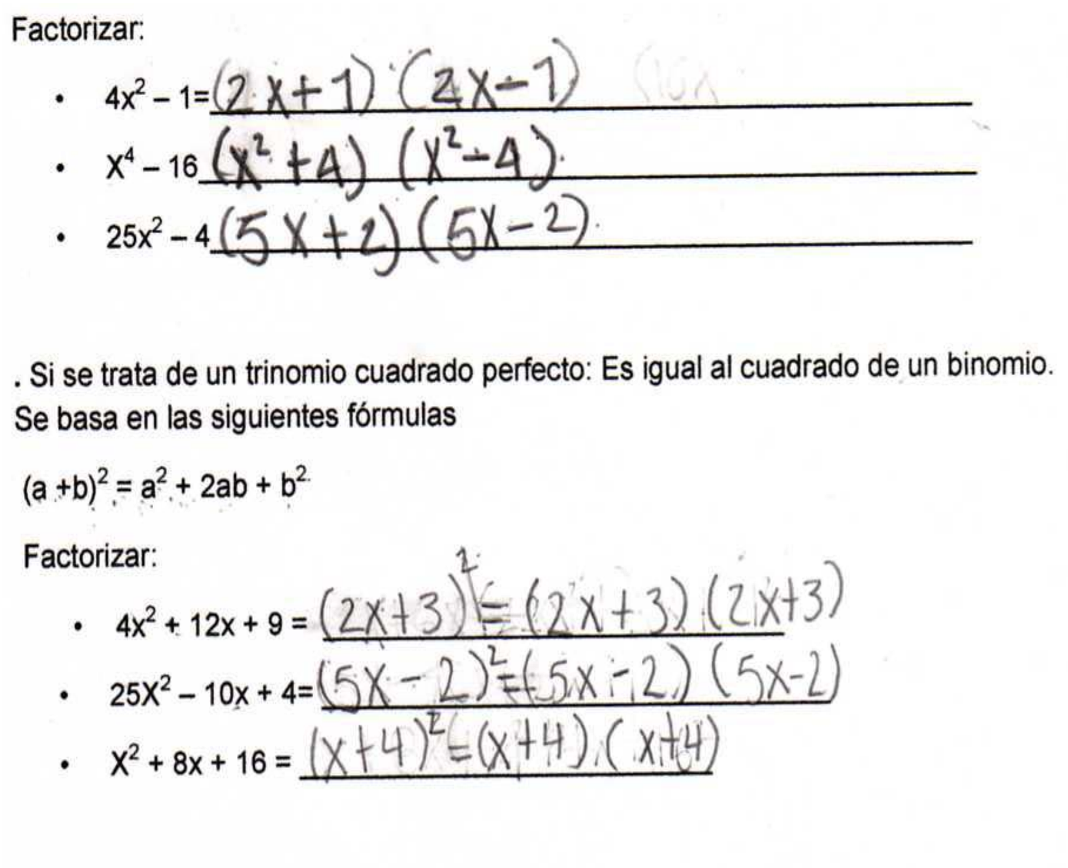
1. $4x^2 + 2x + 2 =$ $2(2x^2 + x + 1)$

2. $3x^2 - 6x + 9 =$ $3(x^2 - 2x + 3)$

3. $2x^2 + 4x^4 + 2x =$ $2x(x^2 + 2x^2 + x)$

Taller 5, agosto 13. Aquí se les pidió que aplicaran la propiedad distributiva para factorizar estos polinomios sacando el factor común en cada uno. Este corresponde a Yadira y Marcy Daniela y lo hicieron muy bien.

Se hizo la sugerencia que en lo posible no utilizaran las regletas y evidentemente así lo hicieron. Muy Bien por Yadira y Marcy.


Factorizar:

- $4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$
- $x^4 - 16\ (x^2+4)(x^2-4)$
- $25x^2 - 4\ (5x+2)(5x-2)$

. Si se trata de un trinomio cuadrado perfecto: Es igual al cuadrado de un binomio. Se basa en las siguientes fórmulas

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Factorizar:

- $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$
- $25X^2 - 10x + 4 = (5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2)$
- $X^2 + 8x + 16 = (x+4)^2 = (x+4)(x+4)$

Según Wílmer Arley y Yoheni Tatiana, en el primero factorizaron una diferencia de cuadrados perfectos, en el trabajo de los talleres ya habían generalizado la fórmula para factorizar esta clase de polinomios, sabiendo que $x^2 \cdot y^2 = (x + y)(x \cdot y) = x^2 \cdot xy + \cancel{xy} \cdot \cancel{y}^2 = x^2 \cdot y^2$. Aprendieron a reconocer que si es una diferencia que al primero y segundo término se les puede extraer la raíz cuadrada, entonces es igual a la suma por la diferencia de sus raíces.

En el segundo caso reconocieron que se trata de un trinomio cuadrado perfecto y aplicaron correctamente la factorización de estos polinomios.

Igualmente aquí aplicaron una de las propiedades de la potenciación tan importante en el desarrollo de los procesos matemáticos $(a + b)^2 = (a + b)(a - b)$ ó $(a - b)^2$ igual a $(a - b)(a - b)$. Muy bien por Wílmer y Yoheni.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Resuelva los siguientes problemas que requieren de la factorización

1. La diferencia entre el cuadrado de un número entero positivo y su duplo es 15. Calcular el número.

X= el número
2X = el duplo
$X^2-2X = 15$
$X^2-2X-15=0$
$(X-5)(X+3)=0$
$X-5=0$ ó $X+3=0$ = $X=5$ $X=-3$

2. El producto de dos números enteros positivos consecutivos es 600. Hallar los números.

X= el número
X+1 = consecutivo
$X(X+1)=600$
$X^2+X=600$
$X^2+X-600=0$
$(X+25)(X-24)=0$
$X+25=0$ ó $X-24=0$
$X=-25$ ó $X=24$

$X=24$

3. Encontrar la base y la altura de un triángulo cuya área mide 24 metros cuadrados y su altura mide 2 metros más que la base.

$A=\frac{X(X+2)}{2}$

$\frac{X(X+2)}{2}$

$X(X+2)=24*2$

$X^2+2X-48=0$
$(X+8)(X-6)=0$
$X+8=0$ ó $X-6=0$
$X=-8$ $X=6$

la base = 6 m
la altura es 8 m

Bien por Marinela y Smith, quienes desarrollaron esta parte del taller, al igual que los demás integrantes del grupo de colaboradores lo hicieron bien. Plantearon muy bien las ecuaciones, aplicaron los conceptos algebraicos no solo de factorización, sino la multiplicación, suma y diferencia de expresiones algebraicas.

Ahí podemos apreciar la importancia de la aplicación del material didáctico en la enseñanza de la matemática, ya que como lo explica en un articulo de La caja de Polinomios Soto, Mosquera y Gómez (P, 83). „Se debe animar al docente a buscar soportes históricos que contribuyan al desarrollo de nuevas alternativas y estrategias didácticas basadas en lo lúdico. Es importante destacar que el objeto primordial de la enseñanza básica no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que podría serle útil como ciudadano. Mas bien el objetivo, consiste en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas y físicas de modo armonioso. Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen actividades y actitudes comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados%Escuela Regional de Matemáticas- Universidad del Valle.

Cabe anotar que con el grado noveno y siguiendo con el desarrollo del plan de estudios, se está trabajando sobre la aplicación de la factorización en la resolución de problemas, esto ayudó a los estudiantes en la interpretación y desarrollo del taller 5, esto dejó ver que los seis colaboradores fueron mas eficaces en el planteamiento y desarrollo de los problemas. Catalogamos como positivo el trabajo investigativo desarrollado con los seis estudiantes.

¿QUÉ OPINAN MIS COLABORADORES?

Se hizo una encuesta para saber lo que piensan los estudiantes acerca del trabajo desarrollado mediante la aplicación de las regletas. Las preguntas fueron las siguientes:

1. ¿Qué es para usted factorizar un polinomio?

Para Yadira: es dividir un número en varios factores.

Dice Wilmer Arley: factorizar es dividir un número en factores.

Según Marinela: es descomponer diferentes polinomios en factores.

Para Smith: es saber descomponer uno o más polinomios.

Dijo Yoheni Tatiana: es descomponer en dos o más factores a los polinomios.

Dice Marcy Daniela: es dividir un número en factores.

Comentario: se debe tener en cuenta que los estudiantes de este grado son poco espontáneos y a las preguntas que se les haga es muy poco lo que responden.

2. ¿Le gustó el trabajo con las regletas? ¿Por qué?

Según Yadira: sí me gustó, porque aprendí mucho, me sentí bien aplicando la factorización con regletas porque es una forma fácil y sencilla de aprender y aplicar la factorización.

Según Marcy Daniela: sí, porque aprendemos más rápido a desarrollar los ejercicios, y al tener las regletas le ponemos más atención a la explicación.

Según Wilmer Arley: sí, porque creo que puede aprender un poco más sobre factorización y entiende uno más rápido.

Según Marinela: si, porque uno no se confunde y entiende mejor el ejercicio.

Para Smith: sí y mucho porque puede uno despejar dudas que tenía y porque el profesor Alirio es un buen maestro y nos ayuda cuando no entendemos.

Yoheni Tatiana dijo: sí porque el profesor Alirio nos sabe explicar y me parece mas fácil factorizar con las regletas.

3. ¿Cuál fue la dificultad que encontró en el trabajo con el material?

Dijo Yadira: ubicar en forma negativa los polinomios.

Para Marcy Daniela: encontrar la manera de ubicar la forma negativa.

Esto contestó Wilmer Arley: cuando trabajamos con números negativos, con las regletas rojas.

Marinela dijo: ninguna, porque ese material es muy importante utilizarlo para entender mejor los ejercicios.

Smith dijo: ninguna porque las regletas nos ayudó mucho.

Yoheni Tatiana contestó: no tuve dificultades, todo lo entendí muy bien.

Comentario: aquí cuando los estudiantes dicen que se les dificultó ubicar los polinomios con las regletas negativas, se están refiriendo a los casos de factorización de diferencia de cuadrados por ejemplo $x^2 - 4$ que debían encontrar las longitudes de los lados $(x - 2)$ $(x - 2)$ o también en el caso de polinomios como $x^2 + 2x - 8$, que debían factorizarlo $(x + 4)$ $(x - 2)$, el tener que restarle a x dos unidades, por ejemplo fue donde encontraron esa dificultad.

Aunque algunos dicen no haber encontrado ninguna dificultad, pensamos que sí, en la parte negativa debieron hacer ciertas consultas para ubicar las regletas. Cuando dicen que no se les dificultó es porque hacen la comparación entre factorizar con las regletas y factorizar por el método tradicional, pues por el primero les fue muy fácil y las preguntas eran mínimas, mientras que por el otro método siempre se les debe dar explicaciones en cada caso y en cada ejercicio.

4. ¿Cree que es difícil aprender álgebra?

Para Yoheni Tatiana: no, porque si ponemos atención a la clase de álgebra, será mas fácil aprender.

Dijo Yadira: no, porque le pongo muchísimo interés y me gusta la matemática y creo que con eso basta para aprender.

Marcy Daniela opina: no, porque es solo cuestión de ponerle cuidado y escuchar la explicación y ponerle interés a la clase.

Wilmer Arley: no, si se pone mucha atención podemos aprender.

Marinela opina: no, porque si uno le pone atención, de lógico que la vamos a entender.

Smith dice: no, porque si yo pongo atención a la clase puedo entender con facilidad.

Comentario: cuando dicen que es fácil si ponen atención, se refieren a que en el trabajo con las regletas les gustó, estuvieron pendientes del trabajo y lo hicieron con esmero y por esto les pareció fácil, porque en otras oportunidades manifestaban que la factorización es difícil, tal vez porque las clases no les era agradables como si lo fue el trabajo con las regletas.

5. ¿Cuál de los métodos para aprender a factorizar polinomios le parece que sea mas eficaz? ¿Por qué?

Según Smith: el de las regletas porque es mas fácil, porque armando las fichitas al final podemos saber el resultado..

Yoheni Tatiana dice: con las regletas, porque nos ayudamos gráficamente con ellas.

Según Marcy Daniela: las regletas porque así es mas fácil de aprender y es mas explicativo factorizar un polinomio.

Para Yadira: las regletas porque es mas entendible y mas fácil para desarrollar un polinomio.

Marinela: las regletas porque es un método importante que nos permite despejar la mente y tener lógica. Podemos entender mejor el álgebra.

Según Wilmer Arley: con las regletas porque es mas fácil entender y aprender.

6. ¿cómo cree que se debe enseñar el álgebra?

Didácticamente es lo que responde Wilmer Arley

Con material didáctico, responde Marcy Daniela

Con las regletas porque así los chicos menos se distraen y podrán al menos aprender más fácil, es la opinión de Smith.

Con regleta, porque nos entendemos mas con ellas, es lo que responde Yoheni Tatiana.

Con material didáctico, es la repuesta de Yadira.

5. ¿Cuál de los métodos para aprender a factorizar polinomios le parece que sea mas eficaz? ¿Por qué?

Según Smith: el de las regletas porque es mas fácil, porque armando las fichitas al final podemos saber el resultado..

Yoheni Tatiana dice: con las regletas, porque nos ayudamos gráficamente con ellas.

Según Marcy Daniela: las regletas porque así es mas fácil de aprender y es mas explicativo factorizar un polinomio.

Para Yadira: las regletas porque es mas entendible y mas fácil para desarrollar un polinomio.

Marinela: las regletas porque es un método importante que nos permite despejar la mente y tener lógica. Podemos entender mejor el álgebra.

Según Wilmer Arley: con las regletas porque es mas fácil entender y aprender.

6. ¿cómo cree que se debe enseñar el álgebra?

Didácticamente es lo que responde Wilmer Arley

Con material didáctico, responde Marcy Daniela

Con las regletas porque así los chicos menos se distraen y podrán al menos aprender más fácil, es la opinión de Smith.

Con regleta, porque nos entendemos más con ellas, es lo que responde Yoheni Tatiana.

Con material didáctico, es la repuesta de Yadira.

Con el material de trabajo dice Marinela que se debe enseñar el álgebra.

7. ¿Para usted tiene importancia aprender a factorizar polinomios? ¿por qué?

Marinela dice: si es muy importante porque si más adelante necesita trabajar en empresas por decir, y no sabe factorizar, entonces van a haber problemas.

Según Wilmer Arley: si, porque podemos utilizar esto mas adelante, como en el trabajo.

Para Marcy Daniela: si, porque lo voy a necesitar mas adelante, cuando esté en la universidad o para algún trabajo.

Según Smith: si, porque cuando vayamos a hacer una carrera o a trabajar en algún lado, donde nos requiera saber factorizar.

Yoheni Tatiana dice: si, porque en nuestro futuro, algunos vamos a necesitar salir de un problema y lo solucionamos con la factorización.

Opina Yadira: si, porque me gusta, y aprender a factorizar es algo indispensable para mi futuro.

Estas son las respuestas que dieron los seis estudiantes a las preguntas que se les hizo, se debe tener en cuenta que ellos responden de acuerdo a la capacidad que tienen y de acuerdo al entendimiento algebraico que ellos como cualquier otro estudiante de noveno grado tienen hasta ahora, las respuestas son un poco limitadas debido a que aún no tienen una mente abierta al la matemática y menos al razonamiento algebraico que hasta aquí son temas complicados. Se prefirió que las preguntas fueran escritas y no orales con el fin de cohibirlos menos y que tengan mayor libertad para expresarse, teniendo en cuenta que sus mentes todavía no están para pensar tanto en el aprendizaje de la matemática, sino en otras ocupaciones de otro tipo menos en la parte algebraica que es lo que menos les interesa a esta edad.

LO QUE PODEMOS CONCLUIR

Se pudo observar durante el desarrollo de este trabajo que el tema de factorización es bastante complejo cuando se trata de estudiantes de educación básica, este trabajo es una mínima parte de lo tanto que podemos hacer como docentes del área matemáticas para que nuestros estudiantes desarrollen la capacidad de pensamiento algebraico, construyendo y generalizando fórmulas que permitan la factorización de polinomios útiles en la aplicación de resolución de problemas.

Esta experiencia dejó ver que existen ventajas en el trabajo con material didácito como: el fortalecimiento del trabajo en grupo, el aprendizaje a través del juego, la confrontación de resultados entre compañeros, el desarrollo de las actividades con mayor dinamismo, la interacción entre estudiantes y profesores, el diálogo, el interés de los estudiantes por explorar el material. Además permitió la manipulación, la visualización y la exploración llevándolo a adquirir un conocimiento más significativo, teniendo en cuenta que muchas veces la enseñanza de la matemática se hace de una forma tradicional olvidando la diversidad de estrategias pedagógicas que están al alcance y que ayudan a despertar en los educandos la curiosidad y anhelos por aprender, sin necesidad de someterlos a clases tediosas y muchas veces estériles porque seguramente el alumno no le interesa porque tiene su mente en otras cosas mas importantes para él debido a la etapa de su vida por la cual está pasando en el momento.

Cabe anotar que una de las dificultades más notorias en el trabajo con las regletas, fueron las que se presentaron en la interpretación de las fichas de color rojo que representan cantidades negativas, no tanto en factorizar el polinomio sino en acomodar las regletas para formar el rectángulo.

Las actividades implementadas en esta experiencia tuvieron que ver con la manipulación del material concreto por parte de los estudiantes con fines pedagógicos específicos que es la de servir como herramienta en el proceso de construcción y generalización del concepto de factorización, las cuales se presentaron en varias etapas como fueron las de reconocimiento y manipulación de las regletas a utilizar, en las primeras actividades que podrían llamarse lúdicas con el fin que los estudiantes se familiarizaran con el material y adquirieran curiosidad por trabajo y uso de las mismas, luego la aproximación a la factorización de polinomios de segundo grado llegando a la aceptación de las reglas fijas para cada uno de los casos de factorización que se trabajaron, convencidos del gran potencial intelectual que se encuentra escondido en cada uno de estos educandos.

Finalmente se logró que a través de la aplicación del material concreto los estudiantes aplicaran lo aprendido en la descomposición factorial de una manera práctica y no memorística, deduciendo y generalizando en cada caso la solución particular de cada polinomio.

El empleo de las regletas de factorización hizo que los vean el álgebra de una manera diferente, fácil de trabajar y que es posible aprender la factorización, relacionando la parte teórica con el mundo físico, integrando las nociones matemáticas con el desarrollo social, intelectual y emocional, sabiendo que hay que enseñar al estudiante a partir de lo que sabe y no a partir de lo que debiera saber y de acuerdo a su capacidad intelectual. Aunque no podemos afirmar que nuestros estudiantes quedaron como expertos en factorización de polinomio, si podemos afirmar sin temor a equivocarnos que mejoraron en gran parte los conceptos algebraicos que se pudieron trabajar y nos abre la posibilidad a nosotros los docentes de matemáticas para seguir implementando en lo sucesivo del que hacer pedagógico estas y otras estrategias que lleven al estudiante a modelar su propio conocimiento matemático de una manera lógica y divertida, convirtiendo las clases en actividades lúdicas para ver las matemáticas aplicables a la actividad humana.

Esperamos que este trabajo le sirva a otros docentes en la aplicación de estrategias para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje en las aulas de clase y fomentar en los estudiantes el amor por la matemática.

REFERENCIAS

Arbeláez R. (2003). *Investigación en el aula. Centro para el desarrollo de la docencia* en la Universidad Industrial de Santander - CEDEUIS, Bucaramanga.

Abrantes P. (1995). *Evaluación en educación matemática.* Serie de reflexiones en educación matemática. MEM/USU-GEPEM. Brasil.

Acevedo, M; García, G (2000). *Las competencias en matemáticas y el currículo: un problema de coherencia y consistencia.* En competencias y proyecto pedagógico. Unilibros, p. 139-189.

Boyer Carl, (1870). *Historia de la matemática* p 62.

Bogdan R; Biklen S. (1991). *Investigación cualitativa en educación.* Colección ciencias de la educación, Portugal. Porto editora,.

CIENCIA HOY Revista de Divulgación Científica y Tecnológica de la Asociación Ciencia Hoy. Volumen 6 - Nº34 - 1996

Curiosidades Algebraicas. El Rincón de Norbert

Chevallard (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Aique, Buenos Aires.

Díaz, F; Hernández G. (2003). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* México D.F. McGraw Hill, 2a ed., FIN, L. (1996) et al. „*Evaluación escrita en matemáticas en busca de explicación". Zetetiké*, , Campinas, SP. Vol. 4, No. 6, P. 25-43

García, G. (2003). *Currículo y evaluación en matemáticas, un estudio de tres décadas de cambios en la educación básica.* Magisterio Editorial, Santa fe De Bogotá, Colombia.

Gente Grupo. (2003). *Aula virtual, una alternativa en la educación superior.* UIS, Bucaramanga.

Gobernación De Antioquia. *Secretaría de educación para la Cultura. Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas.*

Holmes, P. (2002). *Enseñanza, aprendizaje y evaluación: categorías complementarias o conflictivas para las estadísticas escolares*, ICOTS.

Jaramillo, D. (2003). *Procesos metacognitivos en la (re)constitución del ideario pedagógico de licenciados en Matemáticas*, En FLORENTINI (OrG) *Formación de profesores de matemática.* Brasil Mercado De letras Ediciones, Campinas SP,.

__________ *(2003) (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica.* Brasil. Universidad De Campinas, SP,.

__________ (2004) Material de clase Seminario de Investigación Especialización en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander

Maciel, D (2003). *A avaliação no processo ensino-aprendizagem de Matemática, no ensino médio: uma abordagem Formativa sócio-cognitivista*, Educación Matemática, UNICAMP.

__________(2004).. *Novas abordagens da avaliação para o processo ensino-aprendizagem de matemática: um olhar no ensino médio*, UFMA.

Mckewen, C. (1998). *Teorías del desarrollo intelectual: Vygotski y Ausubel.* Santa fe de Bogotá, Colombia. Fundación Alberto Merani para el desarrollo de la inteligencia,

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas.* Santa fe de Bogotá, Colombia.

Morales, M. (2003). *et al. Aritmética y Geometría II.* Editorial Santillana. Santa fe de Bogotá, Colombia.

Ogalde C. Isabel. (2003). *Los materiales didácticos "medios o recursos de apoyo a la docencia"* México D.F. Ed. Trillas.

Peterson. John C (1890). *Matemáticas básicas,* Chattanooga State Technical Commuty College. P 258.

Posada Balvín, Ariet. Múnera Córdoba, John Jairo. (1980). *EL Razonamiento Algebraico y el Proceso de factorización.* P. 165

Santos L (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México D.F. Editorial Iberoamericana.

Santos Trigo, Luz Manuel. (2000). Principios y métodos de la resolución de problema en el aprendizaje de las matemáticas. P 13

Uribe Calad, Julio A (1987). *Matemáticas Básicas y Operativas*. Susaeta Ediciones. Pág. 120, 121

Fuentes electrónicas

Glenn, P. *Astrología Vs Ciencia: ¿Cómo conocemos lo que pensamos que conocemos?"* Recuperado el 17 de Abril de 2005 de www.henciclopedia.org.uy

Luján, E; Suárez, N. (1998). *„La producción de textos con el auxilio de la computadora".* Recuperado de http://www.cep.edu.uy./RedDeEnlace/TizayPizarron/RevMtros199/RevM199c.htm

Moreno M. „Didáctica, fundamentación y práctica, editorial Progreso‰ Recuperado el 16 de enero de 2005, de *http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/htm/evalu_funci.htm*

Ortiz, J; Pérez, M. *„La evaluación de la producción de textos como un elemento del examen de estado*‰ Recuperado el 24 de octubre de 2004 de www/portalicfes/home_2/rec/arc.

Porro, J. *Apunte sobre "el texto, objeto complejo‰ Nacional educativa S.A.* Recuperado el 1 de febrero de 2005 de www/curza.uncoma.edu.ar/materias/comprensionhiperv/documentos/texto.htm.

Anexos

El Carmen de Chucurí, agosto 12 de 2008

Señores padres de familia de Yadira Lizeth Puerto Lozano

Reciban un cordial saludo

En el área de matemáticas se está desarrollando el proyecto de acompañamiento e investigación denominado **"reconceptualización de factorización de polinomios en el grado noveno"**, el cual es conocido por ustedes y en el que su hija hace parte desde el día 12 de junio del año en curso como apoyo para mejorar los conocimientos matemáticos.

Por esto solicitamos formalmente su autorización para que la estudiante Yadira Lizeth Puerto Lozano, forme parte de nuestro grupo de investigación y pueda ser presentada en la publicación de estos resultados ya sea en fotos, videos u otros, en la entrega de este proyecto a la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander UIS.

Por lo anterior agradecemos su atención y colaboración.

Alirio Vásquez Edith Johana Mendoza

ALIRIO VÁSQUEZ
Estud. investigador
Escuela. Mat. UIS
Profesor Mat. 9º

EDITH JOHANNA MENDOZA
Asesora del Proyecto
Escuela. Mat. UIS

RAMÓN CAMACHO
Estud. Investigador
Escuela Mat. UIS

Concedemos la autorización para la participación de nuestra hija en el proyecto de investigación.

Ines Lozano

CÁNDIDO PUERTO SUÁREZ

Firma del padre

INÉS LOZANO MURILLO

Firma de la madre

El Carmen de Chucurí, agosto 12 de 2008

Señores padres de familia de Marcy Daniela Meneses

Reciban un cordial saludo

En el área de matemáticas se está desarrollando el proyecto de acompañamiento e investigación denominado "**reconceptualización de factorización de polinomios en el grado noveno",** el cual es conocido por ustedes y en el que sus hijos hacen parte desde el día 12 de junio del año en curso como apoyo para mejorar los conocimientos matemáticos.

Por esto solicitamos formalmente su autorización para que la estudiante e hija Marcy Daniela Meneses, forme parte de nuestro grupo de investigación y pueda ser presentada en la publicación de estos resultados ya sea en fotos, videos u otros, en la entrega de este proyecto a la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander UIS.

Por lo anterior agradecemos su atención y colaboración.

ALIRIO VÁSQUEZ
Estud. Investigador
Escuela. Mat. UIS
Profesor Mat. 9º

EDITH JOHANNA MENDOZA
Asesora del Proyecto
Escuela. Mat. UIS

RAMÓN CAMACHO
Estud. Investigador
Escuela Mat. UIS

Concedemos la autorización para la participación de nuestro(a) hijo en el proyecto de investigación.

MARÍA JAZMÍN MENESES
CC 28138239
Firma de la madre

REFERENCIAS

El Carmen de Chucurí, agosto 12 de 2008

Señores acudientes de Smith Vargas Sánchez

Reciban un cordial saludo

En el área de matemáticas se está desarrollando el proyecto de acompañamiento e investigación denominado "**reconceptualización de factorización de polinomios en el grado noveno**", el cual es conocido por ustedes y en el que su hija hace parte desde el día 12 de junio del año en curso como apoyo para mejorar los conocimientos matemáticos.

Por esto solicitamos formalmente su autorización para que la estudiante Smith Vargas Sánchez, forme parte de nuestro grupo de investigación y pueda ser presentada en la publicación de estos resultados ya sea en fotos, videos u otros, en la entrega de este proyecto a la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander UIS.

Por lo anterior agradecemos su atención y colaboración.

Alirio Vásquez	Edith Johanna Mendoza	
ALIRIO VÁSQUEZ	**EDITH JOHANNA MENDOZA**	**RAMÓN CAMACHO**
Estud. investigador	Asesora del Proyecto	Estud. Investigador
Escuela. Mat. UIS	Escuela. Mat. UIS	Escuela Mat. UIS
Profesor Mat. 9º		

Concedemos la autorización para la participación de nuestra hija en el proyecto de investigación.

RUBÉN VARGAS	**NANCY ORTIZ**
Rubén Vargas A.	Nancy Ortiz C.
Firma del acudiente	Firma del acudiente
CC. 13.644.654 S/te	CC 63.347.648 B/ga

El Carmen de Chucurí, agosto 12 de 2008

Señores padres de familia de Wílmer Arley Cruz Puerto

Reciban un cordial saludo

En el área de matemáticas se está desarrollando el proyecto de acompañamiento e investigación denominado **"reconceptualización de factorización de polinomios en el grado noveno",** el cual es conocido por ustedes y en el que sus hijos hacen parte desde el día 12 de junio del año en curso como apoyo para mejorar los conocimientos matemáticos.

Por esto solicitamos formalmente su autorización para que el estudiante Wílmer Arley Cruz Puerto, forme parte de nuestro grupo de investigación y pueda ser presentado en la publicación de estos resultados ya sea en fotos, videos u otros, en la entrega de este proyecto a la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander UIS.

Por lo anterior agradecemos su atención y colaboración.

Alirio Vásquez Edith Johana Mendoza

ALIRIO VÁSQUEZ	**EDITH JOHANNA MENDOZA**	**RAMÓN CAMACHO**
Estud. Investigador	Asesora del Proyecto	Estud. Investigador
Escuela. Mat. UIS	Escuela. Mat. UIS	Escuela Mat. UIS
Profesor Mat. 9º		

Concedemos la autorización para la participación de nuestro(a) hijo en el proyecto de investigación.

Magdo Lozano Puerto

NELSON CRUZ DÍAZ	**MAGDA PUERTO LOZANO**
Firma del padre	Firma de la madre

El Carmen de Chucurí, agosto 12 de 2008

Señores padres de familia de Marinela Alfonso Marín

Reciban un cordial saludo

En el área de matemáticas se está desarrollando el proyecto de acompañamiento e investigación denominado "**reconceptualización de factorización de polinomios en el grado noveno",** el cual es conocido por ustedes y en el que sus hijos hacen parte desde el día 12 de junio del año en curso como apoyo para mejorar los conocimientos matemáticos.

Por esto solicitamos formalmente su autorización para que la estudiante e hija Marinela Alfonso Marín, forme parte de nuestro grupo de investigación y pueda ser presentada en la publicación de estos resultados ya sea en fotos, videos u otros, en la entrega de este proyecto a la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander UIS.

Por lo anterior agradecemos su atención y colaboración.

ALIRIO VÁSQUEZ	**EDITH JOHANNA MENDOZA**	**RAMÓN CAMACHO**
Estud. Investigador	Asesora del Proyecto	Estud. Investigador
Escuela. Mat. UIS	Escuela. Mat. UIS	Escuela Mat. UIS
Profesor Mat. 9º		

Concedemos la autorización para la participación de nuestro(a) hijo en el proyecto de investigación.

MARGEN MARÍN

Firma de la madre

Margen Marín García

El Carmen de Chucurí, agosto 12 de 2008

Señores padres de familia de Yoeni Tatiana Niño Zapata

Reciban un cordial saludo

En el área de matemáticas se está desarrollando el proyecto de acompañamiento e investigación denominado **"reconceptualización de factorización de polinomios en el grado noveno"**, el cual es conocido por ustedes y en el que su hija hace parte desde el día 12 de junio del año en curso como apoyo para mejorar los conocimientos matemáticos.

Por esto solicitamos formalmente su autorización para que la estudiante e hija Yoeni Tatiana Niño Zapata, forme parte de nuestro grupo de investigación y pueda ser presentada en là publicación de estos resultados ya sea en fotos, videos u otros, en la entrega de este proyecto a la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander UIS.

Por lo anterior agradecemos su atención y colaboración.

ALIRIO VÁSQUEZ	**EDITH JOHANNA MENDOZA**	**RAMÓN CAMACHO**
Estud. investigador	Asesora del Proyecto	Estud. Investigador
Escuela. Mat. UIS	Escuela. Mat. UIS	Escuela Mat. UIS
Profesor Mat. 9º		

Concedemos la autorización para la participación de nuestra hija en el proyecto de investigación.

Cornelio Niño	Francy Zapata
CORNELIO NIÑO	**FRANCY ZAPATA**
Firma del padre	Firma de la madre

TALLER DIAGNOSTICO
CENTRO EDUCATIVO “EL CENTENARIO”
EL CARMEN DE CHUCURÍ
TALLER DIAGNÓSTICO

NOMBRE ____FECHA________

Objetivo: Identificar dificultades que presentan los estudiantes de grado noveno para factorizar polinomios de grado dos.

Conteste las siguientes preguntas

I.. ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan polinomios? Justifique su elección.

a. $\sqrt{6+7^2}+\frac{5}{(34-9)^5}+\log_2 5$

b. x^2+2x^3+5x

c. $\log_2 x+5x$

d. $\frac{2}{3}x^2+2x+5=4x$

e. $(x^2+1)(x-1)$

II. Diga de ¿qué consta un polinomio?

III. Escriba polinomios que reciben los nombres dados

a. Trinomio: ____

b. Monomio: ____

d. Binomio: ____

IV. En la expresión $\boxed{t+2}$ ¿qué puede representar la t?

V. ¿Qué es una constante?

VI. Escriba los siguientes números en su descomposición factorial.

a. 36

b. 108

c. 31

d. 1024

VII. Escriba expresiones equivalentes a las dadas.

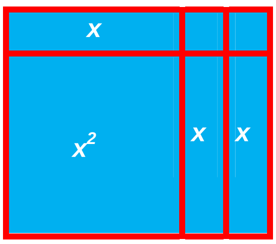
a. x^2-4 ____

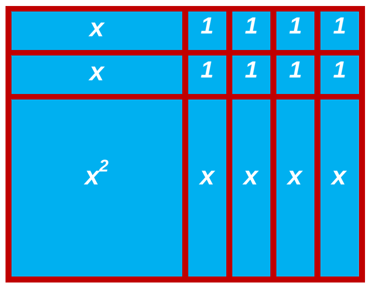
b. x^2+9 ____

c. $(x+2)^2$ ____

d. x^2-6x+9 ____

VIII. Escriba dos expresiones que representen el área de las siguientes figuras geométricas.





Factorice:

$2x^2 + 3x$,
$x^2 + 3x - 15$,
$4x^2 - 9$.

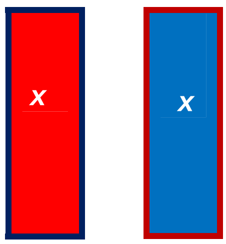
CENTRO EDUCATIVO "EL CENTENARIO"
EL CARMEN DE CHUCURÍ
TALLER NÚMERO 2

NOMBRE ______________________________________ FECHA ________________________

Objetivo: lograr que los estudiantes reconozcan el material, lo manipulen y adquieran la destreza para representar polinomios como producto de dos factores, teniendo en cuenta las dimensiones de los lados de un rectángulo.

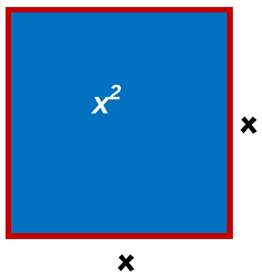
Para el desarrollo de las actividades propuestas en este proyecto, se usará el siguiente material con las especificaciones aquí mostradas. Cada pieza que conforma este material se denominará regleta.

Rectángulos de base uno y altura x

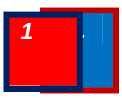


El área de cada rectángulo es igual a x

Un cuadrado de base x y de altura x



área del cuadrado x^2

Cuadrados de base 1 y altura 

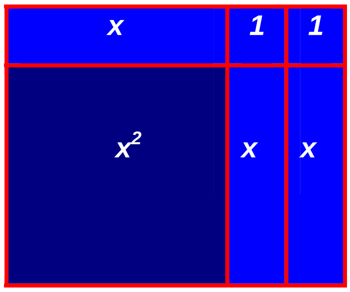
1 con área de 1 u^2

Las regletas azules son positivas y las rojas son negativas

Siempre se formarán cuadrados y rectángulos con las regletas.

Analice el siguiente ejemplo:

formar un cuadrado con las regletas x^2, x, x, x, 1



El polinomio formado es $x^2 + 3x + 2$. La base del rectángulo es $(x + 2)$ y la altura es $(x + 1)$, el polinomio resultante es el producto de la base por la altura.

2. Construya un rectángulo con las regletas indicadas. x^2, *x, x, x, x, 1, 1, 1,1*

Dibújelos y escriba el polinomio que representa.

3. Construyan rectángulos que tengan las dimensiones dadas y complete el cuadro. Base $(x + 3)$ y altura $(x + 2)$

Elabore en (cartulina, fomi, cartón) los cuadriláteros indicados representando las dimensiones con las variables dadas.

Un cuadrado de lado por x, un rectángulo con dimensiones x e y, y un cuadrado de lado y, teniendo en cuenta que $x > y$.

4. Formar un cuadrado con las figuras, x^2, *xy, xy,*

5. Forme un cuadra que tenga de base $(x + y)$ y de altura $(x + y)$

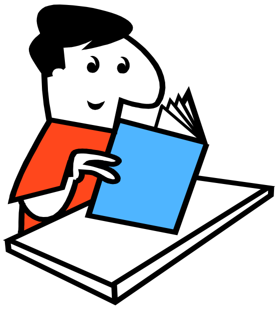
6. Formar un cuadrado que tenga como base $(2x + 2y)$ y altura $(2x + 2y)$.

Regletas	x^2, xy, xy, y^2	$(x + y)\ (x + y)$	$(2x + y)\ (2x + y)$
Representación gráfica			
Dimensiones			
Área del rectángulo			

8. Escriba el polinomio formado por un rectángulo que tiene como base $(x + 3)$ y altura $(x + 2)$.

9. Con base en las regletas diga cuál es la base y la altura del rectángulo que se forma del polinomio $x^2 + 4x + 4$

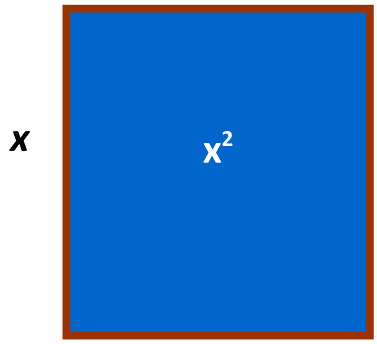
10. Represente Gráficamente el Polinomio $2x + 6x + 4$



CENTRO EDUCATIVO "EL CENTENARIO"
EL CARMEN DE CHUCURÍ
TALLER Nº 3

Objetivo: Desarrollar en el estudiante la capacidad de generalizar la fórmula para descomponer polinomios

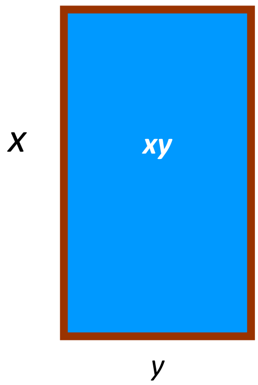
Este cuadrado tiene como base x y altura x, por lo tanto el área es x^2, es decir la longitud de sus lados es x

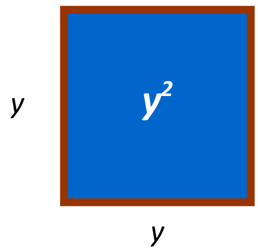


Longitud de la base = x

Este rectángulo tiene la longitud de su base y la longitud de su altura x, por lo tanto su área es igual a xy.

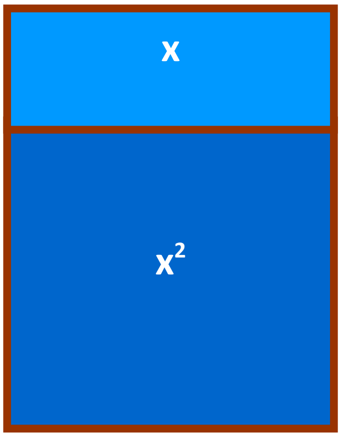
Un cuadrado de base y, altura y, su área es y^2





ACERCA DE FACTOR COMÚN

1. Dado el siguiente rectángulo, determine sus dimensiones.

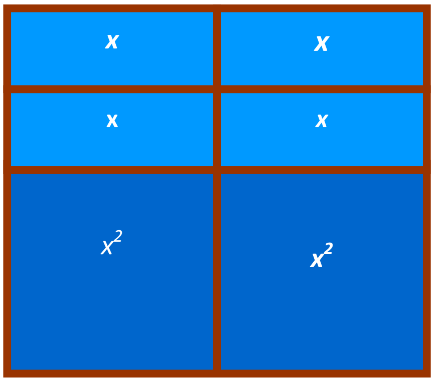


Base= ___________ Altura= _____________

¿Cómo determinaría la expresión que representa el área del rectángulo? Escríbala

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas.

2. Dado el siguiente rectángulo, determine sus dimensiones



Base= ___________ Altura= _____________

¿Cómo determinaría la expresión que representa el área del rectángulo? Escríbala

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas.

3. Si el área de un rectángulo es $x^2 + 3x$, ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Base = ____________, altura = ____________ ¿Cómo las determina?

Las dimensiones del rectángulo son $(x + 3)$ y (x), por lo tanto el polinomio que forma el rectángulo $x^2 + 3x$ se puede descomponer como el producto de

__________________________, en este caso se aplica la propiedad______ _____________________ y el caso de factorización es ____

4. Desarrolle los siguientes ejercicios:

Construya los siguientes rectángulos utilizando el material y halle el área de cada uno.

BASE	ALTURA	AREA	
		PRODUCTO	POLINOMIO
x	$(x + 4)$		
$2x$	$(x + 3)$		
$2x$	$(2x + 1)$		
$2x$	$(2x + 3)$		

5. Las siguientes expresiones representan el área de rectángulos, escriba otra expresión equivalente como el producto de las dimensiones de cada rectángulo.

- $2x^2 + 4x =$_____________________________________
- $2x^2 + 6x =$ ____________________________________
- $3x^2 + 9x =$ ____________________________________
- $x^2 + 4x =$ _____________________________________
- $4x^2 + 2x =$ _____________________________________

- 6. Forme un cuadrado con una regleta cuadrada de lado x, con dos rectángulos de dimensiones x e y, y una regleta cuadrada de lado y.

¿Cuáles son las expresiones que determinan los lados del cuadrado?

____

¿Cuál es el área del cuadrado?

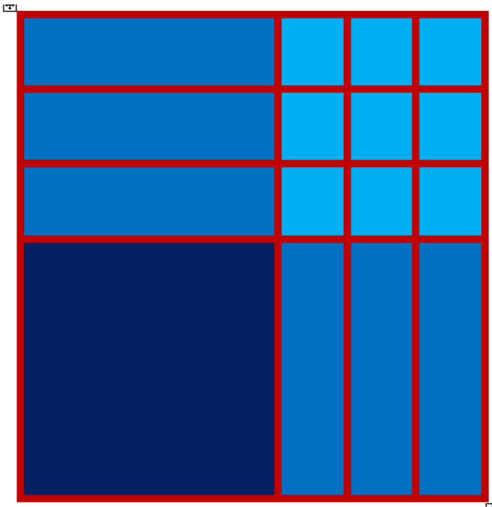
____

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas.

____

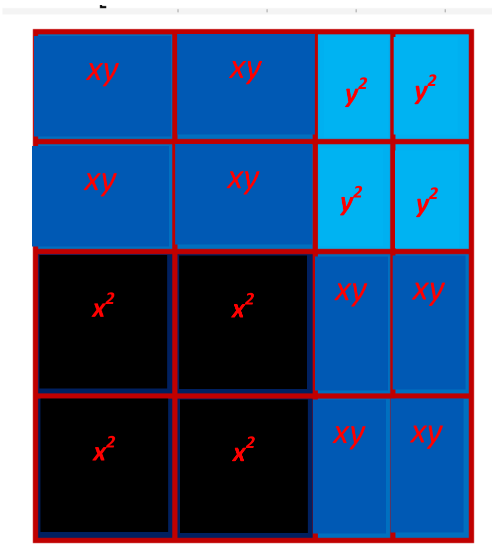
7. Formar un cuadrado que tenga $(2x + 2)$ de lado y escribalos expresiones equivalentes para hallar su área.

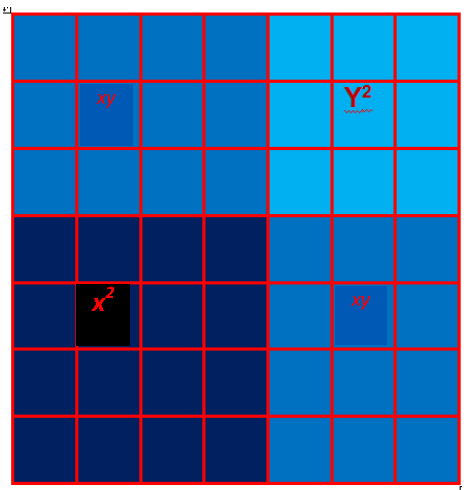
8. Calcule el área del siguiente cuadrado. Encuentre dos expresiones equivalentes.



9. Se tiene la siguiente figura geométrica.

Determine las dimensiones del cuadrado y escriba dos expresiones equivalentes del área del cuadrado.





10. Escriba el polinomio que representa el área del cuadrado ______________________

Escriba el área del cuadrado como producto de sus lados

____

¿Las expresiones anteriores son equivalentes? ___________

¿Qué sucede si reemplaza la variable x por 4 y la variable y por 3 en las expresiones anteriores? ¿Qué se obtiene? Escriba todo lo que piensa.

11. Utilizando el material calcule las dimensiones de un cuadrado que tiene un área de $x^2 + 6x + 9$.

Entonces $x^2 + 6x + 9$ = ____________x___________ = (________)^2

12. Un procedimiento alternativo para encontrar el cuadrado de un número, es separar como la suma de 2 términos y utilizar lo trabajado anteriormente. ¿Cómo lo harías?

- $(105)^2$ descomponiéndolo como $(100 + 5)^2$=
- $(55)^2$ descomponiéndolo como $(50 + 5)^2$ =
- $(32)^2$ descomponiéndolo como $(30 + 2)^2$ =

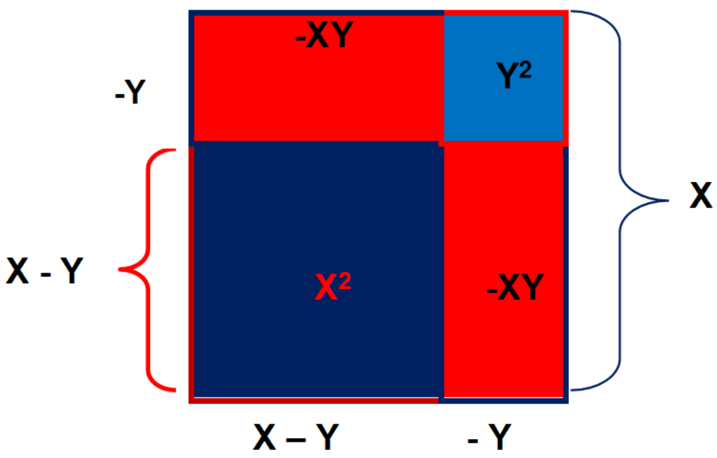
13. Construya los siguientes cuadrados, si su lado es la expresión algebraica dada.

LADO	AREA	AREA COMO POLINOMIO
$(2x + 2)$	$(2x + 2)^2$	
$(x + 5)$	$(x + 5)^2$	
$(x + y)$	$(x + y)^2$	
$(2x + y)$	$(2x + y)^2$	
$(2x + 2y)$	$(2x + 2y)^2$	

14. Los siguientes polinomios representan el área de un cuadrado, reescríbalos como el producto de dos de sus lados.

POLINOMIO	LADO	LADO
$x^2 + 4x + 4$		
$4x^2 + 12x + 9$		
$x^2 + 2xy + y^2$		
$x^2 + 6x + 9$		

15. Dado el siguiente cuadrado determine sus dimensiones.



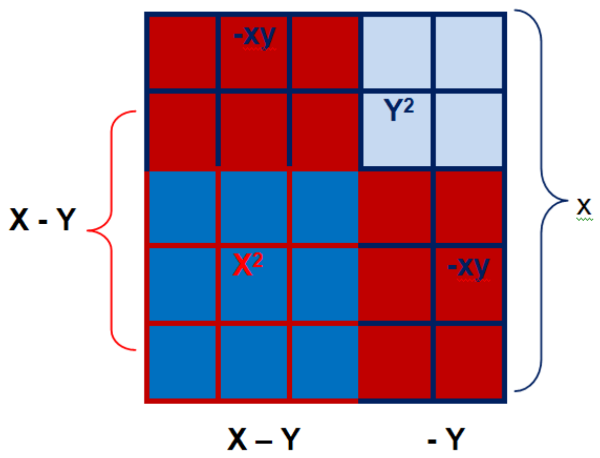
Lado = ____________ lado = ______________ área = ____________________

¿Cómo determinaría la expresión que representa el área del rectángulo? Escríbala

____

Encuentre dos expresiones equivalentes para representar el área del rectángulo. Escríbalas.

____



Escriba el polinomio que representa el área del cuadrado ____________________

____

Escriba el área del cuadrado como producto de sus lados______________________

____

¿Las expresiones anteriores son equivalentes? ________________________________

____

¿Qué sucede si reemplaza la variable *x* por 3 y la variable *y* por 2 en las expresiones anteriores? ¿Qué se obtiene? Escriba todo lo que piensa.

16. Con la ayuda del material resuelva los siguientes ejercicios hallando las dimensiones de sus lados y el polinomio que representa.

área	lado por lado	Polinomio
$(2x - 2)^2$		
$(x - 1)^2$		
$(x - 3)^2$		
$(3x - 3)^2$		