

**USO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS PARA EL MODELAMIENTO
GEOMECÁNICO A ESCALA DE POZO**

**JESÚS FERNANDO VERGARA NÚÑEZ
KEVIN YESID FRANCO NIÑO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-QUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA**

2012

**USO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS PARA EL MODELAMIENTO
GEOMECÁNICO A ESCALA DE POZO**

JESÚS FERNANDO VERGARA NÚÑEZ

KEVIN YESID FRANCO NIÑO

Trabajo de grado para optar por el título de ingeniero de petróleos

Director

MSc OLGA PATRICIA ORTIZ CANCINO

Docente UIS

Codirector

MSc ELKIN RODOLFO SANTAFÉ RANGEL

Ingeniero de petróleos

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-QUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA**

2012

A Dios,
dador de vida,
esencia de todas las cosas.

A mis padres,
guías indispensables de la universidad de la vida,
quienes por medio de su amor incondicional
han sentado las bases de mi formación.

A Edna,
quien ha sido más que hermana, mi amiga.

A Fernando, Farid, Jorge y Luis,
hermanos en quienes encontré admiración e inspiración.

A Franco, Diego, Andrea, Juanda, Pao, Lucia, Jeff
y demás amigos y compañeros de la carrera,
con quienes compartí muchas de mis experiencias.

A los amigos con los cuales compartí muchas otras experiencias en la pensión.

A Mónica y Lizeth,
que siempre confiaron en mí.

A mis amigos y profesores del Liceo 20 de Julio.

Jesús Fernando Vergara Núñez.

DEDICATORIA

*A DIOS,
Quien me dio la vida y
preparó el camino para que yo llegara hasta aquí.*

*A MIS PADRES Y HERMANOS,
que siempre me han colaborado y apoyado incondicionalmente durante toda mi vida.*

*A doña Edna, don Fernando y a Edna Fernanda,
por toda su colaboración y amabilidad.*

*A Chucho, Yeo , Yea, Suso, Morraletes, el oso y mis demás compañeros
que ha a pesar de los percances, siempre serán mis mejores COMPAÑEROS Y AMIGOS.*

*A la ingeniera Ángela Gómez y a mis compañeros del programa Combos saludable, con
quienes compartí buenos momentos en el final de mi carrera.*

*A esa persona,
que llegó a ser mi compañera, mi MEJOR amiga y mi confidente, gracias por los
momentos compartidos, por todas las cosas que me enseñaste,
y por cambiar mi perspectiva de la vida,
SIEMPRE estarás en mi pensamiento,
Cindy Tatiana Espinosa González.*

Kevin Yesid Franco Niño

AGRADECIMIENTOS.

A Dios, porque sin Él, nada sería posible.

A nuestras familias, pues sin ellas no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

A la universidad industrial de Santander, por brindar las herramientas necesarias para nuestra formación durante la carrera.

A nuestros directores, Olga Patricia Ortiz Cancino y Elkin Rodolfo Santafé Rangel por confiar en nosotros y brindarnos apoyo en los momentos más necesarios.

Al profesor Nelson Enrique Quintero, por su amabilidad y comprensión durante el desarrollo de este trabajo.

A nuestros compañeros de la carrera, por compartir los éxitos y fracasos vividos durante nuestra vida en la universidad.

A nuestros amigos, quienes siempre creyeron en nosotros.

A nuestros amigos y profesores del Liceo 20 de Julio de Sincelejo y del Colegio Integrado Fray Nepomuceno Ramos de Rionegro (Santander), por sentar las bases de nuestra formación ética y académica, y por motivarnos en la consecución de nuestros objetivos.

TABLA DE CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN	19
1. GEOMECÁNICA DE YACIMIENTOS.	20
1.1 Esfuerzo, deformación y leyes constitutivas.	22
1.1.1 Esfuerzo.	22
1.1.2 Aplicación: esquema de clasificación de E.M. Anderson.....	25
1.1.3 Deformación.	28
1.1.4 Presión de poro.	31
1.2 Leyes constitutivas de las rocas.	32
1.2.1 La roca como material linealmente elástico.....	37
1.2.2 La roca como material poroelástico.....	39
1.2.3 La roca como material elasto-plástico.	42
1.2.4 La roca como material viscoelástico.....	46
1.3 Fracturas y resistencia de las rocas.	48
1.3.1 Criterios de falla bajo compresión.	50
1.3.2 Criterios de fractura de la roca por tensión.....	60
1.3.3 Fricción entre las rocas.	61
1.4 Pruebas de laboratorio de mecánica de rocas.....	64
1.4.1 Pruebas de compresión hidrostática.	64
1.4.2 Prueba de compresión uniaxial.	65
1.4.3 Prueba uniaxial de tensión.	66
1.4.4 Prueba tradicional de compresión triaxial.	66
1.4.5 Prueba de extensión triaxial.	67
1.4.6 Prueba verdadera triaxial (prueba poliaxial).	67
1.5 Aplicaciones en ingeniería de petróleos.	68
1.5.1 Estabilidad de pozo.	69
1.5.2 Arenamiento.	74

1.5.3 Producción de finos.....	75
1.5.4 Fracturamiento hidráulico.....	76
2. MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS.....	78
2.1 ¿Qué es DEM?.....	80
2.2 Estado del arte de DEM.....	82
2.3 Consideraciones que pueden tenerse en cuenta en una implementación explícita de DEM.....	84
2.4 Formulación de los métodos DEM explícitos.....	86
2.4.1 Leyes de movimiento.....	87
2.4.2 Bloques en contacto.....	87
2.4.3 Algoritmos de detección de vecinos.....	90
2.4.4 Algoritmos de discretización interna.....	92
2.4.5 Leyes constitutivas.....	93
2.5 Ciclo de cálculos.....	94
2.6 Ventajas y desventajas.....	95
2.7 Aplicaciones.....	98
2.8 Implementaciones y alternativas.....	99
2.8.1 Implementaciones de DEM.....	99
2.8.2 Métodos continuos.....	102
2.8.3 Métodos híbridos.....	103
2.8.4 Otros métodos.....	103
3. VALIDACIÓN DE LA APLICABILIDAD DE DEM EN GEOMECÁNICA.....	105
3.1 Metodología propuesta para la validación de la aplicabilidad de DEM en geomecánica.....	106
3.2 Preparación de las simulaciones.....	110
3.2.1 Características de los modelos.....	110
3.2.2 Selección de las leyes constitutivas.....	112
3.2.3 Selección de la implementación del método de elementos discretos.....	113

3.2.4 Selección de la herramienta computacional.	115
3.2.5 Suposiciones a considerar para tener en cuenta durante la creación de los modelos.	117
3.3 Construcción de los modelos.....	118
3.3.1 Algoritmos de distribución aleatoria de partículas.	121
3.3.2 Leyes constitutivas.	122
3.4 Casos de estudio.	129
3.4.1 Pruebas de compresión hidrostática.	130
3.4.2 Pruebas de compresión uniaxial.....	142
3.4.3 Prueba tradicional de compresión triaxial.	146
3.5 Discusión de las limitaciones del método.	151
CONCLUSIONES.	153
RECOMENDACIONES.....	154
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	155

LISTA DE FIGURAS.

Figura 1: Componentes del tensor de esfuerzos en el sistema cartesiano sobre un cubo de roca infinitesimal.	23
Figura 2: Orientación de los esfuerzos principales en un cuerpo, según el esquema de clasificación de Anderson	26
Figura 3: Regímenes de fallamiento según el esquema de clasificación de Anderson.	27
Figura 4: Deformación geométrica de un elemento infinitesimal en dos dimensiones.....	29
Figura 5: Variación del gradiente de presión hidrostática con respecto a otros gradientes en el subsuelo.	31
Figura 6: Deformación axial y lateral producida por la aplicación de un esfuerzo axial.	34
Figura 7: Deformación de cizalla producida por la aplicación de un esfuerzo cortante.	35
Figura 8: Deformación volumétrica producida por la aplicación de una presión de confinamiento uniforme en todas las caras de la muestra.	36
Figura 9: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material linealmente elástico.	38
Figura 10: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material poroelástico.	41
Figura 11: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material elástico – plástico.	43
Figura 12: Determinación del esfuerzo de cedencia convencional.	45
Figura 13: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material viscoelástico	46
Figura 14: Representación conceptual de tres modelos viscoelásticos.	48
Figura 15: Caracterización de las fracturas de acuerdo a la dirección y magnitud de los esfuerzos aplicados.....	49
Figura 16: Círculo de Mohr.	52
Figura 17: Envolvente de falla de Mohr- Coulomb.	54

Figura 18: Aplicación del criterio de Mohr – Coulomb en una situación de campo	55
Figura 19: Relación entre presión interna de fractura, $P_f - S_3$, y la longitud para una fractura de Modo I en dos rocas con resistencias diferentes.	61
Figura 20: Esquema de cada una de las principales pruebas de mecánica de rocas.	68
Figura 21: Concentración de esfuerzos alrededor de la cara del pozo.	71
Figura 22: Discretización de un dominio bidimensional para dos métodos DEM.	81
Figura 23: Diferentes tipos de contacto que se pueden presentar entre los bloqu	88
Figura 24: Representación conceptual de las fuerzas de interacción entre los bloques.	89
Figura 25: Discretización del dominio en celdas organizadas jerárquicamente en niveles.	92
Figura 26: Ciclo de cálculo de un software tipo DEM.	94
Figura 27: Metodología propuesta para la validación del método de elementos discretos en geomecánica.	109
Figura 28: Empaquetamiento A.	119
Figura 29: Empaquetamiento B.	119
Figura 30: Empaquetamiento C.	120
Figura 31: Empaquetamiento D.	120
Figura 32: Comparación entre las distribuciones de los radios de partícula de dos modelos generados a partir de algoritmos diferentes de generación de bloques de partículas con distribución aleatoria.	122
Figura 33: Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba hidrostática a nivel computacional.	130
Figura 34: Evolución del esfuerzo con el tiempo para un modelo seleccionado en la prueba de compresión hidrostática.	131
Figura 35: Modelo con empaquetamiento A. $S_0 = 10$ [MPa]. $E = 1$ GPa.	132
Figura 36: Modelo con empaquetamiento A. $S_0 = 100$ [MPa]. $E = 1$ GPa.	133
Figura 37: Modelo con empaquetamiento B. $S_0 = 10$ [MPa]. $E = 1$ GPa.	133
Figura 38: Modelo con empaquetamiento B. $S_0 = 100$ [MPa]. $E = 1$ GPa.	134

Figura 39: Modelo con empaquetamiento C. S0 = 10 [MPa]. E = 1 GPa.....	134
Figura 40: Modelo con empaquetamiento C. S0 = 100 [MPa]. E = 1 GPa.....	135
Figura 41: Modelo con empaquetamiento D. S0 = 10 [MPa]. E = 1 GPa.....	135
Figura 42: Modelo con empaquetamiento D. S0 = 100 [MPa]. E = 1 GPa.....	136
Figura 43: Comparación de los resultados de la prueba de compresión hidrostática para los empaquetamientos A – D, S0 = 10 [MPa], E = 1 GPa.....	136
Figura 44: Comparación de los resultados de la prueba de compresión hidrostática para los empaquetamientos A – D, S0 = 100 [MPa], E = 1 GPa.	137
Figura 45: Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba uniaxial a nivel computacional.	143
Figura 46: Proceso de fractura de un modelo con empaquetamiento D, S0 = 100 MPa, E = 1 Gpa, bajo condiciones de confinamiento nulas.	143
Figura 47: Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba hidrostática a condiciones atmosféricas a nivel computacional.	145
Figura 48: Proceso de fractura del Modelo D, S0 = 100 MPa, E = 1 Gpa bajo una presión de confinamiento de 100 KPa.	145
Figura 49: Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba triaxial a nivel computacional.....	147
Figura 50: Evolución del esfuerzo y el número de enlaces con el tiempo para un modelo seleccionado.	148
Figura 51: Envolvente de falla linealizada de Mohr Coulomb, modelo D, S0 = 100 MPa, E = 1 GPa.	149
Figura 52: Esfuerzo vs. Deformación axial.	150
Figura 53: Flujo de trabajo para la realización de una prueba de compresión hidrostática usando ESyS – Particle.	162
Figura 54: Flujo de trabajo para la realización de una prueba uniaxial usando ESyS – Particle	163
Figura 55: Flujo de trabajo para la realización de una prueba triaxial usando ESyS – Particle	164

LISTA DE TABLAS.

Tabla 1: Relación entre los regímenes de fallamiento y la magnitud relativa de los esfuerzos principales.	26
Tabla 2: Comparación entre las principales implementaciones del Método de Elementos Discretos.	114
Tabla 3: Tabla comparativa de las características brindadas por las herramientas de software en consideración.	116
Tabla 4: Comparación entre algunas propiedades de los empaquet A y D	141
Tabla 5: Comparación de los tiempos de cómputo de los primeros 100K pasos de tiempo entre dos modelos con la misma distribución de partículas, pero con escalas diferentes.	142

RESUMEN

TÍTULO: USO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS PARA EL MODELAMIENTO GEOMECÁNICO A ESCALA DE POZO*

AUTORES: JESÚS FERNANDO VERGARA NÚÑEZ; KEVIN YESID FRANCO NIÑO**

Palabras clave: métodos de elementos discretos, simulación numérica, mecánica de rocas, geomecánica.

DESCRIPCIÓN

En el esquema típico de explotación de un yacimiento, es poco común el estudio detallado de los procesos geomecánicos alrededor de la cara de un pozo, pese a que su conocimiento es importante para comprender situaciones que pueden afectar el desempeño productivo de todo un campo. Sin embargo, la explotación de yacimientos no convencionales y la reactivación de campos maduros, junto con el incremento de los precios del petróleo, han despertado en los últimos años el interés de la industria por los métodos numéricos, los cuales se constituyen en herramientas auxiliares para el modelamiento geomecánico a escala de pozo.

En este trabajo se usa el Método de Elementos Discretos (DEM), una técnica numérica que discretiza el medio en una serie de elementos independientes entre sí que interactúan sólo en los contactos, con el fin de evaluar su aplicabilidad en los procesos geomecánicos de las rocas en subsuelo, al realizar la comparación del comportamiento esfuerzo – deformación entre modelos computacionales de roca y los modelos teóricos más conocidos de la literatura. Para lograr este objetivo, fue necesario desarrollar una metodología que incluyera la simulación de la aplicación de una serie de esfuerzos a lo largo de un cuerpo de roca, tal y como se realiza con los núcleos utilizados en las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas. En este trabajo también se destacan las ventajas y limitaciones del método durante la realización de las simulaciones.

* Trabajo de grado

** Facultad de ingenierías fisicoquímicas, Escuela de ingeniería de petróleos, Director Olga Patricia Ortiz, Codirector Elkin Santafé Rangel

ABSTRACT

TITLE: APLICATION OF THE DISCRETE ELEMENT METHOD IN GEOMECHANICS MODELLING AT WELLBORE SCALE*

AUTHORS: JESÚS FERNANDO VERGARA NUÑEZ; KEVIN YESID FRANCO NIÑO**

Key Words: Discrete element method, numerical simulation, rock mechanics, geomechanics.

DESCRIPTION

In a typical reservoir exploitation scheme, the detailed study of the geomechanical processes around a wellbore is uncommon, though its knowledgement is important to be able to understand situations that might affect the overall production performance of an oilfield. However, the exploitation of unconventional reservoirs and the implementation of new tricks for old fields, along with the ever increasing barrel price, have lately attracted the interest of the industry towards the application of numerical methods, which are valuable tools for the geomechanical modeling at wellbore scale.

In this work, it is used the Discrete Element Method (DEM), a numerical method which discretize the medium into a set of independent elements that interacts only at contacts, to assess its applicability for the representation of geomechanical processes of underground rocks, by making the stress – strain comparison between the computational rock models and the most recognized theoretical models. To do so, it is required a methodology which includes the simulation of the application of stresses along the rock body, as in rock mechanics laboratory tests. In this work, the advantages and limitations of the method found while running the simulations are also described.

* Undergraduate thesis.

** Faculty of Chemical – Physical Engineering, School of Petroleum Engineering, Director Olga Patricia Ortiz, Codirector Elkin Santafé Rangel

INTRODUCCIÓN

En cualquier etapa de la vida de un pozo, el comportamiento mecánico de las rocas de la formación es dinámico, y su efecto en las operaciones de perforación y producción se manifiesta en las situaciones geomecánicas más comunes, tales como lo son los derrumbes, lavados de pozo, fracturamiento, interacción casing-formación, arenamiento, producción de finos, subsidencia, entre otros.

Debido a que estos fenómenos no son fácilmente medibles por medio de registros de pozo y sísmica, los métodos numéricos se constituyen en una herramienta importante para la caracterización del comportamiento mecánico de las rocas, lo cual ayuda a mejorar el desempeño productivo de un campo y a evitar el deterioro prematuro de las facilidades de superficie que se pueda originar.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos aplicados en mecánica de rocas (esfuerzo y deformación, leyes constitutivas, criterios de falla), se describen las pruebas de laboratorio que se llevan a cabo con el fin de comprender el comportamiento de las rocas bajo la aplicación de esfuerzos, y se señalan algunas aplicaciones del estudio de la geomecánica en los yacimientos de hidrocarburos.

Seguidamente, el capítulo 2 se refiere a las generalidades del *Método De Elementos Discretos*, DEM. Este capítulo incluye la definición, historia, formulaciones, ventajas y desventajas, y aplicaciones del método.

Finalmente, en el último capítulo se describe una metodología propuesta que señala los pasos necesarios que se emplearon en este trabajo con el fin de demostrar la aplicabilidad de DEM, y se presentan los resultados del comportamiento mecánico de modelos computacionales de roca que simulan la realización de pruebas de laboratorio de mecánica de rocas, aplicando el Método de los Elementos Discretos.

CAPÍTULO 1: GEOMECÁNICA DE YACIMIENTOS.

La geomecánica es la disciplina de la ingeniería de petróleos encargada de la evaluación y el análisis de la respuesta mecánica de las rocas en función del campo de esfuerzos aplicado. Vasquez (Vásquez, 2011) la define como la ciencia que estudia las características mecánicas de las rocas (en presencia o ausencia de fluidos), provocadas por los cambios de presión, temperatura y esfuerzos, con el fin de optimizar las operaciones de perforación y producción de petróleo y gas. Si bien las bases de la geomecánica fueron realizadas a principios del siglo XX, su aplicación en la industria es reciente, pues empieza a tener mayor divulgación al comienzo de la década de los 70. La geomecánica está fundamentalmente basada en los conceptos y teorías de la mecánica de rocas y la mecánica de suelos. Sin embargo, requiere de la contribución de otras disciplinas de la industria, tales como la geología, geofísica, petrofísica, ingeniería de yacimientos, perforación, entre otras, para que pueda considerarse como una rama propia de la ingeniería de petróleos. Un ejemplo que demuestra dicha integración es la estimación de los esfuerzos efectivos a los que está sometido un cuerpo de roca cerca de la cara de un pozo recién perforado, la cual requiere un valor de la presión de poro predecible a través diversas relaciones utilizadas en perforación de pozos.

Los estudios geomecánicos son importantes para la toma de decisiones que resulten en un mejor desempeño productivo de un campo, debido a que ayudan en la predicción de situaciones tanto a escala de yacimiento (tales como la propagación de fallas, el desarrollo de fracturas, la compactación y la subsidencia), como a escala de pozo (estabilidad, fracturamiento hidráulico, arenamiento e interacción formación – casing durante la etapa productiva), al proporcionar correlaciones entre el estado de esfuerzos y la deformación de una muestra de roca representativa de la zona de interés. Para la obtención de dichas correlaciones, es usual la realización de una serie de pruebas especializadas de

laboratorio en las cuales se evalúa la respuesta deformativa de la muestra en función de la configuración de esfuerzos aplicados en sus paredes. Es opción del ingeniero encargado la selección de las pruebas a realizar según los parámetros que desea obtener, la calidad de los resultados requerida, el tratamiento que debe darle a la muestra y el procedimiento experimental que va a implementar. No obstante, la prueba de compresión triaxial es la más común puesto que proporciona resultados frecuentemente requeridos en la predicción de situaciones de campo sin la necesidad de complejos montajes experimentales.

Con la finalidad de sentar las bases teóricas necesarias para la construcción e interpretación de modelos computacionales que reproduzcan el comportamiento esfuerzo-deformación de muestras de laboratorio (y por extensión, y bajo ciertas consideraciones, de las rocas sometidas a condiciones de yacimiento), en este capítulo se definen nociones fundamentales de la geomecánica y la mecánica de rocas. En la primera parte se introducen los conceptos de esfuerzo, deformación y presión de poro. Seguidamente, se describen las leyes constitutivas más representativas de los materiales en mecánica de rocas, que no son más que las diferentes correlaciones propuestas para explicar la relación existente entre el esfuerzo y la deformación. Luego, en la tercera parte, se tipifican las fracturas que se pueden presentar en las rocas, y se detallan los criterios de resistencia más utilizados en la industria. En la cuarta parte, se señalan los procedimientos experimentales, las condiciones del medio, los requerimientos de la muestra y el tipo de resultados obtenidos de cada una de las pruebas de laboratorio más empleadas en la descripción de la respuesta deformativa de la roca en función del esfuerzo. Finalmente, se listan diversas situaciones de campo predecibles a partir del conocimiento detallado de las propiedades mecánicas de las rocas que pueden ser obtenidas a partir de las pruebas de laboratorio correspondientes.

1.1 ESFUERZO, DEFORMACIÓN Y LEYES CONSTITUTIVAS.

1.1.1 Esfuerzo.

El esfuerzo es una cantidad tensorial que representa las fuerzas internas que se aplican sobre un cuerpo deformable. Cuantitativamente, se expresa como una fuerza media aplicada por unidad de área. Sin embargo, no se debe prestar a confusión esta definición con la correspondiente a la de la presión porque, si bien la presión se expresa como una fuerza por unidad de área, ésta solo representará una cantidad escalar aplicada en la dirección perpendicular a la superficie en donde se aplica. En cambio, un esfuerzo puede definir el estado de las fuerzas internas aplicadas sobre un punto de un medio continuo, lo que implica que existirán varias componentes, una para cada dirección del sistema coordenado de referencia.

En geomecánica, el esfuerzo, o más bien, el campo de esfuerzos, es un tensor de segundo orden con nueve componentes (ver Figura 1):

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Ecuación 1

Donde
 S es el tensor esfuerzo.

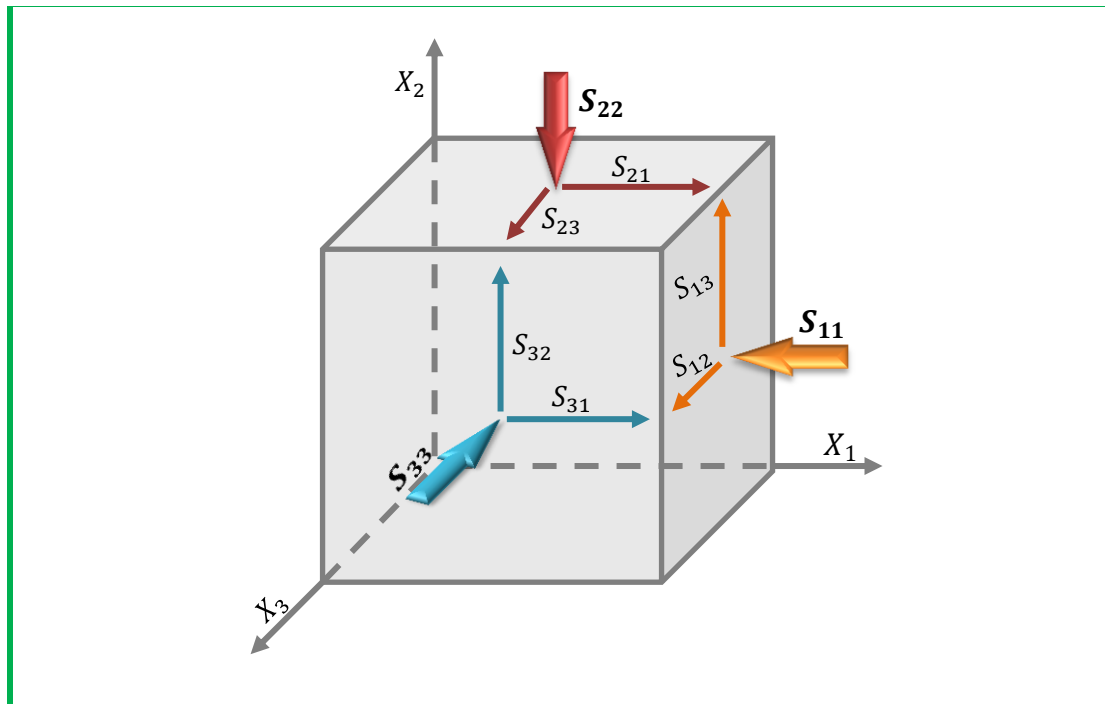


Figura 1: Componentes del tensor de esfuerzos en el sistema cartesiano sobre un cubo de roca infinitesimal. Adaptado de "Reservoir Geomechanics" (Zoback, 2007).

Los tres componentes de la diagonal principal del campo de esfuerzos se denominan esfuerzos principales, en tanto que el resto de componentes se les denomina esfuerzos cortantes. Por convención, la magnitud de cada componente será positiva, pues no hay evidencia de que existan esfuerzos tensiles en el subsuelo. Estos componentes pueden expresarse en unidades Inglesas (psi), aunque es más común que se expresen en unidades del SI (MPa). Debido a condiciones de equilibrio, se cumple que $s_{12} = s_{21}$, $s_{13} = s_{31}$ y $s_{23} = s_{32}$ (en el capítulo 2 del libro de Jaeger and Cook (Jaeger, y otros, 2007) hay una descripción al respecto). Por lo tanto, para describir completamente el estado de los esfuerzos a determinada profundidad, se requieren sólo seis componentes para el esfuerzo, o tres componentes y tres ángulos que definan la orientación del sistema coordenado de referencia. Sin embargo, es posible que se requieran menos componentes para definir completamente un campo de esfuerzos, si éste se define respecto al Sistema de Referencia Principal, es decir, aquel en el cual

los esfuerzos cortantes sean cero y los esfuerzos principales, $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, describan completamente el campo de esfuerzos (Ver figuras Figura 1 y Figura 2).

Por medio de una operación de la forma

$$S' = A^T S A$$

Ecuación 2

Donde

A es el tensor de cosenos directores que representan la rotación de los ejes coordenados del sistema coordenado inicial al final,

A^T es la transpuesta de A ,

S es el tensor esfuerzo con respecto al sistema coordenado de referencia inicial, y

S' es el tensor esfuerzo con respecto al sistema coordenado de referencia final.

es posible cambiar el sistema coordenado de referencia de un campo de esfuerzos determinado, por ejemplo, al Sistema de Referencia Principal.

1.1.1.1 Invariantes del esfuerzo.

Los valores de los componentes del tensor esfuerzo dependen del sistema coordenado de referencia. En consecuencia, múltiples combinaciones de componentes del esfuerzo pueden dar lugar a un mismo estado de esfuerzos en un punto. Con el fin de distinguir a un tensor de esfuerzos de manera única e independiente al sistema coordenado de referencia, se utilizan una serie de constantes denominadas *invariantes del esfuerzo*. Los esfuerzos principales son un conjunto de invariantes del esfuerzo. Otro conjunto de invariantes son los coeficientes de la ecuación característica que define los eigenvalores:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\
&= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \\
I_3 &= \det(\sigma_{ij}) \\
&= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}
\end{aligned}$$

Ecuación 3

Donde

I_1, I_2 e I_3 son invariantes del esfuerzo.

$\sigma_{i,j}$ es el componente i, j del tensor esfuerzo efectivo, y

$i, j \in \{1,2,3\}$, representan cada una de las dimensiones de un sistema cartesiano de referencia.

El esfuerzo efectivo se refiere al esfuerzo que tiene en cuenta los efectos de la presión de ejercida por los fluidos dentro de una roca. Las invariantes definidas en la Ecuación 4 se pueden expresar en función de los tres esfuerzos principales:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\
I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned}$$

Ecuación 4

Donde

I_1, I_2 e I_3 son invariantes del esfuerzo,

$\sigma_{i,j}$ es el componente i, j del tensor esfuerzo efectivo, y

$i, j \in \{1,2,3\}$, representan cada una de las dimensiones de un sistema cartesiano de referencia.

1.1.2 Aplicación: esquema de clasificación de E.M. Anderson.

El esquema de clasificación de Anderson (Anderson, 1951) tipifica los regímenes de fallamiento en normales, inversos o de rumbo, y define los tres esfuerzos principales, S_1, S_2 y S_3 , de acuerdo al régimen de fallamiento presente. Teniendo en cuenta que S_V es igual al esfuerzo vertical, $S_{H_{max}}$ es el esfuerzo máximo horizontal y $S_{h_{min}}$ es el esfuerzo mínimo horizontal, tal y como los definió Anderson, el esquema de clasificación de Anderson relaciona las magnitudes

relativas de los esfuerzos en función del régimen de fallamiento como se muestra en la Tabla 1 y en la Figura 3.

Régimen	Esfuerzo		
	S_1	S_2	S_3
Normal	S_V	$S_{H_{max}}$	$S_{h_{min}}$
De rumbo	$S_{H_{max}}$	S_V	$S_{h_{min}}$
Inverso	$S_{H_{max}}$	$S_{h_{min}}$	S_V

Tabla 1: Relación entre los regímenes de fallamiento y la magnitud relativa de los esfuerzos principales. Adaptado de Zoback, M. D., "Reservoir Geomechanics" (Zoback, 2007).

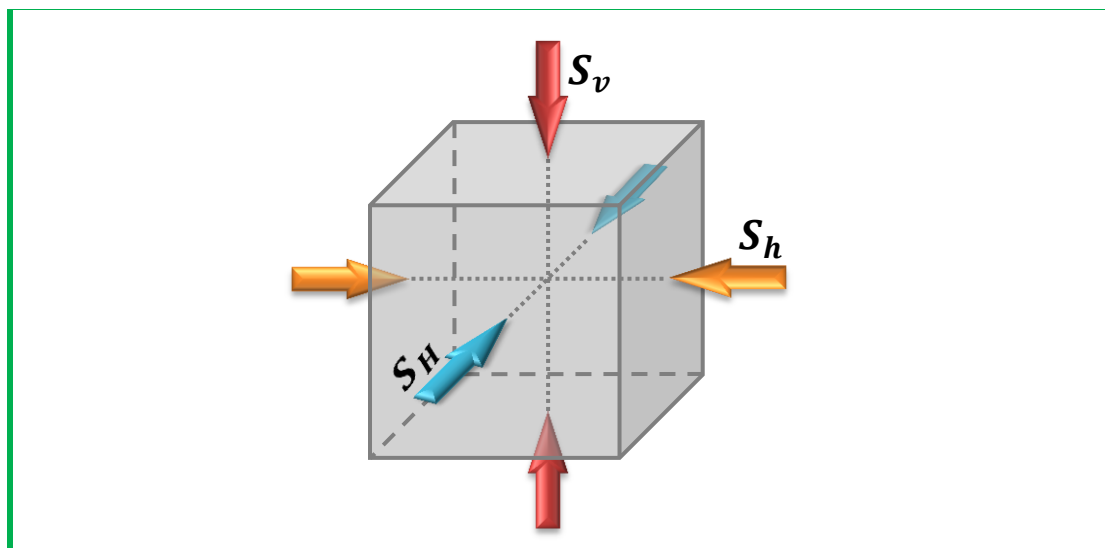
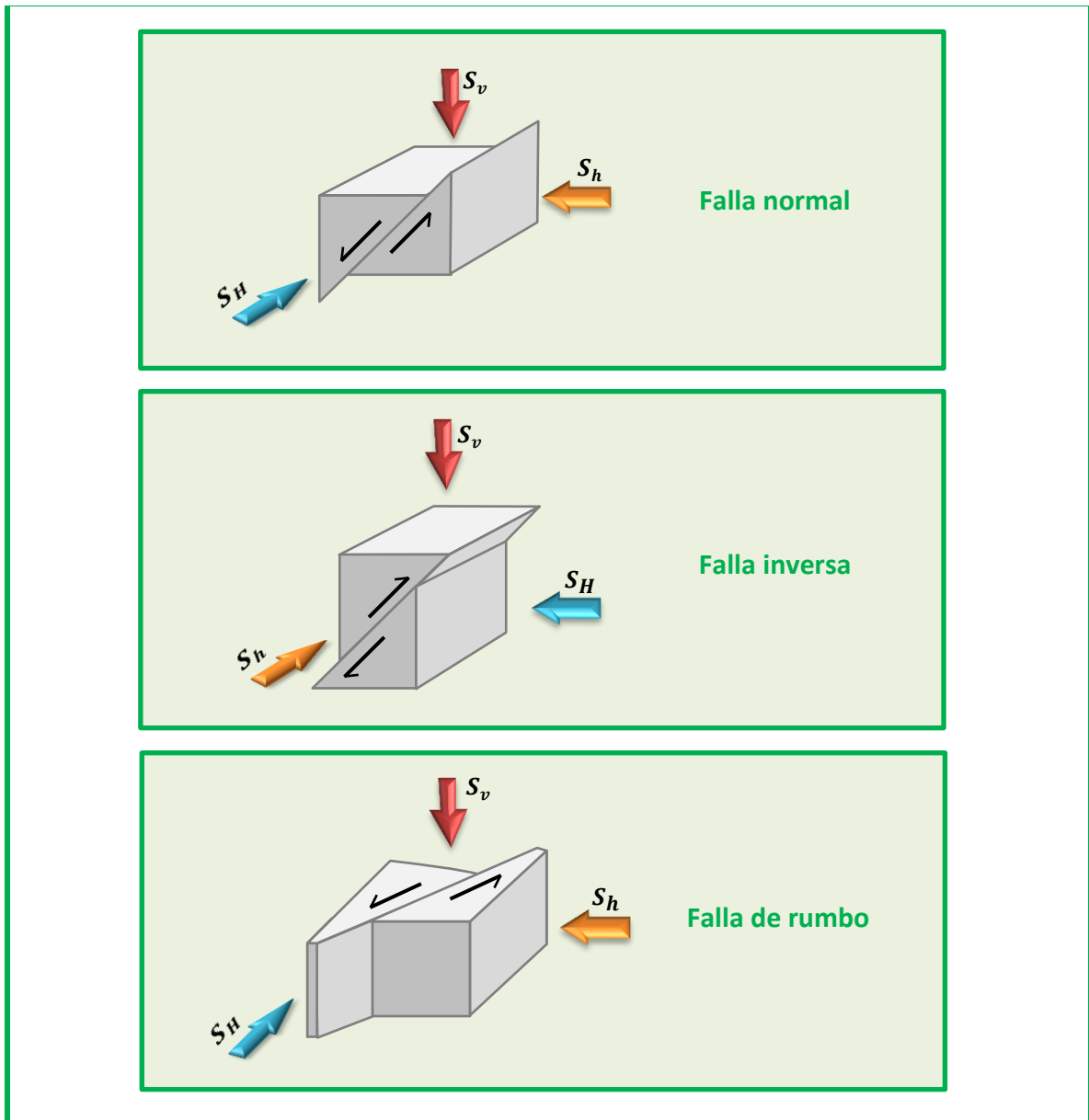


Figura 2: Orientación de los esfuerzos principales en un cuerpo, según el esquema de clasificación de Anderson (Anderson, 1951). Adaptada de lacomunidadpetrolera.com (Lac).



▲ **Figura 3:** Regímenes de fallamiento según el esquema de clasificación de Anderson. Para una falla de tipo normal, $s_v > s_{Hmax} > s_{hmin}$; en el caso de una falla inversa, $s_{Hmax} > s_{hmin} > s_v$; y para una falla de rumbo, $s_{Hmax} > s_v > s_{hmin}$. Fuente: los autores.

1.1.3 Deformación.

La deformación es el cambio en el tamaño o forma de un cuerpo debido a esfuerzos internos producidos por una o más fuerzas aplicadas sobre el mismo. De forma similar al esfuerzo, la deformación es una cantidad tensorial de segundo orden con nueve componentes, tres de ellos principales, y los seis restantes de cizallamiento.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ecuación 5

Donde

ε es el tensor deformación,

$\varepsilon_{i,j}$ es un componente del tensor deformación, y

$i, j \in \{1,2,3\}$, representan cada una de las dimensiones de un sistema cartesiano de referencia.

Por simetría, se cumple que $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ y $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ (en el capítulo 2 del libro de Jaeger and Cook (Jaeger, y otros, 2007) se demuestra esta condición). Sin ir más lejos, considérese un cubo de roca deformable. Si se aplica un esfuerzo compresivo uniaxialmente, naturalmente se tiene que contraer. Si se supone que la longitud inicial y final de la roca en la dirección de la aplicación del esfuerzo es x_i y $x_i - u_i$ respectivamente, luego se define la **deformación axial** o **normal** en esa dirección (ver Figura 6) como:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{u_i}{x_i}$$

Ecuación 6

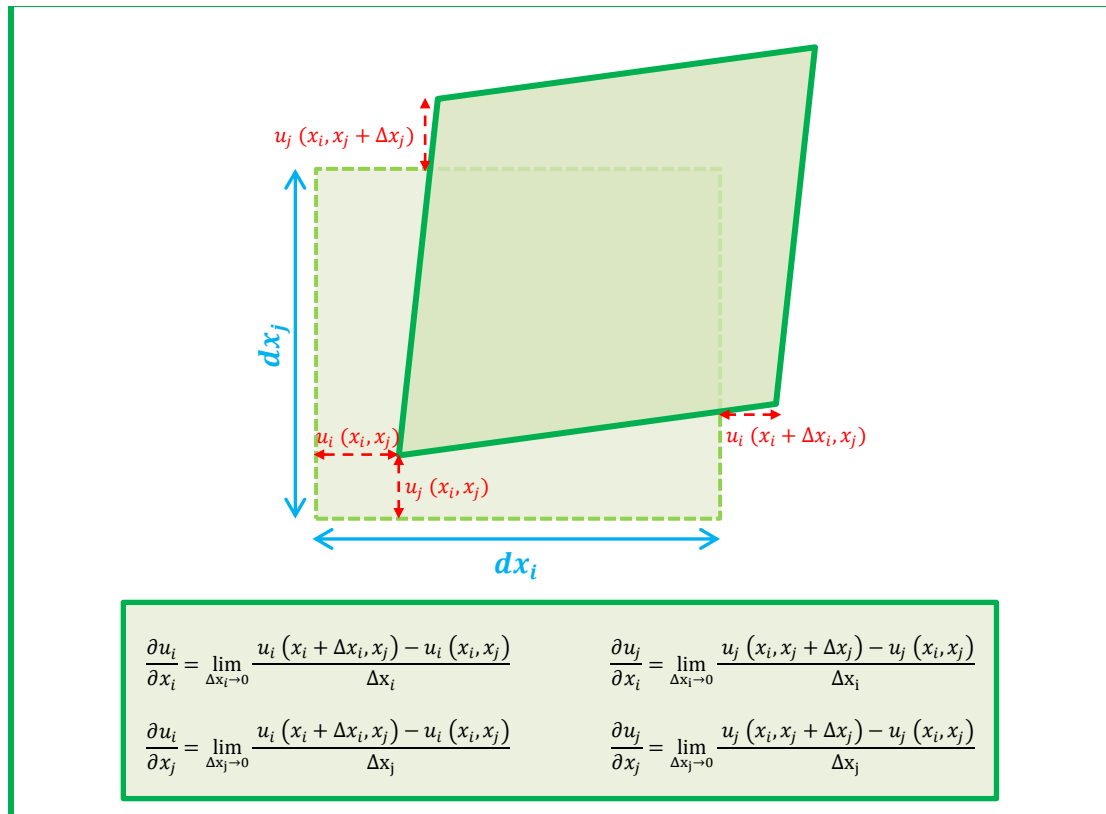
Donde

$i = 1, 2$ ó 3 representa el eje coordenado en donde se aplica el esfuerzo,

ε_{ii} es la deformación axial,

x_i es la longitud inicial de la roca (antes de la deformación), y

u_i es la expansión longitudinal de la roca.



▲ **Figura 4: Deformación geométrica de un elemento infinitesimal en dos dimensiones.** Fuente: Los autores.

Sin embargo, la deformación no sólo se describe en la misma dirección de la aplicación del esfuerzo. En efecto, también se puede cuantificar la expansión lateral, u_j , y por consiguiente la **deformación lateral**, ε_{jj} , que ocurre tras aplicar dicho esfuerzo (ver Figura 6). Matemáticamente, la deformación lateral se expresa como:

$$\varepsilon_{jj} = \frac{u_j}{x_j}$$

Ecuación 7

Donde

$j = 1, 2$ ó 3 representa cualquier eje coordenado diferente a aquel en donde se aplica el esfuerzo,

ε_{jj} es la deformación lateral,

x_j es la longitud lateral inicial de la roca (antes de la deformación), y

u_j es la expansión lateral de la roca.

Hasta ahora se ha considerado la deformación bajo el efecto de una roca comprimida uniaxialmente. Sin embargo, aún no se ha definido completamente la deformación de la roca, pues no se ha considerado el efecto de los esfuerzos cortantes simples sobre cada cara del cubo de roca. Cuando este es el caso, se dice que el tipo de **deformación** es **por cizalla**. La deformación por cizalla es el cambio de ángulo que ocurre entre las dos caras adyacentes de la roca sobre las cuales está involucrado el esfuerzo cortante (ver Figura 7). Matemáticamente, se puede demostrar que la deformación por cizalla se puede expresar de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right)$$

Ecuación 8

Donde

$i \neq j$ representan las direcciones sobre las cuales está involucrado el esfuerzo cortante.

ε_{ij} es el componente i, j de la deformación.

u_j es la expansión lateral de la roca.

u_i es la expansión longitudinal de la roca.

x_i es la longitud inicial de la roca (antes de la deformación).

x_j es la longitud lateral inicial de la roca (antes de la deformación).

En general, y combinando todos estos resultados, se puede definir para un elemento infinitesimal de un medio continuo cualquier componente del tensor de esfuerzos de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right)$$

Ecuación 9

Donde

$i, j \in \{1,2,3\}$, representan cada una de las dimensiones de un sistema cartesiano de referencia,

u_i es el desplazamiento horizontal,

u_j es el desplazamiento vertical,

x_i es la longitud horizontal inicial, y

x_j es la longitud vertical inicial.

1.1.4 Presión de poro.

La presión de poro, P_p es la presión ejercida sobre el espacio poroso de una roca por los fluidos contenidos en ella. La presión de poro también es definida como la presión en el espacio poroso ejercida por una columna hidrostática de agua que se extiende desde la superficie terrestre hasta la profundidad en donde se encuentra dicho espacio poroso. Esto supone que el sistema poroso está abierto e hidráulicamente conectado desde la superficie terrestre hasta la profundidad de referencia, y por lo tanto, el gradiente de presión de poro es igual a 0.433 psi/ft. Sin embargo, la presión de poro puede ser diferente; conceptualmente, el máximo valor que puede tener la presión de poro es el de la *presión litostática*; sin embargo, puede ser mayor en situaciones en las cuales el espacio poroso esté confinado.

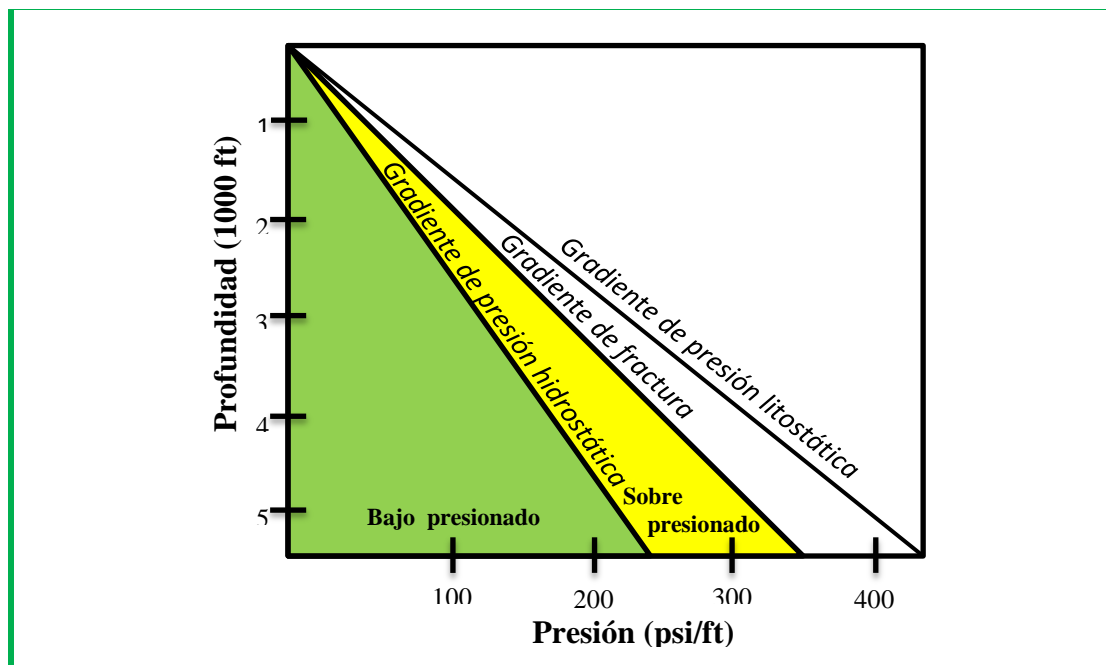


Figura 5: Variación del gradiente de presión hidrostática con respecto a otros gradientes en el subsuelo. Adaptado de "Oilfield Glossary", Schlumberger.

1.2 LEYES CONSTITUTIVAS DE LAS ROCAS.

Una ley constitutiva describe la *deformación de un material en respuesta a un esfuerzo aplicado*, o viceversa. En geomecánica de yacimientos se utilizan diversas leyes constitutivas para describir el comportamiento de las rocas del subsuelo, que van desde aproximaciones lineales muy sencillas e intuitivas, a aquellas que tienen en cuenta propiedades no tan fáciles de modelar, como la porosidad de la roca, o la resistencia que oponen a la compresión los fluidos que ocupan el espacio poroso. Sin embargo, una ley constitutiva debe cumplir con ciertos requerimientos para que pueda ser considerada como tal. En este sentido, debe reproducir el comportamiento observado de la roca, ya sea en condiciones de laboratorio o campo, por lo menos con un rango de tolerancia aceptable. Además, dicha ley no debe violar la segunda ley de la termodinámica. En el texto de Philippe Charlez, *Rock geomechanics* (Charlez, 1991), se demuestra cómo se formulan varias leyes constitutivas sin violar los principios de la primera y segunda ley de la termodinámica.

Antes de proceder, es necesario definir una serie de parámetros experimentales, los módulos elásticos y otras relaciones, que permiten caracterizar las propiedades elásticas de un material, y en consecuencia, son usados para la formulación de algunas leyes constitutivas. Los módulos elásticos descritos a continuación se definen para materiales homogéneos e isótropos:

- ✓ Módulo de Young, E : también llamado modulo elástico longitudinal, es un parámetro que describe el comportamiento de un material elástico, de acuerdo con la dirección en la que se aplique el esfuerzo. Valores típicos para las areniscas oscilan entre 1 y 70 GPa.

$$E = \frac{S_{ii}}{\varepsilon_{ii}}$$

Ecuación 10

Donde

S_{ii} es el esfuerzo axial aplicado,
 ε_{ii} es la deformación axial, y
 E es el módulo de Young.

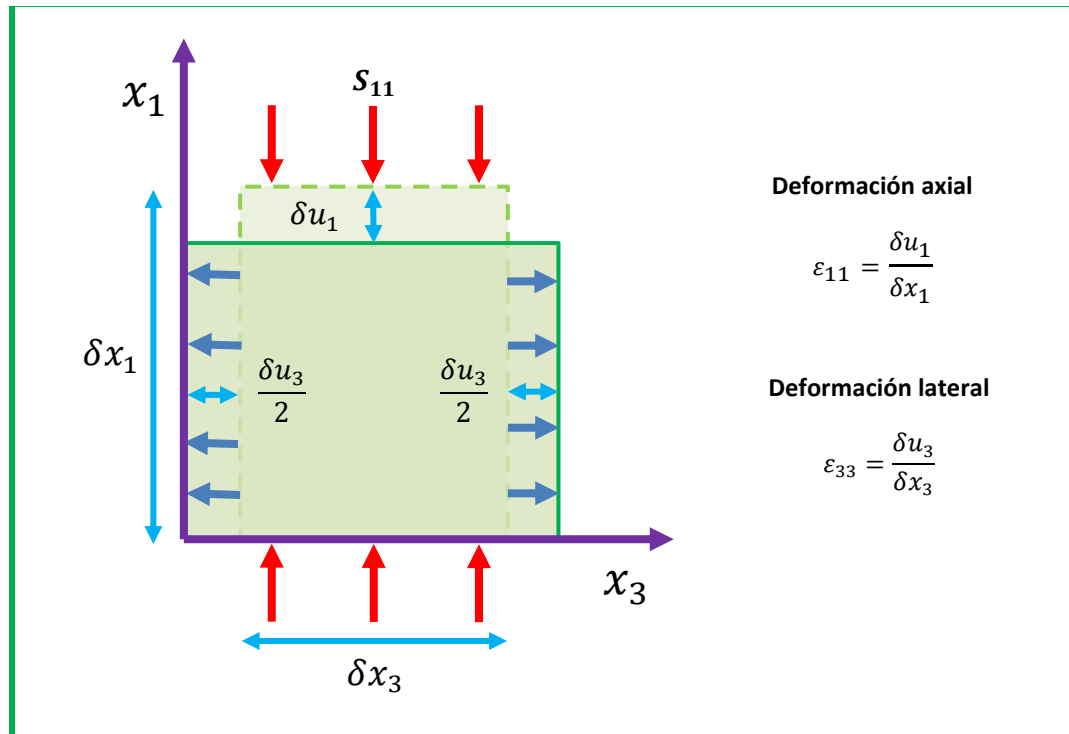
- ✓ Relación de Poisson, ν : Es una constante elástica que representa la relación existente entre la deformación lateral y axial. Para las areniscas, su valor oscila entre 0.1 y 0.3, y para un fluido incompresible, su valor es 0.5.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}$$

Ecuación 11

Donde

ε_{jj} es la deformación lateral producida
 ε_{ii} es la deformación axial producida.



▲ **Figura 6: Deformación axial y lateral producida por la aplicación de un esfuerzo axial.** Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).

- ✓ Módulo de cizallamiento, G : denominado también módulo de elasticidad transversal, corresponde al cambio de forma que le ocurre a un cuerpo elástico cuando se le aplican esfuerzos cortantes.

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right)$$

Ecuación 12

Donde

S_{ij} es el esfuerzo cortante i en dirección de j

ε_{ij} es la deformación por cizallamiento correspondiente.

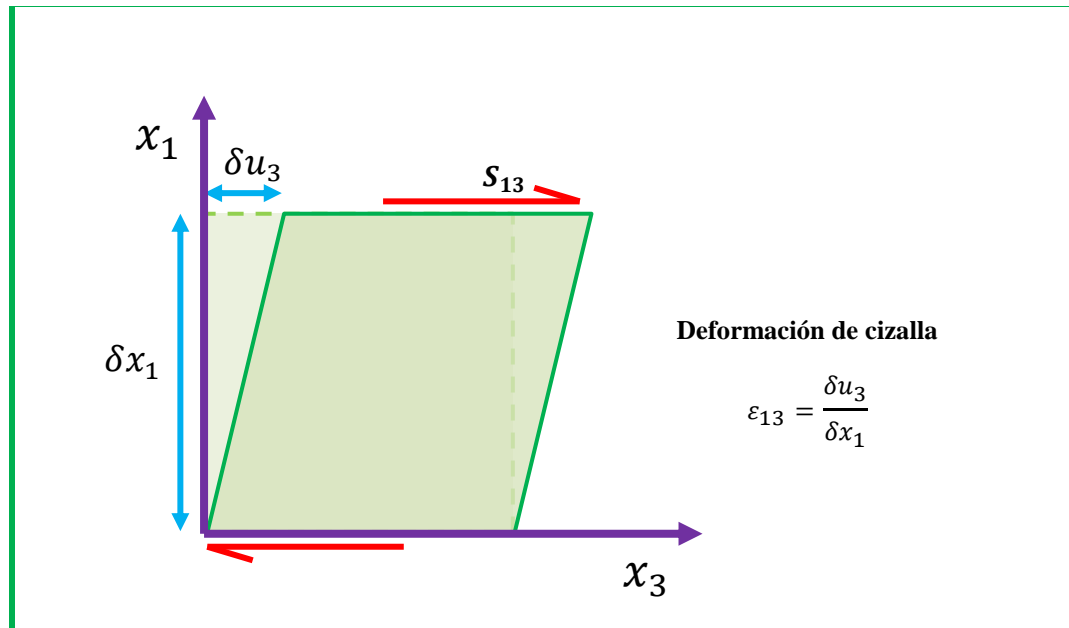


Figura 7: Deformación de cizalla producida por la aplicación de un esfuerzo cortante. Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).

- ✓ Módulo de compresibilidad, K : este parámetro es inversamente proporcional a la compresibilidad. Valores comunes para la arenisca varían entre 2 a 100 GPa.

$$K = \frac{S_{00}}{\epsilon_{00}} = \frac{1}{c}$$

Ecuación 13

Donde

$$S_{00} = \frac{1}{3}(S_{11} + S_{22} + S_{33})$$

$$\epsilon_{00} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

c es la compresibilidad de la roca, y K es el módulo de compresibilidad.

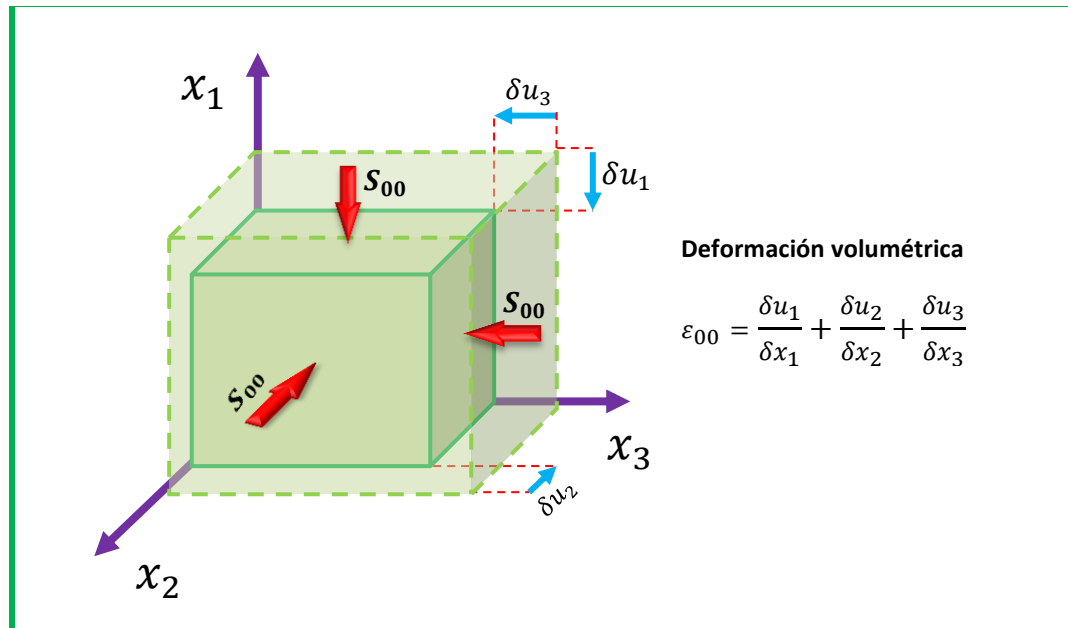


Figura 8: Deformación volumétrica producida por la aplicación de una presión de confinamiento uniforme en todas las caras de la muestra. Adaptado de "Reservoir geomechanics" (Zoback, 2007).

- ✓ Constante de Lamé, λ :

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G$$

Donde
 K es el módulo de compresibilidad, y
 G es el módulo de cizallamiento.

Ecuación 14

- ✓ Módulo M: Este módulo se determina directamente a partir de las velocidades de las ondas sísmicas:

$$M = K + \frac{4G}{3}$$

Donde

K es el módulo de compresibilidad, y

G es el módulo de cizallamiento.

Ecuación 15

Definidos estos parámetros, ahora serán más claras las formulaciones de las leyes constitutivas para materiales homogéneos e isotrópicos, por cuanto los módulos de elasticidad son parte funcional de sus ecuaciones. En las siguientes secciones se describen los cuatro modelos constitutivos más representativos.

1.2.1 La roca como material linealmente elástico.

En este caso se considera que la relación existente entre el esfuerzo aplicado y la deformación es linealmente proporcional. También se considera que la deformación puede ser reversible. Un resorte metálico representa una buena analogía de cómo se comporta un material elástico, pues la elongación o compresión del mismo dependerá linealmente de la fuerza aplicada sobre él (ver Figura 16).

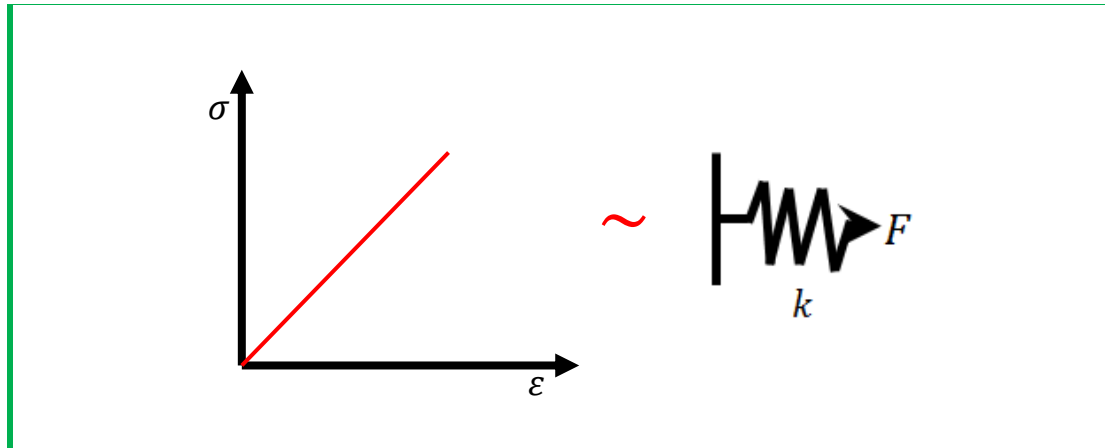


Figura 9: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material linealmente elástico. La deformación es reversible. El comportamiento esfuerzo-deformación de un material con estas características es análogo a la elongación de un resorte cuando se aplica una fuerza. Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).

Conceptualmente, el comportamiento elástico de un material se describe en términos de la teoría de las deformaciones infinitesimalmente pequeñas. En este caso, no se considera ningún daño ni alteración significativa de la roca como resultado de la aplicación del esfuerzo. En un material de este tipo, el esfuerzo, expresado en términos de la deformación, puede ser expresado de la siguiente manera:

$$S_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{00} + 2G \varepsilon_{ij}$$

Ecuación 16

Donde

S_{ij} es el esfuerzo aplicado,

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$, es el delta de Kronecker,

G es el módulo de cizallamiento,

λ es la constante de Lamé,

ε_{00} es la deformación volumétrica, y

ε_{ij} es el componente i, j de la deformación.

Debido a que la constante de Lamé no tiene un significado físico, este dato no puede conseguirse de manera directa. Sin embargo, se debe tener en cuenta que

cualquier módulo elástico puede ser expresado en términos de cualquier otro par de módulos elásticos definidos previamente.

1.2.2 La roca como material poroelástico.

La teoría de la poroelasticidad se originó a partir del trabajo de Biot (1941), y se desarrolló gracias a las contribuciones de Verruijt (1969), Rice y Cleary (1976), y Detournay y Cheng (1976). Esta teoría tiene en cuenta el efecto de la presión de poro y el flujo de fluidos en la deformación de la roca, componentes cuyo análisis es crítico cuando la deformación de la cara del pozo es significativa.

Las suposiciones asociadas a la teoría de la poroelasticidad son:

- ✓ Existe un sistema poroso interconectado en la roca, saturado uniformemente de fluido.
- ✓ El volumen total del sistema poroso es pequeño comparado con el volumen de la roca como un todo.
- ✓ Ciertos valores, como la presión de poro, el esfuerzo total aplicado externamente y los esfuerzos que actúan sobre los granos individuales, se consideraran como promedios de una serie de datos estadísticos.

Adicionalmente, en geomecánica de yacimientos se debe considerar a la roca como una colección de espacios interconectados (Geertsma, 1957; Zimmerman, 1991), en lugar de un agregado de granos en contacto parcial entre sí.

La definición de Terzaghi de esfuerzo efectivo,

$$\sigma_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij} P_p$$

Donde

σ_{ij} es esfuerzo efectivo.

S_{ij} es el esfuerzo aplicado.

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$, es el delta de Kronecker.

P_p es la presión de poro.

Ecuación 17

basada en los trabajos pioneros de Terzaghi de mecánica de suelos (Terzaghi, 1923), ya mostraba que los componentes normales del tensor de esfuerzos son los únicos que se ven afectados por la presión de poro. En efecto, la presión de poro no causa deformación por cizalla, debido a que la presión siempre se ejerce en dirección perpendicular a la superficie expuesta. Sin embargo, la definición de Terzaghi y subsecuentes modelos no reproducían los datos experimentales con mucha exactitud. Nur y Byerlee (Nur, y otros, 1971) propusieron una ley constitutiva más exacta, que tenía en cuenta otras propiedades de la roca:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij} \alpha P_p$$

Donde

σ_{ij} es el esfuerzo efectivo,

S_{ij} es el esfuerzo aplicado, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$, es el delta de Kronecker,

P_p es la presión de poro,

$\alpha = 1 - K_b/K_g$ es el coeficiente de Biot,

K_b es el módulo de volumen de la roca seca, y

K_g es el módulo de volumen de los granos individuales de la roca.

Ecuación 18

Si se retoma la analogía del resorte para describir esta ley constitutiva, es posible concluir que dicho resorte ahora va a oponer mayor resistencia a la deformación, debido a que ahora existe un término en la ley constitutiva que se encarga de hacer las veces de amortiguador de las fuerzas aplicadas (ver Figura 10).

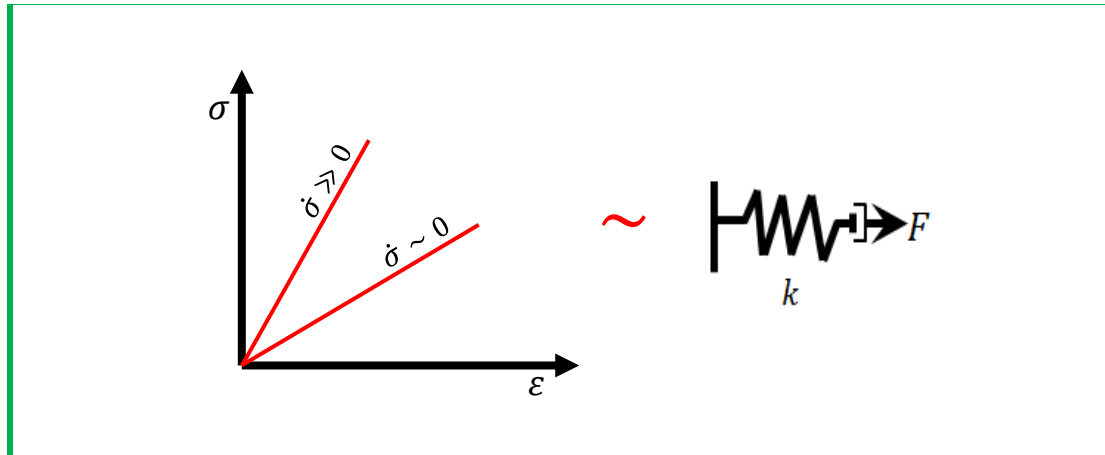


Figura 10: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material poroelástico. La deformación de la muestra también depende de la tasa con la cual se aplica el esfuerzo. El comportamiento esfuerzo-deformación de un material con estas características es análogo a la elongación de un resorte conectado en serie con un amortiguador, cuando se aplica una fuerza. Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).



Por otra parte, no obstante se han hecho muchos experimentos para caracterizar las rocas según el valor del coeficiente de Biot, en general se puede decir que su valor tiende a cero en la medida que la roca prácticamente no tiene poros interconectados, como es el caso de las rocas metamórficas; en tanto que su valor tiende a 1 cuando la roca es muy porosa, como es el caso de las areniscas friables.

Combinando las ecuaciones Ecuación 16 y Ecuación 18, se obtiene la ecuación constitutiva de la roca como material poroelástico:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{00} + 2G \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \alpha P_0$$

Donde

σ_{ij} es el componente i, j del tensor esfuerzo efectivo,

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$, es el delta de Kronecker,

G es el módulo de cizallamiento,

λ es la constante de Lamé,

ε_{00} es la deformación volumétrica,

ε_{ij} es el componente i, j de la deformación, $\alpha = 1 - K_b/K_g$ es el coeficiente de Biot,

K_b es el módulo de volumen de la roca seca, y

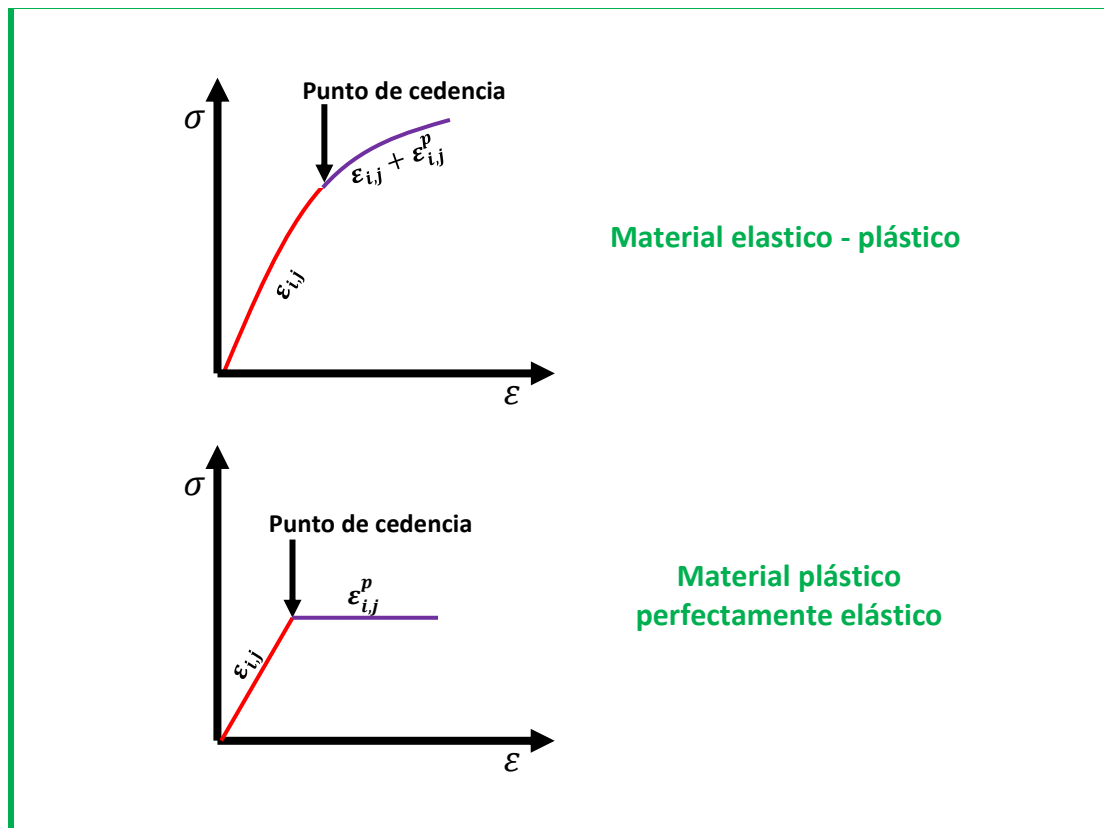
K_g es el módulo de volumen de los granos individuales de la roca.

Ecuación 19

1.2.3 La roca como material elasto-plástico.

Un medio continuo ha experimentado deformación plástica cuando la deformación producto de la aplicación de un esfuerzo es irreversible. Es decir, si se retira el esfuerzo previamente aplicado, el cuerpo no será capaz de volver a sus dimensiones originales.

En el caso de un material elasto-plástico, la deformación total será el resultado de la composición de dos tipos de deformación: la deformación elástica, y la deformación plástica. En la práctica, un material elástico-plástico es aquel que presenta un comportamiento puramente elástico hasta cuando se alcanza cierto esfuerzo límite (*límite de elasticidad*), σ_0 , a partir del cual la deformación puede resultar de la combinación de un componente plástico con un componente elástico (comportamiento elástico-plástico con resistencia a la deformación), o puede ser netamente plástica (comportamiento plástico - perfectamente elástico). Cuando se retira el esfuerzo aplicado, el material vuelve a su comportamiento puramente elástico (ver Figura 11).



▲ **Figura 11: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material elástico – plástico.** Los materiales que una vez alcanzado el punto de cedencia sólo se comportan plásticamente se les denomina material plástico perfectamente plástico. Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).

El *límite de elasticidad*, o *punto de cedencia*, se determina a partir de un *criterio de cedencia* que lo relacione con los componentes del tensor de esfuerzos. El criterio de cedencia más simple fue propuesto por Tresca (Tresca, 1864), quien asumió que el punto de cedencia se alcanza cuando el máximo esfuerzo cortante sobre cualquier plano dentro de la roca excede un valor crítico, τ_0 . En términos de los tres esfuerzos principales, el criterio de cedencia propuesto por Tresca es:

$$\tau_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

Donde

τ_0 es el esfuerzo cortante crítico.

σ_1, σ_2 son los esfuerzos principales, σ_0 es el límite de elasticidad.

Ecuación 20

Otro criterio de cedencia de gran popularidad es el criterio de von Mises (von Mises, 1913), y se basa en la energía de deformación. Este criterio establece que un material en sus condiciones iniciales alcanza su punto de cedencia cuando ha absorbido una cantidad determinada de energía de deformación. Dicha cantidad es igual a la energía absorbida por el mismo material para alcanzar el punto de cedencia cuando es aplicado un esfuerzo uniaxial. El criterio de von Mises se puede expresar de la siguiente forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$$

Donde

σ_y es el punto de cedencia cuando se aplica un esfuerzo uniaxial.

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, son los esfuerzos efectivos principales.

Ecuación 21

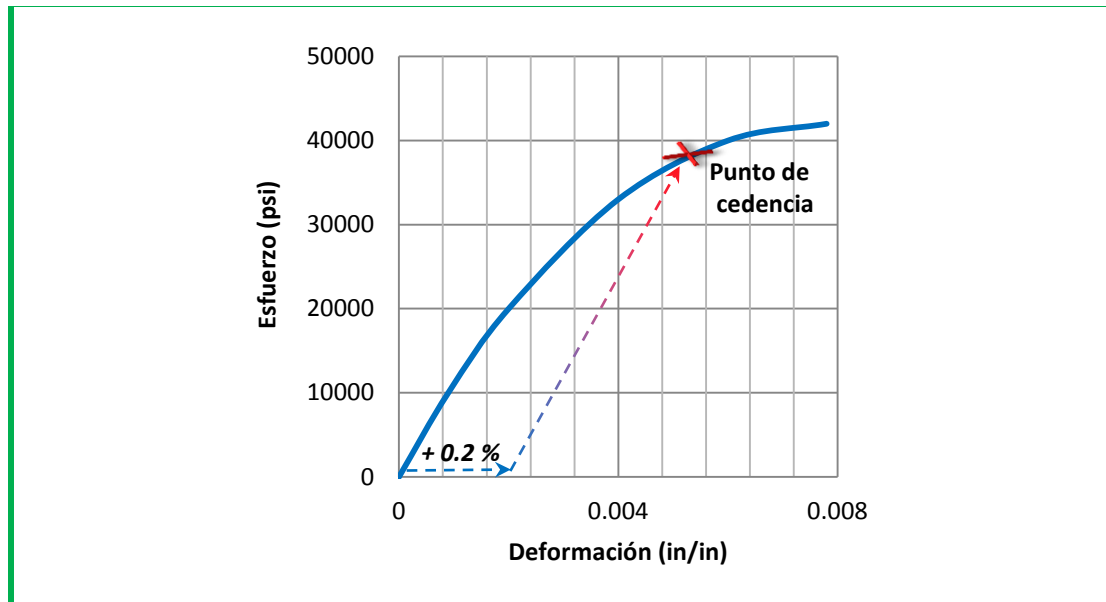


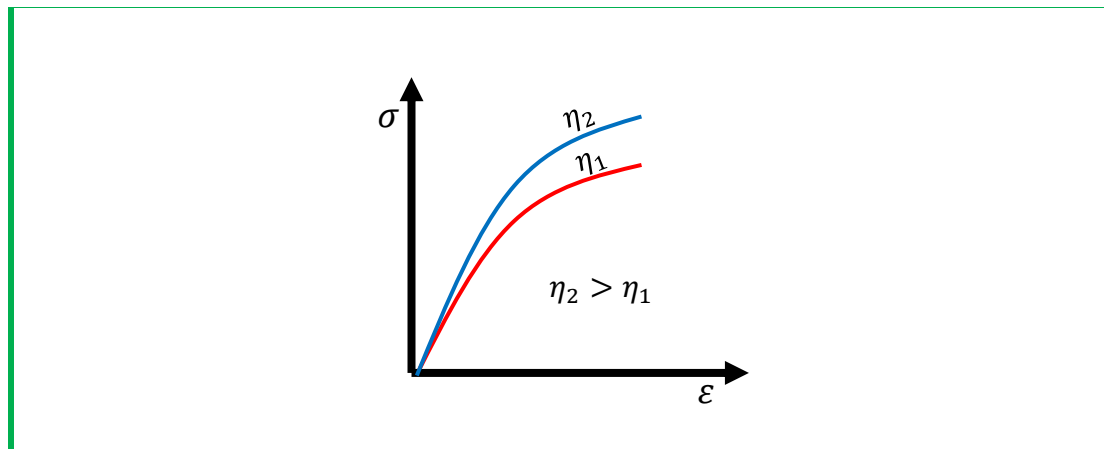
Figura 12: Determinación del esfuerzo de cedencia convencional. En algunos materiales, el punto de cedencia no se detecta tan fácilmente. En este caso, se determina un **esfuerzo de cedencia convencional**. Para esto, se traza una línea paralela a la porción inicial de la curva esfuerzo – deformación, pero desplazada 0,2% del origen. El intersección entre la curva de la gráfica esfuerzo - deformación y la línea trazada es el esfuerzo de cedencia convencional. En la figura se muestra su determinación para el caso del hierro fundido gris. Adaptado de Askeland, Donald “Ciencia e ingeniería de los materiales” (Askeland, 1998).

En la literatura se presentan varios modelos más robustos, en donde el punto de cedencia es también dependiente de la presión.

Para el contexto particular de las rocas, se han diseñado varios criterios de cedencia que describen la resistencia compresiva de las rocas en función de los esfuerzos aplicados. En la sección 1.3.1 se profundiza un poco más acerca de estos criterios.

1.2.4 La roca como material viscoelástico.

Una roca presenta comportamiento viscoelástico cuando la deformación en respuesta a un esfuerzo aplicado también depende de la tasa con la cual el esfuerzo es aplicado. En otras palabras, un material viscoelástico también depende del tiempo. El esfuerzo requerido para que ocurra cierta cantidad de deformación dependerá de la viscosidad aparente, η , de la roca (ver Figura 13).



▲ **Figura 13: Comportamiento esfuerzo – deformación de un material viscoelástico.** η es a viscosidad aparente del medio. En general, la deformación también depende de la tasa con la cual se aplica el esfuerzo. Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).

En un material poroelástico, la deformación depende del tiempo de difusión de los fluidos que ocupan sus poros durante la aplicación del esfuerzo. Por lo tanto, un material poroelástico es un tipo de material viscoelástico, donde el carácter viscoso está determinado por los fluidos en la roca. El *modelo resorte-amortiguador de Maxwell* (Maxwell, 1867) describe en forma más general el comportamiento de un material poroelástico, pues extiende su definición a cualquier material, siempre y cuando se manifieste un comportamiento viscoso y elástico en el mismo. Este modelo se compara con un sistema conformado por un resorte y un amortiguador de aire, conectados en serie. Una expresión para este modelo es de la forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{t=0}}{k} + \frac{\sigma_{t=0}t}{\eta}$$

Ecuación 22

Donde

$\sigma_{t=0}$ es el esfuerzo aplicado instantáneamente en el tiempo $t = 0$

ε es la deformación

η es la constante de amortiguación, que en geomecánica se refiere a la viscosidad aparente de la roca, y

k es la constante de elasticidad, que en geomecánica puede representar el módulo de Young, o el módulo de cizallamiento, según el contexto, y cuyas condiciones iniciales son las de un sistema no deformado sin ningún tipo de esfuerzo aplicado sobre él.

Otro modelo basado en resortes y amortiguadores es el modelo de Kelvin - Voigt (Thompson, 1865; Voigt, 1892). En este modelo, se considera que el resorte y el amortiguador de aire están conectados en paralelo:

$$\sigma_{t=0} = k\varepsilon + \dot{\varepsilon}\eta$$

Ecuación 23

Donde

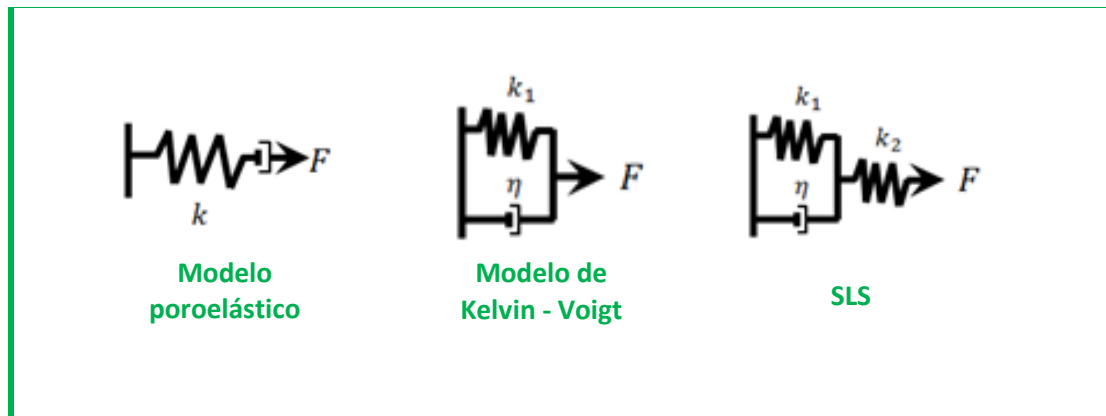
$\sigma_{t=0}$ es el esfuerzo aplicado instantáneamente en el tiempo $t = 0$

k es la constante de elasticidad.

ε es la deformación.

η es la constante de amortiguación.

Se han desarrollado otros modelos más complejos que relacionan el comportamiento de un material con resortes y amortiguadores interconectados. Por ejemplo, el modelo de sólido lineal estándar (SLS, por sus siglas en inglés) (Zener, 1948) se basa en el modelo conceptual de dos resortes y un amortiguador de aire.



▲ **Figura 14:** Representación conceptual de tres modelos viscoelásticos. Las representaciones conceptuales sirven como analogía de los diferentes modelos viscoelásticos definidos en esta sección. Adaptado de “Reservoir geomechanics” (Zoback, 2007).

Estos, y otros modelos *reológicos*, se explican con mayor detalle en los textos “Engineering viscoelasticity” de Roylace (Roylace, 2001), y “Fundamentals of Rock Mechanics de Jaeger, Cook y Zimmerman (2007) (Jaeger, y otros, 2007).

1.3 FRACTURAS Y RESISTENCIA DE LAS ROCAS.

Como casi todos los materiales, las rocas de yacimiento se comportan elásticamente mientras no alcancen sus puntos de cedencia. En particular, el comportamiento plástico de las rocas del yacimiento se manifiesta por medio de su fracturamiento. Por lo tanto, el material es caracterizado como quebradizo en lugar de dúctil. Las fracturas en las rocas se pueden tipificar de acuerdo a la distribución de los esfuerzos alrededor del cuerpo de roca.

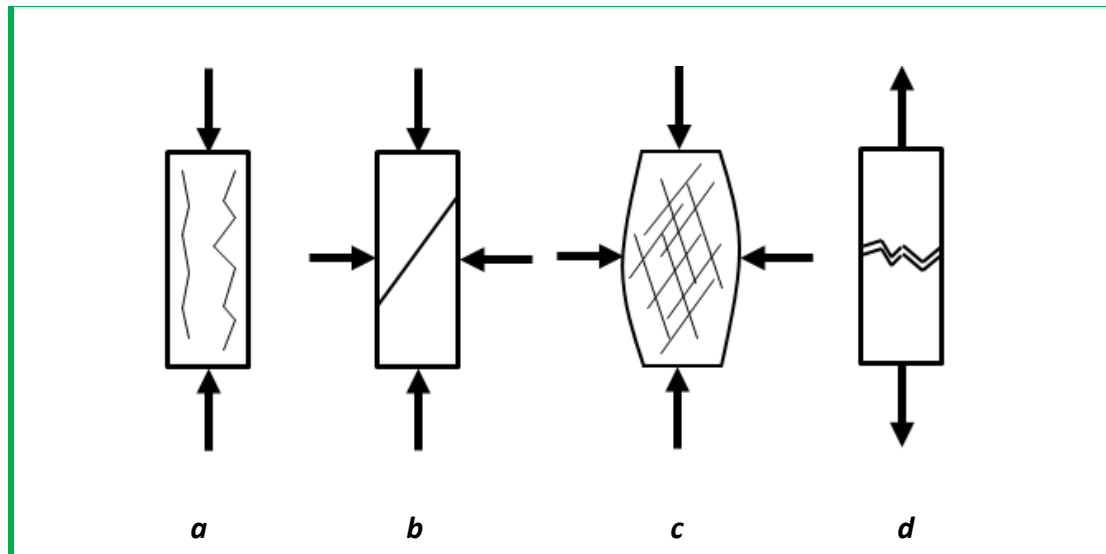


Figura 15: Caracterización de las fracturas de acuerdo a la dirección y magnitud de los esfuerzos aplicados. Adaptado de “Fundamentals of rock Mechanics” (Jaeger, y otros, 2007).

En la Figura 15 se muestran cuatro formas diferentes de cómo se pueden manifestar las fracturas en una roca. En el caso (a), las fracturas se manifiestan de forma paralela a la dirección del esfuerzo aplicado, y ocurre cuando se ejerce una tracción compresiva axial sobre la muestra, sin la aplicación de una presión de confinamiento. Como se indicó en la sección 1.2.3, el esfuerzo en el cual ocurre el fallamiento corresponde al punto de cedencia. Aplicar una presión de confinamiento moderada da lugar al caso (b), en el cual la roca se fractura en un plano claramente definido. Una fractura de este tipo se conoce normalmente como *fractura de cizalla* porque ocurre desplazamiento cortante a lo largo del plano. Si la presión de confinamiento es muy grande, el comportamiento de la roca se aproxima al de un material dúctil debido a que se forma una serie de micro fracturas de cizalla, acompañado de una deformación plástica de los granos individuales de la roca. Esto corresponde al caso (c). Las rocas también se pueden fracturar si son sometidas a esfuerzos de tensión. En el caso (d) ocurre una *fractura extensiva* tras aplicar un esfuerzo de tensión uniaxial. Se puede observar en este caso que el plano de fractura es perpendicular a la dirección del

esfuerzo. Existen otras manifestaciones plásticas más complejas que resultan de la combinación de estos tipos de fracturas. En la industria se tienen en cuenta únicamente los criterios de falla bajo compresión, dado que en subsuelo, las altas presiones de confinamiento casi que imposibilitan la generación de esfuerzos de tensión.

1.3.1 Criterios de falla bajo compresión.

Para caracterizar la formación de fracturas en un cuerpo de roca, muchos autores han formulado correlaciones empíricas que determinan las distribuciones de esfuerzos en las cuales ocurre el fracturamiento. Estas correlaciones, o *criterios de fractura*, dependen de parámetros que varían de un material a otro. Por lo tanto, es necesario que al aplicarlas se cuente con datos de laboratorio resultado de pruebas típicas realizadas a núcleos de roca, tales como las pruebas uniaxiales y triaxiales. Los resultados de las pruebas de laboratorio son generalmente unas gráficas con envolventes que separan las zonas estables de las inestables (Ver figuras Figura 16 y Figura 17).

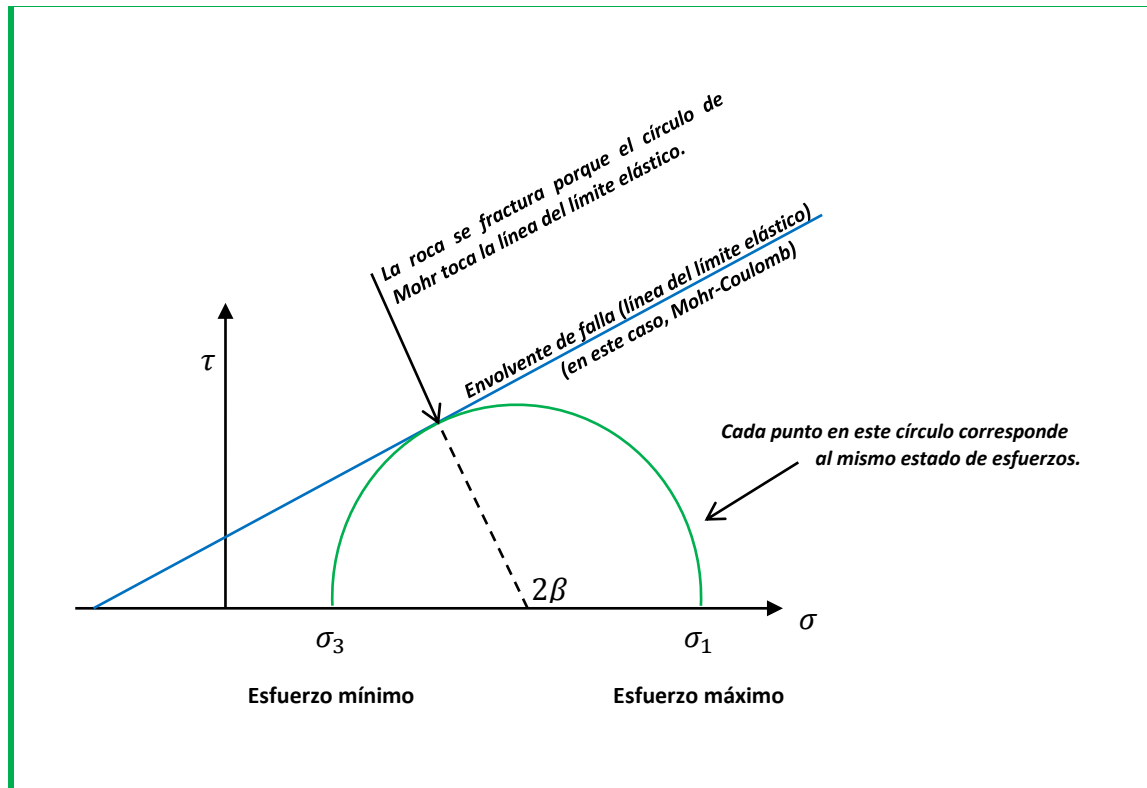
La selección de un criterio u otro depende de cómo se espera que el material falle (¿el material se comporta como dúctil o quebradizo?), o de las consideraciones que se tengan en cuenta a la hora de resolver un problema (¿qué tan aproximados se desean los resultados?).

En las siguientes secciones se presentan varios criterios de falla, que relacionan el valor del esfuerzo máximo en el punto de falla de la roca como función de los otros dos esfuerzos principales. Los criterios de Mohr-Coulomb y Hoek Brown ignoran la influencia del esfuerzo principal intermedio, y son por lo tanto derivables de datos de una prueba triaxial convencional, mientras que los criterios de Wiebols-Cook modificado, Lade modificado y Drucker - Prager tienen en cuenta la influencia del esfuerzo principal intermedio, por lo que requieren de datos obtenidos en pruebas de resistencia poliaxial.

1.3.1.1 Criterio de linealizado de Mohr - Coulomb (criterio de la fricción interna).

Se han formulado tantos criterios de falla como leyes constitutivas disponibles. Sin embargo, ningún criterio representa de forma exacta el comportamiento de una roca, dada la naturaleza heterogénea de las mismas. Quizás es por esta razón que el criterio linealizado de Mohr - Coulomb aún sigue siendo el más utilizado, pues es un método sencillo de utilizar y que aproxima con una tolerancia aceptable el comportamiento de casi cualquier tipo de roca.

Este criterio resultó de los múltiples experimentos de fricción que realizó Coulomb en 1773, y establece que la fractura de una roca o suelo ocurre sobre un plano de fricción, el cual se origina cuando se alcanza un valor determinado de esfuerzo de cizalla en alguna dirección. Debido a que el esfuerzo es un tensor, determinadas combinaciones de los valores de los esfuerzos principales pueden dar lugar a un valor de esfuerzo de cizalla que puede corresponder al límite elástico. Por esta razón, la construcción del círculo de Mohr es útil en la formulación de este criterio (Ver Figura 16).



▲ **Figura 16: Círculo de Mohr.** En esta gráfica, β es igual al ángulo de orientación del plano de fractura con respecto a la orientación del esfuerzo máximo. Esta gráfica aplica para fracturas como las mostradas en la Figura 15b. Fuente: los autores.

El criterio solo tiene en cuenta los valores del esfuerzo principal máximo y el esfuerzo principal mínimo, de modo que el esfuerzo efectivo, σ_n , será igual a $\sigma_1 - \sigma_3$, al considerar al esfuerzo mínimo como la presión de confinamiento del sistema. La forma en que están relacionados el esfuerzo de cizalla, τ , y el esfuerzo efectivo, σ_n :

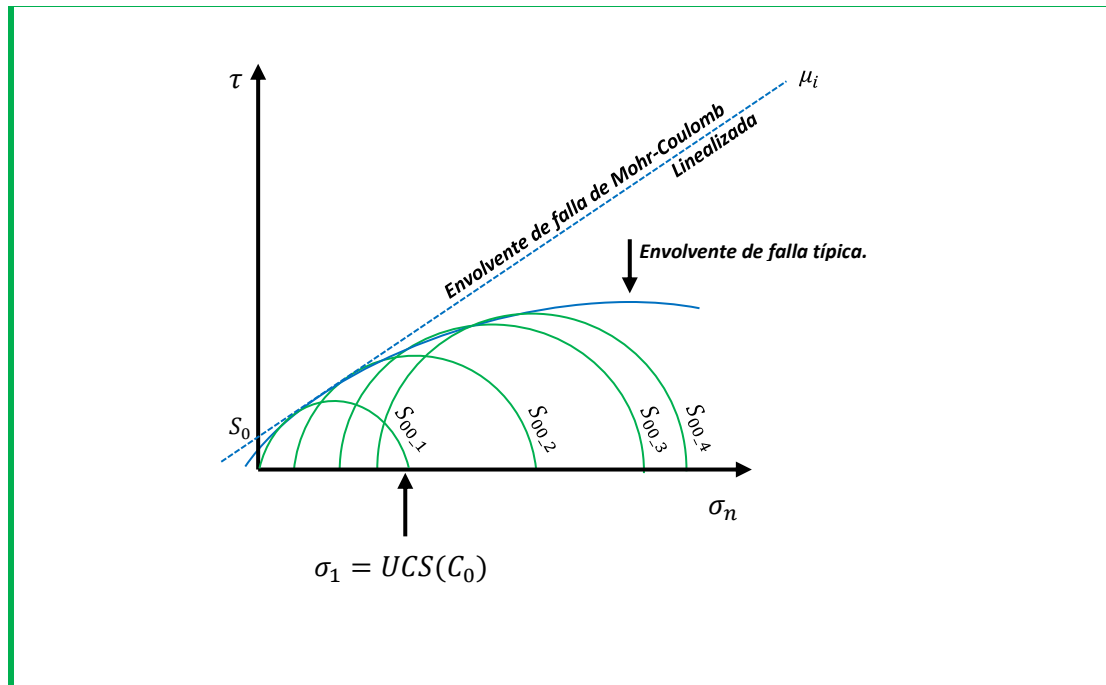
$$\tau = S_0 + \sigma_n \mu_i$$

Ecuación 24

Donde

$\mu_i = \tan \phi$, es el coeficiente de fricción interna,
 ϕ es el ángulo de fricción interna,
 σ_n es el esfuerzo normal efectivo,
 S_0 es resistencia cohesiva o cohesión, y
 μ_i y S_0 dependen del material.

Como se puede observar, esta relación es lineal. En la Figura 17 **Figura 17: Envolvente de falla de Mohr- Coulomb**. A partir de una serie de pruebas triaxiales a diferentes presiones de confinamiento, se puede obtener dicha envolvente. Nótese que en este caso la línea de envolvente de Mohr Columb no pasa por todos los círculos. Esto se debe porque a presiones de confinamiento muy altas, la roca cede antes de alcanzar el punto predicho por el criterio. Adaptado de “Reservoir Geomechanics” . se muestra la envolvente de fractura aplicando este criterio. Esta envolvente se obtiene a partir de una serie de pruebas triaxiales realizadas a presiones de confinamiento diferentes a un mismo núcleo de roca. Los estados de esfuerzos que evitan la fractura de la roca corresponderán a aquellos cuyos círculos de Mohr no intersecten la envolvente de falla. En la Figura 17 **Figura 17: Envolvente de falla de Mohr- Coulomb**. A partir de una serie de pruebas triaxiales a diferentes presiones de confinamiento, se puede obtener dicha envolvente. Nótese que en este caso la línea de envolvente de Mohr Columb no pasa por todos los círculos. Esto se debe porque a presiones de confinamiento muy altas, la roca cede antes de alcanzar el punto predicho por el criterio. Adaptado de “Reservoir Geomechanics” . también se presenta otro parámetro: C_0 , que es lo mismo que UCS, o Unconfined Compressive Strength. Este parámetro es igual al esfuerzo máximo aplicado durante el fallamiento de la roca bajo condiciones de confinamiento nulo ($\sigma_3 = 0$).



▲ **Figura 17: Envolvente de falla de Mohr- Coulomb.** A partir de una serie de pruebas triaxiales a diferentes presiones de confinamiento, se puede obtener dicha envolvente. Nótese que en este caso la línea de envolvente de Mohr-Coulomb no pasa por todos los círculos. Esto se debe porque a presiones de confinamiento muy altas, la roca cede antes de alcanzar el punto predicho por el criterio. Adaptado de “Reservoir Geomechanics” (Zoback, 2007).

Aunque una prueba uniaxial se puede realizar para determinar de manera directa el valor de C_0 , no es recomendable aplicar este procedimiento, puesto que la roca puede fracturarse en planos paralelos a la dirección del esfuerzo aplicado, tal y como se muestra en la **Figura 15: Caracterización de las fracturas de acuerdo a la dirección y magnitud de los esfuerzos aplicados.** Adaptado de “Fundamentals of rock Mechanics” .Figura 15b, y porque en condiciones de no confinamiento la muestra es sensible a la presencia de defectos. En su lugar, es preferible realizar una serie de pruebas triaxiales con los cuales se determinen los valores de S_0 y μ_i , para aplicarlos en la ecuación:

$$C_0 = 2S_0[(\mu_i^2 + 1)^{1/2} + \mu_i]$$

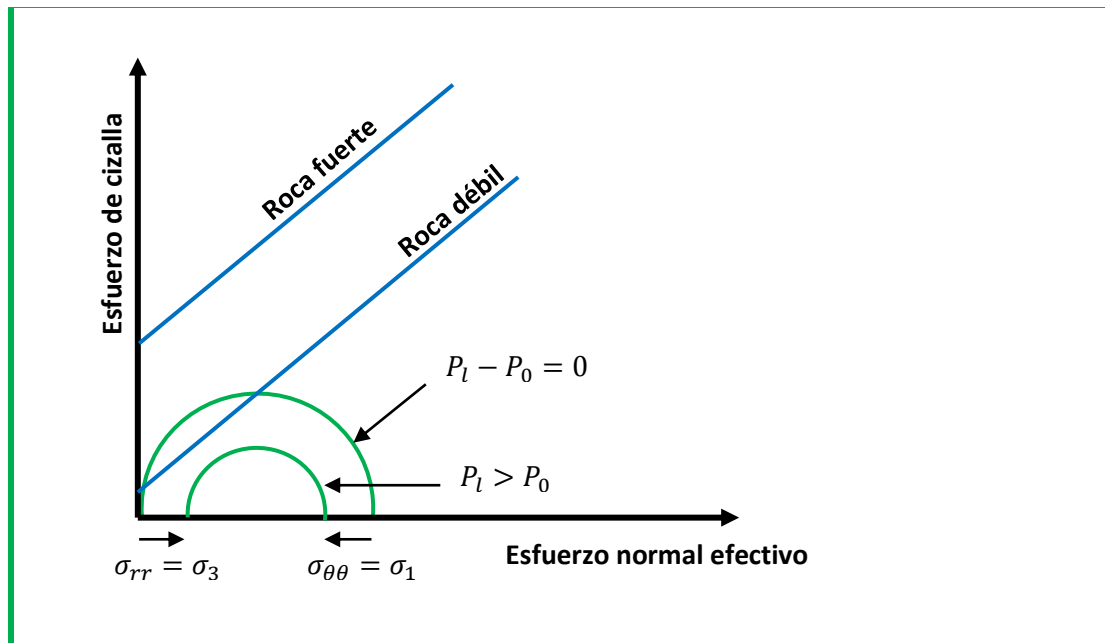
Donde

$\mu_i = \tan \phi$ es el coeficiente de fricción interna,
 S_0 es resistencia cohesiva o cohesión.

Ecuación 25

Otro parámetro con significado físico es la resistencia cohesiva, S_0 , la cual puede ser interpretada como un indicador de qué tan resistente es un material: mientras mayor sea su valor, mayor es la resistencia a la fractura de la roca, para un mismo valor de μ_i .

Para ilustrar la importancia del criterio en yacimientos, se ilustra en la Figura 18 una aplicación sencilla en estabilidad de pozo.



▲ **Figura 18: Aplicación del criterio de Mohr – Coulomb en una situación de campo.** Cuando la presión del lodo, P_l , es mayor que la presión de poro, P_0 , el pozo es estable y no se fractura. Adaptado de “Reservoir Geomechanics” (Zoback, 2007).

Para finalizar, se presenta una forma generalizada para expresar el criterio linealizado de Mohr – Coulomb:

$$\sigma_1 = C_0 + q\sigma_3$$

Ecuación 26

Donde

$$q = \left[(\mu_i^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \mu_i \right]^2 = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$$

$\mu_i = \tan \phi$ es el coeficiente de fricción interna,

ϕ es el ángulo de fricción interna,

C_0 es Unconfined Compressive Strength.

1.3.1.2 Criterio de Hoek-Brown.

Este criterio ha adquirido importancia en los últimos años. Al igual que el criterio de Mohr Coulomb, ignora la influencia del esfuerzo intermedio. Los autores, Hoek y Brown, propusieron (Hoek, y otros, 1980):

$$\sigma_1 = \sigma_3 + C_0 \sqrt{m \frac{\sigma_3}{C_0} + s}$$

Ecuación 27

Donde

m y s son dos parámetros adimensionales de ajuste, que dependen de las propiedades de la roca.

C_0 es Unconfined Compressive Strength.

Múltiples experimentos que desarrollaron Hoek y Brown en los años posteriores sirvieron para correlacionar el valor de m de acuerdo al tipo de roca, y de n de acuerdo a las características de la masa de roca. De acuerdo a Hoek y Brown (Hoek, y otros, 1997):

- $5 < m < 8$: rocas carbonatadas con cristales de escisión bien desarrollados (dolomitas, calizas, mármol).
- $4 < m < 10$: rocas arcillosas litificadas (lodolitas, shale, limolitas, pizarras).
- $15 < m < 24$: rocas arenosas con cristales fuertes y cristales de escisión pobremente desarrollados (areniscas, cuarcita).
- $16 < m < 19$: rocas cristalinas ígneas compuestas por múltiples minerales de grano fino (andesita, dolerita, diabasa, riolita).
- $22 < m < 33$: rocas metamórficas e ígneas compuestas por múltiples minerales de grano grueso (anfíbolita, gabro, gneis, granito, norita, cuarzo-diorita).
- La envolvente de Mohr de este criterio es curva, más específicamente, de forma parabólica. Nótese también que si se hace cero el valor del esfuerzo mínimo, se obtiene el valor de C_0 .

Una desventaja práctica del criterio de Hoek - brown, es que no hay correlaciones disponibles en la literatura entre m y los registros geofísicos de pozos, ni tampoco con el más conocido ángulo interno de fricción, μ_i .

1.3.1.3 Criterio de Lade modificado

El criterio de Lade (Lade, 1977), es un criterio que tiene en cuenta a los tres esfuerzos principales, y que originalmente se desarrolló para materiales friccionales sin cohesión efectiva, tales como los suelos. Este criterio está dado por la relación:

$$\left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27\right) \left(\frac{I_1}{P_a}\right)^{m'} = \eta_1$$

Ecuación 28

Donde

I_1 y I_3 son la primera y tercera invariantes del tensor de esfuerzos,
 P_a es la presión atmosférica, y
 m' y η_1 son constantes propias del material.

Por su parte, en el criterio de Lade modificado, Ewy estableció que el valor de m' debía ser cero para obtener una relación lineal entre τ y $I_1/3$, e introdujo la presión de poro como parámetro necesario para incluir a los materiales con cohesión, además de η para representar la fricción interna y S para representar la cohesión (Ewy, 1999). El resultado fue el siguiente:

$$\frac{(I_1')^3}{I_3'} = 27 + \eta$$

Ecuación 29

Donde

$$I_1' = (\sigma_1 + S) + (\sigma_2 + S) + (\sigma_3 + S)$$

$$I_3' = (\sigma_1 + S)(\sigma_2 + S)(\sigma_3 + S)$$

$$S = S_0 / \tan \phi$$

$$\eta = \frac{4(\tan \phi)^2(9 - 7 \sin \phi)}{1 - \sin \phi}$$

ϕ es el ángulo de fricción interna,

S_0 es resistencia cohesiva o cohesión.

1.3.1.4 Criterio de Drucker-Prager (criterio extendido de cedencia de von Mises).

Basado en el criterio de cedencia de von Mises (ver Ecuación 21), el cual también puede ser escrito como $J_2 = k^2$, el criterio de Drucker Prager es de la forma:

$$J_2^{1/2} = k + \alpha J_1$$

Ecuación 30

Donde

α y k son constantes específicas del material,

$$J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$J_2^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]},$$

σ_1, σ_2 y σ_3 son los componentes principales del tensor esfuerzo efectivo.

Los parámetros del material α y k se determinan a partir del intersección de la envolvente de falla en un gráfico de J_1 contra $J_2^{1/2}$. El criterio se puede comparar con el criterio de Mohr – Coulomb desde que α está relacionado con el coeficiente

de fricción interna, μ (y por lo tanto con ϕ) y k , con la cohesión, S_0 , del material. La relación entre estos parámetros depende del tipo de criterio de Drucker – Prager considerado.

En el caso del criterio inscrito de Drucker – Prager (Veeken, y otros, 1989; McLean, y otros):

$$\alpha = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}}$$

$$k = \frac{6 \sin \phi}{2\sqrt{q}\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}}$$

Ecuación 31

Donde

α y k son constantes específicas del material,
 ϕ es el ángulo de fricción interna,

$$q = \left[(\mu_i^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \mu_i \right]^2 = \tan^2(\pi/4 + \phi/2),$$

$\mu_i = \tan \phi$ es el coeficiente de fricción interna.

En el caso del criterio circunscrito de Drucker – Prager (McLean, y otros; Zhou, 1994):

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$$

$$k = \frac{\sqrt{3} C_0 \cos \phi}{\sqrt{q} (3 - \sin \phi)}$$

Ecuación 32

Donde

α y k son constantes específicas del material,
 ϕ es el ángulo de fricción interna,

$$q = \left[(\mu_i^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \mu_i \right]^2 = \tan^2(\pi/4 + \phi/2),$$

$\mu_i = \tan \phi$ es el coeficiente de fricción interna.

Nótese que cuando α es igual a cero, el criterio se reduce al de Von Mises. Además, se tiene que considerar que este método fue originalmente desarrollado

para mecánica de suelos, en donde la cohesión de los materiales es bastante pequeña.

1.3.1.5 Criterio de Wiebols-Cook modificado

Basado en el criterio de Druker Prager circunscrito, Zhou (Zhou, 1994) propuso un criterio modificado basado en añadirle un término cuadrático de modo que la relación quedaría así:

$$J_2^{1/2} = A + BJ_1 + CJ_1^2$$

Ecuación 33

Donde

$$J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$J_2^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

A, B y C son constantes del material.

Colmenares y Zoback (Colmenares, y otros, 2002) fueron quienes denominaron a este criterio como “*Criterio modificado de Wiebols y Cook*”, dadas sus similitudes con un otro propuesto por Wiebols y Cook (Wiebols, y otros, 1968) basado en el análisis micromecánico de grietas deslizantes.

1.3.2 Criterios de fractura de la roca por tensión.

El análisis de los criterios de falla por tensión no son de importancia para la industria porque virtualmente los esfuerzos de tensión no existen en subsuelo. Otras razones que se tiene que tener en cuenta son: 1) la resistencia a la tensión de casi todas las rocas son del orden de unos pocos mega pascales (Lockner, 1995); y 2) cuando hay defectos pre-existentes en la roca, se espera que la resistencia a la tensión sea muy cercana a cero.

Por su parte, se puede demostrar que en una operación de fracturamiento hidráulico (en la cual ocurren procesos de fractura por tensión) no es importante considerar la resistencia a la tensión de la roca en el proceso de extensión de la

fractura. En la Figura 19, se muestra que el proceso de propagación inicial de una fractura de Modo I depende de la resistencia de la roca. Sin embargo, después de alcanzar unos cuantos centímetros, se requieren sobrepresiones muy pequeñas (de unos pocos mega pascales) para hacer que la fractura crezca, independiente de los valores de resistencia a la tensión de la roca.

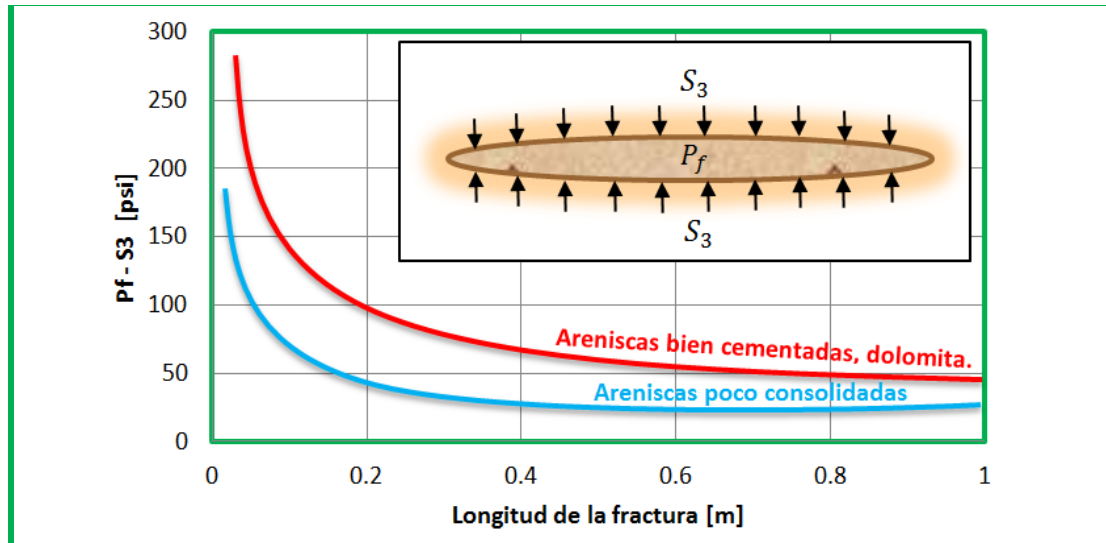


Figura 19: Relación entre presión interna de fractura, $P_f - S_3$, y la longitud para una fractura de Modo I en dos rocas con resistencias diferentes.

▲ Después de varios centímetros, el valor de la presión de fractura, P_f , no tiene que exceder por mucho a S_3 , para que la fractura se propague. En todos los casos, la fractura lo hará en dirección perpendicular al esfuerzo mínimo. Adaptado de "Reservoir Geomechanics" (Zoback, 2007).

1.3.3 Fricción entre las rocas.

La fricción entre las rocas ocurre entre los planos en contacto de las grietas, fracturas y fallas pre-existentes. Para caracterizar la forma cómo se desplazan las superficies contactantes en función de las geometrías y las propiedades físicas de las superficies, varios autores han desarrollado una serie de experimentos, que resultaron en varias teorías compiladas en el texto de Bowden y Tabor (Bowden, y

otros, 1985). Sin embargo, otros autores, como Krim, han propuesto alternativas más recientes relacionadas con las bases de la fricción a nivel molecular.

Las primeras formulaciones fueron diseñadas para materiales que no eran necesariamente rocas. A partir de los primeros experimentos que realizó Da Vinci, se obtiene la siguiente relación entre la fuerza tangencial, T , y la fuerza normal, N , mínimos con los cuales la roca puede deslizarse:

$$T = \mu N$$

Ecuación 34

Donde

μ es el coeficiente de fricción,
 N es la fuerza normal,
 T es la fuerza tangencial.

Si se dividen ambos lados de la ecuación por el área nominal, A , se obtiene la *Ley de Amontons*:

$$\tau = \mu \sigma$$

Ecuación 35

Donde

μ es el coeficiente de fricción. τ es el componente tangencial de la tracción actuando lo largo del plano de contacto (esfuerzo de corte), y σ es el componente normal (esfuerzo normal).

Es decir, el conjunto de valores de esfuerzo normal y esfuerzo de corte con los cuales comienza el deslizamiento están relacionados linealmente. Esta ecuación a veces es denominada el criterio de Coulomb, y es la base del criterio linealizado de Mohr-Coulomb (ver sección 1.3.1.1). Investigaciones recientes han demostrado que los valores de μ puede variar desde muy próximos a cero (el caso de la interacción teflón - teflón) a 1.5 (interacciones níquel – níquel). Sin embargo, para el caso de las fracturas en las rocas cuyo esfuerzo normal efectivo es $\geq \sim 10$

[Mpa], (Byerlee, 1978), Byerlee demostró que el valor del coeficiente de fricción es:

$$0.6 \leq \mu \leq 1.0$$

Ecuación 36

independiente de la rugosidad de la superficie, el esfuerzo normal, la velocidad del deslizamiento, entre otras. Esta relación es a veces conocida como la Ley de Byerlee.

Es necesario tener en cuenta que el valor de μ es obtenido a partir de experimentos en superficies inicialmente en reposo. Por lo tanto, es más conveniente denominarlo *coeficiente estático de fricción*, debido a que bajo condiciones dinámicas,

$$\tau = \mu_d \sigma$$

Ecuación 37

Donde

τ es el componente tangencial de la tracción actuando lo largo del plano de contacto (esfuerzo de corte),

$\mu_d < \mu$ es el coeficiente de fricción dinámico,

μ es el coeficiente de fricción estático, y

σ es el componente normal del esfuerzo.

Lo normal es que se cumpla la relación $\mu_d < \mu$. Es por esta razón que se asume que el estado de los esfuerzos en subsuelo debe ser tal que no exceda la resistencia friccional de las fallas pre-existentes.

1.4 PRUEBAS DE LABORATORIO DE MECÁNICA DE ROCAS.

A diferencia de los materiales utilizados para la construcción de las facilidades (tales como el acero, el cobre, etc), la composición de las rocas del subsuelo no es estándar ni homogénea, y por lo tanto, no es posible consultar las propiedades mecánicas de una muestra de roca en la literatura. En su lugar, dichas propiedades (definidas en las secciones 1.2 y 1.3) deben ser determinadas experimentalmente, a partir de una serie de pruebas que someten al espécimen de roca a una serie de esfuerzos con el fin de registrar su respuesta deformativa.

Si bien los montajes experimentales no aproximan al ciento por ciento las condiciones de subsuelo, los resultados obtenidos a partir de estas pruebas han sido suficientes en la predicción de situaciones en el subsuelo que influyan sobre el desempeño productivo de un campo, puesto que se han formulado diversas teorías y formulaciones que correlacionan el comportamiento esfuerzo-deformación de una muestra representativa de roca con los problemas más comunes de estabilidad de pozo, la predicción del arenamiento y los procedimientos necesarios para efectuar un fracturamiento hidráulico.

Existen varias pruebas disponibles para la evaluación de los parámetros constitutivos; la aplicación de una u otra dependerá de los requerimientos solicitados por el ingeniero. En las secciones que vienen a continuación se describen el montaje experimental, las características de la muestra y los resultados obtenidos de cada una de las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas más utilizadas en la industria.

1.4.1 Pruebas de compresión hidrostática.

El objetivo de una prueba de compresión hidrostática es evaluar el efecto de la compresión debida a la aplicación de una tracción uniforme sobre toda la muestra de roca. Esta prueba es equivalente a una situación en la que la superficie de una roca está en contacto con un fluido presurizado.

El procedimiento para realizar una prueba de este tipo consiste en la inyección de un *fluido de confinamiento* a una cámara en la cual se encontrará la muestra. La transmisión de la presión de confinamiento es posible debido a que el fluido está conectado a una bomba o pistón. Con el fin de que el fluido no ingrese al espacio poroso de la roca, se usa un revestimiento impermeable, delgado y que se ajusta a la forma de las paredes de la muestra. Para el control de la calidad del experimento, un medidor de presión está directamente conectado con el fluido.

El principal parámetro que se puede obtener a partir de esta prueba es el módulo de compresibilidad, el cual se obtiene a partir de las deformaciones medidas por una serie de medidores adjuntos a la muestra de roca. Los parámetros poroelásticos también se pueden determinar a partir de estas pruebas, al hacer variar la presión de poro.

1.4.2 Prueba de compresión uniaxial.

Como su nombre lo indica, es una prueba en la que la muestra es comprimida en una misma dirección ($S_1 > 0$, $S_2 = S_3 = 0$). Se debe tener en cuenta que la compresión debe estar orientada con un eje cartesiano, lo que significa que no sirve para aplicar esfuerzos radiales. El procedimiento consiste en la compresión de un cilindro recto circular o un prisma de roca entre dos platos rígidos paralelos. El parámetro que se controla durante la compresión es el esfuerzo normal aplicado, en tanto que la deformación axial es la variable dependiente. El esfuerzo puede ser incrementado lentamente, hasta que la muestra se fracture. Por su parte, no se aplican esfuerzos de cizalla sobre la muestra.

Esta prueba es realizada con el objeto de obtener el valor del módulo de Young, E , a partir de la relación $E = \sigma/\varepsilon$. También puede ser usada para obtener el valor de UCS (Unconfined Compressive Stress). Sin embargo, no es recomendable obtener el UCS con esta prueba, ante la posibilidad de que la roca se fracture en la misma dirección del esfuerzo aplicado, tal y como se ilustra en la Figura 15a. En

su lugar, es preferible realizar una serie de pruebas triaxiales con la cuales se obtenga su valor de manera indirecta (ver Ecuación 25).

1.4.3 Prueba uniaxial de tensión.

Debido a que la resistencia a la tensión de las rocas sedimentarias es muy baja, y a que esta prueba puede promover la propagación de fracturas pre-existentes, las pruebas uniaxiales de tensión ($S_1 < 0, S_2 = S_3 = 0$) son poco comunes. En secciones anteriores también se dan razones de porqué es poco importante determinar la resistencia a la tensión de las rocas en ingeniería de petróleos.

1.4.4 Prueba tradicional de compresión triaxial.

Es la forma más común de medir la resistencia de una roca a condiciones similares de subsuelo. En esta prueba, dos de los esfuerzos son iguales, y a la vez menores que un esfuerzo más compresivo ($S_1 > S_2 = S_3$).

El montaje experimental consiste de una muestra roca (generalmente de forma cilíndrica, cuya relación longitud a diámetro es comúnmente de 2:1 ó 3:1) a la cual se le aplica un esfuerzo constante en una dirección –por medio de un pistón–, y una presión hidrostática sobre la superficie de la roca – por medio de un fluido presurizado. Es optativo decidir si el fluido presurizado se aplicará sobre las caras que están en contacto con el pistón o no. El esfuerzo aplicado en dirección uniaxial corresponde al esfuerzo máximo. Para evitar los efectos de borde, los medidores de deformación se ubican en las partes medias de las paredes del cuerpo de roca. Este procedimiento puede ser pensado como una combinación de la prueba de compresión hidrostática y de la prueba de compresión uniaxial.

Los datos que se pueden obtener con una prueba tradicional de compresión triaxial incluyen la presión de confinamiento, las curvas de esfuerzo – deformación y las deformaciones axial y lateral.

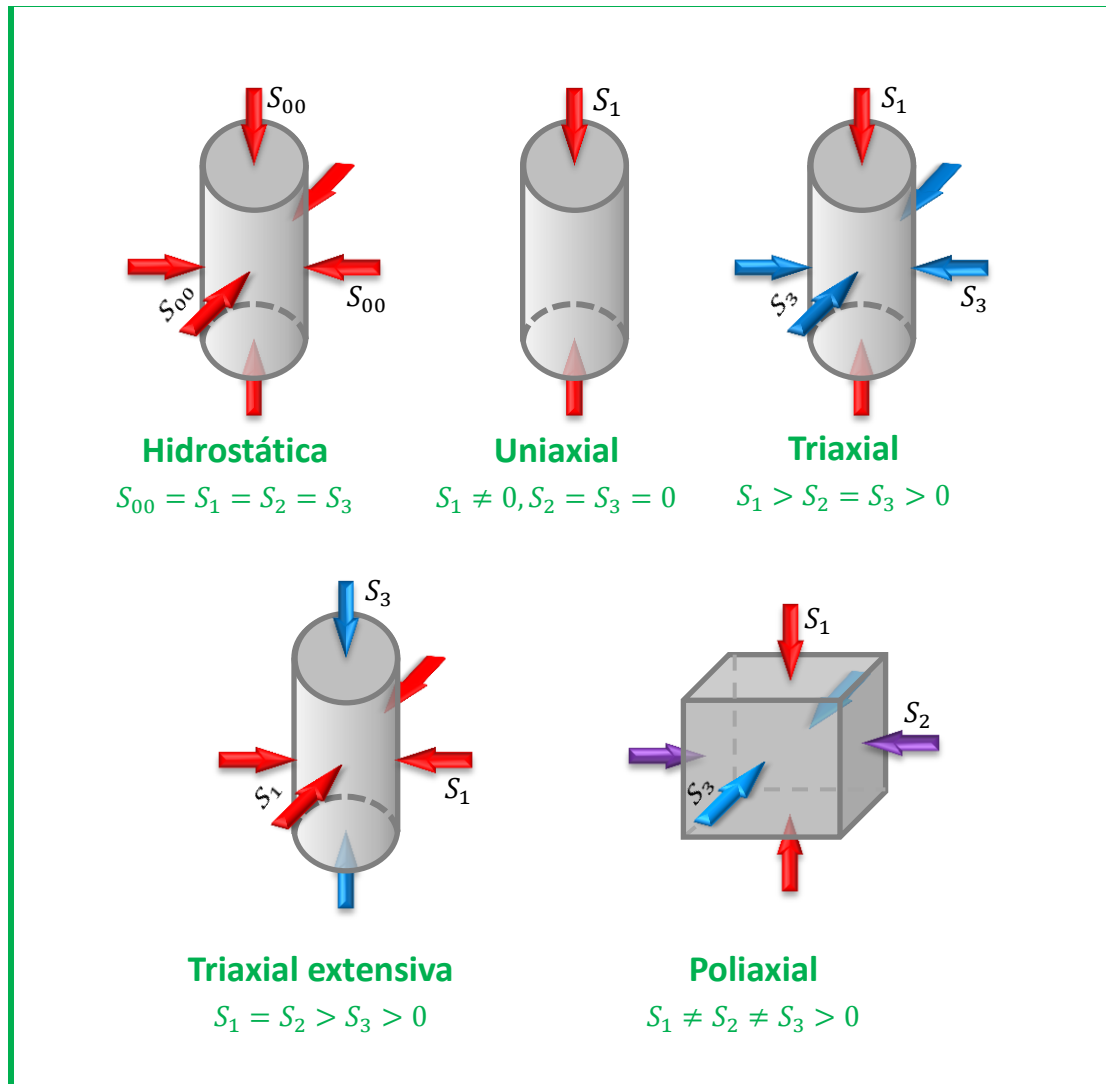
1.4.5 Prueba de extensión triaxial.

El montaje experimental es similar al de una prueba triaxial compresiva, pero se diferencia en que el esfuerzo uniaxial aplicado es el menor ($S_1 = S_2 > S_3$). Esta prueba se puede utilizar para medir la resistencia compresiva de la roca y el menor esfuerzo efectivo. Estas pruebas también se pueden utilizar para correlacionar la influencia del esfuerzo intermedio en los procesos de fractura.

1.4.6 Prueba verdadera triaxial (prueba poliaxial).

Estas pruebas tienen en cuenta los efectos de las variaciones de los tres esfuerzos principales ($S_1 > S_2 > S_3$). En consecuencia, el esfuerzo intermedio es considerado en los procesos que ocurren dentro de la roca. A diferencia de las anteriores pruebas, la muestra de roca debe tener forma de paralelepípedo.

Debido a la dificultad que se presenta para controlar independientemente el estado del esfuerzo en cada dirección, son diversos los diseños de las celdas de prueba. Además, el control de la presión de poro y la preparación de la muestra puede ser desafiante.



▲ **Figura 20: Esquema de cada una de las principales pruebas de mecánica de rocas.** Adaptado de "Reservoir Geomechanics" (Zoback, 2007).

1.5 APLICACIONES EN INGENIERÍA DE PETRÓLEOS.

Las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas son herramientas útiles de la geomecánica para la predicción del comportamiento mecánico tanto de un pozo como de todo el yacimiento, debido a que muchos autores han asociado los resultados de estas pruebas con problemas de estabilidad de pozo, producción de

arena, entre otros. Afortunadamente, muchas de las correlaciones propuestas no requieren de una gran cantidad de resultados para hacer predicciones con un grado aceptable de tolerancia. De hecho, la realización de una serie de pruebas triaxiales en ocasiones es suficiente para obtener los datos requeridos.

Las aplicaciones más destacadas en la industria son las predicciones de inestabilidad de pozos, el estudio de la interacción casing – formación, la predicción y caracterización del arenamiento y la producción de finos, y el fracturamiento hidráulico. Estas aplicaciones se van a describir en las siguientes secciones.

1.5.1 Estabilidad de pozo.

Cuando se perfora un pozo, se perturban las condiciones del estado de esfuerzos original de la formación. En consecuencia, el nuevo campo de esfuerzos puede exceder la resistencia compresiva de la roca, dando lugar a la generación de rupturas alrededor de la cara del pozo. Estas rupturas cobran importancia durante la perforación cuando el material desprendido es suficiente para que el lodo pierda su capacidad de limpieza y circulación, de modo que los detritos se adhieren en la base del hueco. En estas circunstancias, se dice que el pozo es inestable.

No hay un acuerdo definido en la industria que relacione la morfología del pozo con su estabilidad. Sin embargo, a menudo se asocia con el diámetro del pozo; la estabilidad se mantiene cuando el diámetro del pozo es muy cercano al diámetro de la broca. En realidad, no es necesario que el diámetro del pozo sea uniforme en todas las direcciones para considerarlo estable; es natural que ocurran rupturas alrededor de la cara del pozo, pero si éstas son muy abiertas dan lugar a un lavado de pozo, lo cual sí se considera un problema de estabilidad.

Para un medio isótropo y elástico, la concentración de esfuerzos alrededor de la cara del pozo es descrita por las ecuaciones de Kirsch (Kirsch, 1898):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}(S_{Hmax} + S_{hmin} - 2P_0) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(S_{Hmax} - S_{hmin}) \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ &\quad + \frac{P_0 R^2}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}(S_{Hmax} + S_{hmin} - 2P_0) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(S_{Hmax} - S_{hmin}) \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta + \frac{P_0 R^2}{r^2} \\ &\quad - \sigma^{\Delta t} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2}(S_{Hmax} - S_{hmin}) \left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta\end{aligned}$$

Ecuación 38

Donde

σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\tau_{r\theta}$ son componentes del tensor esfuerzo en coordenadas cilíndricas,
 S_{Hmax} y S_{hmin} son los esfuerzos principales horizontales según el esquema de clasificación de Anderson,
 θ es el ángulo medido respecto al azimuth de S_{Hmax} ,
 r es la distancia medida con respecto al centro del pozo,
 R es el radio del pozo, y
 $\sigma^{\Delta t}$ representa los esfuerzos térmicos generados de la diferencia de temperaturas entre lodo de perforación y la formación.

Con estas ecuaciones se puede demostrar que en el azimuth del esfuerzo mínimo horizontal, S_{hmin} , el valor del esfuerzo es casi tres veces mayor alrededor de la cara del pozo, mientras que es cercano a cero en el azimuth del esfuerzo máximo, S_{Hmax} , cerca a la cara del pozo. Por lo tanto, se espera que la ruptura de la roca se prolongue en la dirección de S_{hmin} , en tanto que se pueden presentar fracturas tensiles inducidas por la perforación en la dirección de S_{Hmax} . Debido a que con las pruebas de laboratorio se determina la resistencia a la compresión y a la tensión de las rocas, son una herramienta útil para predecir qué tan susceptible es un pozo al colapso al aplicar las ecuaciones de Kirsch.

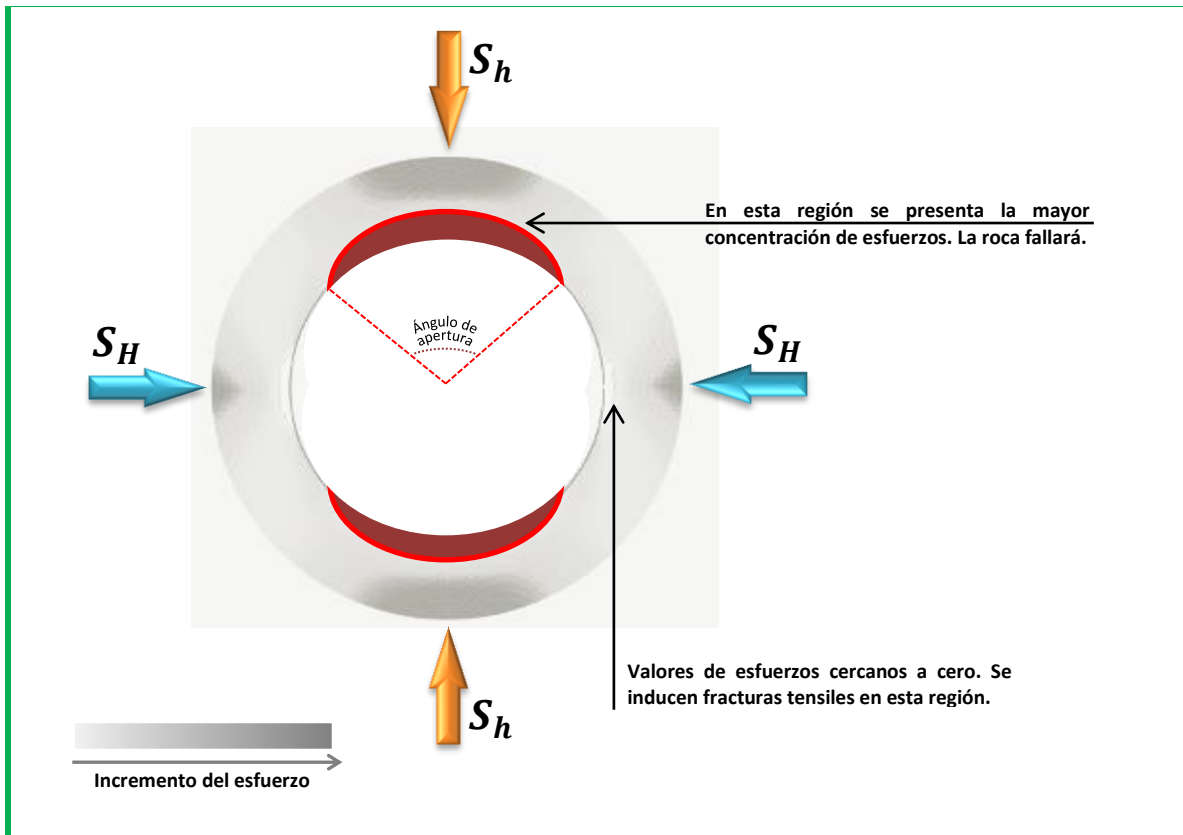


Figura 21: Concentración de esfuerzos alrededor de la cara del pozo. El ángulo de apertura es un indicador del tamaño de las rupturas que se generan por la concentración de esfuerzos en el azimuth del esfuerzo mínimo horizontal. Cuando el ángulo de apertura es menor a 60° , independiente de la profundidad de la ruptura dentro de la roca, el pozo se considera estable; de lo contrario, la ocurrencia de un lavado de pozo es muy probable, lo cual se considera un problema de estabilidad. Fuente: los autores.



En general, las predicciones de estabilidad de pozo que se realicen en una formación antes de que se presenten estos problemas, ya sea por medio de las ecuaciones de Kirsch, o por medio de modelos más robustos, resaltan la importancia de la geomecánica en las operaciones de perforación, al ayudar en la reducción de costos operativos al aplicar una serie de optimizaciones en la trayectoria del pozo, las facilidades en superficie y en el mismo lodo de perforación, además de minimizar el número de tubos de perforación empleados.

1.5.1.1 Factores que influyen en la estabilidad del pozo.

Si bien las causas principales de inestabilidad de pozo se deben principalmente al estado de esfuerzos alrededor del mismo, también se cuentan los agentes químicos que podrían actuar cuando entran en contacto el fluido de perforación y los fluidos de la formación. A continuación, se listan los principales factores que influyen en la estabilidad de un pozo:

- ✓ **Propiedades mecánicas de las rocas:** Quizás es el factor más determinante en la estabilidad de un pozo puesto que no puede ser controlado por los ingenieros, ni es uniforme a lo largo de un mismo pozo (de hecho, puede variar de manera abrupta e inesperada en muchos casos). Sin embargo, se pueden hacer predicciones de dichas propiedades a partir de los ripios de perforación, los registros de pozos, las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas realizadas a los núcleos de roca y la información adquirida de otros pozos del mismo campo.

El conocimiento de las propiedades mecánicas de la roca, tales como el módulo de Young, las fuerzas cohesivas y la resistencia, puede ayudar a tomar medidas que ayuden a optimizar la operación de perforación, y de esta manera evitar eventuales inestabilidades que dan lugar a los típicos problemas operaciones a los que se enfrentan los ingenieros.

- ✓ **Campo de esfuerzos principales:** Es prioridad de la geomecánica reconocer el estado de esfuerzos in-situ alrededor del pozo. Para conseguirlo, solo basta el campo de esfuerzos principales para determinar cualquier posible esfuerzo que se esté presentando en la roca. Esto es esencial porque la roca (y por ende, el pozo) puede fallar si el diferencial de esfuerzos, $S_1 - S_3$, excede la resistencia a la fractura de la roca.

Para conseguir el esfuerzo vertical, basta remitirse a los registros de densidad. Sin embargo, la determinación de los esfuerzos horizontales puede ser un reto.

- ✓ Trayectoria del pozo: La trayectoria de un pozo se puede definir en función del estado de los esfuerzos, con el fin de prevenir su desestabilización. Un modelo numérico puede ser útil en la determinación de la mejor trayectoria de un pozo.
- ✓ Presión de poro: La presión de poro cambia el estado de esfuerzos en la formación, al soportar parcialmente los esfuerzos aplicados a la roca. Junto con el estado de los esfuerzos, la presión de poro es un valor requerido para hacer predicciones con aceptable tolerancia.
- ✓ Interacción fluido de perforación - fluido de formación: Los cambios químicos que ocurran a causa de la interacción entre los fluidos en la cara del pozo pueden causar redistribuciones importantes de las presiones de poro en formaciones que no tienen grandes permeabilidades. Reducir las cantidades del agente químico que reacciona con los fluidos de la formación es una solución a este problema, especialmente cuando las formaciones están compuestas por shales.
- ✓ Temperatura: Aunque en el pasado el efecto térmico no era considerado, se ha demostrado que la diferencia de temperaturas entre el fluido de perforación y los fluidos de la formación pueden inducir esfuerzos adicionales de unas cuantas decenas de mega pascales. En las ecuaciones de Kirsch (Ver Ecuación 39) se puede observar la influencia de los efectos térmicos en el esfuerzo efectivo. La temperatura también puede ayudar a catalizar algunas reacciones químicas.
- ✓ Peso de lodo: Gracias al peso del lodo, se ejerce un soporte parcial a la pared del pozo. El ingeniero se tiene que asegurar de que el valor no sea

muy pequeño, pues puede provocar inestabilidad. El peso de lodo también puede ayudar a reducir la amplitud de una ruptura (breakout) con el fin de no desestabilizar al pozo. Sin embargo, se tiene que tener precaución con el peso del lodo seleccionado, pues éste no debe ser tan grande como para que ocurra un inesperado fracturamiento hidráulico de la formación, pérdidas del lodo en zonas permeables, daño a la formación o pega diferencial, entre otras.

- ✓ Tiempo: Muchos procesos químicos dependen del tiempo para que puedan incidir directamente en los cambios de la presión de poro de la formación.

1.5.2 Arenamiento.

El arenamiento, o producción de arena, se presenta cuando los fluidos producidos están acompañados con cantidades importantes de sólidos, especialmente arena. El arenamiento se produce básicamente cuando las fuerzas de arrastre son capaces de desprender los granos de arena de la matriz de roca.

El conocimiento de la resistencia a la fractura de roca y la evolución de la presión de producción en el tiempo son indispensables en la predicción de si un pozo producirá arena o no. La aplicación de modelos numéricos es a menudo la forma preferida para caracterizar el arenamiento, debido a que se deben tener en cuenta los procesos subsiguientes a la ruptura de la roca. Sin embargo, los parámetros constitutivos requeridos por el modelo numérico son proporcionados de las pruebas de laboratorio.

1.5.2.1 Causas del arenamiento

Las principales causas del arenamiento son:

- ✗ La falla mecánica de la roca debido a los esfuerzos que actúan sobre estas, que puede ocurrir cuando se excede la resistencia a la fractura de la roca.

- ✘ Bajas presiones de poro, porque la matriz no soporta toda la carga de los esfuerzos por sí misma (colapso de poro).
- ✘ La cohesión entre los granos de arena es muy pequeña (por lo tanto, se habla de una roca muy poco consolidada).
- ✘ Un elevado diferencial de presión en la cara de la formación, que ocurre especialmente en las etapas tempranas de producción.

1.5.2.2 Consecuencias del arenamiento

El espectro de consecuencias que se pueden presentar gracias al arenamiento se clasifica en tres niveles:

1. La producción de arena es baja. Ocurre desgaste de equipos. Basta reducir la producción para evitarla.
2. La producción de arena es moderada. Además del desgaste de equipos, puede ocasionar taponamientos que resultan en pérdidas de producción y aumento en los costos de mantenimiento y reacondicionamiento del pozo.
3. La producción de arena es alta. Se presentan todos los problemas anteriores. Además, se generan grandes grietas alrededor de la cara del pozo, lo cual puede resultar en el colapso definitivo del pozo.

1.5.3 Producción de finos.

Los finos están compuestos principalmente por limos y arcillas, cuyos tamaños de partícula son menores a 0,074mm (74 micras). Aunque la producción de finos es un problema similar a la producción de arena, las causas que la originan son diferentes. En general, la producción de finos se debe a la interacción química entre los fluidos y los sólidos de la formación. Esta interacción puede ocurrir de manera natural, o tras realizar una intervención al pozo. La producción de finos generalmente se asocia con el arenamiento, al liberar espacios que sí pueden

atravesar los granos de arena, pero también puede originar daño a la formación si en su lugar taponan los poros.

1.5.4 Fracturamiento hidráulico.

El fracturamiento hidráulico consiste en la inyección continua de fluido presurizado para inducir el fracturamiento de las rocas. La presión ejercida en las paredes del pozo debe exceder la resistencia a la tensión de la roca para que ocurra la propagación de las fracturas en dirección perpendicular al azimuth del esfuerzo mínimo. Con el fin de mantener las fracturas abiertas, se procede a agregar un *agente propante* al fluido presurizado, de modo que los espacios originados por la apertura de la fractura serán llenados con este agente. Cuando la fractura se ha llenado completamente, se retira el fluido presurizado, mientras que el propante permanece dentro de la fractura. El resultado de este procedimiento es un mejor desempeño de la producción originado en el aumento de la permeabilidad de la formación.

El propante suele ser arena o gránulos de óxidos de aluminio. El fluido de fracturamiento puede ser un fluido newtoniano, como el agua o el aceite, o no newtoniano, y se le pueden agregar otros químicos con el fin de cambiar sus propiedades reológicas.

1.5.4.1 ¿Cuándo se debe aplicar un fracturamiento hidráulico?

Es recomendable aplicar el fracturamiento hidráulico bajo las siguientes condiciones:

- ✓ Pérdida de energía del yacimiento.
- ✓ Daño de la formación.
- ✓ Baja permeabilidad de la formación.

- ✓ Producción de arena en formaciones poco consolidadas.
- ✓ Deposición de materiales que causan daño a la formación, como asfaltenos, parafinas y arcillas migratorias.

CAPÍTULO 2: MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS.

En la selección del método numérico más adecuado para la solución de un problema en ingeniería se requiere, entre otras cosas, establecer si el sistema a modelar es *continuo* o *discontinuo*.

Si se opta por considerar al sistema como continuo, el dominio se subdividirá en varios elementos, cada uno de los cuales estará estrictamente conectado en sus fronteras con los mismos elementos vecinos durante el transcurso de toda la simulación. Esta restricción de conectividad implica que cada elemento no tendrá la posibilidad de desplazarse libremente, pues su movimiento depende de una *condición de continuidad* en las fronteras del elemento que impide que se desvincule de sus vecinos, y de una *ecuación diferencial* que gobierna al conjunto de todos los elementos del sistema como un único continuo. Sin embargo, dicha restricción hace a un sistema de este tipo ideal para representar la deformación interna de cada elemento, en lugar de su desplazamiento como cuerpo rígido.

En cambio, si se opta por considerar al sistema como discreto, el medio se subdividirá en una serie de elementos independientes que pueden o no estar conectados, y que no requieren de una ecuación de continuidad que defina la relación existente entre ellos. Esto significa que el movimiento de cada uno de los elementos será libre, y que estará determinado según las interacciones que se presenten en los contactos en un instante dado. Estas condiciones son perfectas para el modelamiento de sistemas granulares y particulados, y en general, para representar el desplazamiento de cada una de las piezas que componen a un sistema de elementos rígidos en lugar de la deformación interna de cada elemento.

En ocasiones, es más conveniente considerar a un sistema como *híbrido*, el cual hereda las características tanto de los sistemas continuos como discretos.

Los simuladores numéricos que se ofrecen en el mercado de la industria petrolera se han diseñado principalmente para el manejo de sistemas continuos. Esto es perfectamente comprensible puesto que las compañías han enfocado sus líneas de desarrollo en dos temas clave: el comportamiento de los fluidos desde el yacimiento hasta su disposición final, y la resistencia y deformación de los materiales que constituyen la materia prima de las facilidades. Ciertamente, métodos como el de diferencias finitas y el de los elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) se constituyen en los más utilizados en este tipo de problemas.

Aunque el *método de los elementos discretos* (DEM) no fue originalmente diseñado para la industria petrolera, ha despertado el interés de muchos investigadores en el área, con el fin de poder resolver problemas de naturaleza discreta que describan el comportamiento mecánico de las rocas en el subsuelo. Los desafíos a los que se enfrenta la industria en la actualidad, junto con el aumento del precio del petróleo en los últimos años, han facilitado la investigación alrededor de DEM en problemas de mecánica de rocas que no se han podido representar apropiadamente con otros modelos computacionales, como el método de elementos finitos o las diferencias finitas.

En general, el contenido de este capítulo se refiere al origen, estructura, implementaciones y aplicaciones de DEM de los elementos discretos, con el fin de sentar las bases teóricas del método empleado en este trabajo para el modelamiento geomecánico de las muestras. En la primera parte, se describen de forma general las características del método. Después, se recorre la historia del método desde sus orígenes hasta la actualidad. Seguidamente, se enumeran las consideraciones que tiene en cuenta Cundall para el modelamiento con Bonded Particle Method, una implementación de DEM. En la cuarta y quinta partes, se explica con mayor detalle cómo funciona el método numérico internamente. En la sexta parte, se enumeran cada una de las ventajas y desventajas de DEM, poniendo en evidencia qué condiciones se requieren para que se pueda realizar una simulación con este método numérico. Luego, se enumeran las aplicaciones

en las cuales se ha aplicado DEM. Para finalizar, se describe cada una de las implementaciones del método numérico, y las alternativas al mismo que pueden servir cuando DEM no es la mejor opción para la solución del método numérico.

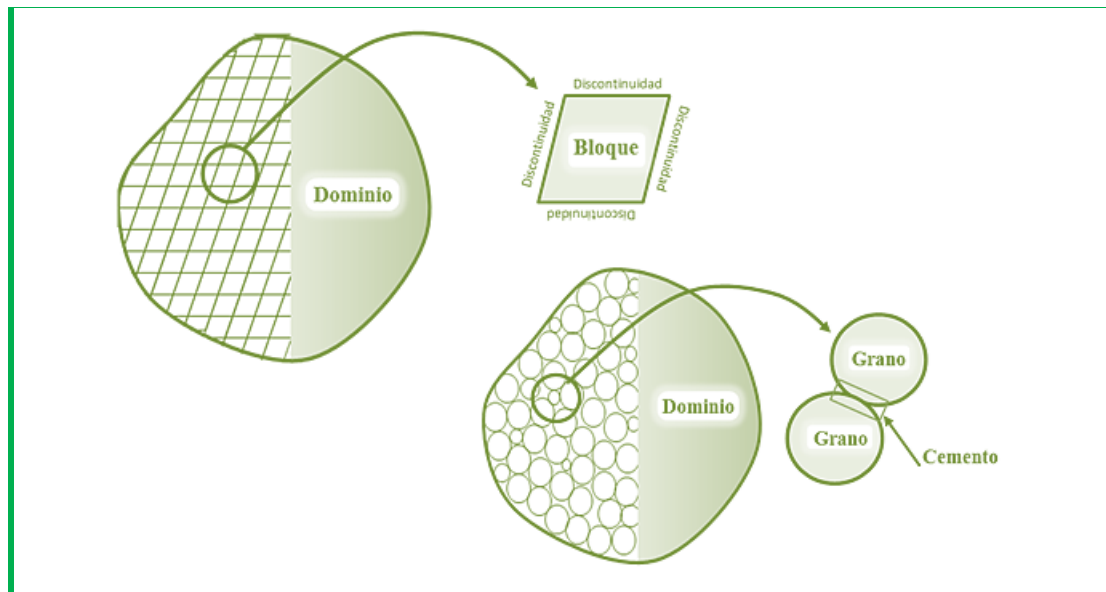
2.1 ¿QUÉ ES DEM?

El método de los elementos discretos (DEM, por sus siglas en inglés) es en realidad una familia de métodos numéricos que discretiza al medio en un gran número de partículas (o bloques) independientes, y cuya finalidad es determinar el movimiento de cada una de estas partículas a partir de la aplicación de las leyes del movimiento. Las fuerzas que impulsan ese movimiento se originan a partir de las fuerzas externas, como la gravedad, y las interacciones que ocurran entre pares de partículas en contacto. Dichas interacciones se pueden representar según modelos constitutivos que varían de acuerdo a las propiedades del material. De acuerdo a Cundall y Hart (Cundall, y otros, 1992), un Método de Elementos Discretos debe: 1) permitir desplazamientos y rotaciones finitas de cuerpos rígidos, incluyendo separación; y 2) reconocer automáticamente nuevos contactos entre los cuerpos durante los cálculos.

En cuanto a la forma de cada una de las partículas, ésta puede variar de acuerdo a los requerimientos para caracterizar al material a modelar, y que incluye discos circulares regulares (es el caso de problemas bidimensionales), esferas (problemas granulares en 3D), y polígonos o poliedros irregulares (requeridos en situaciones donde se tengan en consideración los efectos de la angularidad de las partículas del modelo). En la Figura 22 se esquematizan dos ejemplos de cómo discretizar un dominio en una serie de bloques o partículas. Algunas implementaciones de DEM posibilitan el modelamiento de partículas deformables en lugar de rígidas, pero se recomienda su utilización sólo cuando la deformación de cada elemento individual sea considerable, o el estado de esfuerzos sea suficientemente pequeño.

Para hacer de las simulaciones más rápidas, DEM incorpora algoritmos de *listas de vecinos* encargados de identificar los pares de partículas que están en contacto en cada paso de tiempo. Estas listas de vecinos se actualizan constantemente puesto que las partículas cambian de vecinos en la medida en que se desplazan libremente a través del medio.

Una de las principales ventajas de DEM sobre otros métodos de naturaleza continua es que el movimiento de cada elemento es independiente, y por lo tanto, es posible modelar desplazamientos y rotaciones ilimitados. Gracias a esto, y a otras muchas características, DEM ha surgido en las últimas décadas como atractivo para el modelamiento de problemas granulares, especialmente en el campo de la mecánica de rocas y de suelos.



▲ **Figura 22: Discretización de un dominio bidimensional para dos métodos DEM.** En la parte superior se muestra la discretización del dominio en una serie de polígonos, mientras que en la parte inferior, los elementos son discos regulares que representan los granos de un medio granular (como es el caso de una roca, por ejemplo). Figura adaptada de “Numerical Methods in Geomechanics” (Bobet, 2010).

2.2 ESTADO DEL ARTE DE DEM.

DEM nace como una alternativa para el modelamiento de problemas tanto en el campo de las geociencias como de la ingeniería, y su desarrollo comenzó oficialmente en el año de 1971 por Cundall, quien desarrolló un método explícito para determinar el movimiento de agregados de partículas en una roca (Cundall, 1971a; Cundall, 1971b). Su propuesta se basó en los métodos de diferencias finitas más utilizados en la época. No obstante, esta implementación consideraba a los elementos como rígidos en un espacio bidimensional. Cundall continuó trabajando en los años siguientes en la deformación de sistemas cuyos bloques tenían geometrías aún más complejas (Cundall, 1978), y fue capaz de representar el fracturamiento de las rocas sometidas a un esfuerzo. Antes de finalizar la década, y junto con la colaboración de Strack, diseñó un modelo que tenía en cuenta el comportamiento viscoso del medio (lo que se conoce como “*damping*”), extendiendo la aplicabilidad del método a problemas viscoelásticos (Cundall, y otros, 1979). Todo este trabajo se materializó en los códigos RBM, SDEM y CRACK.

Mientras tanto, varios investigadores en el campo de la geomecánica de suelos, desarrollaron diferentes técnicas de análisis a través de la implementación de DEM. Por ejemplo, Serrano y Rodríguez Ortiz, desarrollaron un modelo numérico para una discretización mediante conjuntos de discos y esferas (Rodríguez Ortiz, 1974; Rodríguez Ortiz, y otros, 1973).

Al comienzo de la década de los 80s, varios autores iniciaron los estudios de DEM en tres dimensiones. En el caso de los medios granulares la discretización se realizó a través de esferas. Cundall también aplicó el método en tres dimensiones. En general, sus resultados fueron aceptables, pero los módulos volumétricos obtenidos no correspondían con los proporcionados por varias pruebas teóricas y la literatura.

A pesar de los años de desarrollo que llevaba el método, no fue sino hasta 1985 cuando Williams, Hocking y Mustoe sentaron las bases teóricas del método al mostrar que DEM puede ser considerado como un método de Elementos Finitos generalizado (Williams, y otros, 1985).

Debido a que hasta este punto las diferentes implementaciones del método habían sido explícitas, muchos investigadores enfocaron parte de sus trabajos en optimizar la convergencia de estos algoritmos muy inestables numéricamente. Resultado de ello fueron los trabajos de Bardet & Proubet, quienes desarrollaron una técnica para la simulación por DEM denominada relajación dinámica adaptable (ADR, por sus siglas en inglés) (Bardet, y otros, 1991); y de Cundall y Strack, quienes aplicaron un control óptimo de los parámetros de amortiguamiento en su software BALL (Cundall, y otros, 1979), entre otros.

Otro problema que tenía que ser solucionado era el de la compatibilidad entre el uso simultáneo de bloques deformables y los tensores uniformes de deformación, el cual se resolvió en los trabajos de Cundall y Hart, al hacer uso de la discretización interna de cada bloque empleando mallas de diferencias finitas con elementos triangulares (Cundall, y otros, 1985; Cundall, 1980). Esta implementación sentó las bases de los dos códigos comerciales más representativos al día de hoy: UDEC y 3DEC. En los años siguientes, se incluyeron modelos que combinaban la transferencia de calor en 3D (Cundall, 1988; Hart, y otros, 1988; Itasca Consulting Group, Inc., 1994) y el flujo de fluidos viscosos a través de fracturas en 2D (Itasca Consulting Group, Inc., 1993).

Otros avances del método incluyen el modelamiento de medios no lineales, tanto isotrópicos como anisótropos, de la elastoplasticidad y de otros mecanismos plásticos en sistemas bidimensionales (Bardet, y otros, 1989); el modelamiento de fracturas al aplicar tensión de tracción a las partículas en materiales granulares cementados (Trent, y otros, 1992); y la implementación de sistemas poroelásticos

saturados y su relación con los problemas viscoelásticos (Bardet, 1994), entre otros.

Es importante destacar otras implementaciones del método de elementos discretos tales como los métodos DEM implícitos, y los métodos híbridos (es decir, aquellos que combinan un medio discreto con uno continuo en la discretización del medio). En el primer caso, sobresalen los trabajos de Shi y Goodman, al combinar un sistema de bloques rígidos y el método de elementos finitos (Shi, y otros, 1985). Sus trabajos resultaron en una formulación completa del Análisis de la Deformación Discontinua (DDA por sus siglas en inglés) (Shi, 1992). Este método implícito está basado en ecuaciones globales de equilibrio que tienen en cuenta un balance de energía que incluye los aportes de la energía potencial que se origina por los esfuerzos aplicados, las restricciones del sistema y la deformación interna de los cuerpos; la energía cinética; y la energía disipada por fricción.

En el segundo caso, se destacan los aportes iniciales de Gethin, Rasing, Lewins, Dutko, Crock, quienes pensaron en una implementación que combinara un método continuo y uno discreto (Gethin, y otros, 2001) y obtener las ventajas que cada uno ofrece, representando una herramienta eficaz para la solución de problemas que antes no se habrían podido resolver. A comienzos de los noventa, los métodos híbridos, aún continuaban siendo usados solamente en el ámbito académico. Sólo en la última década han empezado a comercializarse herramientas de software que modelen los sistemas híbridos. Actualmente, el método de elementos finitos - discretos ha sido el foco de desarrollo de autores como Munjiza y Owen.

2.3 CONSIDERACIONES QUE PUEDEN TENERSE EN CUENTA EN UNA IMPLEMENTACIÓN EXPLÍCITA DE DEM.

Son muchas las implementaciones de DEM explícito, pero este fenómeno se puede explicar si se tiene en cuenta que cada modelo tiene en cuenta sus

consideraciones particulares, y que para cada tipo de modelo existe una implementación diferente. En consecuencia, no se puede establecer un consenso de todas las consideraciones que debe poseer un modelo que va a ser evaluado con un código DEM.

En este trabajo se utilizó un código DEM cuyas consideraciones corresponden con las de la implementación Bonded Particle Method (BPM) (Cundall, y otros, 2004). Por lo tanto, las suposiciones de Cundall y Potyondy en el artículo “A bonded-particle model for rock” (Cundall, y otros, 2004) serán tenidas en cuenta durante la creación de los modelos numéricos a emplear en este trabajo. Estas suposiciones se enumeran a continuación:

- *Las partículas son cuerpos rígidos circulares o esféricos con masa finita.*
- *Las partículas se mueven independientes entre sí y pueden hacer tanto movimientos de translación como de rotación.*
- *Las partículas interactúan solo en los contactos; debido a que las partículas son circulares o esféricas, un contacto está compuesto de exactamente dos partículas.*
- *Las partículas pueden superponerse unas sobre otras, y todas las superposiciones son pequeñas en relación al tamaño de partícula, de manera que los contactos ocurren sobre en una pequeña región (esto es, en un punto).*
- *Los enlaces de rigidez finita pueden existir en los contactos, y estos enlaces transmiten carga y pueden romperse. Las partículas en un contacto enlazado no necesitan superponerse para interactuar.*
- *Las leyes generalizadas de fuerza - desplazamiento en cada contacto relacionan el movimiento relativo de una partícula con la fuerza y el momento en el contacto.*

Muchas de las consideraciones del BPM también son aplicadas en otras implementaciones explícitas de DEM debido a que conservan mucho de los

principios básicos de la primera formulación propuesta por Cundall en la década de los '70s.

2.4 FORMULACIÓN DE LOS MÉTODOS DEM EXPLÍCITOS.

Pese a que existen muchas implementaciones de DEM explícito, todas ellas tienen una estructura interna general que comparten. El objetivo de esta sección es precisamente destacar las características claves de cada uno de los componentes de un algoritmo que implemente el método de los elementos discretos.

Básicamente, un código DEM de tipo explícito debe integrar los siguientes componentes:

- ✓ Unas leyes de movimiento que describan el movimiento translacional y rotacional de cada bloque en un instante determinado.
- ✓ Unas leyes constitutivas que representen la interacción existente entre bloques en contacto.
- ✓ Un algoritmo de detección de vecinos, para determinar si debe haber interacción o no entre cada par de elementos en un instante dado.
- ✓ Un algoritmo de discretización de los bloques. Este componente sólo aplica cuando se desea modelar un sistema de bloques deformables con discretización interna.
- ✓ Unas leyes constitutivas que relacionen la deformación de cada elemento con el esfuerzo aplicado en un instante dado. Este componente también aplica solamente cuando se desee modelar un sistema de bloques deformables con discretización interna.

2.4.1 Leyes de movimiento.

Las leyes de movimiento en DEM explícito generalmente están basadas en las leyes de la dinámica de cuerpos rígidos (leyes de Newton).

Considérese un bloque i del sistema discontinuo a modelar. El movimiento rígido de ese bloque estará dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i &= F_i \\ I_i \ddot{\omega}_i &= T_i \end{aligned}$$

Ecuación 39

Donde

m es la masa del bloque

u es el desplazamiento del centro de masa del bloque en un sistema coordenado de referencia, X

F es la fuerza resultante

I es el momento de inercia

ω es la velocidad angular

T es el momento resultante.

Las ecuaciones del movimiento son generalmente integradas por medio de un esquema de *diferencias finitas centrales*.

2.4.2 Bloques en contacto.

En varios códigos DEM de versión libre, tales como Yade y ESyS-Particle, los elementos discretos están representados por medio de esferas. Para determinar si dos elementos están en contacto, es suficiente con verificar que la suma de sus radios excede a la distancia entre los centros de los elementos discretos. En cambio, en códigos como UDEC y 3DEC de Itasca, donde los bloques están representados por formas en general irregulares, la detección del contacto requiere además, la detección del tipo de contacto entre los bloques, y la evaluación del ángulo con el cual dos superficies se deslizan entre sí, en caso de que llegue a ocurrir. En este sentido, UDEC/3DEC necesita de un algoritmo de detección que requiera de un mayor esfuerzo computacional, pero adicionalmente

ofrece la posibilidad de modelar de una forma sencilla el deslizamiento entre las fracturas.

Los tipos de contactos que se pueden presentar entre dos bloques pueden ser vértice-a-cara, cara-a-cara, lado-a-lado, etc. En la *Figura 23* se muestran los distintos tipos de contacto que se pueden presentar entre los bloques para un modelo bidimensional.

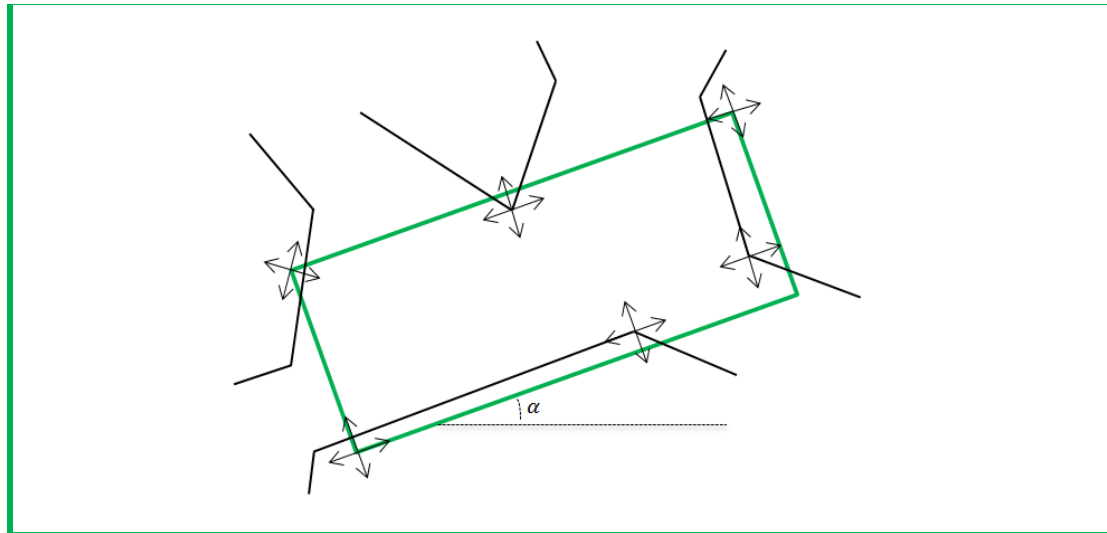


Figura 23: Diferentes tipos de contacto que se pueden presentar entre los bloques. Adaptado de "Fundamentals of discrete element methods for rock engineering: theory and applications" (Jing, y otros, 2007).

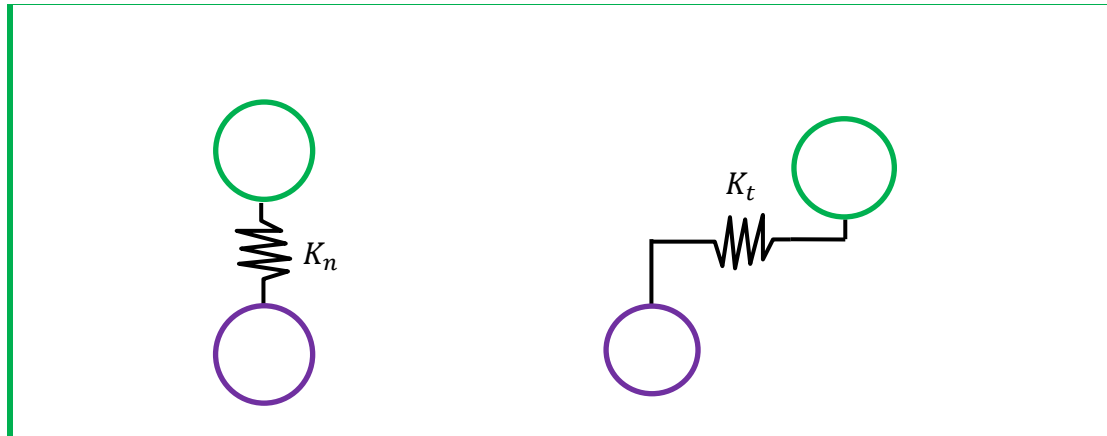
En general, las fuerzas de interacción en los contactos se asumen linealmente elásticas (Ver *Figura 24*). Esta relación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta F_n &= K_n u_n \\ \Delta F_t &= K_t u_t\end{aligned}$$

Ecuación 40

Donde

n se refiere al componente normal a la superficie de contacto,
 t se refiere al componente tangencial de la superficie de contacto.
 K es una constante de proporcionalidad.



▲ **Figura 24: Representación conceptual de las fuerzas de interacción entre los bloques.** Adaptado de Jing, Lanru; Stephansson, Ove. "Fundamentals of discrete element methods for rock engineering: theory and applications" (Jing, y otros, 2007).

Cuando ocurre deslizamiento, debido a que el contacto es de tipo lado-a-lado, las ecuaciones son un poco diferentes:

$$\begin{aligned}\Delta F_n &= K_n u_n \\ \Delta F_t &= (\Delta F_n) \tan \phi\end{aligned}$$

Ecuación 41

Donde

F es la fuerza,

u es el desplazamiento,

ϕ es el ángulo de contacto entre las dos superficies.

n se refiere al componente normal a la superficie de contacto,

t se refiere al componente tangencial de la superficie de contacto, y

K es una constante de proporcionalidad.

Sin embargo, existen modelos constitutivos más especializados que este. Por ejemplo, hay modelos que incluyen un término viscoso, dependiente de la velocidad, con el fin de disipar la excesiva energía cinética de las partículas. Otros, por su parte, permiten el deslizamiento entre dos superficies solo si se cumple un determinado criterio de cedencia, como es el caso del modelo linealizado de Mohr-Coulomb (Ver sección 1.3.1.1). En la sección 1.3.1 se pueden consultar otros

criterios de cedencia utilizados en geomecánica que pueden ser implementados en los códigos DEM.

2.4.3 Algoritmos de detección de vecinos.

El algoritmo más sencillo de detección de vecinos es el Algoritmo de Verificación Directa de Detección de Contactos, el cual consiste en verificar si los *delimitadores de objeto* de cada posible par de bloques dentro del dominio se intersectan entre sí. En problemas bidimensionales, los tipos de delimitadores de objeto suelen ser de dos tipos:

- ✓ De tipo circular, en donde se verifica si hay contacto cuando se cuándo se cumple la siguiente condición:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 < d^2$$

Ecuación 42

Donde

x, y son las coordenadas de los centros de los dos círculos delimitadores de los elementos que se están evaluando, i, j
 d es el diámetro de un círculo delimitador

- ✓ De tipo rectangular, en donde se verifica que existe contacto entre dos elementos cuando se cumple la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \left(x_i + \frac{a}{2}\right) &< \left(x_j - \frac{a}{2}\right) \text{ para } x_i \leq x_j \\ \left(x_j + \frac{a}{2}\right) &< \left(x_i - \frac{a}{2}\right) \text{ para } x_i > x_j \\ \left(y_i + \frac{a}{2}\right) &< \left(y_j - \frac{a}{2}\right) \text{ para } y_i \leq y_j \\ \left(y_j + \frac{a}{2}\right) &< \left(y_i - \frac{a}{2}\right) \text{ para } y_i > y_j \end{aligned}$$

Ecuación 43

Donde

x, y son las coordenadas de los centros de los cuadrados delimitadores, i, j
 d es el diámetro de un círculo delimitador

Con todo, el Algoritmo de Verificación Directa de Detección de Contactos es el que demanda más esfuerzo computacional, pues efectuar tal procedimiento requiere de N^2 operaciones por cada paso de tiempo (donde N es el número de bloques del modelo). En virtud de la necesidad de que un algoritmo de vecinos sea eficiente, se han propuesto varios modelos de algoritmos de detección que han mostrado eficiencias de N , $N \log_2 N$ o inclusive de menores operaciones por paso de tiempo. Algunos de estos algoritmos son:

- ✓ Algoritmo de Detección de Contactos Basado en un Árbol Binario: Este algoritmo subdivide el dominio del problema en celdas organizadas jerárquicamente. Existirá una celda en el primer nivel de jerarquía, la cual se asume, es un cuadrado lo suficientemente grande como para contener todos los elementos. En el segundo nivel, el espacio ocupado por la celda de primer nivel es subdividido por dos celdas de forma rectangular. En el tercer nivel, las celdas del segundo nivel son subdivididas por un par de cuadrados cada una. Este proceso continúa hasta que el tamaño de las celdas sea el mínimo posible capaz de contener al elemento discreto más grande. La detección del contacto se efectúa verificando cuáles son los elementos discretos que pertenecen a cada par de celdas de último nivel adyacentes entre sí.

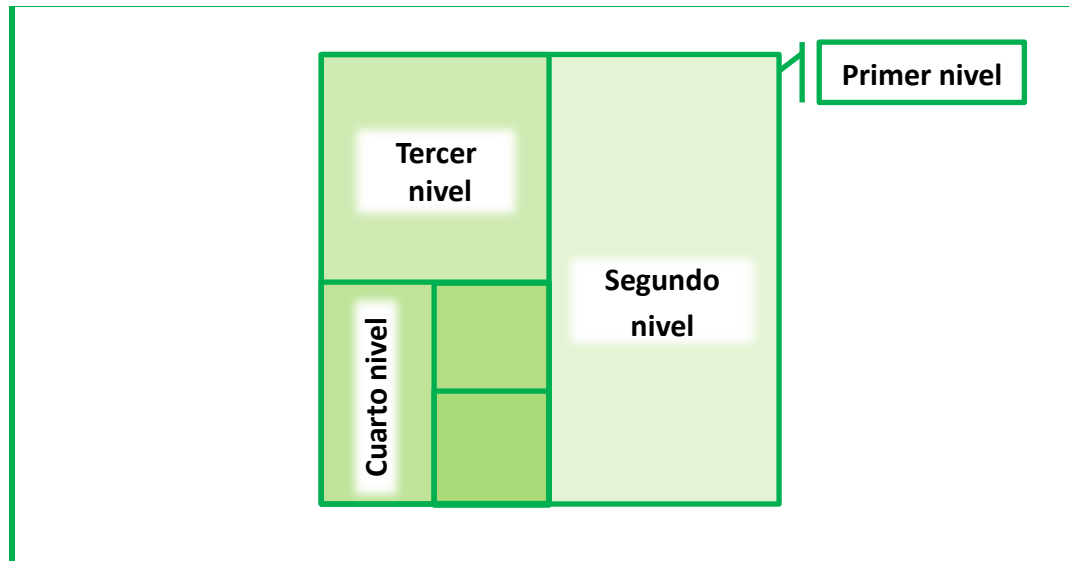


Figura 25: Discretización del dominio en celdas organizadas jerárquicamente en niveles. El dominio es sucesivamente dividido hasta

- ▲ que cada celda del último nivel tenga el tamaño más pequeño posible, que sea capaz de contener cualquier partícula del modelo. Adaptado de “The combined finite – discrete element method” (Munjiza, 2004).

- ✓ Algoritmo de Asignación Directa para Elementos Discretos de Tamaño Similar: Este algoritmo subdivide el espacio en celdas del mismo tamaño, cuyas dimensiones serán las suficientes para que el elemento discreto más grande pueda estar contenido en cualquiera de ellos. Para cada elemento discreto, la búsqueda de vecinos se limitará a los elementos contenidos en las celdas adyacentes.

El texto de Antonio Munjiza, “The Combined Finite-Discrete Element Method”, describe estos y otros algoritmos de detección de vecinos con más detalle.

2.4.4 Algoritmos de discretización interna.

A condiciones del subsuelo, es más evidente que las rocas son un material deformable. Debido a esto, se importaron los algoritmos de discretización interna

de los elementos finitos a los elementos discretos, con el fin de modelar el comportamiento constitutivo deformable de las rocas.

La técnica de discretización más usada es la Triangulación de Delaunay (Delaunay, 1934). En esta técnica se busca que todos los triángulos producto de la discretización cumplan con la *Condición de Delaunay*, es decir, la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la malla no debe contener ningún vértice de otro triángulo. Una de las ventajas de este método es que maximiza el mínimo de los ángulos de los triángulos en la discretización, es decir, forma los triángulos más equiláteros posibles. La caracterización formal de una triangulación de Delaunay está definida de la siguiente manera (Delaunay, 1934):

“Sea $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, un conjunto de puntos en el plano. Una triangulación de Delaunay de P cumplirá con las siguientes condiciones:

Propiedad 1: *Tres puntos p_i, p_j y $p_k \in P$ son vértices de la misma cara de la triangulación de Delaunay de P , si y solamente si, el círculo que pasa por los puntos p_i, p_j y p_k no contiene puntos de P en su interior.*

Propiedad 2: *Dos puntos p_i y $p_j \in P$ forman un lado de la triangulación de Delaunay de P , si y solamente si, existe un círculo p_i, p_j en su circunferencia y no contiene en su interior ningún punto de P .”*

El texto de Berg, Cheong y van Kreveld, “Computational geometry: algorithms and applications”, profundiza en esta y otras técnicas de discretización.

2.4.5 Leyes constitutivas.

Aunque el comportamiento linealmente elástico de un material es una buena aproximación para describir la deformación del mismo en función del esfuerzo aplicado, en la industria del gas y el petróleo es necesario aplicar leyes constitutivas más especializadas que tengan en cuenta la dinámica de los procesos que ocurren en el yacimiento. En este sentido, se recomienda la

aplicación de un modelo poroelástico, y en forma más general, de un modelo viscoelástico, para modelar los cambios a los que están sometidas las rocas del subsuelo. Estos modelos se explican con mayor detalle en la sección 1.2.

2.5 CICLO DE CÁLCULOS.

Cada uno de los componentes mencionados en la sección anterior debe ejecutarse en un orden establecido, según un ciclo de cálculos programado. En términos generales, un código DEM efectúa el ciclo de cálculos como el esquematizado en la *Figura 26*. Los códigos comerciales UDEC y 3DEC, y los de versión libre, como ESyS-Particle, LIGGGHTS y Yade, siguen esta metodología en su ciclo interno de cálculos.

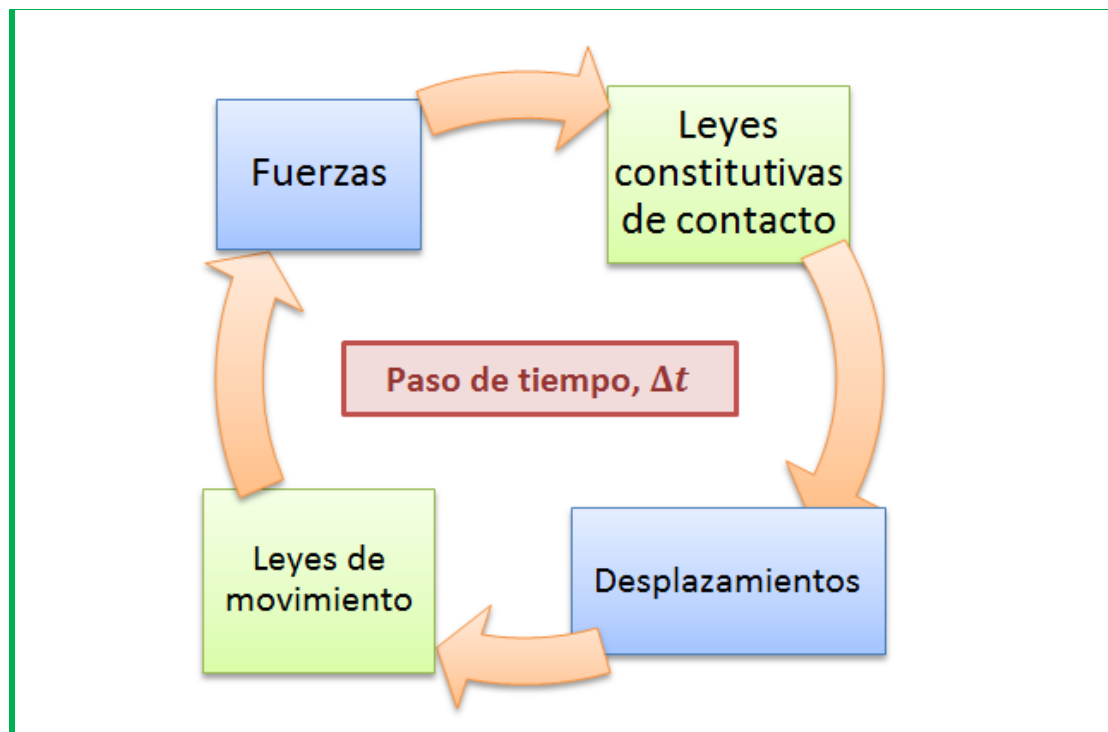


Figura 26: Ciclo de cálculo de un software tipo DEM. Adaptado de ▲ “Fundamentals of discrete element methods for rock engineering: theory and applications” (Jing, y otros, 2007) .

Para un código DEM que trabaje con bloques deformables, isotrópicos y elásticos, el ciclo de cálculos para los elementos internos producto de la discretización puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Se calculan los gradientes de deformación en el centro del elemento en cuestión con una fórmula que relacione las velocidades y los desplazamientos de los nodos del elemento con el gradiente de deformación. Esta fórmula se puede obtener a partir de la aplicación del teorema de Gauss a la derivada de la Ecuación 9 Ecuación 9.
2. Se determinan los incrementos de deformación en el centro del elemento multiplicando el anterior resultado por Δt .
3. Se determinan los incrementos de los esfuerzos en el elemento. En este paso, se aplica una de las leyes constitutivas que relacione al esfuerzo con la deformación de un material.
4. Se deben hacer las correcciones necesarias a los esfuerzos debido a la rotación del elemento durante el paso de tiempo Δt .
5. Se resuelven las ecuaciones de movimiento a partir de un esquema de volumen finito. Es decir, se calculan las nuevas posiciones y velocidades de los nodos a partir de los datos del paso tiempo anterior, y los esfuerzos aplicados en el paso de tiempo presente.

2.6 VENTAJAS Y DESVENTAJAS.

Es importante destacar las ventajas y desventajas de cualquier método numérico desde que la selección del mismo radica en una evaluación minuciosa de cada una de sus características frente a los requerimientos del modelo a simular, y no en si un método es malo o no.

Como se habrá podido notar, la principal ventaja de un método DEM es que puede tratar al sistema como discreto: como una serie de elementos independientes que sólo interactúan entre sí cuando están en contacto. Esto lo hace ideal para problemas con sistemas granulares o particulados.

Otras ventajas de un método DEM se listan a continuación:

- ✓ DEM puede ser utilizado para simular una amplia variedad de situaciones como flujo granular y mecánica de rocas. Se han desarrollado herramientas de software que exitosamente han reproducido resultados experimentales en un amplio rango de aplicaciones en ingeniería, incluidos el flujo de polvo adhesivo, el flujo granular y la respuesta a la aplicación de esfuerzos sobre cuerpos rocosos consolidados.
- ✓ DEM permite un estudio más detallado de la micro-dinámica de los flujos de polvo que a menudo son limitados mediante pruebas experimentales. Por ejemplo las redes de fuerza formadas en un medio granular pueden ser visualizadas utilizando DEM. Estas mediciones son virtualmente imposibles en experimentos con muchas partículas pequeñas.
- ✓ El método facilita la obtención de ciertos parámetros que de forma experimental son difíciles de conseguir directamente, tales como los esfuerzos aplicados en cada punto de una muestra con forma irregular (en las pruebas triaxiales de compresión se usan núcleos de forma regular).
- ✓ Es efectivo para hacer un seguimiento de los mecanismos de fractura, los grandes desplazamientos y las grandes rotaciones a las cuales puede estar sometido un sistema de partículas. No se requiere ningún tipo de supuesto de dónde o cómo deben aparecer las grietas o fallas dentro de una muestra de roca en la que se modele un proceso de fractura.

- ✓ Desde un punto de vista geométrico, los bloques son una representación más realista del modelo a simular.
- ✓ A diferencia del enfoque continuo, no requiere sofisticadas relaciones constitutivas en las aplicaciones geomecánicas (por su parte, los métodos basados en sistemas continuos hacen uso de formulaciones basadas en ecuaciones diferenciales).
- ✓ Requiere relativamente menos parámetros de contacto con claros significados físicos para definir el comportamiento del material, tales como las constantes de elasticidad y el coeficiente de fricción.
- ✓ Es un método que se puede combinar fácilmente con otros para realizar simulaciones que incluyan otros efectos, como transferencia de calor, flujo de fluidos, etc.

Por su parte, existen ocasiones en que se debe emplear con cautela un método DEM, o se debe optar por un método que incluya sus ventajas y descarte sus deficiencias. A continuación, se listan algunas desventajas de un método DEM:

- ✗ El número máximo de partículas y la duración de la simulación están limitadas por la potencia computacional. Un modelo detallado puede contener normalmente billones de partículas, y se requieren grandes clusters para correr la simulación en un tiempo aceptable.
- ✗ Requiere estudios de calibración para la determinación de las propiedades de los materiales.
- ✗ Existen relativamente pocos programas basados en DEM actualmente. Solo una pequeña fracción de ellos está disponible comercialmente, lo que es una muestra de su poca madurez. Por esto, muchos autores aún consideran que el método no se ha demostrado como técnica numérica para el análisis y diseño en mecánica de rocas.

- ✘ El método por sí mismo no es conveniente para el modelado de flujo de fluidos.
- ✘ En particular, los métodos explícitos toman más tiempo en correr, debido a que requieren de pasos de tiempo muy cortos por ser condicionalmente estables.
- ✘ La formulación del método varía de autor a autor, y de código a código, lo cual puede confundir a los usuarios nuevos.

2.7 APLICACIONES.

DEM se ha aplicado exitosamente en múltiples disciplinas, pese a que todavía continúa la discusión acerca de si ha sido suficientemente desarrollado o no. En la siguiente lista, se enumeran diversas aplicaciones del método. Junto con cada aplicación se mencionarán, entre paréntesis, algunos paquetes de software sugeridos para su modelamiento.

- ✓ Dinámica molecular (LAMMPS, Ascalaph).
- ✓ Procesos industriales de flujo de materiales granulares, como polvos, cereales o tabletas farmacéuticas (LIGGGHTS, ESyS-Particle, Yade, Pasimodo).
- ✓ Interacción con fuerzas electrostáticas (LIGGGHTS).
- ✓ Procesos de transferencia de calor en sistemas discretos (LIGGGHTS, StarCCM+).
- ✓ Computación gráfica (Lagoa Multiphysics).
- ✓ Diseño y valoración de sistemas de disposición final de desechos nucleares.
- ✓ Trituración de muestras sólidas (ESyS-Particle).

- ✓ Análisis de impacto: fracturamiento progresivo (DEMPACK solver).
- ✓ Excavaciones subterráneas y minería (UDEC, 3DEC).
- ✓ Mecánica de rocas (UDEC, 3DEC, ESyS-Particle, Yade).
- ✓ Sistemas de fracturas (FRANCMAN/MAFIC, NASPAC).
- ✓ Simulaciones de pruebas de laboratorio, y desarrollo de modelos constitutivos para rocas resistentes: uniaxiales, triaxiales. (ESyS-Particle, Yade).
- ✓ Geomecánica de yacimientos: estabilidad de pozo, fractura de rocas, entre otros (UDEC, 3DEC, ESyS-Particle).

El texto de Jing y Ove (Jing, y otros, 2007) presenta una sección que profundiza en las aplicaciones de este método en mecánica de rocas y de suelos.

2.8 IMPLEMENTACIONES Y ALTERNATIVAS.

El propósito de esta sección es señalar cada una de las implementaciones de DEM que pueden ser utilizadas para el modelamiento de elementos discretos. Además, también se incluyen las alternativas a DEM que se pueden utilizar en el contexto de la geomecánica, cuando la simulación por elementos discretos no es suficiente.

2.8.1 Implementaciones de DEM.

Como se ha mencionado a lo largo del capítulo, DEM cuenta con muchas implementaciones disponibles. Hasta este punto solo se han destacado aquellas características comunes de la mayor parte de las implementaciones. Sin embargo, es necesario conocer las particularidades de cada una con el fin de seleccionar una en función de cómo se manifiestan sus fortalezas y debilidades en la solución

del comportamiento del modelo deseado, y de cómo estas características influyen en la fiabilidad de los resultados finales.

Quizás la implementación más representativa y madura es **Distinct Element Method** (cuyo acrónimo, DEM, se puede prestar a confusión con el de Discrete Element Method). Su naturaleza es explícita y su formulación está basada en el método de las diferencias finitas. Los bloques se pueden representar como polígonos en el caso bidimensional, y como poliedros convexos en el caso tridimensional. Para la discretización inicial en bloques, el medio es dividido por una serie de discontinuidades persistentes cuyas intersecciones forman los lados de cada uno de los bloques del sistema. En la parte superior de la Figura 22 se muestra un ejemplo de dicha discretización al dividir el dominio a partir de dos series de discontinuidades que se intersectan en los nodos.

Según Ove y Jing, la formulación del método para el movimiento y la deformación de un sistema de bloques está basado en tres aspectos fundamentales (Jing, y otros, 2007):

1. *La discretización interna de los bloques con zonas de diferencias finitas o de volúmenes finitos (cuando los bloques son tratados como deformables).*
2. *La técnica de relajación dinámica para el análisis del esfuerzo de los bloques deformables.*
3. *Una detección y representación eficiente de los contactos entre los bloques.*

Los códigos UDEC y 3DEC, ambos comercialmente disponibles, hacen uso de esta formulación en sus algoritmos. Cundall fue quien introdujo el método (Cundall, 1971a) para simular los procesos de fractura en una masa de roca por medio de modelos de agregados de partículas.

Otra implementación importante, y que ha sido usada en una gran variedad de aplicaciones, es **Bonded Particle Method** (BDM). Este método se caracteriza por manejar partículas de tamaños no uniformes, de forma circular en el caso bidimensional o esférica en el caso tridimensional. El conjunto de todos los elementos simula un agregado de partículas que se encuentran cementadas (enlazadas) en los contactos. Se dice que un enlace se rompe cuando dos partículas enlazadas exceden unas cargas límite de tensión, lo cual resulta en dos partículas independientes entre sí. Por su parte, la solución de las leyes del movimiento está basada en diferencias finitas centrales, de forma muy similar al aplicado en la formulación del Distinct Element Method. Cundall y Potyondy definieron las consideraciones que este método debe tener en cuenta (Cundall, y otros, 2004). Estas consideraciones se enunciaron en la sección 2.3 de este documento.

Las dos implementaciones anteriores, sin embargo, tienen una desventaja de la cual otro método discreto, **Discrete Deformation Analysis** (DDA, por sus siglas en inglés), no tiene que preocuparse. Dicha desventaja es que los primeros métodos son explícitos. Por ende, DDA tiene que ser un método implícito. La consecuencia directa más favorable de este hecho es que los pasos de tiempo de DDA pueden ser más grandes sin generar ningún tipo de inestabilidad numérica. DDA tiene más ventajas todavía. Por ejemplo, realiza integraciones cerradas de matrices de constantes de elasticidad de los elementos. Otras diferencias del método con respecto a sus contrapartes explícitas son: las incógnitas son los desplazamientos; la superposición de contactos se previene al añadir resortes en los contactos; y la solución del problema se consigue al minimizar la energía potencial total del sistema.

No obstante estas diferencias, el método hereda las características que hacen de un método, Discrete Element Method. En este sentido, DDA necesita una buena representación de contactos, establecer leyes constitutivas para definir las interacciones entre bloques en los contactos y actualizar listas de vecinos

constantemente. Además, este método puede hacer uso del mismo procedimiento de discretización del medio en bloques del Distinct Element Method.

Shi y Goodman fueron los precursores del método (Shi, y otros, 1985), el cual ha despertado el interés de la comunidad geológica e ingenieril desde sus comienzos. Un código de versión libre que implementa este método es “UC Berkeley DDA for Windows”.

Otra implementación importante de DEM es **Discrete Fracture Network (DFN)**, con aplicaciones en flujo de fluidos, y que considera la naturaleza fractal del sistema de fracturas.

2.8.2 Métodos continuos.

Los **métodos continuos** han sentado las bases de muchos otros métodos, incluidos los métodos discretos. Las principales alternativas a DEM, que pueden ser utilizados en casos seleccionados, son: 1) El método de diferencias finitas (FDM, por sus siglas en inglés), uno de los métodos numéricos más antiguos usados en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, el cual aproxima las derivadas al usar ecuaciones en diferencias finitas que se pueden derivar de los polinomios de Taylor; 2) El método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés), quizás el más aplicado en ingeniería debido a que es flexible en el tratamiento de las heterogeneidades y condiciones de frontera complejas del sistema, resuelve problemas de geometrías complejas cuya formulación está basada en ecuaciones diferenciales, e involucra la representación de un medio mediante puntos discretos denominados nodos, que conectados conforman una serie de elementos cuyas formas pueden variar desde triángulos y cuadriláteros hasta formas tridimensionales mucho más complejas; 3) Boundary Element Method (BEM), resuelve problemas basados en ecuaciones lineales parciales formuladas como ecuaciones integrales, y es computacionalmente más eficiente que otros métodos en situaciones en las que la relación área/volumen es pequeña.

2.8.3 Métodos híbridos.

En el caso de los problemas de ingeniería de rocas para determinar las curvas de esfuerzo-deformación junto con el flujo de fluidos viscosos en rocas fracturadas, es preferible incluir simultáneamente las ventajas de un método discreto y uno continuo. Por esto, existen **alternativas híbridas** que toman la mejor parte de cada uno de los métodos de los que está compuesto, eliminando aquellas características que los ponen en desventaja al ser utilizados individualmente.

Zienkiewicz (Zienkiewicz, y otros, 1977) fue el primero en proponer un método híbrido, el cual combinaba a FEM y a BEM para evitar los defectos de cada uno cuando se usan por separado, logrando optimizar el tiempo de cálculo, la eficiencia y la precisión. La literatura describe el desarrollo de métodos continuos – discretos para el análisis de combinaciones hidromecánicas de rocas fracturadas mediante combinaciones de DEM, DFN y BEM (Wei, y otros, 1988; Wei, 1992). Por su parte, en el texto de Antonio Munjiza, The combined Finite - Discrete Method, se profundiza en la formulación de un método FEM/DEM (Munjiza, 2004). En cuanto a paquetes de software combinados, se destaca CFDEM, que combina CFD (Computational fluid mechanics) con el paquete LIGGGHTS (cuya formulación está basada en DEM) (LIGGGHTS).

Los métodos híbridos se deben usar con precaución, especialmente en las interfaces entre las regiones de modelos diferentes.

2.8.4 Otros métodos.

Otros métodos numéricos que poco tienen que ver con métodos discretos o continuos, pero que vale la pena mencionar porque han mostrado buenos resultados en geomecánica, son: el Método Sin Malla (MM) (un método fundamentalmente basado en diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos, pero el dominio está completamente definido por las coordenadas de una serie de nodos); y Redes Neuronales Artificiales (ANN) (inspirado en el

funcionamiento del cerebro humano, este método cambia su estructura interna continuamente en función de la información suministrada y la experiencia adquirida).

CAPÍTULO 3: VALIDACIÓN DE LA APLICABILIDAD DE DEM EN GEOMECÁNICA.

En ocasiones, la aplicación de un modelo analítico no es suficiente para representar los diferentes problemas mecánicos que se pueden presentar a escala de pozo. El modelamiento de las interacciones de un sistema heterogéneo con geometría compleja, mediante el empleo de ecuaciones muy complicadas, es un ejemplo que demuestra la necesidad de aplicar una alternativa a un modelo analítico. En este sentido, los métodos numéricos se convierten en una pieza clave para la solución de estas situaciones.

Varios métodos numéricos han sido aplicados para el modelamiento de problemas geomecánicos a escala de pozo. Por ejemplo, métodos continuos como el método de elementos finitos han sido extensamente utilizados en la industria con el fin de determinar la trayectoria de perforación que minimice la producción de arena en un pozo. No obstante, la naturaleza discreta de los medios rocosos es mejor representada con un método discreto. Con el fin de verificar que el método de elementos discretos puede ser aplicado en geomecánica, en este trabajo se realiza una serie de simulaciones para verificar que se reproduce el comportamiento esfuerzo – deformación de las rocas del subsuelo, a partir de los modelos constitutivos mejor conocidos.

En este capítulo se muestra la aplicación del método en una parte de gran importancia en la geomecánica: las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas. En la primera parte, se presenta la metodología propuesta para la validación del método de elementos discretos en geomecánica. Por su parte, en la siguiente sección se describe cada uno de los aspectos que se tienen que tener en cuenta antes de empezar a crear los modelos y correr las simulaciones. Después, se describe cada uno de los modelos base que serán usados en las simulaciones a realizar. En la cuarta parte, se muestran los casos de estudio seleccionados para demostrar la aplicabilidad del método, junto con los resultados obtenidos y su

posterior discusión. Por último, se hace una discusión de las limitaciones del método que se hicieron evidentes durante la realización de las simulaciones.

3.1 METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA VALIDACIÓN DE LA APLICABILIDAD DE DEM EN GEOMECÁNICA.

Debido a que el Método de Elementos Discretos ha tenido pocas aplicaciones en la ingeniería de petróleos, se tiene que seleccionar cuidadosamente la estrategia a emplear para la validación del método. En estas circunstancias, las ventajas del método deben ser aprovechadas sin dejar de ser conscientes de las limitaciones que poseen los códigos disponibles.

En general, en este trabajo se describe el comportamiento mecánico de modelos computacionales que representen muestras de roca, sometidas a la aplicación de esfuerzos en sus caras, tal y como ocurre en las pruebas de mecánica de rocas. Los resultados obtenidos se evalúan tanto cualitativa, como cuantitativamente. Sin embargo, se debe tener precaución al momento de tomar conclusiones a partir de los resultados cuantitativos obtenidos debido a las limitaciones existentes tanto en los modelos como el software.

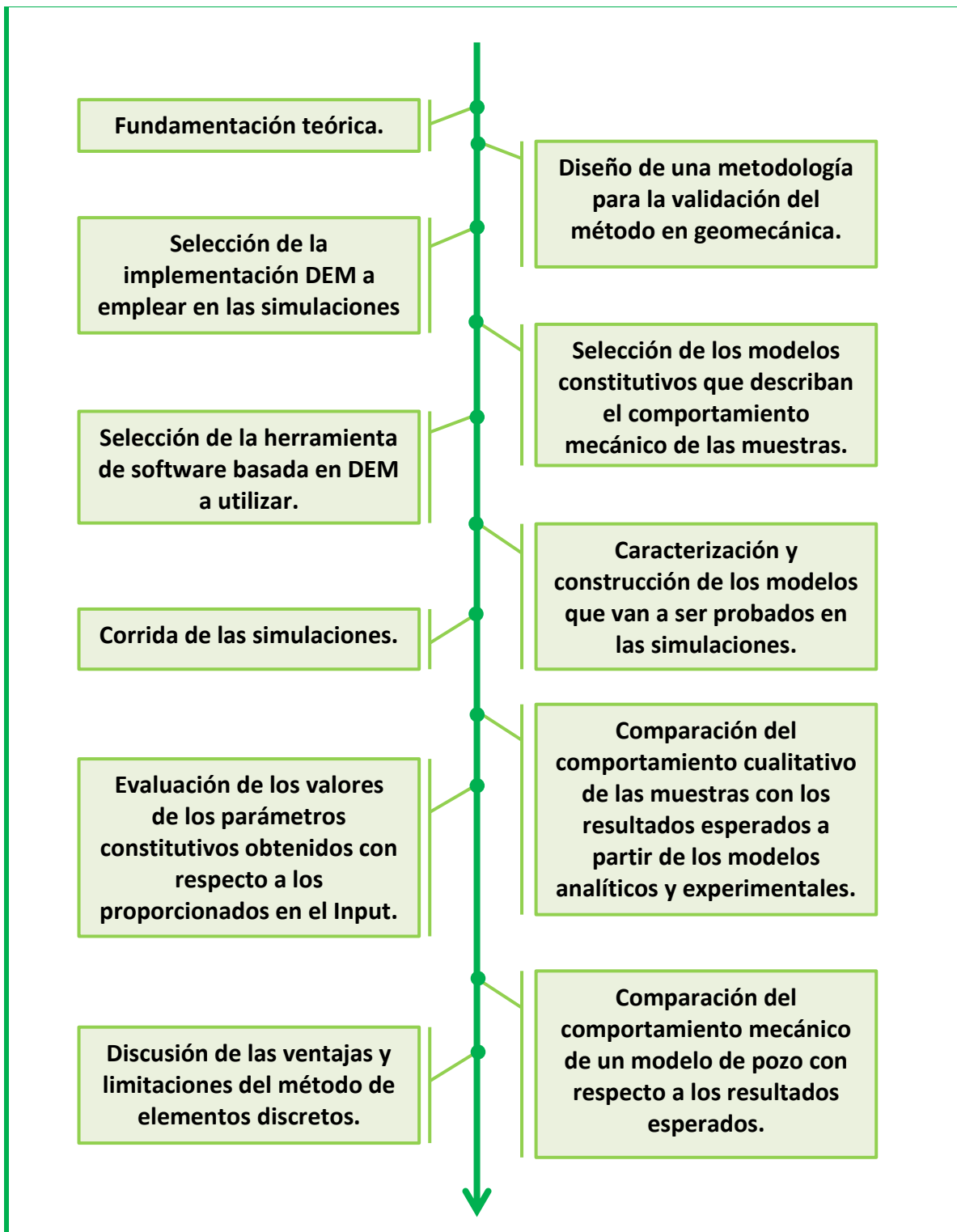
La metodología que se propone para la validación de DEM en geomecánica consta de los siguientes pasos (Ver también Figura 27):

1. **Fundamentación teórica:** Es necesario contar con bases teóricas para la construcción de los modelos, y para que la interpretación de los resultados sea lo más precisa posible.
2. **Diseño de una metodología para la validación del método en geomecánica:** Una planeación sistemática de los pasos a efectuar ayuda a alcanzar los objetivos propuestos de forma más eficiente.

3. Selección de la implementación DEM a emplear en las simulaciones: Existen varias implementaciones disponibles, pero solo unas pocas son convenientes para la consecución de los objetivos de este trabajo.
4. Selección de los modelos constitutivos que describan el comportamiento mecánico de las muestras: Se debe seleccionar al menos una ley constitutiva que caracterice las interacciones entre las partículas, y un criterio de resistencia de las rocas que reproduzca el fracturamiento de las muestras (Ver secciones 1.2 y 1.3).
5. Selección de la herramienta de software basada en DEM a utilizar: Preferiblemente, se debe seleccionar una herramienta que haya sido aplicada exitosamente en problemas de mecánica de rocas.
6. Caracterización y construcción de los modelos que van a ser probados en las simulaciones: Los modelos a emplear deben ser simplificaciones de la realidad capaces de representar con buen grado de tolerancia los efectos que se quieren evaluar.
7. Corrida de las simulaciones: Los efectos de la aplicación de los esfuerzos no son instantáneos en un modelo computacional, de modo que es necesario aplicarlos progresivamente. Además, se requiere establecer tiempos de estabilización en los cuales la onda de presión se propague uniformemente en todo el medio.
8. Comparación del comportamiento cualitativo de las muestras con los resultados esperados a partir de los modelos analíticos y experimentales.
9. Evaluación de los valores de los parámetros constitutivos obtenidos con respecto a los proporcionados en el Input: Los valores de los parámetros constitutivos tales como el módulo de Young, la relación de Poisson, etc,

pueden ser diferentes de los valores proporcionados antes de correr la simulación.

10. Comparación del comportamiento mecánico de un modelo de pozo con respecto a los resultados esperados.
11. Discusión de las ventajas y limitaciones del método de elementos discretos.



▲ **Figura 27: Metodología propuesta para la validación del método de elementos discretos en geomecánica.** Fuente: los autores.

Se aclara que algunos de los pasos que se proponen se muestran en este documento de forma simultánea con otros.

3.2 PREPARACIÓN DE LAS SIMULACIONES.

Antes de comenzar con la creación de los modelos computacionales y efectuar las corridas respectivas, es necesario definir cuidadosamente cada uno de los preparativos respectivos, con el fin de evitar contratiempos y alcanzar los objetivos propuestos. El tipo y las características del modelo a utilizar, las simplificaciones que se deben hacer para que el método numérico sea capaz de resolver el problema, y la herramienta de software a seleccionar, entre otras, son aspectos que se tienen que definir con anticipación. En esta sección se mostrarán algunos de estos aspectos aplicados en el contexto del presente libro:

3.2.1 Características de los modelos.

Se podría decir que casi cualquier situación de la geomecánica sería reproducible, porque casi todos los problemas de esta rama de la ingeniería de petróleos son de tipo granular, o en su defecto, de tipo híbrido. No obstante, un extenso estado del arte y mucha investigación son requeridos para poder modelar situaciones bastante complejas, puesto que ni aún hoy se han definido con certeza las leyes que gobiernan los fenómenos del subsuelo, ni ha sido posible caracterizar rigurosamente a las rocas según sus propiedades mecánicas. Por lo tanto, los modelos iniciales más recomendables a seleccionar deberían ser construidos a partir de situaciones comunes o rutinarias de las cuales se tenga suficiente conocimiento, tales como las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas más comunes. Debido a que las pruebas de laboratorio de mecánica de rocas son ampliamente reconocidas en la industria por hacer predicciones bastante confiables, los modelos físicos base deben ser cuerpos de roca con un

comportamiento esfuerzo-deformación definido. Las características mínimas de los modelos a considerar son:

- ✓ Los modelos son masas sólidas y finitas de roca compuestas por un conjunto de granos que se encuentran cementados en los contactos.
- ✓ El material es homogéneo e isotrópico cuando las dimensiones del modelo tienden a infinito.
- ✓ Las rocas son porosas.
- ✓ Los tamaños de grano no son uniformes, y su distribución es aleatoria a lo largo del cuerpo de roca.
- ✓ Las rocas se deforman elásticamente hasta que alcanzan su límite elástico. El material del que están compuestos es tipo frágil o quebradizo, y por lo tanto se forman fracturas a partir de este punto.
- ✓ El campo de esfuerzos de la roca es transmitido a través de sus paredes. La geometría de los modelos debe permitir la aplicación efectiva de los esfuerzos.
- ✓ Las masas de roca pueden ser drenadas o no drenadas. En este caso se usarán muestras que simulan estar saturadas de fluido (no drenadas) debido a que se considera a la roca inmersa en un fluido viscoso. Sin embargo, este tratamiento se realiza para efectos del control de la excesiva energía cinética de las partículas. Por lo tanto, no se tendrán en cuenta cambios de presión y velocidad del fluido, y en consecuencia, no será necesaria la aplicación de un modelo poroelástico ni el acoplamiento con un método continuo para la realización de las simulaciones.

3.2.2 Selección de las leyes constitutivas.

Como se muestra en las secciones 1.2 y 1.3, existe una gran variedad de modelos que han sido aplicados para la representación del comportamiento esfuerzo-deformación de las rocas en el subsuelo.

1. Después de un análisis cuidadoso de las opciones disponibles, se decidió que los modelos constitutivos más atractivos para comenzar a probar la aplicabilidad de un método numérico son los ***elásticos y elasto-plásticos***, básicamente por dos razones: Representan con buen grado de tolerancia el comportamiento de muchos materiales, incluidas las rocas.
2. Su formulación no es complicada, y por lo tanto, no requiere de una reformulación exhaustiva para que sea posible su incorporación dentro de un método numérico.

En particular, en este trabajo se aplicó un modelo ***lineal elástico-plástico***, cuya cedencia está definida en función del ***criterio linealizado de Mohr-Coulomb***, con el fin de simular la relación entre el esfuerzo y la deformación, y la resistencia a la fractura de las muestras.

Los otros modelos disponibles podrían ser empleados en las simulaciones, pero hay dos razones que motivaron su no implementación:

1. El software seleccionado no incorpora otros modelos de interés para la ingeniería de petróleos.
2. Los fenómenos del subsuelo todavía no son 100% comprendidos. Más de 50 años de estudio por parte de la academia no han sido suficientes para caracterizar con exactitud el comportamiento mecánico de las rocas.

Como se verá más adelante, el tamaño de cada timestep es de tan sólo una fracción de segundo. En realidad, muchos de los procesos que ocurren dentro de




la roca en subsuelo se miden en la escala de tiempo geológico. Con el fin de suponer que los procesos dentro de los modelos son muy lentos, se debe simular la presencia de un fluido viscoso que disipe la excesiva energía cinética, tanto translacional como rotacional, de cada partícula. Aunque la viscosidad del medio puede parecer la manifestación de una ley constitutiva que define la interacción entre las partículas y el fluido, no es entendida como tal, puesto que es aplicada para efectos de que el modelo numérico aproxime sus resultados a los de los modelos físicos. Por esta razón, este fenómeno es a veces denominado amortiguación numérica artificial. La formulación de la amortiguación numérica artificial es descrita en (Itasca Consulting Group, 2003).

3.2.3 Selección de la implementación del método de elementos discretos.

En la sección 2.8 se listan las principales implementaciones del método de los elementos discretos. Para seleccionar una de las opciones disponibles, se deben tener en cuenta varios aspectos:

- ✓ La forma de cada uno de los elementos (circulares, esféricos o irregulares).
- ✓ El tipo de bloques a emplear (rígidos o deformables).
- ✓ Los tiempos empleados en la ejecución de las corridas.
- ✓ La estabilidad numérica.
- ✓ Esquema de solución del método.
- ✓ Aplicaciones exitosas.
- ✓ Disponibilidad de software libre.

En la Tabla 2 se comparan estos aspectos para las tres opciones más conocidas: Distint Element Method (DEM), Bonded Particle Method (BPM) y Discontinuous Deformation Analysis (DDA).

ASPECTO	Implementación		
	DEM	BPM	DDA
Forma de los elementos	Polígonos o poliedros irregulares	Circulares o esféricas	Polígonos o poliedros irregulares
Tipo de bloques	Deformables	No deformables	Deformables
Tiempo de ejecución de las corridas	Máximo	Medio	Mínimo
Estabilidad numérica	Condicionamente estable	Condicionamente estable	Incondicionalmente estable
Esquema de solución del método	Explícito	Explícito	Implícito
Aplicaciones exitosas	Mecánica de suelos, minería, flujo de materiales granulados	Mecánica de rocas, trituración de sólidos, flujo de materiales particulados.	Todavía no se ha probado lo suficiente en el modelamiento de situaciones reales
Disponibilidad de software libre			



















▲ **Tabla 2: Comparación entre las principales implementaciones del Método de Elementos Discretos.** Fuente: los autores.

La implementación seleccionada para la realización de las simulaciones de este trabajo es Bonded Particle Method, debido a que es suficiente con representar a los granos de las muestras de roca como elementos esféricos y rígidos. Además, está disponible libremente y ha sido muy utilizada en problemas de mecánica de rocas.

3.2.4 Selección de la herramienta computacional.

La selección de la herramienta computacional es un aspecto que se debería evaluar simultáneamente con los otros aspectos. A manera de ejemplo, considérese una situación en la que se desea simular un fenómeno térmico en un material granular viscoelástico. Ante la indisponibilidad de una herramienta que modele los fenómenos térmicos y la viscoelásticos simultáneamente, es necesario sacrificar uno de los requerimientos y hacer suposiciones adicionales en torno al modelo seleccionado.

Durante la realización de este proyecto, se evaluaron varios criterios que se tuvieron en cuenta para la selección de una herramienta de software basada en DEM. Incluso se contempló la posibilidad de crear una herramienta propia que incluyera muchas características de las que carecían los otros software. Al final, se hizo un balance de las ventajas y desventajas de cada una de las opciones disponibles, de tal manera que se seleccionó aquella que cumpliera con la mayor parte de los requerimientos de los modelos. En la *Tabla 3* se comparan varios criterios de selección para las principales opciones disponibles.

CRITERIO	Herramienta de software			
	<i>UDEC 3DEC</i>	<i>ESyS- Particle</i>	<i>LIGGGHTS</i>	<i>Yade</i>
Software de código abierto				
Licencia libre / Gratis				
Buena documentación				
Procesamiento paralelo basado en MPI				
Interfaz gráfica				

CRITERIO	Herramienta de software			
	<i>UDEC 3DEC</i>	<i>ESyS- Particle</i>	<i>LIGGGHTS</i>	<i>Yade</i>
Experiencia en aplicaciones en geomecánica				
Problemas de transferencia de calor				
Python API				
Mallas triangulares				
Modelamiento acoplado de fluidos				
Opción de bloques deformables				
SO Linux				
SO Windows				

Tabla 3: Tabla comparativa de las características brindadas por las herramientas de software en consideración. Ver en referencias: (LIGGGHTS; ESyS-Particle, 2011; Itasca Consulting Group, 2012; Yade, 2011). Fuente: los autores.

De las cuatro opciones presentadas, se seleccionó **ESyS – Particle**, actualmente mantenido por la comunidad de la Universidad de Queensland (Australia). Las razones principales por las cuales se tomó esta decisión son:

1. Ya ha sido implementado para aplicaciones en mecánica de rocas y geomecánica;
2. Las partículas se pueden representar como esferas, lo cual se interpreta como una aproximación más granular del modelo a simular;

3. Es software de licencia libre y es de código abierto; y
4. Posee buena documentación.

3.2.5 Suposiciones a considerar para tener en cuenta durante la creación de los modelos.

Es necesario tener en cuenta una serie de suposiciones que simplifiquen el problema a lo esencial, conservando únicamente las características que juegan un papel importante en el fenómeno que se quiere analizar, y descartando aquellas cuya representación es poco práctica o innecesaria.

Las suposiciones que se tendrán en cuenta en los modelos son:

- ✓ Los granos serán representados por medio de esferas de tamaños varios y masa finita.
- ✓ La densidad de cada uno de los granos será constante, igual a 2,64 g/cc.
- ✓ La cementación entre dos partículas estará representada por medio de un enlace que se rompe sin posibilidad de restitución cuando se cumple un criterio definido.
- ✓ Dos partículas enlazadas no tienen que estar necesariamente en contacto para interactuar.
- ✓ Se establece un contacto mientras dos partículas estén sobrepuestas entre sí. Se dice entonces que las partículas interactúan entre sí.
- ✓ *Las leyes constitutivas se definirán para cada partícula o enlace individual, no para el material como un todo.*
- ✓ Se considerará el efecto de la gravedad ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) de manera uniforme en todas las partículas..

- ✓ Las fuerzas viscosas (debidas al amortiguamiento numérico artificial) que contrarrestan el movimiento de las partículas serán independientes de su posición.
- ✓ Sólo se evaluarán efectos mecánicos en los modelos (por lo tanto, no se evaluarán los efectos térmicos, electromagnéticos, químicos, etc.).

3.3 CONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS.

Antes de iniciar las simulaciones, es necesario la construcción de los modelos que van a representar a los cuerpos de roca. Un único modelo no es suficiente para mostrar con claridad los fenómenos que ocurren en mecánica de rocas. Por lo tanto, se diseñó un conjunto de modelos con diferentes distribuciones de tamaños de partículas, empaquetamientos, y parámetros constitutivos, para mostrar tendencias comunes de las relaciones que se van a estudiar. En las figuras **Figura 28 a Figura 31**, se muestran cada uno de los empaquetamientos utilizados en los modelos seleccionados:

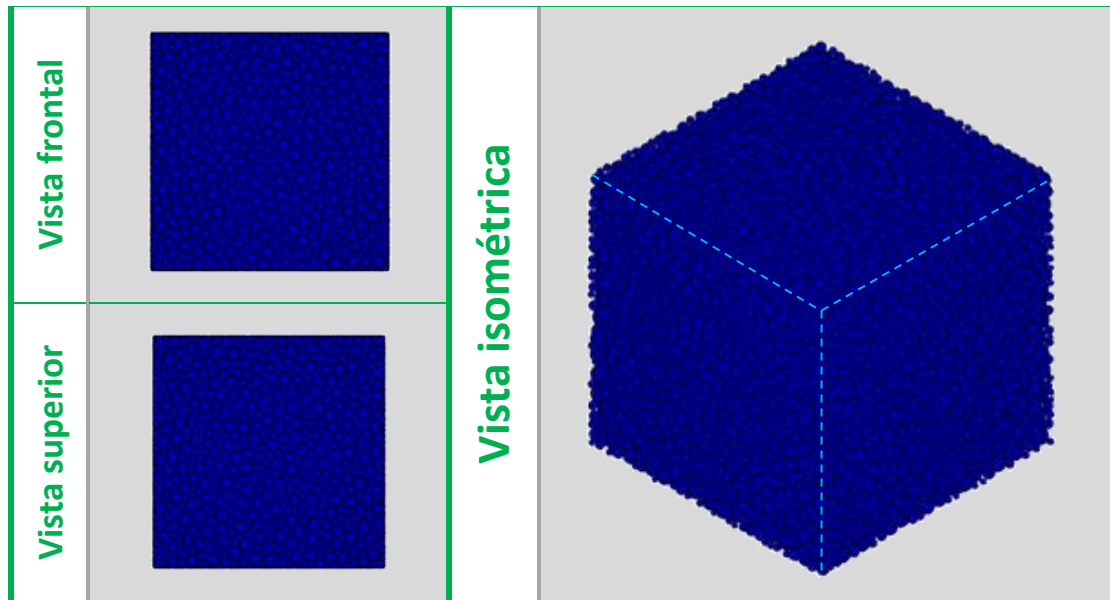


Figura 28: Empaquetamiento A. Cubo de dimensiones $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$.

▲ 20559 partículas. Tamaños de partícula en el rango $[0.1, 0.3]$ milímetros. $\phi = 33 \%$. Gráficas generadas con POVray. Fuente: los autores.

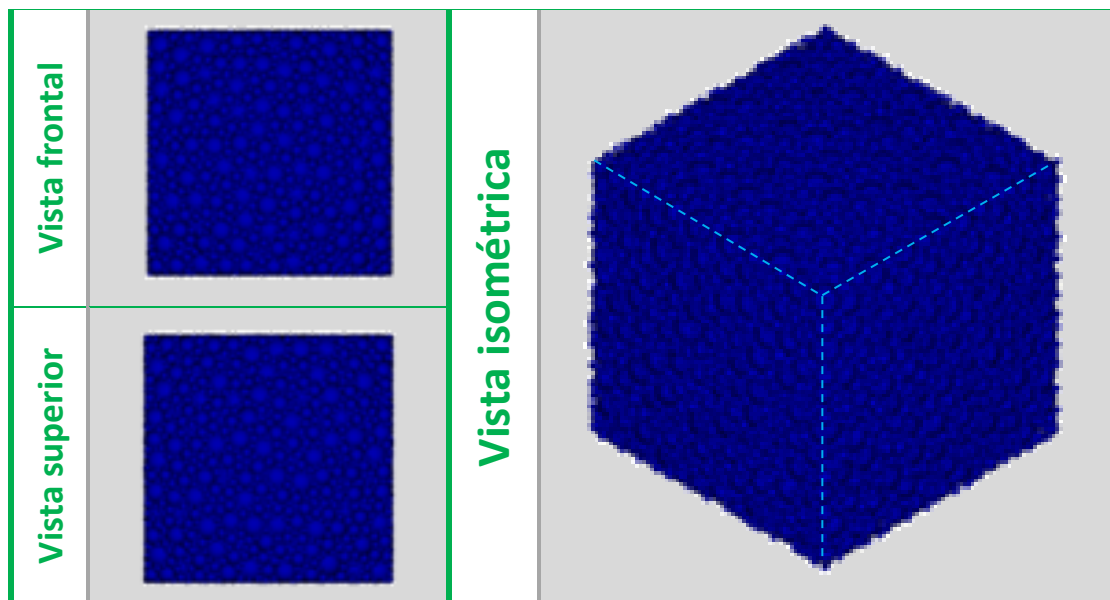


Figura 29: Empaquetamiento B. Cubo de dimensiones $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$.

▲ 14298 partículas. Tamaños de partícula en el rango $[0.1, 0.5]$. $\phi = 27 \%$. Gráficas generadas con POVray. Fuente: los autores.

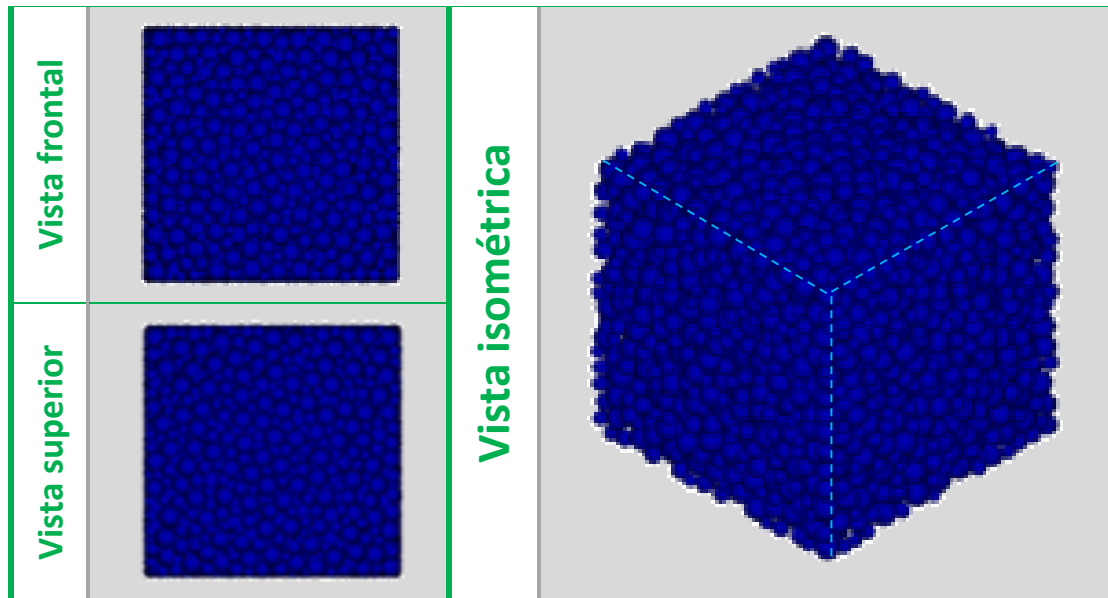


Figura 30: Empaquetamiento C. Cubo de dimensiones $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$. 3871 partículas. Tamaños de partícula en el rango $[0.2, 0.4]$ milímetros. $\phi = 42 \%$. Gráficas generadas con POVray. Fuente: los autores.

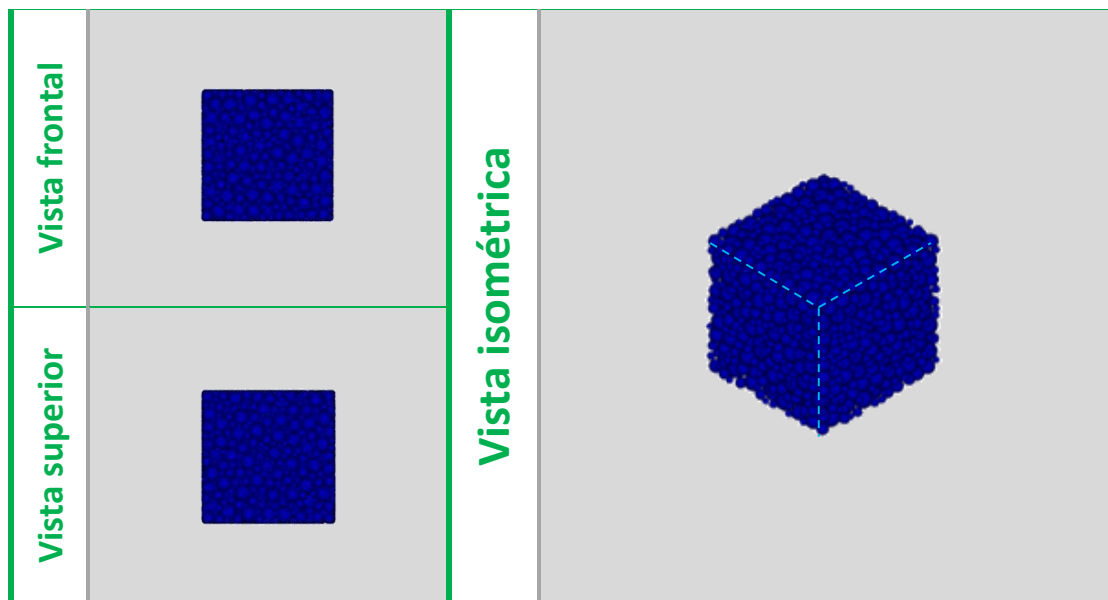


Figura 31: Empaquetamiento D. Cubo de dimensiones $5 \times 5 \times 5 \text{ mm}^3$. 2564 partículas. Tamaños de partícula en el rango $[0.1, 0.3]$ milímetros. $\phi = 35 \%$. Fue generado con los mismos parámetros proporcionados para la creación del empaquetamiento A. Gráficas generadas con POVray. Fuente: los autores.

3.3.1 Algoritmos de distribución aleatoria de partículas.

ESyS-Particle incluye cinco métodos para la generación de empaques de bloques de partículas: hexagonal, cúbica simple, cúbica centrada en el cuerpo, cúbica centrada en las caras y distribución aleatoria. Se demostró que al generar un emmallado de partículas con cualquiera de estos métodos, incluyendo la distribución aleatoria, las porosidades calculadas fueron superiores al 40 %. La porosidad se calculó por medio de la siguiente ecuación:

$$\phi = \frac{\text{Volumen total} - \text{Volumen ocupado por los granos}}{\text{Volumen total}} \quad \text{Ecuación 44}$$

Donde
 ϕ es la porosidad de la muestra.

Debido a que porosidades superiores al 40% son muy raras en modelos físicos reales, fue necesaria una modificación al código de ESyS-Particle. Básicamente, la modificación consistió en agregar aleatoriamente las partículas más grandes de primero, y después se agregaron el resto de partículas con tamaños progresivamente más pequeños. El resultado de la versión modificada del algoritmo fue una reducción de hasta un 30% en la porosidad de los bloques de partículas. Se diseñó un modelo con cerca de 20000 partículas, y radios entre 0.1 y 0.3 mm, para cada una de las versiones en cuestión (la original y la modificada). Las diferencias entre los resultados de ambas versiones son evidentes. En la *Figura 32* se muestran la distribución de radios de partículas de ambos modelos.

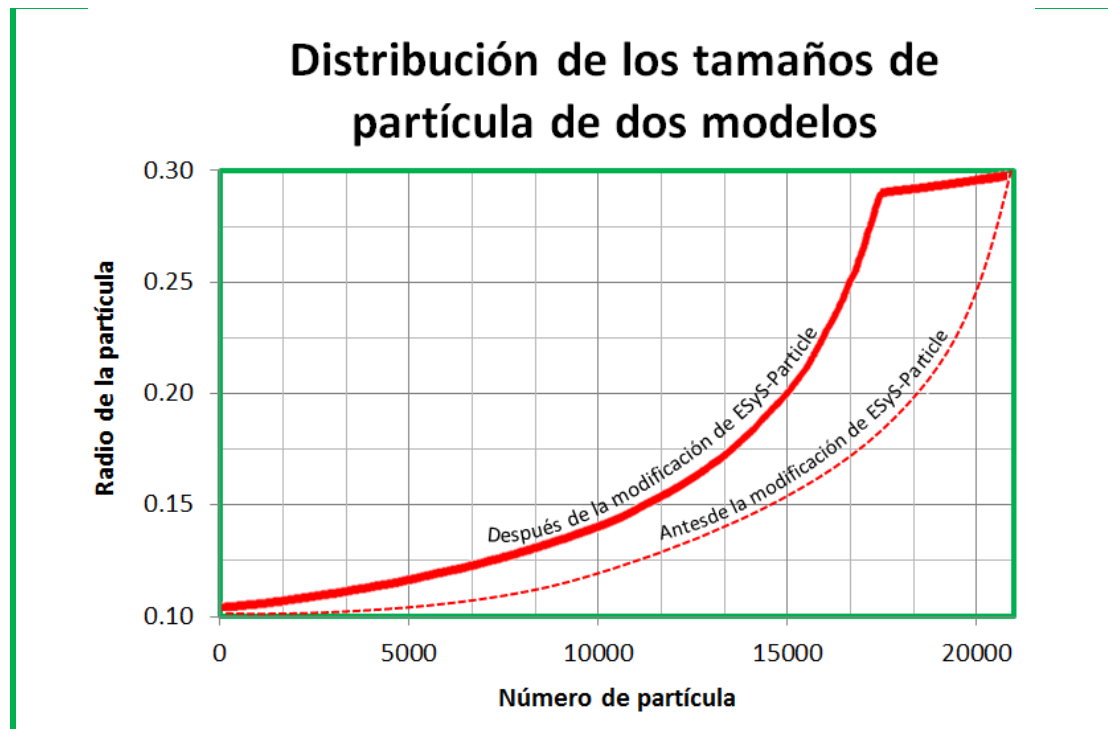


Figura 32: Comparación entre las distribuciones de los radios de partícula de dos modelos generados a partir de algoritmos diferentes de generación de bloques de partículas con distribución aleatoria. La serie punteada corresponde a los resultados aplicando la versión original del software, mientras que la serie continua corresponde a los resultados de la versión modificada. El número de partícula indica su posición cuando el conjunto de partículas de cada modelo es ordenado de menor a mayor radio. Gráfica creada con Python y GnuPlot, y postprocesada en Microsoft Excel. Fuente: Los autores.

En la Figura 32 se demuestra que la versión modificada genera modelos con porosidades mayores debido a que es mayor la proporción de partículas con diámetros grandes con respecto a los modelos generados con la versión original. Nótese que el radio de las últimas 3000 partículas de la serie continua es mayor al 95% del radio máximo.

3.3.2 Leyes constitutivas.

Para completar la construcción de los modelos a emplear en las simulaciones, es necesario proporcionar al software los parámetros constitutivos requeridos para el

modelamiento de las interacciones entre las partículas. Para lograrlo, es necesario identificar previamente las diferentes leyes constitutivas y criterios de cedencia que soporta el software. En la documentación respectiva, se pueden consultar las diferentes opciones que ofrece ESyS-Particle, entre las cuales se destacan la interacción linealmente elástica y la viscoelasticidad para partículas no enlazadas, y el criterio de Mohr-Coulomb para partículas enlazadas. En la sección 3.2.2 se indican las leyes constitutivas seleccionadas para la construcción de los modelos. Sin embargo, por razones de diseño del software, estas leyes son implementadas en los modelos de la siguiente manera:

- ✓ Se define una interacción entre pares de partículas enlazadas de tipo elástica, con fricción y que se rompe cuando se excede el criterio linealizado de Mohr-Coulomb.
- ✓ Se define una interacción de tipo elástica con fricción entre partículas no enlazadas.
- ✓ Se define una interacción elástica entre las paredes que aplican el esfuerzo y las partículas que la contactan.
- ✓ Se define la amortiguación numérica artificial para los movimientos de traslación de cada partícula.
- ✓ Se define la amortiguación numérica artificial para los movimientos de rotación de cada partícula.
- ✓ Se define la interacción del campo gravitacional sobre las partículas.

Por su parte, la herramienta de software es limitada en cuanto a los modelos constitutivos que ofrece. La interacción elástica con criterio de cedencia de Mohr – Coulomb es quizás la opción que mejor representa el comportamiento mecánico

de las rocas en subsuelo, por cuanto otros modelos experimentales ampliamente usados en la industria del petróleo (ver secciones 1.2 y 1.3), tales como los criterios de Hoek-Brown y de Druker-Prager, no han sido implementados en la herramienta. Desafortunadamente, la mayoría de las herramientas de software de versión libre tampoco cuentan con modelos especializados para la industria.

3.3.2.1 Definición de la interacción elástica, con fricción y criterio de cedencia de Mohr - Coulomb.

Para definir este tipo de interacción, se requieren 4 coeficientes de elasticidad y 4 Fuerzas/Momentos de rotura de enlace. A continuación, se listan cada una de las constantes requeridas:

- ✓ Coeficiente de elasticidad normal, K_r .
- ✓ Coeficiente de elasticidad tangencia, K_s .
- ✓ Coeficiente de elasticidad de torsión, K_t .
- ✓ Coeficiente de elasticidad de flexión, K_b .
- ✓ Fuerza normal de rotura, F_r^{brk} .
- ✓ Fuerza tangencial de rotura, F_s^{brk} .
- ✓ Momento torsor de rotura, F_t^{brk} .
- ✓ Momento flector de rotura, F_b^{brk} .

Para que un enlace se rompa, es necesario que se cumpla esta condición:

$$\frac{|F_r|}{F_r^{brk}} + \frac{|F_s|}{F_s^{brk}} + \frac{|F_t|}{F_t^{brk}} + \frac{|F_b|}{F_b^{brk}} > 1$$

Ecuación 45

Donde

K_s es el coeficiente de elasticidad tangencial,

K_t es el coeficiente de elasticidad de torsión,

K_b es el coeficiente de elasticidad de flexión, K_r es el coeficiente de elasticidad normal,

F_s^{brk} es la fuerza tangencial de rotura,

F_r^{brk} es la fuerza normal de rotura,

F_t^{brk} es el momento torsor de rotura, y

F_b^{brk} es el momento flector de rotura.

Alternativamente, el software permite que esta interacción se defina de forma indirecta a partir de los parámetros constitutivos obtenidos en mecánica de rocas, Estos parámetros son:

- ✓ Módulo de Young, E .
- ✓ Relación de Poisson, ν .
- ✓ Cohesión, S_0 .
- ✓ Coeficiente de fricción interna, μ_i .

Para la construcción de los modelos, se estableció que el valor del módulo de Young, E , está comprendido entre 1 y 50 GPa, según la simulación realizada. Este rango de valores es válido para las areniscas. Se debe tener en cuenta que las rocas con mayor porosidad tienen módulos de Young menores, debido a que la respuesta elástica de una muestra con muchos espacios vacíos interconectados es mayor. Debido a que las porosidades de los modelos computacionales generados son altas (mayores al 25%), se preferirá utilizar el valor de 1 GPa para el módulo de Young.

El valor de la relación de Poisson que se utilizó es igual a 0.25 en todos los casos. Este valor es representativo de una arenisca.

Por su parte, los valores de resistencia cohesiva, S_0 , están comprendidos entre 1 y 100 MPa. En (Zoback, 2007) se muestran varios ejemplos de areniscas con valores similares a estos. Como se indicó en la sección 1.3.1.1, a mayor valor de resistencia cohesiva, mayor resistencia a la fractura presenta la roca.

Por último, el coeficiente de fricción interna es igual a 0.8 en todos los modelos, debido a que es representativo de las areniscas. Los valores comunes de este coeficiente oscilan entre 0.6 y 1.0 para las rocas en el subsuelo.

Internamente, ESyS-Particle trabaja con los valores de las constantes de elasticidad y las fuerzas/momentos de rotura de enlaces. Estos parámetros son calculados cuando se proporcionan los parámetros constitutivos por medio de la siguiente ecuación:

$$K_r = \frac{\pi E}{2}$$

$$K_s = \frac{\pi E}{2(1 + \nu)}$$

$$K_t = \frac{\pi E}{8}$$

$$K_b = \frac{\pi E}{8(1 + \nu)}$$

$$F_r^{brk} = \frac{\pi S_0}{\mu_i}$$

$$F_s^{brk} = \frac{\pi S_0}{\mu_i}$$

$$F_t^{brk} = \frac{\pi S_0}{\mu_i}$$

$$F_b^{brk} = \frac{\pi S_0}{\mu_i}$$

Ecuación 46

Donde

K_s es el coeficiente de elasticidad tangencial,

K_t es el coeficiente de elasticidad de torsión,

K_b es el coeficiente de elasticidad de flexión,

K_r es el coeficiente de elasticidad normal,

F_s^{brk} es la fuerza tangencial de rotura,

F_r^{brk} es la fuerza normal de rotura,

F_t^{brk} es el momento torsor de rotura, y

F_b^{brk} es el momento flector de rotura.

3.3.2.2 *Definición de la interacción elástica con fricción entre partículas no enlazadas.*

Para definir esta interacción, ESyS-Particle requiere tres parámetros:

- ✓ Constante de elasticidad normal, K_r .
- ✓ Constante de elasticidad tangencial, K_s .
- ✓ Coeficiente dinámico de fricción, μ_d .

Por conveniencia, los valores de K_r y K_s que se proporcionaron para esta interacción fueron calculados a partir de la Ecuación 46 y los parámetros constitutivos definidos para la interacción entre las partículas enlazadas.

Por su parte, el valor del coeficiente dinámico de fricción se estableció como igual a 0.6, de modo que es menor que el coeficiente estático de fricción de la interacción entre partículas enlazadas.

3.3.2.3 Definición de la interacción elástica entre las paredes y las partículas.

Para definir esta interacción, sólo es requerido un parámetro: la constante de elasticidad normal, K_r . Con el fin de evitar que las partículas atraviesen las paredes cuando se sometan a esfuerzos muy grandes, el valor de K_r debe ser aproximadamente diez veces mayor al módulo de Young establecido en la interacción entre partículas enlazadas. Sin embargo, el valor de K_r no debe ser demasiado grande porque puede ocasionar efectos inesperados.

3.3.2.4 Definición de la amortiguación numérica artificial para la translación.

Este tipo de interacción requiere dos parámetros: la viscosidad, y el número máximo de iteraciones. Mientras mayor sea la viscosidad, la resistencia al movimiento translacional de la cada partícula será mayor. Esto es posible porque el software aplica un algoritmo con el cual se determina una fuerza que se opone al movimiento de la partícula según la velocidad lineal de la misma. Por su parte, el valor del número de iteraciones sólo tiene valor dentro del algoritmo programado en el software, y se relaciona con la precisión de los cálculos realizados; mientras mayor sea el número de iteraciones, más preciso será el valor de la fuerza que contrarresta el movimiento y el coste computacional será mayor.

Para los modelos creados, el valor de la viscosidad establecido fue de 10000. No es muy grande, por cuanto no inhibe completamente el movimiento de las partículas, ni tan pequeño como para considerarse despreciable.

3.3.2.5 Definición de la amortiguación numérica artificial para la rotación.

Como en el caso anterior, solo son requeridos dos parámetros: la viscosidad y el máximo número de iteraciones. A partir de la viscosidad y la velocidad angular, se calcula un torque que contrarresta el movimiento rotacional de una partícula. Los valores seleccionados para este trabajo son similares a los de la amortiguación numérica artificial para la translación.

3.3.2.6 Definición del campo gravitacional al cual está sometido al modelo.

Para definir el campo gravitacional, solo es necesario indicar el valor de la aceleración de la gravedad. En este trabajo se seleccionó un valor de 9.8 m/s^2 . Debido a que la masa de las partículas es pequeña, y a que los esfuerzos aplicados son cantidades del orden de los megapascales, es posible que el efecto de la gravedad no sea notable. Sin embargo, es necesario tenerlo en cuenta puesto que en condiciones reales todos los modelos están gravitacional terrestre.

3.4 CASOS DE ESTUDIO.

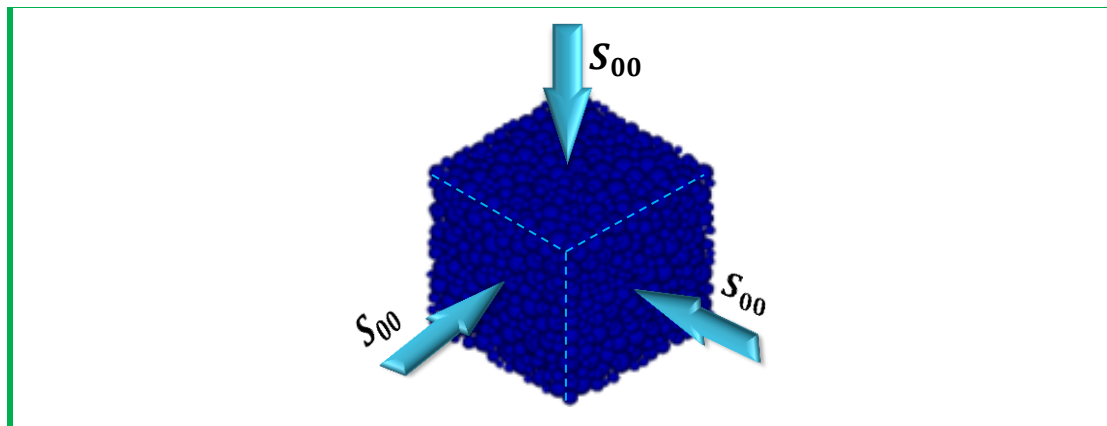
Con el fin de mostrar la reproducibilidad del método, se simularán las siguientes pruebas:

- ✓ Una serie de pruebas de compresión hidrostática para evaluar la variación del módulo de compresibilidad, K , de acuerdo al empaquetamiento de las muestras, y la resistencia de la roca. También se evaluará la repetitividad de los resultados para modelos con empaquetamientos y parámetros constitutivos similares, pero de dimensiones diferentes.
- ✓ Una serie de pruebas de compresión uniaxial para verificar los efectos en una muestra de roca.

- ✓ Una prueba triaxial con la cual se determine el valor del módulo de Young y se caracterice la resistencia de la roca a la compresión bajo diferentes presiones de confinamiento.

3.4.1 Pruebas de compresión hidrostática.

Al nivel del modelo computacional, la prueba de compresión hidrostática consta de varias etapas. En cada etapa, se aplica una presión de confinamiento uniforme a lo largo de todo el cuerpo de roca (ver *Figura 41*). Para evitar el fracturamiento anticipado, el espécimen es lentamente comprimido hasta alcanzar la presión requerida. Se debe tener en cuenta que la presión requerida aumenta en cada fase sucesiva. En la *Figura 42* se muestra la evolución del esfuerzo con el tiempo. Se observa que después de que se ha estabilizado el valor de la presión de confinamiento en una etapa, el programa pasa automáticamente a la aplicación de la siguiente etapa.



▲ **Figura 33:** Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba hidrostática a nivel computacional. Fuente: los autores.

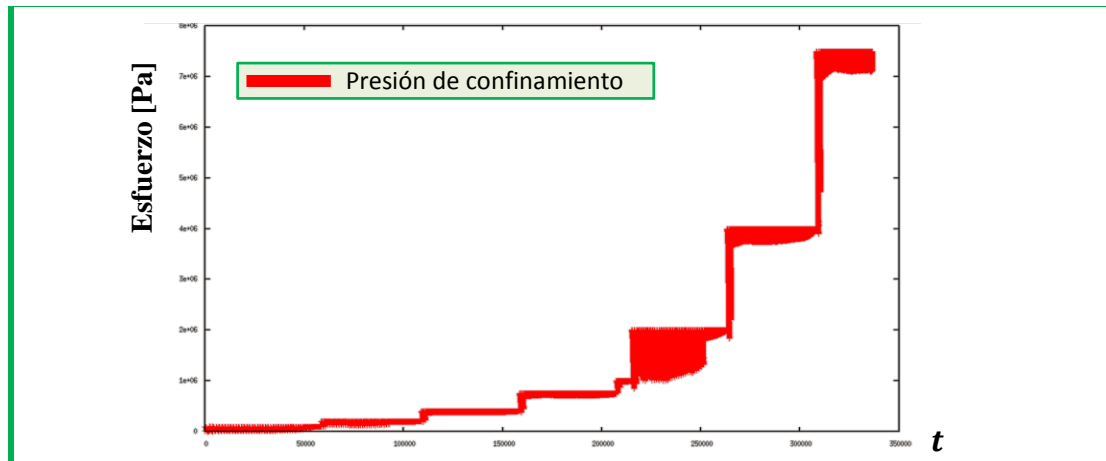


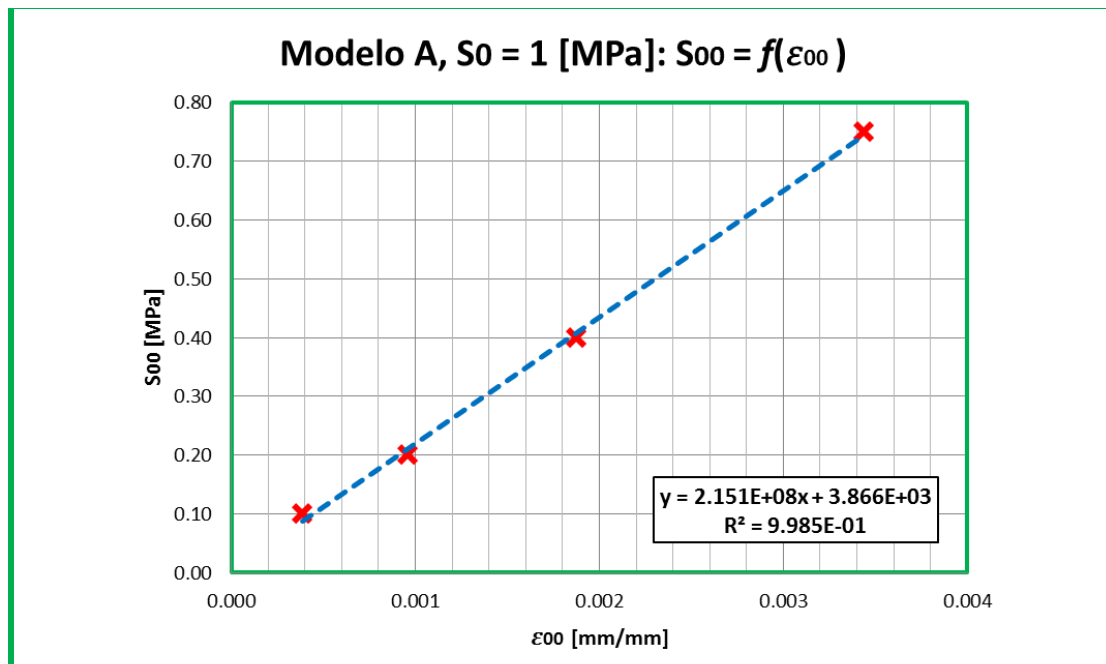
Figura 34: Evolución del esfuerzo con el tiempo para un modelo **▲** seleccionado en la prueba de compresión hidrostática. Gráfica generada con Python y GnuPlot. Fuente: los autores.

La Ecuación 13 relaciona los valores de la presión de confinamiento, S_{00} , y la deformación volumétrica, ε_{00} , con el módulo de compresibilidad, K . Se recuerda que K es un parámetro que indica qué tan compresible es un material; mientras mayor es su valor, menor es la respuesta elástica del espécimen. Debido a que las rocas de la formación se consideran como ligeramente compresibles, se espera que el valor de K sea independiente de la presión. En consecuencia, si se construye una gráfica de ε_{00} contra S_{00} , la pendiente de esta serie de datos debe ser igual a K .

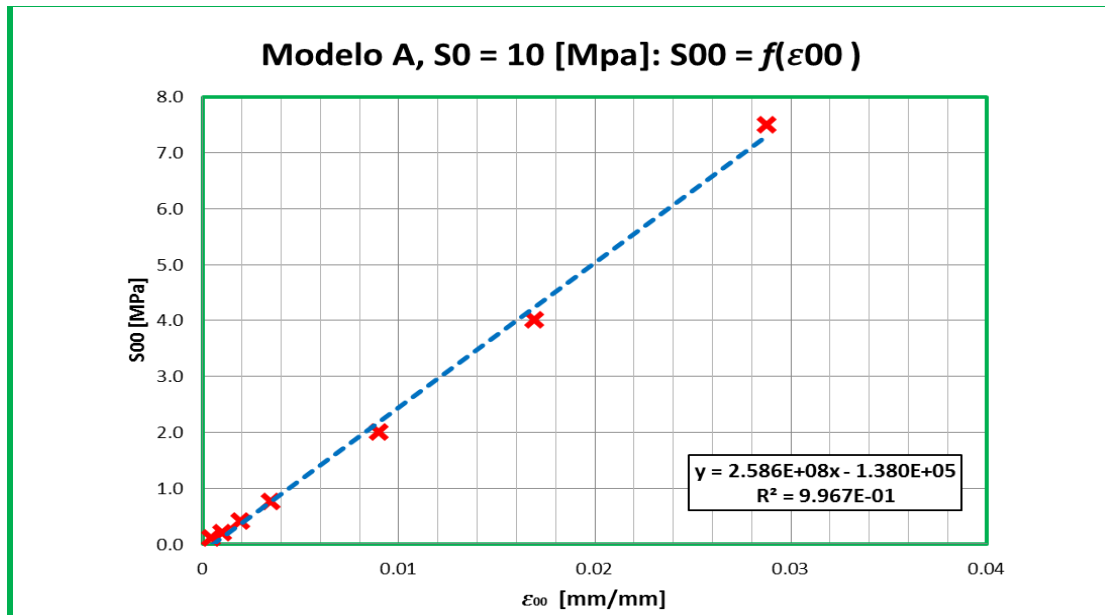
Con el fin de demostrar que la roca se comporta como un material ligeramente compresible, se seleccionaron varios modelos a los cuales se les realizó una prueba de compresión hidrostática. En las gráficas Figura 35 a Figura 42 se exponen los resultados individuales de cada prueba. En cada gráfica se muestra una serie de datos que indica la relación existente entre S_{00} y ε_{00} , y una línea rayada, que corresponde al ajuste por mínimos cuadrados de dicha serie. Evidentemente, la pendiente de la recta obtenida es igual a K . Sin embargo, nótese que en la Figura 40 no hay tendencia lineal. Se realizará un análisis al

respecto más adelante. En las figuras Figura 43 y Figura 44 se muestran los resultados compilados en sólo dos gráficas.

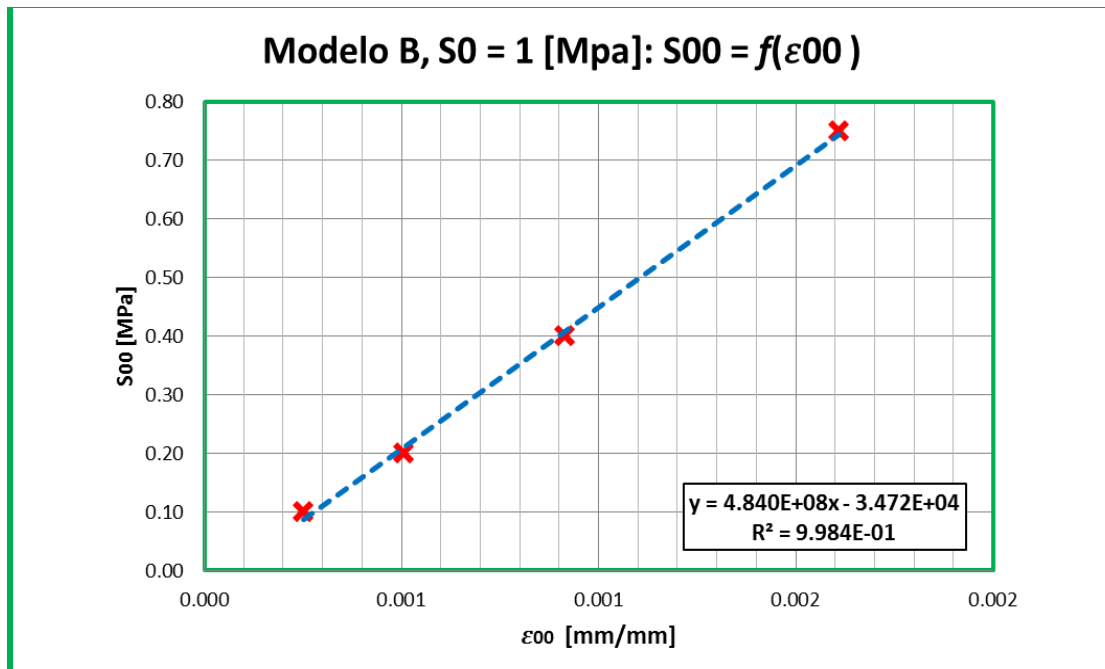
Es necesario aclarar que en las figuras se muestran los resultados de algunas de las pruebas, con el fin de no extender el documento. Las pruebas que se seleccionaron para ser mostradas aquí son suficientes para demostrar las tendencias generales que se pueden llegar a presentar.



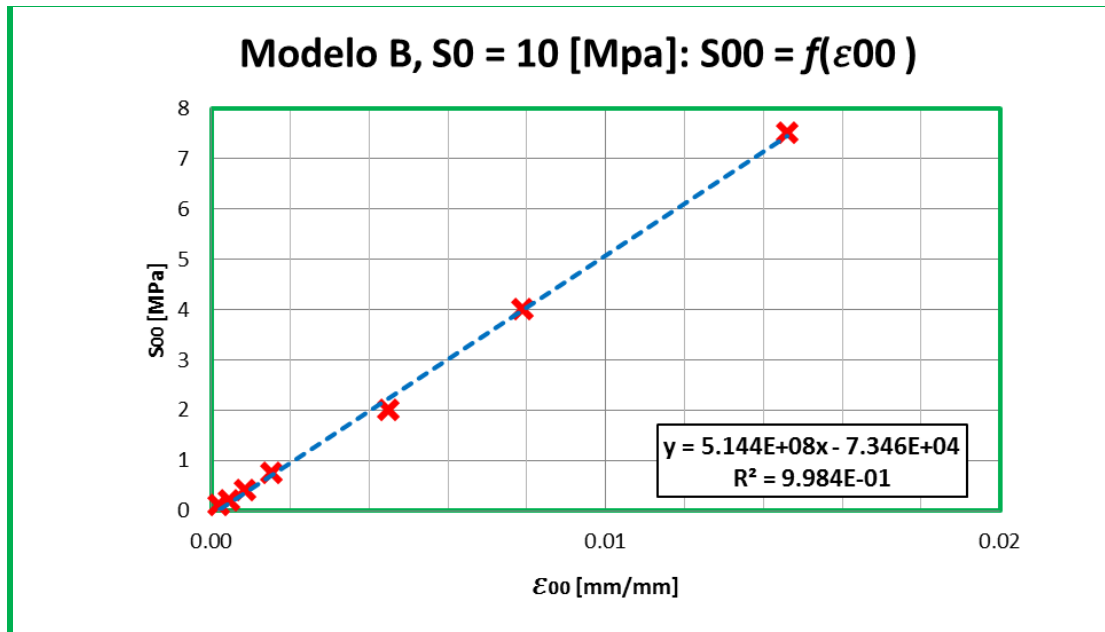
▲ **Figura 35: Modelo con empaquetamiento A. $S_0 = 10$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 33%. Fuente: los autores.



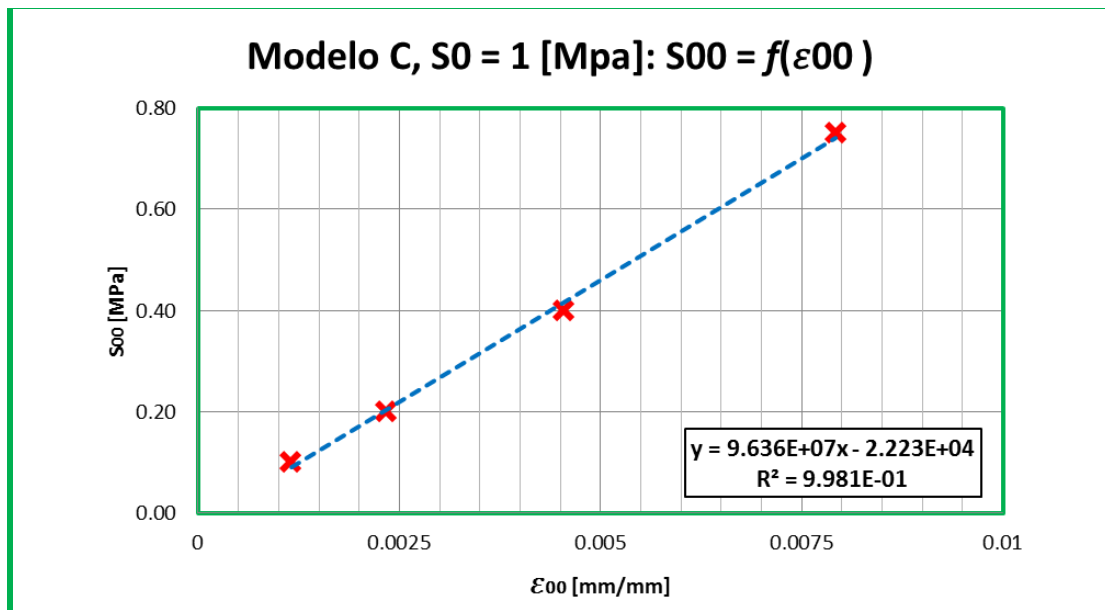
▲ **Figura 36: Modelo con empaquetamiento A. $S_0 = 100$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 33%. Fuente: los autores.



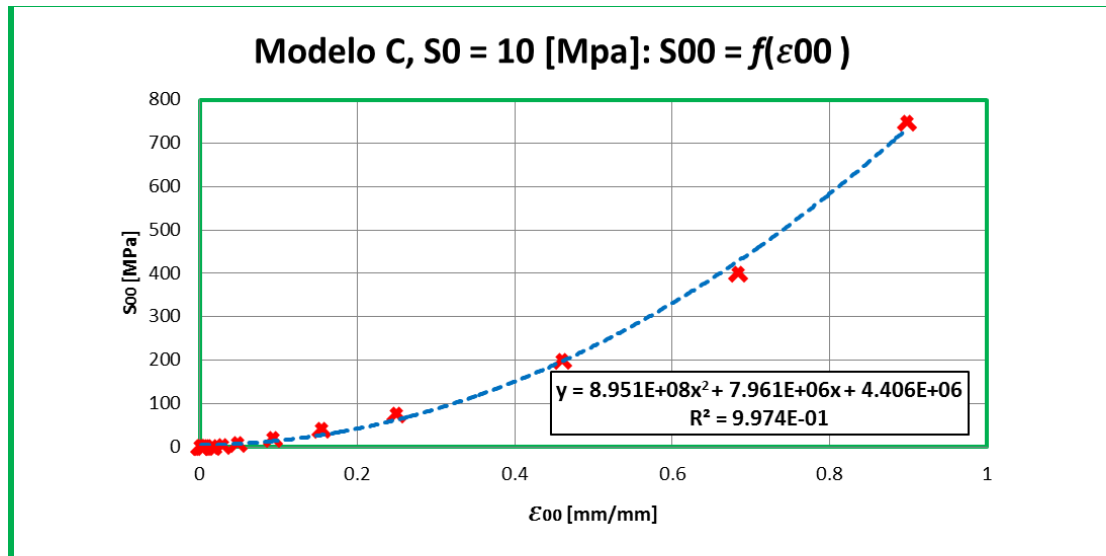
▲ **Figura 37: Modelo con empaquetamiento B. $S_0 = 10$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 27%. Fuente: los autores.



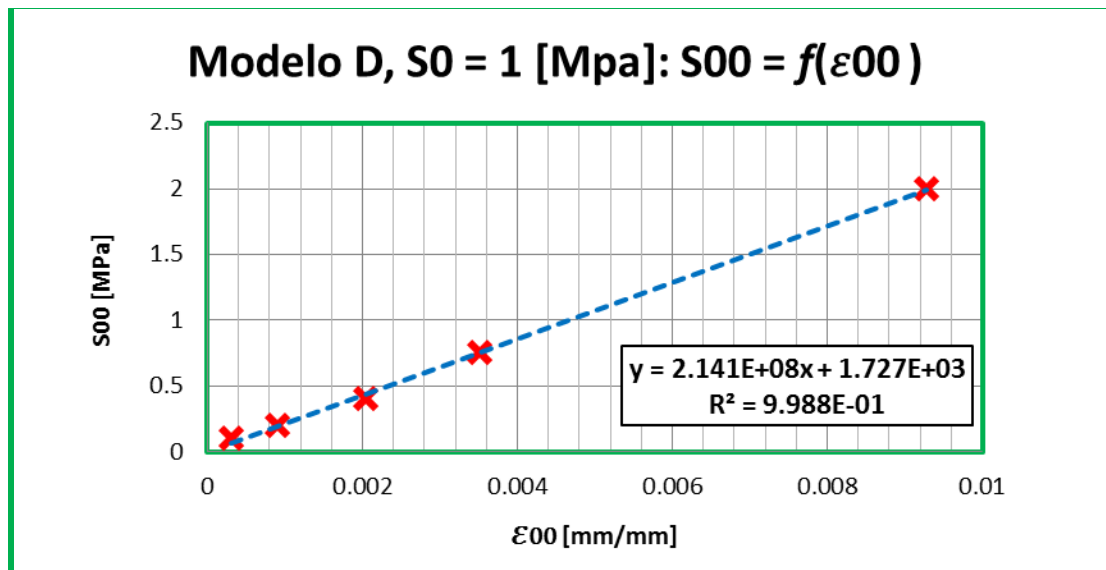
▲ **Figura 38: Modelo con empaquetamiento B. $S_0 = 100$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 27%. Fuente: los autores.



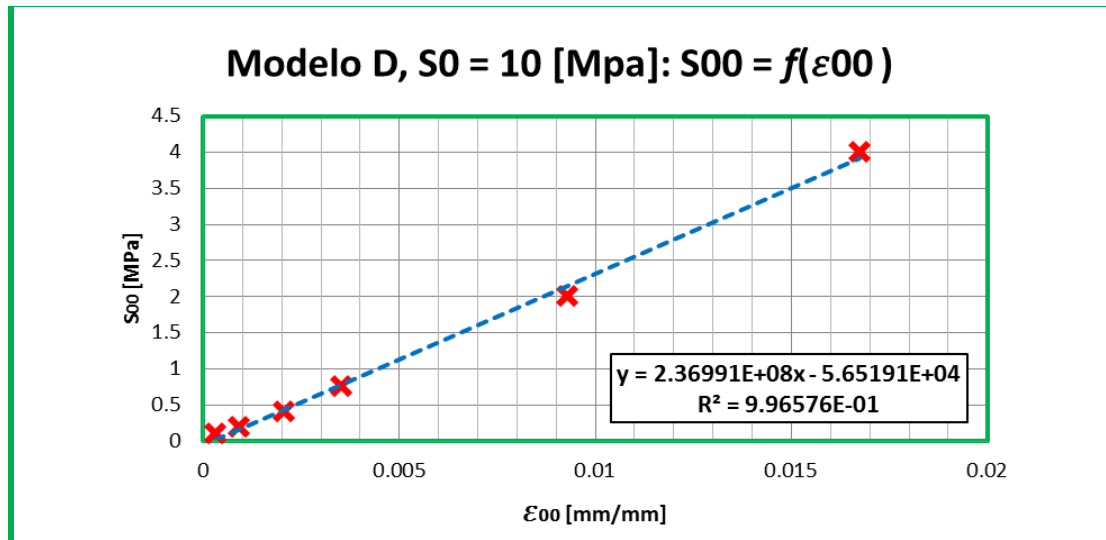
▲ **Figura 39: Modelo con empaquetamiento C. $S_0 = 10$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 42%. Fuente: los autores.



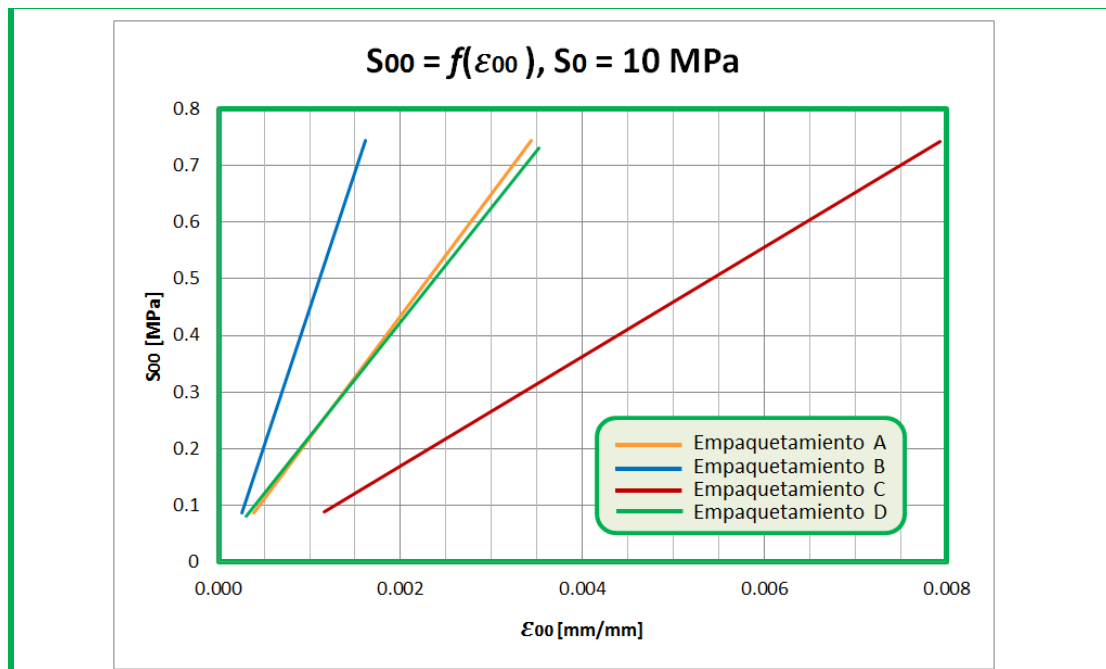
▲ **Figura 40: Modelo con empaquetamiento C. $S_0 = 100$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 42%. Para obtener el valor de K instantáneo en un punto sobre la curva, se debe evaluar la derivada de la función de ajuste de la serie. Fuente: los autores.



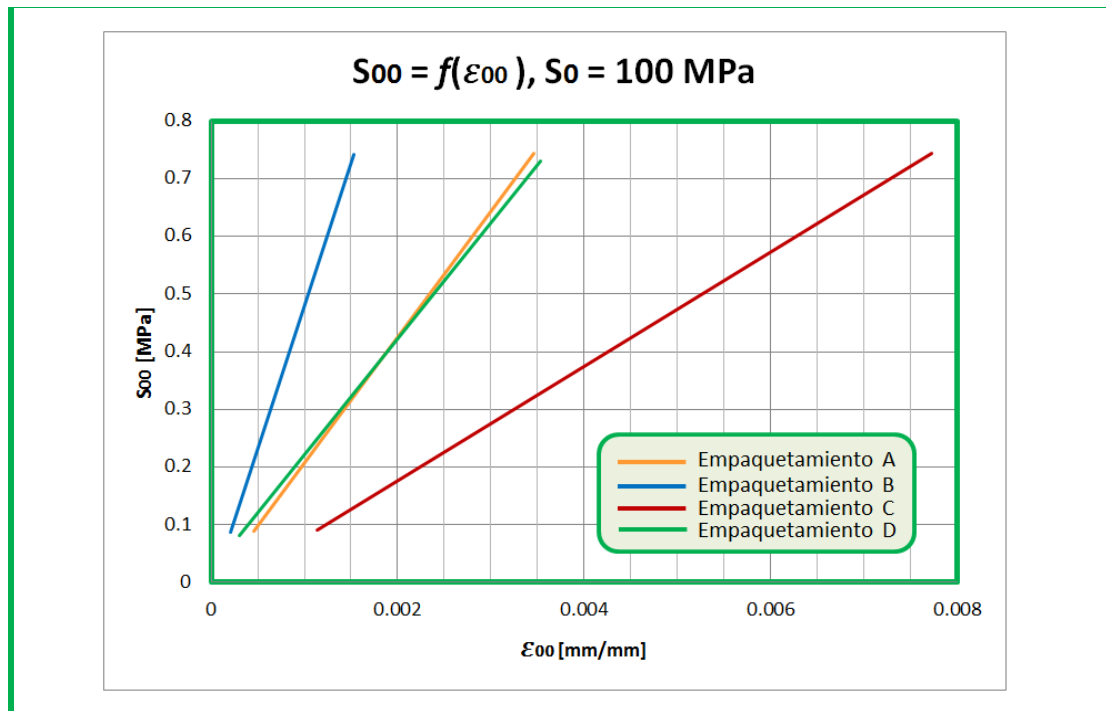
▲ **Figura 41: Modelo con empaquetamiento D. $S_0 = 10$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 35%. Fuente: los autores.



▲ **Figura 42: Modelo con empaquetamiento D. $S_0 = 100$ [MPa]. $E = 1$ GPa.** La porosidad del modelo es 35%. Fuente: los autores.



▲ **Figura 43: Comparación de los resultados de la prueba de compresión hidrostática para los empaquetamientos A – D, $S_0 = 10$ [MPa], $E = 1$ GPa.** El empaquetamiento con mayor pendiente corresponde al modelo con menor porosidad. Fuente: los autores.



▲ **Figura 44: Comparación de los resultados de la prueba de compresión hidrostática para los empaquetamientos A – D, $S_0 = 100$ [MPa], $E = 1$ GPa.** El empaquetamiento con mayor pendiente corresponde al modelo con menor porosidad. Fuente: los autores.

Las ecuaciones del ajuste por mínimos cuadrados en cada gráfica ponen de manifiesto qué tan correlacionados se encuentran los datos entre sí. En general, el coeficiente de correlación obtenido es casi 1, indicando que el material se comporta como ligeramente compresible. Además, los datos con mejor ajuste lineal también tienen un corte con el eje 'y' más aproximado al esperado teóricamente: el origen, pues no hay deformación cuando la presión de confinamiento es cero. Esto es suficiente para demostrar que ϵ_{00} y S_{00} tienen una relación lineal muy clara entre sí, excepto en el caso de la *Figura 40*. En general, los módulos de compresibilidad obtenidos se encuentran dentro del rango de valores posibles para las areniscas.

3.4.1.1 *Discusión acerca de la relación entre el empaquetamiento de las muestras y el módulo de compresibilidad.*

Debido a que el empaquetamiento está relacionado de cierta manera con la porosidad de la roca, se asumió que los modelos *con empaquetamientos más completos* deben ser aquellos cuya porosidad es menor. En este sentido, se pueden comparar los valores del módulo de compresibilidad con respecto a qué tan completo es el empaquetamiento es una muestra de roca.

En particular, los resultados mostrados en las figuras **Figura 35 - Figura 38, Figura 41- Figura 42** indican que el módulo de compresibilidad es mayor en los modelos menos porosos, es decir, con empaquetamientos más completos (ver empaquetamiento tipo B, Figura 29). A partir de esto se concluye que *mientras más completo es el empaquetamiento, menor es la respuesta elástica del cuerpo de roca*. Al nivel del modelo computacional, esto se puede explicar porque las rocas más porosas tienen más espacios vacíos en donde se pueden reacomodar las partículas en la medida en que la muestra es sujeta a un proceso de deformación.

Otro aspecto a destacar que es aplicable para los modelos en discusión es que el módulo de compresibilidad es constante, e independiente del esfuerzo aplicado. Debido a que la compresibilidad de la roca debe ser constante para el tipo de interacción linealmente elástica que se definió al comienzo de la simulación, *se concluye que estos modelos han reproducido el comportamiento esperado*. Además, este hecho demuestra que las leyes constitutivas definidas a nivel microscópico (es decir, en las partículas y en los enlaces individuales) se reproducen a nivel macroscópico, en los modelos computacionales. En este sentido, es posible que cualquier ley constitutiva formulada a nivel microscópico se pueda manifestar a nivel macroscópico durante las corridas de simulación. En consecuencia, leyes constitutivas más sofisticadas, como la interacción viscoelástica entre pares de partículas enlazadas, pueden ser programadas dentro de la herramienta de software para devolver resultados representativos.

3.4.1.2 *El caso especial de la Figura 40.*

Por su parte, el comportamiento presentado en la *Figura 40* correspondiente a la de un empaquetamiento con una porosidad muy alta (ver empaquetamiento C, *Figura 30*), es inesperado. En realidad, se puede demostrar que cuando la muestra es sometida a esfuerzos de magnitudes bajas, menores a 10 MPa, el valor del módulo de compresibilidad, calculado como la pendiente de la curva en un punto, se encuentra dentro de los rangos esperados.

Sin embargo, el incremento exagerado y progresivo del valor del módulo de compresibilidad a presiones muy altas es anormal desde un punto de vista físico. Lo más probable es que este fenómeno ocurre por dos razones que se presentan simultáneamente:

1. La energía suministrada por compresión es mayor que la máxima energía de deformación que pueden almacenar el conjunto de todos los enlaces entre pares de partículas. El excedente de energía suministrada se almacena principalmente en la interacción pared – partícula en contacto.
2. El modelo numérico no implementa un mecanismo de respuesta realista cuando se presenta esta situación.

En general, se puede predecir que todos los modelos numéricos representados en este trabajo tienen un límite en el cual se presenta la misma respuesta mecánica del modelo de la *Figura 40*. Sin embargo, este comportamiento no fue observado porque antes de que ocurriese, se había roto la mayor parte de los enlaces: se alcanzó primero el límite de resistencia de la roca, en lugar de la máxima energía que puede ser almacenada en los enlaces y los contactos entre pares de partículas.

En el capítulo 2 del texto de Mujinza (Munjiza, 2004) se describe un algoritmo de penalización para las interacciones entre contactos, que puede ser utilizado para

superar estos problemas, pero que requiere que la forma de los elementos sea irregular.

3.4.1.3 *Discusión acerca de la relación entre la cohesión, S_0 , y el módulo de compresibilidad.*

Los valores del módulo de compresibilidad son ligeramente diferentes entre modelos con el mismo empaquetamiento, por lo cual no se puede establecer una tendencia clara entre estas dos variables. No obstante, es necesario considerar que en modelos físicos reales se supone que estos dos parámetros no tienen relación alguna. Se aclara que estas pequeñas variaciones se explican si se tiene en cuenta que:

1. El número de puntos con los cuales se construyó cada gráfica es diferente. Esto se debe a que en los casos con menor cohesión, la roca se fracturó con mayor anticipación, de modo que no fue posible el registro de más puntos para estos casos.
2. La heterogeneidad de las muestras introduce cierto margen de error en los datos recolectados.

En síntesis, se demuestra que no hay una aparente relación entre estas dos variables, lo que significa que los parámetros definidos en la ley constitutiva afectan el comportamiento de los modelos simulados de la manera esperada.

3.4.1.4 *Discusión acerca de la reproducibilidad de los resultados con modelos con diferentes escalas.*

Considérese el caso de los modelos con empaquetamientos A y D (ver figuras **Figura 35**, **Figura 36**, **Figura 41** y **Figura 42**). Las características presentadas en la Tabla 4 son suficientes para afirmar que el empaquetamiento D corresponde al mismo tipo de roca que A, y que por lo tanto se espera que el comportamiento de ambos modelos sea muy similar.

Empaquetamiento	
A	D
20559 partículas	2564 partículas (la octava parte de A menos seis)
Radio de partículas: [0.1, 0.3]	Radio de partículas: [0.1, 0.3]
Cubo de roca de 10x10x10 mm ³	Cubo de roca de 5x5x5 mm ³ (volumen corresponde a la octava parte de A)
$\phi = 33\%$	$\phi = 35\%$

▲ **Tabla 4: Comparación entre algunas propiedades de los empaquetamientos A y D.**

En efecto, se observa que *los módulos de compresibilidad obtenidos son similares* en los casos con la misma cohesión. Además, a partir de un chequeo más exhaustivo se puede concluir que en ambos casos se obtuvo casi el mismo número de puntos para la construcción de las gráficas (con una diferencia de tan solo 1 unidad para cada par de modelos correspondientes), lo cual es un indicativo de que *ambos modelos se fracturan a condiciones similares de presión de confinamiento*. Se tiene que aclarar que cada punto registrado en la gráfica se obtiene en intervalos fijos definidos internamente en las datas de simulación, y que por lo tanto entre un dato y el siguiente puede existir una diferencia muy grande de esfuerzos. De cualquier manera, y debido a que las muestras físicas reales comparten un grado similar de heterogeneidad con respecto a los modelos representados, se puede afirmar que el empaquetamiento D es tan representativo del empaquetamiento A como un plug es representativo de un núcleo de roca.

La comprobación de la reproducibilidad de los resultados con modelos de diferentes escalas es importante porque evidencia la posibilidad de emplear modelos que requieren menor esfuerzo computacional sin dejar de proporcionar resultados representativos. En la Tabla 5 se muestra el tiempo empleado para correr los primeros cien mil pasos de tiempo de dos modelos que comparten la misma distribución de partículas y los mismos valores de los parámetros constitutivos, pero que se diferencian en el número de partículas. Para obtener el valor del tiempo empleado para cada modelo.

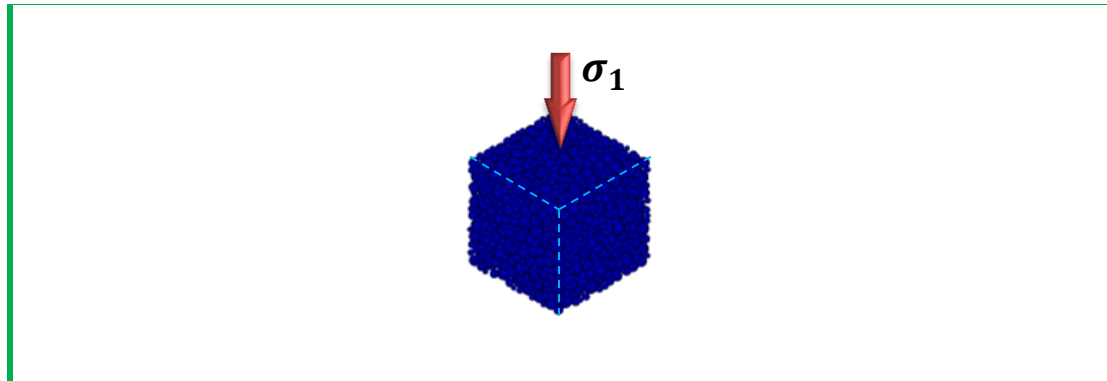
Empaquetamiento	
A: 20559 partículas.	D: 2564 partículas.
Cálculo del tiempo empleado para correr los primeros 100 K pasos de tiempo:	
2012-01-29 02:44:14,812 - <u>2012-01-28 23:31:44,143</u> 03:12:30,679	2012-01-31 01:53:27,701 - <u>2012-01-31 01:34:23,404</u> 00:19:04,297
Porcentaje de tiempo empleado para correr los primeros 100 K pasos de tiempo:	
100 %	10.57 %

▲ **Tabla 5: Comparación de los tiempos de cómputo de los primeros 100K pasos de tiempo entre dos modelos con la misma distribución de partículas, pero de escala diferente.** Los parámetros constitutivos de ambos modelos son: $E = 1GPa$, $\nu = 0.25$, $S_0 = 10MPa$, $\mu_i = 0.8$.

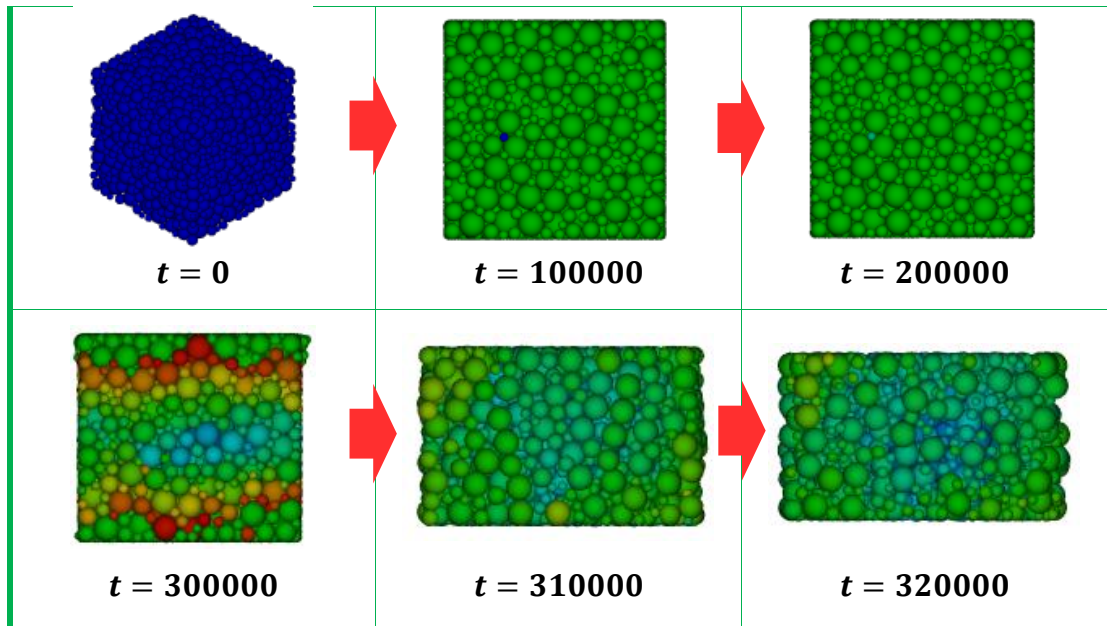
Este experimento demostró la importancia de usar modelos con escalas más pequeñas, pues además de que la respuesta deformativa del modelo con empaquetamiento D fue muy similar a la del empaquetamiento A, la reducción del tiempo de cómputo fue de casi un 90%.

3.4.2 Pruebas de compresión uniaxial.

Una prueba de compresión uniaxial consiste en la aplicación de una tracción compresiva a lo largo de uno de los ejes de un cuerpo de roca. Normalmente, la muestra debe tener forma cilíndrica o de prisma, y el esfuerzo es aplicado sobre las bases del mismo. Para simular la realización de una prueba de compresión uniaxial con el software, se creó un cubo de roca que es luego sometido a una compresión uniaxial. Se consideró nula la presión de confinamiento en las paredes laterales del mismo. En la Figura 45 se muestra el esquema de esfuerzos aplicados sobre el modelo para simular una prueba uniaxial. En la Figura 46 se muestra el resultado de someter al modelo en cuestión a un esfuerzo uniaxial cuyo valor máximo es de 100 KPa (la presión atmosférica).



▲ **Figura 45:** Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba uniaxial a nivel computacional. Fuente: los autores.



▲ **Figura 46:** Proceso de fractura de un modelo con empaquetamiento D , $S_0 = 100 \text{ MPa}$, $E = 1 \text{ GPa}$, bajo condiciones de confinamiento nulas. Los bloques de partículas mostrados hacen parte de una secuencia de imágenes. La escala del tiempo está en pasos de tiempo. Los colores representan el desplazamiento relativo de las partículas con respecto a su posición inicial; las partículas de color azul son aquellas cuyo desplazamiento total es menor en el timestep considerado, y las de color rojo, aquellas cuyo desplazamiento total es mayor en el mismo timestep. Fuente: los autores.

En la secuencia de imágenes se observa que la roca empieza a fracturarse alrededor del paso de tiempo 300000. Dicho fracturamiento se considera muy prematuro, porque el valor del esfuerzo aplicado nunca fue superior a la presión atmosférica. De hecho, el modelo representado en esta prueba ya se había probado en una prueba de compresión hidrostática en la cual el fracturamiento ocurrió cuando la presión de confinamiento excedió 4 MPa. Además, este mismo modelo será utilizado en una prueba de compresión triaxial, la cual demostrará que la roca no se fractura anticipadamente cuando es aplicada una presión de confinamiento. Por lo tanto, se puede concluir que:

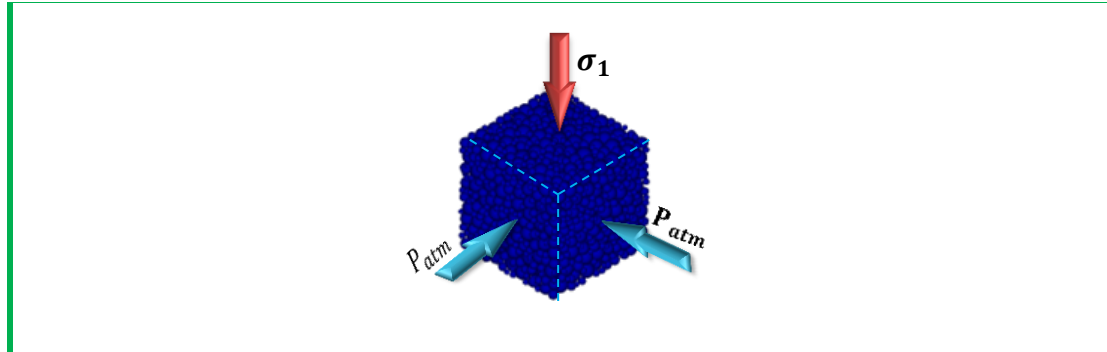
- ✓ La muestra de roca es muy sensible a los defectos preexistentes cuando no se aplica ninguna presión de confinamiento.
- ✓ Cuando la presión de confinamiento es nula en las caras laterales, no existe un soporte que mantenga a las partículas en las caras del cubo de roca, de modo que las partículas tienen más libertad para moverse.

3.4.2.1 Prueba de compresión uniaxial a condiciones atmosféricas.

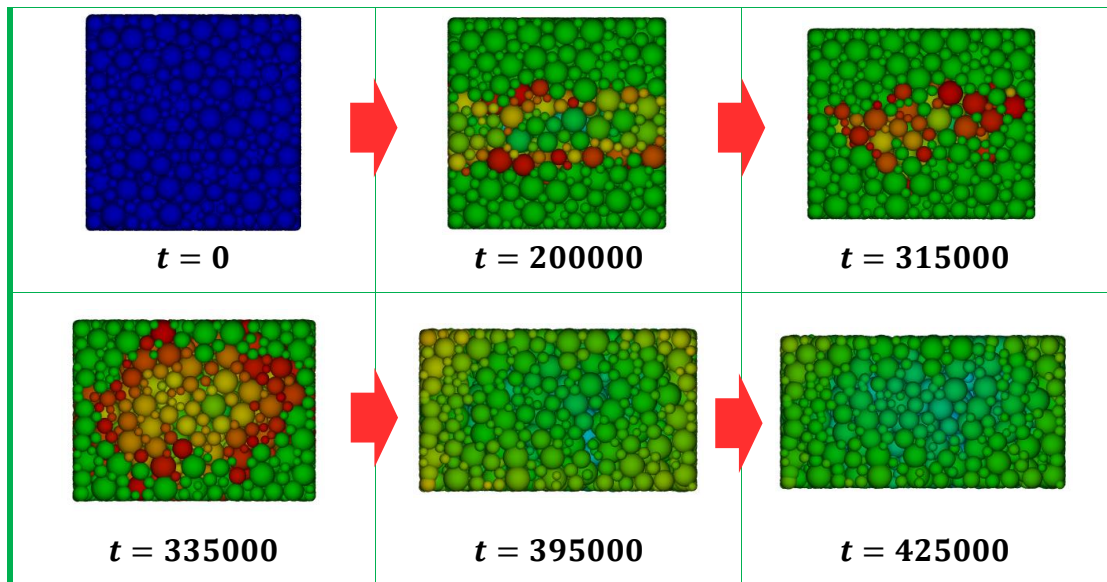
En la realidad, las pruebas uniaxiales se realizan a condiciones atmosféricas. Por lo tanto, el aire ejerce una presión de confinamiento en las paredes laterales del cuerpo de roca, que brinda soporte y restringe el movimiento de las partículas más externas, retrasando el fracturamiento de la muestra.

Es necesario mostrar el resultado de una prueba de compresión uniaxial a condiciones atmosféricas con el software. Sin embargo, debido a que el aire es un fluido, de momento no es posible modelar con ESyS-Particle su influencia en una prueba de compresión uniaxial. Por lo tanto, se optó por representar la influencia de la presión atmosférica en las caras laterales por medio de unas paredes rígidas que ejercen una presión constante de 100 KPa (Ver Figura 51). En la Figura 48 se muestra el proceso de fractura del mismo modelo de la Figura 46,

pero aplicando una presión de confinamiento de 100 KPa en las caras laterales por medio de unas paredes.



▲ **Figura 47:** Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba hidrostática a condiciones atmosféricas a nivel computacional. Fuente: los autores.



▲ **Figura 48:** Proceso de fractura del Modelo D, $S_0 = 100 \text{ MPa}$, $E = 1 \text{ GPa}$ bajo una presión de confinamiento de 100 KPa. Los bloques de partículas mostrados hacen parte de una secuencia de imágenes. Los colores representan el desplazamiento relativo de las partículas con respecto a su posición inicial; las partículas de color azul son aquellas cuyo desplazamiento acumulado ha sido menor en el timestep considerado, y las de color rojo, aquellas cuyo desplazamiento acumulado es mayor en el mismo timestep. $UCS = 25 \text{ MPa}$. Fuente: los autores.

El proceso de fractura en la Figura 48 es menos dramático. De hecho, para inducir la fractura, fue necesario que el esfuerzo uniaxial alcanzara 25 MPa. Con esto, se demuestra entonces la influencia de la presión de confinamiento en el retardo del fracturamiento de la muestra, al menos a nivel computacional.

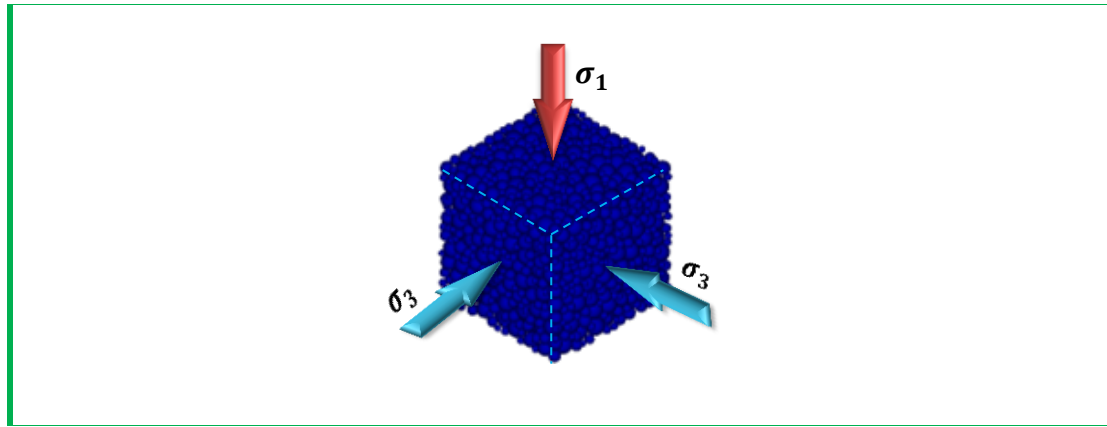
Es necesario tener en cuenta que debido a la rigidez de la paredes que ejercen la presión de confinamiento, el soporte brindado a las paredes laterales es mayor que cuando es ejercido por un fluido (por cuanto un fluido adquiere la forma de lo que rodea). En consecuencia, los resultados de los modelos físicos pueden variar con respecto a los de los modelos computacionales. Esto se puede interpretar como una ventaja a favor del método porque es posible obtener el valor de UCS (Unconfined Compressive Stress) de forma directa a partir de una prueba uniaxial, pero también se puede interpretar como una desventaja porque el modelo computacional no está representando completamente los resultados que se producen en un modelo físico.

3.4.3 Prueba tradicional de compresión triaxial.

Una prueba tradicional de compresión triaxial, en adelante prueba triaxial, consiste en la aplicación de un esfuerzo máximo sobre las bases de una muestra cilíndrica, y de una presión de confinamiento en las paredes laterales. Estas pruebas son realizadas, entre otras cosas, para caracterizar la resistencia compresiva de las rocas y la determinación de algunos parámetros constitutivos.

Para la realización de este tipo de pruebas a nivel computacional, se seleccionó una muestra de forma cúbica, debido a las limitaciones del software para aplicar una compresión de confinamiento uniforme en las caras laterales de una muestra cilíndrica. En la Figura 49 se muestran un esquema de cómo son aplicados los esfuerzos sobre la muestra de roca en la prueba triaxial que se realizó con el ESyS-Particle. Es necesario aclarar que a las caras que no se ven en la figura se

les aplica un esfuerzo correspondiente al aplicado en la cara opuesta, pero en dirección contraria.



▲ **Figura 49:** Esquema de los esfuerzos aplicados en una prueba triaxial a nivel computacional. Fuente: los autores.

Para obtener la envolvente de falla de la muestra de roca en cuestión, es necesario correr varias simulaciones. En cada simulación, el modelo es inicialmente sometido a una presión de confinamiento determinada. Luego, se aumenta progresivamente el valor del esfuerzo máximo hasta que se alcanza el punto de fractura del modelo. Este punto se registra para luego calcular la envolvente de falla. En la Figura 50 se muestra la evolución del esfuerzo y del número de enlaces de un modelo seleccionado con respecto al tiempo (medido en pasos de tiempo). En la gráfica se observa que en los primeros doscientos mil pasos de tiempo ocurre una estabilización en la cual la muestra es sometida a una presión de confinamiento igual a 100 KPa. Luego, se empieza a incrementar progresivamente y controladamente el valor del esfuerzo máximo, hasta que alcanza su punto máximo de aproximadamente 17 MPa. En este punto se dice que la roca ha fallado. De hecho, se puede observar que el esfuerzo máximo posible coincide con la disminución de los enlaces existentes entre las partículas.

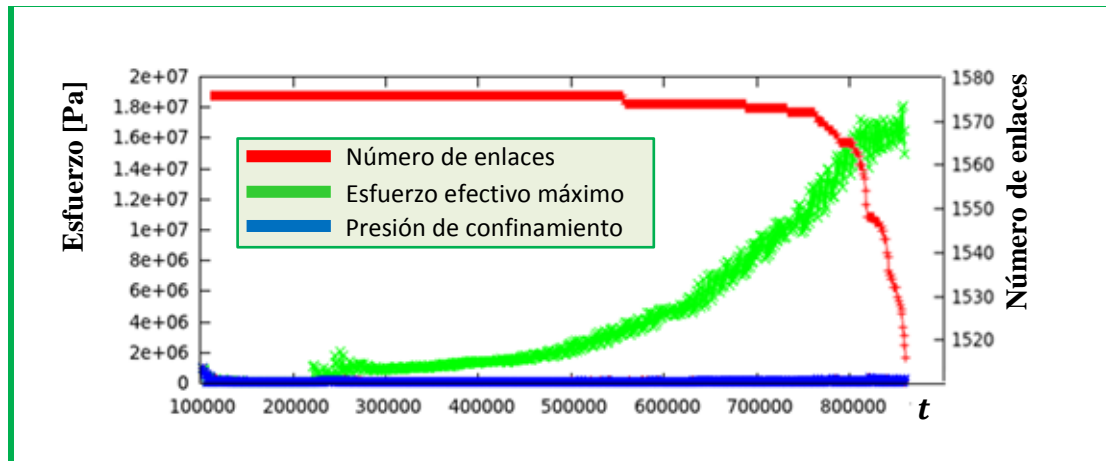


Figura 50: Evolución del esfuerzo y el número de enlaces con el tiempo para un modelo seleccionado. Gráfica generada con Python y GnuPlot. Fuente: los autores.

Por su parte, en la *Figura 51* se muestra la envolvente de falla de un modelo seleccionado. En la gráfica, cada circunferencia representa un círculo de Mohr. Los círculos fueron obtenidos a partir de una serie de pruebas triaxiales a diferentes presiones de confinamiento.

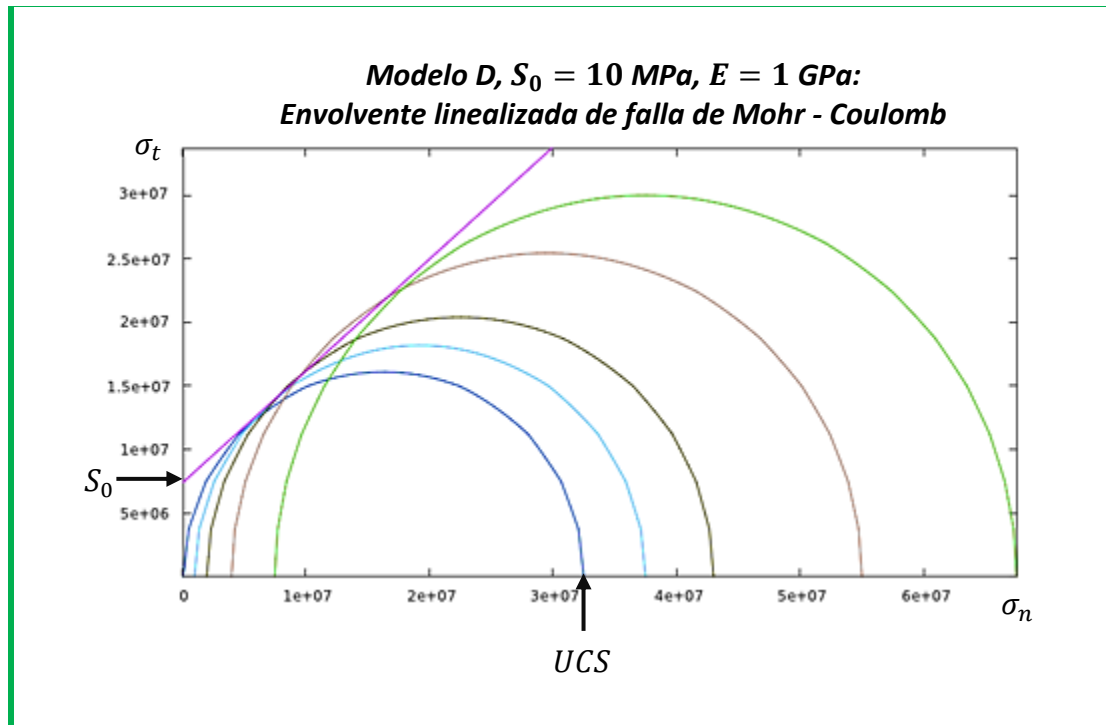


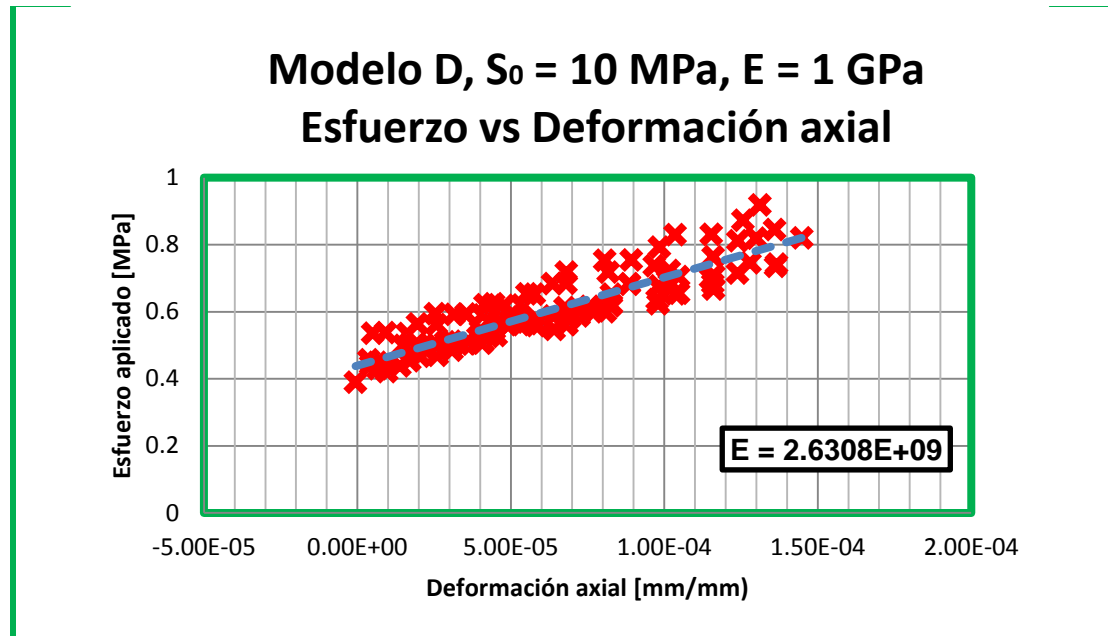
Figura 51: Envolvente de falla linealizada de Mohr Coulomb, modelo D, $S_0 = 100 \text{ MPa}$, $E = 1 \text{ GPa}$. La envolvente se calculó a partir de los círculos de Mohr obtenidos con una serie de pruebas triaxiales a nivel del modelo computacional. La gráfica fue generada por medio de GnuPlot. Fuente: los autores.

Los resultados de la *Figura 51* demuestran que el criterio de cedencia definido en el modelo se reproduce. Por lo tanto, con esto se reafirma que las leyes constitutivas definidas a nivel microscópico se manifiestan a macroscópicamente.

Otro aspecto importante a destacar es que a nivel del modelo computacional, una prueba uniaxial a condiciones atmosféricas es equivalente a una prueba triaxial con presión de confinamiento de 100 KPa. La ventaja principal de este hecho es que se obtiene de forma directa el valor del UCS.

En la *Figura 52*, se muestra la relación entre el esfuerzo axial y la deformación axial. Los datos mostrados muestran una tendencia lineal, lo cual corresponde con

un modelo real con las mismas características. La pendiente de la recta es igual al módulo de Young.



▲ **Figura 52: Esfuerzo vs. Deformación axial.** Los datos de esfuerzo axial están desfasados unas unidades hacia la derecha porque el primer desplazamiento registrado, a un esfuerzo de 0.4 MPa, no incluyó la deformación que se acumuló tras la aplicación de los esfuerzos previos. Fuente: los autores.

Otro aspecto a considerar de la *Figura 51* es que el valor obtenido de S_0 no es igual al proporcionado en la data de simulación. De hecho, su diferencia es de más de un orden de magnitud. Los parámetros constitutivos deben ser calibrados para que puedan representar mejor a un modelo real, por lo cual es necesario realizar una serie de corridas adicionales con diferentes valores de parámetros constitutivos, con las cuales se reproduzcan las constantes elásticas deseadas. En cambio, el módulo de Young calculado en la *Figura 52* difiere en una proporción mucho más pequeña con respecto al valor proporcionado.

Sin embargo, lo cierto de la definición de los parámetros constitutivos en ESyS - Particle es que representan de manera relativa el comportamiento esperado.

De esta simulación, también se obtiene de manera directa el valor del UCS, lo cual demuestra que una prueba uniaxial equivale a una prueba triaxial realizada con una presión de confinamiento de 100 KPa en ESyS – Particle. Esto se convierte en una limitación para representar el comportamiento real de las muestras, pero a la vez se constituye en una ventaja sobre los modelos experimentales porque el UCS es determinado de forma directa a partir de una prueba uniaxial. Además, desde este punto de vista, una prueba uniaxial es un tipo de prueba triaxial en la que la presión de confinamiento es igual a la presión atmosférica.

3.5 DISCUSIÓN DE LAS LIMITACIONES DEL MÉTODO.

Fueron numerosas las pruebas que se realizaron aplicando el método de los elementos discretos. Sin embargo, se pusieron de manifiesto varias limitaciones que indican el trabajo que se tiene que hacer para mejorar la aplicabilidad del método y la reproducibilidad de los resultados. A continuación, se listan algunas de las limitaciones del método de elementos discretos, y del software, que se evidenciaron durante la realización de las simulaciones:

- ✓ El software por sí mismo no es capaz de aplicar la compresión de un modelo de forma controlada, tal y como se realizó en este trabajo. Fue necesaria la modificación de algunas partes para hacerlo posible. Sin embargo, después de todo no fue posible usar modelos cilíndricos o de pozo exitosos a los cuales se les aplique una presión de confinamiento uniforme a lo largo de toda su superficie. Se recomendaría comparar los resultados obtenidos entre los modelos cúbicos y sus correspondientes modelos cilíndricos en tanto sea posible, para evaluar el efecto de la geometría en los resultados.
- ✓ El equipo empleado para realizar las simulaciones (Intel i3 2.93 GHz, 4GB RAM DDR3) apenas fue suficiente para realizar las simulaciones propuestas. Un cluster de grandes proporciones puede ser útil para realizar las simulaciones con mayor resolución y rapidez.

- ✓ La caracterización de las fracturas es todavía un reto. Aunque es evidente que la roca se fracturó en los modelos seleccionados, no es muy clara la orientación del plano de fractura. Quizás, es necesario utilizar un modelo con mayor resolución, o registrar una propiedad no tenida en cuenta, para caracterizar las fracturas claramente.
- ✓ Se debe tener precaución al momento de tomar conclusiones a partir de los resultados cuantitativos obtenidos, especialmente cuando los modelos son representaciones bastante simplificadas de la realidad, puesto que son susceptibles a cambios bruscos inesperados ante pequeños cambios de los parámetros proporcionados en el Input del software. Las pequeñas imperfecciones de las muestras y la heterogeneidad profundizan este efecto. En todo caso, se sugiere calibrar los parámetros constitutivos proporcionados en el Input con modelos sencillos, con el fin de obtener como respuesta los parámetros constitutivos deseados. Esto sugiere la realización de pruebas adicionales, pero que pueden resultar en beneficio de una representación más exacta de los modelos reales.
- ✓ La aplicabilidad del método a nivel comercial todavía es cuestionable, pues aún no existe un código DEM exclusivo para la ingeniería de petróleos. Para que el método pase a la siguiente fase, en la que se considere suficientemente maduro para modelar problemas de la geomecánica, se requiere que sus predicciones reproduzcan fenómenos que ocurran en subsuelo. Sin embargo, ya hay códigos DEM disponibles para la ingeniería en general, tales como UDEC/3DEC de Itasca, y el módulo de Rastreo de Partículas y Modelado Lagrangiano de COMSOL Multiphysics. En todo caso, se recomienda que se utilicen con precaución.

CONCLUSIONES.

- ✓ Para modelos computacionales linealmente elásticos, mientras más completo es el empaquetamiento de las muestras, menor es su respuesta a la deformación.
- ✓ Los módulos de compresibilidad obtenidos a partir de las simulaciones de pruebas hidrostáticas son constantes cuando las interacciones definidas son linealmente elásticas.
- ✓ Cuando los enlaces entre las partículas no son capaces de almacenar toda la energía de deformación suministrada, se pueden presentar efectos no deseados en los modelos que son inherentes a la formulación del método numérico y que no son explicables a partir de las pruebas físicas.
- ✓ No hay relación aparente entre la resistencia cohesiva del material y el módulo de compresibilidad en los modelos a los cuales se les efectuó una prueba de compresión hidrostática.
- ✓ Los modelos con el mismo empaquetamiento y distribución de partículas, pero menor número de partículas, requieren menor esfuerzo computacional.
- ✓ A nivel del modelo computacional, cuando no se aplica presión de confinamiento a las paredes laterales de una muestra de roca, es sensible a su ruptura de forma prematura.
- ✓ El comportamiento de los módulos de compresibilidad, módulos de Young y envolventes de falla de las muestras son un indicador de que las leyes constitutivas definidas a nivel microscópico (es decir, en las partículas y los enlaces), se manifiestan a nivel macroscópico (es decir, en el cuerpo de roca como un todo).

RECOMENDACIONES.

- ✓ Se recomienda la implementación de un algoritmo más robusto de generación aleatoria de partículas para la creación de bloques con porosidades menores al 15 – 20 %.
- ✓ Se recomienda evaluar los modelos seleccionados en este trabajo con otras leyes constitutivas de importancia en la industria del petróleo, tales como los modelos poroelástico y viscoelástico.
- ✓ Se recomienda evaluar los modelos seleccionados en este trabajo con otros criterios de cedencia de importancia en la industria del petróleo, tales los criterios de falla de Hoek-Brown y Druker- Prager.
- ✓ Se recomienda evaluar la influencia del esfuerzo intermedio en los procesos de deformación y de fractura de los modelos seleccionados en este trabajo.
- ✓ Se recomienda evaluar el método usando modelos con geometrías más complejas, que representen el estado mecánico de un pozo, ya sea éste vertical o inclinado.
- ✓ Se recomienda acoplar DEM con un método continuo para evaluar los efectos del flujo y la saturación de fluidos alrededor de la cara del pozo en la respuesta deformativa y el fracturamiento de las rocas.
- ✓ Se recomienda utilizar otra implementación del método de los elementos discretos, tales como DDA and DEM, para representar los modelos propuestos en este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Anderson E. M.** The dynamics of faulting and Dyke formation with application to Britain [Libro]. - 1951.
- Askeland Donald** Ciencia e ingeniería de los materiales [Libro]. - México : Editorial Internacional Thomson, 1998. - 3.
- Bardet J. P.** A viscoelastic model for the dynamic behavior of saturated proelastic soils [Conferencia] // Proceeding of the eighth international conference on computer methods and advances in geomechanics. - 1994.
- Bardet J. P. y Proubet J.** An adaptative relaxation technique for the statics of granular materials [Publicación periódica] // Computers and structures. - 1991. - Vol. 3. - págs. 221-229.
- Bardet J. P. y Proubet J.** Applications of micromechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media [Publicación periódica] // Powders & Grains. - [s.l.] : Baires & Gounes, 1989.
- Bastidas R. Eyberth [y otros]** Generación de un Modelo Computacional para el Cálculo del Perfil de Esfuerzos Regional Usando como base el Método de Elementos Finitos (Mef) en el Modelamiento Estructural Asociado a Migración de Fluidos [Publicación periódica] // Revista Fuentes, El reentón energético. - Bucaramanga : UIS, 2009. - 2 : Vol. 7.
- Berg M. de, Cheong, O., van Krevenld M. y Overmars M.** Computational Geometry algorithms and applications [Libro]. - [s.l.] : Springer-Verlag, 2008. - Tercera.
- Biot M. A.** Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media [Publicación periódica] // Journal of acoustic society of America. - 1962.
- Bobet Antonio** Numerical methods in geomechanics [Publicación periódica] // The Arabian Journal for Science and Engineering. - 2010. - 1B : Vol. 35.
- Bowden F. P. y Tabor D.** The friction and lubrication of solids [Libro]. - Oxford : Clarendon Press, 1985.
- Byerlee J. D.** Friction of Rock [Publicación periódica] // Pure & Applied Geophysics. - 1978. - Vol. 116. - págs. 615-626.
- Charlez Philippe A.** Rock geomechanics, theoretical fundamentals [Libro]. - [s.l.] : Editions Technip, 1991. - Vol. 1.

Colmenares L. B. y Zoback M. D. A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks [Publicación periódica] // Int. J. Rock Mech.. - 2002. - Vol. 39. - págs. 695-729.

Cundall P. A. A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock [Conference] = Paper II-8 // Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics. - Nancy : [s.n.], 1971a. - Vol. 1.

Cundall P. A. BALL - A program to model granular media using the distinct element method = BALL. - Londres : Dames and Moore Advanced Technology Group, 1978.

Cundall P. A. Formulation of a three-dimensional distinct element model - Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks [Publicación periódica] // International Journal of. - 1988. - págs. 107-116.

Cundall P. A. The measurement and analysis of acceleration in rock slopes [Informe] : Ph. D. Tesis / Imperial College of Science and Technology ; University of London. - Londres : [s.n.], 1971b.

Cundall P. A. UDEC – A generalized distinct element program for modelling jointed rock. = PCAR-1-80. - [s.l.] : Peter Cundall Associates, European Research Office, U.S. Army Corps of Engineers, 1980.

Cundall P. A. y Hart R. D. Development of generalized 2-D and 3-D distinct element programs for modelling jointed rock [Publicación periódica] // U.S. Army Corps of Engineers. - 1985.

Cundall P. A. y Hart R. D. Numerical Modelling of Discontinua [Publicación periódica] // Engineering Computations. - 1992. - págs. 117-125.

Cundall P. A. y Potyondy D. O. A bonded-particle model for rock [Publicación periódica] // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. - 2004. - Vol. 41. - págs. 1329-1364.

Cundall P. A. y Strack O. D. L. A discrete numerical method for granular assemblies [Publicación periódica] // Geotechnique. - 1979. - 2. - págs. 47-65.

Cundall P. A. y Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies [Publicación periódica] // Geotechnique. - 1979. - 1 : Vol. 29. - pág. 112.

de Berg M., Cheong O. y van Kreveland M. Computational geometry: Algorithms and Applications [Libro]. - Berlin : Springer-Verlag, 1993. - Tercera.

Delaunay B Sur la sphère vide [En la esfera vacía] [Publicación periódica] // Bulletin of Academy of Sciences of the USSR. - 1934.

ESyS-Particle ESyS-Particle. - [s.l.] : The University of Queensland, 2011.

ESyS-Particle Proyecto ESyS-Particle [En línea]. - The University of Queensland. - <https://launchpad.net/esys-particle>.

Ewy R. Wellbore-stability predictions by use of a modified Lade criterion [Publicación periódica] // SPE Drilling and Completion. - 1999. - págs. 85-91.

Fracturamiento hidráulico [En línea] // Scribd. - <http://es.scribd.com/doc/31552905/fracturamiento-hidraulico>.

Geertsma J. The effect of fluid decline on volumetric changes of porous rocks [Publicación periódica] // Petrol. Tras. AIME. - 1957. - págs. 331-340.

Gettin D. T. [y otros] Numerical comparison of a deformable discrete element model and an equivalent continuum analysis for the compaction of ductile porous materials [Publicación periódica] // Computers and Structures. - 2001. - 79. - págs. 1287-1294.

Hart R. D., Cundall P. A. y Lemos J. V. Formulation of a three-dimensional distinct element method – Part II: Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks [Publicación periódica] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts,. - 1988. - págs. 117-125.

Hoek E y Brown E. T. Practical estimates of rock strength [Publicación periódica] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. - 1997. - 8 : Vol. 34. - págs. 1165-1186.

Hoek E. y Brown E. T. Underground excavations in rock [Informe] / Institution in Mining and Metallurgy. - Londres : [s.n.], 1980.

Itasca Consulting Group Itasca: Software UDEC: Features [En línea] // Itasca Engineering Consulting and Software, Around the world. - 2012. - 2012. - www.itascacg.com/udecfeatures.html.

Itasca Consulting Group Pfc3d (particle flow code in 3d) theory and background manual, version 3.0. - 2003.

Itasca Consulting Group, Inc. [Manual] // 3DEC Manual. - 1994.

Itasca Consulting Group, Inc. 3DEC Manual [Manual]. - 1993.

Jaeger J. C., Cook N. G. W. y Zimmerman R. W. Fundamentals of rock mechanics [Libro]. - Massachusetts : Ed. Blackwell Publishing, 2007. - 4.

Jing Lanru y Stephansson Ove Fundamentals of discrete element methods for rock engineering: theory and applications [Libro]. - Ámsterdam : Elsevier, 2007.

Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre [La teoría de la elasticidad y la necesidad de resistencia de los materiales] [Publicación periódica] // Zeitschrift des Verlines Deutscher Ingenieure. - 1898. - Vol. 42.

La comunidad petrolera [En línea]. - <http://ingeniería-de-yacimientos.lacomunidadpetrolera.com>.

Lade P. Elasto-plato stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces [Publicación periódica] // International Journal of Solids and Structures. - 1977. - Vol. 13. - págs. 1019-1035.

Liebowitz H. [y otros] Computational fractured mechanics: research and applications [Publicación periódica] // Engineering fracture mechanics. - 1995. - Vol. 50. - págs. 653-670.

LIGGGHTS LIGGGHTS - Open Source DEM [En línea]. - www.liggghts.com.

Lockner D. A. Rock Failure [Publicación periódica] // Rock physics and phase relations. - Washingtons, D. C. : American Geophysical Reunion, 1995. - págs. 127-147.

McLean M. y Addis M. A. Wellbore stability: the effect of strength criteria on mud weight recommendations [Conferencia] // 65th Annual Technical Conference and Exhibitiof of the Society of Petroleum Engineerings. - Nueva Orleans : Society of Petroleum Engineers.

Mindlin R. D. y Deresiewicz. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. [Libro].

Munjiza Antonio The combined finite - discrete element method [Libro]. - [s.l.] : John Wiley & Sons, Ltd, 2004. - pág. 350.

Numerical Methods in Rock Mechanics [En línea] // Deep extraction of Earth resources. - <http://w2.civil.uwa.edu.au/DEER/Numerical%20methods%20in%20rock%20mechanics.htm>.

Nur A. y Byerly J. D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids [Publicación periódica] // J. Geophys. Res.. - 1971. - págs. 6414-6419.

Ochoa Sanchez Diana M. Generación de un modelo computacional de pozo en 3D para establecer el estado de esfuerzos y deformaciones mediante la técnica de elementos finitos [Informe] : Tesis pregrado / Escuela de Ing. de Petróleos, Facultad de Ingeniería Físico-Químicas ; Universidad Industrial de Santander. - Bucaramanga : [s.n.], 2011.

Rodríguez Ortiz J. M. Estudio del comportamiento de medios granulares heterogéneos mediante modelos discontinuos analógicos y matemáticos. [Informe] : Ph.D. Tesis / Universidad politécnica de Madrid. - 1974.

Rodríguez Ortiz J. M. y Serrano A. A. A contribution no the mechanics of heterogeneous granular media [Conferencia] // Proc. Symp. Plasticity and soil Mech.. - Cambridge : [s.n.], 1973.

Roylance D. Engineering viscoelasticity [Informe] / Department of Material Science and Engineering ; Massachusetts Institute of Technology. - Cambridge : [s.n.], 2001.

Selvaduray A. P. S. y Sepehr K. Two-dimensional discrete element simulations of ice-structure interaction. [Publicación periódica] // International Journal of Solids and Structures.. - 1999.

Shi G. Discontinuous deformation analysis. A new numerical model for the statics and dynamics of deformable block structures [Publicación periódica] // Engineering computations. - 1992. - págs. 157-168.

Shi G. y Goodman R. E. Two dimensional discontinuous deformation analysis. [Publicación periódica] // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. - 1985. - págs. 541-556.

Terzaghi K Theoretical soil mechanics [Libro]. - New York : John Wiley, 1923.

Trent B. C. y Margolin L. G. A numerical laboratory for granular solids. [Publicación periódica] // Engineering computations. - 1992. - Vol. 9. - págs. 191-197.

Tresca H. Sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions [Delflujo de cuerpos solidos sujetos a grandes presiones] [Publicación periódica] // Comp. Rend. Acad. Sci.. - Paris : [s.n.], 1864. - págs. 754-763.

UC Berkeley DDA for Windows [En línea] // SourceForge. - 2012. - Beta. - <http://sourceforge.net/projects/dda/>.

Vásquez Andrés Introducción a la geomecánica petrolera [En línea] // Youblisher. - 2011. - <http://www.youblisher.com/p/106315-Introduccion-Geomecanica/>.

Veeken C., Walters J. y et al. Use of platicity models for predicting borehole stability. [Publicación periódica] // Rock at Great Depth. - Rotterdam : Balkema, 1989. - págs. 835-844.

von Mises Richard Mechanik der festen Körper in Platisch deformablem Zustand [Mecánica de cuerpos sólidos bajo procesos de deformación plástica] [Publicación periódica] // Goett. Nachr. Math. Phys. Kl.. - 1913. - págs. 582-592.

Wei L. Numerical studies of the hydromechanical behaviour of jointed rocks [Informe] / Imperial College of Science and Technology ; University of London. - 1992.

Wei L. y Hudson J. A. A hybrid discrete - continuum approach to model hydro - mechanical behaviour of jointed rocks [Publicación periódica] // Eng. Geol.. - 1988. - Vol. 49. - págs. 317-325.

Wiebols G. A. y Cook N. G. W. An energy criterion for the strength of rocks in polyaxial compression [Publicación periódica] // Int. J. Rock. Mech.. - 1968. - Vol. 5. - págs. 529-549.

Williams J. R., Hocking G. y Mustoe G. G. W. The Theoretical Basis of the Discrete Element Method [Publicación periódica] // NUMETA 1985, Numerical Methods of Engineering, Theory and Applications. - Rotterdam : A.A. Balkema, Enero de 1985.

Yade Overview [En línea] // Yade documentation. - 2011. - <https://yade-dem.org/doc/index.html>.

Zener C. Elasticity and anelasticity of metals [Libro]. - Chicago : University of Chicago, 1948.

Zhou S. A program to model initial shape and extent of borehole breakout [Publicación periódica] // Computers and Geosciences. - 1994. - 7/8 : Vol. 20. - págs. 1143-1160.

Zienkiewicz O. C., Kelly D. W. y Bettess P. The coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures [Publicación periódica] // Int. J. Numer. Methods Eng.. - 1977. - Vol. 11. - págs. 355-375.

Zimmerman R. W. Compressibility of sandstones [Libro]. - Amsterdam : Elsevier, 1991.

Zoback Mark D. Reservoir Geomechanics [Libro]. - [s.l.] : Cambridge university press, 2007.

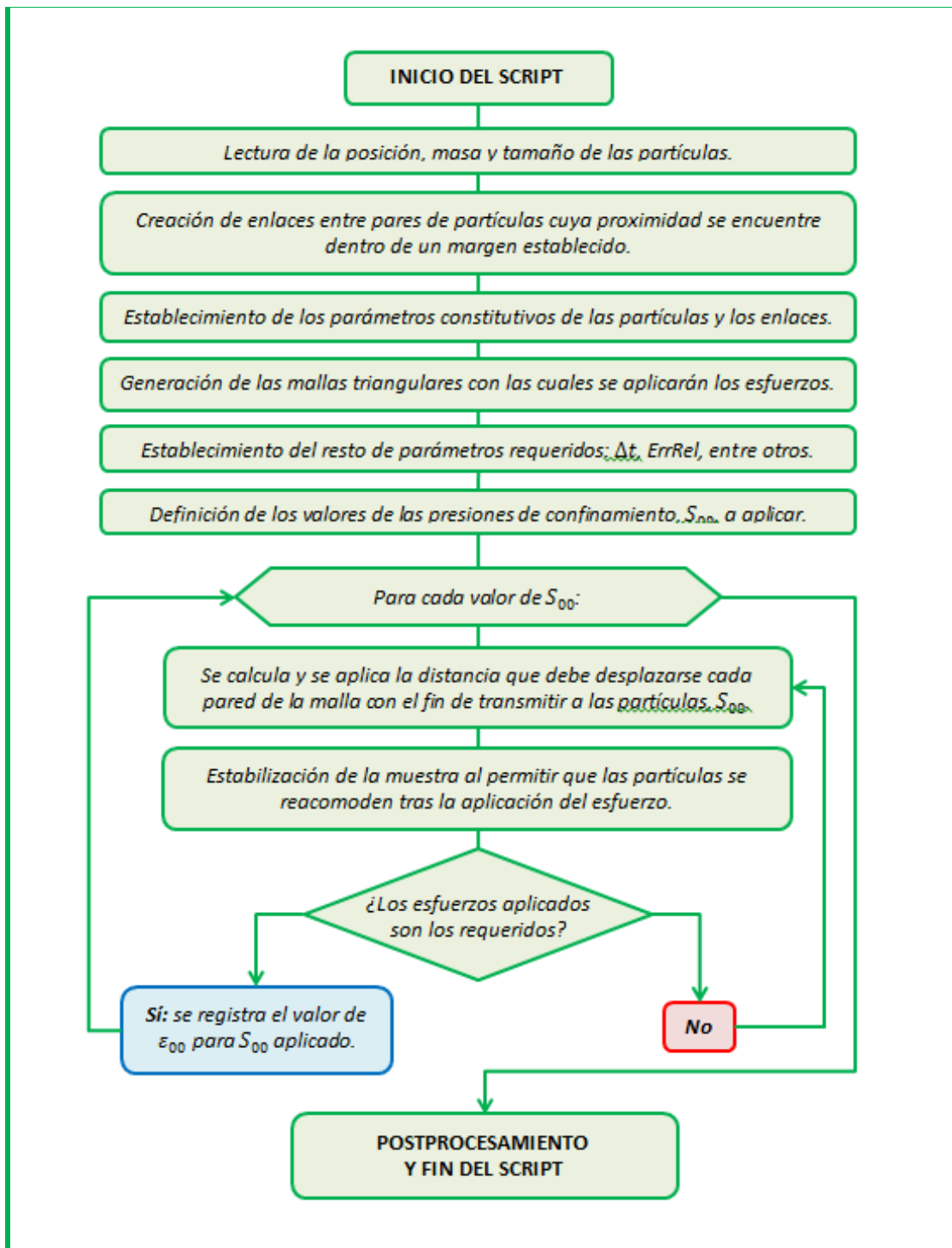
ANEXO 1: FLUJO DE TRABAJO DISEÑADO PARA LAS CORRIDAS DE SIMULACIÓN CON ESyS - Particle.

Las instrucciones necesarias para la corrida de las simulaciones por medio de ESyS – Particle son proporcionadas por medio de un script de Python (sólo versión 2.x) que tiene que ser diseñado por el usuario. Por lo tanto, el flujo de trabajo de cada una de las corridas debe ser programado en este lenguaje.

Para la generación de las partículas aleatorias, se requirió de un script programado en Python, y de métodos internos propios de ESyS – Particle. En general, el procedimiento consiste en la generación aleatoria de partículas sobre un dominio especificado, y se calcula la masa de cada elemento al establecer que la densidad de cada partícula es de 2.64 g/cm³. Para garantizar que la porosidad de la muestra no sea tan alta, las partículas se van insertando comenzando con aquellas que tienen mayor volumen a aquellas que tienen el menor.

Los experimentos realizados en este trabajo requirieron de un script diferente para cada tipo de prueba. Afortunadamente, hay muchas partes de cada script que son perfectamente reutilizables en otro, de modo que se simplifica la tarea un poco más.

En general, antes de la realización de cada experimento, se requiere seleccionar uno de los modelos disponibles generados. Después, se corre la simulación por medio de un script de Python. A continuación, se indican por medio de diagramas, el flujo de trabajo de cada uno de los scripts utilizados para las corridas de simulación.



▲ **Figura 53: Flujo de trabajo para la realización de una prueba de compresión hidrostática usando ESyS – Particle.** Tras la corrida, se obtiene el valor de la deformación volumétrica, ϵ_{00} , para cada una de las presiones de confinamiento, S_{00} , aplicadas.

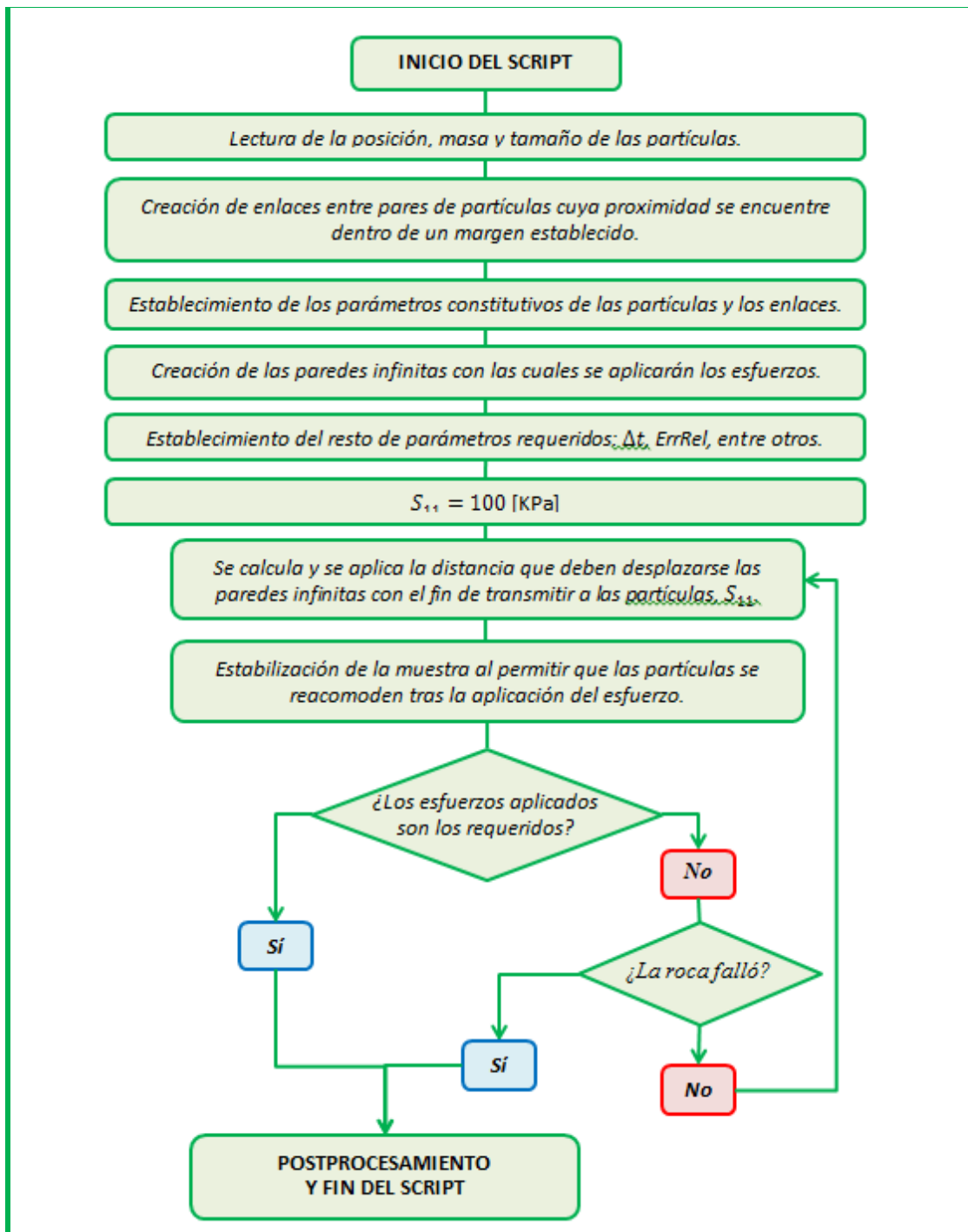
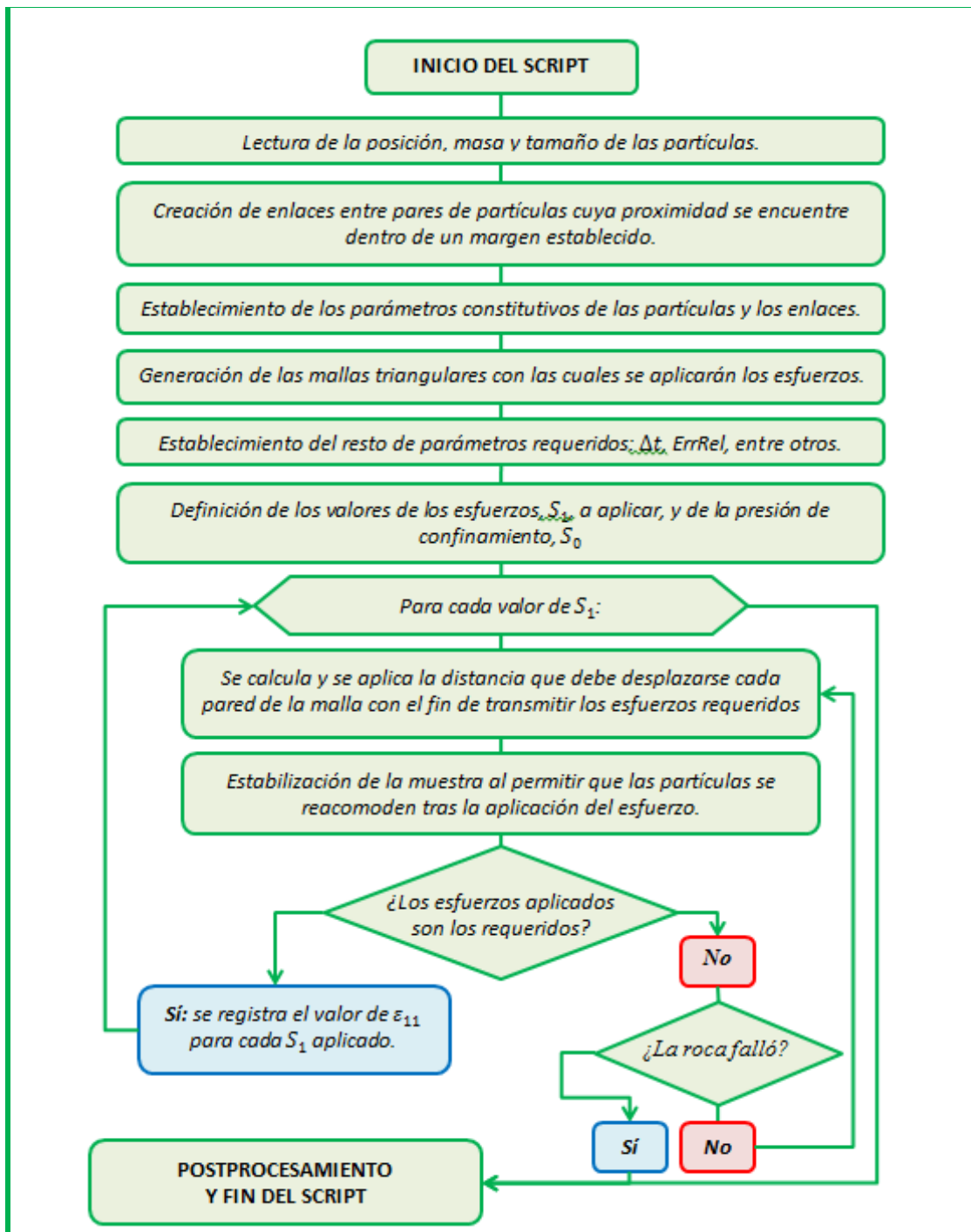


Figura 54: Flujo de trabajo para la realización de una prueba de uniaxial usando ESyS – Particle. La secuencia de imágenes generada se obtiene en tiempo real, cada cierto intervalo de pasos de tiempo.



▲ **Figura 55: Flujo de trabajo para la realización de una prueba triaxial usando ESyS – Particle.** Se requiere de una corrida por cada una de las presiones de confinamiento seleccionadas. A partir de este procedimiento, se obtiene el valor del módulo de Young y la envolvente de fractura.

ANEXO 2: INSTRUCCIONES PARA LA INSTALACIÓN DE ESyS-Particle.

En general, se recomienda que ESyS-Particle sea instalado en un sistema con Ubuntu 11.04 LTS. Sin embargo, el software se ha probado en otros SOs (sistemas operativos) basados en Unix, con resultados generalmente buenos. También se ha probado en la última versión de Ubuntu, 11.10, pero los resultados no han sido satisfactorios. Al momento de la realización de este documento, el equipo detrás del software, con la colaboración de SoilVision Systems Ltd., desarrollaba la primera versión disponible para Windows.

Para la realización de este proyecto, el SO donde se instaló ESyS-Particle es *Ubuntu 11.04 LTS* 32-bit. El SO fue a su vez instalado en un disco duro virtual de formato VHD (formato originalmente creado por Microsoft), y corrido desde Windows 7 64-bit por medio de la aplicación VirtualBox (propiedad de Oracle). ESyS-Particle también fue instalado en una Laptop con *Ubuntu 11.04 LTS* 32-bit instalado a partir de *wubi*, el instalador de Ubuntu en Windows.

La versión de ESyS-Particle que se instaló para la realización de este proyecto corresponde a la 2.0 (estable), cuyo día de lanzamiento corresponde al 09 de agosto de 2009.

Update: *se actualizó la versión 2.0 por la versión 2.1 (11 de abril de 2011). El proceso de instalación es esencialmente el mismo, pero la única diferencia es que ya no se debe modificar el archivo 'configure.ac', como se indica más abajo.*

Para instalar ESyS-Particle, las instrucciones recomendadas se citan a continuación:

1. En Ubuntu, instalar las siguientes dependencias:
 - Herramientas de desarrollo: ejecutar el siguiente comando:
sudo apt-get install libtool automake build-essential bzip2
 - Dependencias obligatorias: ejecutar el siguiente comando:
sudo apt-get install mpi-default-bin mpi-default-dev libboost1.42-all-dev povray
 - Dependencias opcionales: ejecutar el siguiente comando:
sudo apt-get install libvtk5-dev python-epydoc
2. Se descarga el comprimido que contiene al software se puede descargar en la página <https://launchpad.net/esys-particle/+download>.
3. Se descomprime el archivo recién descargado y se establece como el directorio actual de una terminal, la carpeta de nivel más superior descomprimida.
4. Se compila y se instala ESyS-Particle. Se ejecutan, paso por paso, cada una de las siguientes instrucciones:

```
sh autogen.sh  
./configure CC=mpicc CXX=mpic++  
make  
sudo make install
```

Nota: Sólo aplica para la versión 2.0. Durante la ejecución de la línea ***“./configure...”*** se suele presentar un error debido a que CPPUNIT no es obligatorio para compilar e instalar ESyS-Particle. La solución al problema es remover/comentar la siguiente línea del archivo *‘configure.ac’*, y luego de ello, seguir cada uno de los pasos nuevamente:

```
AM_PATH_CPPUNIT([1.10.0], ,[AC_MSG_ERROR([Dud CppUnit version  
found, must be >= 1.10.0.]])
```

5. Se agregan las variables de entorno siguientes (usando bash, o agregándolas al archivo '*bash.bashrc*')

```
export PATH=/usr/local/bin/:$PATH  
export LD_LIBRARY_PATH=/usr/local/lib/:$LD_LIBRARY_PATH  
export LIBRARY_PATH=/usr/local/lib/:$LIBRARY_PATH  
export PYTHONPATH=/usr/local/lib/python2.7/dist-packages/:$PYTHONPATH
```

6. Para probar si el software se ha instalado correctamente, se recomienda correr una simulación, por medio del siguiente comando:

```
mpirun -np 2 `which mpipython` nombre_del_script_a_correr.py
```

Si por alguna razón se requiere desinstalar completamente ESyS-Particle, se deben seguir los siguientes pasos:

- En consola de comandos, escribir las siguientes instrucciones:

```
cd ubicación_del_instalador_de_esys_particle  
make uninstall  
make distclean
```