

MODELOS TRIDIMENSIONALES AXIALMENTE
SIMÉTRICOS PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MASA EN LA
COMPONENTE DISCOIDAL DE GALAXIAS ESPIRALES.

KAROL VIANNEY SALAZAR ARIZA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2010

MODELOS TRIDIMENSIONALES AXIALMENTE
SIMÉTRICOS PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MASA EN LA
COMPONENTE DISCOIDAL DE GALAXIAS ESPIRALES

KAROL VIANNEY SALAZAR ARIZA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ VILLEGAS, PH.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2010

*A la mayor motivación en mi vida:
Mis padres.*

Agradecimientos

- A Jehová Dios y su hijo Jesucristo por permitirme alcanzar un logro más en mi vida. Por todas las bendiciones que nos brindan tanto a mí como a mi familia. También por permitirme aprender cada día más acerca del propósito verdadero de la vida.
- A mi mamá por toda la dedicación y los cuidados que siempre me ha tenido. Por esmerarse y esperar siempre lo mejor de mí. Por ser un ejemplo de mujer, esposa y mamá. Gracias por respaldarme en cada uno de mis deseos y por ser mi apoyo incondicional.
- A mi papá por todo el amor que me ha tenido, por cuidar y querer siempre lo mejor para sus hijos. Por sus valiosos consejos y por darme la oportunidad de estudiar y prepararme para la vida.
- A mi abuelita porque me dejó los mejores recuerdos de mi niñez.
- A mi hermano Diego por los buenos y gratos momentos que hemos vivido.
- A mi hermanito Juan Camilo por ser mi alegría.
- A mi novio Leonardo por todo el amor que me ha brindado, por ser especial en todos los momentos de mi vida y por mostrarme otra forma de ver la vida.
- Al profesor Guillermo, por su excelente dirección e interés en el trabajo realizado.

Contenido

Resumen	12
Abstract	13
Introducción	14
1. Modelos de galaxias tridimensionales axialmente simétricos	18
1.1. Teoría del potencial	19
1.1.1. Gravitación	19
1.1.2. Potencial gravitacional	20
1.2. Pares potencial-densidad	21
1.2.1. Modelo de Kuzmin	22
1.2.2. Modelo de Miyamoto y Nagai	22
1.3. Órbitas en potenciales axialmente simétricos	23
1.3.1. Movimiento en el plano meridional	24
1.3.2. Estabilidad de las órbitas	26
2. Modelos multipolares para galaxias aplanadas	28

2.1. Expansión multipolar del potencial gravitacional	28
2.2. Distribución de masa	30
2.3. Pares potencial-densidad	31
2.3.1. Modelo para el par potencial-densidad $n=0$	31
2.3.2. Modelo para el par potencial-densidad $n=1$	35
2.3.3. Modelo para el par potencial-densidad $n=2$	40
2.3.4. Modelo para el par potencial-densidad $n=3$	45
Conclusiones	51
Bibliografía	53
Apéndices	56
A. Par potencial-densidad para el modelo $n=0$	57
B. Cálculos para el modelo $n=1$	58
B.1. Par potencial-densidad	58
B.2. Velocidad circular y frecuencias	59
C. Cálculos para para el modelo $n=2$	61
C.1. Par potencial-densidad	61
C.2. Velocidad circular y frecuencias	62
D. Cálculos para para el modelo $n=3$	64
D.1. Par potencial-densidad	64
D.2. Velocidad circular y frecuencias	65

Lista de figuras

1.	Diagrama de la clasificación de Hubble, en la que se ven las galaxias elípticas, espirales y espirales barradas	14
2.	Esquemmatización de las componentes de la Galaxia.	15
2.1.	Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes al parámetro (a) $\tilde{b}=1.0$	32
2.2.	Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes al parámetro (b) $\tilde{b}=0.5$	33
2.3.	Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes al parámetro (c) $\tilde{b}=0.1$	33
2.4.	Curva de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$	34
2.5.	Curva de la frecuencia epicíclica con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$	35
2.6.	Curva de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$	35
2.7.	Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros y constantes $\tilde{b}=0.5$ y $\tilde{a}_1=0.5$	36
2.8.	Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$ y $\tilde{a}_1=0.1$	37

2.9. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$ y $\tilde{a}_1=-0.3$	37
2.10. Curvas de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetros $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=-0.1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{a}_1=1.0$	38
2.11. Curvas de la frecuencia epicíclica \tilde{k} con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=-0.1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{a}_1=1.0$	39
2.12. Curvas de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=-0.1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{a}_1=1.0$	39
2.13. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$ y $\tilde{a}_2=2/3$	41
2.14. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$ y $\tilde{a}_2=-0.1$	41
2.15. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.0$ y $\tilde{a}_2=2/3$	42
2.16. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0$ y $\tilde{a}_2=-0.1$	42
2.17. Curvas de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetro $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=2/3$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$	43
2.18. Curvas de la frecuencia epicíclica \tilde{k} con parámetros $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=2/3$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$	44
2.19. Curvas de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=2/3$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$	44
2.20. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0.5$ y $\tilde{a}_3=2/3$	46
2.21. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0.5$ y $\tilde{a}_3=-0.1$	46
2.22. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0$, y $\tilde{a}_3=2/3$	47

2.23. Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0$, y $\tilde{a}_3=-0.1$	47
2.24. Curvas de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y $\tilde{a}_3=-0.1$	49
2.25. Curvas de la frecuencia epicíclica \tilde{k} con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=1.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y $\tilde{a}_3=0.0$	49
2.26. Curvas de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=1.5$, $\tilde{a}_2=2/3$ y $\tilde{a}_3=0$	50

Resumen

TÍTULO: MODELOS TRIDIMENSIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MASA EN LA COMPONENTE DISCOIDAL DE GALAXIAS ESPIRALES¹.

AUTOR: SALAZAR ARIZA, Karol Vianney².

PALABRAS CLAVES: Astrofísica, Modelos tridimensionales, Expansión multipolar del potencial gravitacional.

DESCRIPCIÓN: Muchos de los modelos construidos para la distribución de masa en galaxias han considerado que ésta se encuentra confinada a lo largo de un plano. Por lo tanto, es muy importante construir modelos tridimensionales que den cuenta de la distribución tridimensional de masa, logrando así aproximarse más a las galaxias reales que hacen parte de nuestro Universo observable. En nuestro trabajo se construirán modelos tridimensionales axialmente simétricos para la distribución de masa en galaxias, en el marco de la teoría de la gravitación de Newton. Los modelos se obtendrán a partir de la expansión multipolar del potencial gravitacional en función de los polinomios de Legendre, y utilizando la solución de la ecuación de Poisson se hallará la densidad de masa. Seguidamente se encontrarán cantidades de interés físico como la velocidad circular, la frecuencia epicíclica y la frecuencia vertical. Una vez obtenidas, se procederán a imponer restricciones sobre los parámetros y constantes con el fin de garantizar que la distribución de masa sea una función monótonamente decreciente en la coordenada radial y en la coordenada z , además que la velocidad circular y las frecuencias sean cantidades positivas. Con los valores de los parámetros y constantes ya definidos se podrán determinar los valores de las cantidades físicas ya mencionadas y se realizará un análisis gráfico donde se compararán de manera cualitativa las curvas de rotación arrojadas por nuestros modelos con los datos observacionales de las curvas de rotación de una galaxia real y se estudiarán las curvas de las frecuencias vs el radio de la galaxia con el fin de que los modelos sean estables.

¹Trabajo de grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo Alfonso González Villegas (Director).

Abstract

TITLE: AXIALLY SYMMETRIC TRIDIMENSIONAL MODELS FOR THE MASS DISTRIBUTION IN THE DISCOIDAL COMPONENT OF SPIRAL GALAXIES³.

AUTHOR: SALAZAR ARIZA, Karol Vianney⁴.

KEY WORDS: Astrophysics, Tridimensional models, Multipolar expansion of the gravitational potential.

DESCRIPTION: Many of the built models for the mass distribution in galaxies have considered that the latter are confined throughout a plane. Therefore it is very important to build tridimensional models that give account of the tridimensional mass distribution, making in this way a better approximation to the real galaxies that belong to our observable Universe. In this work we will build axially symmetric tridimensional models for the mass distribution in galaxies, in the framework of Newton's gravitation theory. The models will be obtained through a multipolar expansion of the gravitational potential as a function of the Legendre polynomials, and we will find the mass density using the solution to the Poisson equation. Next, we will find quantities of physical interest such as the circular velocity, the epicyclic frequency and the vertical frequency. Once they are obtained, we will proceed to impose restrictions on the parameters and constants in order to guarantee that the mass distribution is a monotonous decreasing function in the radial coordinate and the z coordinate, and that the circular velocity and the frequencies are positive quantities. With the values for the parameters and constants previously defined we will find the values for the physical quantities above mentioned and perform a graphical analysis where we will compare in a qualitative way the rotation curves obtained from our models with the observational data from rotation curves of a real galaxy. We will also study the frequency curves vs the galaxy radius in order to check the conditions under which the models are stable.

³Degree project.

⁴Faculty of Sciences, School of Physics, Guillermo Alfonso González Villegas (Supervisor).

Introducción

Se estima que existen más de cien mil millones ($\approx 10^{11}$) de galaxias en el Universo observable [1]. Una galaxia es un sistema masivo compuesto de estrellas, nubes de gas, polvo y materia oscura, unidos gravitacionalmente. La cantidad de estrellas que forman una galaxia es variable, desde las enanas con 10^7 , hasta las gigantes con 10^{12} [2, 3]. Las galaxias se encuentran en un amplio rango de formas, tamaños y masas, y pueden ser divididas de acuerdo al sistema de clasificación de Hubble [4] en cinco tipos principales: elípticas ($E0 - E7$), espirales ($Sa - Sd$), espirales barradas ($SBA - SBD$), irregulares (Irr), y lenticulares ($S0$) (ver Figura 1).

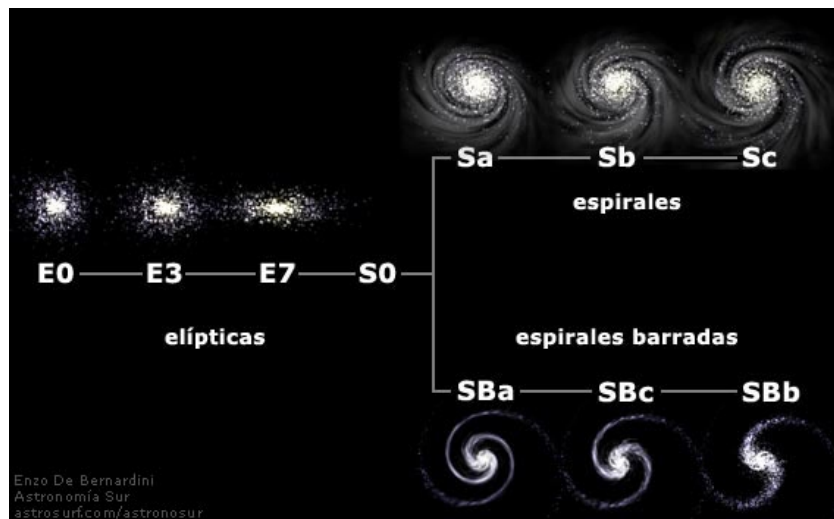


Figura 1: Diagrama de la clasificación de Hubble, en la que se ven las galaxias elípticas, espirales y espirales barradas

Las galaxias elípticas ($E0 - E7$), tal como lo indica su nombre tienen el perfil luminoso de una elipse y están dominadas por estrellas viejas. En la clasificación, éstas

se denotan por E_n , donde n es diez veces la elipticidad de una galaxia, siendo E_0 una galaxia esférica y E_7 una galaxia altamente dilatada [5]. Las galaxias lenticulares son una clase de galaxias intermedias entre las elípticas y las espirales y son etiquetadas como $S0$ en la clasificación de Hubble [4]. Las galaxias espirales ($Sa - Sd$) y espirales barradas ($SBa - SBd$), tienen forma circular pero con una extensión de brazos en forma de espiral envueltos en polvo de brillo variable, y apuntando normalmente en la dirección de la rotación del disco. Finalmente, las galaxias con formas irregulares (Irr) son el resultado de perturbaciones provocadas por la atracción gravitacional de galaxias vecinas; éstas no presentan estructura ni simetría bien definida [1, 2, 3].

Los modelos que se construirán para la distribución de masa son aplicables a galaxias espirales [6]. Las galaxias espirales presentan varias partes, las cuales son: la componente discoidal, en la cual se encuentra el disco y un abultamiento central (bulbo). También un halo de materia oscura que se extiende más allá del disco (Ver Figura 2). Recientes observaciones muestran que al parecer hay un agujero negro supermasivo en el centro de la mayoría de galaxias espirales [1]. Para una orientación inicial, es usual utilizar las cifras de nuestra galaxia para ilustrar las dimensiones de una galaxia espiral típica [7].

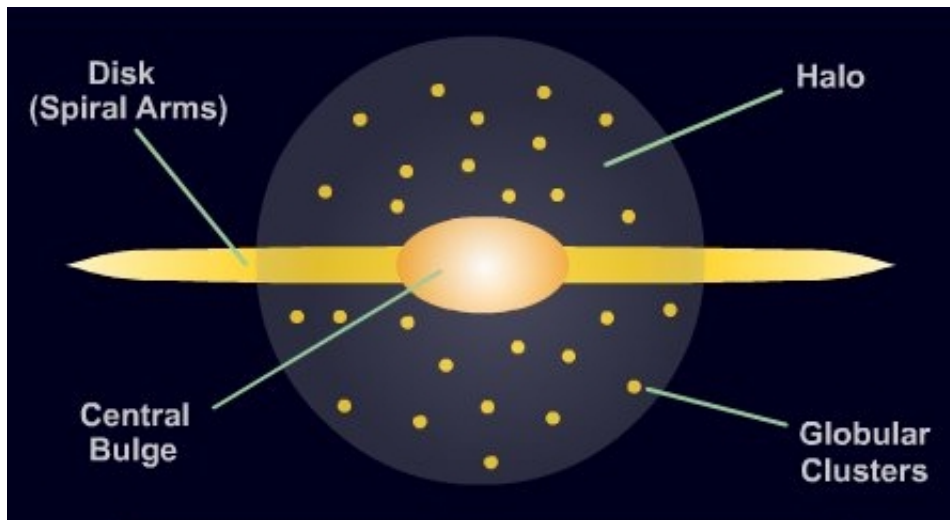


Figura 2: Esquemización de las componentes de la Galaxia.

Disco y bulbo central. En el disco y en el bulbo se encuentran alrededor de 10^{11} estrellas, teniendo una masa total $\approx 5 * 10^{10}$ masas solares⁵. Por otra parte, el disco también contiene gas y pequeñas partículas sólidas (“*polvo*”), que en conjunto se conocen como el medio interestelar y el total de su masa es de alrededor del 10% de la masa en las estrellas [1].

⁵1 masa solar = $1,99 * 10^{30}$ kg

Halo de materia oscura. El halo oscuro es un componente muy importante, tanto en tamaño y en masa, el cual tiene un radio de alrededor de 200kpc y una masa del orden de 10^{12} masas solares [1]. Probablemente el halo está compuesto por algunas partículas elementales⁶ que interactúan débilmente, más no electromagnéticamente. Para la mayoría de los propósitos, el halo interactúa con los otros componentes de la Galaxia sólo a través de la fuerza gravitacional, y por lo tanto, la dinámica estelar es uno de los pocos instrumentos que tenemos para el estudio de este componente misterioso y fundamental del universo.

Agujero negro central. En el centro del disco, se encuentra un agujero negro, de masa $4 * 10^6$ masas solares. El agujero negro es a veces llamado Sagitario A^* .

Para modelar galaxias debemos tener muy presente que cada una de las componentes contribuyen al potencial gravitacional de ella misma⁷. Por consiguiente, construir un modelo que comprenda todos los efectos de todas las partes es realmente difícil. Afortunadamente, las contribuciones de todas las partes están limitadas por ciertas escalas de distancias, así que todas las componentes no necesitan ser incluidas en un modelo razonablemente realista [7]. De modo que es comúnmente aceptado el hecho de no incluir todas las contribuciones de las componentes. Un modelo del centro de la vía láctea, por ejemplo, podría incluir el agujero negro central y la densa región central del cúmulo [3], donde los efectos de los brazos espirales o del halo de materia oscura ciertamente se pueden despreciar.

Como una primera aproximación para el modelo, sólo se va a tener en cuenta la componente discoidal. La mayor parte de la masa en dichas componentes reside en las estrellas que la conforman. Así, para calcular el potencial gravitacional de una gran colección de estrellas, se debería, en principio sumar los potenciales de cada una de las masas puntuales. Sin embargo, esto no es práctico debido al número de estrellas ($\approx 10^{11}$) que componen una galaxia típica. Por lo tanto, es suficiente con modelar el potencial gravitacional como el generado por la distribución de masa considerada axialmente simétrica o imperturbable, debido a que no se tendrá en cuenta la distribución de masa perturbada que representa el patrón espiral [1]. Esta distribución puede describirse por una densidad de masa volumétrica, la cual genera el potencial gravitacional, que a su vez determina tanto la velocidad circular como las frecuencias epicíclica y vertical.

El modelamiento de galaxias mediante la distribución de masa ha sido un tema ampliamente estudiado a través de los años [6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. La distribución de masa se encuentra utilizando la ecuación de Poisson y por medio de un potencial gravitacional, siendo el par potencial-densidad la característica principal

⁶Estas partículas no se han detectado aún en el laboratorio.

⁷En el sistema autogravitatorio las estrellas de prueba son las mismas que conforman las galaxias.

de un modelo teórico determinado. Los datos observacionales de la velocidad circular o curva de rotación, la cual se define como la velocidad de las estrellas en un plano galáctico, permite ajustar dichos modelos teóricos con la curva de rotación de una galaxia en particular, y así determinar la distribución de masa contenida en una galaxia. Por lo tanto, la curva de rotación es uno de los métodos observacionales más directos que nos permite medir la masa contenida en una galaxia [1, 16, 18].

Hasta el momento se han estudiado diversos modelos que describen de una manera aproximada los aspectos principales de una galaxia. Desde discos infinitesimalmente delgados [19, 20], pasando por discos gruesos infinitos [21, 22, 23]. Ahora bien, en este trabajo se construirán modelos tridimensionales axialmente simétricos para la distribución de masa en galaxias, del mismo modo que el trabajo realizado por Vogt y Leteleir en 2005 [8], obteniendo así unos casos particulares del par potencial-densidad del modelo generalizado de Nagai y Miyamoto de 1976 [11].

En el capítulo 2 se presentará el formalismo teórico del potencial gravitacional, hallando así una relación entre el potencial gravitacional y la densidad de masa. También se estudiarán familias de potenciales axialmente simétricos, los cuales son generados por distribución de masa simple. Por otro lado, se estudiarán los movimientos de las estrellas en órbitas circulares. Finalmente se analizará la estabilidad de dichas órbitas. En el capítulo 3 se presentarán los modelos obtenidos al considerar la expansión del potencial gravitacional hasta el término $n = 4$ y mediante un análisis gráfico se estudiarán cantidades como: la distribución de masa, la velocidad circular y la estabilidad del modelo.

1

Modelos de galaxias tridimensionales axialmente simétricos

La interacción gravitacional juega un papel muy importante en la elaboración y análisis de modelos de galaxias [24]. Aunque la descripción correcta de la interacción gravitacional requiere de la relatividad general, en el presente trabajo se obtienen buenos resultados al calcular la distribución de masa contenida en una galaxia mediante la aproximación Newtoniana [16].

La teoría de la gravitación Newtoniana para el modelamiento de galaxias está basada en las siguientes suposiciones:

1. El campo gravitacional producido por la distribución de masa es débil.
2. Las estrellas se mueven con velocidades muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.
3. Las presiones, flujos y tensiones son pequeños en comparación con la densidad de masa-energía.

La curva de rotación es un método directo que permite medir la masa contenida en una galaxia, a través del ajuste de dicha curva con un modelo teórico, caracterizado por un par potencial-densidad. El término curva de rotación hace referencia al conjunto de velocidades de las estrellas que se mueven alrededor de una órbita circular en el disco meridional de las galaxias, para distintos radios.

En el presente capítulo, se estudiarán las órbitas circulares de las estrellas en presencia de campos gravitacionales. También se hallarán las condiciones para garantizar que las estrellas oscilen alrededor de sus órbitas. Se comenzará por estudiar el potencial gravitacional en el marco de la teoría de la gravitación de Newton. También se analizarán las distribuciones de masa para sistemas aplanados con potenciales gravitacionales simples. Después se estudiarán las condiciones necesarias para la existencia de órbitas circulares y finalmente se examinará la estabilidad de las órbitas.

1.1. Teoría del potencial

Las componentes de la galaxia que se considerarán son el disco y la protuberancia central. La mayor parte de la masa en dichas componentes reside en las estrellas, de manera que el potencial gravitacional se modelará como el generado por una distribución de masa tridimensional continua con simetría axial [1]. Teniendo en cuenta lo anterior, se encontrará una expresión analítica del campo gravitacional generado por una distribución continua de materia. A partir de la ecuación de Poisson, se podrá hallar una relación entre el potencial gravitacional y la distribución de masa.

1.1.1. Gravitación

La ley de la gravitación universal de Newton nos dice que cada estrella¹ atrae a todas las otras estrellas en el universo con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente al cuadrado de la distancia de separación entre ellas. Esta ley puede ser escrita como

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.1.1)$$

en donde G es la constante de proporcionalidad de Cavendish. A una distancia r de una estrella de masa M , una segunda estrella de masa m experimenta una fuerza de atracción. El vector unitario \mathbf{e}_r apunta desde M hasta m , el signo menos indica que la fuerza es atractiva, esto significa que m es atraída hacia M .

La Ec. (1.1.1) es aplicable sólo para estrellas puntuales. Ahora bien, sí se reemplaza una o las dos estrellas puntuales por un cuerpo con cierta extensión, se asumirá que el campo de fuerza gravitacional es un campo lineal. En otras palabras, se podrá admitir

¹Las estrellas son consideradas como masas puntuales, debido a que sus tamaños son pequeños en comparación con las distancias entre ellas.

que es posible calcular la fuerza neta sobre una estrella debido a otras estrellas, si se toma el vector suma de todas las fuerzas individuales. Por esta razón, para una galaxia con una distribución continua de materia, la suma se convierte en la integral

$$\mathbf{F} = -Gm \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{e}_r}{r^2} dv', \quad (1.1.2)$$

en donde $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad de masa y dv' es el elemento de volumen en la posición definida por el vector \mathbf{r}' desde el origen hasta el punto dentro de la distribución de masa.

El vector campo gravitacional \mathbf{g} , que representa la fuerza por unidad de masa ejercida sobre una estrella en el campo de un cuerpo de masa M , está dado por la expresión:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (1.1.3)$$

Considerando ahora una distribución continua para el número de estrellas que componen una galaxia típica $\sim 10^{11}$, la cual está descrita por una densidad $\rho(\mathbf{r}')$, se obtiene el campo gravitacional en la forma

$$\mathbf{g} = -G \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{e}_r}{r^2} dv'. \quad (1.1.4)$$

1.1.2. Potencial gravitacional

El vector campo gravitacional \mathbf{g} es conservativo, así que \mathbf{g} se representa como el gradiente de una función escalar

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi, \quad (1.1.5)$$

en donde Φ es llamado el potencial gravitacional. Por otro lado, considerando una superficie cerrada arbitraria S con una masa m situada dentro de ésta, se encuentra que el flujo gravitacional Ψ_m saliendo a través de S es

$$\Psi_m = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da, \quad (1.1.6)$$

en donde la integral es sobre toda la superficie S y el vector unitario \mathbf{n} es normal a la superficie en el área diferencial da . Sustituyendo \mathbf{g} (Ec. 1.1.3), se tiene que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = -Gm \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad (1.1.7)$$

en donde θ es el ángulo entre \mathbf{n} y \mathbf{g} . Sustituyendo la ecuación anterior dentro de la Ec. (1.1.6) se obtiene

$$\Psi_m = -Gm \oint_S \frac{\cos\theta}{r^2} da = -4\pi Gm. \quad (1.1.8)$$

La ecuación anterior es indiferente con respecto a el lugar se donde se ubique la masa m dentro de la superficie S .

Generalizando el resultado de la Ec. (1.1.8) para muchas masas m_i dentro de la superficie S , se tiene

$$\Psi_m = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = -4\pi G \sum_i m_i. \quad (1.1.9)$$

Ahora bien, si se cambia por una distribución continua de masa dentro de la superficie S , entonces

$$\Psi_m = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = -4\pi G \int_v \rho dv, \quad (1.1.10)$$

en donde la integral del lado derecho es sobre todo el volumen V encerrado por S . Usando el Teorema de la divergencia en el segundo término de la Ec. (1.1.10) se cumple

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da = \int_v \nabla \cdot \mathbf{g} dv. \quad (1.1.11)$$

Igualando el lado derecho de la Ec. (1.1.11) con el segundo término de la Ec. (1.1.10), se tiene

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{g} dv = \int_v (-4\pi G)\rho dv, \quad (1.1.12)$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho. \quad (1.1.13)$$

Teniendo en cuenta la forma de \mathbf{g} definida en la Ec. (1.1.5) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -\nabla \cdot \nabla\Phi = -\nabla^2\Phi. \quad (1.1.14)$$

De esta forma, se obtiene una relación entre el potencial gravitacional y la distribución de masa de la forma

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.1.15)$$

en donde la ecuación anterior es conocida como la ecuación de Poisson. En regiones libres de materia, es decir $\rho = 0$, la Ec. (1.1.15) se reduce a la forma conocida como la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (1.1.16)$$

1.2. Pares potencial-densidad

El cálculo del potencial gravitacional generado por una distribución de masa es a menudo una tarea complicada, que conduce a expresiones complejas que involucran funciones especiales ó cálculos numéricos [1]. Sin embargo, a continuación se van a describir familias de potenciales axialmente simétricos, los cuales son generados por distribuciones de masa realistas y bastantes simples.

1.2.1. Modelo de Kuzmin

Kuzmin [25] introdujo un par potencial-densidad para modelar discos, a partir de un potencial gravitacional en coordenadas cilíndricas con simetría axial, el cual depende de las variables (R, z) , en donde R es la coordenada radial y z es la coordenada vertical. Dicho potencial se define de la forma

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|^2)}}, \quad (1.2.1)$$

en donde a es una parámetro diferente de cero, el cual tiene dimensiones de longitud. Aplicando el teorema de Gauss para un volumen aplanado que contiene una porción pequeña del plano $z = 0$, se concluye que Φ está generado por la densidad superficial

$$\Sigma(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.2.2)$$

1.2.2. Modelo de Miyamoto y Nagai

El modelo de Miyamoto y Nagai [6] define un potencial gravitacional en coordenadas cilíndricas, en términos de los parámetros a y b , los cuales son diferentes de cero y cuyos valores cumplen con las restricciones impuestas sobre la distribución de masa; es decir, que sea una función monótonamente decreciente tanto en la coordenada radial como en la coordenada z . Por lo tanto, dependiendo de los valores de dichos parámetros, se puede representar cualquier estado intermedio, desde discos infinitesimalmente delgados hasta un sistema esférico. Debido a lo mencionado anteriormente se define el potencial gravitacional generalizado como:

$$\Phi_M = \frac{-a_0}{\sqrt{R^2 + [a + (z^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}]^2}}. \quad (1.2.3)$$

El potencial anterior es libre de singularidades en todo el espacio, y tiende al potencial de una masa puntual cuando R y z llegan a ser muy grandes. Para cuando $a = 0$, se reduce al potencial gravitacional Φ de Plummer [12], y cuando $b = 0$ se reduce al potencial gravitacional Φ de Kuzmin [25]. La distribución de masa en tres dimensiones $\rho(R, z)$ correspondiente a este potencial gravitacional, fácilmente derivada de la ecuación de Poisson (1.1.15), está dada por la forma

$$\rho(R, z) = \frac{-a_0 b^2}{4\pi G} \frac{aR^2 + [a + \sqrt{z^2 + b^2}]^2 [a + 3\sqrt{z^2 + b^2}]}{\sqrt{(R^2 + [a + (z^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}]^2)^5 (z^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}}. \quad (1.2.4)$$

La ecuación anterior es positiva en todo el espacio. Por otra parte, la ecuación de Poisson es lineal en el potencial y la densidad de masa, por lo tanto, la diferencia entre dos pares potencial-densidad cualesquiera es un par potencial-densidad. Por esta razón, si se deriva un par potencial-densidad con respecto a uno de sus parámetros, se obtiene un nuevo par potencial-densidad. Debido a lo mencionado anteriormente, Toomre [15] derivó una familia de pares potencial-densidad derivando el potencial gravitacional Φ_m n veces con respecto a a^2 .

1.3. Órbitas en potenciales axialmente simétricos

Utilizando los valores aproximados para las dimensiones de la Galaxia [1], podemos estimar el camino libre medio de una estrella antes que colisione con otra estrella. Para un conjunto de partículas que se mueven en órbitas de línea recta, el camino libre medio es $\lambda = 1/(n\sigma)$, donde n es la densidad de número y σ es la sección transversal. Suponiendo que todas las estrellas son como el Sol, la sección eficaz de colisión es $\sigma \approx \pi(2R)^2$, donde $R = 6,96 \times 10^{10}$ cm es el radio solar. Si se distribuyen 10^{11} estrellas uniformemente sobre un disco de radio de 10 kpc y grosor de 1 kpc, entonces la densidad de número de estrellas en el disco es de $0,3\text{pc}^{-3}$ y el camino libre medio es $\lambda = 1,5 \times 10^{33}\text{cm} = 5 \times 10^{14}\text{pc}$. El intervalo entre colisiones es de aproximadamente λ/v , donde v es la velocidad aleatoria de las estrellas en un lugar determinado. Cerca del Sol, las velocidades aleatorias de las estrellas suelen ser unos 50 km s^{-1} , encontrando así que el intervalo de colisión entre estrellas es aproximadamente 10^{19} años, más de 10^8 veces la edad de la Galaxia. Evidentemente, las colisiones entre estrellas son tan raras que no tiene ninguna importancia para la dinámica de la galaxia. Por lo tanto, el movimiento de cada estrella está determinado únicamente por la atracción gravitacional de todas las otras estrellas de una Galaxia.

La velocidad circular es una propiedad física de interés para la distribución de masa, debido a que permite tener información sobre la velocidad de las estrellas que se mueven alrededor de un plano galáctico en órbitas circulares alrededor del centro. A través de la velocidad circular se puede medir directamente la masa contenida en una galaxia; dicho método es considerado uno de los más eficientes desde el punto de vista observacional [1, 16, 18, 26]. Por lo mencionado anteriormente, se hallará una relación entre el potencial Φ y la velocidad circular v_c , además se obtendrán las condiciones necesarias para la existencia de órbitas circulares.

Por otro lado, se hallará una relación entre las frecuencias epicíclica y vertical² con el

²Las frecuencias epicíclica y vertical son las oscilaciones de las estrellas en el eje radial y en el eje zeta respectivamente, alrededor de una órbita circular.

potencial Φ . También se analizará la existencia de puntos críticos en el potencial efectivo Φ_{eff} , debido a que se debe garantizar que las estrellas oscilen alrededor de la órbita circular. Los puntos en donde el potencial efectivo Φ_{eff} alcanza su valor mínimo, se denominan puntos de equilibrio estable. Es decir, si la estrella se desplaza ligeramente de su órbita circular, se verá sometida a una fuerza restauradora, con el fin de que siga oscilando alrededor de su órbita circular, asegurando así que el modelo a analizar sea estable. De otra parte, los puntos en donde el potencial efectivo Φ_{eff} alcanza su valor máximo, se denominan puntos de equilibrio inestable, en estos puntos la estrella tenderá a alejarse cada vez más de su órbita circular.

1.3.1. Movimiento en el plano meridional

El movimiento de las estrellas fuera del plano ecuatorial del sistema, representa una situación compleja e interesanBinney:2008aate, debido a que el movimiento es considerado a lo largo de todo el espacio. El estudio de estas órbitas en galaxias con simetría axial, puede ser reducido a un problema en dos dimensiones, gracias a la conservación del momento angular de la componente z de las estrellas [1, 27]. Además, se asume que el potencial es simétrico alrededor de plano $z = 0$. La ecuación general del movimiento de una estrella está dada de la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi(R, z). \quad (1.3.1)$$

Reescribiendo \mathbf{r} y $\nabla\Phi$ en términos de sus componentes paralelas a los vectores unitarios \hat{e}_R , \hat{e}_ψ y \hat{e}_z , se tiene

$$\mathbf{r} = R\hat{e}_R + z\hat{e}_z \quad (1.3.2)$$

y

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z. \quad (1.3.3)$$

Partiendo de la Ec. (1.3.1) y utilizando la aceleración en coordenadas cilíndricas junto con el gradiente del potencial Φ (Ec. 1.3.3), se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{R} - R\dot{\psi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (1.3.4)$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\psi}) = 0, \quad (1.3.5)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (1.3.6)$$

La Ec. (1.3.5) expresa la conservación del momento angular respecto al eje z , en donde el momento angular con respecto al eje z queda definido por $L_z = R^2\dot{\psi}$. Las otras dos

ecuaciones (Ecs. 1.3.4 y 1.3.6) describen el movimiento de las estrellas en el plano R y z .

Eliminando $\dot{\psi}$ de la Ec. (1.3.4) se tiene

$$\ddot{R} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\Phi + \frac{L_z^2}{2R^2} \right), \quad (1.3.7)$$

en donde

$$\Phi_{eff} = \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (1.3.8)$$

es llamado el potencial efectivo. La órbita en $3D$ de las estrellas es el resultado de la combinación del movimiento sobre el plano meridional (R, z) y la rotación alrededor del eje z con velocidad angular $\dot{\psi} = L_z/R^2$. Por lo tanto, las ecuaciones de evolución de R y z en términos del potencial efectivo, quedan expresadas en la forma

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R}, \quad (1.3.9)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}. \quad (1.3.10)$$

Por esta razón, el movimiento tridimensional de una estrella en un potencial axialmente simétrico $\Phi(R, z)$, puede ser reducido a un movimiento en dos dimensiones sobre el plano meridional (R, z) .

Por otro lado, es importante obtener el mínimo del potencial efectivo Φ_{eff} , de esta forma se obtiene la condición necesaria para que las órbitas sean circulares. En el mínimo del potencial se satisfacen las condiciones

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{L_z^2}{R^3} = 0, \quad (1.3.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = 0. \quad (1.3.12)$$

La segunda condición dado por la (Ec. 1.3.12) se satisface en cualquier lugar del plano ecuatorial ($z = 0$), y la primera se satisface para un radio constante $R = R_o$, es decir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_o} = \frac{L_z^2}{R_o^3} = R_o \dot{\psi}^2. \quad (1.3.13)$$

La anterior es una condición simple para una órbita circular con velocidad angular $\dot{\psi}$. Así, el mínimo del potencial efectivo se alcanza para un radio constante R_o , en el cual la órbita circular tiene momento angular L_z .

Definiendo la velocidad angular como $\dot{\psi} = v_c/R$ y teniendo en cuenta la condición dada por la Ec. (1.3.13), la velocidad circular para cualquier radio está dada en la forma

$$v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (1.3.14)$$

Los valores que toma la velocidad circular deben ser mayores o iguales a cero.

1.3.2. Estabilidad de las órbitas

Las órbitas circulares están asociadas a dos oscilaciones independientes con frecuencias sobre los ejes R y z llamadas frecuencia epicíclica y vertical. Debido al movimiento de las estrellas en el plano meridional $(R, 0)$, se debe garantizar que las órbitas sean estables, es decir, que las estrellas oscilen en torno a su órbita circular.

Ahora bien, expandiendo el potencial efectivo Φ_{eff} en una serie de Taylor alrededor de un punto $(x, z) = (0, 0)$, en donde $x \equiv R - R_0$

$$\Phi_{eff} = \Phi_{eff}(R_0, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_0, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_0, 0)} z^2 + \dots \quad (1.3.15)$$

En la anterior expansión no se tendrán en cuenta todas las expresiones de los términos de orden xz^2 o potencias superiores de x y z en la aproximación del potencial efectivo. Se definen dos nuevas cantidades de interés físico:

- Frecuencia epicíclica

$$k^2(R_0) = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_0, 0)}, \quad (1.3.16)$$

- Frecuencia vertical

$$\nu^2(R_0) = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_0, 0)}. \quad (1.3.17)$$

Derivando la Ec. (1.3.15) con respecto a x y z respectivamente, se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_0, 0)} x, \quad (1.3.18)$$

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_0, 0)} z. \quad (1.3.19)$$

Así, teniendo en cuenta los resultados conseguidos en las Ecs. (1.3.18) y (1.3.19), junto con las definiciones para las frecuencias vertical y epicíclica, las ecuaciones de movimiento quedan expresadas como

$$\ddot{x} = -k^2 x, \quad (1.3.20)$$

y

$$\ddot{z} = -\nu^2 z. \quad (1.3.21)$$

Por lo tanto, el comportamiento de x y z es equivalente a los desplazamientos de dos osciladores armónicos, con frecuencias k y ν respectivamente.

Derivando una vez más la Ecs. (1.3.11) y (1.3.12) con respecto a R y z , se pueden expresar las frecuencias epicíclica y vertical como

$$k^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_0,0)} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_0,0)} + \frac{3L_z^2}{R^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_0,0)} + \frac{3}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_0,0)}, \quad (1.3.22)$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_0,0)} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_0,0)}. \quad (1.3.23)$$

Al igual que para la velocidad circular, los valores de las frecuencias epicíclica y vertical deben ser mayores o iguales a cero, de esta forma se garantiza que las estrellas oscilarán alrededor de la órbita circular.

2

Modelos multipolares para galaxias aplanadas

En el capítulo anterior se encontraron distribuciones de masa a partir de potenciales axialmente simétricos con formas simples [6, 12, 25]. En este capítulo, se comenzará por estudiar y encontrar el potencial gravitacional dado por una expansión multipolar hasta el término $n = 3$. Por otro lado, se realizarán transformaciones en el potencial gravitacional, con el fin de encontrar una solución de la ecuación de Poisson, y así construir modelos tridimensionales que estén caracterizados por los pares potencial-densidad. Se hallarán las distribuciones de masa correspondientes a los términos de la expansión multipolar de los potenciales gravitacionales. Finalmente se encontrarán los modelos caracterizados por el par potencial-densidad obtenidos al considerar la expansión del potencial hasta el término $n = 3$ junto con su respectivo análisis gráfico.

2.1. Expansión multipolar del potencial gravitacional

Una expresión general para una expansión multipolar del potencial gravitacional en coordenadas esféricas es dada en la forma

$$\Psi = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n P_n \cos(\theta)}{r^{n+1}}, \quad (2.1.1)$$

en donde P_n son los polinomios de Legendre, a_n son constantes relacionadas con los momentos multipolar y θ es el ángulo polar en coordenadas esféricas. Considerando la

expansión del potencial gravitacional hasta el término $n = 3$ se obtiene

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{a_0}{r} - \frac{a_1 \cos \theta}{r^2} - \frac{a_2(3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} - \frac{a_3(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4}. \quad (2.1.2)$$

Ahora bien, al pasar de un sistema de coordenadas esféricas a un sistema de coordenadas cilíndricas, se emplean las siguientes transformaciones

$$\cos \theta \rightarrow \frac{z}{r}, \quad (2.1.3)$$

$$r \rightarrow \sqrt{R^2 + z^2}. \quad (2.1.4)$$

El potencial gravitacional en coordenadas cilíndricas se puede expresar como

$$\Psi(R, z) = -\frac{a_0}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a_1 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a_2(2z^2 - R^2)}{2(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a_3 z(2z^2 - 3R^2)}{2(R^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}. \quad (2.1.5)$$

Aplicando otra transformación sobre z se logra que el Laplaciano del potencial sea distinto de cero

$$z \rightarrow z^* = a + \sqrt{z^2 + b^2}, \quad (2.1.6)$$

en donde a y b son parámetros diferentes de cero que tienen dimensiones de longitud, determinando así que tan esférico y tan plano es el modelo. De manera que el potencial de la Ec. (2.1.5) en términos de z^* , queda definido por un nuevo potencial $\Phi(R, z)$

$$\Psi(R, z) \longrightarrow \Phi(R, z) = \Psi(R, z^*). \quad (2.1.7)$$

Por lo tanto, el potencial $\Phi(R, z)$ en términos de las transformaciones dadas por las Ecs. (2.1.3), (2.1.4) y (2.1.6), queda definido de la forma

$$\Phi(R, z) = -\frac{a_o}{(R^2 + z^{*2})^{\frac{1}{2}}} - \frac{a_1 z^*}{(R^2 + z^{*2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{a_2(-R^2 + 2z^{*2})}{2(R^2 + z^{*2})^{\frac{5}{2}}} - \frac{a_3 z^*(2z^{*3} - 3R^2)}{2(R^2 + z^{*2})^{\frac{7}{2}}}. \quad (2.1.8)$$

El potencial gravitacional de la Ec. (2.1.8) se reescribirá en términos de z , a y b . De esta forma, los potenciales gravitacionales quedan definidos para

- $n = 0$

$$\Phi_0(R, z) = -\frac{a_o}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.1.9)$$

- $n = 1$

$$\Phi_1(R, z) = -\frac{a_o}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{a_1(a + \sqrt{z^2 + b^2})}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.1.10)$$

- $n = 2$

$$\Phi_2(R, z) = -\frac{a_o}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{a_1(a + \sqrt{z^2 + b^2})}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{a_2(-R^2 + 2(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2)}{2[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{5}{2}}}. \quad (2.1.11)$$

- $n = 3$

$$\Phi_3(R, z) = -\frac{a_o}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{a_1(a + \sqrt{z^2 + b^2})}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{a_2[-R^2 + 2(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]}{2[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{a_3(a + \sqrt{z^2 + b^2})[2(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 - 3R^2]}{2[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{\frac{7}{2}}}. \quad (2.1.12)$$

La Ec. (2.1.9) fue el potencial considerado por Miyamoto y Nagai [6] n, en donde el parámetro a_0 equivale a GM , siendo M la masa total del sistema. Ellos construyeron un modelo tridimensional caracterizado por un par potencial-densidad dado por las Ecs. (1.2.3) y (1.2.4), el cual emula bastante bien la estratificación de la distribución de masa para la Galaxia tanto en el bulbo central como en el disco [6]. Las Ecs. (2.1.10) y (2.1.11) fueron los potenciales gravitacionales escogidos por Vogt y Letelier [8] para representar un modelo tridimensional teórico. La Ec. (2.1.12) es el último término considerado en la expansión del potencial para la construcción de un nuevo par potencial-densidad en el presente trabajo.

2.2. Distribución de masa

A partir del potencial gravitacional, dado como una expansión multipolar hasta el término $n = 3$, se obtiene la distribución de masa por medio de la ecuación de Poisson. La distribución de masa es una cantidad de interés físico muy importante, la cual permite tener una idea de como está distribuida la masa en una galaxia al momento de realizar un análisis gráfico; es decir, a través de ésta se puede identificar en donde se encuentra la mayor cantidad de masa en las componentes que se consideran en el modelamiento.

Por lo mencionado anteriormente, es importante encontrar una relación entre el potencial gravitacional $\Phi(R, z)$ y la distribución de masa. Para comenzar, el potencial gravitacional dado por la Ec. (2.1.5) es una solución de la ecuación de Laplace, y por

lo tanto se debe cumplir que:

$$\nabla^2\Psi = \Psi_{,RR} + \frac{\Psi_{,R}}{R} + \Psi_{,zz} = 0. \quad (2.2.1)$$

Es necesario utilizar la transformación en z dada por la Ec. (2.1.6), de esta manera se evidencia que los potenciales gravitacionales dados por las Ecs. (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11) y (2.1.12) son soluciones de la ecuación de Poisson, es decir el Laplaciano del potencial es distinto de cero, es decir

$$\nabla^2\Phi(R, z) = 4\pi G\rho(R, z), \quad (2.2.2)$$

en donde $\rho(R, z)$ es la distribución de densidad tridimensional, correspondiente al potencial gravitacional $\Phi(R, z)$, la cual es definida por la expresión

$$\rho = \frac{1}{4\pi G} \left(\Phi_{RR} + \frac{\Phi_{,R}}{R} + \Phi_{,zz} \right). \quad (2.2.3)$$

2.3. Pares potencial-densidad

En esta sección, se presentarán los modelos que se obtuvieron al considerar la expansión multipolar del potencial hasta el término $n = 3$. Las ecuaciones analíticas para la densidad, la velocidad circular, las frecuencias epicíclica y vertical, correspondientes a los potenciales gravitacionales de las Ecs. (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11) y (2.1.12), estarán parametrizadas en términos de a con el fin de realizar un análisis gráfico sencillo de dichas cantidades¹. De acuerdo a lo anterior, se obtendrán las ecuaciones junto con sus correspondientes gráficas para las superficies de densidad constante² y las curvas de las variables físicas, correspondientes a diferentes valores de los parámetros utilizados.

2.3.1. Modelo para el par potencial-densidad $n=0$

Considerando el potencial gravitacional dado por la Ec. (2.1.9) y utilizando la ecuación de Poisson, se encuentra la distribución de masa³, la cual se expresa de la forma

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{b}^2}{4\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}} \{ \tilde{R}^2 + [1 + 3\xi][1 + \xi]^2 \}, \quad (2.3.1)$$

¹Las cantidades introducidas serán consideradas adimensionales.

²Las densidades fueron normalizadas a la unidad en el centro.

³Ver Apéndice A para el cálculo de la densidad.

donde $\tilde{R} = R/a$, $\tilde{b} = b/a$, $\tilde{z} = z/a$, $a_0 = GM$, $\tilde{\rho} = a^3 \rho/M$ y $\xi = \sqrt{\tilde{z}^2 + \tilde{b}^2}$, siendo M la masa total del sistema⁴. La ecuación anterior no tiene ninguna limitación, en cuanto a los valores que se tomen para \tilde{b} , pues las superficies de densidad constante siempre van a ser funciones monótonamente decrecientes tanto en la coordenada radial \tilde{R} como en la coordenada z , y sus valores serán positivos.

Las gráficas de los contornos de $\tilde{\rho}(R, z)$ (Ec. 2.3.1), se muestran en la Figuras (2.1), (2.2) y (2.3), con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$. Donde la distribución de masa es múltiplo de la densidad de masa del centro; es decir, a medida que R aumenta la densidad se hace cada vez más pequeña en comparación con la densidad del centro. Se puede observar que se describe de manera satisfactoria la parte discoidal de la galaxia espiral, para todos los valores de \tilde{b} , pero sólo se tomaron tres diferentes valores de \tilde{b} para graficar los contornos de densidad.

Por otro lado, cabe destacar que los contornos de la densidad van tomando una forma cada vez más aplanada a medida que \tilde{b} se hace más pequeño; es decir, si tomamos el contorno de densidad constante con valor 0.001, por ejemplo, vemos que cada vez el contorno disminuye significativamente su valor en el eje \tilde{z} en cada gráfica, aplanándose cada vez más. También se va haciendo más plano en el eje \tilde{R} , en otras palabras, el disco cada vez es más delgado.

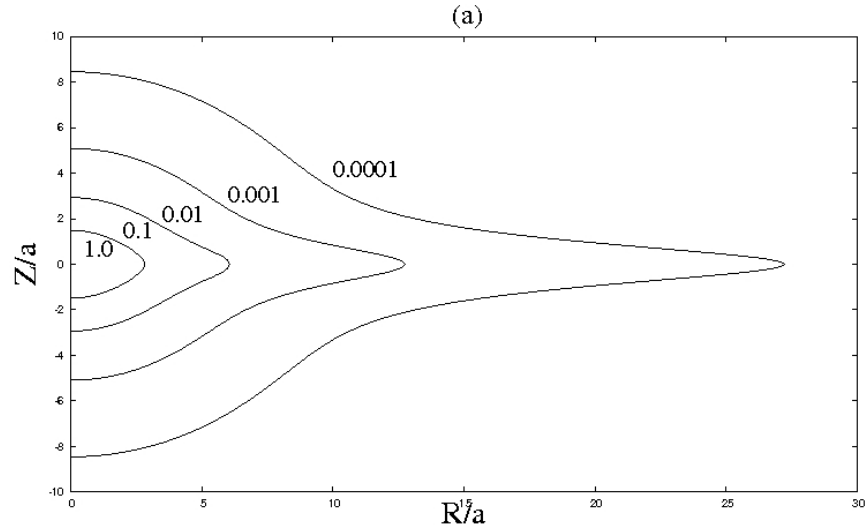


Figura 2.1: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes al parámetro (a) $\tilde{b}=1.0$.

⁴El sistema es conformado por el bulbo y el disco de una galaxia espiral.

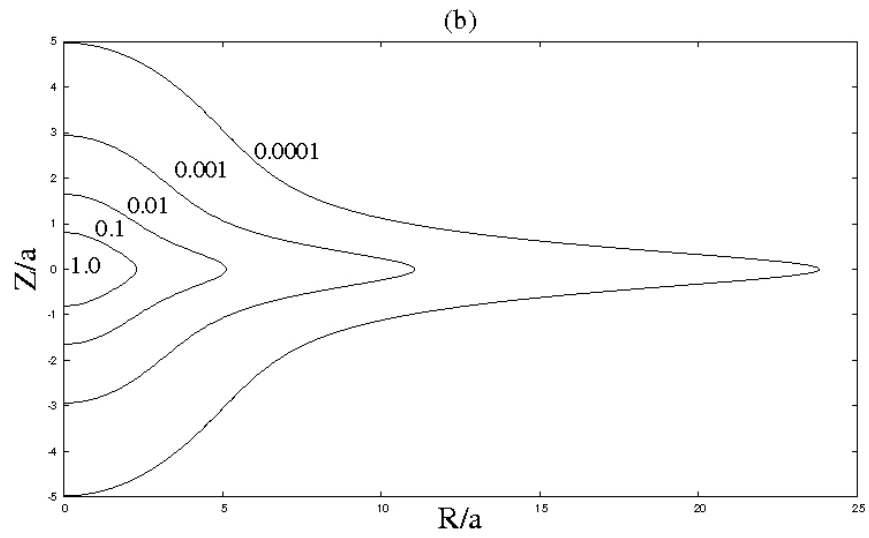


Figura 2.2: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes al parámetro (b) $\tilde{b}=0.5$.

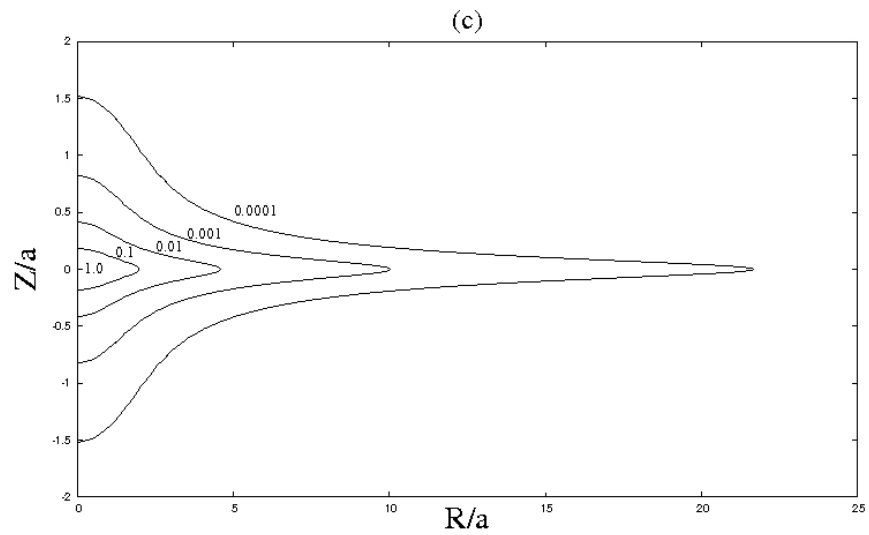


Figura 2.3: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) correspondientes al parámetro (c) $\tilde{b}=0.1$.

Por otra parte, la velocidad circular y las frecuencias epicíclica y vertical⁵ correspondientes al potencial de la Ec. (2.1.9), están dadas por

$$\tilde{v}_c^2 = \frac{\tilde{R}^2}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.3.2)$$

$$\tilde{k}^2 = \frac{\tilde{R}^2 + 4(1 + \tilde{b})^2}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{5}{2}}}, \quad (2.3.3)$$

$$\tilde{\nu}^2 = \frac{1 + \tilde{b}}{\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.3.4)$$

en donde $\tilde{v}_c^2 = av_c^2/GM$, $\tilde{k}^2 = a^3k^2/GM$ y $\tilde{\nu}^2 = a^3\nu^2/GM$. Las gráficas de dichas cantidades se muestran en las Figuras (2.4), (2.5) y (2.6), para diferentes valores de \tilde{b} . La curva de la velocidad circular tiene un comportamiento similar a la curva de rotación de una galaxia real [18], sin olvidarse que la comparación es únicamente cualitativa. Por último, las curvas de las frecuencias muestran un comportamiento válido, es decir, para diferentes valores del \tilde{R} las frecuencias \tilde{k} y $\tilde{\nu}$ son siempre positivas, por lo tanto, avalan la estabilidad del modelo.

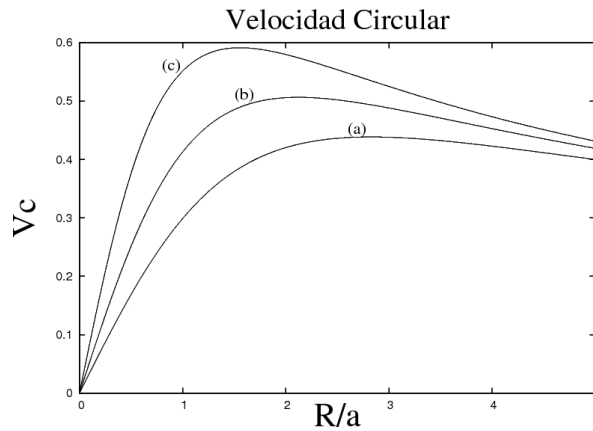


Figura 2.4: Curva de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$.

⁵Ver Apéndice A.

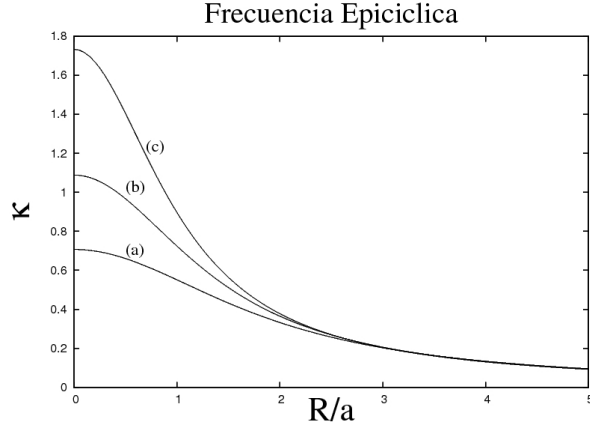


Figura 2.5: Curva de la frecuencia epicíclica con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$.

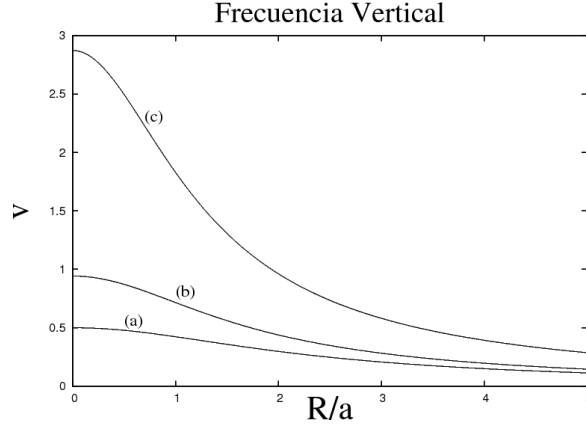


Figura 2.6: Curva de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros (a) $\tilde{b}=1.0$, (b) $\tilde{b}=0.5$ y (c) $\tilde{b}=0.1$.

2.3.2. Modelo para el par potencial-densidad $n=1$

Considerando el potencial gravitacional dado por la Ec. (2.1.10), se encuentra la distribución de masa⁶, la cual se expresa como

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{b}^2}{4\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{ \tilde{R}^4(1 - \tilde{a}_1) + \tilde{R}^2(1 + \xi)[\tilde{a}_1(1 - 8\xi) + (1 + \xi)(2 + 3\xi)] + (1 + \xi)^3[2\tilde{a}_1(1 + 4\xi) + (1 + \xi)(1 + 3\xi)] \}. \quad (2.3.5)$$

⁶Ver Apéndice B.1 para el cálculo de la distribución de masa.

en donde $\tilde{a}_1 = a_1/GMa$. Los parámetros y constantes también fueron reescalados en términos de a . Para el valor particular de $\tilde{a}_1 = 1$, la ecuación anterior se reduce a la distribución de masa de Miyamoto y Nagai (Ec. 1.2.4). Por otro lado, la ecuación de la densidad para este modelo está limitada; es decir, los parámetros y constantes sólo pueden tomar ciertos valores, tal que el comportamiento de las superficies de la densidad sean monótonamente decrecientes y sus valores sean positivos. Por lo tanto, estos valores se escogieron de tal manera que cumplan con las condiciones expuestas anteriormente.

De este modo, se muestran las gráficas de los contornos de la densidad $\tilde{\rho}$ en la Figuras (2.7), (2.8) y (2.9), con parámetro $\tilde{b}=0.5$ y constantes (a) $\tilde{a}_1=1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{b}=-0.1$. Para estos valores la densidad es una función que cumple con lo mencionado anteriormente, además se ve claramente que a medida que disminuye el parámetro \tilde{a}_1 los contornos de la densidad se van haciendo cada vez más planos; es decir, los contornos de densidad constante que estratifican la parte del disco se van haciendo cada vez más largo y delgados, mientras que el eje \tilde{z} se mantiene casi constante, ya que su variación no es muy significativa.

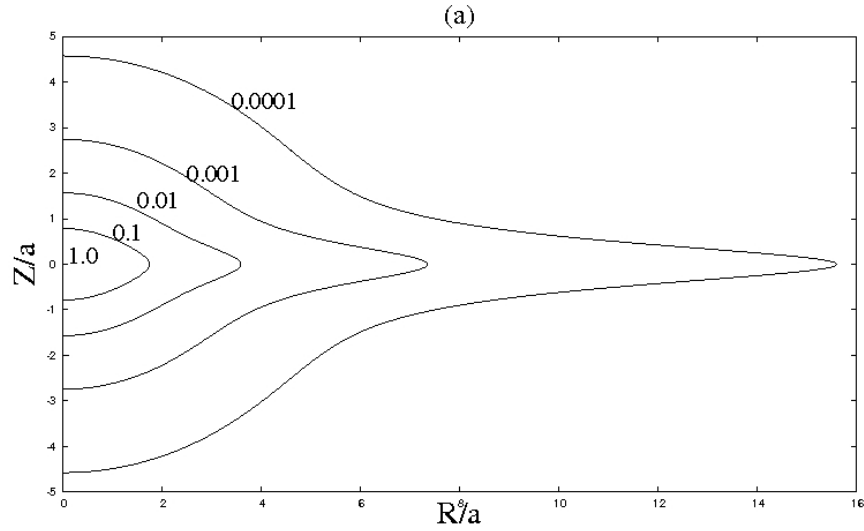


Figura 2.7: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros y constantes $\tilde{b}=0.5$ y $\tilde{a}_1=0.5$.

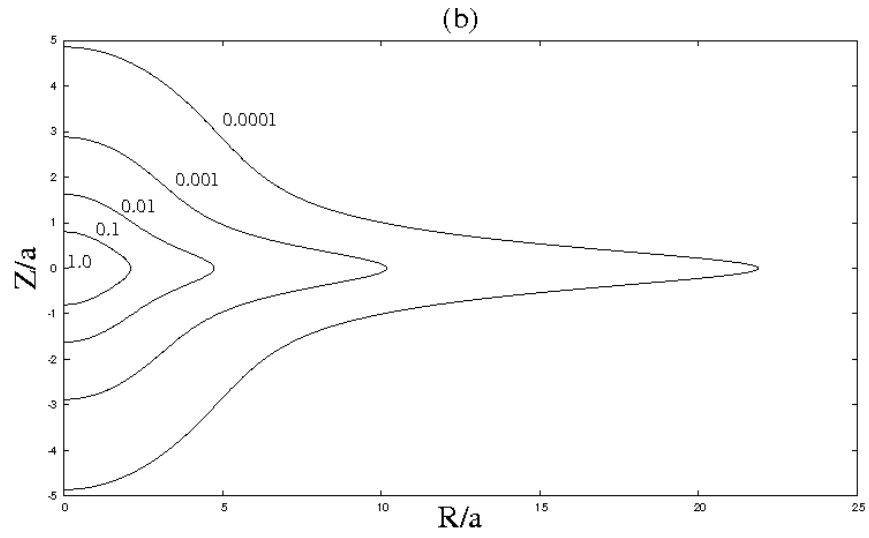


Figura 2.8: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$ y $\tilde{a}_1=0.1$.

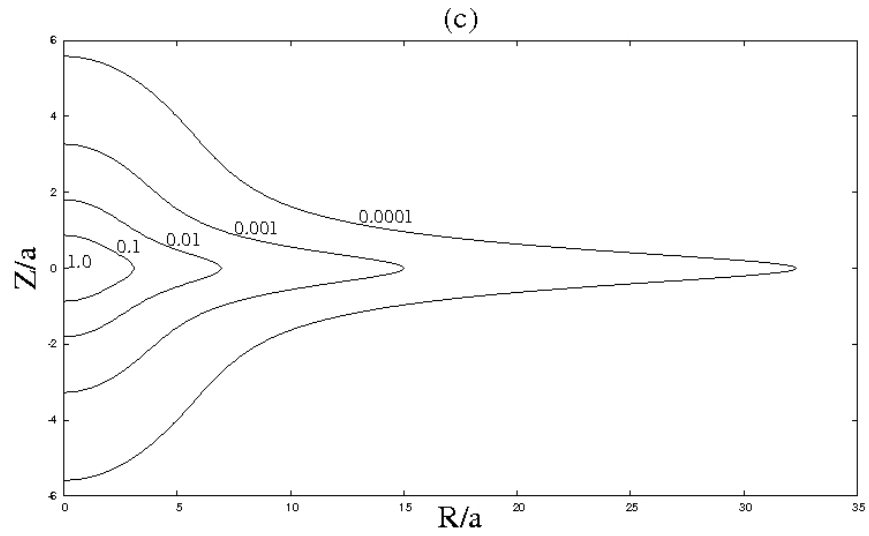


Figura 2.9: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$ y $\tilde{a}_1=-0.3$.

Las ecuaciones de la velocidad circular y la frecuencia epicíclica y vertical⁷ correspondientes al potencial de la Ec. (2.1.10), están definidas de la forma

$$\tilde{v}_c^2 = \frac{\tilde{R}^2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1)]}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{5}{2}}}, \quad (2.3.6)$$

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{ \tilde{R}^4 + \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[5(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_1] + 4(1 + \tilde{b})^3(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1) \}, \quad (2.3.7)$$

$$\tilde{\nu}^2 = \frac{\tilde{R}^2(1 + \tilde{b} - \tilde{a}_1) + (1 + \tilde{b})^2(1 + \tilde{b} + 2\tilde{a}_1)}{\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{5}{2}}}, \quad (2.3.8)$$

en donde \tilde{v}_c^2 , \tilde{k}^2 y $\tilde{\nu}^2$ están parametrizadas al igual que en la subsección anterior. Las gráficas de dichas cantidades se muestran en las Figuras (2.10), (2.11) y (2.12), para los mismos valores del parámetro y constantes considerados en los contornos de la densidad. La curva de la velocidad circular presenta un comportamiento similar a la curva de rotación de una galaxia real [18]. También, al igual que en el modelo anterior, se presentan valores positivos para las frecuencias, por ende el modelo sigue siendo estable.

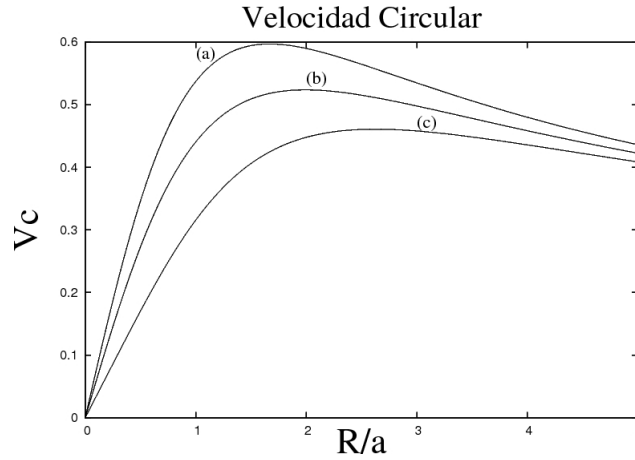


Figura 2.10: Curvas de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetros $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=-0.1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{a}_1=1.0$.

⁷Ver Apéndice B.2 para el cálculo de la velocidad circular y las frecuencias epicíclica y vertical.

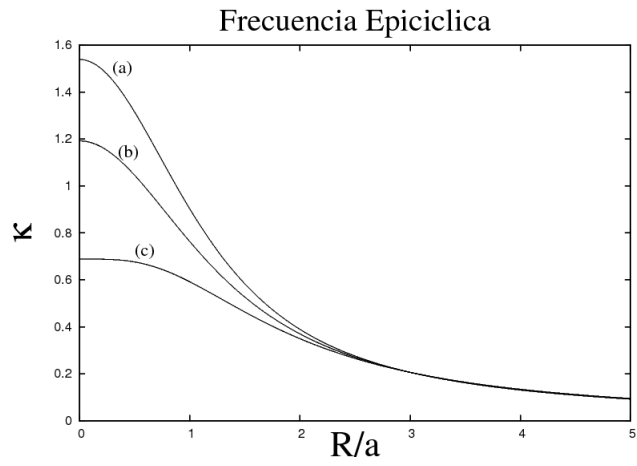


Figura 2.11: Curvas de la frecuencia epicíclica \tilde{k} con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=-0.1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{a}_1=1.0$.

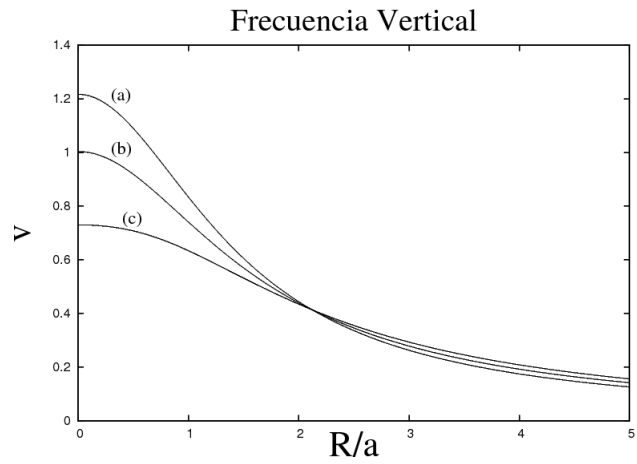


Figura 2.12: Curvas de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=-0.1$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$ y (c) $\tilde{a}_1=1.0$.

2.3.3. Modelo para el par potencial-densidad n=2

Considerando la ecuación del potencial gravitacional dado por la Ec. (2.1.11) y utilizando la ecuación de Poisson, se encuentra la distribución de masa⁸ de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6(1 - \tilde{a}_1) + 3\tilde{R}^4[2(1 + \xi)^3 - 6\tilde{a}_1\xi(1 + \xi) - 3\tilde{a}_2] \\ & + 3\tilde{R}^2(1 + \xi)^2[2(1 + \xi)^2(1 + 2\xi) + 2\tilde{a}_1(1 + \xi) - \tilde{a}_2(1 + 25\xi)] \\ & + 2(1 + \xi)^4[(1 + \xi)^2(1 + 3\xi) + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(1 + 4\xi) + 3\tilde{a}_2(1 + 5\xi)]\} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

en donde $\tilde{a}_2 = a_2/GMa^2$. Los parámetros y constantes también fueron reescalados en términos de a como en la subsección anterior. Para los valores particulares de $\tilde{a}_1 = 1$ y $\tilde{a}_2 = 2/3$, se recobra la ecuación de densidad del modelo tres de Miyamoto y Nagai. Por otro lado, la ecuación de la densidad para este modelo también está limitada, es decir, los parámetros y constantes sólo pueden tomar ciertos valores.

A continuación, se muestran las gráficas de los contornos de la densidad $\tilde{\rho}$ en la Figuras (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16), con parámetros $\tilde{b}=0.5$ y (a) $\tilde{a}_1=1$, $\tilde{a}_2=2/3$ (b) $\tilde{a}_1=1$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$. Para estos valores la densidad es físicamente aceptable al igual que en el modelo anterior. También se puede notar que cuando los valores de \tilde{a}_2 son cada vez más pequeños, para un \tilde{b} y \tilde{a}_1 fijo en las figuras (a) y (b), el perfil de distribución de la masa se hace más plano; es decir, los contornos de densidad constante que estratifican la parte del disco se van haciendo cada vez más largo y delgados, mientras que el eje \tilde{z} se mantiene casi constante, ya que su variación no es muy significativa. En las figuras (c) y (d) tienen un comportamiento similar al de las figuras (a) y (b). Pero, cuando el parámetro \tilde{a}_1 se hace más pequeño, los contornos de la densidad se hacen aún más largos y delgados.

⁸Ver Apéndice C.1 para el cálculo de la distribución de masa.

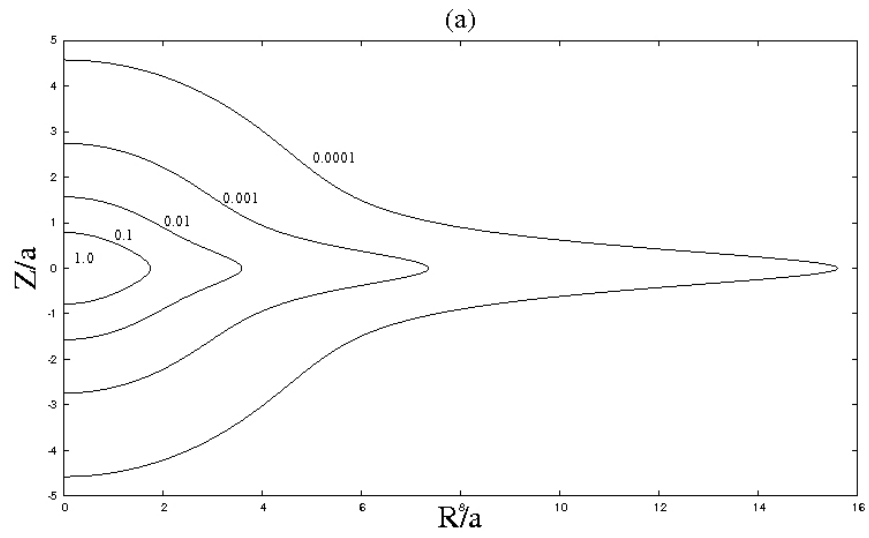


Figura 2.13: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$ y $\tilde{a}_2=2/3$.

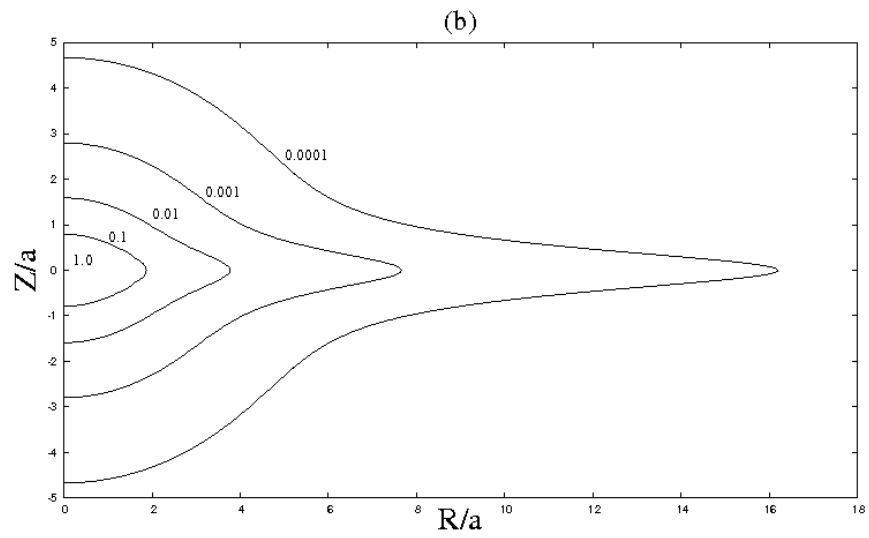


Figura 2.14: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$ y $\tilde{a}_2=-0.1$

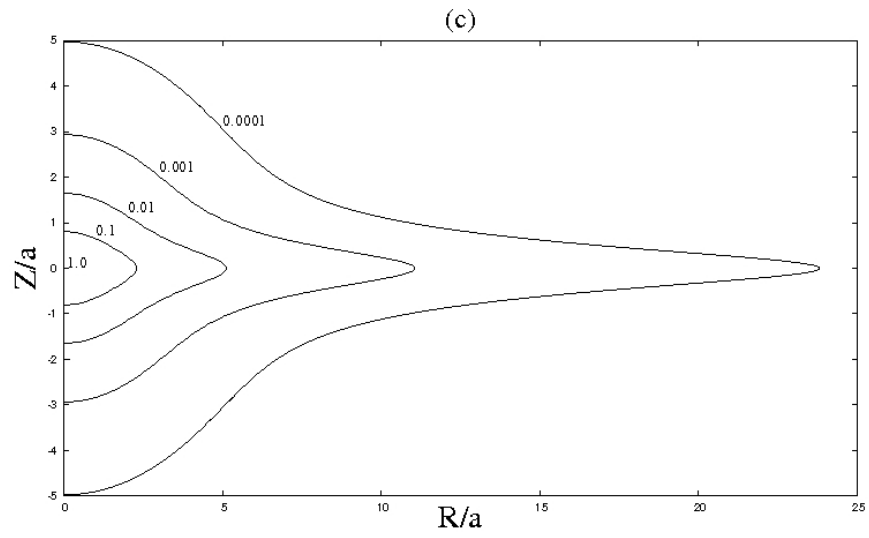


Figura 2.15: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.0$ y $\tilde{a}_2=2/3$.

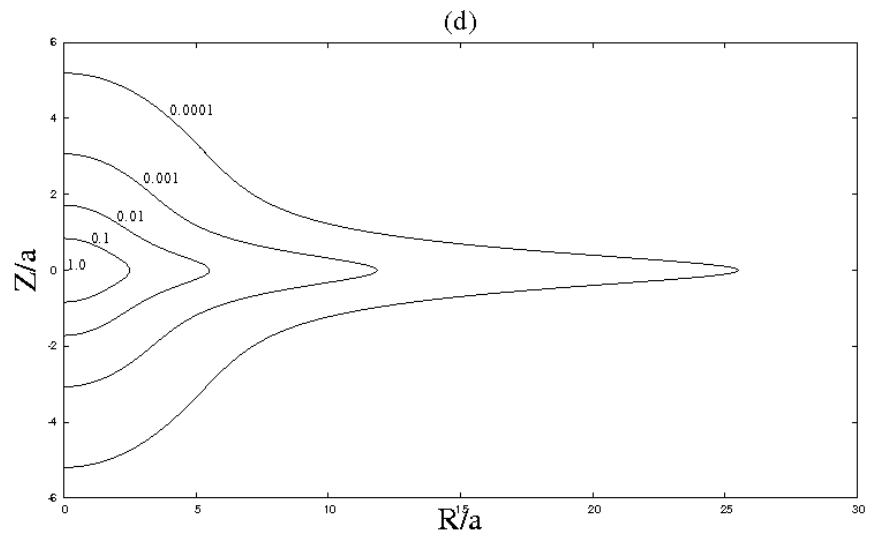


Figura 2.16: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0$ y $\tilde{a}_2=-0.1$.

Por otra parte, las ecuaciones de la velocidad circular y las frecuencias epicíclica y vertical⁹ correspondientes al potencial de la Ec. (2.1.11), están dados por

$$\tilde{v}_c^2 = \frac{\tilde{R}^2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2\tilde{R}^4 + \tilde{R}^2[4(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2] + 2(1 + \tilde{b})^2[(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2]\}, \quad (2.3.10)$$

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6 + 3\tilde{R}^4[4(1 + \tilde{b})^2 - 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + \tilde{a}_2] + 18\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2[(1 + \tilde{b})^2 + \tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2] + 8(1 + \tilde{b})^4[(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2]\}, \quad (2.3.11)$$

$$\tilde{\nu}^2 = \frac{1}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2\tilde{R}^4(1 + \tilde{b} + \tilde{a}_1) + \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[4(1 + \tilde{b})^2 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 9\tilde{a}_2] + 2(1 + \tilde{b})^3[(1 + \tilde{b})^2 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 3\tilde{a}_2]\}, \quad (2.3.12)$$

en donde \tilde{v}_c^2 , \tilde{k}^2 y $\tilde{\nu}^2$ están parametrizadas al igual que en subsección anterior. Por lo tanto, las respectivas gráficas de dichas cantidades se muestran en las Figuras (2.17), (2.18) y (2.19), para los mismos valores de los parámetros considerados en los contornos de la densidad. De modo que, la curva de la velocidad circular presenta al igual que en los casos anteriores un comportamiento similar a la curva de rotación de una galaxia real [18]. Por otro lado, se puede apreciar que los valores de las frecuencias son positivas y muy pequeñas cerca al centro, y por ende este modelo también es considerado estable.

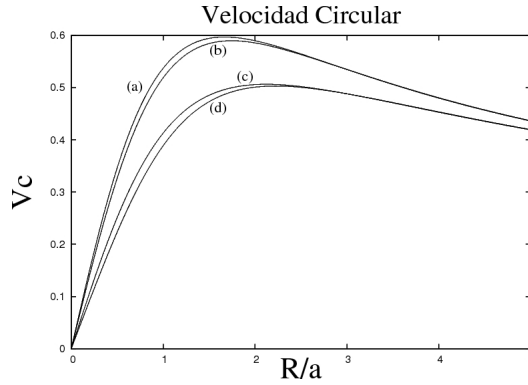


Figura 2.17: Curvas de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetro $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=2/3$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$.

⁹Ver Apéndice C.2 para el cálculo de la velocidad circular y las frecuencias epicíclica y vertical.

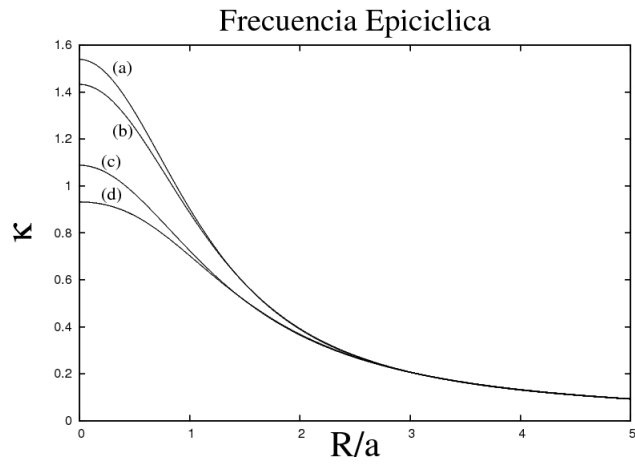


Figura 2.18: Curvas de la frecuencia epicíclica \tilde{k} con parámetros $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=2/3$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$.

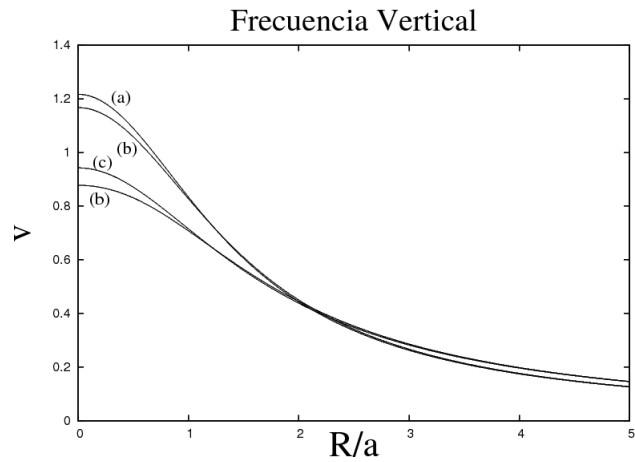


Figura 2.19: Curvas de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$ (a) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=2/3$, (b) $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=-0.1$, (c) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y (d) $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=-0.1$.

2.3.4. Modelo para el par potencial-densidad n=3

Finalmente, considerando el potencial gravitacional dado por la Ec. (2.1.12) y utilizando la ecuación de Poisson, se encuentra la distribución de masa¹⁰ dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} = & \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{11}{2}}} \{2\tilde{R}^8(1 - \tilde{a}_1) \\
& + \tilde{R}^6[3(\tilde{a}_3 - \tilde{a}_1) + 2(1 + \xi)(-\tilde{a}_1(1 + 4\xi) + (1 + \xi)(1 + 3(\xi)))] \\
& + 3\tilde{R}^4(1 + \xi)^2[\tilde{a}_3(18\xi - 7) + (1 + \xi)(2(1 + \xi)(1 - 3\tilde{a}_1\xi) \\
& + 2(1 + \xi)^2(2 + 3\xi) - \tilde{a}_2(4 + 25\xi))] \\
& + \tilde{R}^2(1 + \xi)^3[-8\tilde{a}_3(2 + 27\xi) + (1 + \xi)(2(1 + \xi)^2(4 + 9\xi) \\
& + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(5 + 8\xi) + 3\tilde{a}_2(1 - 15\xi))] \\
& + 2(1 + \xi)^5[4\tilde{a}_3(1 + 6\xi) + (1 + \xi)((1 + \xi)^2(1 + 3\xi) \\
& + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(1 + 4\xi) + 3\tilde{a}_2(1 + 5\xi))]\}.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

en donde $\tilde{a}_3 = a_3/GMa^3$. Los parámetros y constantes también fueron reescalados en términos de a . La ecuación de la densidad para este modelo también está limitada, es decir, los parámetros y constantes sólo pueden tomar ciertos valores, al igual que en los dos últimos modelos considerados.

A continuación, se muestran las gráficas de los contornos de la densidad $\tilde{\rho}$ en la Figuras (2.20), (2.21), (2.22) y (2.23), con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$ (a) $\tilde{a}_2=0.5$, $\tilde{a}_3=2/3$ (b) $\tilde{a}_2=0.5$, $\tilde{a}_3=-0.1$ (c) $\tilde{a}_2=0.0$, $\tilde{a}_3=2/3$ y (d) $\tilde{a}_2=0.0$, $\tilde{a}_3=-0.1$. Para estos valores la densidad es físicamente aceptable al igual que en los dos modelos anteriores. También se puede notar que cuando los valores de \tilde{a}_2 son cada vez más pequeños, para un \tilde{b} y \tilde{a}_1 fijo en las figuras (a) y (b), el perfil de distribución de la masa se hace más plano; es decir, los contornos de densidad constante que estratifican la parte del disco se van haciendo cada vez más largos y delgados, mientras que el eje \tilde{z} se mantiene casi constante, ya que su variación no es muy significativa. Las figuras (c) y (d) tienen un comportamiento similar al de las figuras (a) y (b). Pero, cuando el parámetro \tilde{a}_1 se hace más pequeño, los contornos de la densidad se hacen un poco más largos.

¹⁰Ver Apéndice D.1 para el cálculo de la distribución de masa.

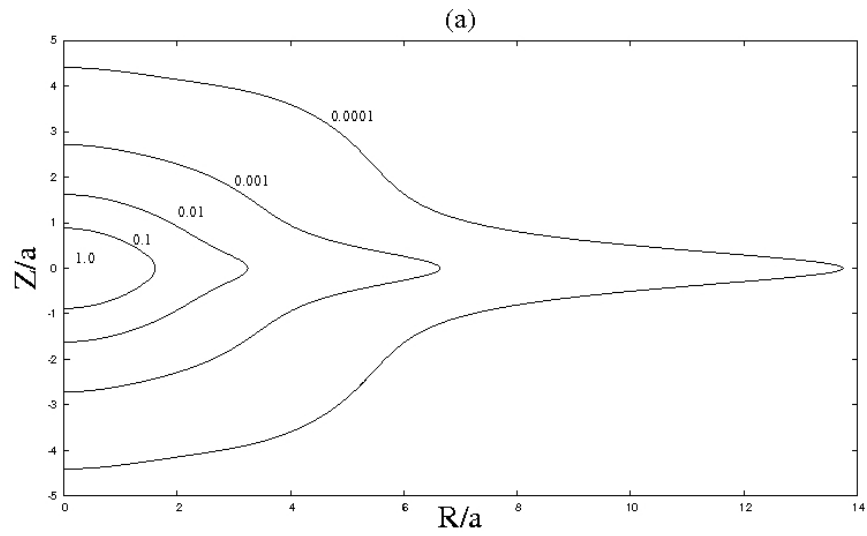


Figura 2.20: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0.5$ y $\tilde{a}_3=2/3$.

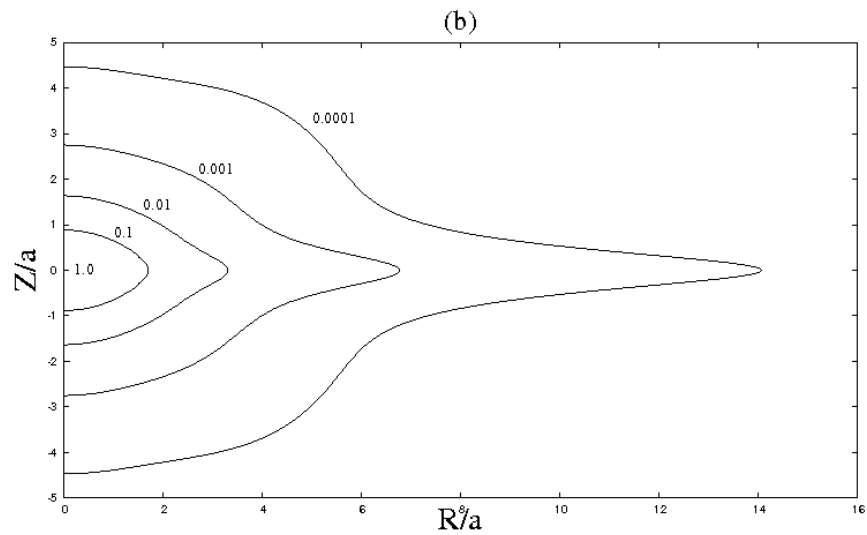


Figura 2.21: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0.5$ y $\tilde{a}_3=-0.1$.

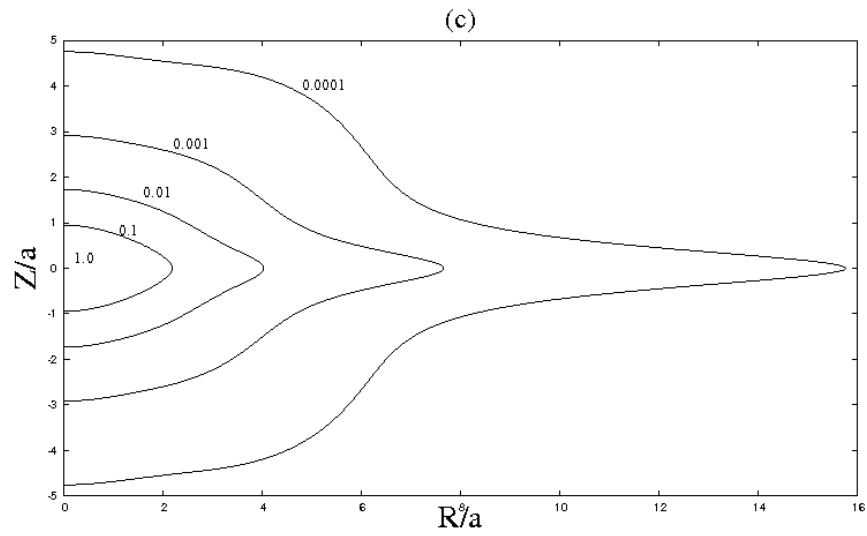


Figura 2.22: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0$, y $\tilde{a}_3=2/3$.

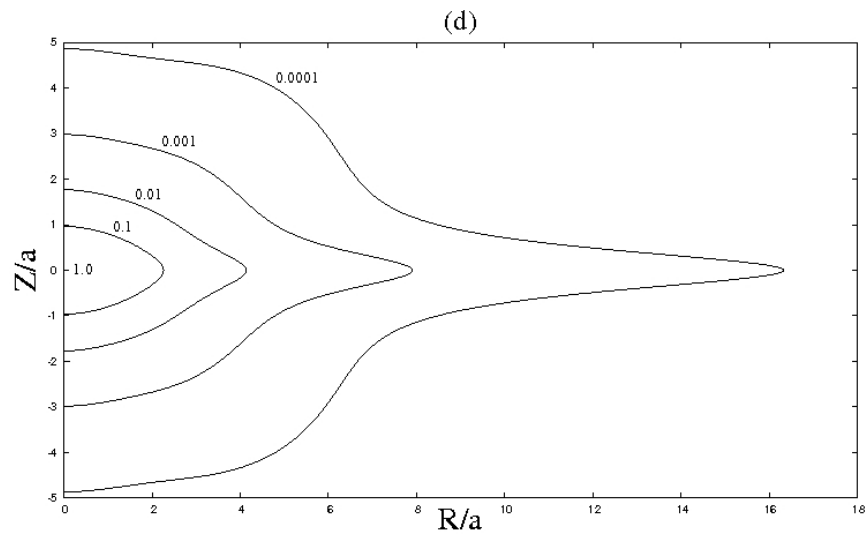


Figura 2.23: Contornos de densidad constante en el plano (\tilde{R}, \tilde{z}) con parámetros constantes $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.5$, $\tilde{a}_2=0$, y $\tilde{a}_3=-0.1$.

Las ecuaciones de la velocidad circular y las frecuencias epicíclica y vertical¹¹ correspondientes al potencial de la Ec. (2.1.12), están definidas de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{v}_c^2 = & \frac{\tilde{R}^2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6 + 3\tilde{R}^4[2(1 + \tilde{b})^2 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - \tilde{a}_2] \\ & + 3\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[4\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})r^2 + 2(1 + \tilde{b})^3 + 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) - 5\tilde{a}_3] \\ & + 2(1 + \tilde{b})^3[(1 + \tilde{b})((1 + \tilde{b})^2 + 3(\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 2\tilde{a}_2)) + 10\tilde{a}_3]\}, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}^2 = & \frac{1}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{11}{2}}} \{2\tilde{R}^8 + \tilde{R}^6[14(1 + \tilde{b})^2 - 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 3\tilde{a}_2] \\ & + \tilde{R}^4(1 + \tilde{b})[30(1 + \tilde{b})^3 + 12\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 - 51\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) - 45\tilde{a}_3] \\ & + 2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^3[13(1 + \tilde{b})^3 + 21\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 - 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) - 95\tilde{a}_3] \\ & + 8(1 + \tilde{b})^5[(1 + \tilde{b})^3 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) + 10\tilde{a}_3]\}, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^2 = & \frac{1}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6(1 + \tilde{b} - \tilde{a}_1) \\ & + \tilde{R}^4[3\tilde{a}_3 + (1 + \tilde{b})(2(1 + \tilde{b})(3 + \tilde{b}) + 2\tilde{a}_1\tilde{b}(2 + \tilde{b})) - 9\tilde{a}_2] \\ & + \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2[-24\tilde{a}_3 + (1 + \tilde{b})(6(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2)] \\ & + 2(1 + \tilde{b})^4[4\tilde{a}_3 + (1 + \tilde{b})^3 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b})]\}. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

en donde \tilde{v}_c^2 , \tilde{k}^2 y $\tilde{\nu}^2$ están también parametrizadas al igual que en subsecciones anteriores. Las gráficas de dichas cantidades se muestran en las Figuras (2.24), (2.25) y (2.26), para los mismos valores de los parámetros considerados en los contornos de la densidad. La curva de la velocidad presenta un comportamiento válido, al igual que en los modelos anteriores. Por otro lado, se puede apreciar que los valores de las frecuencias también son positivas y muy pequeñas cerca al centro, y por ende este modelo también es considerado como estable, al igual que los modelos anteriores.

¹¹Ver Apéndice D.2 para el cálculo de la velocidad circular y las frecuencias epicíclica y vertical.

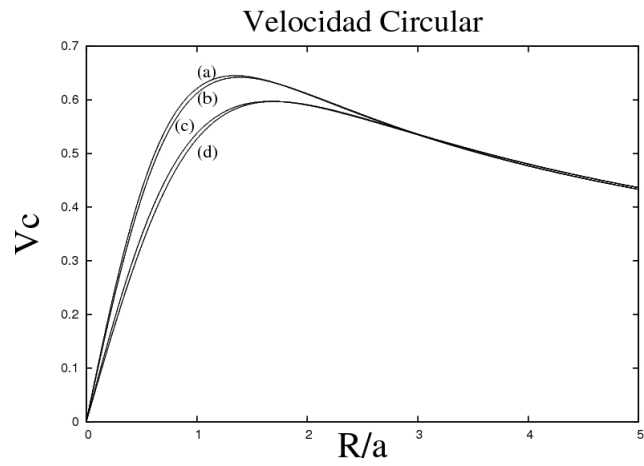


Figura 2.24: Curvas de la velocidad circular \tilde{v}_c con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=0.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y $\tilde{a}_3=-0.1$.

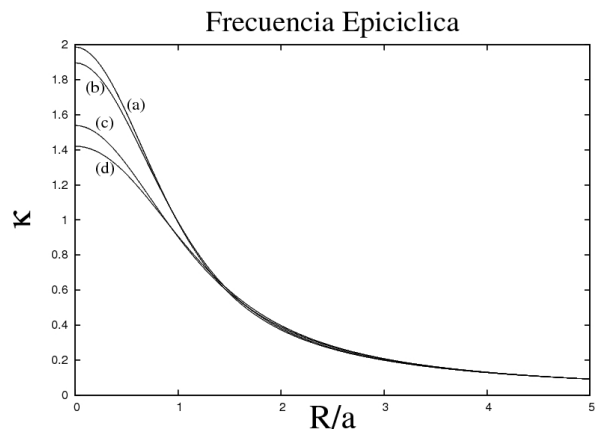


Figura 2.25: Curvas de la frecuencia epicíclica $\tilde{\kappa}$ con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=1.0$, $\tilde{a}_2=2/3$ y $\tilde{a}_3=0.0$.

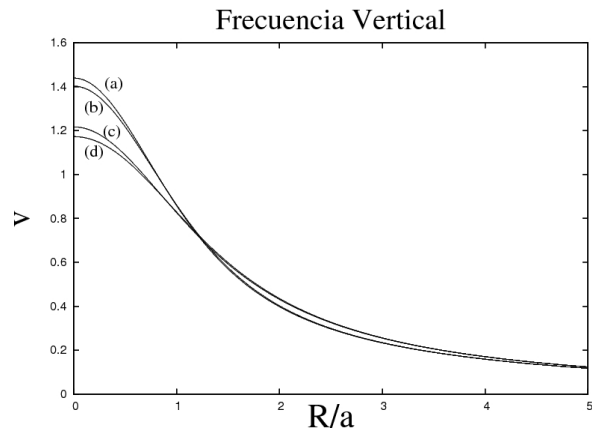


Figura 2.26: Curvas de la frecuencia vertical $\tilde{\nu}$ con parámetros $\tilde{b}=0.5$, $\tilde{a}_1=1.5$, $\tilde{a}_2=2/3$ y $\tilde{a}_3=0$

Conclusiones

En este trabajo se han planteado modelos tridimensionales axialmente simétricos para la distribución de masa en galaxias, en el marco de la teoría de la gravitación de Newton. Estos modelos se obtuvieron considerando el potencial gravitacional como una expansión en términos de los polinomios de Legendre dado por la Ec.(2.1.1) y, a través de la ecuación de Poisson, se encontraron las correspondientes densidades de masa. Éstas corresponden a la característica principal de los modelos que se obtuvieron. Para cada modelo se calculó el perfil de velocidad en el plano galáctico junto con las frecuencias epicíclica y vertical de las oscilaciones de las estrellas alrededor de las órbitas circulares.

Los modelos estudiados describen satisfactoriamente, de manera cualitativa, el comportamiento observacional mostrado en las curvas de rotación [18]. Por otra parte, los contornos de la superficies de densidad mostrados para cada modelo presentaron un comportamiento valido para la parte discoidal de una galaxia espiral. Adicionalmente, las curvas de las frecuencias tienen un comportamiento satisfactorio, ya que siempre los valores son positivos mostrando así que los modelos que se consideraron son estables.

En los modelos, los contornos de densidad muestran que a medida que se toma un término más de la expansión del potencial gravitacional, y por ende se tienen en cuenta más parámetros, el bulbo se va haciendo cada vez más ancho y aplanado. Por lo tanto el modelo $n = 3$ presentará ya no un disco delgado como en los casos anteriores, sino por el contrario el disco se hace cada vez más grueso a medida que los parámetros se van haciendo más pequeños. Estos modelos son de gran utilidad, ya que permiten por medio de los parámetros a ajustar con los datos observacional de la curva de velocidades circular de una galaxia real, y así obtener resultados que describan satisfactoriamente el comportamiento observacional, y por ende se podrá corroborar de esta forma la aplicabilidad de los modelos planteados.

Un inconveniente de estos modelos es que la densidad de masa no es una función

monótonamente decreciente, tanto en la coordenada radial R como en la coordenada z , para ciertos valores arbitrarios de los parámetros y constantes. Sin embargo, esto se puede solucionar al imponer las restricciones necesarias sobre las velocidades circulares y las frecuencias epicíclica y vertical para que estas cantidades sean no negativas. Dichas restricciones fueron lo suficiente para garantizar que la densidad de masa sea una función físicamente aceptable; es decir, los contornos de la distribución de masa están describiendo de manera aceptable la parte discoidal de la galaxia.

Bibliografía

- [1] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press (2008).
- [2] A. Bhattacharya, S. Joardar, and R. Bhattacharya, *Astronomy and Astrophysics*, Infinity Science Press (2008).
- [3] R. Schodel *et. al.*, *A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way*, *Nature* **419**, 694 (2002).
- [4] E. Hubble, *The realm of the nebulae*, Yale University Press (1936).
- [5] P. Murdin, *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, Institute of Physics Publishing (2000).
- [6] M. Miyamoto and R. Nagai, *Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies*, *Publ. Astron. Soc. Jap.* **27**, 533 (1975).
- [7] T. Faber, *Galactic halos and gravastars: static spherically symmetric spacetimes in modern general relativity and astrophysics*, M. Sc. Thesis in Applied Mathematics, Victoria University of Wellington (2006).
- [8] D. Vogt and P. S. Letelier, *On multipolar analytical potentials for galaxies*, *Publ. Astron. Soc. Jap.* **57**, 871 (2005).
- [9] L. Hernquist, *An analytical model for spherical galaxies and bulges*, *Astrophys. J.* **356**, 359 (1990).
- [10] W. Jaffe, *A simple model for the distribution of light in spherical galaxies*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **202**, 995 (1983).
- [11] R. Nagai and M. Miyamoto, *A family of self-gravitating stellar systems*, *Publ. Astron. Soc. Jap.* **28**, 1 (1976).

- [12] H. C. Plummer, *On the problem of distribution in globular star clusters*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **71**, 460 (1911).
- [13] C. Satho, *Dynamical models of axisymmetric galaxies and their application to the elliptical galaxy NGC 4697*, Publ. Astron. Soc. Jap. **32**, 41 (1980).
- [14] T. de Zeeuw and D. Pfenniger, *Potential-density pair for galaxy*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **235**, 949 (1988).
- [15] G. Toomre, *On the distribution of matter within highly flattened galaxies*, Astrophys. J. **138**, 385 (1963).
- [16] G. A. González, S. M. Plata, and J. Ramos-Caro, *Finite thin disc models of four galaxies in the Ursa Major cluster: NGC 3877, NGC 3917, NGC 3949 and NGC 4010*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **404**, 468 (2010).
- [17] D. Vogt and P. S. Letelier, *Relativistic models of galaxies*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **419**, 694 (2005).
- [18] J. R. Brownstein and J. W. Moffat, *Galaxy rotation curves without nonbaryonic dark matter*, Astrophys. J. **636**, 721 (2006).
- [19] J. F. Pedraza, J. Ramos-Caro, and G. A. González, *An infinite family of self-consistent models for axisymmetric flat galaxies*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **390**, 1587 (2008).
- [20] J. I. Reina and G. A. González, *An infinite family of generalized Kalnajs discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **371**, 1873 (2006).
- [21] D. Vogt and P. S. Letelier, *New models of general relativistic static thick disks*, Phys. Rev. **D71**, 084030 (2005).
- [22] D. Vogt and P. S. Letelier, *Exact general relativistic rotating thick disks*, Phys. Rev. **D76**, 084010 (2007).
- [23] G. A. González and P. S. Letelier, *Exact general relativistic thick disks*, Phys. Rev. **D69**, 044013 (2004).
- [24] T. Padmanabhap, *An invitation to astrophysics*, Academic Press (2005).
- [25] G. Kuzmin, *A stationary Galaxy model admitting triaxial velocity distribution*, Astron. Zh. **33**, 27 (1956).
- [26] M. A. W. Verheijen and R. Sancisi, *The Ursa Major cluster of galaxies IV. HI synthesis observations*, Astron. and Astrophys. **370**, 765 (2001).

- [27] L. Sparke and J. Gallagher, *Galaxies in the Universe: An Introduction*, Cambridge University Press (2007).

Apéndices

A

Par potencial-densidad para el modelo n=0

La primera derivada del potencial dado por la Ec.(2.1.9) con respecto a \tilde{R} se expresa de la forma

$$\Phi_{,\tilde{R}} = \frac{GM\tilde{R}}{a^2[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.0.1})$$

en donde los parámetros están reescalados al igual que en el capítulo 3. Derivando nuevamente la ecuación anterior con respecto a \tilde{R} se obtiene

$$\Phi_{,\tilde{R}\tilde{R}} = \frac{GM}{a^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}} \{(1 + \xi)^2 - 2\tilde{R}^2\}. \quad (\text{A.0.2})$$

Por otro lado, derivando el potencial gravitacional dado por la Ec.(2.1.9) con respecto a z , se obtiene

$$\Phi_{,\tilde{z}} = \frac{\tilde{z}GM(1 + \xi)}{a^2(1 + \xi)^{\frac{1}{2}}[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.0.3})$$

en donde los parámetros están también reescalados. Derivando nuevamente la ecuación anterior con respecto a \tilde{z}

$$\begin{aligned} \Phi_{,\tilde{z}\tilde{z}} = & \frac{GM}{a^3\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}} \{\xi^2(1 + \xi)[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] \\ & + \tilde{z}^2\xi[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] - 3\tilde{z}^2\xi(1 + \xi)^2 - \tilde{z}^2(1 + \xi)[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]\}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

Entonces, si reemplazamos las ecuaciones anteriores en la ecuación de la densidad dada por la Ec.(2.2.3), se obtiene

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{b}^2}{4\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}} \{\tilde{R}^2 + [1 + 3\xi][1 + \xi]^2\}. \quad (\text{A.0.5})$$

B

Cálculos para el modelo n=1

B.1. Par potencial-densidad

Derivando el potencial gravitacional dado por la Ec.(2.1.10) con respecto a R , se obtiene

$$\Phi_{,\tilde{R}} = \frac{\tilde{R}GM}{a^2[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}} \{[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] + 3\tilde{a}_1(1 + \xi)\}, \quad (\text{B.1.1})$$

en donde, los parámetros también están reescalados en términos de a al igual que en capítulo 3. Volviendo a derivar con respecto a R , queda definido como

$$\begin{aligned} \Phi_{,\tilde{R}\tilde{R}} = \frac{GM}{a^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{ & [\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][(1 + \xi)^2 - 2\tilde{R}^2] \\ & + 3a_1(1 + \xi)[(1 + \xi)^2 - 4\tilde{R}^2]\}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

Por otro lado, derivando el potencial gravitacional dado por la Ec.(2.1.10) con respecto a z , se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_{,z} = \frac{\tilde{z}GM}{a^2\xi[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}} \{ & [\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2](1 + \xi) \\ & - \tilde{a}_1[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] + 3\tilde{a}_1(1 + \xi)^2\}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

Derivando nuevamente con respecto a z , se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_{,zz} = \frac{GM}{a^3\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{ & ([\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][(1 + \xi) - a_1] + 3a_1(1 + \xi)^2) \\ & ([\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][\xi^2 - 5\tilde{z}\xi - \tilde{z}^2]) \\ & + \tilde{z}^2(\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2)\xi[(R^2 + (1 + \xi)^2) \\ & + 2\xi^2 + 4\tilde{a}_1\xi]\}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la función de la distribución de masa dada por la Ec.(2.2.3), se obtiene la densidad analítica para este modelo, dada de la forma

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} &= \frac{1}{4\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{ \tilde{b}^2 \tilde{R}^4 (1 - \tilde{a}_1) + \tilde{R}^2 \tilde{b}^2 \tilde{a}_1 (1 + \xi) [1 - 8\xi] \\
&\quad + \tilde{R}^2 \tilde{b}^2 \tilde{a}_1 (1 + \xi) [2 + 3\xi^2 + 5\xi] + (1 + \xi)^3 [2\tilde{a}_1 (1 + 4\xi) + (1 + \xi)(1 + 3\xi)] \}, \\
&= \frac{\tilde{b}^2}{4\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{ \tilde{R}^4 (1 - \tilde{a}_1) + \tilde{R}^2 (1 + \xi) [\tilde{a}_1 (1 - 8\xi) + (1 + \xi)(2 + 3\xi)] \\
&\quad + (1 + \xi)^3 [2\tilde{a}_1 (1 + 4\xi) + (1 + \xi)(1 + 3\xi)] \}. \tag{B.1.5}
\end{aligned}$$

B.2. Velocidad circular y frecuencias

La velocidad circular está definida por la siguiente expresión

$$v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \tag{B.2.1}$$

Reemplazando la derivada del potencial gravitacional dado por la Ec.(B.1.1) en la ecuación anterior, se obtiene la velocidad circular evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$v^2 = \frac{\tilde{R}^2 GM}{a[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{5}{2}}} \{ \tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1) \}, \tag{B.2.2}$$

en donde los parámetros también fueron reescalados en términos de a , de tal manera que

$$\tilde{v}_c^2 = \frac{\tilde{R}^2 [\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1)]}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{5}{2}}}. \tag{B.2.3}$$

Por otra parte, las frecuencias epicíclica y vertical están definidas respectivamente de la forma

$$k^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_0,0)} + \frac{3}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_0,0)}, \tag{B.2.4}$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_0,0)} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_0,0)}, \tag{B.2.5}$$

en donde estas cantidades, al igual que la velocidad circular, son evaluadas en $z = 0$. Reemplazando las derivadas del potencial dados por las Ecs.(B.1.1,B.1.2) en la frecuencia

epicíclica, se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{k}^2 &= \frac{1}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{-2\tilde{R}^4 + 3\tilde{R}^4 + 6\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2 + \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2 \\
&\quad - 12\tilde{a}_1\tilde{R}^2(1 + \tilde{b}) - 2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2 + 9\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})\tilde{R}^2 + 3(1 + \tilde{b})^4 \\
&\quad + 9\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^3 + (1 + \tilde{b})^3(3\tilde{a}_1 + 1 + \tilde{b})\}, \\
&= \frac{1}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{\tilde{R}^4 + \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[5(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_1] + 4(1 + \tilde{b})^3(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1)\},
\end{aligned} \tag{B.2.6}$$

y reemplazando la derivada del potencial dado por la Ec.(B.1.4) en la ecuación de la frecuencia vertical, se obtiene

$$\tilde{\nu}^2 = \frac{\tilde{R}^2(1 + \tilde{b} - \tilde{a}_1) + (1 + \tilde{b})^2(1 + \tilde{b} + 2\tilde{a}_1)}{\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{5}{2}}}. \tag{B.2.7}$$

C

Cálculos para para el modelo n=2

C.1. Par potencial-densidad

Considerando el tercer término asociado a la expansión del potencial gravitacional, dado de la forma

$$\Phi = -\frac{\tilde{a}_2[-\tilde{R}^2 + 2(1 + \xi)^2]}{2a[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{5}{2}}}, \quad (\text{C.1.1})$$

en donde los parámetros también están reescalados en términos de a al igual que en capítulo 3. Derivando el potencial gravitacional dado por la ecuación anterior con respecto a \tilde{R} , se obtiene

$$\Phi_{,\tilde{R}} = \frac{3GM\tilde{a}_2\tilde{R}}{2a^2[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{4(1 + \xi)^2 - \tilde{R}^2\}. \quad (\text{C.1.2})$$

La segunda derivada del potencial con respecto a \tilde{R} está dada de la forma

$$\Phi_{,\tilde{R}\tilde{R}} = \frac{3GM\tilde{a}_2}{2a^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{4[\tilde{R}^4 + (1 + \xi)^4] - 27\tilde{R}^2(1 + \xi)^2\}. \quad (\text{C.1.3})$$

Por otro lado, derivando el potencial gravitacional dado por la Ec.(C.1.1) con respecto a z , se obtiene

$$\Phi_{,z} = \frac{3GM\tilde{a}_2\tilde{z}(1 + \xi)}{2a^2\xi[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{7}{2}}} \{2(1 + \xi)^2 - 3\tilde{R}^2\}. \quad (\text{C.1.4})$$

Derivando nuevamente con respecto a z , se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_{,zz} = & \frac{3GM\tilde{a}_2}{2a^3\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{[-3\tilde{R}^2 + 2(1 + \xi)^2]\{\tilde{b}^2(1 + \xi)[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] \\ & + \tilde{z}^2\xi\tilde{R}^2 - 6\xi\tilde{z}^2(1 + \xi)^2\} + 4\tilde{z}^2\xi(1 + \xi)^2[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]\}. \end{aligned} \quad (\text{C.1.5})$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la función de la distribución de masa dada por la Ec.(2.2.3), se obtiene la densidad analítica para este modelo, dada de la forma

$$\tilde{\rho} = \frac{3\tilde{a}_2\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{-3\tilde{R}^4 - \tilde{R}^2(1 + \xi)^2[1 + 25\xi] + 2(1 + \xi)^4(1 + 5\xi)\}. \quad (\text{C.1.6})$$

Ahora bien, si unimos la densidad dada por la ecuación anterior con la densidad correspondiente al modelo $n = 1$, se obtiene la distribución de masa de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{-9\tilde{R}^4 + 2\tilde{R}^4(1 - \tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] - 3\tilde{a}_2\tilde{R}^2(1 + \xi)^2(1 + 25\xi) \\ &\quad + 2\tilde{R}^2(1 + \xi)[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][\tilde{a}_1(1 - 8\xi) + (1 + \xi) + (2 + 3\xi)] \\ &\quad + 2(1 + \xi)^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][2\tilde{a}_1(1 + 4\xi) + (1 + \xi)(1 + 3\xi)] + 6\tilde{a}_2(1 + \xi)^4(1 + 5\xi)\}, \\ &= \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6(1 - \tilde{a}_1) + 3\tilde{R}^4[2(1 + \xi)^3 - 6\tilde{a}_1\xi(1 + \xi) - 3\tilde{a}_2] \\ &\quad + 3\tilde{R}^2(1 + \xi)^2[2(1 + \xi)^2(1 + 2\xi) + 2\tilde{a}_1(1 + \xi) - \tilde{a}_2(1 + 25\xi)] \\ &\quad + 2(1 + \xi)^4[(1 + \xi)^2(1 + 3\xi) + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(1 + 4\xi) + 3\tilde{a}_2(1 + 5\xi)]\}. \end{aligned} \quad (\text{C.1.7})$$

C.2. Velocidad circular y frecuencias

Reemplazando la derivada del potencial gravitacional dado por la Ec.(C.1.2) en la Ec.(B.2.1), se obtiene la velocidad circular evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$\tilde{v}_c^2 = \frac{\tilde{R}^2\tilde{a}_2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{12(1 + \tilde{b})^2 - 3\tilde{R}^2\}. \quad (\text{C.2.1})$$

Ahora bien, si se une la velocidad circular dada por la ecuación anterior con la velocidad circular correspondiente al modelo $n = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{v}_c^2 &= \frac{\tilde{R}^2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2\tilde{R}^2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] + 2(1 + \tilde{b})(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] \\ &\quad - 3\tilde{a}_2\tilde{R}^2 + 12\tilde{a}_2(1 + \tilde{b})^2\}, \\ &= \frac{\tilde{R}^2}{[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2\tilde{R}^4 + \tilde{R}^2[4(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2] \\ &\quad + 2(1 + \tilde{b})^2[(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2]\}, \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

en donde la ecuación anterior es la correspondiente velocidad circular del modelo. Reemplazando las derivadas del potencial gravitacional dado por la Ecs.(C.1.2,C.1.3) en

la Ec.(B.2.4), se obtiene la frecuencia epicíclica evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$\tilde{k}^2 = \frac{\tilde{a}_2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{3\tilde{R}^4 - 54\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2 + 48(1 + \tilde{b})^4\}. \quad (\text{C.2.3})$$

Ahora bien, si unimos la ecuación anterior con la ecuación de la frecuencia epicíclica correspondiente al modelo $n = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{k}^2 &= \frac{1}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^4[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] + 2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][5(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_1] \\ &+ 4(1 + \tilde{b})^3(1 + \tilde{b} + 3\tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] + 3\tilde{R}^4\tilde{a}_2 - 54\tilde{a}_2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2 + 48\tilde{a}_2(1 + \tilde{b})^4\}, \\ &= \frac{1}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6 + 3\tilde{R}^4[4(1 + \tilde{b})^2 - 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + \tilde{a}_2] \\ &+ 18\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2[(1 + \tilde{b})^2 + \tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2] \\ &+ 8(1 + \tilde{b})^4[(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2]\}, \end{aligned} \quad (\text{C.2.4})$$

en donde la ecuación anterior es la ecuación de la velocidad circular correspondiente al modelo.

Reemplazando las derivadas del potencial gravitacional dado por la Ec.(C.1.4) en la Ec.(B.2.5), se obtiene la frecuencia vertical evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$\tilde{\nu}^2 = \frac{3\tilde{a}_2}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2(1 + \tilde{b})^3 - 3\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})\}. \quad (\text{C.2.5})$$

Ahora bien, si unimos la frecuencia vertical dada por la ecuación anterior con la frecuencia vertical correspondiente al modelo $n = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^2 &= \frac{1}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b} - \tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] \\ &+ 2(1 + \tilde{b})^2(1 + \tilde{b} + 2\tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] - 9\tilde{a}_2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2(1 + \tilde{b})^3\}, \\ &= \frac{1}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{7}{2}}} \{2\tilde{R}^4(1 + \tilde{b} + \tilde{a}_1) + \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[4(1 + \tilde{b})^2 \\ &+ 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 9\tilde{a}_2] + 2(1 + \tilde{b})^3[(1 + \tilde{b})^2 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 3\tilde{a}_2]\}, \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

en donde la ecuación anterior es la frecuencia vertical correspondiente a este modelo.

D

Cálculos para para el modelo n=3

D.1. Par potencial-densidad

Considerando el último término asociado a la expansión del potencial gravitacional, dado de la forma

$$\Phi = -\frac{GM\tilde{a}_3[2(1+\xi)^3 - 3(1+\xi)\tilde{R}^2]}{2a[\tilde{R}^2 + (1+\xi)^2]^{\frac{7}{2}}}, \quad (\text{D.1.1})$$

en donde los parámetros también están reescalados en términos de a al igual que en capítulo 3. Derivando el potencial gravitacional dado por la ecuación anterior con respecto a \tilde{R} , se obtiene

$$\Phi_{,\tilde{R}} = \frac{5GM\tilde{a}_3\tilde{R}(1+\xi)}{2a^2[\tilde{R}^2 + (1+\xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{4(1+\xi)^2 - 3\tilde{R}^2\}. \quad (\text{D.1.2})$$

La segunda derivada del potencial con respecto a \tilde{R} , está dada de la forma

$$\Phi_{,\tilde{R}\tilde{R}} = \frac{5GM\tilde{a}_3(1+\xi)}{2a^3[\tilde{R}^2 + (1+\xi)^2]^{\frac{11}{2}}} \{4(1+\xi)^4 + 18\tilde{R}^4 - 41\tilde{R}^2(1+\xi)^2\}. \quad (\text{D.1.3})$$

Por otro lado, derivando el potencial gravitacional dado por la Ec.(D.1.1) con respecto a z , se obtiene

$$\Phi_{,z} = \frac{GM\tilde{a}_3\tilde{z}}{2a^2\xi[\tilde{R}^2 + (1+\xi)^2]^{\frac{9}{2}}} \{8(1+\xi)^4 + 3\tilde{R}^4 - 24\tilde{R}^2(1+\xi)^2\}. \quad (\text{D.1.4})$$

Derivando nuevamente con respecto a z , el potencial correspondiente al modelo se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_{,zz} = & \frac{GM\tilde{a}_3}{2a^3\xi^3[\tilde{R}^2 + (1+\xi)^2]^{\frac{11}{2}}} \{[3\tilde{R}^4 + 8(1+\xi)^4 - 24\tilde{R}^2(1+\xi)^2]\{[\tilde{R}^2 + (1+\xi)^2]\tilde{b}^2\} \\ & + \tilde{z}^2\xi(1+\xi)[200\tilde{R}^2(1+\xi)^2 - 40(1+\xi)^4 - 75\tilde{R}^4]\}. \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la función de la distribución de masa dada por la Ec.(2.2.3), se obtiene la densidad analítica para este modelo, dada de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} = & \frac{\tilde{a}_3 \tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{11}{2}}} \{3\tilde{R}^6 + 3\tilde{R}^4(1 + \xi)(18\xi - 7) \\ & - 8\tilde{R}^2(1 + \xi)^3(27\xi + 2) + 8(1 + \xi)^5(6\xi + 1)\}.\end{aligned}\quad (\text{D.1.6})$$

Ahora bien, si unimos la densidad dada por la ecuación anterior con la densidad correspondiente al modelo $n = 2$, se obtiene la distribución de masa de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} = & \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{11}{2}}} \{3\tilde{a}_3\tilde{R}^6 + 2\tilde{R}^6(1 - \tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2] \\ & + 3\tilde{a}_3\tilde{R}^4(1 + \xi)(18\xi - 7) + 3\tilde{R}^4[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][2(1 + \xi)^3 - 6\tilde{a}_1\xi(1 + \xi) - 3\tilde{a}_2] \\ & - 8\tilde{a}_3\tilde{R}^2(1 + \xi)^3(27\xi + 2) + 3\tilde{R}^2(1 + \xi)^2[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][2(1 + \xi)^2(1 + 2\xi) \\ & + 2\tilde{a}_1(1 + \xi) - \tilde{a}_2(1 + 25\xi)] + 8\tilde{a}_3(1 + \xi)^5(6\xi + 1) \\ & + 2(1 + \xi)^4[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2][(1 + \xi)^2(1 + 3\xi) + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(1 + 4\xi) + 3\tilde{a}_2(1 + 5\xi)]\}, \\ = & \frac{\tilde{b}^2}{8\pi\xi^3[\tilde{R}^2 + (1 + \xi)^2]^{\frac{11}{2}}} \{2\tilde{R}^8(1 - \tilde{a}_1) \\ & + \tilde{R}^6[3(\tilde{a}_3 - \tilde{a}_1) + 2(1 + \xi)(-\tilde{a}_1(1 + 4\xi) + (1 + \xi)(1 + 3(\xi)))] \\ & + 3\tilde{R}^4(1 + \xi)^2[\tilde{a}_3(18\xi - 7) + (1 + \xi)(2(1 + \xi)(1 - 3\tilde{a}_1\xi) \\ & + 2(1 + \xi)^2(2 + 3\xi) - \tilde{a}_2(4 + 25\xi))] \\ & + \tilde{R}^2(1 + \xi)^3[-8\tilde{a}_3(2 + 27\xi) + (1 + \xi)(2(1 + \xi)^2(4 + 9\xi) \\ & + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(5 + 8\xi) + 3\tilde{a}_2(1 - 15\xi))] \\ & + 2(1 + \xi)^5[4\tilde{a}_3(1 + 6\xi) + (1 + \xi)((1 + \xi)^2(1 + 3\xi) \\ & + 2\tilde{a}_1(1 + \xi)(1 + 4\xi) + 3\tilde{a}_2(1 + 5\xi))]\}.\end{aligned}\quad (\text{D.1.7})$$

D.2. Velocidad circular y frecuencias

Reemplazando la derivada del potencial gravitacional dado por la Ec.(D.1.1) en la Ec.(B.2.1), se obtiene la velocidad circular evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$\tilde{v}_c^2 = \frac{5\tilde{a}_3\tilde{R}^2(1 + \xi)}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{4(1 + \tilde{b})^2 - 3\tilde{R}^2\}.\quad (\text{D.2.1})$$

Ahora bien, si unimos la velocidad circular dada por la ecuación anterior con la velocidad circular correspondiente al modelo $n = 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_c^2 &= \frac{\tilde{R}^2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^4[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] \\
&+ \tilde{R}^2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][4(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2] \\
&+ 2(1 + \tilde{b})^2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2] \\
&+ 5\tilde{a}_3(1 + \tilde{b})[4(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{R}^2]\}, \\
&= \frac{\tilde{R}^2}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6 + 3\tilde{R}^4[2(1 + \tilde{b})^2 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - \tilde{a}_2] \\
&+ 3\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[4\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 2(1 + \tilde{b})^3 + 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) - 5\tilde{a}_3] \\
&+ 2(1 + \tilde{b})^3[(1 + \tilde{b})((1 + \tilde{b})^2 + 3(\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 2\tilde{a}_2)) + 10\tilde{a}_3]\}, \tag{D.2.2}
\end{aligned}$$

en donde la ecuación anterior es la correspondiente velocidad circular del modelo. Reemplazando las derivadas del potencial gravitacional dado por la Ecs.(D.1.1,D.1.2) en la Ec.(B.2.4), se obtiene la frecuencia epicíclica evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$\tilde{k}^2 = \frac{5\tilde{a}_3(1 + \tilde{b})}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{11}{2}}} \{-38(1 + \tilde{b})^2\tilde{R}^2 + 16(1 + \tilde{b})^4 - 9\tilde{R}^4\}. \tag{D.2.3}$$

Ahora bien, si unimos la ecuación anterior con la ecuación de la frecuencia epicíclica correspondiente al modelo $n = 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{k}^2 &= \frac{1}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{11}{2}}} \{2\tilde{R}^6[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] \\
&+ 3\tilde{R}^4[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][4(1 + \tilde{b})^2 - 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + \tilde{a}_2] \\
&+ 18\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][(1 + \tilde{b})^2 + \tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2] \\
&+ 8(1 + \tilde{b})^4[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 6\tilde{a}_2] \\
&+ 190\tilde{a}_3\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^3 + 80\tilde{a}_3(1 + \tilde{b})^5 - 45\tilde{a}_3\tilde{R}^4(1 + \tilde{b})\}, \\
&= \frac{1}{2[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{11}{2}}} \{2\tilde{R}^8 + \tilde{R}^6[14(1 + \tilde{b})^2 - 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 3\tilde{a}_2] \\
&+ \tilde{R}^4(1 + \tilde{b})[30(1 + \tilde{b})^3 + 12\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 - 51\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) - 45\tilde{a}_3] \\
&+ 2\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^3[13(1 + \tilde{b})^3 + 21\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 - 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) - 95\tilde{a}_3] \\
&+ 8(1 + \tilde{b})^5[(1 + \tilde{b})^3 + 3\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_2(1 + \tilde{b}) + 10\tilde{a}_3]\}, \tag{D.2.4}
\end{aligned}$$

en donde la ecuación anterior es la ecuación de la velocidad circular correspondiente al modelo. Reemplazando las derivadas del potencial gravitacional dado por la Ec.(D.1.4) en la Ec.(B.2.5), se obtiene la frecuencia vertical evaluada en $z = 0$, dada de la forma

$$\tilde{v}^2 = \frac{\tilde{a}_3}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{+8(1 + \tilde{b})^4 + 3\tilde{R}^4 - 24\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2\}. \tag{D.2.5}$$

Ahora bien, si unimos la frecuencia vertical dada por la ecuación anterior con la frecuencia vertical correspondiente al modelo $n = 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}^2 &= \frac{1}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^4(1 + \tilde{b} - \tilde{a}_1)[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2] \\
&+ \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][4(1 + \tilde{b})^2 \\
&+ 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 9\tilde{a}_2] + 2(1 + \tilde{b})^3[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2][(1 + \tilde{b})^2 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) + 3\tilde{a}_2] \\
&+ 8(1 + \tilde{b})^4 + 3\tilde{R}^4 - 24\tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2\}, \\
&= \frac{1}{2\tilde{b}[\tilde{R}^2 + (1 + \tilde{b})^2]^{\frac{9}{2}}} \{2\tilde{R}^6(1 + \tilde{b} - \tilde{a}_1) \\
&+ \tilde{R}^4[3\tilde{a}_3 + (1 + \tilde{b})(2(1 + \tilde{b})(3 + \tilde{b}) + 2\tilde{a}_1\tilde{b}(2 + \tilde{b})) - 9\tilde{a}_2] \\
&+ \tilde{R}^2(1 + \tilde{b})^2[-24\tilde{a}_3 + (1 + \tilde{b})(6(1 + \tilde{b})^2 + 6\tilde{a}_1(1 + \tilde{b}) - 3\tilde{a}_2)] \\
&+ 2(1 + \tilde{b})^4[4\tilde{a}_3 + (1 + \tilde{b})^3 + 2\tilde{a}_1(1 + \tilde{b})^2 + 3\tilde{a}_2(1 + \tilde{b})]\}. \tag{D.2.6}
\end{aligned}$$

en donde la ecuación anterior es la frecuencia vertical correspondiente a esté modelo.