

**PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS COMPLEJOS
EXCITÓNICOS EN ANILLOS CUÁNTICOS**

LUIS CARLOS PORRAS MONROY



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
DOCTORADO EN CIENCIAS NATURALES (FÍSICA)
BUCARAMANGA**

2017

**PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS COMPLEJOS
EXCITÓNICOS EN ANILLOS CUÁNTICOS**

LUIS CARLOS PORRAS MONROY

**Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al
título de Doctor en Ciencias Naturales (Física)**

Director

Doctor en Física

ILIA DAVIDOVICH MIKHAILOV

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
DOCTORADO EN CIENCIAS NATURALES (FÍSICA)
BUCARAMANGA**

2017

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

A mi tutor, el profesor Ilia Mikhailov, sabio y maestro que me enseñó las prioridades de la vida: salud, familia y trabajo.

A los profesores Harold Paredes, Francisco García y Carlos Beltrán, por su constante retroalimentación con preguntas y sugerencias durante mis participaciones en los seminarios.

A los profesores Gilmar Marques, Victor Lopez y Vivaldo Lopes de la Universidad Federal de San Carlos (UFSCar), Brasil, por su valiosa colaboración durante la pasantía.

A Colciencias y la Universidad Industrial de Santander (UIS), por la financiación de esta investigación doctoral.

A William Gutiérrez, Fredy Rodríguez, Elber Rodríguez, Diana Meneses, Carlos Rivera, Luís Cabral y demás compañeros del FICOMACO y del grupo de nano-estructuras semiconductoras de la UFSCar, por su fraternal compañía.

A mis compañeros y amigos, por compartir tiempo conmigo.

Muchas gracias.

*“Read, read, read.
Read everything — trash, classics, good and bad, and see how they do it.
Just like a carpenter who works as an apprentice and studies the master.
Read! You’ll absorb it.
Then write.
If it’s good, you’ll find out.
If it’s not, throw it out the window.”*

William Faulkner

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	17
1. ESTADO DEL ARTE.....	25
1.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	25
1.1.1 Método $k \cdot p$	25
1.2 FABRICACIÓN Y MORFOLOGÍA DE LOS ANILLOS CUÁNTICOS	31
1.2.1 Técnica de auto-ensamblado a través de crecimiento parcial de QR	31
1.2.2 Epitaxia de gotas	33
1.2.3 Litografía y grabado.....	33
1.3 EFECTO DE AHARONOV-BOHM DE LOS PORTADORES DE CARGA EN ANILLOS CUÁNTICOS UNIFORMES.....	34
1.4 EFECTO DE LA MORFOLOGÍA SOBRE LAS OSCILACIONES DE AHARONOV-BOHM.....	36
1.5 EFECTO DE AHARONOV-BOHM EN ANILLOS CON DOS O MÁS ELECTRONES	44
1.6 EFECTO DE AHARONOV-BOHM EN ANILLOS CON COMPLEJOS EXCITÓNICOS	45
2. COMPLEJOS EXCITÓNICOS EN ANILLOS CUÁNTICOS UNIFORMES.....	51
2.1 HAMILTONIANO ADIMENSIONAL.....	51
2.2 APROXIMACIÓN ADIABÁTICA PARA HETEROESTRUCTURAS TIPO VOLCÁN	53
2.3 HAMILTONIANO EN COORDENADAS DE CENTRO DE MASA.....	56
2.4 MÉTODO DE FOURIER	57
2.5 RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL ESPECTRO DEL EXCITÓN Y EL TRIÓN CARGADO POSITIVAMENTE	59

3. LOCALIZACIÓN DE ESTADOS EXCITÓNICOS PRODUCIDA POR UNA DONADORA.....	69
4. REVELACIÓN DE OSCILACIONES AHARONOV-BOHM MEDIANTE ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN DE LA DENSIDAD DE LOS ESTADOS.....	75
5. ELECTRÓN Y HUECO EN ANILLO CUÁNTICO NO-UNIFORME DE InAs	92
5.1 ELECTRÓN EN ANILLO CUÁNTICO UNIFORME EN BANDA DE CONDUCCIÓN PARABÓLICA	92
5.2 HAMILTONIANO DE LUTTINGER PARA EL HUECO EN ANILLO CUÁNTICO	95
5.3 ELECTRÓN Y HUECO EN ANILLO CUÁNTICO DE <i>InAs</i> UNIFORME.....	97
5.4 ELECTRÓN Y HUECO EN ANILLO CUÁNTICO NO UNIFORME.....	100
5.4.1 Anillo cuántico con una colina radial.....	101
5.4.2 Anillos cuánticos no-uniformes con varias colinas radiales	103
6. CONCLUSIONES	107
REFERENCIAS	110
BIBLIOGRAFÍA	119

LISTA DE FIGURAS

pág.

- Fig. 1** Representación esquemática de la estructura de bandas de un semiconductor de *gap* directo en las proximidades del punto Γ de la zona de Brillouin.....28
- Fig. 2** Imagen AFM de un QR, el perfil de altura (línea punteada) correspondiente y la concentración de In (línea roja sólida).....35
- Fig. 3** Energías de dos bandas inferiores de un electrón confinado en anillos cuánticos con diferentes radios del hueco central ρ_a , en función del campo magnético. El grosor máximo es 2nm, el radio exterior es 20nm en todos los casos. La sección transversal de *QRs* es triangular en fila superior y la rectangular en la fila inferior.....37
- Fig. 4** Energías en función del campo magnético en un anillo cuántico no uniforme con una colina.....40
- Fig. 5** Energías en función de la intensidad del campo magnético en anillo cuántico no uniforme con cuatro y ocho colinas.....42
- Fig. 6** Energías más bajas del *e* en un *QR* con $R_c = 10.0 a_0^*$ en función del campo magnético para dos diferentes posiciones de la donadora: (a) $\beta = 0.5$ y (b) $\beta = 1.0$ 43
- Fig. 7** En la parte inferior se muestra un esquema de un excitón (X) confinado en un *QR* - 1D, de radio unitario, con campo magnético aplicado. En la parte superior, el potencial de Coulomb entre los portadores de carga.....46

Fig. 8 Esquema de un trión X^+ confinado en un QR	51
Fig. 9 (a) Modelo simplificado de la sección transversal de un QR tipo volcán a lo largo del eje X (b) el potencial de confinamiento correspondiente para un movimiento en el plano transversal y la densidad de probabilidad de encontrar una partícula a lo largo del eje X en el nivel inferior de energía.....	54
Fig. 10 Dependencia de los niveles inferiores de energía en función del campo magnético, en el lado izquierdo el excitón, y en el derecho el trión, en QRs con radios $R_c = 2a_0^*$ en la fila superior y $R_c = 5a_0^*$ en la parte inferior. La línea punteada muestra la dependencia angular del potencial de atracción entre el electrón y el hueco, asumiendo, en el caso del trión, los huecos en posiciones opuestas diametralmente.....	60
Fig. 11 Algunos niveles inferiores de energía del trión en QRs con radios $R_c = 5a_0^*$ son mostrados en alta resolución con el fin de ilustrar cómo las trenzas no se entrecruzan en la parte inferior del espectro, correspondientes a los estados simétricos y antisimétricos que luego se convierten en una serie de líneas con múltiples entrecruzamientos y reordenamientos en la parte superior del espectro, pertenecientes a estados rotacionales...62	62
Fig. 12 Energías renormalizadas de los niveles inferiores del excitón y el trión en función del radio.....	63
Fig. 13 Niveles inferiores de energía del trión en función del radio del QR	65
Fig. 14 Niveles inferiores de energía de excitones cargados positivamente en función del campo magnético, para dos valores de razón de masas entre el electrón y el hueco.....	67

Fig. 15 Densidad de estados del excitón neutro, de hueco pesado (lado izquierdo) y de hueco ligero (lado derecho), confinados en QRs con parámetros indicados en la figura. Las líneas sólidas corresponden al excitón libre y las líneas punteadas al excitón ligado a la donadora.....	70
Fig. 16 Niveles inferiores de energía del excitón neutro de hueco pesado en función del campo magnético en un QR , (a) libre y (b) ligado a una donadora.....	72
Fig. 17 Niveles inferiores de energía del excitón neutro de hueco ligero en función del campo magnético aplicado, en un QR (a), y ligado a una impureza donadora (b).....	74
Fig. 18 En la fila superior se muestran los niveles más bajos de energía del movimiento relativo en función del campo magnético externo aplicado para el excitón neutro de hueco pesado en un QR con espesor $h = 6\text{nm}$, ancho $w = 6\text{nm}$, y dos radios diferentes (a) 20nm (b) 60nm . La dependencia de los momentos angulares, del movimiento relativo, con el campo magnético se muestra en la fila inferior.....	77
Fig. 19 Similar a la fig. 18, sin embargo, fueron incluidos diez valores diferentes del momento angular M de centro de masa.....	79
Fig. 20 Densidad de estados del excitón de hueco pesado confinado en QRs de altura $h = 6\text{nm}$, ancho $w = 6\text{nm}$ para dos diferentes radios $R_c = 20\text{nm}$ y $R_c = 60\text{nm}$, y cinco valores diferentes campo magnético externo. Las líneas punteadas son las guías para el ojo, en orden a seguir la evolución de la posición de los picos.....	81
Fig. 21 Energías del excitón de hueco ligero para QRs con línea de radio central $R_c = 20\text{nm}$ (en la fila superior) y $R_c = 60\text{nm}$ (en la fila inferior) en función del campo magnético externo. En la columna izquierda se presentan los resultados sólo para movimiento rotacional relativo, y, en la columna derecha las energías rotacionales tanto	

relativas como de centro de masa, en total se incluyen diez valores de momento angular de centro de masa M 83

Fig. 22 Densidad de estados del excitón de hueco ligero confinado en QRs con altura $h = 6\text{nm}$, ancho $w = 6\text{nm}$ y línea de radio central $R_c = 20\text{nm}$ y $R_c = 60\text{nm}$, para cinco valores diferentes de campo magnético externo. Las líneas a trazos son guías para el ojo en orden a seguir la evolución de los picos correspondientes a estados con momento angular de centro de masa igual a cero ($M = 0$)84

Fig. 23 Dependencia de la energía del trión de huecos pesados en función del campo magnético externo en QRs delgados ($h = 6\text{nm}$, $w = 6\text{nm}$) para dos líneas de radio central diferentes 20 y 60nm.....86

Fig. 24 Energía de los triones, en combinaciones de hueco pesado o ligero, confinados en QRs con radios $R_c = 10\text{nm}$ (en el lado izquierdo) y $R_c = 40\text{nm}$ (en el lado derecho) y dimensiones transversales $h = 6\text{nm}$, $w = 6\text{nm}$, en función del campo magnético externo..88

Fig. 25 Densidad de estados de los triones de hueco pesado y ligero confinados en QRs de altura $h = 4\text{nm}$, ancho $w = 4\text{nm}$ y dos radios $R_c = 10\text{nm}$ y $R_c = 60\text{nm}$, para cuatro y seis valores diferentes de campo magnético externo, respectivamente. Las líneas a trazos son guías para el ojo, en orden a seguir la evolución de la posición de los picos respecto a B ...90

Fig. 26 Potencial de confinamiento y perfil del QR en la dirección radial.....93

Fig. 27 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un anillo cuántico uniforme en función del campo magnético.....99

Fig. 28 Imagen esquemática de anillos cuánticos con defectos locales en forma de una colina direccionada radialmente (izquierda) y un valle (derecha) que generan las perturbaciones negativa y positiva, respectivamente.....	101
Fig. 29 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un QR no uniforme, con una deformación local atractiva, en función del campo magnético.....	102
Fig. 30 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un anillo cuántico no uniforme, con tres deformaciones locales equidistantes atractivas, en función del campo magnético.....	104
Fig. 31 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en anillo cuántico no uniforme, con tres deformaciones locales atractivas y cercanas las unas a las otras, en función del campo magnético.....	105

RESUMEN

TÍTULO: PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS COMPLEJOS EXCITÓNICOS EN ANILLOS CUÁNTICOS*

AUTOR: LUIS CARLOS PORRAS MONROY**

PALABRAS CLAVE: ANILLOS CUÁNTICOS, EFECTO AHARONOV-BOHM, EXCITÓN, APROXIMACIÓN DE MASA EFECTIVA, APROXIMACIÓN ADIABÁTICA, DENSIDAD DE ESTADOS.

DESCRIPCIÓN:

En esta tesis doctoral se investigan teóricamente el espectro energético y la densidad de los estados de complejos excitónicos neutros y cargados eléctricamente confinados en anillos cuánticos en presencia de un campo magnético externo aplicado a lo largo del eje de simetría.

Se hace un estudio cualitativo de los efectos relacionados con la presencia de impurezas y la morfología del anillo cuántico usando las aproximaciones de masa efectiva y adiabática, y el método de expansión en series de Fourier. Un análisis comparativo de los espectros energéticos de los complejos excitónicos muestra la importancia de las corrientes túnel sobre la deslocalización del movimiento relativo de los portadores de carga, su influencia sobre el apagamiento y la restauración de las oscilaciones Aharonov-Bohm en anillos uniformes.

El efecto de la presencia de una donadora sobre la densidad de los estados en el espectro energético de un magneto-excitón muestra que la donadora produce un notable corrimiento al rojo de los picos correspondientes al estado base y los primeros estados excitados.

Se analiza el efecto de la mezcla de las bandas de valencia sobre las oscilaciones de Aharonov-Bohm de los niveles energéticos del electrón y del hueco en anillos no-uniformes, realizado en el marco del modelo de Luttinger. Se encuentra una disminución de las oscilaciones de Aharonov-Bohm y la formación de corrientes túnel en la presencia de no-uniformidades singulares y múltiples. Se muestra que las corrientes túnel pueden facilitar las oscilaciones siempre y cuando las deformaciones están distribuidas de manera equidistante dentro del anillo cuántico. En el caso contrario, cuando las deformaciones están agrupadas, se observa una extinción de las oscilaciones en el espectro de absorción para los niveles inferiores de energía.

* Trabajo de investigación de Doctorado en Ciencias Naturales (Física).

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Ilia Davidovich Mikhailov, Doctor en Física.

ABSTRACT

TITLE: SPECTRAL PROPERTIES OF EXCITON COMPLEXES IN QUANTUM RINGS[^]

AUTHOR: LUIS CARLOS PORRAS MONROY^{^^}

KEYWORDS: QUANTUM RINGS, AHARONOV-BOHM EFFECT, EXCITON, EFFECTIVE-MASS APPROXIMATION, ADIABATIC APPROXIMATION, DENSITY OF STATES.

DESCRIPTION:

This thesis is devoted to study the energy spectrum and the density of states of exciton complexes confined in quantum rings in the presence of the external magnetic field applied along the axis of symmetry.

A qualitative analysis of the influence of impurities and the variation of the morphology of the quantum ring on its spectral properties is carried out by using the effective-mass and adiabatic approximations, and the numerical procedure is based on Fourier series expansion method. A comparative analysis of the energy spectra of the exciton complexes reveals the important role of the tunnel current generated by the charge carriers in its relative movement, in the quenching and the restoring of the Aharonov-Bohm oscillations in uniform rings.

The study of the effect of the donor on the density of the energy states of a magneto-exciton demonstrates that the donor produces a remarkable redshift of the peaks corresponding to the ground and the first excited states. The corresponding analysis of the Aharonov-Bohm oscillations reveals that this effect is due the symmetry breaking induced by the impurity that provides a decrease of the relative electron-to-hole rotation energy. In addition, it results in a significant decrease of the amplitudes of Aharonov-Bohm oscillations of lower levels.

The effect of valence bands mixing on Aharonov-Bohm oscillations of the energy levels of the electron and the hole in non-uniform rings is analyzed in the framework of the Luttinger model. We find a decrease of the amplitude of the Aharonov-Bohm oscillations and the existence of tunnel currents through potential barriers induced by single and multiple non-uniformities. The tunnel currents can promote oscillations as long as the deformations are segregated along the quantum ring. On the contrary, clustered deformations remove oscillations in the absorption spectrum for the lower levels of energy.

[^] PhD research in Natural Sciences (Physics).

^{^^} Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Advisor: PhD Ilia Davidovich Mikhailov.

INTRODUCCIÓN

El rápido y notable progreso logrado en los últimos años en la fabricación controlada de nano-estructuras semiconductoras abre nuevas perspectivas en lo que se refiere a la posibilidad de miniaturizar los dispositivos micro- y opto-electrónicos. Estas nano-estructuras ubicadas sobre una superficie de material semiconductor forman unas trampas poco profundas para los portadores de carga facilitando la creación de unos complejos moleculares en la base de electrones y huecos. El estudio teórico de estos complejos es una condición indispensable para diseñar nuevos dispositivos de tamaño nanométrico, y de esta manera al tener dimensiones características comparables con la longitud de onda De Broglie asociada a los portadores de carga confinados en su interior; donde el comportamiento de los electrones y huecos al interior de estas nano-estructuras está determinado en el marco de mecánica cuántica [1,2]. En este sentido, las nano-estructuras semiconductoras ofrecen nuevas posibilidades de exhibir propiedades optoelectrónicas de los semiconductores a través de la variación de su dimensionalidad y su forma. Entre los sistemas semiconductores nanométricos que se fabrican actualmente, tenemos los pozos cuánticos (*QW-Quantum Well*) [3] que son sistemas cuasi-bidimensionales, los hilos cuánticos (*QWW-Quantum Well Wire*) que son sistemas cuasi-unidimensionales [4] y la situación extrema, las estructuras cuasi cero dimensionales denominadas puntos cuánticos (*QDs-Quantum Dots*) [5].

Entre los puntos cuánticos, los investigadores encuentran especial interés en los anillos cuánticos, los cuales se relacionan con aplicaciones prácticas en nuevos campos de la nanotecnología. Uno de los usos potenciales más interesantes de los anillos cuánticos son los diodos emisores de luz (*LED*), en lectores de *CD*, de códigos de barras y demás. Si estas posibles creaciones se lograran hacer, sería revolucionario y podría ser comparado con la invención original de Thomas Edison de la bombilla.

Además, los puntos cuánticos en general, y los anillos en particular, también se están explorando para su posible uso en el futuro, por ejemplo, en la computación cuántica donde un par de los estados de tipo “*bonding*” y “*anti-bonding*” enredados bajo la influencia de fuerzas externas (eléctricas, magnéticas o elásticas) podrían servir como un *qubit* de una celda de memoria de tamaño nanométrico. Los estados enredados pueden formarse dentro un punto cuántico al capturar los portadores de cargas con diferentes signos creándose así excitones X, triones X^+ ó X^- , biexcitones XX, etc. De esta manera, los puntos cuánticos pueden servir como celdas de memoria de tamaño nanométrico con la propiedad de ser un material ferroeléctrico, piezoeléctrico o ferromagnético [6].

Uno de los principales atractivos los *QDs* radica en su amplia diversidad de morfologías que pueden presentar al modificar algunos factores durante el proceso de crecimiento resultando en *QDs* que presentan formas que se asemejan a pirámides, lentes, discos o anillos. Estos puntos cuánticos tienen la capacidad de confinar en su interior sistemas fermiónicos de pocas partículas que interactúan mutuamente a sólo algunos nanómetros de distancia, formando una estructura electrónica similar a la de un átomo. Esta posibilidad es de gran importancia para formar unos complejos catalogados como “átomos artificiales”.

La posibilidad de conversión de un excitón neutro (X) en un trión (X^+) o (X^-) al interior de un semiconductor en bloque a través de la captura de un hueco o un electrón adicional, entregado por una impureza aceptadora o donadora, fue mencionada por Lampert hace más de 50 años [7]. Como la energía de enlace de un excitón o de un trión en un semiconductor en bloque es solo del orden de varios mili-electrón-voltios (meV), entonces estos complejos excitónicos se encuentran en un estado metastable y se pueden observar sólo a bajas temperaturas. Sin embargo, si los portadores de carga son confinados dentro de una estructura de baja dimensionalidad, por ejemplo, dentro de un pozo, hilo o punto cuántico, sus energías de enlace se incrementan considerablemente y los estados ligados serán más

estables, facilitando de esta manera la formación de complejos excitónicos en estas heteroestructuras [8–10]. Por lo tanto, a mayor confinamiento, mayor será la energía de enlace del complejo excitónico. En los puntos cuánticos donde el confinamiento es el más fuerte, los complejos excitónicos son más estables respecto a los otros tipos de nanoestructuras. Un gran número de estudios teóricos y experimentales sobre complejos excitónicos, neutros y cargados positiva y negativamente confinados en puntos cuánticos han sido desarrollados recientemente [11].

La motivación principal de los investigadores para estudiar los complejos excitónicos está relacionada con la posibilidad de controlar los estados excitados individuales en puntos cuánticos como un prerequisite indispensable para abrir una nueva posibilidad para almacenar la información cuántica en semiconductores, en el cual, los complejos excitónicos son considerados estados intermedios.

Algunas de las propiedades fundamentales de los anillos cuánticos pueden ser entendidas a partir de un modelo simple de un único electrón o un hueco confinados en una estructura estrictamente uni- o bidimensionales y de forma circular. Estos modelos, que permiten hallar las soluciones exactas a los problemas de una partícula, sirven como la base para analizar luego efectos de no-uniformidad y espectros de estructuras tridimensionales teniendo en cuenta el perfil real de los anillos cuánticos en el marco de la aproximación adiabática [12]. Por el contrario, el problema de sistemas de muchas partículas fermiónicas o bosónicas en un espacio unidimensional es sorprendentemente más complicado debido principalmente a los efectos cuánticos relacionados con la disminución de la dimensión del espacio [13]. Todo esto transforma a los anillos cuánticos desde el punto de vista de Física Cuántica en un objeto de un laboratorio experimental que permite verificar la eficiencia de las diferentes técnicas teóricas elaboradas para el estudio de los sistemas de pocas y muchas partículas confinadas en un espacio restringido.

La fabricación actual de anillos cuánticos (*quantum rings QRs*) de tamaño nanométrico, en especial bien definidos usando litografía, ha generado gran interés en el efecto Aharonov-Bohm (AB) que se manifiesta como una oscilación periódica de los niveles de energía de los complejos excitónicos confinados en nano-estructuras no simplemente conexas en forma de anillo en presencia de un campo magnético aplicado perpendicular al plano de la heteroestructura [11,14]. La posibilidad de observar el efecto AB para excitones neutros en *QRs* fue demostrada teóricamente por primera vez por Chaplik [15,16] y se ha confirmado después en los estudios experimentales y teóricos [8–10,14,17–27]. Las oscilaciones AB de los niveles de energía en los complejos neutros fueron atribuidas al tunelamiento del electrón y del hueco en su movimiento relativo a través de las barreras de potencial Coulombiano [15,16]. En contraste al excitón neutro, los complejos excitónicos X^+ o X^- tienen momentos magnéticos propios y el efecto AB para estos complejos confinados en *QRs* es más pronunciado y por lo tanto ha sido detectado por experimentos ópticos [14] y mediciones indirectas de transporte [21].

El análisis teórico de las oscilaciones AB muestra que el periodo de las oscilaciones en un anillo circular tiene una correlación directa con el tamaño del *QR*, en total acuerdo con la dependencia encontrada experimentalmente en el espectro de emisión de excitones cargados [14]. Los diferentes aspectos de la geometría de los anillos cuánticos que pueden afectar las oscilaciones AB han sido analizados recientemente. Particularmente, se ha establecido que el incremento del ancho del *QR* produce un decremento de las amplitudes de las oscilaciones AB [28,29]. Sin embargo, la amplitud de las oscilaciones AB permanece finita, incluyendo, cuando la razón radio-al-ancho es más pequeña que la unidad [29]. Por el contrario, la presencia de algún tipo de no uniformidad [30,31] en un *QR* circular produce una extinción de las oscilaciones AB de un número significativo de niveles inferiores de energía. Adicionalmente, el estudio de las propiedades de los complejos excitónicos confinados en un anillo cuántico debe tomar en cuenta detalles de la morfología real. Típicamente los *QRs* tienen una morfología tipo volcán, con una altura muy pequeña

comparada con el radio de la línea central. No obstante, como se mostró recientemente [32], el camino de los portadores de carga en tales nano-estructuras irá a través de una región circular cuasi-uni-dimensional a lo largo de la cima del cráter debido a la existencia de un mínimo de energía profundo en el potencial de confinamiento que es la región de máxima altura [32].

La localización de cualquier portador de carga que compone el complejo excitónico, en una región no-uniforme, proveerá del mismo modo una extinción de las oscilaciones AB debido a la conversión de un excitón móvil en uno localizado. A mayor masa efectiva del portador de carga, entonces, será más fácil su localización y será mayor la probabilidad de una modificación en el espectro del complejo excitónico. Por lo tanto, el espectro de energía de los complejos excitónicos confinados en un anillo cuántico no-uniforme es muy sensible a la variación de la razón de masas entre el electrón y el hueco. Particularmente, cuando la razón de masas entre el electrón y el hueco tiende a cero, el modelo matemático de los complejos excitónicos X , X^- y X^+ se convierte en aquellos complejos como: la donadora neutra D_0 , la donadora cargada negativamente D^- y el complejo de dos donadoras ionizadas D_2^+ , respectivamente. Como se ha demostrado recientemente en la ref. [33,34], para complejos con donadoras confinados en QR , el análisis del espectro energético es más sencillo y la interpretación de los resultados es más transparente que sus respectivos complejos excitónicos. Una parte de este trabajo se dedica al análisis del efecto AB para complejos excitónicos confinados en un QR tipo I, para este tipo de QR los portadores de carga se encuentran en la misma región de un material dado. Se usan luego diferentes valores de la razón de masas entre el electrón y el hueco, y así se compara este fenómeno con uno similar encontrado previamente para QRs con donadoras D_0 y D_2^+ [33,34], estableciendo una analogía con los complejos excitónicos formados por el hueco pesado o el hueco ligero.

La aproximación de masa efectiva, en la cual el electrón y el hueco se consideran como partículas que se propagan de manera independiente en las bandas de conducción y de valencia respectivamente, tiene sus limitaciones. En una teoría más sofisticada, los niveles de energía y las funciones de onda de los estados enlazados de electrones y huecos se calculan utilizando el modelo $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ de ocho bandas. Los estados de los electrones en este modelo están formados predominantemente por la banda de conducción (~95%). Sin embargo, los espectros de los huecos son más complejos, ya que ellos están formados por una mezcla de cuatro bandas y se describen mediante de un Hamiltoniano de Luttinger en forma de una matriz [35].

Los resultados de esta tesis doctoral fueron publicados en las revistas internacionales y nacionales, y fueron presentados en la forma de ponencias en congresos internacionales y nacionales listados a continuación.

Lista de publicaciones:

1. **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Neutral and positively charged excitons in quantum ring*". Physica E **53**, 41 (2013)
2. **L. Porras**, "*Density of energy states of exciton complexes confined in quantum ring*". Noos, centro de publicaciones de la Universidad Nacional de Colombia – Manizales **1**, 19 (2013)
3. **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Exciton complexes in impurity doped quantum ring*". Journal of physics: conference series (IOP) **466**, 012026 (2013)
4. W. Gutierrez, **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Heavy- and light-hole magneto-excitons bound to donor in quantum ring*". Physica E **63**, 211 (2014)
5. **L. Porras**, F. Rodriguez, I. Mikhailov, "*Neutral and positively charged excitons in narrow quantum ring*". AIP Conference Proceedings **1598**, 99 (2014)
6. W. Gutierrez, **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Magnetoexciton complexes in nanorings: apparent oscillations of Aharonov Bohm*". Physica Scripta **90**, 055804 (2015)

Lista de ponencias presentadas en eventos académicos internacionales y nacionales:

1. **L. Porras**, F. Rodriguez, I. Mikhailov, "*Neutral and positively charged magnetic exciton in narrow quantum ring*". LDSD 2011, 7th *International conference on low dimensional structures and devices*. Telchac, Nuevo Yucatán, México. Mayo 22-27 de 2011.
2. **L. Porras**, "*Density of energy states of exciton complexes confined in narrow quantum ring*". ENFMC-2012, X Escuela nacional de física de la materia condensada. Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, Colombia. Octubre 10-12 de 2012.
3. **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Exciton complexes in impurity doped quantum ring*". Segundo encuentro internacional de investigadores en materiales y tecnología del plasma. UPB – UIS, Bucaramanga, Colombia. Febrero 27 – marzo 02 de 2013.
4. **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Persistent currents in distorted quantum rings with captured exciton*". 14 *International conference on physics of light-matter coupling in nanostructures*. Hersonissos, Creta, Grecia. Mayo 27-31 de 2013.
5. W. Gutierrez, **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Heavy- and light-hole magneto-exciton complexes in nanorings*". OECS13, 13th *International conference on optics of excitons in confined systems*. Roma, Italia. Septiembre 9-13 de 2013.
6. **L. Porras**, W. Gutierrez, I. Mikhailov, "*Excitons bound to donor in quantum ring*". 21st SLAFES, 21st *Latin american symposium on solid state physics*. Villa de Leyva, Colombia. Septiembre 30 – Octubre 4 de 2013.
7. **L. Porras**, W. Gutierrez, I. Mikhailov, "*Magneto-exciton and biexciton in a narrow quantum ring*". ICPS 2014, 32nd *International conference on the physics of semiconductors*. Austin, TX, Estados Unidos. Agosto 10-15 de 2014.
8. **L. Porras**, I. Mikhailov, "*Magnetoexciton in nanoring of non-uniform thickness*". *Collective electronic excitations in two-dimensional systems*. Scuola Normale di Pisa, Italia. Septiembre 20-24 de 2015.

Pasantía de investigación:

1. **L. Porras**, V. Lopes-Oliveira, V. Lopez-Richard, G. E. Marques, I. Mikhailov, Magneto-excitón en un anillo cuántico no-uniforme de InAs. Universidad Federal de San Carlos, SP, Brasil. 1 de marzo de 2016 – 31 de agosto de 2016.

1. ESTADO DEL ARTE

A continuación se presenta una revisión bibliográfica sobre el efecto de Aharonov-Bohm (AB) [36] en nanoestructuras semiconductoras con geometría anular, donde se comparan diferentes métodos teóricos junto con las aproximaciones usadas para analizar las propiedades espectrales y magnéticas de electrones y complejos excitónicos confinados en estas estructuras tanto uniformes como no-uniformes.

1.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Se expone una breve descripción del marco teórico donde se inscriben los modelos desarrollados e implementados en el presente trabajo de investigación doctoral. Se omite entrar en detalles que se encuentran en los libros y artículos de referencia, y se posponen a capítulos posteriores aquellos otros a los que se ha contribuido.

Presentamos en primer lugar los fundamentos físicos del método $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$. Luego se considera la aproximación de una banda, también conocida como aproximación de masa efectiva, para describir los electrones de conducción, y usada también en los primeros capítulos para los huecos en la banda de valencia. Finalmente se introduce un refinamiento al modelo, con una descripción de la cima de la banda de valencia, empleando el Hamiltoniano de Luttinger [35] que considera las masas efectivas de los huecos dependientes de la energía, lo que permite incorporar el efecto del acople entre las bandas del hueco ligero y el hueco pesado.

1.1.1 Método $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ [37]. El método $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ parte del Hamiltoniano de un electrón en un cristal, este se escribe como,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{cr}(\mathbf{r}) - E \right] \Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.1)$$

Donde $V_{cr}(\mathbf{r})$ es un potencial periódico, $V_{cr}(\mathbf{r}) = V_{cr}(\mathbf{r} + \sum_i n_i \mathbf{a}_i)$. El Hamiltoniano (1.1) presenta por lo tanto simetría de traslación, de manera que conmuta con el operador de traslación \hat{T} , $[\hat{T}, \hat{H}] = 0$. El método $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ hace uso de las funciones propias del Hamiltoniano adaptadas a la simetría de traslación del problema, $\Phi_k(\mathbf{r})$, de modo que,

$$\hat{T}\Phi_k(\mathbf{r}) = \Phi_k(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = t\Phi_k(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

El auto-valor $t = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})$ es el carácter de las representaciones irreducibles unidimensionales del grupo de translaciones, \mathbf{d} es un vector de la red cristalina, y \mathbf{k} el denominado *vector de onda*, que etiqueta la representación irreducible y determina la posición de la partícula en el espacio recíproco del cristal. Por ser $\Phi_k(\mathbf{r})$ función propia del Hamiltoniano (1.1), presenta también números cuánticos no asociados a propiedades de traslación, de modo que se puede escribir Φ_{nk} , donde n representa los mencionados números cuánticos.

El *teorema de Bloch* permite escribir la función de onda electrónica de un cristal infinito como producto de una función periódica $u_{nk}(\mathbf{r})$ definida en la celda unitaria del cristal, denominada *función de Bloch*, por una *función envolvente* $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ que varía lentamente a lo largo de la estructura:

$$\Phi_{nk}(\mathbf{r}) = N \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) u_{nk}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

Siendo $u_{nk}(\mathbf{r} + \sum_i n_i \mathbf{a}_i) = u_{nk}(\mathbf{r})$. La función de onda electrónica queda descrita por una onda plana $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ modulada en la celda unitaria por una función $u_{nk}(\mathbf{r})$ que describe las perturbaciones que la red introduce en el movimiento de los electrones libres en el cristal.

Sustituyendo Φ_{nk} en la ecuación de auto-valores (1.1) y multiplicando enseguida por $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ se obtiene:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{cr}(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar}{m}\mathbf{k}\cdot\mathbf{p} - E_{nk} \right] u_{nk}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.4)$$

Donde $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$. El hamiltoniano (1.4) se conoce como *Hamiltoniano $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$* , \hat{H}_{kp} , y describe la función de onda de un electrón libre en un cristal tridimensional infinito. Sus soluciones para $k=0$ constituyen un conjunto completo de funciones u_{n0} , $n=1,2,\dots,\infty$, que permiten escribir cualquier función u_{nk} , $k \neq 0$, en términos de esta base:

$$u_{nk}(\mathbf{r}) = \sum_{n'}^{\infty} c_{nn'} u_{n'0}(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

La selección de un k de referencia es arbitraria, sin embargo, $k=0$ representa el centro de la zona de Brillouin, que es la región de mayor interés para el estudio de propiedades ópticas y electrónicas en semiconductores de *gap* directo.

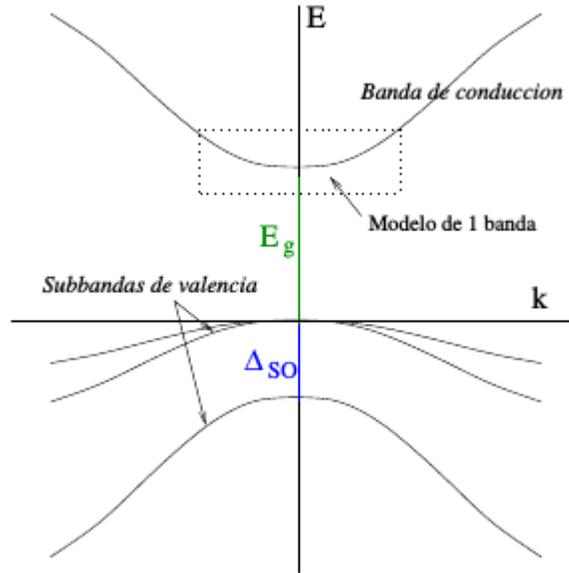
El elemento de matriz arbitrario $\langle u_{n0} | \hat{H}_{kp} | u_{n'0} \rangle$ del Hamiltoniano $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ en la base u_{n0} resulta

$$\langle u_{n0} | \hat{H}_{kp} | u_{n'0} \rangle = \left[E_{n'0} + \frac{k^2}{2m} \right] \delta_{nn'} + \frac{1}{m} \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_{nn'} = 0. \quad (1.6)$$

En el cual, $\mathbf{P}_{nn'} = \langle u_{n0} | \mathbf{p} | u_{n'0} \rangle$ es el denominado *parámetro de Kane*, que se determina empíricamente para cada material.

En los denominados semiconductores de *gap* directo, la diagonalización del Hamiltoniano $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ proporciona una distribución de niveles energéticos en los alrededores del centro de la zona de Brillouin (punto Γ , $k=0$), similar a aquella mostrada en la figura 1.

Fig. 1 Representación esquemática de la estructura de bandas de un semiconductor de gap directo en las proximidades del punto Γ de la zona de Brillouin. Tomado de la referencia [37].



Dicha distribución muestra una división en las bandas de energía (etiquetadas por el número cuántico n), entre las cuales aparecen regiones de energía prohibida (*gaps*) inducidas por el potencial periódico de la red. La banda de conducción (BC) está separada de la banda de valencia por la energía de gap E_g . Cuando E_g es grande, la BC no se acopla con la banda de valencia (BV), y la descripción de los electrones de conducción poco excitados se puede aproximar a un Hamiltoniano $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ de una banda [38].

1.1.1.1 Aproximación de una banda. Masa efectiva [37]. El método $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ más simple es aquel en que tomamos un solo elemento de la base infinita $\{u_{n0}\}$. En estas condiciones, la matriz que representa \hat{H}_{kp} en la base $\{u_{n0}\}$ se reduce a una matriz 1×1 :

$$\langle u_{n0} | \hat{H}_{kp} | u_{n0} \rangle = E_{n0} + \frac{k^2}{2m}. \quad (1.7)$$

Debido a que $\langle u_{n0} | \mathbf{p} | u_{n0} \rangle = 0$ por poseer simetría impar el momento. Este modelo, conocido como *modelo de una banda*, se mejora mediante teoría de perturbaciones. Si realizamos la siguiente partición del Hamiltoniano,

$$\hat{H}_{kp} = \hat{H}_0 + \hat{H}' = \hat{H}_0 + \frac{k^2}{2m} + \frac{1}{m} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}. \quad (1.8)$$

Se puede escribir E_{nk} hasta segundo orden de perturbación como

$$E_{nk} = E_{n0} + \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{k_\alpha^2}{2} \left[\frac{1}{m} + \frac{2}{m^2} \sum_{n'} \frac{|\mathbf{P}_{nn'}^\alpha|^2}{E_{n0} - E_{n'0}} \right]. \quad (1.9)$$

El término entre corchetes en la expresión anterior es una constante que se determina experimentalmente para cada material, y se identifica con la inversa de la *masa efectiva* m_α^* . Así pues, la energía en un punto $k \neq 0$ de la zona de Brillouin se puede determinar como:

$$E_{nk} = E_{n0} + \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha^*}. \quad (1.10)$$

El modelo pone de manifiesto que la inclusión de un potencial periódico sobre el movimiento de una partícula libre se traduce en un cambio en su masa.

Para el caso de un electrón libre, la energía presenta la siguiente relación de dispersión:

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \quad (1.11)$$

de donde se deduce que la masa, es decir, la inercia de un electrón frente a la acción de una fuerza, es para el caso del electrón libre una constante, la cual viene determinada por la curvatura de la relación de dispersión,

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2}. \quad (1.12)$$

No se debe olvidar que la aproximación de masa efectiva aquí descrita resulta válida en las cercanías de $k = 0$, debido a que proviene de perturbación de segundo orden. De hecho, a medida que se aleja de $k = 0$ la aproximación parabólica de $E_{nk}(k)$ deja de ser cierta, por lo que la masa efectiva deja de ser constante. Así, la presencia de un potencial periódico cristalino provoca una respuesta dinámica del electrón frente a la acción de una fuerza externa. La inercia no es ahora una constante, sino que varía con k , puesto que la curvatura de la relación de dispersión tampoco es constante (véase la figura 1).

A pesar de su sencillez, este modelo de una banda en aproximación de masa efectiva (*effective mass approximation*, EMA) ha sido ampliamente probado, y sus resultados han demostrado ser precisos en la descripción de electrones de conducción de materiales con energías de *gap* no excesivamente bajas [38,39], con un ahorro computacional considerable respecto a modelos multibanda. El modelo multibanda más completo que se utiliza hoy en día es el de ocho bandas, que permite estudiar de manera simultánea las bandas de valencia y de conducción, y considera además el acople espín-órbita.

1.1.1.2 Descripción de la cima de la banda de valencia. Hamiltoniano de Luttinger [40,41]. La localización de los portadores de carga, electrones y huecos, en las proximidades de los extremos de las bandas de conducción y de valencia, respectivamente, hace de esta una región importante para el estudio de las propiedades electrónicas y ópticas de los materiales semiconductores. Este hecho permite también hacer simplificaciones en el cálculo de la estructura electrónica. Entre los métodos multibanda-matriciales usados, en orden de complejidad, se encuentra el *modelo de Kane* [42] que resulta en un Hamiltoniano 8×8 , con el cual se analizan materiales con *gaps* de energía tales que las interacciones entre las bandas de conducción Γ_6 , de valencia Γ_8 y de espín-órbita Γ_7 no se pueden despreciar. Existen otras aproximaciones útiles cuando los efectos de acople entre las bandas de conducción y de valencia pueden separarse, de esta manera se obtiene un Hamiltoniano 6×6 , *modelo de Luttinger-Kohn*. Por último, en términos prácticos, cuando

no hay acople entre la cima de la banda de valencia y la de espín-órbita, se llegará a un Hamiltoniano 4×4 , *modelo de Luttinger*, para la descripción única del tope de la banda de valencia Γ_8 ; esta aproximación permite considerar la mezcla de la cima de estas bandas, los efectos de no parabolicidad y de espín, que son esenciales para la obtención de las propiedades electrónicas de las nano-estructuras semiconductoras tipo $In_xGa_{1-x}As$.

El *modelo de Luttinger* [35] es basado en el método $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$, y hace uso del método desarrollado por Löwdin [43], acercándose al problema vía teoría de perturbaciones y diagonalización exacta, donde Luttinger tuvo en cuenta sólo aspectos de simetría para el cálculo de la banda de valencia [44]. La aplicación de este Hamiltoniano en *QRs* se llevará a cabo en el capítulo 5.

1.2 FABRICACIÓN Y MORFOLOGÍA DE LOS ANILLOS CUÁNTICOS

Los métodos principales de fabricación de anillos cuánticos son auto-ensamblado, litografía y grabado, y epitaxia por goteo.

1.2.1 Técnica de auto-ensamblado a través de crecimiento parcial de *QR*. Un impulso primordial en el estudio de *QRs* lo dio el descubrimiento, en 1997, de la posibilidad de fabricar estructuras de forma anular de *InAs/GaAs* con tamaños de unas pocas decenas de nanómetros en su diámetro mediante un proceso auto-ensamblado [45]. Usando un proceso de encapsulado parcial, fue demostrado, que la forma y el tamaño de un *QD* de *InAs* crecido por epitaxia de haces moleculares (MBE por sus siglas en inglés, *Molecular Beam Epitaxy*) puede ser modificado en una forma que conduzca a la fabricación de *QRs* auto-ensamblados de manera controlada [45].

Dos mecanismos fueron revelados que contribuyen principalmente a la formación de *QRs* auto-ensamblados. Un mecanismo propuesto fue la difusión como etapa controlante en la

cinética: los átomos de *In*, tienen una movilidad mayor en la interfaz al compararse con la difusión de los átomos de *Ga*, se dispersan superficialmente hacia afuera desde la capa superior de los *QDs* formados sobre la superficie del *GaAs*, organizando de esta manera islas de $In_xGa_{1-x}As$ en forma de anillo [46–48]. El otro mecanismo está basado en la termodinámica del proceso de deshumidificación: el desequilibrio en la superficie y las fuerzas que surgen en la interfaz de los dos materiales empiezan a actuar en la capa superior que cubre parcialmente las islas de *InAs*/*GaP* [49] formando de esta manera *QRs*. Independientemente del mecanismo propuesto, se forman pequeñas gotas de átomos de *In* en la cima del *InAs-QD* que está parcialmente cubierto por una capa de material base. Esta formación de gotas de átomos de *In* en la cima se debe a las tensiones y esfuerzos en el proceso de fusión. Este proceso fue establecido inicialmente de manera experimental [50] y después analizado teóricamente [51].

Los *QDs* en general y los *QRs* en particular, crecidos mediante auto-ensamblado, siempre tienen una altura de unos cuantos nanómetros y se componen de películas muy delgadas con un grosor más pequeño (2-6 nm) que los tamaños laterales (20-100 nm), y por esta razón, se consideran como estructuras casi bidimensionales.

En general, en la fabricación de anillos cuánticos se utilizan materiales semiconductores compuestos, binarios o ternarios, lo que permite formar heterojunturas mediante el cambio brusco en la concentración de uno de los componentes del compuesto. Los materiales más ampliamente usados para este propósito son: *InAs*/*GaAs*, *InAs*/*InP* o *GaSb*/*GaAs*, entre otros [27]. Dichos materiales se eligen esencialmente por presentar dos aspectos de gran importancia para el diseño de anillos cuánticos: diferentes anchos de banda prohibida y parámetros de red similares. El primer aspecto está relacionado con la localización de los portadores de carga al interior de la nanoestructura gracias al potencial de confinamiento que se crea debido a la diferencia que existe entre los anchos de las brechas prohibidas de los dos materiales. El segundo aspecto tiene como fin la reducción de la tensión en las junturas y por lo tanto las deformaciones en las junturas serán moderadas.

Los espectros energéticos de *QRs* auto-ensamblados tanto individuales como acoplados con uno y dos electrones han sido analizados experimentalmente a partir de espectros infrarrojos [46–49], de fotoluminiscencia [52,53], de fotoluminiscencia resuelta en el tiempo [54], y microscopía de fotoemisión [55].

1.2.2 Epitaxia de gotas. Otra técnica que permite la fabricación de *GaAs/Al_{1-x}Ga_xAs* *QRs* libres de tensión y esfuerzos es la epitaxia de gotas [56–58]. Este método empezó con la formación de gotas de metal líquido del grupo III (Al, Ga, In), que fueron suministradas en estado puro en la superficie del sustrato usando el modo de crecimiento Volmer-Weber. Los *QRs* fueron formados luego de la exposición a elementos del grupo V (As, Sb, P). La evolución temporal de estos nano-objetos fue seguida durante el proceso de crecimiento usando la técnica RHEED (*Reflection high-energy electron diffraction*) [59].

La epitaxia de gotas ha demostrado ser una técnica única para ensamblar nanoestructuras tipo *QR* de morfologías complejas, desde *QRs* sencillos [60–62], pasando por *QRs* concéntricos dobles [57,63], complejos de dos anillos cuánticos acoplados lateralmente [64], varios *QRs* concéntricos de múltiple orden [65], sistemas acoplados de *QR*/disco [66], hasta varios *QDs* dentro de un *QR* [67]. En la formación de *QRs* de *GaAs* por técnica de epitaxia de gotas, el tamaño y altura del *QR* dependen del flujo y concentración de átomos de *As* suministrados. Para flujos menores de átomos de *As* se obtienen *QRs* con diámetros mayores y menores alturas. La formación de los anillos fue atribuida a la difusión de los átomos de *Ga* hacia el exterior del nano-anillo [57].

1.2.3 Litografía y gravado. Los *QRs* construidos por litografía y gravado han permitido un estudio detallado en experimentos de magneto-transporte [21] y medidas de magneto-resistencia [68], permitiendo entender microscópicamente los niveles de energía de los portadores de carga con interacción espín-órbita y su posibilidad de ser extendido a sistemas de varios electrones.

Para la fabricación de las nano-estructuras se usan varias técnicas, entre ellas: ópticas donde emplean ondas de longitud pequeña; haces de electrones, de partículas cargadas o neutras, entre otras [69]. Se requiere que la superficie sea sensible al método aplicado para el respectivo gravado de la misma.

1.3 EFECTO DE AHARONOV-BOHM DE LOS PORTADORES DE CARGA EN ANILLOS CUÁNTICOS UNIFORMES

Los anillos semiconductores son estructuras de tamaños nanométrico con topología no simplemente conexa y con una pequeña concentración de portadores de carga (electrones y/o huecos). Las propiedades cuánticas de estas estructuras se deben al hecho de que sus tamaños son comparables con la longitud de onda De Broglie λ_i de los portadores de carga,

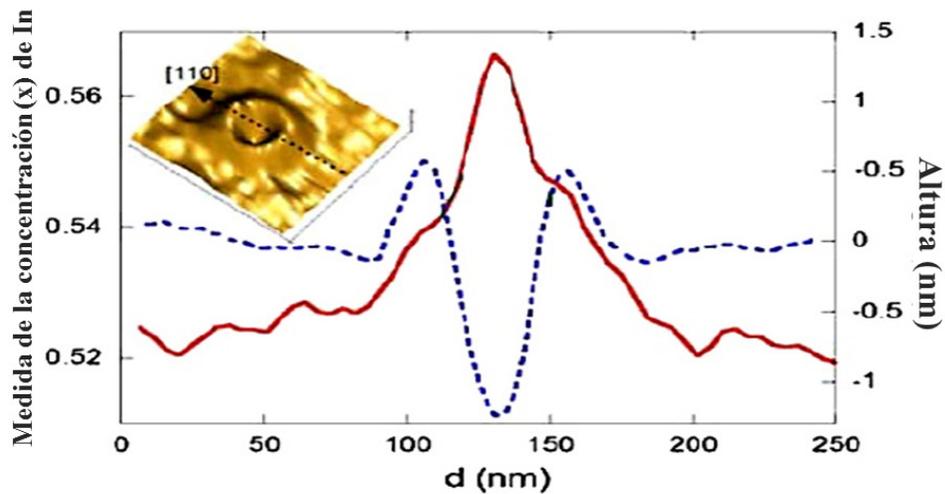
siendo $\lambda_i = \frac{h}{p_i}$ donde i hace referencia al portador de carga, p_i es el momento lineal de la

partícula y h es la constante de Planck. Por esta razón, los anillos cuánticos poseen un espectro energético discreto, y el movimiento de los electrones y los huecos dentro de ellos está fuertemente correlacionado. En consecuencia, los portadores de carga exhiben fenómenos de interferencia tales como: el efecto de las oscilaciones AB [36] en la energía y las corrientes persistentes [70] relacionados con el cambio de la fase de la función de onda del portador de carga confinado en presencia de un campo magnético externo aplicado paralelamente al eje de simetría del anillo.

Un portador de carga gana una fase cuando este se mueve en un camino cerrado alrededor de un flujo magnético. La fase geométrica adquirida conduce a una interferencia cuántica entre los estados de las partículas en el QR . Las manifestaciones de esta interferencia cuántica, conocida como efecto Aharonov-Bohm [36] han podido observarse en el espectro electrónico, la magnetización, y en las propiedades ópticas y de transporte de los QRs [71].

Como un ejemplo típico, en la figura 2 se presenta la imagen de una estructura en forma de anillo la cual ha sido tomada vía AFM, de la referencia [72]. Merece la pena anotar que el grosor de la estructura (altura de QR) presentada aquí es aproximadamente 50 veces menor que el tamaño de su base. Esto nos permite considerar estas estructuras como casi-bidimensionales y usando la aproximación adiabática reducir la actual ecuación de onda 3D para partículas confinadas dentro un QR a un problema bidimensional.

Fig. 2 Imagen AFM de un QR , el perfil de altura (línea punteada) correspondiente y la concentración de In (línea roja sólida) dentro del material $In_xGa_{1-x}As$, ref. [72].



Como el confinamiento en la dirección axial es más fuerte que el confinamiento lateral, el movimiento del electrón en esta dirección es mucho más rápido que en la dirección lateral. Entonces, se puede resolver primero el movimiento rápido en la dirección vertical del cráter dejando las demás coordenadas como parámetros. Siguiendo el procedimiento de la aproximación adiabática, en un segundo paso, se analiza el movimiento lento en el plano del anillo y se encuentra la función de onda bidimensional que lo describe. La ecuación de Schrödinger bidimensional, en el caso general, cuando estructura es anisotrópica no es separable y su solución no es posible encontrarla en forma analítica. Sólo cuando la

estructura posee una simetría axial las variables pueden llegar a separarse y hallar la solución exacta [73–75].

La misma aproximación adiabática se puede utilizar para analizar las propiedades espectrales de los complejos excitónicos X y X^+ confinados en los QR s con la morfología no-uniforme, reduciendo un problema actual en un espacio 3D a un problema equivalente en un espacio 2D.

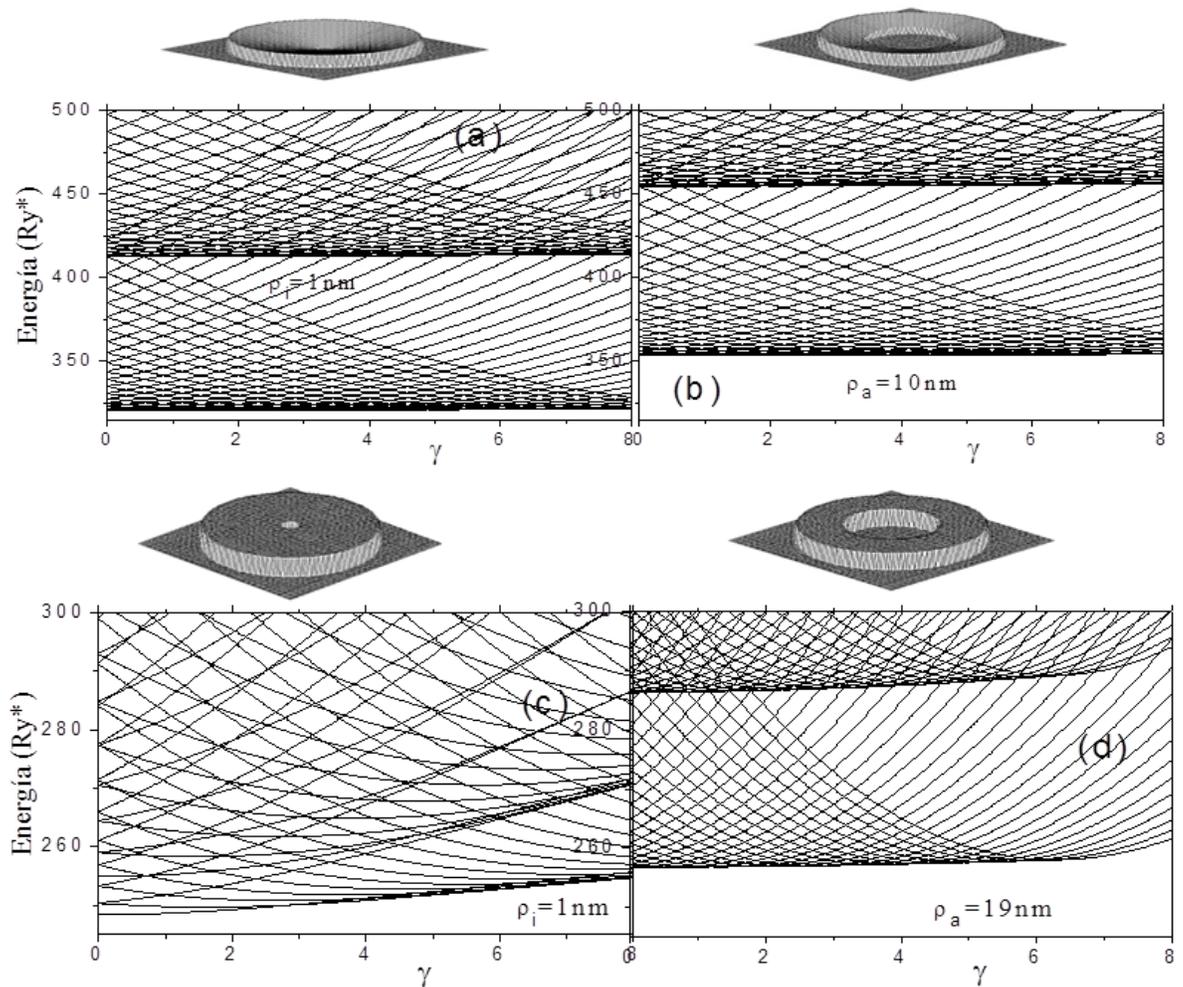
1.4 EFECTO DE LA MORFOLOGÍA SOBRE LAS OSCILACIONES DE AHARONOV-BOHM

La ecuación de Schrödinger en el caso de un QR con simetría axial es separable, y la parte radial de esta ecuación se puede resolver numéricamente usando por ejemplo el método de disparos o barrido trigonométrico [73–75]. También, en algunos casos particulares, para estructuras que no poseen simetría axial es posible encontrar una solución en forma analítica en el marco de la aproximación adiabática. Por ejemplo, si el grosor de una estructura con morfología anular crece en dirección radial linealmente, entonces en la aproximación adiabática, la ecuación de onda sigue siendo separable. Lo anterior es posible incluso si la estructura posee anisotropía respecto al ángulo acimutal, para lo cual independientemente de la cantidad de los defectos estructurales que aparezcan, ya sea en forma de colinas o valles mientras se hace un barrido entre cero y 2π , la parte radial de la función de onda de un electrón confinado en esta estructura no-uniforme en presencia de un campo magnético sigue siendo una combinación lineal de funciones hipergeométricas, igual como una estructura uniforme [76–78].

Los resultados de los cálculos obtenidos por el grupo FICOMACO [76–78], usando estas soluciones analíticas, para anillos con secciones transversales de forma triangular y rectangular se presentan en fig. 3. A diferencia del caso unidimensional donde hay sólo una banda, los niveles energéticos dependen de dos números cuánticos, el radial n_r y el

angular m . En los gráficos de la fig. 3 se presentan únicamente las dos bandas inferiores, la primera corresponde al número cuántico radial $n_r = 1$ y la segunda a $n_r = 2$.

Fig. 3 Energías de dos bandas inferiores de un electrón confinado en anillos cuánticos con diferentes radios del hueco central ρ_a , en función del campo magnético. El grosor máximo es 2 nm, el radio exterior es 20 nm en todos los casos. La sección transversal de *QRs* es triangular en fila superior y la rectangular en la fila inferior [76–78].



Para anillos con secciones transversales de forma triangular (fila superior) la forma de las curvas de la energía en función del campo magnético casi no cambian debido a la disminución del tamaño del hueco central, mientras que para anillos con sección transversal de forma rectangular el espectro energético se modifica de manera notoria. En el último caso, el efecto AB se presenta solamente cuando el anillo es muy delgado. El análisis de los anillos bidimensionales muestra que, cuando el ancho del anillo se incrementa debido a disminución del radio interno, es decir cuando el anillo paulatinamente se transforma en un disco, las oscilaciones AB se suprimen sucesivamente, así como se muestra en la fig. 3 al cambiar del resultado (d) hacia el (c) [76–78].

Las estructuras anulares fabricadas hasta el momento, por lo general, no son uniformes. La no-uniformidad de estas estructuras se manifiesta de diferentes maneras: no-uniformidad de la curvatura, no-uniformidad del ancho del anillo o no-uniformidad del grosor. En cada caso, la no-uniformidad conduce a la extinción de las oscilaciones AB de los niveles energéticos más bajos [30,31,79]. La relación entre la localización de los estados electrónicos con las energías bajas y la extinción de las oscilaciones AB debido a las diversas no-uniformidades estructurales de los *QRs* ha sido estudiada recientemente con suficiente detalle en las referencias [76–78], donde se analizaron estos procesos para las estructuras con morfologías presentadas en las figs. 4 y 5.

El potencial adiabático $V(\rho, \varphi)$ definido en coordenadas polares, que controla el movimiento bidimensional en estas estructuras, se relaciona con la morfología de la estructura dada por la función $h(\rho, \varphi)$ que define la dependencia de la altura de la estructura. En un modelo simplificado con las barreras infinitas en las juntas entre el *QR* y el sustrato, este potencial es igual a $V(\rho, \varphi) = \hbar^2 \pi^2 / 2m^* h^2(\rho, \varphi)$ donde m^* es la masa efectiva del portador de carga. Según esta relación, los valles en las estructuras no-uniformes se traducen para el electrón en barreras de potencial, mientras que las colinas harán las veces de pozos de potencial. Para construir la morfología dada en las figs. 4 y 5,

donde la trayectoria más probable del electrón es a lo largo de la frontera exterior del anillo, con potencial de confinamiento efectivo a lo largo de esta trayectoria dado por:

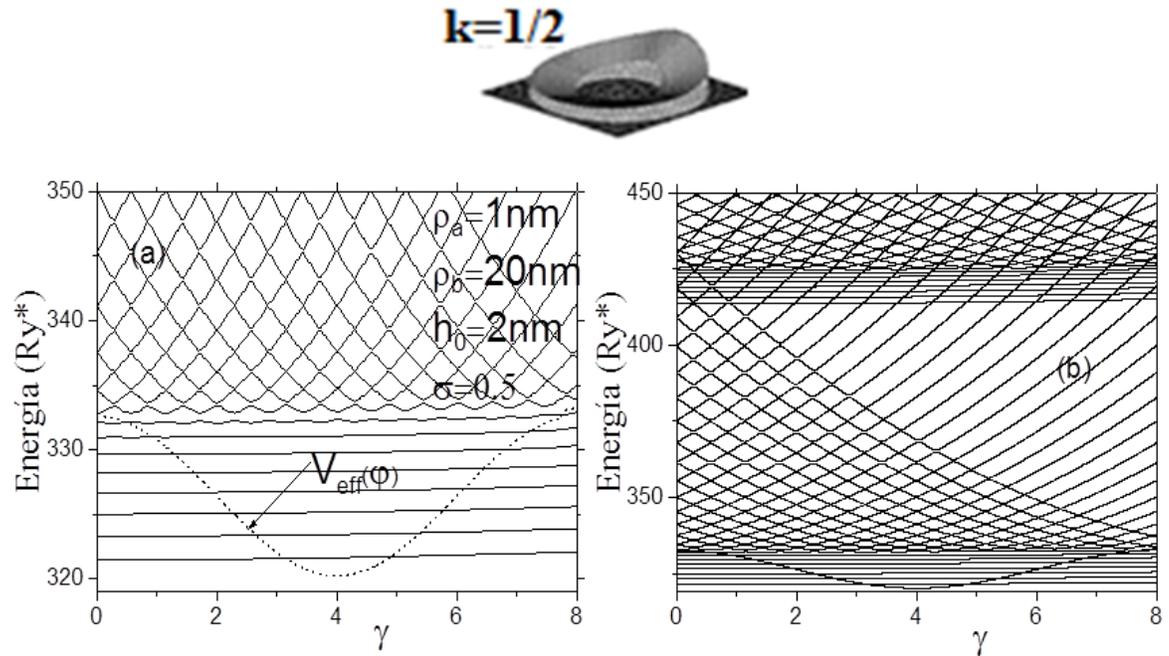
$$V_{eff}(\varphi) = \pi^2 / h^2 (\rho_b, \varphi) = \pi^2 (1 + \sigma^2 \sin^2 k\varphi) / h_0^2.$$

En la fig. 4(a) se presentan, en líneas sólidas, las energías más bajas para el número cuántico radial $n_r = 1$ en función del campo magnético cuando $k = 1/2$; en línea punteada, el potencial de confinamiento en función del ángulo φ ($-\pi < \varphi < \pi$). Claramente se ve que todas las líneas se separan en dos grupos, el grupo inferior que consiste de ocho niveles discretos en los cuales las energías prácticamente no dependen del campo magnético, y el grupo superior donde se observan intersecciones múltiples de las líneas con reordenamiento de los niveles energéticos. El grupo superior consiste de niveles que prácticamente forman una banda casi continua y una clara oscilación de los niveles energéticos. En la fig. 4(b) se presentan dependencias similares de los niveles energéticos en una escala diferente con $n_r = 1$ y 2.

La curva del potencial de confinamiento a lo largo de la trayectoria cerrada más probable presentada en la fig. 4(a), aclara la diferencia en el comportamiento de los niveles energéticos en estos dos grupos. Se ve que los niveles energéticos del primer grupo inferior tienen dos puntos de retorno, mientras que los niveles superiores al piso de la banda superior no los tienen. Por esta razón, los estados del primer grupo corresponden a un movimiento oscilatorio alrededor de la vecindad de la cima del contorno exterior del anillo, mientras que los estados de la banda superior corresponden a un movimiento rotacional libre, a lo largo de una trayectoria cerrada cercana a la frontera exterior. Como el movimiento oscilatorio del electrón no produce una corriente, entonces, este movimiento no es afectado por el campo magnético externo y por esta razón las dependencias de las energías en el grupo inferior de los niveles energéticos son rectas horizontales. Al contrario, los estados pertenecientes al grupo de los niveles superiores presentan un movimiento rotacional del electrón que produce una corriente eléctrica, sensible tanto al

valor como a la dirección de campo magnético externo. Por esta razón, en este grupo se observa un comportamiento de niveles energéticos típico del efecto AB.

Fig. 4 Energías en función del campo magnético en un anillo cuántico no uniforme con una colina (Ref. [76–78])



Adicionalmente, se observan unas oscilaciones débiles de los niveles séptimo y octavo más altos del primer grupo que son asociadas a la interacción del campo magnético con la corriente túnel. En efecto, estos niveles cercanos a la cima de la barrera de potencial, donde su ancho es relativamente pequeño, se hace apreciable la probabilidad del surgimiento de una corriente túnel. En la fig. 4(b) se presentan las mismas dependencias de niveles energéticos en una escala diferente y para dos números cuánticos radiales $n_r = 1$ y $n_r = 2$. Se puede ver en la parte superior de la gráfica como aparece una segunda banda correspondiente a $n_r = 2$ y esta nueva banda tiene las mismas características que la banda

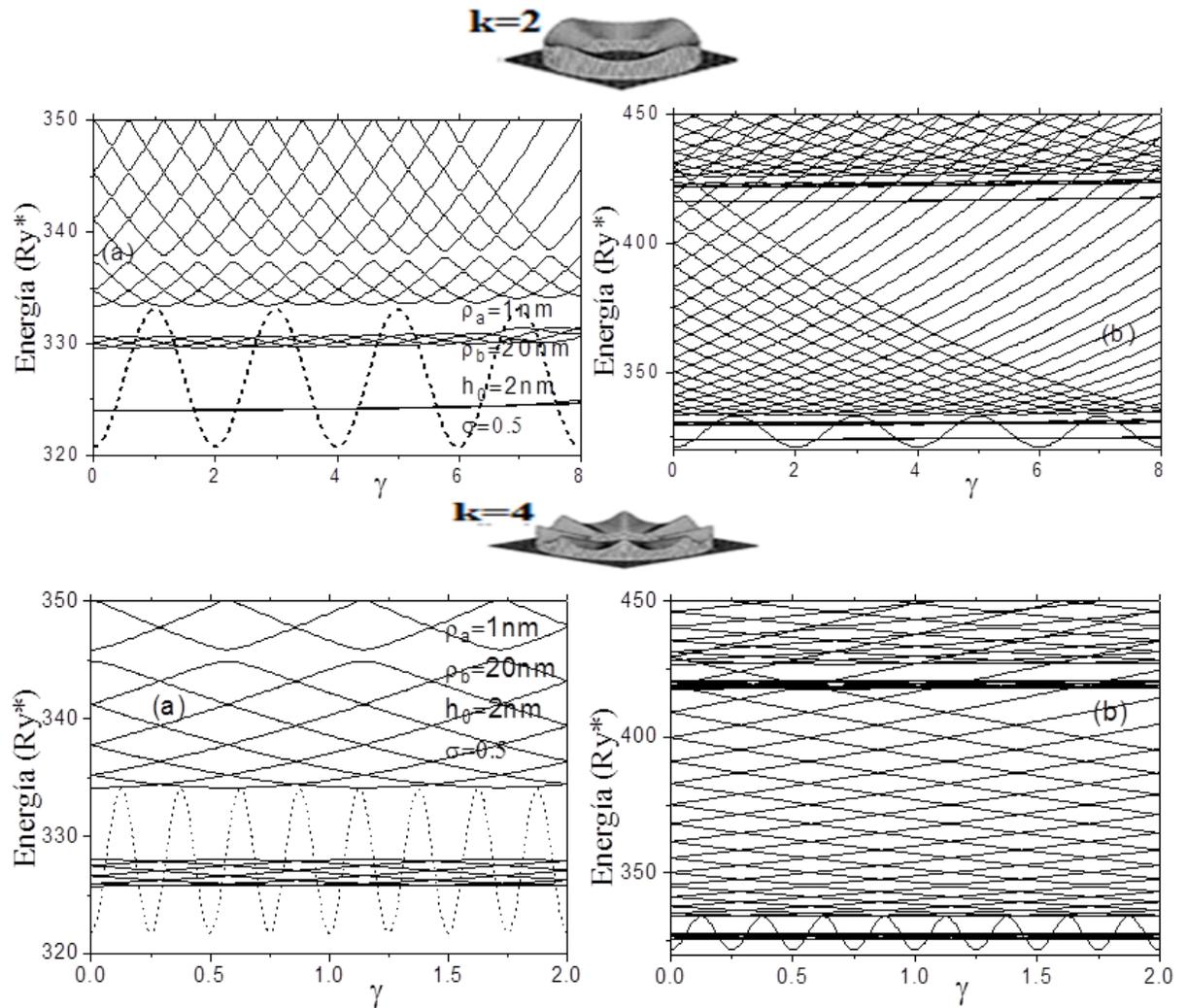
inferior correspondiente a $n_r = 1$, con la misma cantidad de los niveles energéticos oscilatorios en el grupo inferior y con el piso oscilante de la banda superior.

En la parte superior izquierda de la fig. 5 se presentan en líneas solidas las energías más bajas para el número cuántico radial $n_r = 1$, en función de campo magnético para el caso $k = 2$; y con una línea punteada, el potencial de confinamiento en función del ángulo φ . En este caso, el potencial de confinamiento a lo largo de la frontera exterior del anillo tiene cuatro valles y cuatro colinas. Se observa que, la banda superior de los niveles energéticos es muy similar a la banda del caso anterior, es decir, los estados rotacionales no sufren un cambio esencial bajo el incremento de no-uniformidad de la estructura. Ellos tienen características similares al caso anterior, típicas para las oscilaciones AB. Al contrario, los estados del grupo inferior sufrieron un cambio radical, los ocho niveles discretos oscilatorios se agruparon en dos grupos separados formando unas líneas entrecruzadas formando dos “trenzas” independientes con cuatro niveles energéticas en cada una. El mismo gráfico para dos números cuánticos radiales $n_r = 1$ y $n_r = 2$ se presentan en la fig. 5 superior derecha.

Con el fin de aclarar la naturaleza de los cambios que sufren los estados oscilatorios en la parte inferior del espectro energético bajo la no-uniformidad estructural, se considera una morfología con $k = 4$, el cual se compone de ocho valles direccionados radialmente y separados por ocho cimas. Los resultados se presentan en la parte inferior de la fig. 5. En la parte inferior izquierda, de la fig. 5, se ve que todos los ocho niveles oscilatorios de la fig. 4(a) se agruparon en la fig. 5 en una solo banda, donde los niveles energéticos bajo la influencia del campo magnético sufren un reordenamiento y por eso las ocho líneas inferiores en la fig. 4(a) se ven ahora en una forma de trenzas de ocho curvas. Es interesante que los niveles energéticos más bajos, con el aumento de la no-uniformidad, se vuelven rotacionales, sin embargo, esta vez, las oscilaciones son debidas a la interacción de

las corrientes túnel con el campo magnético externo, por lo tanto, presentando la existencia del efecto AB [76–78].

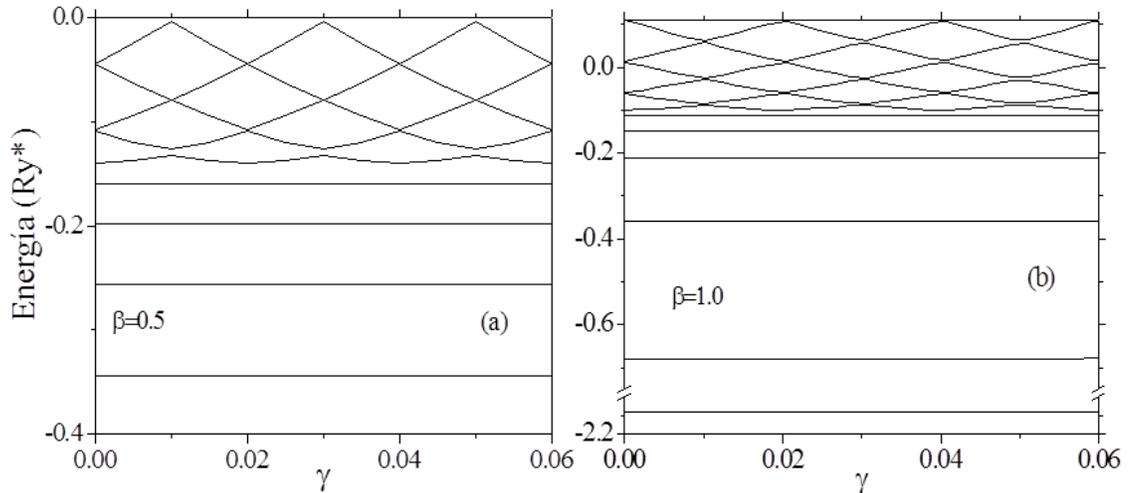
Fig. 5 Energías en función de la intensidad del campo magnético en anillo cuántico no uniforme con cuatro y ocho colinas (Ref. [76–78]).



La simetría axial en los anillos cuánticos también se rompe por la presencia de impurezas donadoras o aceptadoras. La ruptura de la simetría se hace más significativa a medida que

la posición de la impureza tiende a la línea central del anillo. La forma del potencial electrostático atractivo que genera una donadora depende esencialmente del parámetro $\beta = \xi / R_c$ donde ξ es la distancia desde la posición de la impureza hasta el eje de simetría y R_c es el radio de la línea central del anillo. Cuando $\beta = 0$ el potencial sigue siendo simétrico a pesar de presencia de la impureza. La asimetría del potencial se incrementa cuando el valor de β va en aumento, creciendo entre 0 y 1, logrando su máximo cuando $\beta = 1$. Si el valor de β sigue creciendo la asimetría del potencial se disminuye volviéndose simétrico cuando $\beta \rightarrow \infty$. En la ref. [34,80] fue analizado el cambio que sufren las oscilaciones de AB en presencia de una donadora para diferentes valores de β .

Fig. 6 Energías más bajas del e en un QR con $R_c = 10.0 a_0^*$ en función del campo magnético para dos diferentes posiciones de la donadora: (a) $\beta = 0.5$ y (b) $\beta = 1.0$ [34,80].



En la fig. 6 se ve que a medida que la impureza se va acercando más a la línea central del QR , la separación entre los niveles se va haciendo cada vez mayor y las energías del estado base y algunos de los primeros estados excitados decrecen notoriamente hacia valores

mínimos cuando $\beta \rightarrow 1$. Particularmente, cuando se considera la donadora localizada dentro de un QR cuyo ancho tiende a cero, la energía del estado base tiende a $-\infty$ de manera similar a lo que ocurre con el átomo de hidrógeno en una dimensión. Por lo tanto entre más delgado sea el anillo, más bajos serán los mínimos en estas curvas. Todas estas características son el resultado del acople que existe entre el potencial Coulombiano y el potencial de confinamiento, lo cual hace que la interacción electrón- impureza dependa fuertemente de la posición de la impureza [34,80].

1.5 EFECTO DE AHARONOV-BOHM EN ANILLOS CON DOS O MÁS ELECTRONES

El papel de la interacción electrón-electrón en un QR de ancho finito consiste en la formación de una molécula de Wigner a bajas temperaturas, compuesta por los N -electrones, con movimientos relativos entre ellos en forma de oscilaciones armónicas y movimientos radiales dependiendo del potencial de confinamiento [17,81,82]. Entonces aparece el efecto AB fraccional, donde el periodo magnético de una oscilación del sistema es igual al periodo de un solo electrón dividido por N [83].

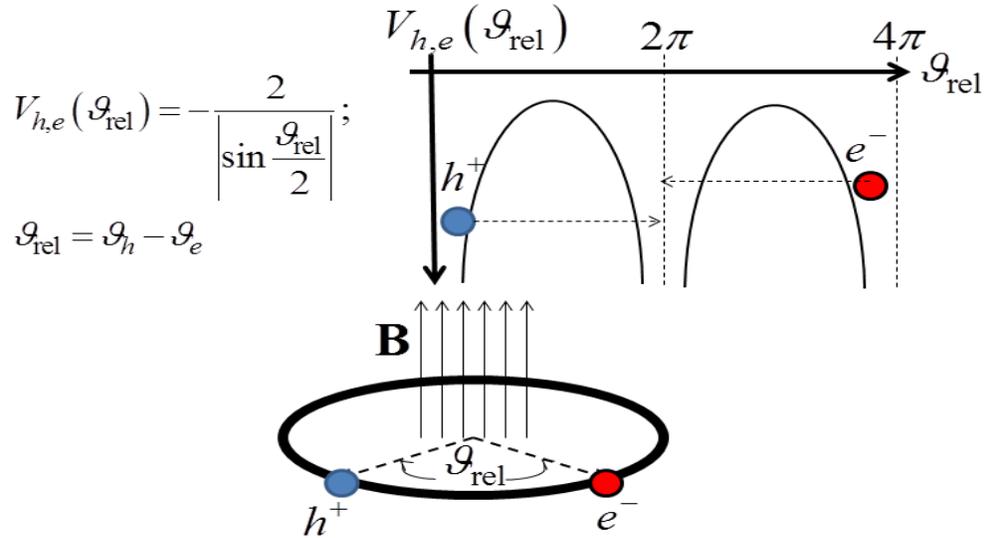
Por ejemplo, si tenemos solo dos electrones, los cuales interactúan el uno al otro no por el mecanismo de Coulomb sino por otro mecanismo “molecular” tipo Lennard-Jones. Los electrones forman un par, y la distancia de equilibrio es determinada por los parámetros del potencial. Esta distancia puede ser menor que el radio del anillo. En este caso, las oscilaciones de la corriente persistente como función del flujo de campo magnético claramente ocurren con un periodo de $\Phi_0/2$ (donde $\Phi_0 = hc/e$ es el flujo cuántico de campo magnético), el cual es diferente al caso de un par de electrones libres donde el periodo es Φ_0 [84].

1.6 EFECTO DE AHARONOV-BOHM EN ANILLOS CON COMPLEJOS EXCITÓNICOS

Como se ha demostrado anteriormente en otros artículos [8–10,14–26], el efecto AB para el excitón neutro y cargado son estudiados teóricamente y observados experimentalmente en sus niveles inferiores de energía, no solo en puntos cuánticos tipo II, donde el electrón y el hueco se mueven principalmente en caminos diferentes, produciendo un momento magnético y angular diferente de cero en el estado base, sino también en anillos cuánticos tipo I, en este caso, el efecto AB se atribuye a la probabilidad finita del electrón y el hueco de realizar efecto túnel y encontrarse luego en posiciones opuestas del anillo [15,16,19,20]. Por otro lado, el momento magnético de los complejos excitónicos cargados X^- o X^+ siempre es diferente de cero y el efecto AB para estos complejos confinados en anillos cuánticos ha sido detectado por experimentos ópticos [14] y medidas de transporte [21].

De acuerdo a la teoría clásica, un excitón y sus estados ligados, siendo una entidad neutral, no sería sensible al campo magnético y por lo tanto no exhibiría las oscilaciones AB en sus niveles de energía. Sin embargo, como fue demostrado por primera vez por Chaplik [15,16], el excitón en un anillo cuántico 1D bajo la acción de un campo magnético externo puede inducir en el anillo cuántico unidimensional corrientes túnel, en direcciones opuestas para cada portador, a través de la barrera de potencial entre el electrón y el hueco. Donde, esta barrera de potencial es generada por la interacción electrostática entre los dos portadores de carga, ver fig. 7. Para Chaplik, la corriente túnel inducida decrece exponencialmente debido a dos factores: el radio del QR y el potencial de atracción entre el par electrón-hueco. En el caso de un anillo cuántico 2D, las corrientes túnel decrecen aún más, debido a un factor adicional inversamente proporcional al flujo de campo magnético que permea cada portador de carga.

Fig. 7 En la parte inferior se muestra un esquema de un excitón (X) confinado en un QR - 1D, de radio unitario, con campo magnético aplicado. En la parte superior, el potencial de Coulomb entre los portadores de carga.



Con un análisis similar, Römer y Raikh [19,20] llegaron a la misma conclusión años más tarde, sin embargo, ellos atribuyeron el efecto AB al tamaño finito del excitón, donde sólo consideraron una separación acimutal entre el electrón y el hueco.

Aprovechando la idea de tamaño finito del excitón, Govorov y colaboradores [22–24] demostraron que las oscilaciones AB del excitón dependen más bien de la polarización radial y no sólo acimutal entre el electrón y el hueco. En una nano-estructura tipo anillo, cualquier asimetría en el potencial de confinamiento puede causar la polarización de los excitones en la dirección radial, entonces el electrón y el hueco se mueven en diferentes circunferencias. Sin embargo, la polarización radial en el excitón también puede aparecer debido a la deformación del potencial del QR , por ejemplo, bajo efectos de tensión o de esfuerzos en la nano-estructura, por lo cual se producen drásticamente potenciales efectivos diferentes en la banda de valencia y en la banda de conducción. Ellos reportan un mecanismo de diferencia de fase adquirido en un campo magnético por un objeto compuesto y polarizable, donde algunos estados ligados del excitón son responsables de

emisiones ópticas del cristal a bajas temperaturas. Esto demostró la existencia de un nuevo fenómeno de interferencia de fase que lo denominaron: “efecto óptico AB del excitón”. Adicionalmente ellos predicen que la emisión del excitón se suprime en ciertos rangos de campo magnético.

Entonces, los excitones en nano-anillos bajo la acción de un campo magnético externo pueden ser generados y monitoreados usando técnicas de escaneo óptico. Realmente, los experimentos de micro-fotoluminiscencia (μPL) en QRs fueron los que permitieron explorar el efecto AB en excitones neutros [25,26].

Ampliando el mecanismo planteado por Govorov y colaboradores [22–24], donde demuestran que luego de una vuelta, las partículas obtienen fases topológicas, pero estas fases tienen trayectorias diferentes. La diferencia de fases se debe a que diferentes flujos magnéticos pasan a través de los caminos encerrados por los portadores de carga. Esta fase relativa entre los portadores de carga es importante porque dependiendo de esta, los portadores de carga se combinarán en ciertos rangos de campo magnético emitiendo un fotón que será el observable en los espectros de μPL .

La regla de selección óptica $L = 0$, muestra que la intensidad de emisión de un QR se suprime dramáticamente en algunos intervalos donde el estado base del excitón adquiere valores diferentes de cero en su momento angular total. Claro está, la intensidad de emisión como función del campo magnético depende fuertemente de la interacción de Coulomb en el excitón. Sin embargo, el hecho que exista emisión en ciertos rangos de valores de B tienen un origen común para todos los casos que Govorov y colaboradores [22–24] analizaron: el momento dipolar eléctrico en la dirección radial. El momento dipolar eléctrico es por lo tanto responsable del efecto de interferencia magnética mientras el excitón se mueve a lo largo del QR .

El excitón con momento angular total diferente de cero no puede emitir un fotón y se convierte en “oscuro” (*dark exciton*) en intervalos bien definidos de campo magnético, los

cuales pueden ser observados notablemente en el espectro de μPL . Puesto que el excitón “guarda” un fotón, tal diferencia de fase determina cuando el QR es iluminado u oscuro en la emisión óptica. Esta premisa ofreció la oportunidad única de observar fases electrónicas microscópicas en los experimentos ópticos de emisión [25,26].

También, la influencia del ancho sobre el efecto AB excitónico ha sido investigado [85,86] y ha sido encontrado que un nano-anillo de ancho finito, las amplitudes de las oscilaciones AB del excitón para niveles inferiores de energía decrecen e incluso pueden suprimirse completamente. Otro factor que esencialmente puede afectar las oscilaciones AB de los niveles de energía del magneto-excitón son las no-uniformidades que usualmente se encuentran de la fabricación de los puntos cuánticos. Donde, las posibles extinciones de las oscilaciones AB de cada uno de los portadores de carga está relacionada principalmente con la localización de los estados rotacionales en sus niveles inferiores de energía, pero tal localización se hace inevitable cuando las dimensiones del espacio son reducidas [28,30,31].

En una geometría 3D y acercándonos al experimento, sin embargo, se observa que el solapamiento entre la función de onda del hueco con la del electrón es finita, por lo tanto, la intensidad de emisión no exhibe oscilaciones periódicas como en los anillos 1D planteados por Gorovov y colaboradores [22–24]. Más bien, debido a la pequeña polarización del excitón en un QR 3D, se observaron experimentalmente pequeñas oscilaciones del nivel más bajo de energía, las cuales son del orden de fracciones de meV encontradas por Teodoro y colaboradores y Ding y colaboradores [25,26].

Teodoro y colaboradores demostraron experimentalmente, por primera vez, la interferencia AB en estados excitónicos, como había sido propuesto teóricamente en trabajos anteriores [15,16,19,20,87]. Teodoro *et al* se enfocaron en la fuerza del oscilador excitónico durante la fotoluminiscencia PL, el cual mostró un comportamiento oscilatorio que estaba directamente relacionado con los cambios en la función de onda del excitón cuando el flujo magnético se incrementaba. Reportando el efecto AB en sistemas tipo-I donde el electrón y

el hueco se mueven juntos en el anillo, haciendo la correlación entre ellos crucial en el comportamiento oscilatorio encontrado en la intensidad integrada de PL. A partir de los experimentos de magneto-PL en estructuras de *InAs*/GaAs auto-ensambladas, introdujeron una imagen teórica para el efecto AB en *QRs* nanoscópicos modulados por la temperatura y el campo eléctrico auto-inducido. Estos efectos fueron experimentalmente observados y caracterizados usando métodos ópticos.

Las oscilaciones AB se observan a través de patrones en la intensidad de PL bajo el incremento en el campo magnético externo y el posible campo piezoeléctrico inducido, los cuales juegan un papel importante y aún no se han comprendido en sistemas de *QRs* bajo esfuerzos y tensiones, profundizando de esta manera las secuencias entre el máximo y mínimo en las oscilaciones. También, la interacción de Coulomb es crucial para las observaciones reportadas, sin esta, la correlación entre electrones y huecos se desvanece y la oscilación desaparece [26].

Para Ding y colaboradores [25], el efecto AB puede ser observado en un excitón neutro con la condición que en la estructura tipo anillo, el electrón y el hueco se muevan por caminos diferentes, resultando en un momento dipolar eléctrico diferente de cero [22–24]. Sin embargo, considerando la pequeña separación entre el electrón y el hueco, la carrera por la búsqueda del efecto AB del excitón neutro en un sistema tipo-I ha sido difícil. Debido a la asimetría radial en el confinamiento efectivo para electrones y huecos, Ding y colaboradores encontraron el efecto AB para el excitón. Mostrando oscilaciones tipo AB en el espectro de PL del excitón, de acuerdo con las predicciones teóricas anteriores y con similares conclusiones al trabajo de Teodoro y colaboradores. También, demostraron que un campo eléctrico vertical modifica el confinamiento del excitón y de esta manera permite controlar el efecto de interferencia cuántica. Aunque las características experimentales no son perfectamente comprendidas aún, Ding y colaboradores proponen que los principales resultados pueden ser explicados por un modelo microscópico de cómo se comporta un único excitón bajo la acción de campos magnéticos y eléctricos, donde el efecto óptico AB

para un único excitón es poco notorio, por lo tanto, métodos de espectroscopia de alta resolución son necesarios.

La observación de este efecto no solamente es de interés fundamental, Fischer *et al.* [87,88] sugirieron que el efecto AB excitónico en un anillo cuántico puede ser controlado dinámicamente por una combinación de campos magnético y eléctrico, todo esto como una nueva propuesta para atrapar luz.

Posibles experimentos planteados a futuro pueden focalizarse en el uso del campo eléctrico lateral para incrementar la polarización del excitón, por ende, mejorando la observación del efecto AB.

En vista del reciente descubrimiento experimental del efecto AB excitónico en un QR tipo-I [25,26], algunas características requieren atención especial. Primero, el incremento en la altura del borde del QR tipo volcán permite un espacio más grande para el electrón y el hueco, por lo tanto los estados excitónicos pueden exhibir, en menor medida, un comportamiento típico de un solo portador de carga en un QR [52,89–93]. Segundo, la mezcla entre las bandas puede tener un impacto importante sobre los estados del hueco, de igual manera, la dependencia del estado base de energía del excitón con el campo magnético [92]. Tercero, los resultados teóricos recientes han indicado que la variación espacial de los esfuerzos y tensiones en un anillo cuántico es benéfica para la aparición y la magnitud de las oscilaciones AB [89,92]. Los esfuerzos y tensiones en la nano-estructura pueden conducir a una separación efectiva del electrón y el hueco, incrementando de esta manera la polarización del excitón [94].

En este trabajo doctoral, se analiza teóricamente el efecto AB para el excitón X y el trión X^+ confinados en un QR tipo I, inclusive con no-uniformidades, donde se analiza el espectro energético para estos complejos excitónicos en presencia de campo magnético B aplicado a lo largo del eje de simetría.

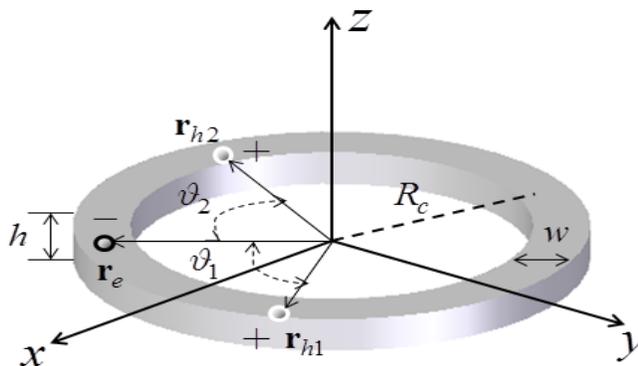
2. COMPLEJOS EXCITÓNICOS EN ANILLOS CUÁNTICOS UNIFORMES

En este capítulo se calcula y analizan los niveles más bajos de energía de los excitones neutros X y cargados positivamente X^+ confinados en un QR semiconductor con parámetros geométricos y valores de campo magnético diferentes.

2.1 HAMILTONIANO ADIMENSIONAL

Primero se construye el modelo matemático para complejos excitónicos: neutros X , con o sin presencia de impurezas, como también cargados positivamente X^+ y confinados en un QR circular, en presencia de un campo magnético B aplicado a lo largo del eje de simetría de acuerdo al esquema mostrado en la fig. 8.

Fig. 8 Esquema de un trión X^+ confinado en un QR .



Las dimensiones del QR se definen a través de tres parámetros, la línea central del radio R_c , la altura h , y el ancho w . Como ejemplo, los vectores \mathbf{r}_{h1} , \mathbf{r}_{h2} y \mathbf{r}_e definen las

posiciones de los dos huecos y del electrón, respectivamente. Dentro de la aproximación de masa efectiva, el Hamiltoniano adimensional de los complejos excitónicos en coordenadas cilíndricas se escribe de la siguiente manera [95]:

$$H = \sum_{k=h_1, h_2, e} H_k + \sum_{\substack{k, k'=h_1, h_2, e \\ k \neq k'}} \frac{2\eta_k \eta_{k'}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k'}|}; \quad H_k = \frac{1}{\mu_k} \left[-\nabla_k^2 + i\gamma\eta_k \frac{\partial}{\partial \phi_k} + \frac{\gamma^2 \rho_k^2}{4} \right] + V_k(\rho_k, z_k) + \Delta \cdot \delta_{k,e}. \quad (2.1)$$

El radio de Bohr efectivo $a_0^* = \hbar^2 \varepsilon / \mu e^2$ como la unidad de longitud, el Rydberg efectivo $Ry^* = e^2 / 2\varepsilon a_0^* = \hbar^2 / 2\mu a_0^{*2}$ como unidad de energía y el factor de Landau $\gamma = e\hbar B / 2\mu c Ry^*$ como la unidad de campo magnético, se han usado en el Hamiltoniano (2.1), siendo m_e^* y m_h^* las masas efectivas del electrón y el hueco y $\mu = m_e^* m_h^* / (m_e^* + m_h^*)$ la masa reducida. Las coordenadas cilíndricas $\mathbf{r}_k = (\rho_k, \phi_k, z_k)$ etiquetadas por $k = h_1, h_2, e$ corresponden al primer y segundo hueco y el electrón, respectivamente. Las siguientes notaciones han sido empleadas en la ecuación (2.1): $\mu_k = m_k^* / \mu$; $\eta_{h_1} = \eta_{h_2} = 1$, $\eta_e = -1$ en el caso del X^+ y $\eta_{h_1} = 1$; $\eta_{h_2} = 0$, $\eta_e = -1$ en el caso del X , y Δ para la brecha de energía entre la banda de conducción y la de valencia. El potencial vector \mathbf{A} se toma como $\mathbf{A} = -\mathbf{r} \times \mathbf{B} / 2$ dentro de H_k , este potencial vector no es realista porque diverge en el infinito debido a la consideración inicial de un campo magnético uniforme, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ no tiene fundamento en la física; sin embargo, es buena aproximación en una región local donde el campo magnético es constante.

Con el objetivo de tener mayor agudeza en los rasgos físicos, se simplificó el modelo hasta obtener uno sencillo y manejable, donde se asume en el Hamiltoniano (2.1) sólo bandas parabólicas para el hueco y retenemos únicamente los términos de la diagonal en las matrices H_{h_1} y H_{h_2} , ignorando el acoplamiento entre el hueco pesado y el hueco ligero. También se considera el modelo del QR con un potencial de confinamiento de barrera infinita, donde, $V_k(\rho_k, z_k)$ es igual a cero dentro del anillo cuántico e infinito en otros lugares, por lo tanto, el electrón y el hueco se encuentran al interior del QR .

2.2 APROXIMACIÓN ADIABÁTICA PARA HETEROESTRUCTURAS TIPO VOLCÁN

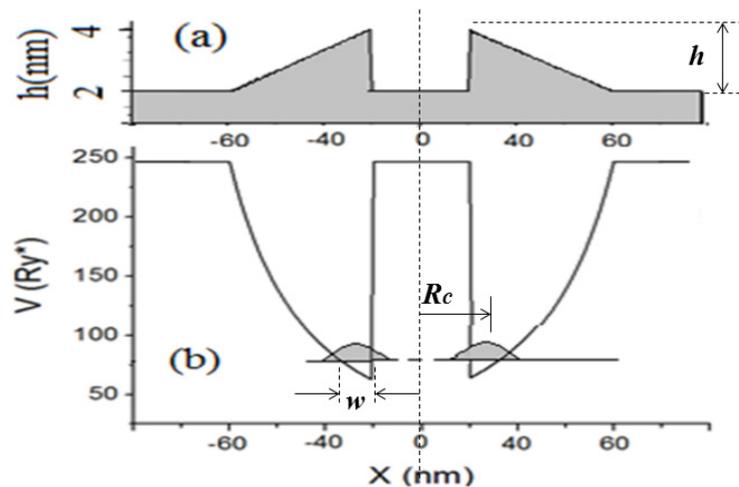
El Hamiltoniano (2.1) tiene nueve variables independientes y la solución numérica de la correspondiente ecuación de onda sugiere un trabajo numérico enorme. Una de las posibilidades para reducir el número de variables consiste en tomar provecho de la aproximación adiabática, siendo efectiva cuando las dimensiones de la heteroestructura tienen escalas significativamente diferentes en las diferentes direcciones del movimiento.

Entonces, primero observamos los anillos nanométricos reales, los cuales, generalmente tienen una morfología tipo volcán con una dirección transversal similar a aquella mostrada en la fig. 9(a), donde se presenta esquemáticamente un modelo simplificado correspondiente a una muestra real tomada de la ref. [14]. Una característica especial del modelo consiste en la existencia de un camino estrecho a lo largo de la cima del volcán en una vía casi circular. Por esta razón, se asume en este trabajo que la descripción del movimiento de las partículas confinadas en un *QR* delgado como modelo simplificado, en la cual, el ancho y el alto son significativamente pequeños respecto a la línea del radio central.

Realmente, como los *QRs* tienen una altura mayor cerca del hueco central de aproximadamente pocas unidades de nanómetros, mientras las dimensiones laterales son del orden de decenas de nanómetros, entonces, se aplica el procedimiento conocido de la aproximación adiabática estructural [96,97]. De acuerdo a esta aproximación, se analiza el movimiento rápido de las partículas a lo largo de la dirección axial y los desplazamientos lentos rotacionales y radiales separadamente. Se asume que el *QR* es axialmente simétrico, de altura h y la energía principal del estado base del movimiento está compuesta en un gran porcentaje por el aporte en la dirección axial E_z , entonces, este movimiento rápido depende solamente de la distancia de la base del *QR* y está aproximadamente dado por $E_z(\rho) = \pi^2 R y^* / h^2(\rho)$. Existe un cambio drástico de la energía de aproximadamente

250Ry* a 60Ry* cuando la partícula es desplazada desde la región interna a la región más abultada de la capa del QR, conduciendo a la formación de un movimiento en un plano donde el potencial efectivo será mínimo y la distribución de probabilidad a lo largo del eje transversal del QR corresponde al estado base de la energía, la probabilidad será diferente de cero en una región cercana al radio interno del QR tipo volcán, el cual es representado esquemáticamente en la fig. 9(b). Entonces, se basa en esta simplificación y en la idea de evaluar el dominio de los parámetros experimentales que afectan los QRs, adoptando en lo que sigue, un modelo simple de un QR delgado, homogéneo, con sección transversal rectangular en la cual, la altura y el ancho son menores que la línea de radio central ($w \ll R_c; h \ll R_c$) [32].

Fig. 9 (a) Modelo simplificado de la sección transversal de un QR tipo volcán a lo largo del eje X (b) el potencial de confinamiento correspondiente para un movimiento en el plano transversal y la densidad de probabilidad de encontrar una partícula a lo largo del eje X en el nivel inferior de energía.



Adicionalmente, se describen resumidamente algunos detalles del procedimiento del uso de la aproximación adiabática estructural que se usaron en los cálculos. El operador de

energía cinética $-\nabla_k^2/\mu_k$ en el Hamiltoniano (2.1) consiste de tres términos en coordenadas cilíndricas, los cuales, se pueden observar como tres operadores independientes describiendo cada uno un movimiento unidimensional en las direcciones radial, axial y azimutal de las portadores de carga con masas proporcionales a $1/w^2$, $1/h^2$ y $1/R_c^2$. Puesto que el factor $1/R_c^2$ es significativamente menor que las otras dos, se sigue el procedimiento adiabático estructural, donde, primero se resuelve la ecuación de onda para movimientos rápidos en las direcciones radial y axial, considerando los ángulos como parámetros. La solución del movimiento rápido en la sección transversal es la conocida expresión analítica para la energía del estado base en un pozo bidimensional de barrera infinita, siendo igual a:

$$E_0 = \left(\frac{1+\eta}{\mu_h} + \frac{1}{\mu_e} \right) \left(\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{\pi^2}{w^2} \right); \quad \eta \equiv \eta_{h2}. \quad (2.2)$$

Esta energía, la referimos en lo restante del trabajo doctoral, como la energía de fondo del sistema de partículas y corresponde a la energía más baja del sistema anular cuando no existe interacción electrostática entre los portadores de carga. Estas contribuciones son significativamente mayores que las energías de los estados rotacionales. E_0 es del orden de un electrón-voltio ($\sim 1 eV$), mientras la energía de los estados rotacionales son del orden de $\sim 1 meV$.

Además, de acuerdo con el procedimiento adiabático, los términos correspondientes a la interacción Coulombiana y diamagnéticos en el Hamiltoniano se renormalizan. Se hace uso de la normalización de energías propuesta en los artículos [96,97], llegando al siguiente Hamiltoniano que describe las partículas cargadas en rotación en un QR dentro del límite adiabático, donde las posiciones son dadas por las coordenadas polares de los huecos ϕ_{h1} , ϕ_{h2} y el electrón ϕ_e [32]:

$$\begin{aligned}
H(\eta) \approx & E_0 + \Delta - \frac{1}{I_h} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi_{h1}^2} + \eta \frac{\partial^2}{\partial \phi_{h2}^2} \right) - \frac{1}{I_e} \frac{\partial^2}{\partial \phi_e^2} + \frac{\gamma^2 \bar{R}^2}{4} \left(\frac{1+\eta}{\mu_h} + \frac{1}{\mu_e} \right) + \\
& + i \frac{\gamma}{\mu_h} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_{h1}} + \eta \frac{\partial}{\partial \phi_{h2}} \right) - i \frac{\gamma}{\mu_e} \frac{\partial}{\partial \phi_e} + \eta V_{h1,h2}(\phi_{h1} - \phi_{h2}) - V_{h1,e}(\phi_{h1} - \phi_e) - \eta V_{h2,e}(\phi_{h2} - \phi_e).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Aquí:

$$V_{ij}(\phi) = \int_{R_c-w/2}^{R_c+w/2} d\rho_i \int_{R_c-w/2}^{R_c+w/2} d\rho_j \frac{2f_i^2(\rho_i)f_j^2(\rho_j)}{\sqrt{\rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos \phi}} \approx 2/\sqrt{w^2/4 + \bar{R}^2 \sin^2 \phi/2}; \quad i, j = e, h_1, h_2$$

son los potenciales de la energía de interacción electrostática entre las partículas i y j promediados y calculados a través de la aproximación adiabática, siendo $f_i(\rho_i)$ combinaciones lineales de las funciones de Bessel que representan la parte radial de la ecuación de onda de una partícula en el estado base de energía del portador i dentro de una barrera infinita de dos dimensiones en un anillo de sección transversal circular con radio interno y externo, ρ_a y ρ_b , respectivamente. Más aún, como resultado de una renormalización similar se obtiene $\bar{R}^2 \approx R_c^2 + w^2/12$; con $I_i \approx \mu_i \bar{R}^2$.

2.3 HAMILTONIANO EN COORDENADAS DE CENTRO DE MASA

Dentro del marco de la aproximación adiabática estructural ($w \ll R_c$, $h \ll R_c$), las ecuaciones de onda tridimensionales para el excitón y el trión se hacen separables y el análisis de los niveles inferiores de energía es reducido a un problema sencillo de rotación unidimensional de pocos portadores de carga con interacciones renormalizadas. El Hamiltoniano (2.3) describe los complejos X y X^+ para $\eta = 0$ y $\eta = 1$, respectivamente, siendo separable completamente en el caso del excitón ($\eta = 0$), parcialmente separable para el excitón ligado a la donadora ($\eta = 1$ con $1/\mu_{h2} \rightarrow 0$) y para el complejo excitónico cargado (trión) cuando se hace uso de las coordenadas de centro de masa:

$$\Theta = (I_h(\phi_{h_1} + \eta\phi_{h_2}) + I_e\phi_e)/I; \quad \phi_1 = \phi_{h_1} - \phi_e; \quad \phi_2 = \phi_{h_2} - \phi_e; \quad I = (1 + \eta)I_h + I_e. \quad (2.4)$$

Luego de algunas manipulaciones algebraicas, se obtienen las expresiones correspondientes en las nuevas coordenadas:

$$H = E_0 + H_{CM} + H_r; \quad (2.5a)$$

$$E_0 = \Delta + \left(\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{\pi^2}{w^2} + \frac{\gamma^2 R_c^2}{4} \right) \sum_{k=e, h_1, h_2} \frac{|\eta_k|}{\mu_k}; \quad H_{CM} = - \left(\frac{1}{R_c^2 \sum_{k=e, h_1, h_2} |\eta_k| \mu_k} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \Theta} \right); \quad (2.5b)$$

$$H_r = -\frac{1}{\bar{R}^2} \left[\frac{2\eta_{h_2}}{\mu_e} \frac{\partial^2}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} + \alpha_2 \eta_{h_2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} \right] + i\gamma \left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \alpha_2 \eta_{h_2} \frac{\partial}{\partial \phi_2} \right] + \eta_{h_2} V_{h_1, h_2}(\phi_1 - \phi_2) - V_{h_1, e}(\phi_1) - \eta_{h_2} V_{h_2, e}(\phi_2); \quad \alpha_k = 1/\mu_e + 1/\mu_{h_k}; \quad k = 1, 2. \quad (2.5c)$$

2.4 MÉTODO DE FOURIER

En el cálculo numérico, los eigenvalores del Hamiltoniano (2.5) se buscan usando funciones en series de Fourier trucadas, sencillas para el excitón neutro X y dobles para el complejo excitónico cargado positivamente X^+ . En caso general,

$$H\Psi_X(\Theta, \phi_1) = E_X \Psi_X(\Theta, \phi_1); \quad \Psi_X(\Theta, \phi_1) = e^{iM\Theta} \sum_{m=-N}^N c_m e^{im\phi_1}; \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6a)$$

$$H\Psi_{X^+}(\Theta, \phi_1, \phi_2) = E_{X^+} \Psi_{X^+}(\Theta, \phi_1, \phi_2); \quad \Psi_{X^+}(\Theta, \phi_1, \phi_2) = e^{iM\Theta} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{m_2=-N}^N c_n e^{im_1\phi_1} e^{im_2\phi_2}$$

$$M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = (m_2 + N)(2N + 1) + m_1 + N + 1.$$

(2.6b)

Los números cuánticos M definen el valor del momento angular de centro de masa, mientras, los números cuánticos m_1 y m_2 definen el momento angular de los desplazamientos relativos de los huecos respecto al electrón, siendo N el número total de términos tomados en cada serie, y $N_f = (1 + 2N\eta_{h_2})(2N + 1)$ es el número total de

términos de todas las series. Entonces, el polinomio de Fourier, se puede encontrar de la siguiente ecuación secular:

$$\sum_{n=1}^{N_f} \left\{ \left[E - \widetilde{E}_0(M) \right] \delta_{n,n'} - A_{n,n'} \right\} \cdot c_n = 0; \quad N_f = (2N+1)^{1+\eta_{h_2}}; \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.7a)$$

$$n = m_1 + N + 1 + \eta_{h_2} (m_2 + N)(2N+1); \quad m_k = \overline{-N, N}; \quad k = 1, 2;$$

$$A_{n,n'} = \left\{ \frac{1}{\overline{R}^2} \left(\frac{2\eta_{h_2}}{\mu_e} m_1 m_2 + \alpha_1 m_1^2 + \eta_{h_2} \alpha_2 m_2^2 \right) - \gamma \left[\alpha_1 m_1 + \eta_{h_2} \alpha_2 m_2 \right] \right\} \delta_{n,n'} + \quad (2.7b)$$

$$+ 2\eta_{h_2} U_{m_1'-m_2', -m_1+m_2}^{(h_1 h_2)} \delta_{m_1'+m_2', m_1+m_2} - V_{m_1'-m_1}^{(eh_1)} \delta_{m_2', m_2} - \eta_{h_2} V_{m_2'-m_2}^{(eh_2)} \delta_{m_1', m_1};$$

$$\widetilde{E}_0(M) = \Delta + \left(\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{\pi^2}{w^2} + \eta_{h_2} \frac{\gamma^2 R_c^2}{4} \right) \sum_{k=e, h_1, h_2} \eta_k / \mu_k + \left(\frac{M^2}{R_c^2} - M\gamma \right) / \sum_{k=e, h_1, h_2} \eta_k \mu_k \quad (2.7c)$$

$$V_m^{(eh_k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{eh_k}(\phi) e^{-im\phi} d\phi; \quad U_m^{(h_1 h_2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{h_1 h_2}(2\phi) e^{-im\phi} d\phi; \quad k = 1, 2,$$

aquí η_{h_2} es igual a cero para excitones neutros y uno para el trión, por ejemplo, si $\eta_{h_2} = 0$ entonces $E = E_X$, en otro caso, si $\eta_{h_2} = 1$ entonces $E = E_{X^+}$. En el trabajo numérico se calculan primero las funciones $V_{ij}(\phi)$ definidas en la relación (2.3), y luego, se encuentran los coeficientes de Fourier definidos en la ecuación (2.6), por último se finaliza con la solución del problema de valores propios de la ecuación (2.7).

En el caso particular del excitón en un QR sin impurezas ($\eta = 0$ ó $\eta_{h_2} = 0$), las variables ϕ y Θ en el Hamiltoniano (2.5) se pueden separar, por lo tanto, la energía del excitón es la suma de los términos correspondientes al centro de masa (CM) y al movimiento relativo. La energía de centro de masa es igual a $E_{CM}(M) = M^2/I$ con $M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, donde son valores del momento angular de CM adimensional, mientras la energía del movimiento relativo y sus funciones propias se encuentran sólo numéricamente.

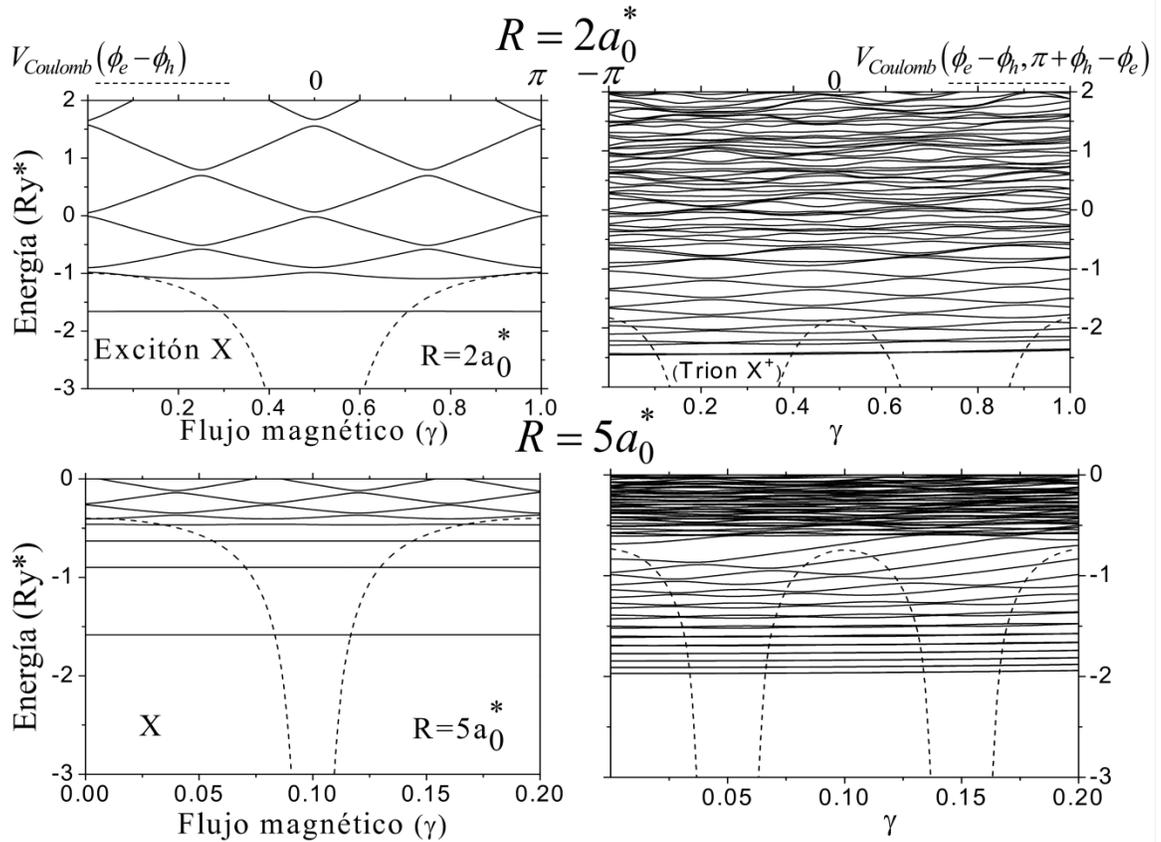
2.5 RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL ESPECTRO DEL EXCITÓN Y EL TRIÓN CARGADO POSITIVAMENTE

Las simulaciones corresponden a una hetero-estructura en la base de los siguientes materiales $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Al}_{0.35}\text{Ga}_{0.65}\text{As}$, los parámetros físicos son [98]: constante dieléctrica $\varepsilon = 12.71\varepsilon_0$, masa efectiva en la región del QR para el electrón $m_e = 0.076m_0$, y el hueco pesado $m_h = 0.45m_0$. Se escalaron todas las longitudes en términos del radio efectivo de Bohr $a_0^* = \hbar^2\varepsilon / \mu e^2 \approx 10.4\text{nm}$, las energías en Rydberg efectivos del excitón $Ry^* = e^2/2\varepsilon a_0^* \approx 5.2\text{meV}$, y la magnitud de campo magnético en términos del primer nivel energético de Landau expresado como $\gamma = e\hbar B / 2\mu c Ry^*$, siendo μ la masa reducida del par electrón-hueco dentro del QR $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h) \approx 0.065m_0$. Todas las energías en las figuras **10** - **14** tienen como base la energía de fondo E_0 dada por la relación (2.2). E_0 se suma luego a la energía de los estados rotacionales para encontrar la energía total del sistema.

Se presentan en esta sección algunos resultados de los cálculos para anillos con altura $h = 0.2a_0^*$ y ancho $w = 0.2a_0^*$. En la fig. **10**, se presentan algunos de los niveles más bajos de energía para el excitón neutro y cargado positivamente en función del campo magnético aplicado en anillos con radio central $R_c = 2a_0^*$ y $5a_0^*$. Se observa en las dos partes de la fig. **10** que en ambos casos los niveles de energía son divididos en dos grupos con diferentes respuestas al campo magnético aplicado, los niveles más bajos no varían y los superiores son muy sensibles al campo magnético con múltiples cruces y reordenamiento entre ellos. Para dar una explicación a este comportamiento de niveles, se presenta en la fig. **10**, la dependencia angular del potencial de atracción, $V_a(\phi) = V_{Coul}(\phi, \pi - \phi)$, que se deriva de la relación (2.3) asumiendo que los huecos, para el caso del trión X^+ , están situados diametralmente opuestos en el anillo debido a la repulsión fuerte entre ellos.

Los niveles de energía que pertenecen al primer grupo son localizados debajo del máximo de la curva de potencial Coulombiano. Como la atracción electrostática del par electrón-hueco para estos estados es mayor que la energía cinética, el electrón y el hueco oscilan alrededor del centro de masa en un estado ligado. El movimiento oscilatorio no suministra una corriente y por lo tanto, el campo magnético externo no afecta estos estados. Como consecuencia, estos niveles de energía no dependen del campo magnético externo.

Fig. 10 Dependencia de los niveles inferiores de energía en función del campo magnético, en el lado izquierdo el excitón, y en el derecho el trión, en QRs con radios $R_c = 2a_0^*$ en la fila superior y $R_c = 5a_0^*$ en la parte inferior. La línea punteada muestra la dependencia angular del potencial de atracción entre el electrón y el hueco, asumiendo, en el caso del trión, los huecos en posiciones opuestas diametralmente.



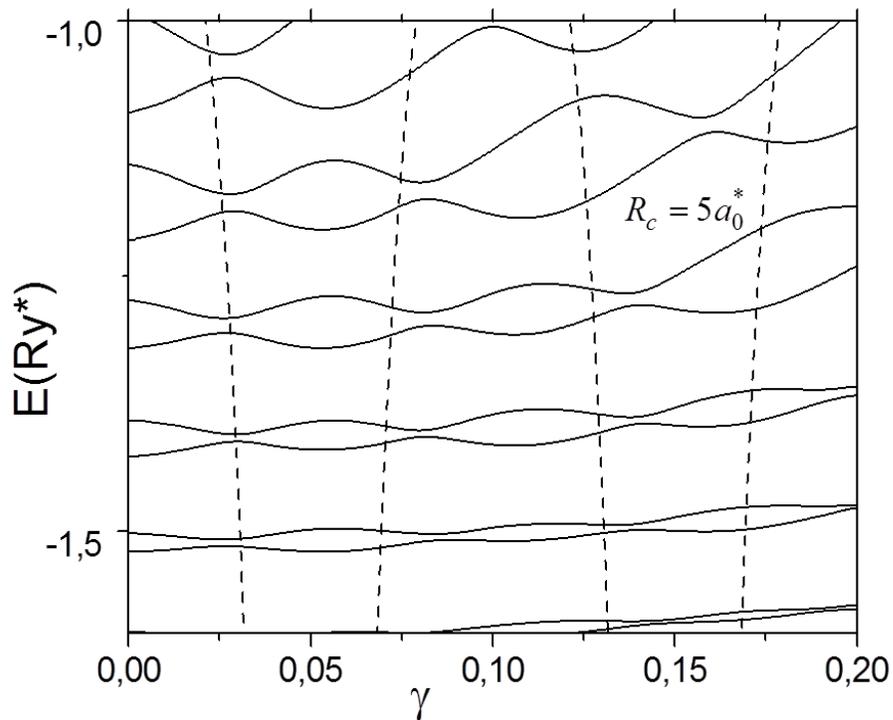
Por el contrario, los niveles de energía arriba del máximo de potencial, la energía cinética domina y el sistema no se encuentra ligado, está en fase gaseosa con rotación de partículas independientemente a lo largo del anillo. La interacción de la corriente, proporcionada por la rotación de los portadores de carga con el campo magnético aplicado, cambia la energía del sistema debido a la contribución de dos términos en el Hamiltoniano, correspondientes a las energías paramagnéticas y diamagnéticas. La competición entre estos términos conduce a los cruces y el reordenamiento de los niveles de energía observados en la parte superior de la fig. **10**.

Además, comparando las curvas para dos radios diferentes en la fig. **10**, se observa que, el incremento del radio del anillo proporciona un aumento del número de estados vibracionales con energías independientes al campo magnético y simultáneamente, una menor brecha entre estados rotacionales. Lo anterior es debido al aumento del momento de inercia, causado por el crecimiento del radio de los anillos. Más aún, cuando el radio aumenta, los niveles inferiores son dominados por la energía electrostática negativa (proporcional a \bar{R}^{-1}) sobre la energía cinética (proporcional a \bar{R}^{-2}) resultando un número mayor de estados vibracionales.

Las curvas de los niveles inferiores de energía en el lado derecho de la fig. **10** tienen otra particularidad interesante debido a la existencia de dos tipos de estados relacionados a la indistinguibilidad de los dos huecos. El movimiento lento de los dos huecos, en sus niveles más bajos de energía, se puede considerar como una combinación lineal de oscilaciones relativas simétricas y antisimétricas en posiciones cercanas al electrón, estas oscilaciones se mezclan debido a las corrientes túnel a lo largo del anillo y son causadas por la presencia del campo magnético externo. En la fig. **11**, se muestra con mayor resolución lo explicado anteriormente, las curvas de energía del trión, en un anillo con línea de radio central de $5a_0^*$. Se observa que, las curvas conforman una serie de trenzas no cruzadas debido a la

interacción entre las corrientes túnel con el campo magnético. Los dos niveles de cada trenza, corresponden a los estados simétricos y antisimétricos, respectivamente, con una pequeña brecha entre ellas, donde los niveles son periódicamente degenerados debido a la simetría rotacional del anillo.

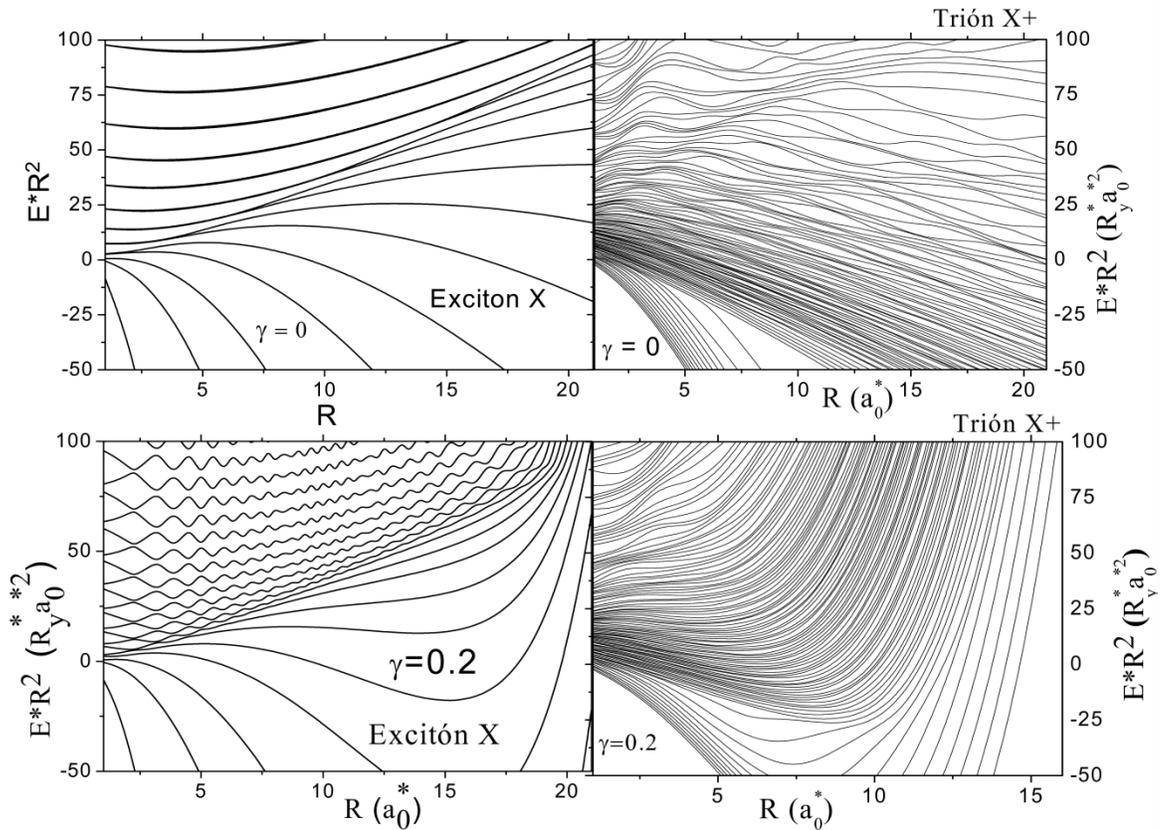
Fig. 11 Algunos niveles inferiores de energía del trión en QRs con radios $R_c = 5a_0^*$ son mostrados en alta resolución con el fin de ilustrar cómo las trenzas no se entrecruzan en la parte inferior del espectro, correspondientes a los estados simétricos y antisimétricos que luego se convierten en una serie de líneas con múltiples entrecruzamientos y reordenamientos en la parte superior del espectro, pertenecientes a estados rotacionales.



Otro efecto cuántico interesante, asociado al tamaño, es relacionado a la correspondencia entre el confinamiento y la interacción electrostática. Cualquier disminución en el radio provee un incremento en la energía cinética rotacional proporcional a $1/\bar{R}^2$. Por el

contrario, para radios grandes, la mayor contribución será debido a la energía electrostática, proporcional a $1/\bar{R}$. Por lo tanto, se espera que la dependencia de las energías renormalizadas $\tilde{E} = E \cdot \bar{R}^2$ sea lineal para radios suficientemente grandes, con pendiente positiva para los estados gobernados por la repulsión electrostática y negativa para configuraciones donde la atracción domina. En la fig. 12, se presentan las energías renormalizadas de los complejos excitónicos, neutro X (en la columna izquierda) y cargado X^+ (en la columna derecha) en función del radio QR para campo magnético nulo (en la parte superior) y para $\gamma = 0.2$ (en la parte inferior).

Fig. 12 Energías renormalizadas de los niveles inferiores del excitón y el trión en función del radio.

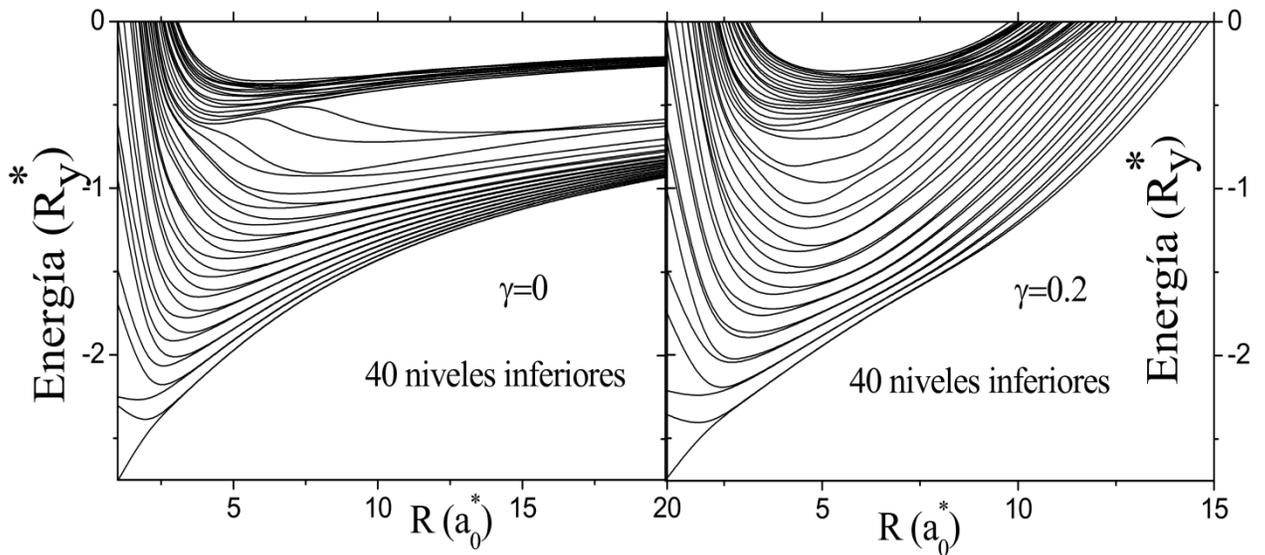


Se ve claramente, para el caso del excitón neutro, que todas las curvas tienen puntos silla donde la pendiente cambia de signo positivo a negativo. Los diferentes puntos silla forman una línea divisoria que separa los estados donde domina la energía cinética (región superior) de aquellos que domina la energía de atracción electrostática (región inferior). Para el caso del trión X^+ , el análisis es más complicado, debido a la presencia de las tres partículas, se observa en la fig. 12 un cambio múltiple de pendiente para los estados excitados. Sin embargo, se percibe claramente que, el comportamiento de los niveles más bajos de energía del trión es similar al del excitón. En el caso del trión, deben existir una serie de separatrices, en las cuales, las regiones son divididas con uno, dos o tres, o más puntos silla. Adicionalmente, se observa en la fig. 12, que el comportamiento asintótico de la dependencia de energías respecto al radio del anillo en presencia de un campo magnético se transforma drásticamente debido a la contribución del término diamagnético, que es dominante, siendo proporcional a $\gamma^2 \bar{R}^4$, proporcionando un incremento considerable en las pendientes de las curvas de energía $\tilde{E} = E \cdot \bar{R}^2$, cuando se aproxima al límite de radios grandes del QR .

Por otro lado, se considera el complejo excitónico X^+ confinado en un nano-anillo como una molécula artificial cuasi-unidimensional similar a la molécula de hidrógeno ionizada H_2^+ , para la cual, existe una correlación fuerte entre la separación promedio entre los huecos y el radio del QR . Por lo tanto, se espera que los niveles de energía rotacional del trión en función del radio del QR sean parecidos a las curvas de potencial de la molécula de hidrógeno ionizada. Realmente, como se observa en la fig. 13, donde se presentan los primeros 40 niveles de energía del trión X^+ en función del radio del QR , para el caso de campo magnético cero (en el lado izquierdo) y para $\gamma = 0.2$ (en el lado derecho), tales dependencias tienen un contorno típico a las curvas de potencial moleculares. Aquí tenemos dos peculiaridades interesantes en las dependencias presentadas en la fig. 13, relacionadas con la reducción de la dimensionalidad del espacio.

Este modelo de QR tiene una dimensionalidad espacial efectiva D^* , donde las partículas son confinadas en menos de dos dimensiones pero más grande que una. De acuerdo a la teoría de escalado dimensional [99], una distancia en un espacio de menor dimensionalidad es reducida $(D^*-1)/2$ veces. La separación entre los iones de una molécula tridimensional de hidrógeno correspondiente al mínimo de energía, para el estado fundamental, es del orden $2a_0^*$. En la fig. 13, el mínimo de energía corresponde al estado base, y este estado tiene una distancia menor que el radio efectivo Bohr, en buen acuerdo con la condición $1 < D^* < 2$. Adicionalmente, se observa que la posición del mínimo de las curvas de energía potencial, para estados excitados, incrementa conforme el número de niveles aumentan.

Fig. 13 Niveles inferiores de energía del trión en función del radio del QR .



Otra peculiaridad de las curvas observadas en la fig. 13 es la separación en dobletes de todos los niveles cuando el radio del QR se va haciendo pequeño, la cual, se atribuye a la existencia de dos tipos de soluciones de la ecuación (2.6) con diferente simetría. Porque en

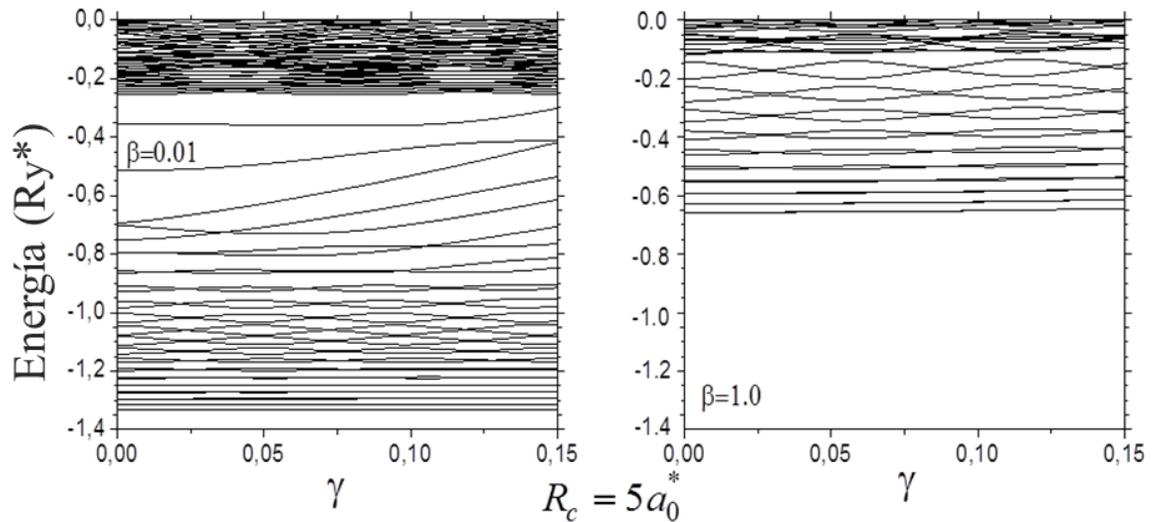
la ecuación (2.6), para el caso del trión ($\eta = 1$), es una función de onda que describe dos partículas idénticas uni-dimensionales interactuando bajo el potencial $V_{Coul}(\phi_1, \phi_2)$, invariable respecto a la permutación de las partículas. Por lo tanto, este sistema tiene dos soluciones diferentes, una correspondiente a un estado singlete $\Phi_s(\phi_1, \phi_2) = \Phi_s(\phi_2, \phi_1)$ y la otra, a un estado triplete $\Phi_t(\phi_1, \phi_2) = -\Phi_t(\phi_2, \phi_1)$. Cuando el radio del QR es grande, los huecos se localizan principalmente en posiciones diametralmente opuestas dentro del anillo, la distancia promedio es significativa y la división entre el estado singlete y el triplete es muy pequeña. Por el contrario, cuando el radio del anillo es pequeño, la energía cinética de los huecos incrementa, encontrándose nuevos valores más probables para los ángulos ϕ_1, ϕ_2 de separación relativa entre los huecos y el electrón, haciéndose la división entre los niveles singlete y triplete más notable. Por lo tanto, a menor radio, mayor será la separación entre niveles.

Bajo un campo magnético externo, los portadores con diferentes cargas, forman un complejo excitónico tratando de rotar en direcciones opuestas, facilitándose de esta manera la formación de estados ligados excitónicos. Los niveles más bajos de energía son más estables y casi insensibles al campo magnético externo, mientras los estados excitados superiores tienen menor energía de enlace y ellos generan corrientes que interactúan con el campo magnético.

Por otro lado, la estabilidad de los diferentes estados de los complejos excitónicos, en función del campo magnético externo, depende fuertemente de la razón de masas entre el electrón y el hueco $\beta = m_e/m_h$. Cuando esta razón decrece de uno a cero, un número mayor de niveles se hacen más estables. Para ilustrar esto, se presenta en la fig. 14 las dependencias de los niveles de energía del trión X^+ en función del campo magnético γ en un QR con parámetros $R = 5a_0^*$, $h = 0.2a_0^*$ y $w = 0.2a_0^*$ para dos valores de razón másica entre el electrón y el hueco $\beta = 0.01$ y 1.0 (en el lado izquierdo y derecho de la fig. 14, respectivamente).

En el primer caso, correspondiente al trión con los huecos significativamente más pesados que el electrón, el espectro energético es similar al espectro de la molécula de hidrógeno ionizado (una estructura fuertemente ligada), mientras en el segundo es parecido a un espectro de tres partículas independientes (una estructura tipo gas). Como la masa efectiva reducida del par electrón-hueco en el primer caso es del orden dos veces superior que el segundo caso, la energía de enlace, de los estados inferiores para $\beta = 0.01$, es casi el doble que el caso $\beta = 1$. El espectro energético, en su parte inferior, en ambos casos describe los estados vibracionales (estados ligados) y estos son discretos, mientras en la parte superior corresponden a los estados rotacionales (no ligados), y poseen múltiples subniveles, con una muy alta densidad de estados, siendo casi-continuos.

Fig. 14 Niveles inferiores de energía de excitones cargados positivamente en función del campo magnético, para dos valores de razón de masas entre el electrón y el hueco.



Se observa también, en la parte discreta del espectro de la fig. 14, que los niveles inferiores son degenerados debido a la simetría de reflexión entre los estados ligados y anti-ligados.

El umbral, donde se separa la parte discreta del espectro energético de la parte cuasi-continua, es aproximadamente igual a $-0.25Ry^*$ y $-0.12Ry^*$, en el lado izquierdo y derecho de la fig. 14, respectivamente. Estos valores también están en concordancia con la relación de proporción entre las masas reducidas. Como las energías correspondientes al movimiento del caso $\beta = 0.01$ son menores, las brechas entre niveles rotacionales en el lado izquierdo de la fig. 14 son menores y por lo tanto la densidad de estados en la parte cuasi-continua del espectro es significativamente más alta que la parte derecha.

3. LOCALIZACIÓN DE ESTADOS EXCITÓNICOS PRODUCIDA POR UNA DONADORA

En orden a analizar el efecto del enlace del excitón a la donadora sobre las propiedades espectrales en un QR , se desarrollaron cálculos numéricos para los niveles inferiores de energía en función del campo magnético externo. Los valores de los parámetros físicos usados en los cálculos pertenecen al material InAs, donde: la masa efectiva del electrón, hueco liviano (*light hole HL*) y pesado (*heavy hole HH*) son $m_e^* \approx 0.026m_0$, $m_{HL}^* \approx 0.026m_0$ y $m_{HH}^* \approx 0.45m_0$, respectivamente, la constante dieléctrica, $\epsilon \approx 13$, y la brecha entre la banda de valencia y la de conducción $\Delta = 0.41 eV$ [100]. Los valores del radio efectivo de Bohr y el Rydberg efectivo correspondientes con estos parámetros son $a_0^* \approx 26.3 nm$ y $Ry^* \approx 2.1 meV$, y $\gamma \approx B(T)$. Donde $\mu_h \approx 0.5$ para el hueco ligero y $\mu_h \approx 0.026$ para el hueco pesado. Se presentan a continuación algunos resultados de los niveles inferiores de energía del excitón libre y ligado a una donadora confinados en un QR de InAs con línea de radio central $R = 40 nm$, altura $h = 6 nm$ y ancho $w = 10 nm$.

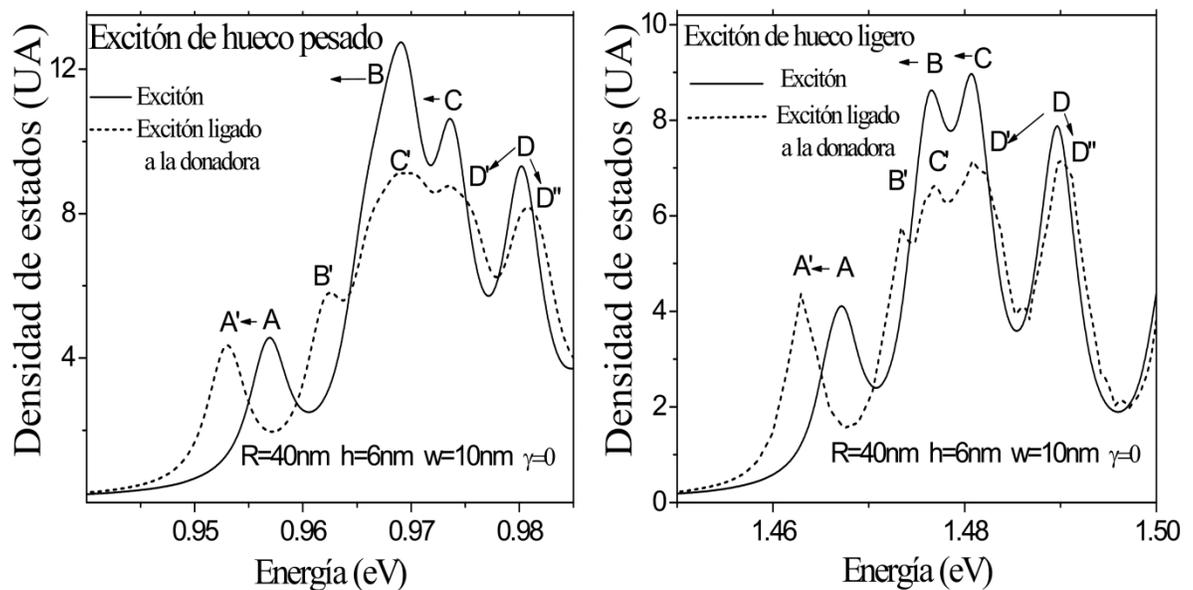
En la fig. **15** se muestran las curvas de la densidad de los estados $\rho(E)$ que se calcularon a través de la siguiente relación:

$$\rho(E) = \sum_k \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(E - E_k)^2 + \Gamma^2}. \quad (3.1)$$

Aquí E_k son las energías del sistema analizado, ordenadas de menor a mayor, y Γ es el ancho de línea natural para un modelo basado en una función Lorentziana adoptada para estos cálculos. Para aumentar la estabilidad en el análisis numérico, en orden a obtener una $\rho(E)$ continua, una función Lorentziana ancha es empleada, en lugar de una función Delta de Dirac aguda [101]. La densidad de estados está dada en unidades arbitrarias (UA), debido al continuo escalado de las curvas para evitar superposición entre las mismas.

Donde el parámetro Γ utilizado es similar al espacio entre niveles energéticos de varios estados de diferente valor de centro de masa $0 \leq M \leq 9$, pero igual número cuántico relativo m , entonces Γ es del orden de unidades de meV . Las curvas en la fig. 15 se muestran para el caso de campo magnético cero, para excitones de hueco pesado y ligero en el lado izquierdo y derecho de la figura, respectivamente. Las líneas sólidas corresponden a las del excitón libre y la línea punteada corresponde a la del excitón ligado a la donadora. Se observa que la diferencia entre las energías del excitón libre de hueco ligero y el ancho de banda $\Delta = 0.41eV$ es alrededor del 100% superior a aquella del excitón de hueco pesado. Lo anterior es debido al factor $1/\mu_h + 1/\mu_e$, en la expresión (2.7). Entonces, las energías del excitón de hueco ligero son aproximadamente dos veces más grandes que la del excitón de hueco pesado.

Fig. 15 Densidad de estados del excitón neutro, de hueco pesado (lado izquierdo) y de hueco ligero (lado derecho), confinados en QRs con parámetros indicados en la figura. Las líneas sólidas corresponden al excitón libre y las líneas punteadas al excitón ligado a la donadora.



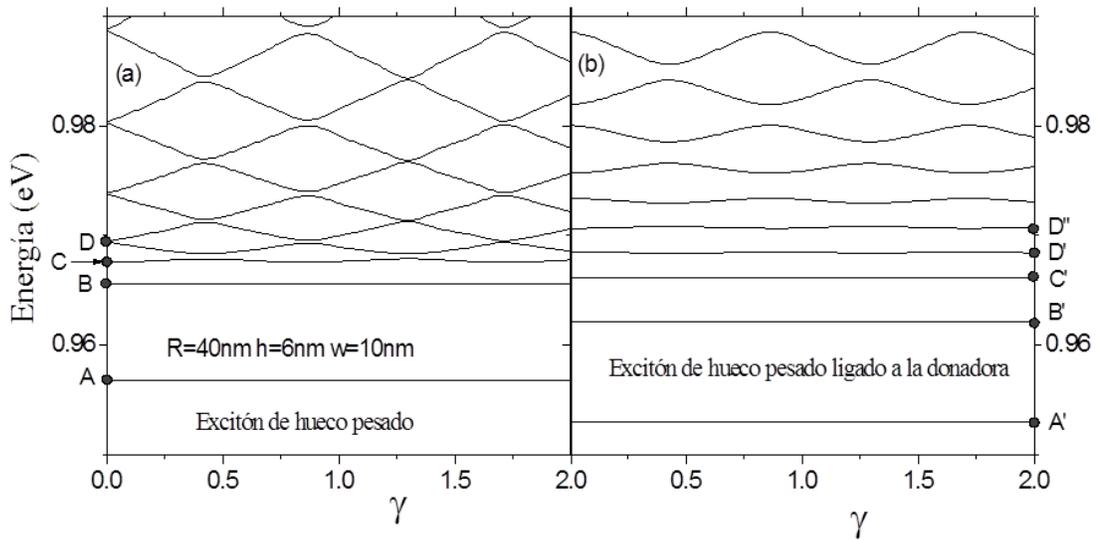
También se observa que la presencia de la donadora en el QR conduce a un corrimiento al rojo de los picos inferiores A, B, y C, y una división del pico D tanto para excitón de hueco ligero como para el complejo de hueco pesado. Es claro que, los corrimientos de los picos están relacionados al enlace del excitón con la donadora y la formación de configuraciones en las cuales el electrón está principalmente situado a mitad de camino entre la donadora y el hueco. Los niveles inferiores de energía de los estados ligados son gobernados por la atracción Coulombiana, mientras, la división del pico D es relacionada a la ruptura de la simetría rotacional debido a la presencia de la impureza. Donde, los primeros tres niveles inferiores de energía correspondientes a los picos A, B y C el movimiento relativo electrón-hueco tiene un carácter vibracional, mientras el cuarto estado D, el movimiento relativo es una rotación que se realiza por medio del tunelamiento de los portadores de carga a través de la barrera de potencial periódico Coulombiano [33].

Una ruta atractiva para el análisis del efecto de la impureza sobre las propiedades espectrales de los complejos excitónicos en QR s es proporcionada a través del estudio de la dependencia de los niveles inferiores de energía con el campo magnético externo aplicado a lo largo del eje de simetría. En la fig. 16 se muestran algunos niveles inferiores de energía del excitón de hueco pesado en un QR , libre y ligado a la donadora, en función del campo magnético. De hecho, el espectro excitónico de absorción total es más complicado que el observado en la fig. 16, donde, se muestra sólo el fondo de las diferentes subbandas cuando el momento angular de centro de masa es igual a cero ($M = 0$).

Se observa en la en fig. 16(a) que el excitón en un QR homogéneo, los niveles superiores exhiben un comportamiento típico del efecto AB acompañado de oscilaciones, reordenándose y entrecruzándose los niveles de energía, generados por el incremento del campo magnético. De acuerdo al Hamiltoniano (2.5), la energía total del par electrón-hueco en estos estados es una superposición de energías de la rotación del centro de masa, la cual no genera una corriente, y también del movimiento relativo entre el electrón y el hueco que se desplazan en direcciones opuestas, y por lo tanto pueden generar una corriente

alrededor del anillo. La corriente es formada, sólo si, la energía correspondiente al movimiento relativo es suficientemente grande para tunelar con alta probabilidad a través de la barrera de potencial de Coulomb.

Fig. 16 Niveles inferiores de energía del excitón neutro de hueco pesado en función del campo magnético en un *QR*, (a) libre y (b) ligado a una donadora.



La oscilación AB para energías superiores es el resultado de la competición entre los términos correspondientes a la interacción del momento magnético inducido con el campo externo y el confinamiento magnético. Por el contrario, los tres niveles inferiores A, B, y C corresponden a estados ligados, en los cuales, el movimiento relativo es vibracional que no genera corriente en el anillo siendo estas energías insensibles a la variación del campo magnético. Se observa, sin embargo, que todos los estados superiores en energía al estado D vienen degenerados para cada campo magnético “mágico” ($\gamma = 0, 1, 2, \dots$) cuando las energías de las rotaciones relativas son iguales, tanto en la dirección de las manecillas del reloj como en contra. Caso contrario, los tres niveles inferiores de energía se convierten en

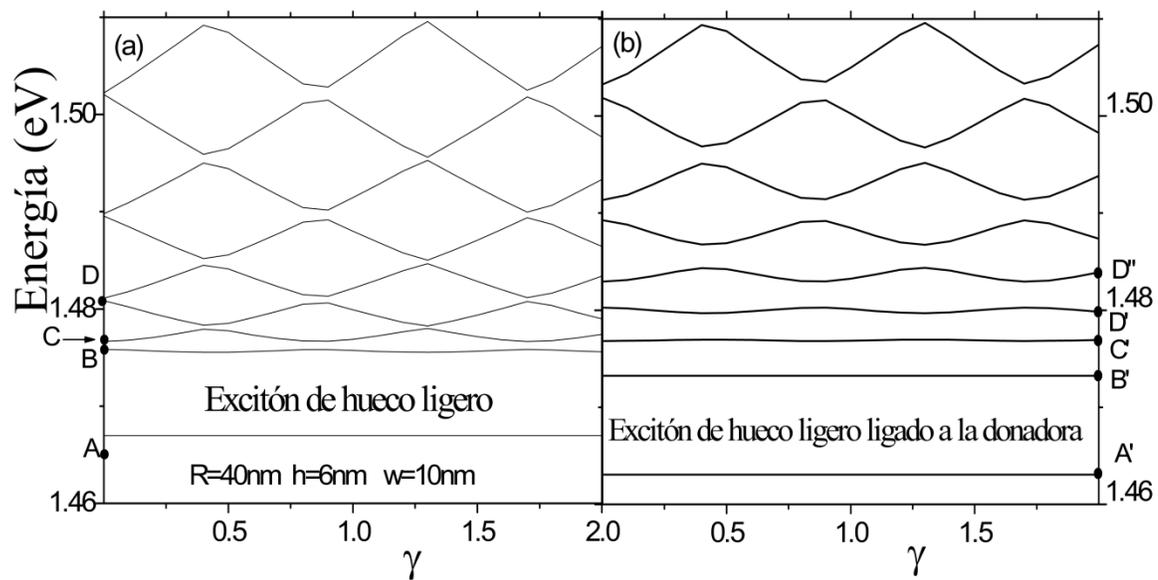
degenerados, confirmando, de nuevo, que el movimiento relativo en estos estados es vibracional.

En el lado derecho de la fig. **16** se observan las alteraciones esenciales en las curvas debido a la presencia de la donadora en el anillo cuántico. Primero, las energías de los estados vibracionales A, B y C descienden, debido al enlace del excitón a la donadora, sin ningún cambio en las dependencias del campo magnético. Segundo, las dependencias de las energías con del campo magnético, para los niveles superiores, son aplanadas y las amplitudes de las oscilaciones AB son reducidas. Finalmente, en presencia de la donadora, la simetría rotacional se rompe y se observan en la fig. **16(b)** una división de los niveles de energía en los puntos de degeneración en las curvas correspondientes a las oscilaciones AB.

En la fig. **17** se presentan dependencias similares de la energía del excitón de hueco ligero en un *QR* con las mismas dimensiones que las usadas en el caso anterior. En el lado izquierdo y derecho se muestran los resultados para el excitón libre y ligado a una donadora en un *QR*, respectivamente. Se observa una similitud entre las curvas de las figuras **16** y **17**, a lo largo de los niveles vibracionales A, B, y C, y una división similar en el punto D convertidos en puntos D' y D'', y las divisiones de los niveles superiores, correspondiente a niveles rotacionales degenerados. No obstante, existen algunas diferencias esenciales entre los resultados del excitón de hueco pesado y el hueco ligero presentados en las figuras **16** y **17**.

Primero, se observa que la alteración de las curvas para el excitón de hueco pesado, debido a la presencia de la donadora en la fig. **16**, es más fuerte con un aplanamiento de las curvas y una mayor división de los niveles que aquella para el excitón de hueco ligero en la fig. **17**. Segundo, los valores absolutos de energía del excitón de hueco ligero son superiores y las amplitudes de las oscilaciones AB son mayores que aquellas del excitón de hueco pesado. Esto es debido al hecho que el incremento de la energía cinética proporcionada por el confinamiento es mayor para el excitón de hueco ligero que para aquella del excitón de hueco pesado.

Fig. 17 Niveles inferiores de energía del excitón neutro de hueco ligero en función del campo magnético aplicado, en un *QR* (a), y ligado a una impureza donadora (b).



4. REVELACIÓN DE OSCILACIONES AHARONOV-BOHM MEDIANTE ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN DE LA DENSIDAD DE LOS ESTADOS

Con el fin de analizar el efecto de la variación de la razón de masas entre el electrón y el hueco, también entre los huecos, y cómo afecta las oscilaciones Aharonov-Bohm de los niveles energéticos de los complejos excitónicos, se presenta a continuación los resultados de cálculos numéricos para los niveles inferiores de energía de diferentes tipos de complejos excitónicos en función del campo magnético externo. Los valores de los parámetros físicos del material InAs, usados en los cálculos, fueron enunciados en el capítulo 3 de este trabajo doctoral y tomados de la referencia [100].

Teniendo en cuenta que en este material las masas efectivas del electrón m_e^* y el hueco ligero m_L casi coinciden, mientras la masa del hueco pesado m_H es muy superior a estas dos, uno puede encontrar una analogía entre los complejos excitónicos analizados en este capítulo y estructuras moleculares y atómicas artificiales. Toda nomenclatura que se utiliza a continuación se formula a partir de una estructura del trión TH_1H_2 , donde las masas de los dos huecos son m_{h_1} y m_{h_2} . Por ejemplo: el excitón neutro de hueco pesado es análogo al átomo de hidrógeno (XH , $m_{h1} = m_H$, $m_{h2} = 0$); el excitón neutro de hueco ligero es análogo al positronio (XL , $m_{h1} = m_L$, $m_{h2} = 0$); el excitón cargado positivamente formado por el electrón y dos huecos pesados análogo a una molécula de hidrógeno ionizada (THH , $m_{h1} = m_H$, $m_{h2} = m_H$); el excitón cargado positivamente formado por el electrón, un hueco ligero y un hueco pesado es análogo al átomo positronio ligado a un protón (TLH , $m_{h1} = m_H$, $m_{h2} = m_L$); el excitón cargado positivamente formado por un electrón y dos huecos ligeros es análogo a una estructura tipo gas (TLL , $m_{h1} = m_L$, $m_{h2} = m_L$).

Para todos los casos, el momento angular de centro de masa M en la función de onda (2.6) es un “buen” número cuántico porque el operador momento angular de centro de masa conmuta con el Hamiltoniano. Los otros números cuánticos, que describen los diferentes estados en los desplazamientos relativos entre los huecos y el electrón, se mezclan con la interacción Coulombiana y, por lo tanto, las energías $E_{rot}(n)$, $n=1,2,\dots,N_f$ de los estados relativos se obtienen resolviendo numéricamente la ecuación secular (2.7). Hay un número infinito de subniveles con diferentes momentos angulares de centro de masa M adjuntos a cada uno de estos estados relativos cuya energía total es definida como $E(M,n) = \widetilde{E}_0(M) + E_{rot}(n)$.

Primero, se analiza el espectro del excitón neutro restringiendo nuestro estudio solamente a estados con momento angular de centro de masa igual a cero ($M=0$), teniendo en cuenta que en la ecuación (2.7), la contribución del movimiento de centro de masa en la energía total no depende del campo magnético.

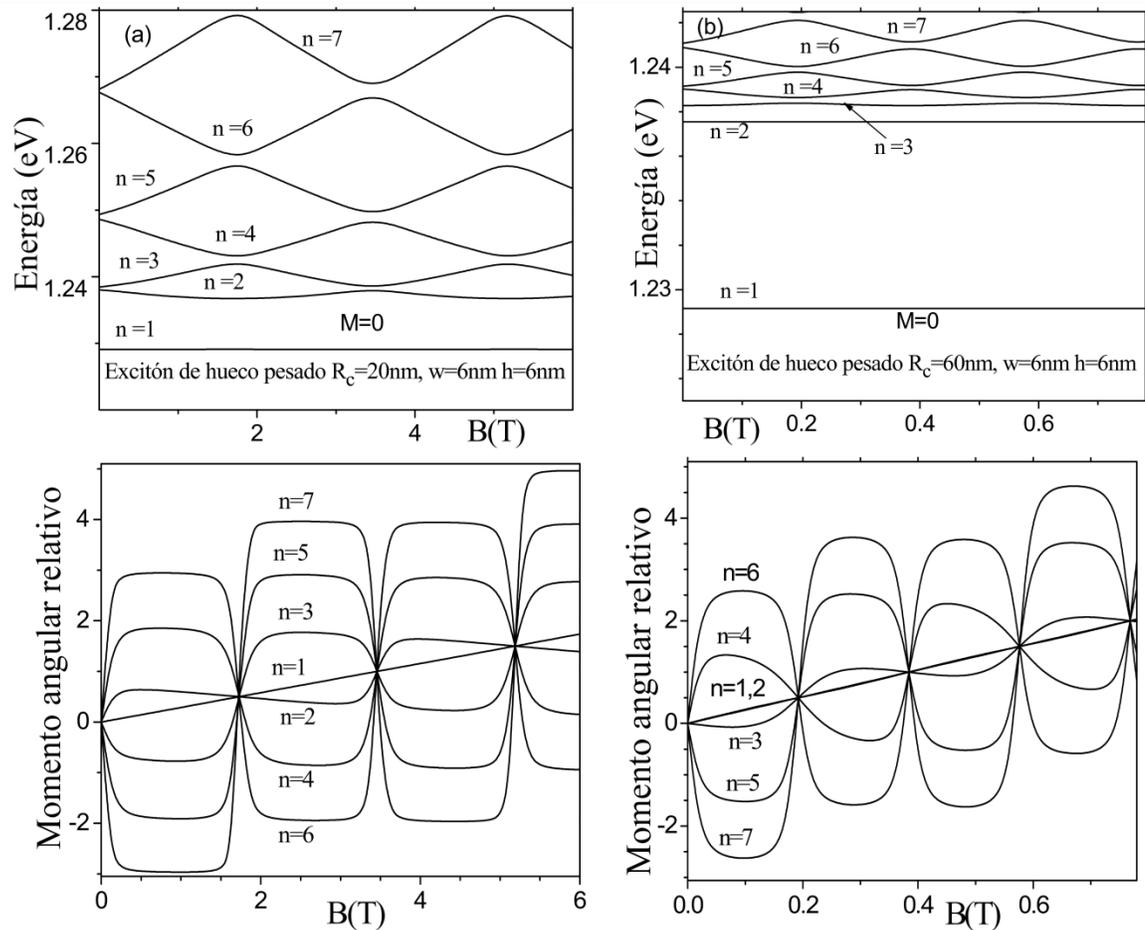
En la fig. 18, se presentan los resultados del cálculo de la energía relativa (fila superior) y del momento angular (fila inferior) en función del campo magnético externo para un excitón neutro de hueco pesado confinado en un QR de altura $h=6\text{ nm}$, ancho $w=6\text{ nm}$ y dos radios diferentes $R_c=20\text{ nm}$ y $R_c=60\text{ nm}$.

Se ve en ambos casos que las energías de los niveles inferiores son casi independientes del valor del campo magnético, y también, existe una brecha significativa entre el estado de base y los primeros estados excitados (niveles $n=1$ y $n=2$). Las energías de los estados excitados exhiben oscilaciones asociadas al efecto AB, generado por la interacción del campo magnético externo y la corriente inducida por el tunelamiento a través de la barrera de potencial Coulombiano entre el electrón y el hueco.

Si el nivel de energía del excitón aumenta, entonces, el ancho de la barrera de potencial de atracción electrostática entre el electrón y el hueco será menor. En consecuencia, para los

niveles superiores será mayor la probabilidad de tunelamiento y la amplitud de las oscilaciones AB.

Fig. 18 En la fila superior se muestran los niveles más bajos de energía del movimiento relativo en función del campo magnético externo aplicado para el excitón neutro de hueco pesado en un *QR* con espesor $h = 6 \text{ nm}$, ancho $w = 6 \text{ nm}$, y dos radios diferentes (a) 20 nm (b) 60 nm . La dependencia de los momentos angulares, del movimiento relativo, con el campo magnético se muestra en la fila inferior.



Cuando el radio del anillo \bar{R} es relativamente pequeño como en fig. **18(a)**, la energía cinética ($\sim 1/\bar{R}^2$) es más grande o del mismo orden que la energía potencial ($\sim 1/\bar{R}$), por eso, la amplitud de las oscilaciones AB es relativamente grande. Este efecto es sustancialmente reducido cuando el radio del anillo se aumenta, debido a la disminución significativa de la energía cinética. En otro extremo, cuando el radio R es grande, como en fig. **18(b)** la energía potencial se convierte en dominante “congelando” el movimiento relativo, lo que resulta en la disminución de las amplitudes de las oscilaciones AB y el aplanamiento de las curvas correspondientes. Este efecto es especialmente apreciable en los dos estados más bajos de energía.

Las modificaciones de la dependencia de las energías inducidas por el campo magnético, relacionadas con múltiples entrecruzamientos y reordenamientos de los niveles superiores, conducen también a una alteración periódica de los valores medios de los momentos angulares del movimiento relativo, calculados como:

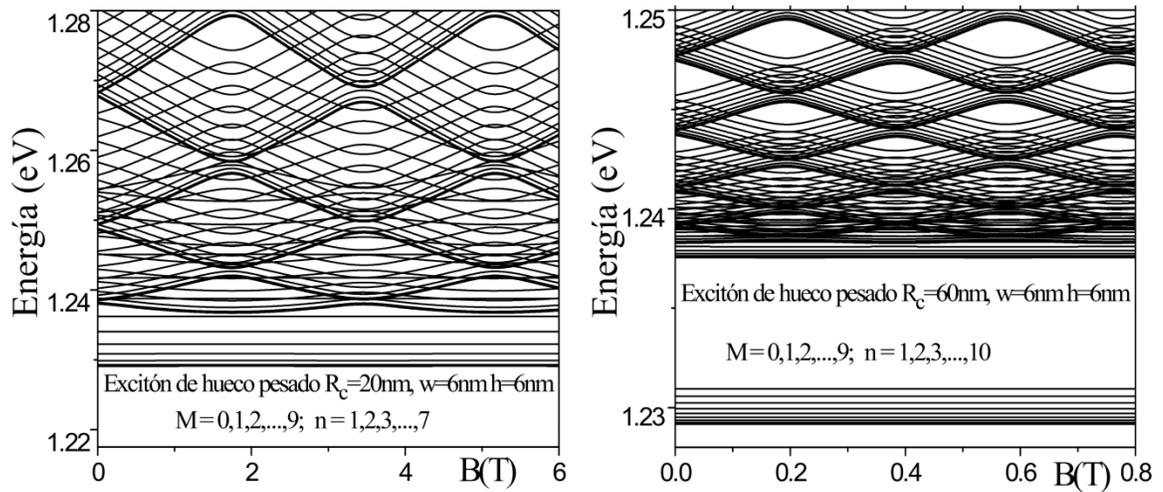
$$\bar{m}_r = \sum_{m=-N}^{m=N} m \cdot c_{m+N+1}^2. \quad (4.1)$$

Aquí c_n son los valores propios de la ecuación secular (2.7a). Los resultados se presentan en la fila inferior de la fig. **18**. Se observa que las dependencias del momento angular con el campo magnético tienen propiedades específicas, muy diferentes para los niveles inferiores y superiores. El valor medio del momento angular de los estados inferiores (sólo el primer nivel para el QR de radio 20 nm, y niveles 1, 2 y 3 para el QR de radio 60 nm) crecen monótonamente con el incremento del campo magnético, mientras, los estados excitados tienen saltos discontinuos periódicos. Esto es debido al hecho que la corriente túnel en los niveles inferiores es muy débil y el momento angular en estos estados es diferente de cero cuando se incrementa el campo magnético externo aplicado debido a un mezclado con los estados excitados.

Por el contrario, el momento angular de los estados excitados presenta saltos en los puntos correspondientes a los entrecruzamientos entre curvas adyacentes. Tal variación discontinua del momento angular es típica del efecto AB, y resulta de la competencia entre los términos paramagnéticos y diamagnéticos en el Hamiltoniano.

El espectro energético del excitón se vuelve “más borroso” al adicionar los estados con momento angular de centro de masa diferente de cero ($M \neq 0$). Esto se puede observar en la fig. 19, donde se muestran los resultados para un cálculo similar, ahora con estados que tienen momento angular de centro de masa entre $0 \leq M \leq 9$.

Fig. 19 Similar a la fig. 18, sin embargo, fueron incluidos diez valores diferentes del momento angular M de centro de masa.



En la fig. 19 son incluidos diez subniveles adjuntos a los niveles de energía correspondientes a cada estado relativo “puro” (p.ej. $M = 0, n_r = 0,1,2\dots$). Como las brechas entre subniveles incrementan linealmente con el número de subnivel ($\Delta_M \sim M$), los primeros subniveles $M = 1,2,3$ están agrupados al nivel básico ($M = 0$), formando una

silueta con borde pronunciado alrededor de las curvas AB correspondiente a la rotación relativa entre el electrón y el hueco a lo largo de la línea de radio central del anillo.

Adicionalmente, se observa que, las siluetas que forman los bordes en el lado derecho de la fig. **19** para la línea de radio central de 60 nm son notablemente más marcadas que aquellas del lado izquierdo para un radio de 20 nm. Esto es debido al hecho que, el ancho entre las sub-bandas que pertenecen a la rotación del centro de masa es inversamente proporcional al radio del QR ($\Delta_M \sim \bar{R}^{-2}$) y por lo tanto en QRs de mayor radio las densidades de los subniveles en las regiones cercanas a los niveles básicos son significativamente mayores que aquellos en QRs de radio pequeño.

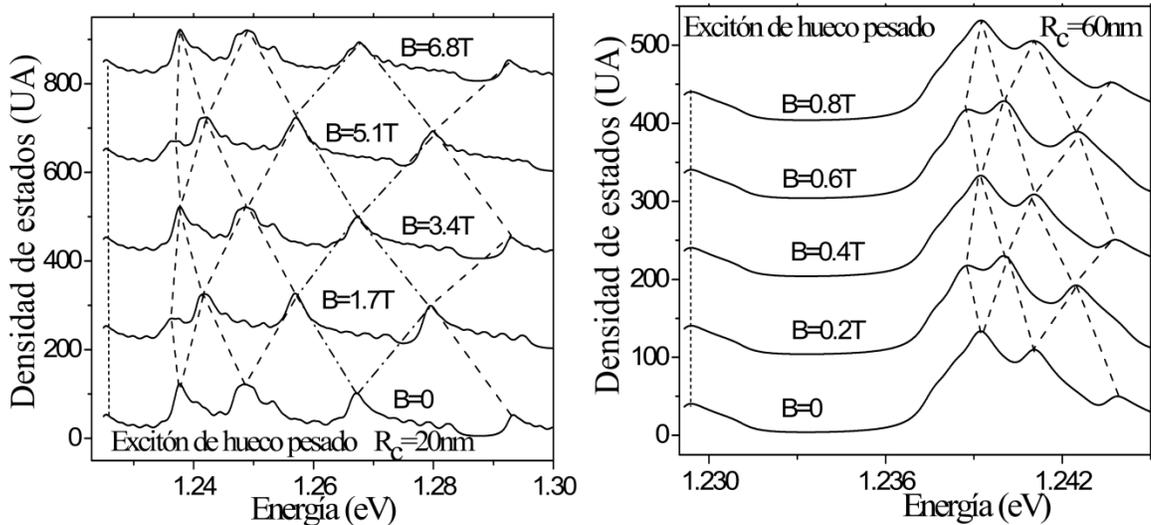
Por otro lado, las brechas entre los subniveles cercanos a los niveles de menor energía son del mismo orden ($\sim 1 meV$) que las amplitudes de las oscilaciones de AB, en este caso el análisis del comportamiento de los niveles individuales se hace poco conveniente. Por esta razón, en este caso puede ser es más adecuada la descripción de las oscilaciones de energía, en presencia de un campo magnético externo, a través la densidad de estados (DOS) $\rho(E)$, las cuales se calcularon numéricamente usando la relación (3.1) presentada en el capítulo anterior.

En la fig. **20** se presentan las curvas de densidad de los estados calculadas para el excitón de hueco pesado confinado en QRs con los mismos parámetros de la fig. **19** para cinco valores diferentes de campo magnético externo aplicado.

Las líneas punteadas en la fig. **20** indican la evolución de la posición de los picos de DOS con el incremento del campo magnético. Se observa que la posición del pico correspondiente al nivel más bajo de energía es la misma para todos los valores de campo magnético, mientras que las oscilaciones de las posiciones de los otros picos revelan la presencia del efecto AB para los estados excitados.

Se observa también que la brecha entre el pico correspondiente al primer estado y los otros picos crece con el incremento del radio del QR , mientras que las brechas entre los otros picos oscilantes y las amplitudes de sus oscilaciones se reducen. Tal comportamiento de los picos de la densidad de estados revelan las oscilaciones colectivas de una serie de subniveles correspondientes a la rotación del centro de masa, la cual, nosotros hemos llamado oscilaciones aparentes de AB. Se ve que las oscilaciones de los picos de la DOS con el incremento del campo magnético reproducen no solo la evolución de las posiciones de los niveles de energía individuales, sino también, la evolución de la brecha de energía entre ellos.

Fig. 20 Densidad de estados del excitón de hueco pesado confinado en QR s de altura $h = 6\text{nm}$, ancho $w = 6\text{nm}$ para dos diferentes radios $R_c = 20\text{nm}$ y $R_c = 60\text{nm}$, y cinco valores diferentes campo magnético externo. Las líneas punteadas son las guías para el ojo, en orden a seguir la evolución de la posición de los picos.



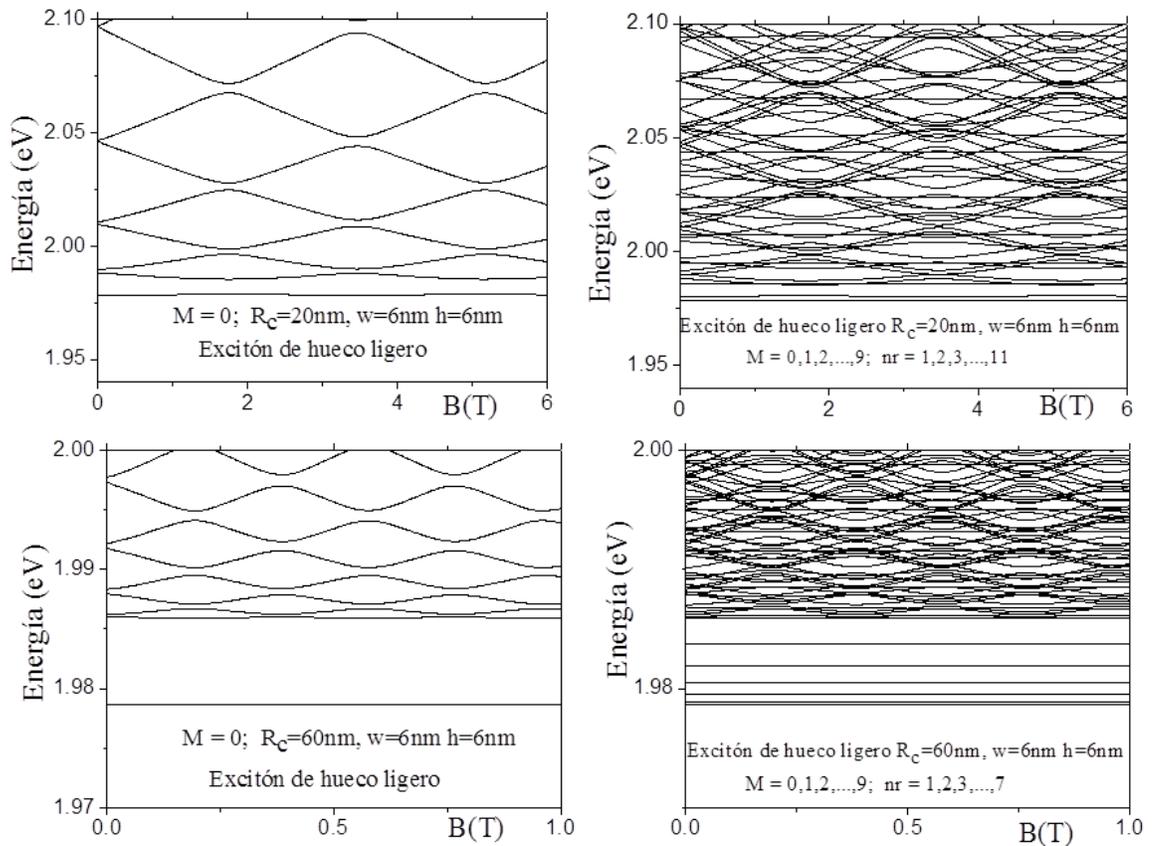
Por otro lado, la posición de los niveles de energía de los complejos excitónicos y las brechas entre ellos dependen fuertemente de la razón de masas entre el electrón y el hueco.

Cuando la masa efectiva del hueco es menor, como el caso del excitón de hueco ligero, entonces, la longitud de onda de Broglie será mayor y el confinamiento será más fuerte, si la temperatura del experimento es cercana al cero Kelvin. Para el caso de los materiales de InAs, la masa efectiva del hueco ligero es aproximadamente igual a la del electrón, mientras la masa efectiva del hueco pesado es aproximadamente quince veces superior a la masa efectiva del electrón. En consecuencia, para el excitón de hueco ligero, la masa reducida y la total son aproximadamente $m_e^*/2$ y $2m_e^*$, respectivamente, mientras, para el excitón de hueco pesado, los valores correspondientes son alrededor de m_e^* y $16m_e^*$. En otras palabras, las masas efectivas de las rotaciones relativas y de centro de masa del excitón de hueco ligero son menores que aquellas para el excitón de hueco pesado.

Por consiguiente, la brecha entre los niveles de energía relativos y de centro de masa, en el caso del excitón de hueco ligero, son mayores, y la superposición entre las diferentes subbandas es más fuerte que aquella para el caso del excitón de hueco pesado. Por eso, la silueta de los bordes de las oscilaciones AB en la fig. 19 para el excitón de hueco pesado son significativamente remarcadas que aquellas del excitón de hueco ligero, mientras, las amplitudes de las oscilaciones son ligeramente menores que las del excitón de hueco ligero, mostradas en la fig. 21.

Inversamente, la brecha entre el estado base y la serie de estados excitados para el excitón de hueco pesado es más amplia que la brecha correspondiente para el excitón de hueco ligero en la fig. 21. Esto se debe al hecho que, la brecha de energía correspondiente a los niveles inferiores de energía son estados ligados del electrón y el hueco mediante la atracción electrostática la cual es del orden del Rydberg efectivo y a su vez es proporcional a la masa reducida. Por lo tanto, el valor del Rydberg efectivo y la correspondiente brecha son aproximadamente dos veces mayores para el excitón de hueco pesado que para el hueco ligero.

Fig. 21 Energías del excitón de hueco ligero para QRs con línea de radio central $R_c = 20\text{nm}$ (en la fila superior) y $R_c = 60\text{nm}$ (en la fila inferior) en función del campo magnético externo. En la columna izquierda se presentan los resultados sólo para movimiento rotacional relativo, y, en la columna derecha las energías rotacionales tanto relativas como de centro de masa, en total se incluyen diez valores de momento angular de centro de masa M .

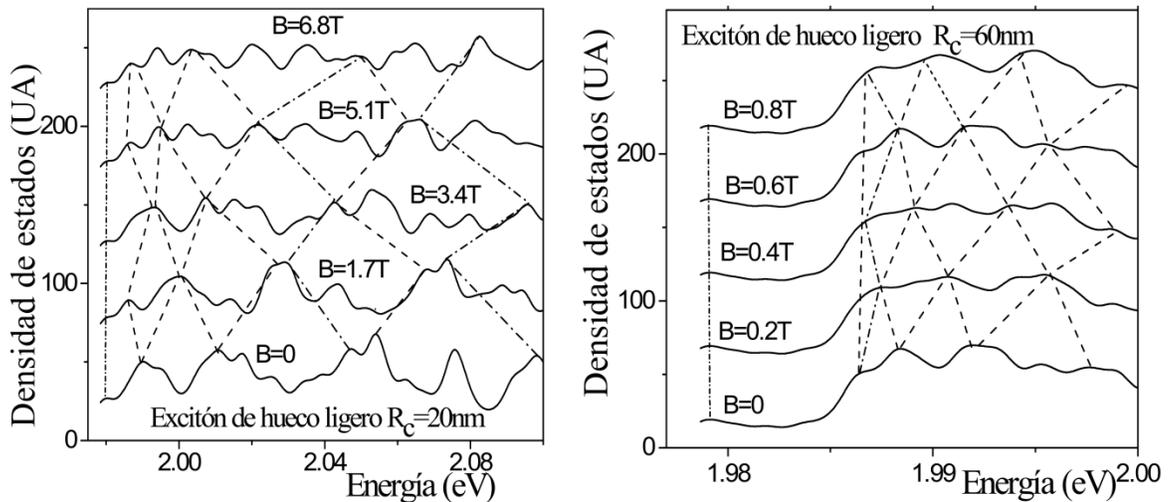


Adicionalmente, la curva de la dependencia de los estados con niveles inferiores de energía con el campo magnético para el excitón de hueco ligero en un QR de radio 20 nm muestra una oscilación AB débil, mientras para radios mayores, como 60 nm, las oscilaciones se extinguen. El tunelamiento a través de la barrera electrostática entre el electrón y el hueco

a lo largo de la línea de radio central genera oscilaciones de AB, sin embargo, en anillos de radio grande se hace más difícil debido al incremento del ancho de la barrera.

Todas estas particularidades del espectro energético de los excitones de hueco ligero se ven claramente en la fig. 22 donde se exhiben las curvas de *DOS* para el excitón de hueco ligero en un *QR* con altura 6 nm, ancho 6 nm y línea de radio central 20 y 60 nm para cinco valores diferentes de campo magnético externo. Las líneas punteadas son guías para el ojo en orden a seguir las oscilaciones de la posición de los picos con el incremento del campo magnético. En ambos casos, existe sólo un pico correspondiente al estado ligado en el nivel de energía más bajo, para el cual, la posición no es sensible a la variación del campo magnético, mientras las posiciones de los otros picos revelan las oscilaciones AB.

Fig. 22 Densidad de estados del excitón de hueco ligero confinado en *QRs* con altura $h = 6$ nm, ancho $w = 6$ nm y línea de radio central $R_c = 20$ nm y $R_c = 60$ nm, para cinco valores diferentes de campo magnético externo. Las líneas a trazos son guías para el ojo en orden a seguir la evolución de los picos correspondientes a estados con momento angular de centro de masa igual a cero ($M = 0$).



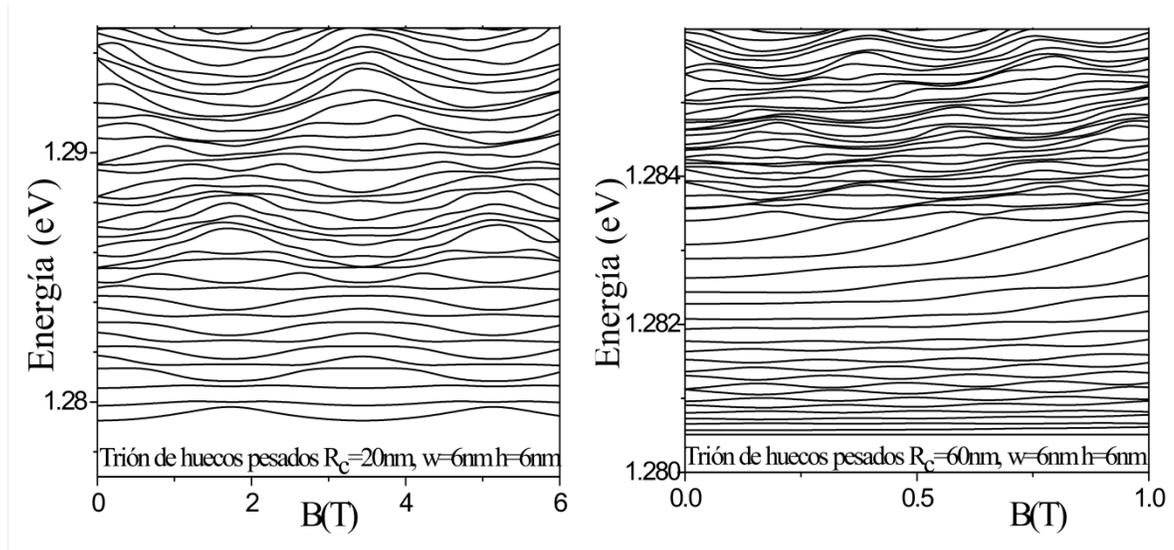
En la parte derecha de la fig. **22** se muestran los resultados para anillos de mayor radio ($R_c = 60 \text{ nm}$) y se observa una clara manifestación de la redistribución de los niveles de energía bajo la acción de un campo magnético externo, donde, los máximos de la curva de *DOS* son siempre localizados cerca de los niveles con momento angular de centro de masa igual a cero. De otro modo, para un *QR* de menor radio aumentan las brechas de energía entre subniveles correspondientes a los estados con momento angular de centro de masa diferentes, y por lo tanto para el lado izquierdo de la fig. **22** ($R_c = 20 \text{ nm}$) se observa una estructura fina en los correspondientes picos de *DOS*.

Comparando las curvas de las figuras **20** y **22** se puede concluir que en el caso del excitón de hueco ligero las *DOS* son más sensibles a la variación de las dimensiones del *QR*. En general, es más apropiada la descripción de los efectos AB en términos de la evolución de las curvas de *DOS* que analizar directamente los niveles de energía para los complejos excitónicos confinados en *QRs*.

Cuando aumenta el número de portadores de carga que integran un complejo excitónico, entonces, aumenta el número de subniveles y las brechas entre ellos serán menores, por lo tanto, una descripción del espectro energético en términos de la *DOS* será más apropiada. La densidad de niveles de energía de los complejos excitónicos de tres partículas, cuya rotación es definida por dos ángulos relativos y un ángulo de centro de masa, es esencialmente más alta que aquellas del excitón neutro, entonces, el análisis de la evolución del espectro energético en términos de *DOS* es más conveniente.

En orden a ilustrar la influencia de los diferentes tipos de rotación a la contribución de la *DOS* de los excitones cargados positivamente en diferentes combinaciones de hueco ligero y hueco pesado se presentan en las figs. **23** y **24**, las energías en función del campo magnético externo.

Fig. 23 Dependencia de la energía del trión de huecos pesados en función del campo magnético externo en *QRs* delgados ($h = 6 \text{ nm}$, $w = 6 \text{ nm}$) para dos líneas de radio central diferentes 20 y 60 nm.



En la fig. 23 se grafican los resultados de los cálculos del excitón cargado positivamente, compuesto por dos huecos pesados y un electrón (trión de huecos pesados *THH*) confinado en *QRs* con dos diferentes radios, 20 y 60 nm. Se observa que las amplitudes de las oscilaciones AB en un *QR* son significativamente mayores cuando el radio del anillo es menor. Esto es un resultado de la competición entre los términos de energía cinética y potencial en el Hamiltoniano. A mayor energía cinética, entonces, será más probable el tunelamiento de partículas a través de las barreras de potencial de Coulomb y, por lo tanto, la corriente inducida por el campo magnético externo será mayor. La energía potencial, contrariamente, impide la generación de una corriente circular promotora de las oscilaciones AB. Como la energía cinética, es proporcional a $1/R_c^2$, en un *QR* de radio pequeño, esta energía es mayor que la energía potencial que es proporcional a $1/R_c$, entonces, el campo magnético externo en este caso puede generar una corriente túnel significativa, cuya interacción con el mismo campo magnético conduce a un efecto AB más

pronunciado. En anillos de radio grande, la energía potencial, inversamente, es superior a la energía cinética, y la localización de partículas se presenta en mayor probabilidad, observándose que las oscilaciones AB para los niveles inferiores en el lado derecho de la fig. 23 son más pequeñas.

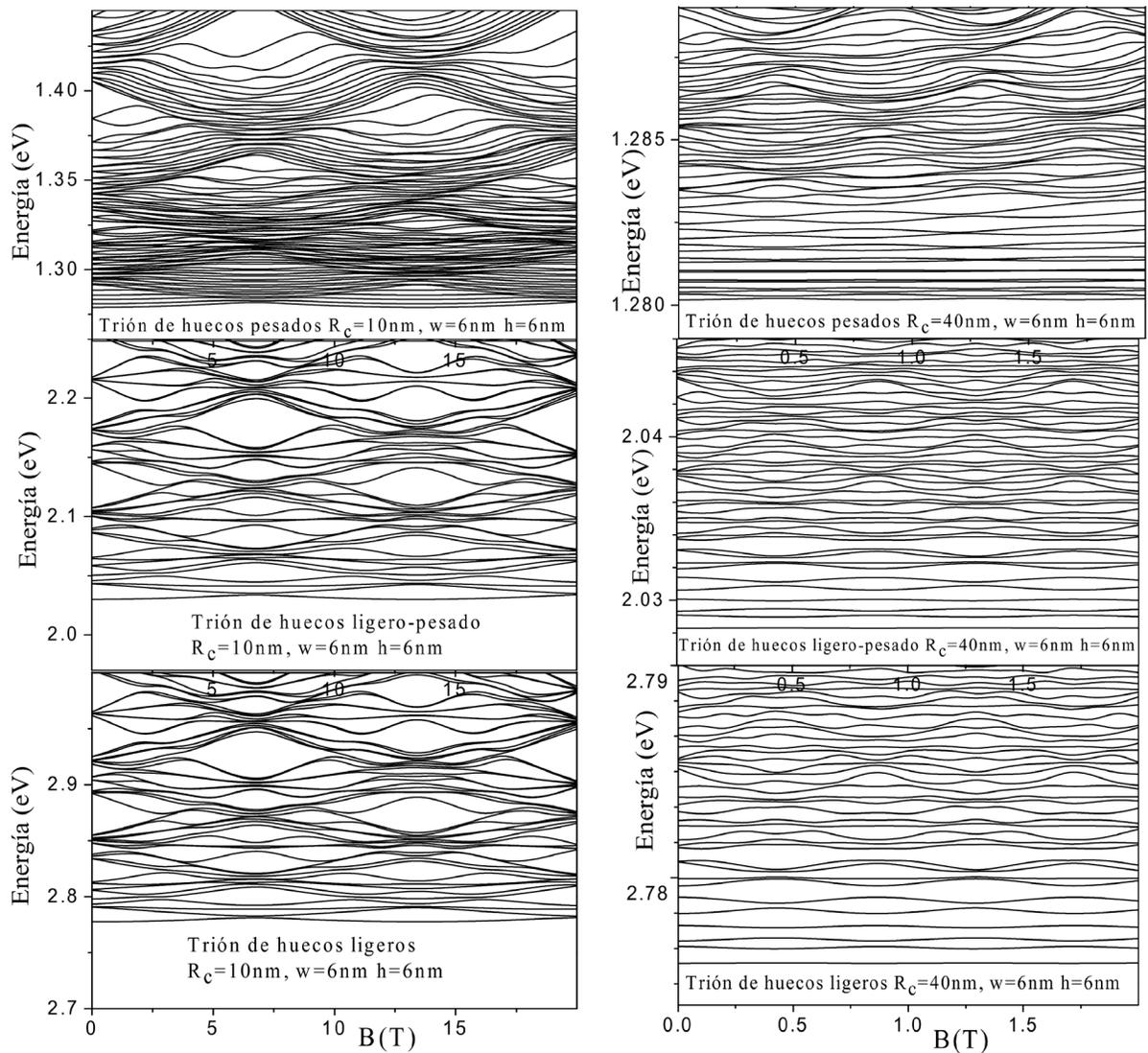
Como la masa del electrón en el complejo *THH* es significativamente menor que las masas de los huecos, la contribución de la rotación del electrón en la formación de corriente circular inducida es decisiva. La configuración más probable de los huecos es de un arreglo tipo gas cuando el radio del anillo es pequeño, y se hace una transición a un cristal de Wigner [102] cuando aumentamos el radio de 20 nm a 60 nm donde el movimiento de los huecos es prácticamente congelado y son situados diametralmente opuestos en el anillo. En el último caso, el ancho de la barrera de Coulomb es muy grande y la probabilidad de tunelamiento del electrón a través de ella es muy baja, y se ve que la amplitud de las oscilaciones AB se hace casi despreciable.

En orden a estudiar el efecto de la variación de la razón de masas entre el electrón y el hueco sobre las propiedades espectrales de los complejos magneto-excitónicos, se analizan las oscilaciones AB de los complejos formados por: el electrón, el hueco pesado y hueco ligero en diferentes combinaciones. Algunos resultados de los cálculos, se muestran en la fig. 24 para *QRs* con radios pequeños y grandes, $R_c = 10 \text{ nm}$ y $R_c = 40 \text{ nm}$, respectivamente.

La energía total del excitón cargado positivamente es el resultado de la contribución de tres términos: las energías de confinamiento de las partículas, la brecha de energía correspondiente al salto del electrón desde la banda de valencia a la banda de conducción ($\Delta = 0.41 \text{ eV}$ para *InAs*) y la interacción de Coulomb entre las partículas. Los dos últimos términos son independientes de la razón másica entre el electrón y los huecos, mientras el primero es proporcional al valor de la masa reducida adimensional $\sum_{i=e,h_1,h_2} m_e^* / m_i^*$, el cual

es esencialmente diferente para cada uno de los complejos excitónicos conformados por huecos ligeros o huecos pesados.

Fig. 24 Energía de los triones, en combinaciones de hueco pesado o ligero, confinados en *QRs* con radios $R_c = 10\text{nm}$ (en el lado izquierdo) y $R_c = 40\text{nm}$ (en el lado derecho) y dimensiones transversales $h = 6\text{nm}$, $w = 6\text{nm}$, en función del campo magnético externo.



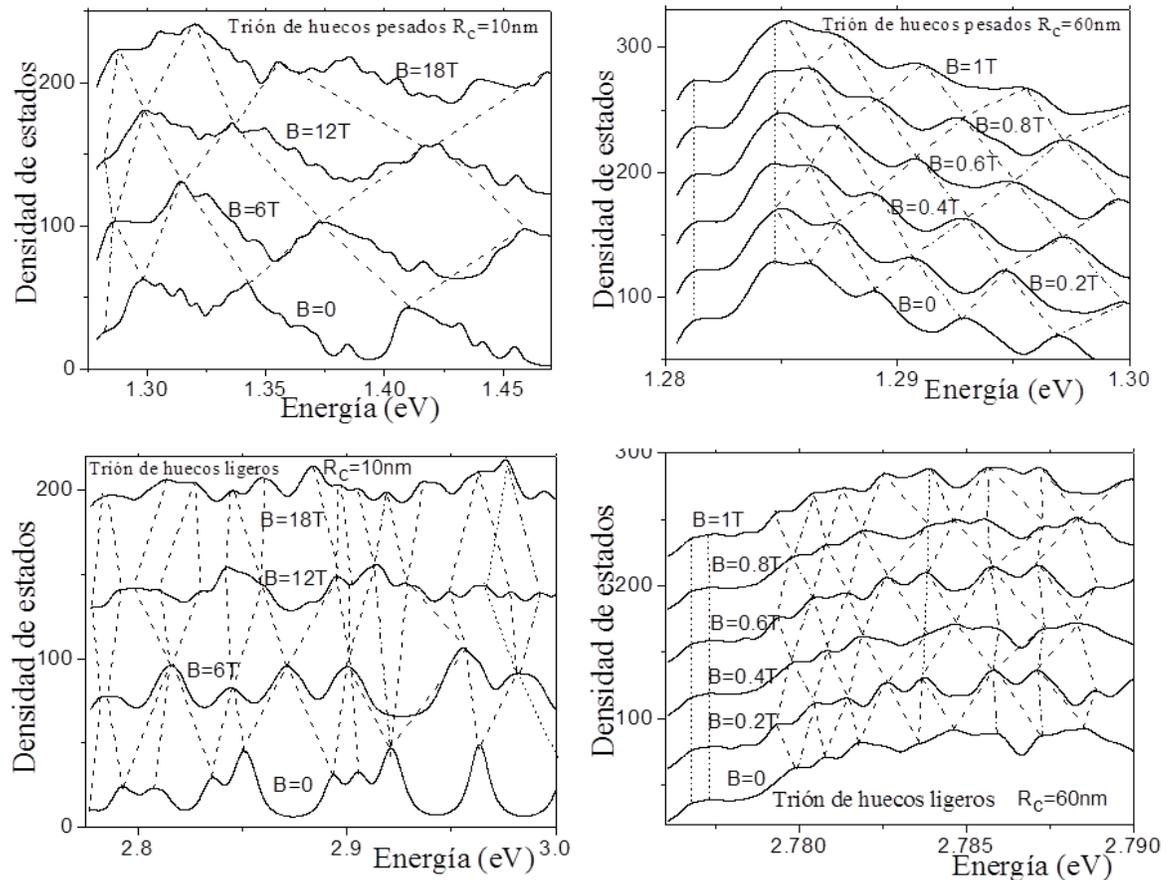
Particularmente, se usaron los parámetros del material InAs, donde, las energías de confinamiento E_{conf} de los triones de huecos pesados (*THH - heavy-heavy-holes trion*), de huecos combinados ligero-pesado (*THL - heavy-light trion*) y de huecos ligeros (*TLL - light-light trion*) son proporcionales a los valores $E_{conf}^{THH} : E_{conf}^{THL} : E_{conf}^{TLL} = 1.12 \text{ eV} : 2.06 \text{ eV} : 3.00 \text{ eV}$.

Comparando las formas de las curvas presentadas en la fig. 24 se observa un parecido en general entre ellas, no obstante, existen algunas diferencias relacionadas a las dependencias del espectro de energías del excitón en función de las dimensiones del anillo así como de la razón másica entre el electrón y el hueco. Primero, se observa que en todos los casos las amplitudes de las oscilaciones AB crecen cuando la energía aumenta, mientras, el periodo de oscilación decrece. A mayor nivel de energía, entonces, mayor será la probabilidad de tunelamiento del electrón y el hueco a través de la rotación relativa sobre la barrera de potencial y más fuerte será la interacción del campo magnético con la corriente inducida por la rotación. Esto entrega como resultado un incremento de las amplitudes de las oscilaciones AB, formándose múltiples entrecruzamientos entre las curvas que corresponden a la rotación relativa, con diferentes simetrías del posible sistema más estable, causando que sus frecuencias se dupliquen.

También se observa en la fig. 24 que en todos los casos las amplitudes de las oscilaciones y sus periodos son disminuidos esencialmente cuando el radio del anillo es incrementado de 10 nm a 40 nm. Una reducción de las amplitudes es esencialmente notable para los niveles inferiores, en los cuales, la contribución de la energía potencial es dominante, estimulando una transformación de los estados rotacionales en estados vibracionales. Una de las diferencias más importantes de las curvas presentadas en la fig. 24 es la existencia de múltiples intersecciones entre los niveles, que hacen casi imposible el análisis de las oscilaciones AB de los niveles individuales, provistos por el campo magnético.

Sin embargo, se puede observar claramente oscilaciones de la *DOS* en función del campo magnético, donde, regiones dispersas son periódicamente reemplazadas por regiones congestionadas. Todas estas peculiaridades son reflejadas en la fig. 25 para triones de hueco pesado y ligero confinados en *QRs* con altura $h = 4\text{ nm}$, ancho $w = 4\text{ nm}$ y dos valores diferentes de línea de radio central, $R_c = 10\text{ nm}$ (en el lado izquierdo) y $R_c = 60\text{ nm}$ (en el lado derecho), y diferentes valores de campo magnético externo B que son indicados en la figura.

Fig. 25 Densidad de estados de los triones de hueco pesado y ligero confinados en *QRs* de altura $h = 4\text{ nm}$, ancho $w = 4\text{ nm}$ y dos radios $R_c = 10\text{ nm}$ y $R_c = 60\text{ nm}$, para cuatro y seis valores diferentes de campo magnético externo, respectivamente. Las líneas a trazos son guías para el ojo, en orden a seguir la evolución de la posición de los picos respecto a B .



Las líneas punteadas son guías para la evolución de la posición de los picos respecto a B , mostrando claramente la presencia de las oscilaciones en las curvas de DOS , con periodos dados por la expresión $2\gamma \cdot (a_0^*/R_c)^2$ válido para las oscilaciones AB. Para QRs de radio mayor (en el lado derecho de la fig. **25**), se observa claramente las oscilaciones periódicas de las posiciones de los picos en las curvas de DOS . En este caso, las brechas de energía entre subniveles son muy pequeñas, y por lo tanto, las curvas de la dependencia de energía con el campo magnético B son agrupadas alrededor de valores discretos $B_n = n \cdot \gamma \cdot (a_0^*/R_c)^2$; $n = 1, 2, \dots$ originándose allí los picos de las curvas de DOS .

Viceversa, para anillos de radios pequeños (en el lado izquierdo de la fig. **25**), las brechas entre los subniveles de energía son más grandes, el efecto de agrupamiento de los niveles de energías es débil y, por lo tanto, las oscilaciones de las posiciones de los picos no son muy marcadas como las curvas del lado derecho de la fig. **25**. Como resultado, obtenemos la apariencia de múltiples hombros y satélites que acompañan todos los picos.

5. ELECTRÓN Y HUECO EN ANILLO CUÁNTICO NO-UNIFORME DE InAs

Un confinamiento estructural fuerte en la dirección de crecimiento de los cristales en anillos cuánticos auto-ensamblados proporciona un cambio significativo en el espectro tanto de la banda de conducción como en la banda de valencia del material InAs. Además, teniendo en cuenta que la brecha de energía entre estas dos bandas es relativamente pequeña para este material, se podría esperar unos cambios en las propiedades espectrales de los anillos de InAs proporcionados por la mezcla entre las diferentes sub-bandas, en comparación con las usadas en el modelo parabólico con bandas independientes. Para estudiar este efecto sobre las oscilaciones AB en QRs no uniformes en forma tipo volcán se puede utilizar el modelo de Luttinger, en el que se considera la mezcla de los estados en las bandas de valencia Γ_8 ; pero se descuida el impacto de la banda correspondiente al espín-órbita Γ_7 [40,41,103].

En este capítulo se presentan los resultados del análisis teórico del espectro del electrón y del hueco en anillos cuánticos de InAs tanto uniformes como no uniformes en el marco del modelo de Luttinger. Simulaciones similares en la aproximación de masa efectiva para el modelo de bandas independientes fueron realizadas anteriormente en las referencias [77,78].

5.1 ELECTRÓN EN ANILLO CUÁNTICO UNIFORME EN BANDA DE CONDUCCIÓN PARABÓLICA

En el modelo de Luttinger, el electrón y el hueco se consideran independientemente y para el electrón se utiliza el modelo de banda parabólica. Por esta razón, la ecuación de Schrödinger para el electrón confinado en QR , con campo magnético externo aplicado en

dirección axial, siguiendo el modelo bidimensional propuesto en las referencias [40,41,103] está dado por:

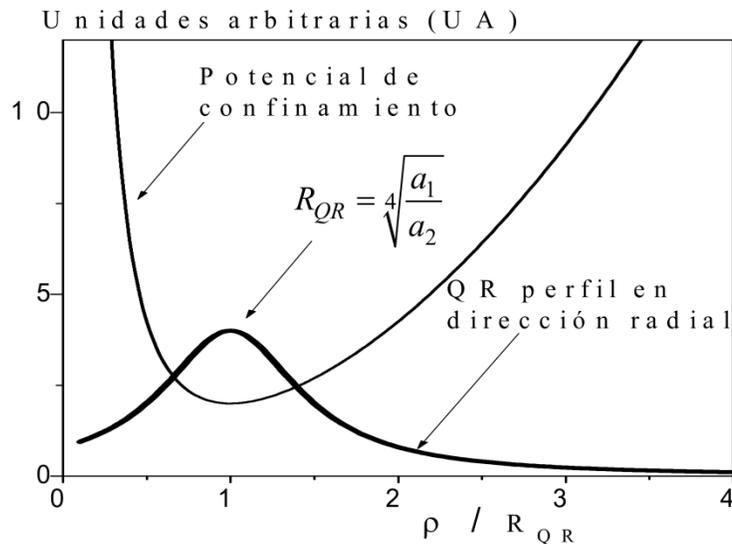
$$H_e \Psi_{n,m,l}^e = E_{n,m,l}^e \Psi_{n,m,l}^e; \quad H_e = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2\mu_e^*} + V(\rho_e, \varphi); \quad \mathbf{p}_e = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}. \quad (5.1)$$

Aquí $V(\rho_e, \varphi)$ es un potencial de confinamiento bidimensional, el cual para un QR uniforme, depende sólo de la coordenada radial, donde tiene un núcleo repulsivo en el centro, es armónico en las regiones exteriores y se escoge comúnmente en la forma [103]:

$$V(\rho_e, \varphi) = V(\rho_e) = \frac{a_1}{\rho_e^2} + a_2 \rho_e^2 - 2\sqrt{a_1 a_2}. \quad (5.2)$$

Los gráficos de este potencial y del perfil de un QR correspondiente de tipo volcán se muestran esquemáticamente en fig. 26. El mínimo del potencial de confinamiento y el borde del volcán en este gráfico están ubicados en el punto $\rho_{e,0} = R_{QR} = \sqrt[4]{a_1/a_2}$, al cual nosotros referimos a continuación como al radio de QR .

Fig. 26 Potencial de confinamiento y perfil del QR en la dirección radial.



Los parámetros del potencial de confinamiento efectivo a_1 y a_2 están relacionados con la geometría del QR y definen su radio, ancho y altura. En el potencial de confinamiento estos dos parámetros definen la posición del valor del mínimo y la curvatura en este punto. La ecuación de Schrödinger (5.1) tiene solución analítica encontrada anteriormente por Tan e Inkson [104].

$$\Psi_{n,m,l}^e(\rho, \varphi, z) = \phi_{n,m}^e(\rho, \varphi) \chi_l^e(z); \quad \chi_l^e(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{l\pi z}{L} + \frac{l\pi}{2}\right); \quad (5.3a)$$

$$\phi_{n,m}^e(\rho, \varphi) = \frac{1}{\lambda_e} \left(\frac{\Gamma(n + M_e + 1)}{2^{M_e+1} n! (\Gamma(M_e + 1))^2 \pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{\lambda_e} \right)^{M_e} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{\lambda_e} \right)^2} F_1^1 \left(-n, M_e + 1, \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\lambda_e} \right)^2 \right) e^{-im\varphi}. \quad (5.3b)$$

Aquí n, m, l son números cuánticos radial, azimutal y axial, respectivamente; $F_1^1(-n, m+1, x)$ es la función hipergeométrica de Kumer. Los niveles energéticos del electrón, correspondientes a esta función de onda, son:

$$E_{n,m,l}^e = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{M_e}{2} \right) \hbar \omega_e - \frac{m}{2} \hbar \omega_{c,e}^* - \frac{\mu_e^*}{4} \omega_{0,e}^2 \rho_{e,0}^2 + \left(\frac{l^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu_e^* L^2} \right). \quad (5.4)$$

En las fórmulas anteriores se usaron los siguientes parámetros: la frecuencia ciclotrónica

$\omega_{c,e}^* = \frac{eB}{2\mu_e^*}$, la frecuencia característica del potencial de confinamiento en la dirección

radial $\omega_{0,e} = \sqrt{\frac{8a_2}{\mu_e^*}}$, la frecuencia ciclotrónica efectiva $\omega_e = \sqrt{\omega_{c,e}^{*2} + \omega_{0,e}^2}$, el radio donde se

encuentra el mínimo del potencial $\rho_{e,0} = R_{QR} \approx \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{1/4}$, asociado con el radio del anillo.

La longitud magnética efectiva $\lambda_e = \sqrt{\frac{\hbar c}{\mu_e^* \omega_e}}$ y la magnitud $M_e = \sqrt{m^2 + \frac{2a_1 \mu_e^*}{\hbar^2}}$ son parámetros de las funciones hipergeométricas de Kumer F_1^1 en (5.3b).

Otras variables son: L el grosor del anillo, μ_e^* la masa efectiva del electrón, e la carga del electrón, B el campo magnético.

5.2 HAMILTONIANO DE LUTTINGER PARA EL HUECO EN ANILLO CUÁNTICO

Siguiendo la sección 1.1, fundamento teóricos, y el procedimiento descrito en las referencias [40,41,103], la ecuación de Schrödinger y el Hamiltoniano de Luttinger para las cuatro bandas de valencia superiores del hueco en la sub-banda Γ_8 , confinado en una hetero-juntura con el potencial confinamiento $V(\mathbf{r})$ y con campo magnético externo aplicado en dirección axial, está dada por:

$$H_L \Phi_h = E_{n,m,l}^h \Phi_h;$$

$$H_L = \begin{pmatrix} a_+^{hh\uparrow} + V(\mathbf{r}) & b_- & c_- & 0 \\ b_+ & a_-^{lh\uparrow} + V(\mathbf{r}) & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & d_-^{lh\downarrow} + V(\mathbf{r}) & b_- \\ 0 & c_+ & b_+ & d_+^{hh\downarrow} + V(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Este modelo se usa comúnmente para materiales de $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ en los cuales la separación entre la banda de conducción Γ_6 y la banda de valencia Γ_8 , y entre la banda de valencia Γ_8 y la correspondiente al espín-órbita Γ_7 es suficientemente grande, de manera que permita desacoplar estas bandas y considerar las propiedades de la banda Γ_8 independientemente.

En el caso particular de un QR , el potencial de confinamiento en el Hamiltoniano H_L se puede usar, según [103], similar al aplicado con el electrón en la banda de conducción:

$$V(\mathbf{r}) = V(\rho_h) = \frac{a_1}{\rho_h^2} + a_2 \rho_h^2 - 2\sqrt{a_1 a_2}. \quad (5.6)$$

A este potencial le corresponde la frecuencia ciclotrónica $\omega_{c,h}^* = \frac{eB}{2\mu_h^*}$, la frecuencia característica del potencial de confinamiento transversal parabólico $\omega_{0,h} = \sqrt{\frac{8a_2}{\mu_h^*}}$, la frecuencia ciclotrónica efectiva $\omega_h = \sqrt{\omega_{c,h}^{*2} + \omega_{0,h}^2}$. En la matriz del Hamiltoniano (5.5), las flechas \uparrow y \downarrow señalan el sentido de la dirección del espín, y los parámetros relacionados con los elementos matriciales son:

$$\begin{aligned} d_{\pm} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\gamma_1 \mp 2\gamma_2)k_z^2 - \frac{\hbar^2}{4m_0}(\gamma_1 \pm 2\gamma_2)(k_+k_- + k_-k_+); & b_{\mp} &= \hbar^2 \frac{\sqrt{3}}{4m_0} \gamma_3 k_z k_{\mp}; \\ a_{\pm} &= d_{\pm} + \frac{(2 \pm 1)}{2} \hbar \omega_h \left(\kappa + \frac{(5 \pm 4)}{4} q \right); & c_{\mp} &= \hbar^2 \frac{\sqrt{3}}{4m_0} (\gamma_2 + \gamma_3) k_{\mp}^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las magnitudes q , κ y γ_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) en las fórmulas anteriores son llamadas parámetros de Luttinger determinados por primeros principios, y m_0 es la masa del electrón libre. Los parámetros γ_{α} fueron definidos por Kane [105], donde estos determinan las masas efectivas del hueco pesado (HH *Heavy hole*) y el hueco ligero (LH *Light hole*) de forma ordinaria:

$$\mu_{hh}^z = \frac{m_0}{(\gamma_1 - 2\gamma_2)}, \quad \mu_{hh}^{xy} = \frac{m_0}{(\gamma_1 + \gamma_2)}; \quad \mu_{lh}^z = \frac{m_0}{(\gamma_1 + 2\gamma_2)}, \quad \mu_{lh}^{xy} = \frac{m_0}{(\gamma_1 - \gamma_2)}.$$

Los otros parámetros q y κ hacen parte de la contribución en la energía al término Zeeman, como se ven en la ecuación (5.7). Los parámetros k en (5.7), correspondientes en un semiconductor en bloque a momentos lineales, se transforman para el problema actual en los operadores, los cuales en coordenadas polares se definen como:

$$k_{\mp} = k_x \mp k_y = -ie^{\mp i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \mp \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \pm \frac{m_0 \omega_h}{2\hbar} r \right); \quad k_z = -i \frac{\partial}{\partial z}.$$

5.3 ELECTRÓN Y HUECO EN ANILLO CUÁNTICO DE *InAs* UNIFORME

Los parámetros del material *InAs* usados en este trabajo para describir las bandas de conducción y de valencia son los siguientes [40,41,103]:

$$m_e = 0.026m_0; \quad \gamma_1 = 20.0; \quad \gamma_2 = 8.5; \quad \gamma_3 = 9.2; \quad \kappa = 7.6 \cdot \text{unit}; \quad q = -0.18 \cdot \text{unit};$$

$$\text{unit} = 0.76223 \left[\frac{\hbar^2}{m_0} \left(\frac{\text{meV}}{(10\text{nm})^2} \right) \right].$$

Para representar la geometría, en el potencial de confinamiento, se escogieron los parámetros dados a continuación: $L = 2\text{nm}$, $a_1 = 3600(10\text{nm})^2 \text{meV}$, $a_2 = 1000 \frac{\text{meV}}{(10\text{nm})^2}$.

El radio del *QR* está asociado a: $R_{QR} = \sqrt[4]{a_1/a_2}$. Una vez se encuentra la energía E_0 del electrón o el hueco del estado base, se puede calcular el ancho efectivo del *QR* usando la relación $\Delta r = \sqrt{E_0/a_2}$. Según los resultados del cálculo de energía E_0 presentados a continuación, los valores aproximados del radio y del ancho del *QR* para este conjunto de parámetros son $R_{QR} \approx 14\text{nm}$, $\Delta r_h \sim 4\text{nm}$ y $\Delta r_e \sim 5\text{nm}$, respectivamente.

En el caso de un QR uniforme, el sistema posee simetría axial, y la función de onda para el hueco se puede buscar en forma de una combinación lineal de funciones base $\Psi_{n,m,l}^h(\rho, \varphi, z)$, similares a las que se usaron anteriormente para el electrón en (5.3):

$$\Phi_h(\rho, \varphi, z) = \sum_{n,m,l} c_{n,m,l} \Psi_{n,m,l}^h(\rho, \varphi, z) u_h; \quad u_h = \begin{pmatrix} 3/2, +3/2 \\ 3/2, +1/2 \\ 3/2, -1/2 \\ 3/2, -3/2 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

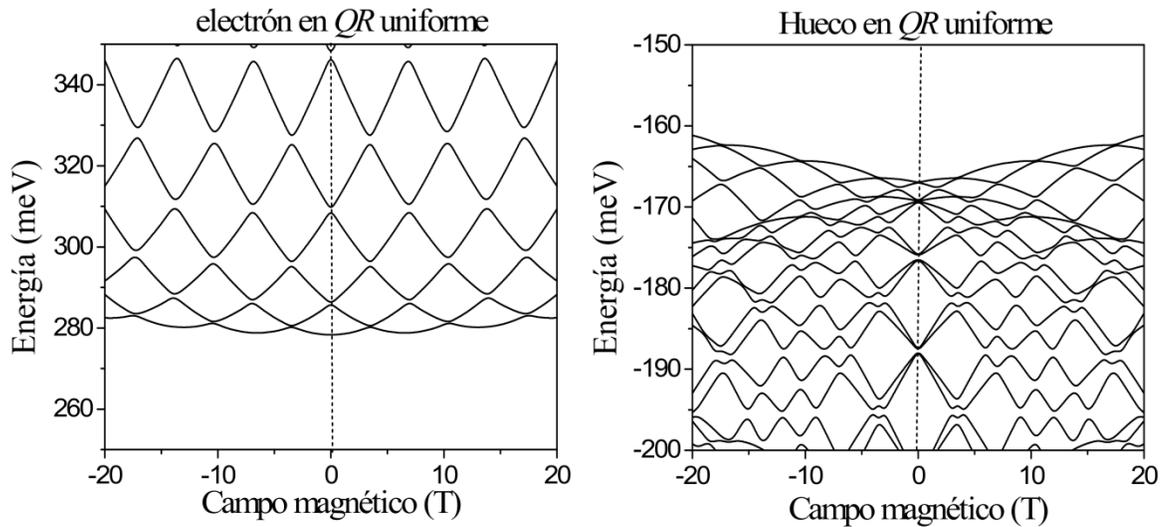
En esta relación, las funciones $\Psi_{n,m,l}^h(\rho, \varphi, z)$ se obtienen a partir de las fórmulas para $\Psi_{n,m,l}^e$ en (5.3) mediante del reemplazo de los subíndices $e \rightarrow h$ y de la masa efectiva del electrón por la masa efectiva del hueco en el plano XY . Donde u_h son las funciones base en el centro de la zona de Brillouin, definidas dentro del modelo de Kane [42,105]. Los valores de energía del hueco se obtienen numéricamente mediante diagonalización de la matriz H_L .

Los resultados del cálculo de las energías del electrón y el hueco en función del campo magnético externo, se presentan en la fig. 27. La energía del electrón en estos gráficos se mide respecto al piso de la banda de conducción y para el hueco respecto al techo de la banda de valencia. La brecha de energía adicional entre el piso de la banda de conducción y el techo de la banda de valencia está alrededor de 400meV para el material InAs [41].

El comportamiento de las curvas de los niveles energéticos en las figs. 27, en general es típico para QRs , con oscilación de la energía del estado base, múltiples intersecciones entre las curvas y el reordenamiento de los niveles. Se observa que los periodos de oscilación para el electrón y el hueco son iguales y estos están relacionados sólo con el radio efectivo del QR . Además, se puede ver que las pendientes, de las envolventes, de las curvas de

oscilación del estado base para el electrón y el hueco tiene signos opuestos. Esta diferencia se debe al aporte del término Zeeman en la energía del hueco.

Fig. 27 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un anillo cuántico uniforme en función del campo magnético.



Los resultados obtenidos se pueden usar para una estimación aproximada de la energía que emite un excitón confinado en un QR en el momento de la recombinación. Se calcula la energía correspondiente a fotoluminiscencia, $E_{phl}(QR)$ y luego se compara con el valor correspondiente para un excitón en bloque $E_{phl}(bulk)$. En ausencia de campo magnético según los resultados presentados en la fig. 27, las energías de confinamiento en un QR , del electrón y del hueco son: $E_e(QR) \approx 278 meV$ y $E_h(QR) \approx -168 meV$. Teniendo en cuenta que la brecha de energía entre la banda de conducción y la banda de valencia está alrededor de $\Delta = 400 meV$ para el material $InAs$ y las energías de interacción entre el electrón y el hueco en el bloque y en un QR son aproximadamente $U(bulk) \approx -1Ry^* \approx -(3 a 5) meV$

(sistema 3D) y $U(QR) \approx -4Ry^* \approx -(12 \text{ a } 20) \text{ meV}$ (sistema 2D), se puede obtener las siguientes estimaciones:

$$E_{Phl}(QR) \approx \Delta + E_e(QR) + E_h(QR) + U(QR) \approx 826 \text{ meV};$$

$$E_{Phl}(bulk) \approx \Delta + U(bulk) \approx 397 \text{ meV}.$$

Los resultados obtenidos concuerdan con los reportados experimentalmente en las referencias [47,93,100] señalando un valor aproximado del desplazamiento al azul en el espectro de fotoluminiscencia del excitón cuando este está atrapado en un QR .

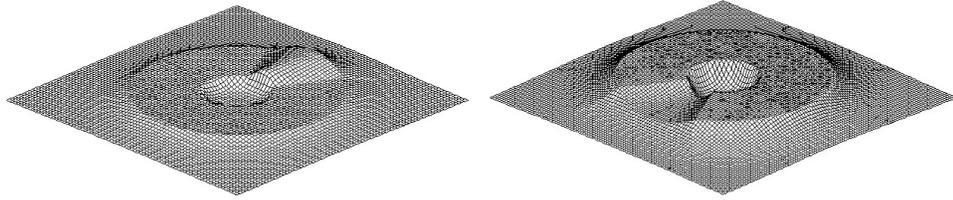
5.4 ELECTRÓN Y HUECO EN ANILLO CUÁNTICO NO UNIFORME

Los anillos cuánticos fabricados, generalmente, no son uniformes y no poseen simetría axial. La no-uniformidad hace que el potencial de confinamiento dependa no sólo de la coordenada radial ρ sino también de la coordenada polar φ . Los cambios en el potencial están relacionados, principalmente, con la distribución asimétrica del grosor del anillo cuántico. En esta sección se analizan teóricamente los espectros del QR en los cuales la no-uniformidad está introducida por la presencia en la estructura del QR de una o tres colinas estrechas direccionadas radialmente, que generan en el potencial de confinamiento unas perturbaciones locales atractivas. Un trabajo reciente paralelo muestra resultados similares, cuando se considera la masa efectiva dependiente de la energía, usando el modelo de Kane simplificado [106].

Un aumento del grosor produce un crecimiento del ancho del pozo de potencial para el movimiento del portador de carga en la dirección vertical. Mayor el ancho del pozo, menor es la energía cinética del portador correspondiente al movimiento en esta dirección y menor es el potencial de confinamiento. Por esta razón una colina genera un potencial atractivo. En lo contrario, un valle produce una perturbación con un potencial repulsivo. Las perturbaciones locales, de signos opuestos, se generan por las colinas y valles estrechos

direccionados radialmente. Una imagen 3D de las estructuras de este tipo se muestra esquemáticamente en la fig. 28.

Fig. 28 Imagen esquemática de anillos cuánticos con defectos locales en forma de una colina direccionada radialmente (izquierda) y un valle (derecha) que generan las perturbaciones negativa y positiva, respectivamente.



5.4.1 Anillo cuántico con una colina radial. El potencial de confinamiento en un anillo con grosor no-uniforme debido a la presencia, por ejemplo, de una colina radial se puede representar de la siguiente forma:

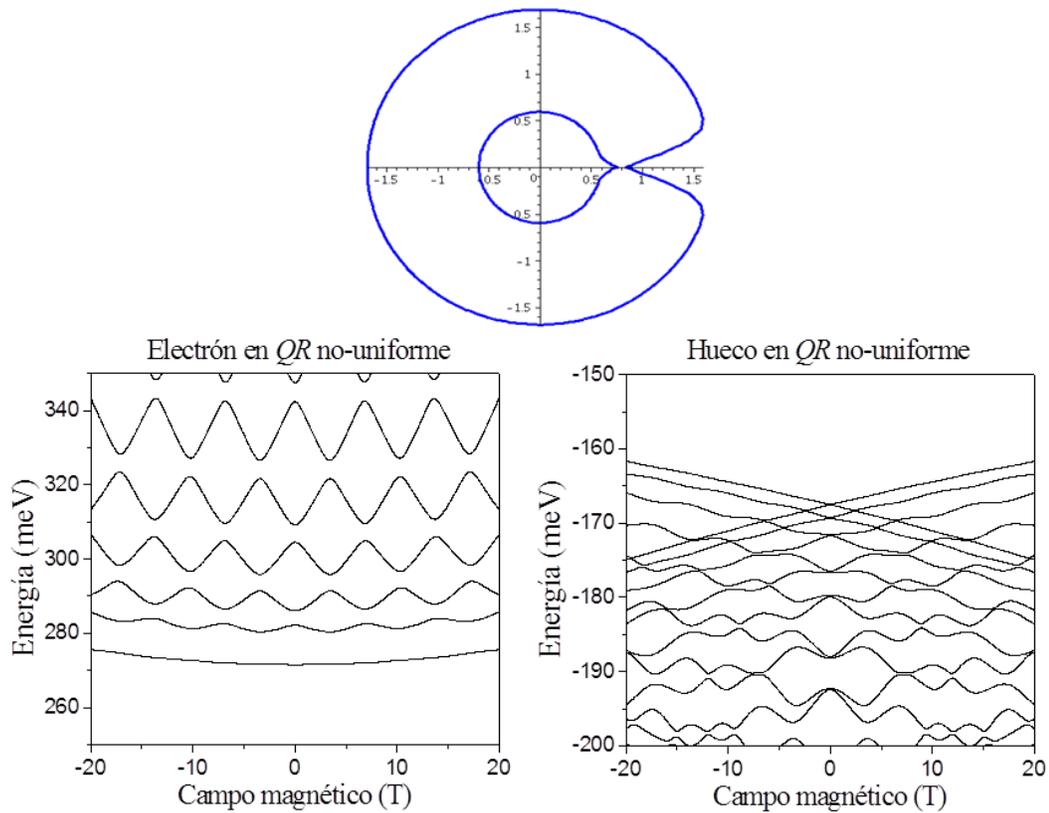
$$V(\rho, \varphi) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - 2\sqrt{a_1 a_2} + \delta V(\rho, \varphi); \quad (5.9)$$

$$\delta V(\rho, \varphi) = -\delta \cdot \left(\frac{\rho}{R_{QR}} \right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(\varphi - \theta)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Aquí θ es el ángulo polar de la dirección de la cima de la colina radial, σ es el ancho de la colina cuya altura se disminuye en la dirección polar según la distribución de Gauss. El parámetro δ corresponde a la profundidad del pozo de potencial introducido por la presencia de la colina. En nuestros cálculos se usaron los siguientes valores para la perturbación definida en (5.9): $\theta = 0$; $\sigma = 0.1$, y $\delta = 200 \text{ meV}$. Los valores de a_1 , a_2 y R_{QR} están definidos en la sección 5.3.

En la parte superior de la fig. 29, la imagen azul, muestra una gráfica de contorno con corte aproximado en el estado base de energía, donde las unidades de los ejes están dadas por $\text{eje}/10\text{nm}$, las demás imágenes azules en las figs. 30 y 31 son análogas y varía sólo el número de deformaciones en el QR .

Fig. 29 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un QR no uniforme, con una deformación local atractiva, en función del campo magnético.



En la fila inferior de la fig. 29 se muestran resultados de los cálculos de los niveles de energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un QR con una colina radial en función del campo magnético. Se ve que la presencia de no-uniformidad afecta

esencialmente las oscilaciones AB de la mayoría de los niveles energéticos eliminando las intersecciones entre las curvas. Se rompe la simetría y por eso desaparecen los puntos de degeneración periódica y se forman las brechas entre los niveles correspondientes. Esta es la diferencia con las curvas presentadas en el capítulo 2 para el excitón en QR uniforme, donde las brechas se forman solamente para el estado fundamental, mientras que los niveles superiores si presentan entrecruzamientos, demostrando de esta manera la generación de corriente para los niveles de mayor energía. La localización de ambos portadores de carga cerca de las no-uniformidades es más fuerte que en el caso de la atracción electrostática y afecta simultáneamente tanto el movimiento del centro de masa como el movimiento relativo. El tunelamiento para el movimiento relativo se dificulta más que en el caso de la barrera de potencial de atracción electrostático.

5.4.2 Anillos cuánticos no-uniformes con varias colinas radiales. La perturbación del potencial de confinamiento en la presencia de n colinas, en caso general, tiene la forma:

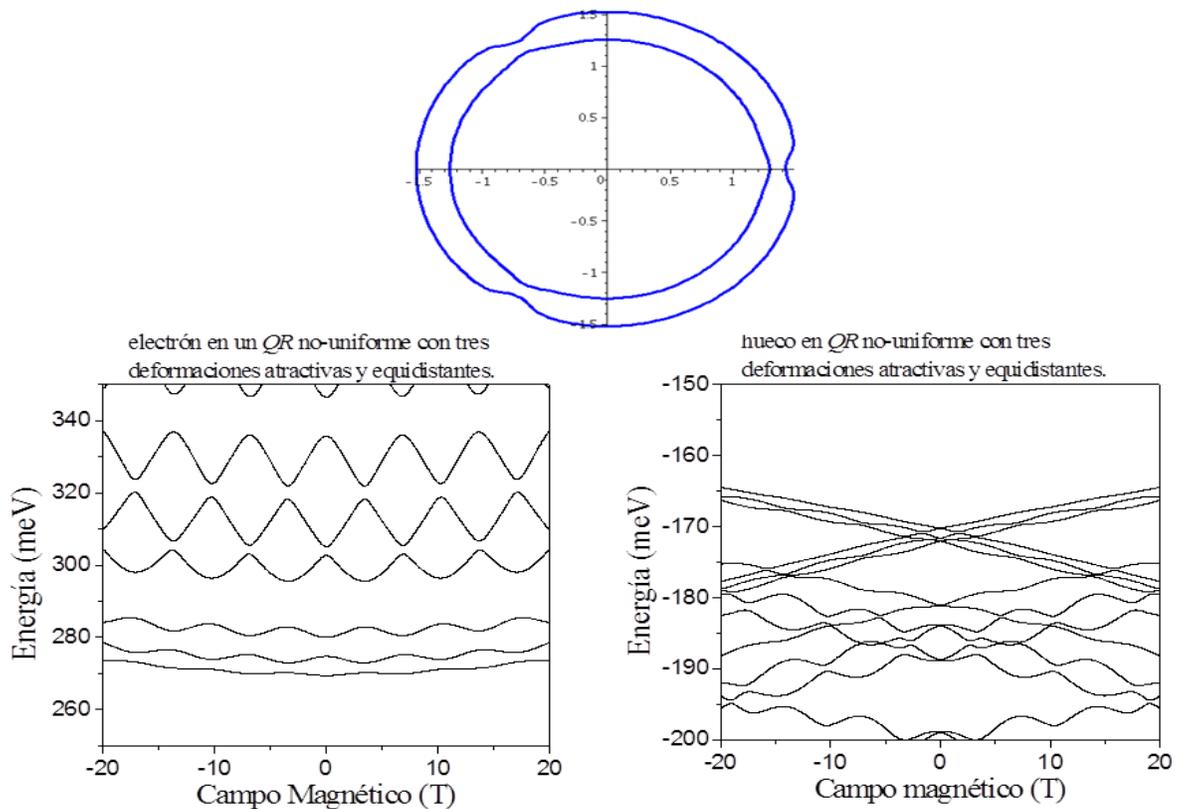
$$\delta V(\rho, \varphi) = -\sum_{j=1}^n \delta_j \cdot \left(\frac{\rho}{R_{QR}}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(\varphi - \theta_j)^2}{2\sigma_j^2}\right). \quad (5.10)$$

La función (5.10) debe además cumplir la siguiente condición de periodicidad: $\delta V(\rho, 0) = \delta V(\rho, 2\pi)$. A continuación consideremos dos posibles configuraciones, con las distribuciones de colinas equidistantes y con las colinas pegadas con el fin de aclarar el efecto de la correlación en la distribución de los defectos sobre el espectro energético y comparar los resultados de estos cálculos con los obtenidos anteriormente en [77,78] para modelos parecidos en la aproximación de masa efectiva.

5.4.2.1 Anillo cuántico con tres colinas apartadas equidistantemente. Los resultados obtenidos para este modelo (cuando $\theta_j = 120^\circ \cdot (j-1)$, $j = 1, 2, 3$) se presentan en fig. 30. Se puede anotar varios cambios que sufren las curvas en la comparación con el caso de una

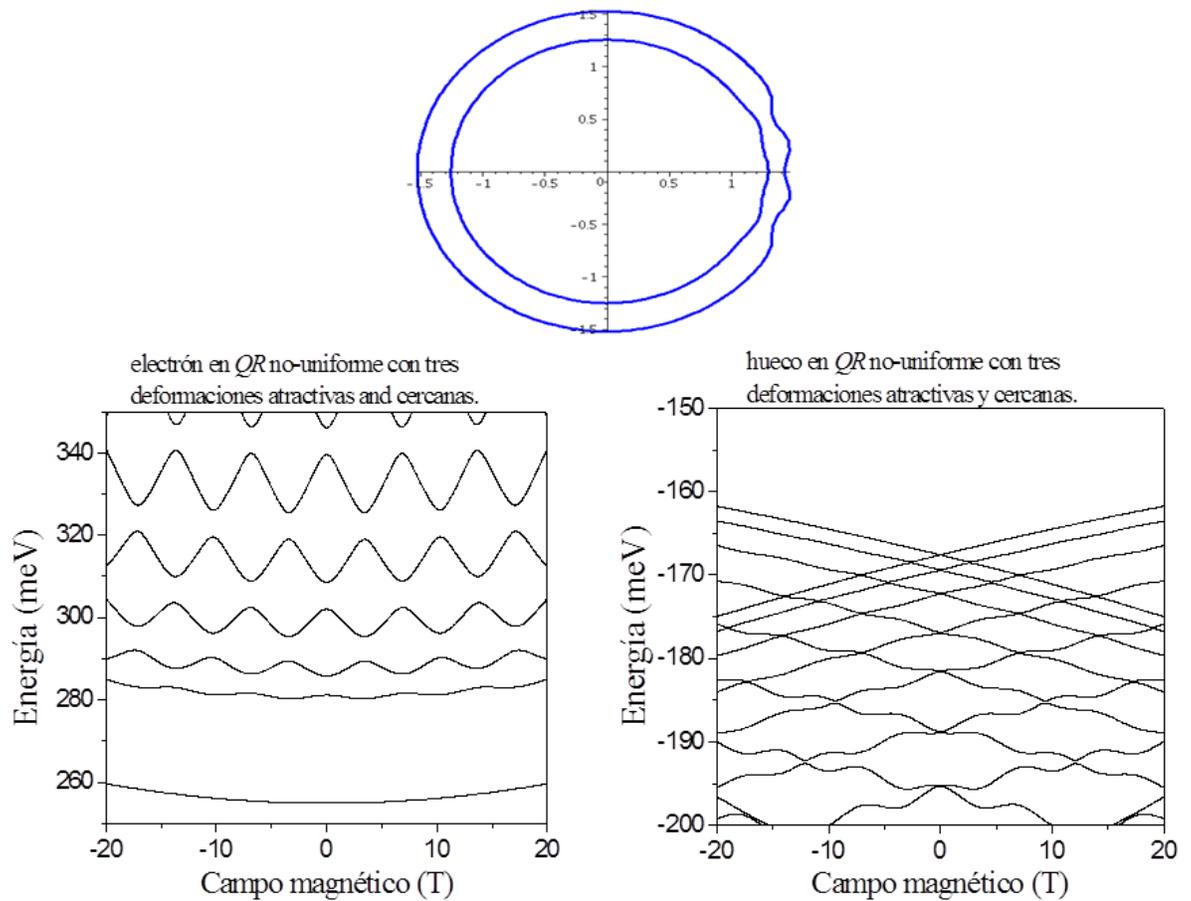
colina aislada. En primer lugar, las curvas se agrupan en unas sub-bandas con tres subniveles cada una. Las brechas entre subniveles dentro de una sub-banda se disminuyeron en comparación con el caso anterior, fig. 29, para los niveles inferiores de energía, agrupándose para formar unas trenzas. Las brechas en fig. 30 se contraen sucesivamente con el aumento de la energía. Por último, las oscilaciones se observan en todos niveles, incluyendo el estado base. En las sub-bandas superiores, las brechas entre las curvas prácticamente desaparecen. Todos estos cambios se deben al incremento de corriente de túnel a través de la barrera de potencial generada por las perturbaciones locales atractivas; cuyo ancho efectivo entre 0 y 2π se disminuye en tres veces.

Fig. 30 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en un anillo cuántico no uniforme, con tres deformaciones locales equidistantes atractivas, en función del campo magnético.



5.4.2.2 Anillo cuántico con tres colinas agrupadas. Con el fin de analizar el efecto de segregación de las no-uniformidades sobre las oscilaciones AB, se realizaron cálculos para el modelo cuando ángulos entre las colinas son: $\theta_j = 15^\circ \cdot j$, $j = 0, \pm 1$. Los resultados se presentan en fig. 31.

Fig. 31 Energía del electrón (izquierda) y del hueco (derecha) en anillo cuántico no uniforme, con tres deformaciones locales atractivas y cercanas las unas a las otras, en función del campo magnético.



Se observa la desaparición, prácticamente total, de las oscilaciones AB para electrón en los dos niveles inferiores de energía, mientras que, el efecto de localización del hueco se observa en una cantidad mayor de niveles de energía. Además, en los niveles superiores se puede ver una reducción de las amplitudes de las oscilaciones AB, con un aumento de las brechas en comparación con el caso cuando se tiene una sola deformación. Estos cambios se deben al aumento del ancho efectivo del pozo de potencial cuando las colinas se agrupan, el cual produce una disminución de la energía del estado base lo que dificulta el proceso de tunelamiento a través de la barrera de potencial.

6. CONCLUSIONES

- Se presenta un análisis de las alteraciones que sufren las propiedades espectrales y magnéticas de los excitones neutros y cargados eléctricamente, atrapados en anillos cuánticos, bajo la influencia de un campo magnético externo. Se estudia el efecto de la no-uniformidad del potencial de confinamiento inducido por la presencia de impurezas y defectos estructurales.
- Con base en la aproximación adiabática se justifica un modelo simplificado adecuado para estructuras actuales tipo volcán cuya altura máxima es más pequeña que el radio. Se muestra que el camino más probable de las partículas está ubicado dentro una región muy estrecha casi circular a lo largo de la cima del anillo, formando un camino crítico casi-unidimensional similar al propuesto por la teoría de percolación [107].
- En el marco de este modelo, se deducen ecuaciones diferenciales unificadas con condiciones periódicas que describen los movimientos del centro de masa y relativos de los complejos excitónicos. En la solución de estas ecuaciones obtenidas se usa el método de expansión en series de Fourier que permite realizar un análisis comparativo de las propiedades espectrales de complejos móviles (excitones X y X^+) con sus análogos inmóviles (donadora D^0 y D_2^+). Se demostró que las oscilaciones de Aharonov-Bohm de niveles energéticos inferiores para un excitón neutro se generan debido al movimiento relativo periódico a través del tunelamiento por debajo de barrera de potencial atractivo entre electrón y hueco. El ancho y la altura de la barrera crecen con el radio del anillo lo que produce la localización más fuerte de los niveles inferiores.

- En el caso del excitón cargado, el potencial efectivo correspondiente al movimiento relativo tiene dos barreras con anchos disminuidos, lo que facilita la generación de corrientes túnel en presencia de campo magnético. Además, en este caso a diferencia del excitón neutro, el movimiento de centro de masas también genera corriente eléctrica. Por esta razón, para el excitón cargado las oscilaciones de Aharonov-Bohm se observan en todos los estados.

- Se presentó un análisis de la alteración de la densidad de los estados y de las oscilaciones de Aharonov-Bohm de los niveles energéticos de los excitones en presencia de una donadora. Las curvas de la densidad de los estados exhiben un corrimiento al rojo de los picos correspondientes a los niveles inferiores en presencia de la impureza donadora, este efecto es relacionado con la disminución de la energía en la rotación relativa entre el electrón y el hueco, y se debe al rompimiento de la simetría periódica en presencia de la impureza. Se encontró que los niveles degenerados superiores se desacoplan debido al rompimiento de la simetría axial del sistema y además la presencia de la donadora conduce a un aplanamiento de las oscilaciones Aharonov-Bohm de los niveles superiores, disminuyendo su amplitud. Este efecto es más pronunciado para el excitón de hueco pesado.

- La existencia de varios grados de libertad, movimientos rotacionales de centro de masa junto con movimientos rotacionales relativos, complica el análisis de oscilaciones de los niveles individuales en el espectro de los complejos excitónicos debido a la superposición de diferentes sub-bandas. Con el fin de encontrar los factores determinantes que afectan las manifestaciones de las oscilaciones Aharonov-Bohm se analizaron las curvas de densidad de los estados y oscilaciones de sus picos para excitones formados con huecos de masas diferentes. Se encontró que para complejos excitónicos con huecos pesados, los subniveles inferiores son agrupados cerca del fondo de las subbandas, creando bordes claramente marcados, los cuales,

exhiben oscilaciones Aharonov-Bohm en presencia del campo magnético externo. Por el contrario, para los complejos compuestos por huecos ligeros, la distribución de los subniveles es casi homogénea, ya que las sub-bandas se superponen fuertemente, y sus bordes son borrosos. En el último caso, las oscilaciones Aharonov-Bohm se pueden detectar sólo mediante las evoluciones débiles de la posición de los picos en las curvas de la densidad de los estados.

- En el marco del modelo de Luttinger, en la cual tiene en cuenta la mezcla de bandas de valencia, se realizó el análisis de las curvas de Aharonov-Bohm en anillos cuánticos de InAs con no-uniformidades en forma de colinas direccionadas radialmente. Para una colina aislada se observó un apagamiento de las oscilaciones en los niveles inferiores. Un efecto similar se observa cuando varias colinas están agrupadas. Al contrario, cuando se tienen varias colinas equidistantes en el anillo cuántico, las oscilaciones Aharonov-Bohm reaparecen debido al efecto túnel del hueco o el electrón a través de la barrera de potencial de las no-uniformidades. También, en este caso se observa un nuevo efecto: la aparición de grupos de estados rotacionales cuyas energías en función de campo magnético forman curvas agrupadas en unas trenzas. Atribuimos este efecto a la formación de ondas estacionarias de acuerdo a la simetría de la estructura y a la contribución de las corrientes túnel.

REFERENCIAS

- [1] Bayer M, Stern O, Hawrylak P, Fafard S and Forchel A 2000 Hidden symmetries in the energy levels of excitonic “artificial atoms” *Nature* **405** 923
- [2] Gammon D 2000 Semiconductor physics - Electrons in artificial atoms *Nature* **405** 899
- [3] Ando T, Fowler A B and Stern F 1982 Electronic properties of two-dimensional systems *Rev. Mod. Phys.* **54** 437
- [4] Bowler D R 2004 Atomic-scale nanowires: physical and electronic structure *J. Phys. Condens. Matter* **16** R721
- [5] Jacak L, Hawrylak P and Wojs A 1998 *Quantum Dots* ed Springer
- [6] Loss D and DiVincenzo D P 1998 Quantum Computation with Quantum Dots *Phys. Rev. A* **57** 120
- [7] Lampert M A 1958 Mobile and Immobile Effective-Mass-Particle Complexes in Nonmetallic Solids *Phys. Rev. Lett.* **1** 450
- [8] Chakraborty T and Pietiläinen P 1994 Electron-Electron Interaction and the Persistent Current in a Quantum Ring *Phys. Rev. B* **50** 8460
- [9] Warburton R, Schaflein C, Haft D, Bickel F, Lorke A, Karrai K, Garcia J, Schoenfeld W and Petroff P 2000 Optical emission from a charge-tunable quantum ring *Nature* **405** 926
- [10] Bracker A, Stinaff E, Gammon D, Ware M, Tischler J, Park D, Gershoni D, Filinov A, Bonitz M, Peeters F and Riva C 2005 Binding energies of positive and negative trions: From quantum wells to quantum dots *Phys. Rev. B* **72** 35332
- [11] Bayer M 2003 Exciton Complexes in Self-Assembled In(Ga)As/GaAs Quantum Dots pp 93–146
- [12] Kim H, Lee W, Park S, Kyhm K, Je K, Taylor R A, Nogues G, Dang L S and Song J D 2017 Quasi-one-dimensional density of states in a single quantum ring *Sci. Rep.* **7** 40026
- [13] Kolomeisky E B and Straley J P 1996 Phase diagram and correlation exponents for

- interacting fermions in one dimension *Rev. Mod. Phys.* **68** 175
- [14] Bayer M, Korkusinski M, Hawrylak P, Gutbrod T, Michel M and Forchel A 2003 Optical Detection of the Aharonov-Bohm Effect on a Charged Particle in a Nanoscale Quantum Ring *Phys. Rev. Lett.* **90** 186801
- [15] Chaplik A V. 1995 Magnetoexcitons in quantum rings and in antidots *JETP Lett.* **62** 885
- [16] Chaplik A V. 2001 Neutral and charged magnetic excitons in finite-width quantum rings *J. Exp. Theor. Phys.* **92** 169
- [17] Wendler L, Fomim V M, Chaplik A V and Govorov A O 1996 Energy spectra of two interacting electrons in a quantum ring: Rotating Wigner molecule *Zeitschrift Fur Phys. B-Condensed Matter* **100** 211
- [18] Wendler L, Fomin V, Chaplik A and Govorov A 1996 Optical properties of two interacting electrons in quantum rings: Optical absorption and inelastic light scattering. *Phys. Rev. B. Condens. Matter* **54** 4794
- [19] Römer R and Raikh M E 2000 Aharonov-Bohm effect for an exciton *Phys. Rev. B* **62** 7045
- [20] Römer R and Raikh M E 2000 Aharonov-Bohm Oscillations in the Exciton Luminescence from a Semiconductor Nanoring *Phys. status solidi* **221** 535
- [21] Fuhrer A, Lüscher S, Ihn T, Heinzl T, Ensslin K, Wegscheider W and Bichler M 2001 Energy spectra of quantum rings. *Nature* **413** 822
- [22] Govorov A O, Ulloa S, Karrai K and Warburton R 2002 Polarized excitons in nanorings and the optical Aharonov-Bohm effect *Phys. Rev. B* **66** 81309
- [23] Ulloa S E, Govorov A O, Kalameitsev A V, Warburton R and Karrai K 2002 Magnetoexcitons in quantum-ring structures: a novel magnetic interference effect *Phys. E Low-dimensional Syst. Nanostructures* **12** 790
- [24] Govorov A ., Kalameitsev A ., Warburton R, Karrai K and Ulloa S . 2002 Excitons in quantum-ring structures in a magnetic field: optical properties and persistent currents *Phys. E Low-dimensional Syst. Nanostructures* **13** 297
- [25] Ding F, Akopian N, Li B, Perinetti U, Govorov A, Peeters F M, Bof Bufon C C, Deneke C, Chen Y H, Rastelli A, Schmidt O G and Zwiller V 2010 Gate controlled

- Aharonov-Bohm-type oscillations from single neutral excitons in quantum rings
Phys. Rev. B **82** 75309
- [26] Teodoro M D, Campo V L, Lopez-Richard V, Marega E, Marques G E, Gobato Y G, Iikawa F, Brasil M J S P, AbuWaar Z Y, Dorogan V G, Mazur Y I, Benamara M and Salamo G J 2010 Aharonov-Bohm Interference in Neutral Excitons: Effects of Built-In Electric Fields *Phys. Rev. Lett.* **104** 86401
- [27] Fomin V M 2014 *Physics of Quantum Rings* (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg)
- [28] Fomin V M, Gladilin V N, Klimin S N, Devreese J T, Kleemans N A J M and Koenraad P M 2007 Theory of electron energy spectrum and Aharonov-Bohm effect in self-assembled $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ quantum rings in GaAs *Phys. Rev. B* **76** 235320
- [29] González-Santander C, Domínguez-Adame F and Römer R a. 2011 Excitonic Aharonov-Bohm effect in a two-dimensional quantum ring *Phys. Rev. B* **84** 235103
- [30] Pershin Y V. and Piermarocchi C 2005 Persistent and radiation-induced currents in distorted quantum rings *Phys. Rev. B* **72** 125348
- [31] Bruno-Alfonso A and Latgé A 2008 Quantum rings of arbitrary shape and non-uniform width in a threading magnetic field *Phys. Rev. B* **77** 205303
- [32] Porras L C and Mikhailov I D 2013 Neutral and positively charged excitons in quantum ring *Phys. E Low-dimensional Syst. Nanostructures* **53** 41
- [33] Gutiérrez W, García L F and Mikhailov I D 2009 Impurity effect on spectrum of nanoring *J. Phys. Conf. Ser.* **167** 12067
- [34] Gutiérrez W, Garca L F and Mikhailov I D 2010 Coupled donors in quantum ring in a threading magnetic field *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures* **43** 559
- [35] Luttinger J M 1956 Quantum Theory of Cyclotron Resonance in Semiconductors: General Theory **102** 1030
- [36] Aharonov Y and Bohm D 1961 Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory *Phys. Rev.* **123** 1511
- [37] Movilla Rosell J L 2007 *Confinamiento nanoscópico en estructuras semiconductoras cero-dimensionales* (Tesis, Universitat Jaume I, España)
- [38] Loehr J P 1998 *Physics of strained quantum well lasers* (Boston, MA: Kluwer

Academic cop.)

- [39] Bastard G 1988 *Wave mechanics applied to semiconductor structures* (New York: Halsted, Press)
- [40] Lopes-Oliveira V 2011 *Estrutura Eletrônica de Anéis Quânticos* (Trabajo de maestría, UFSCar - São Carlos, SP, Brasil)
- [41] Lopes-Oliveira V 2016 *Structural properties of nanoscopic ring systems and their optical response* (Tesis, UFSCar - São Carlos, SP, Brasil)
- [42] Kane E O 1956 Energy band structure in p-type germanium and silicon *J. Phys. Chem. Solids* **1** 82
- [43] Löwdin P-O 1951 A Note on the Quantum-Mechanical Perturbation Theory *J. Chem. Phys.* **19** 1396
- [44] Lopez-Richard V 2001 *Magneto-Optical Properties of Zinc-Blende Type Semiconductors and Semiconductor-Nanostructures* (Tesis, UFSCar - São Carlos, SP, Brasil)
- [45] García J M, Medeiros-Ribeiro G, Schmidt K, Ngo T, Feng J L, Lorke a, Kotthaus J and Petroff P M 1997 Intermixing and shape changes during the formation of InAs self-assembled quantum dots *Appl. Phys. Lett.* **71** 2014
- [46] Lorke A, Luyken R J, Garcia J M and Petroff P M 2001 Growth and Electronic Properties of Self-Organized Quantum Rings *Jpn. J. Appl. Phys.* **40** 1857
- [47] Lorke A, Luyken R J, Govorov A O, Kotthaus J P, Garcia J M and Petroff P M 2000 Spectroscopy of nanoscopic semiconductor rings. *Phys. Rev. Lett.* **84** 2223
- [48] Emperador A, Pi M, Barranco M and Lorke A 2000 Far-infrared spectroscopy of nanoscopic InAs rings *Phys. Rev. B* **62** 4573
- [49] Blossey R and Lorke A 2002 Wetting droplet instability and quantum ring formation *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* **65** 21603
- [50] García J M, Silveira J P and Briones F 2000 Strain relaxation and segregation effects during self-assembled InAs quantum dots formation on GaAs(001) *Appl. Phys. Lett.* **77** 409
- [51] Bottomley D J 2002 Thermo-piezochemistry of InAs on GaAs(001) *Appl. Phys. Lett.* **80** 4747

- [52] Granados D and García J M 2003 In(Ga)As self-assembled quantum ring formation by molecular beam epitaxy *Appl. Phys. Lett.* **82** 2401
- [53] Kleemans N A J M, Blokland J H, Taboada A G, Van Genuchten H C M, Bozkurt M, Fomin V M, Gladilin V N, Granados D, García J M, Christianen P C M, Maan J C, Devreese J T and Koenraad P M 2009 Excitonic behavior in self-assembled InAs/GaAs quantum rings in high magnetic fields *Phys. Rev. B* **80** 155318
- [54] Alén B, Martínez-Pastor J, Granados D and García J M 2005 Continuum and discrete excitation spectrum of single quantum rings *Phys. Rev. B* **72** 155331
- [55] Biasiol G, Heun S and Sorba L 2011 Photoemission Microscopy Studies of Quantum Dots and Rings *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **6** 20
- [56] Sanguinetti S, Koguchi N, Mano T and Kuroda T 2011 Droplet Epitaxy Quantum Ring Structures *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **6** 34
- [57] Wu J, Wang Z M, Li A Z, Zeng Z, Li S, Chen G and Salamo G J 2011 Formation of GaAs Double Rings Through Gallium Migration and Nanodrilling *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **6** 58
- [58] Heyn C, Stemmann A, Strelow C, Köppen T, Sonnenberg D, Graf A, Mendach S and Hansen W 2011 Self-Assembly of Semiconductor Quantum Rings by Local Droplet Etching *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **6** 62
- [59] Nemesics Á, Heyn C, Stemmann A, Schramm A, Welsch H and Hansen W 2009 The RHEED tracking of the droplet epitaxial grown quantum dot and ring structures *Mater. Sci. Eng. B Solid-State Mater. Adv. Technol.* **165** 118
- [60] Kuroda T, Mano T, Ochiai T, Sanguinetti S, Sakoda K, Kido G and Koguchi N 2005 Optical transitions in quantum ring complexes *Phys. Rev. B* **72** 205301
- [61] Kim H D, Okuyama R, Kyhm K, Eto M, Taylor R A, Nicolet A L, Potemski M, Nogues G, Dang L S, Je K C, Kim J, Kyhm J H, Yoen K H, Lee E H, Kim J Y, Han I K, Choi W and Song J 2016 Observation of a Biexciton Wigner Molecule by Fractional Optical Aharonov-Bohm Oscillations in a Single Quantum Ring *Nano Lett.* **16** 27
- [62] Kim H D, Kyhm K, Taylor R A, Nogues G, Je K C, Lee E H and Song J D 2013 Asymmetry of localised states in a single quantum ring: Polarization dependence of

- excitons and biexcitons *Appl. Phys. Lett.* **102** 33112
- [63] Mano T, Kuroda T, Sanguinetti S, Ochiai T, Tateno T, Kim J, Noda T, Kawabe M, Sakoda K, Kido G and Koguchi N 2005 Self-assembly of concentric quantum double rings *Nano Lett.* **5** 425
- [64] Huang S, Niu Z, Fang Z, Ni H, Gong Z and Xia J 2006 Complex quantum ring structures formed by droplet epitaxy *Appl. Phys. Lett.* **89** 31921
- [65] Somaschini C, Bietti S, Koguchi N and Sanguinetti S 2009 Fabrication of multiple concentric nanoring structures *Nano Lett.* **9** 3419
- [66] Somaschini C, Bietti S, Sanguinetti S, Koguchi N and Fedorov a 2010 Self-assembled GaAs/AlGaAs coupled quantum ring-disk structures by droplet epitaxy. *Nanotechnology* **21** 125601
- [67] Linares-García G, Meza-Montes L, Stinaff E, Alsolamy S M, Ware M E, Mazur Y I, Wang Z M, Lee J and Salamo G J 2016 Optical Properties of a Quantum Dot-Ring System Grown Using Droplet Epitaxy *Nanoscale Res. Lett.* **11** 309
- [68] Grbić B, Leturcq R, Ihn T, Ensslin K, Reuter D and Wieck A D 2008 Aharonov-Bohm oscillations in p-type GaAs quantum rings *Phys. E Low-dimensional Syst. Nanostructures* **40** 1273
- [69] Antohe V 2004 *Quantum rings produced by nanolithography with an atomic force microscope* (University of Hannover)
- [70] Buttiker M, Imry Y and Landauer R 1983 Josephson behavior in small normal one-dimensional rings *Phys. Lett. A* **96** 365
- [71] Buks E, Schuster R, Heiblum M, Mahalu D and Umansky V 1998 Dephasing in electron interference by a demonstration of the AB effect: “which-path”detector *Nature* **391** 871
- [72] Magri R, Heun S, Biasiol G, Locatelli A, Menten T O and Sorba L 2010 Surface compositional profiles of self-assembled InAs/GaAs quantum rings *AIP Conf. Proc.* **1199** 3
- [73] Mikhailov I D, Marín J H and García F 2005 Off-axis donors in quasi-two-dimensional quantum dots with cylindrical symmetry *Phys. Status Solidi Basic Res.* **242** 1636

- [74] García Russi L F 2007 *Aproximación adiabática para sistemas de dos partículas en puntos cuánticos auto-ensamblados* (Tesis, Universidad Industrial de Santander)
- [75] Marín Cadavid J H 2008 *Espectro energético de los sistemas de pocas partículas fuertemente confinadas en heterojunturas semiconductoras* (Tesis, Universidad Industrial de Santander)
- [76] Rodríguez-Prada F A 2012 *Sistemas de pocas partículas en anillos cuánticos no uniformes* (Tesis, Universidad Industrial de Santander)
- [77] Rodríguez-Prada F, García L F and Mikhailov I D 2014 One-electron quantum ring of non-uniform thickness in magnetic field *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures* **56** 393
- [78] García L F, Rodríguez-Prada F A and Mikhailov I D 2014 Magnetoexciton in nonuniform quantum ring with crater-shaped central hole *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures* **60** 23
- [79] Voskoboinikov O 2016 Recovery of the Aharonov-Bohm oscillations in asymmetrical quantum rings *AIP Adv.* **6** 75204
- [80] Gutiérrez W 2011 *Estados ligados de portadores de carga en heteroestructuras semiconductoras* (Tesis, Universidad Industrial de Santander)
- [81] Govorov A O, Chaplik A V, Wendler L and Fomin V M 1994 Does the persistent current in a quantum loop depend on an electron-electron interaction? *JETP Lett.* **60** 643
- [82] Wendler L, Fomin V M and Chaplik A V. 1995 Persistent currents of few interacting electrons in mesoscopic rings *Solid State Commun.* **96** 809
- [83] Szafran B and Peeters F M 2005 Few-electron eigenstates of concentric double quantum rings *Phys. Rev. B* **72** 155316
- [84] Chaplik A V. and Kovalev V M 2014 New Versions of the Aharonov-Bohm Effect in Quantum Rings pp 199–245
- [85] Song J and Ulloa S E 2001 Magnetic field effects on quantum ring excitons *Phys. Rev. B* **63** 125302
- [86] Hu H, Zhu J-L, Li D-J and Xiong J-J 2001 Aharonov-Bohm effect of excitons in nanorings *Phys. Rev. B* **63** 195307

- [87] Fischer A M, Campo V L, Portnoi M E and Römer R A 2009 Exciton storage in a nanoscale Aharonov-Bohm ring with electric field tuning *Phys. Rev. Lett.* **102** 96405
- [88] High A a, Novitskaya E E, Butov L V, Hanson M and Gossard A C 2008 Control of exciton fluxes in an excitonic integrated circuit *Science* **321** 229
- [89] Arsoski V, Čukarić N, Tadić M and Peeters F M 2012 Exciton states in a nanocup in the presence of a perpendicular magnetic field *Phys. Scr.* **T149** 14054
- [90] Li B and Peeters F M 2011 Tunable optical Aharonov-Bohm effect in a semiconductor quantum ring *Phys. Rev. B* **83** 115448
- [91] Čukarić N, Arsoski V, Tadić M and Peeters F M 2012 Hole states in nanocups in a magnetic field *Phys. Rev. B* **85** 235425
- [92] Tadić M, Čukarić N, Arsoski V and Peeters F M 2011 Excitonic Aharonov-Bohm effect: Unstrained versus strained type-I semiconductor nanorings *Phys. Rev. B* **84** 125307
- [93] Filikhin I, Suslov V M and Vlahovic B 2006 Electron spectral properties of the InAs/GaAs quantum ring *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures* **33** 349
- [94] Arsoski V V., Tadic M and Peeters F M 2013 Strain and band-mixing effects on the excitonic Aharonov-Bohm effect in In(Ga)As/GaAs ringlike quantum dots *Phys. Rev. B* **87** 85314
- [95] Grochol M, Grosse F and Zimmermann R 2006 Optical exciton Aharonov-Bohm effect, persistent current, and magnetization in semiconductor nanorings of type I and II *Phys. Rev. B* **74** 115416
- [96] Peeters F and Schweigert V 1996 Two-electron quantum disks *Phys. Rev. B* **53** 1468
- [97] Mikhailov I D, García L F and Marín J H 2008 Vertically coupled quantum dots charged by exciton *Microelectronics J.* **39** 378
- [98] Janssens K L, Peeters F M and Schweigert V A 2001 Magnetic field dependence of the exciton energy in a quantum disks *Phys. Rev. B* **63** 205311
- [99] Herschbach D R, Avery J and Gosciniski O 1993 *Dimensional Scaling in Chemical Physics* (Springer Netherlands)
- [100] Vurgaftman I, Meyer J R and Ram-Mohan L R 2001 Band parameters for III-V compound semiconductors and their alloys *J. Appl. Phys.* **89** 5815

- [101] Datta S 2005 *Quantum transport : atom to transistor* (Cambridge University Press)
- [102] Wigner E 1934 On the interaction of electrons in metals *Phys. Rev.* **46** 1002
- [103] Teodoro M D, Malachias A, Lopes-Oliveira V, Cesar D F, Lopez-Richard V, Marques G E, Marega E, Benamara M, Mazur Y I and Salamo G J 2012 In-plane mapping of buried InGaAs quantum rings and hybridization effects on the electronic structure *J. Appl. Phys.* **112** 14319
- [104] Tan W-C and Inkson J C 1996 Electron states in a two-dimensional ring -an exactly soluble model *Semicond. Sci. Technol. Semicond. Sci. Technol* **11** 1635
- [105] Kane E O 1957 Band structure of indium antimonide *J. Phys. Chem. Solids* **1** 249
- [106] García L F, Revinova S Y and Mikhailov I D 2017 Band nonparabolicity effect on spectral properties of quantum ring *Superlattices Microstruct.* **103** 151
- [107] Stauffer D and Aharony A 1994 *Introduction to percolation theory* (Taylor & Francis)

BIBLIOGRAFÍA

CHAPLIK, Alexander. Magnetoexcitons in quantum rings and in antidots. En: JETP Letters. 1995, vol.62, p.885-889.

CHAPLIK, Alexander. Neutral and charged magnetic excitons in finite-width quantum rings. En: Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2001, vol.92, p.169-173.

DING, F, *et al.* Gate controlled Aharonov-Bohm-type oscillations from single neutral excitons in quantum rings. En: Physical Review B. 2010, vol.82 p.75309.

TEODORO, Marcio, *et al.* Aharonov-Bohm interference in neutral excitons: effects of built-in electric fields. En: Physical Review Letters. 2010, vol.104 p.86401.