

AULA INCLUSIVA DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO DE SITUACIONES DE
VARIACIÓN Y CAMBIO

Haided Lised Arciniegas Rueda

Trabajo de grado para obtener el título de Magister en Educación Matemática

Directora

Edith Johanna Mendoza Higuera

Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2022

DEDICATORIA

A Dios, por la vida, salud y fortaleza día tras día, por caminar conmigo, iluminarme y colmarme de sabiduría en el proceso y logro de esta meta.

A la estrella más bonita en el cielo, quien sonreía a mi llegada y quien al brillo de sus ojos reflejaba un sincero amor y mayor orgullo con mis logros y objetivos. Es por ti y para ti abuelo.

A mis padres Jairo Arciniegas y Sthella Rueda a quienes forjaron en mí una mujer valiente y soñadora, a quienes debo tanto apoyo, amor e incondicionalidad.

A mis hermanas Jurley y Wendy Arciniegas, por estar conmigo y ver en mí una buena persona y profesional.

A mi sobrino Maximiliano quien llena de ilusión mis días con su sonrisa, ternura e inocencia.

A Angie, Sebastián y Slendy por celebrar mis logros y escuchar mis preocupaciones.

AGRADECIMIENTOS

A mi mentora, amiga, compañera y asesora de tesis Dr. Johanna Mendoza por sus orientaciones y apoyo en momentos oportunos, por su paciencia, tiempo, dedicación, comprensión y confianza a lo largo de todo el proceso; por creer en mí, valorar mis aportes y ocurrencias y, por su apoyo incondicional a cada propuesta. Gracias por contagiarme de lo bonito y satisfactorio de la investigación en educación matemática, por discutir conmigo y compartir su conocimiento desde la humildad, bondad y sororidad.

A los estudiantes sujetos de estudio quienes cordialmente me recibieron en su espacio, compartieron información y experiencias conmigo y por supuesto, sembraron en mí una sensibilidad indescriptible por la diversidad inherente en el aula y fueron mi maestros a lo largo del proceso.

Al Dr. Jorge Fiallo por creer en mí, apoyarme desde sus instancias, escucharme, compartir experiencias y por supuesto, por hacerme merecedora del título de “Estudiante consentida” de la cohorte.

A mis evaluadores, Dra. María del Socorro García y Dr. Jorge Fiallo por su apoyo y aportes para el enriquecimiento de esta investigación.

A profesor Juan de Dios Urbina por ser anfitrión y mediador con la institución educativa. Por creer en mí, por sus consejos y por las espontáneas charlas antes de cada clase.

A la Institución Educativa las Américas de Bucaramanga que posibilitó el acercamiento y desarrollo de esta investigación.

A la docente Viviana Villamizar por su paciencia, comprensión, flexibilidad y apoyo frente a mis propuestas.

A profesores e investigadores que compartieron conmigo espacios de discusión en seminarios, encuentros y congresos, por sus apreciaciones y sugerencias. Cada aporte enalteció

y contribuyó en mi formación, como oradora y en especial, a reconocer lo valiosa que es esta investigación en el campo.

A la Universidad Industrial de Santander, por acogerme y ser mi segundo hogar.

A la Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas y grupo EDUMAT por sus incondicionales apoyos para la divulgación de este trabajo de investigación.

A la Dra. Sandra Parada por acogerme y valorar mi trabajo de investigación dentro del proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores” en el programa “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”.

A todas las personas que me llevaron a reflexionar, repensar y crecer constantemente como persona y profesional. A todos quienes estuvieron conmigo en el proceso, brindándome apoyo y motivación.

A todos ustedes, ¡MUCHAS GRACIAS!

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia - MINCIENCIAS, quien financió el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código 1115-852-70767, con su respectivo proyecto Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores, código 70783, con recursos del PATRIMONIO AUTÓNOMO FONDO NACIONAL DE FINANCIAMIENTO PARA LA CIENCIA, LA TECNOLOGÍA Y LA INNOVACIÓN FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS, contrato CT 183-2021.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	18
INTRODUCCIÓN	20
CAPÍTULO I. INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS. UNA PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO	24
CAPÍTULO II. ANTECEDENTES.....	31
2.1. Marco legal para la inclusión	31
2.1.1. A nivel internacional	31
2.1.2. A nivel nacional	34
2.2. Cifras sobre participación e incidencia de personas con discapacidad	37
2.3. Inclusión en clase de matemáticas	40
2.4. Pensamiento variacional para estudiantes con NE	48
CAPÍTULO III. TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA Y LA INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS.....	54
3.1. Enseñanza y aprendizaje de la matemática: una mirada desde la Teoría Socioepistemológica de Matemática Educativa	54
3.1.1. Estudio de situaciones de variación y cambio.....	60
Caracterización del pensamiento variacional a partir de Prácticas Variacionales	69
3.2. Inclusión en el aula de matemáticas	71

3.2.1. <i>Características del aula inclusiva</i>	72
Aula inclusiva de matemáticas	82
CAPITULO IV. MARCO METODOLÓGICO. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE A PARTIR DE LA CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO DIVERSO	84
4.1. Población de estudio.....	89
4.1.1. <i>Un panorama sobre la inclusión en la Institución Educativa Las Américas</i>	89
4.1.2. <i>La muestra</i>	91
4.2. Orientaciones técnicas, didácticas y pedagógicas para la inclusión.....	92
4.2.1. <i>Ritmos de aprendizaje</i>	92
4.2.2. <i>Enfoques didácticos para la adaptación al currículo</i>	94
4.2.3. <i>Orientaciones para la atención a la diversidad en el aula de matemáticas</i>	97
4.3. Etapas metodológicas	105
4.3.1. <i>Sobre la puesta en escena</i>	108
4.3.2. <i>Análisis de datos</i>	109
4.4. Instrumentos de recolección de datos.....	110
4.4.1. <i>Revisión de documentos</i>	110
4.4.2. <i>Observación participativa</i>	110
4.4.3. <i>Cuestionarios</i>	115

CAPÍTULO V. LA CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO DIVERSO. UN REFLEJO DE LA DIVERSIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. 120

5.1. Síntesis de elementos teóricos para la caracterización	120
5.2. Recolección de datos y sistematización	121
5.3. Discusión de resultados	123
5.3.1. Contexto y vida familiar	124
5.3.2. Habilidades intelectuales	127
5.3.3. Conducta adaptativa y desarrollo personal	131
5.3.4. Participación e inclusión social	132
5.3.5. Adaptación a las metas de aprendizaje	133
5.4. Un grupo diverso de estudiantes de noveno grado de una institución pública de Colombia	137

CAPÍTULO VI. DISEÑO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE SOBRE VARIACIÓN CONSTANTE..... 138

6.1. Bosquejo desde la problematización del saber matemático	138
6.1.1. Primer momento	141
6.1.2. Segundo momento	145
6.1.3. Tercer momento	149
6.1.4. Cuarto momento	154
6.2. Metas de aprendizaje para la inclusión en el aprendizaje y la flexibilización curricular.	157

6.2.1. Primer momento	158
6.2.2. Segundo momento.....	160
6.2.3. Tercer momento	162
6.2.4. Cuarto momento	167
6.3. Universalización e individualización del aprendizaje.....	168
6.3.1. Diseño Universal para el Aprendizaje	168
6.3.2. Plan Individual de Ajuste Razonable.....	173
6.4. Situación de aprendizaje final. El consumo de datos de aplicaciones móviles para el estudio de la variación constante.	175

CAPÍTULO VII. LA CCM DE UN GRUPO DIVERSO EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN CONSTANTE..... 176

7.1. Práctica variacional de comparación.....	176
7.1.1. Estrategias cuantitativas para comparar	178
7.1.2. Estrategias cualitativas para comparar	187
7.2. Práctica variacional de seriación.....	193
7.2.1. Seriación a través de la caracterización cuantitativa	194
7.2.2. Seriación a través de la caracterización cualitativa	206
7.3. Práctica variacional de predicción.....	213
7.3.1. Predicción como formulación aritmética	215
7.3.2. Predicción como apreciación del valor de una variable respecto a otra	224

7.4. Práctica variacional de estimación	241
7.4.1. <i>Estimación como una descripción cuantitativa</i>	242
7.4.2. <i>Estimación como una descripción cualitativa</i>	248
7.5. Síntesis	256
CAPITULO VIII. UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO DE PRÁCTICAS VARIACIONALES EN UN GRUPO DIVERSO	263
8.1. Para concluir.....	264
8.1.1. <i>La caracterización como punto de partida para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas</i>	264
8.1.2. <i>Contribuciones a la caracterización del pensamiento variacional a partir de las prácticas variacionales</i>	272
8.1.3. <i>Características del aula inclusiva de matemáticas como base para favorecer la inclusión en el aprendizaje.</i>	275
8.2. Otras consideraciones.....	280
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	282
ANEXOS.....	294

Lista de tablas

Tabla 1. Características del aula inclusiva según referentes revisados.....	78
Tabla 2. Características del aula inclusiva de matemáticas	83
Tabla 3. Dimensiones de caracterización.....	120
Tabla 4. Variación del consumo de datos de WhatsApp desde la representación tabular.	152
Tabla 5. Variación del consumo de datos de Netflix desde la representación tabular.....	155
Tabla 6. Metas de aprendizaje - Momento 1.....	159
Tabla 7. Metas de aprendizaje. - Momento 2.....	161
Tabla 8. Metas de aprendizaje. - Momento 3.....	163
Tabla 9. Tabla para identificar variación en actividad complementaria del momento 3.	165
Tabla 10. Metas de aprendizaje. - Momento 4.....	167
Tabla 11. Estrategias cuantitativas y cualitativas de la práctica variacional de comparación. ..	177
Tabla 12. Desarrollo de la práctica de comparación según estrategia y ritmo de aprendizaje. .	177
Tabla 13. Seriación a través de la caracterización cuantitativa y/o cualitativa.....	194
Tabla 14. Desarrollo de la práctica variacional de seriación según la caracterización y ritmo de aprendizaje.	194
Tabla 15. Incidencia de las repuestas de los estudiantes en el desarrollo de la práctica variacional de predicción.	214
Tabla 16. Desarrollo de la práctica de predicción según el tipo de predicción y ritmo de aprendizaje.	214
Tabla 17. Tipos de escala para el eje Y para la gráfica del consumo de datos en función del tiempo.	227
Tabla 18. Estimación como una descripción cuantitativa y/o cualitativa	241
Tabla 19. Desarrollo de la práctica de estimación según estrategia y ritmo de aprendizaje.....	242
Tabla 20. Comparación ritmo de aprendizaje en la caracterización y durante el desarrollo de las PV.	260
Tabla 21. Descriptores de las PV desde metas en los ritmos de aprendizaje.....	274

Lista de figuras

Figura 1. Elementos del sistema referencial variacional.	66
Figura 2. Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.	85
Figura 3. Plan de ejecución de la investigación.	88
Figura 4. Principios y pautas del DUA.	95
Figura 5. Etapas metodológicas.	107
Figura 6. Organización del salón de clase.	109
Figura 7. Formato diario de campo.	114
Figura 8. Dinámica familiar.	124
Figura 9. Situaciones difíciles que ha enfrentado la familia.	125
Figura 10. Estrato socioeconómico.	126
Figura 11. Adaptaciones a las metas de aprendizaje.	134
Figura 12. Momentos para el estudio de la variación constante.	140
Figura 13. Momento 1 - Consumo de datos de WhatsApp.	142
Figura 14. Momento 1 – Consumo de datos de WhatsApp - GeoGebra.	143
Figura 15. Momento 2 . Consumo de datos de WhatsApp y Facebook.	145
Figura 16. Para construir gráfica de Facebook a partir de la gráfica de WhatsApp.	146
Figura 17. Momento 2 – Consumo de datos de WhatsApp y Facebook - GeoGebra.	148
Figura 18. Momento 3 - Consumo de datos de WhatsApp y Facebook desde la representación tabular.	150
Figura 19. Momento 3 - Consumo de datos de WhatsApp desde la representación tabular y gráfica - GeoGebra.	152
Figura 20. Momento 4 - Consumo de datos de Netflix.	155
Figura 21. Cambio de incremento en el punto A. - Momento 3.	165
Figura 22. Representaciones del objeto matemático.	169
Figura 23. Ejemplos en la representación tabular. - Momento 3.	170
Figura 24. Cuadrícula para gráfica en tarea 4 - Momento 1 y Momento 2.	171
Figura 25. Tarea 3 y 4 - Trabajo con GeoGebra. - Momento 3.	171
Figura 26. Guías y espacios.	172
Figura 27. <i>Est29 y Est4 usando la regla para medir el referente inicial.</i>	178
Figura 28. <i>Est27 explica a Est7 y Est8 usando la regla para medir y comparar.</i>	179

Figura 29. <i>Respuesta del Est20 en pregunta M1-P2A.</i>	179
Figura 30. <i>Respuesta de (Est23, Est25) en M1-P2A.</i>	180
Figura 31. <i>Respuesta de (Est26, Est28) en M1-P2A.</i>	181
Figura 32. <i>Respuesta de Est8 y (Est14, Est29) en M1-P2A.</i>	182
Figura 33. <i>Respuesta de (Est13, Est27) en M2-P3A.</i>	183
Figura 34. <i>Respuesta de Est3 y Est16 en M2-P3A.</i>	184
Figura 35. <i>Respuesta de Est24 en M2-P5A.</i>	184
Figura 36. <i>Respuesta de (Est26, Est28) en M2-P5A.</i>	184
Figura 37. <i>Respuesta de Est37 en M2-P5A.</i>	185
Figura 38. <i>Respuestas de (Est1, Est3) en M3-P5B, P6B.</i>	186
Figura 39. <i>Respuesta de (Est9, Est10) en M3-P5B, P6B.</i>	186
Figura 40. <i>Respuesta de Est7 en M4-P2.</i>	186
Figura 41. <i>Comparación entre el consumo de datos de la primera hora de WhatsApp y Netflix.</i>	187
Figura 42. <i>Replicas aproximadas del referente inicial.</i>	188
Figura 43. <i>Facebook consume los datos del plan en 4 horas porque consume más datos que WhatsApp.</i>	189
Figura 44. <i>WhatsApp consume más datos que Facebook por hora.</i>	189
Figura 45. <i>Facebook consume más rápido los datos que WhatsApp.</i>	189
Figura 46. <i>El valor es el mismo que surge al buscar la diferencia.</i>	190
Figura 47. <i>Valor común se relaciona con el consumo por hora de WhatsApp.</i>	190
Figura 48. <i>Comparación de Netflix y WhatsApp a partir de la forma de la gráfica.</i>	191
Figura 49. <i>Netflix consume más datos por hora que WhatsApp.</i>	192
Figura 50. <i>Netflix consume más cada hora y WhatsApp consume siempre lo mismo.</i>	192
Figura 51. <i>Respuestas del Est7 en M1-P3A y M2-P6A.</i>	195
Figura 52. <i>Respuesta de Est12 en M1-P3A.</i>	196
Figura 53. <i>Respuesta de Est6 en M1-P3A.</i>	196
Figura 54. <i>Respuesta de Est37 en M1-P3A.</i>	197
Figura 55. <i>Respuesta de Est23 en M1-P3A.</i>	198
Figura 56. <i>Respuestas de Est29 y Est11 en M3-P2B.</i>	198
Figura 57. <i>Respuesta de Est10 en M3-P2B.</i>	199

Figura 58. <i>Respuestas de Est1 en M2-P6B y Est22 en M2-P5B.</i>	199
Figura 59. <i>Respuesta de Est4 en M2-P6B.</i>	200
Figura 60. <i>Respuesta de Est3 en M2-P4A y Est10 en M2-P7A.</i>	201
Figura 61. <i>Respuesta de Est5 en M2-P4A.</i>	202
Figura 62. <i>Respuesta de Est35 y (Est27, Est13) en M2-P4A.</i>	203
Figura 63. <i>Respuesta de Est37 en M2-P4A.</i>	204
Figura 64. <i>Respuesta de Est6 en M2-P4A.</i>	205
Figura 65. <i>Respuesta de Est11 en M2-P6A.</i>	205
Figura 66. <i>Respuesta de (Est9, Est10) en M4-P5.</i>	206
Figura 67. <i>Respuesta de Est7 en M1-P9B, Est13 en M3-P2B y Est9 en M2-P5B.</i>	207
Figura 68. <i>Respuesta de Est16 en M1-P9B, Est38 en M2-P6B y Est12 en M3-P2B.</i>	208
Figura 69. <i>Respuesta de (Est4, Est32) y Est19 en M3-P2B.</i>	208
Figura 70. <i>Respuesta de (Est4, Est32) en M2-P5B.</i>	209
Figura 71. <i>Respuesta de Est6 en M1-P9B.</i>	209
Figura 72. <i>Respuesta de Est17 en M1- P9B.</i>	209
Figura 73. <i>Expresión corporal de Est37 durante la socialización.</i>	210
Figura 74. <i>Respuestas de Est2 y Est28 en M2-P6B.</i>	211
Figura 75. <i>Respuestas de Est7 y Est3 en M2-P6A.</i>	211
Figura 76. <i>Respuesta de Est22 en M2-P7A.</i>	212
Figura 77. <i>Respuesta de (Est26, Est28) en M2-P4A.</i>	213
Figura 78. <i>Respuesta de Est3 en M3-P4A.</i>	215
Figura 79. <i>Respuesta de Est1 en M3-P7B.</i>	216
Figura 80. <i>Respuesta de (Est13, Est27) en M3-P4A.</i>	217
Figura 81. <i>Respuesta de Est12 en M3-P4A.</i>	219
Figura 82. <i>Respuestas de Est24 en M3-P4A y Est21 en M3-P7B.</i>	219
Figura 83. <i>Respuesta de Est3 en M3-P7B.</i>	220
Figura 84. <i>Respuesta de Est1 en M3-P6A.</i>	221
Figura 85. <i>Respuesta de Est11 y Est25 en M3-P6B.</i>	222
Figura 86. <i>Respuesta de Est27 en M3-P6A.</i>	224
Figura 87. <i>Respuesta de (Est1, Est3) en M1-P4A.</i>	225
Figura 88. <i>Respuesta de Est12 en M1-P4A.</i>	226

Figura 89. <i>Respuesta de Est13 en M1-P4A.</i>	227
Figura 90. <i>Respuesta de Est14, Est35 y (Est4, Est32) en M3-P1A.</i>	229
Figura 91. <i>Respuesta de (Est9, Est10) en M3-P1A.</i>	230
Figura 92. <i>Respuesta de Est37 y Est2 en M3-P1A.</i>	231
Figura 93. <i>Respuesta de Est20 en M3-P4A.</i>	232
Figura 94. <i>Explicación de la respuesta mostrada en figura 93.</i>	232
Figura 95. <i>Respuesta de Est2 en M3-P7B.</i>	233
Figura 96. <i>Respuesta de Est2 en M3-P6A.</i>	234
Figura 97. <i>Respuesta de Est22 en M3-P6A.</i>	234
Figura 98. <i>Respuesta de Est36 en M3-P6A.</i>	234
Figura 99. <i>Respuesta de Est29 en M3-P3B y M3-P4B</i>	235
Figura 100. <i>Respuesta de Est37 y Est10 en M3-P3B y M3-P4B</i>	237
Figura 101. <i>Respuesta de Est2 en M4-P3.</i>	238
Figura 102. <i>Respuesta de (Est9, Est10) en M4-P3.</i>	239
Figura 103. <i>Respuestas de Est7 y Est20 en M4-P3.</i>	240
Figura 104. <i>Respuesta de Est27 en M2-P7B.</i>	243
Figura 105. <i>Respuesta de Est29 en M2-P7B.</i>	243
Figura 106. <i>Respuesta de Est10 en M2-P7B.</i>	244
Figura 107. <i>Respuesta de Est1 en M3-P5A.</i>	245
Figura 108. <i>Respuesta de Est2 y Est7 en M3-P5A.</i>	245
Figura 109. <i>Respuesta de Est21 en M3-P5A y M3-P8B.</i>	246
Figura 110. <i>Respuestas de Est3 en M3-P5A y M3-P8B.</i>	247
Figura 111. <i>Respuestas de Est13 en M3-P5A y M3-P8B.</i>	248
Figura 112. <i>Respuesta de Est8 en M1-P10B.</i>	248
Figura 113. <i>Respuesta de Est7 y Est12 en M1-P10B.</i>	249
Figura 114. <i>Respuesta de Est24 en M1-P10B.</i>	250
Figura 115. <i>Respuesta de Est22 en M1-P10B.</i>	250
Figura 116. <i>Respuesta de Est3 y Est37 en M2-P7B.</i>	250
Figura 117. <i>Respuesta de Est18 en M2-P7B.</i>	251
Figura 118. <i>Respuesta de Est5 en M2-P7B.</i>	251
Figura 119. <i>Respuesta de Est20 en M3-P5A.</i>	252

Figura 120. <i>Respuesta de Est29, Est27 y Est3 en M3-P11B.</i>	253
Figura 121. <i>Respuesta de Est14 en M3-P11B.</i>	253
Figura 122. <i>Respuesta del Est2 y Est20 en M4-P1.</i>	255
Figura 123. <i>Respuesta de Est26 en M4-P1.</i>	255
Figura 124. <i>Respuesta de (Est9, Est10) en M4-P6.</i>	256
Figura 125. <i>Desarrollo de la práctica variacional de comparación.</i>	257
Figura 126. <i>Desarrollo de la práctica variacional de seriación.</i>	258
Figura 127. <i>Desarrollo de la práctica variacional de predicción.</i>	258
Figura 128. <i>Desarrollo de la práctica variacional de estimación.</i>	259
Figura 129. <i>Estrategia metodológica para la inclusión en clase de matemáticas.</i>	264
Figura 130. <i>Discusión entre estudiantes</i>	268
Figura 131. <i>Uso de la tecnología en el aula inclusiva de matemáticas.</i>	269
Figura 132. <i>Uso del teléfono para realizar cálculos.</i>	270
Figura 133. <i>Orientación docente a los estudiantes.</i>	276
Figura 134. <i>Proceso de comunicación en discusiones entre grupos de trabajo.</i>	277
Figura 135. <i>Red de apoyo en el trabajo colaborativo.</i>	278
Figura 136. <i>Trabajo colaborativo, estudiantes organizados en binas.</i>	279

Lista de anexos

Anexo 1. Formato de consentimiento informado a estudiantes.....	294
Anexo 2. Cuestionario aplicado a estudiantes.	295
Anexo 3. Cuestionario aplicado a padres de familia	300
Anexo 4. Cuestionario aplicado a docente de matemáticas - Versión 1.....	303
Anexo 5. Cuestionario aplicado a docente de matemáticas - Versión 2.....	310
Anexo 6. Cuestionario de habilidades intelectuales.	313
Anexo 7. Situación de aprendizaje final.	315

RESUMEN

Título: Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.

Autor: Haided Lised Arciniegas Rueda.

Palabras clave: prácticas variacionales, pensamiento variacional, Socioepistemología, aula inclusiva, grupo diverso.

DESCRIPCIÓN:

Este documento describe los resultados de una investigación de corte cualitativo específicamente, una estrategia de diseño con elementos fenomenológicos que tuvo por objetivo: describir una estrategia metodológica para el desarrollo de prácticas variacionales en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado. La investigación se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y elementos de la educación inclusiva. De tal modo que, el camino metodológico se delimita en aspectos preliminares, caracterización del grupo diverso, diseño de una situación de aprendizaje, puesta en escena y análisis de datos para finalmente, concluir con el reporte de resultados de la investigación.

Los resultados dan cuenta de que la estrategia metodológica para la inclusión en clase de matemáticas la conforman tres elementos fundamentales: la caracterización como punto de partida para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas, las características del aula inclusiva de matemáticas como base para favorecer la inclusión en el aprendizaje y contribuciones a la caracterización del pensamiento variacional a partir de las prácticas variacionales. Con respecto al último, se reconoce la contribución en la caracterización del pensamiento variacional a partir del desarrollo de prácticas variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación)

en los tres ritmos de aprendizaje que reconocen y valoran la construcción de conocimiento matemático desde quien aprende.

Se espera que, los resultados de esta investigación incentiven a continuar la investigación en educación matemáticas e inclusión en aulas no ajenas a la realidad.

INTRODUCCIÓN

La inclusión escolar de personas con Necesidad Educativa Especial o condición específica ha pasado por distintas etapas históricas. De hecho, organizaciones nacionales e internacionales han realizado acuerdos para garantizar una educación común para todos, lo que implica adaptaciones del currículo y el estudio de prácticas de instrucción orientadas al aprendizaje. Más aún, la convergencia entre educación matemática e inclusión es una problemática de preocupación actual a la que el sistema educativo debería responder con una educación igualitaria, equitativa y justa.

En ese sentido, los Entandares Básicos de Competencia resaltan la importancia de una formación para “ser ciudadanos matemáticamente competentes” lo que coincide con ser un “ciudadano funcional”, desde la mirada de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en la medida en que el estudiante es capaz de usar y dar significado a la matemática para resolver distintas situaciones cotidianas. Para ello, se requiere no solo discutir los contenidos también, conocer la diversidad de la población pues, el estudiante es el protagonista en la construcción de conocimiento matemático (Méndez, 2015); de tal modo que, la gestión de sus aprendizaje debiera estar enfocada en situaciones cotidianas que se ligan con la modelación, con situaciones de variación y cambio (Cordero et al., 2015).

Así, conocer a quien aprende, inventa y usa el conocimiento matemático es parte fundamental para la construcción del conocimiento matemático (Cantoral, 2016) teniendo en cuenta que, es la escuela que debe adaptarse al estudiante y no al contrario (Arnaiz, 2005). Entonces, al plantear situaciones que involucran al estudiante y el concepto matemático, los resultados de aprendizaje se derivan de la práctica de enseñanza que fomenta la significación del conocimiento (Méndez, 2015). Por ende, la atención se centra en el desarrollo del pensamiento

variacional a través de una situación de aprendizaje y práctica de instrucción que reconoce al estudiante como protagonista en la construcción de conocimiento matemático en una aula inclusiva de matemáticas que tiene como principios, la equidad, justicia e igualdad, al reconocer y valorar las diferencias sociales, culturales, de capacidad y de intereses.

Finalmente, se describe a continuación, la secuencia de capítulos que componen esta investigación.

En el capítulo I se expone el planteamiento del problema, al discutir la importancia de la formación de todos los estudiantes como ciudadanos matemáticamente competentes para la sociedad, lo que lleva al estudio y profundización del pensamiento variacional en estudiantes de noveno grado. Además, se destaca que promover la Construcción de Conocimiento Matemático (CCM) de todos los estudiantes implica conocer la diversidad del grupo y garantizar características que propician un aula inclusiva de matemáticas. Por último, se presenta la pregunta y objetivo general que dirigen esta investigación.

En el capítulo II se describe la revisión bibliográfica que permite justificar y direccionar la inclusión en el aprendizaje en el aula de matemáticas. El capítulo se divide en tres subsecciones principales: marco legal para la inclusión, cifras sobre participación e incidencia de personas con discapacidad, inclusión en clase de matemáticas y el pensamiento variacional para estudiantes con necesidades específicas. En la primera sección se discuten menciones legales, orientaciones estatales y de organizaciones, a nivel nacional e internacional, sobre la educación inclusiva. La segunda sección precisa elementos cuantitativos y/o estadísticos sobre la incidencia, educación y promoción de personas con discapacidad. La tercera sección discute investigaciones en educación matemática en la línea de educación inclusiva y la última sección, en particular, acerca del estudio del pensamiento variacional. Teniendo en cuenta que, las dos últimas secciones distinguen cómo

los reportes de investigación problematizan el saber matemático desde la diversidad, qué elementos o pautas se deben tener en cuenta para la intervención en un aula inclusiva de matemáticas y la población de estudio.

En el capítulo III, se precisan los constructos, de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) y de la Educación Inclusiva, necesarios para identificar los aspectos que demandan la enseñanza y el aprendizaje de la matemáticas para la diversidad. En tanto, por un lado se discute la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la TSME y en particular, el estudio de situaciones de variación y cambio para finalmente, precisar la caracterización del pensamiento variacional a partir de las Prácticas Variacionales (PV) que propone Caballero (2018). La segunda parte del capítulo discute principios y características de la educación inclusiva que llevan a concretar un conjunto de elementos que propiciarían un aula inclusiva de matemáticas al reconocer la CCM desde la diversidad del grupo.

En el capítulo IV, se establece y justifica el camino metodológico de una estrategia de diseño con elementos fenomenológicos que ubican la caracterización del grupo como punto de partida para el diseño de la situación de aprendizaje y la CCM para un grupo diverso. Inicialmente, se describe la población de estudio luego, se precisan orientaciones técnicas, didácticas y pedagógicas para la inclusión, al resaltar los ritmos de aprendizaje y los enfoques didácticos. Por último, se definen las etapas metodológicas y los instrumentos de recolección de datos.

En el capítulo V, se presenta en detalle la caracterización del grupo diverso por ende, se indican los elementos teóricos que sustentan las dimensiones de caracterización. Luego, posterior a la recolección de datos y sistematización, se discuten los resultados en función de cada dimensión y se concreta la descripción del grupo diverso. La caracterización revela la heterogeneidad desde

los diferentes factores físicos, sociales y culturales que requieren atención para el diseño e implementación en el aula inclusiva de matemáticas.

En el capítulo VI se presenta el diseño de la situación de aprendizaje orientado al estudio de la variación constante, al precisar la problematización del conocimiento matemático a través de los momentos que propone Caballero y Moreno (2017) para el estudio de la variación constante y el desarrollo de las PV como formas de operar el cambio y la variación (Caballero, 2018). Además, se establecen las metas de aprendizaje según cada uno de los ritmos de aprendizaje y, se precisan elementos en el diseño, instrucción docente y aspectos contextuales que responden a la universalización e individualización de la enseñanza.

En el capítulo VII se detalla el análisis de resultados de la CCM al distinguir y valorar el desarrollo de las PV en ritmo de aprendizaje lento, moderado y rápido. En tanto, se destaca la significación del conocimiento matemático desde la realidad, características y habilidades del estudiante y por supuesto, la familiaridad con el contexto de la situación de aprendizaje.

Por último, en el capítulo de conclusiones se subraya que, una estrategia metodológica para la inclusión en clase de matemáticas es un engranaje entre el conocer a quien aprende, la enseñanza y aprendizaje desde la problematización del saber y los elementos contextuales que propician un aula inclusiva de matemáticas.

CAPÍTULO I. INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS. UNA PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO

En los referentes curriculares nacionales se resalta que el estudiante se forma para *ser un ciudadano matemáticamente competente* capaz de dar respuesta a qué tan útil es la matemática. Es decir que las prácticas de enseñanza deben dirigir su atención hacia la formación de ciudadanos que logren enfrentar las situaciones de la vida, en palabras de Cordero et al. (2015), que “lo que se aprenda en la escuela tenga relación con la vida cotidiana del ciudadano” (p.95). Entonces, el conocimiento funcional propicia el crecimiento como seres humanos, permite sentir el conocimiento y percibir la realidad desde una perspectiva propia de tal manera que, las situaciones de la vida cotidiana se ligan a la matemática desde la modelación de situaciones de variación y cambio que surgen desde la misma realidad y práctica del hombre (Cordero et al., 2015). Parece entonces que promover el estudio de la variación y el cambio conviene para todos los estudiantes sin excepción alguna.

De este modo, los conceptos principales relacionados con la variación y el cambio requieren de la transición consciente y significativa por las diferentes representaciones del objeto matemático resaltando que la mirada se dirige a promover la introducción del estudiante en la situación a medida que construye significados y se moviliza en la actividad matemática, desde su propia realidad. En tal caso, la construcción de conocimientos relacionados con el estudio de la variación y el cambio se desarrollan en estrecha relación con elementos conceptuales desde lo numérico, métrico, espacial y aleatorio, e incluso núcleos conceptuales de otras ciencias. (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006a).

Ahora, teniendo en cuenta que la matemática hace parte del conjunto de asignaturas más rechazadas por los estudiantes, es claramente reconocido que existen dificultades para su

aprendizaje y que su enseñanza establece una relación disyunta con las situaciones de la vida diaria (Fernández, 2013). En contraste, el componente trascendental del uso de la matemática se da cuando se percibe la conexión de aplicación e incidencia en situaciones de la vida diaria, afín con el proceso de modelación como “construcción del conocimiento matemático” desde una actividad que trasciende, resignifica y transforma el objeto matemático (Cordero, 2006 citado por Arrieta y Diaz, 2015, p. 30), en pocas palabras, como un puente entre la situación real y la matemática.

Así pues, la variación y el cambio son piezas fundamentales en el estudio de situaciones que simulan la realidad en tanto, la caracterización del pensamiento y lenguaje variacional propuesto por Salinas (2003, citado por Caballero, 2018) contempla estrategias variacionales como medio para operar la variación, distinguiendo: la comparación, seriación, estimación y predicción, bajo la premisa de que al estudiar situaciones de aprendizaje se abre una puerta para significar conocimientos matemáticos desde ideas variacionales que dieron razón y siguen dando vida a esos conocimientos.

Por otro lado, Cantoral (2016) considera que el saber matemático se problematiza y tiene un tratamiento particular, en tanto “se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y espacio, se le explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien usa” (citado por Caballero 2018, p.33). Por ende, establecer como base inicial la caracterización y estudio de la persona, entorno y contexto de cada uno de los estudiantes del aula de matemáticas, es clave para el diseño de estrategias de enseñanza que fomenten un aprendizaje desde la inclusión y atención a la diversidad.

Las diferencias son inherentes al ser humano, las personas pueden poseer alguna limitación física, deficiencia, discapacidad, pero también talento, habilidades sobresalientes o condiciones particulares o diferenciadas. En cualquier caso, tienen los mismos derechos para un acceso

igualitario a la educación. Más aún, el acceso escolar no debiera depender únicamente de la voluntad de quien desea educarse sino también de una comunidad idónea que tenga en cuenta todos los factores y condiciones para que la atención a la diversidad sea una realidad.

Luego, la educación inclusiva se define como un “principio rector general para reforzar la educación para el desarrollo sostenible, el aprendizaje a lo largo de toda la vida para todos y un acceso a las oportunidades de aprendizaje en condiciones de igualdad para todos los niveles de la sociedad” (UNESCO, 2008, citado por Echeita, 2013, p. 102). Pese a ello, la inclusión de niños con alguna Necesidades Específicas (NE) es problemática desde el momento que se busca el acceso a la institución educativa por parte de los padres de familia y, la forma en que es enfrentada dentro del plantel educativo pues, algunos padres deben recurrir a medidas legales para garantizar las condiciones de acceso y las estrategias usadas para “incluir” a dichos estudiantes son superficiales, a razón de que existe un desconocimiento de la condición, escasas de investigación en procesos cognitivos en el desarrollo del pensamiento matemático, y la carencia de recursos para alcanzar los objetivos en la educación (López et al., 2017; Miranda, 2019; Schnepel et al., 2020).

Siendo así, algunos autores como Echeita (2013), Dyson (2001 citado por Echeita, 2013), Ainscow et al. (2006, citado por Echeita, 2013), Blanco (1999), Miras (2001 citado por Echeita, 2013), Crisol et al. (2015) entre otros, en congruencia con organizaciones como la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2008 citado por Echeita, 2013) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2007, citado por Echeita, 2013) y UNESCO et al., (2016) postulan la educación inclusiva como una educación común para todos, en relación a una igualdad de condiciones, equidad y no discriminación y, a reconocer los cambios del currículo y del ámbito educativo como elementos primordiales para la atención de la diversidad. A partir de lo anterior, se define “Inclusión” como

el resultado de igualdad + equidad + justicia y para efectos de esta investigación se puntualiza que la educación inclusiva debe: garantizar que la atención a la diversidad sea una realidad, donde todos los estudiantes tenga acceso a procesos de enseñanza y aprendizaje bajo los principios de equidad, justicia e igualdad de condiciones, en busca de una educación común fundamentada en la heterogeneidad; lo que implica adaptaciones del currículo y el estudio de prácticas de instrucción orientadas al aprendizaje.

Por tanto, “la transformación del sistema educativo y de la escuela debe apuntar a que sean capaces de atender la diversidad” (MEN, 2008 citado por Lastre et al., 2019, p.1) como una responsabilidad al reconocer las diferencias, inherentes al hombre, presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En ese caso, los docentes debieran estar en la capacidad de producir, crear, diseñar y rediseñar sus estrategias de enseñanza para orientarlas a la atención a la diversidad como parte de su responsabilidad con los estudiantes pues, para que la inclusión sea una realidad, se debe incentivar, discutir y establecer la inclusión como parte fundamental en el aula (Beck y Kosnic, 2014). Sin embargo, cuando se pregunta a docentes de bachillerato sobre la presencia de estudiantes con NE y la adaptación de sus prácticas para dar una atención inclusiva, en el aula de matemáticas, afirman que dichos estudiantes “exigen una atención diferenciada” o sencillamente “no se considera necesario reconocerlo porque muchos de estos estudiantes desertan y lo que esperan las familias es que la institución educativa les sea de acogida mientras cumplen la edad necesaria para realizar una validación académica”. Expresiones como estas, son preocupantes. Identificar la diferencia y no reconocerla como punto de partida para fomentar el aprendizaje en función de las características y necesidades del estudiante y su contexto, muestra precariedad en la formación del docente y en el cumplimiento de deberes de la comunidad educativa para el apoyo efectivo a la diversidad presente en el aula de matemáticas. De tal forma que, es pequeño el

porcentaje de docentes que están preparados y bien dispuestos para la educación inclusiva lo que se suma como barrera en la inclusión (Padilla, 2011 citado por Gómez, 2013).

En tanto, impartir sesiones de clase para acumular contenidos matemáticos sin tener cuenta el conocer de quienes están aprendiendo es tratar de homogeneizar a todos los estudiantes de un aula de matemáticas y se ha vuelto tan común que llega a ser imperceptible, al parecer algunos docentes tienen los ojos vendados ante las necesidades y características de los estudiantes y esto viene de la mano con la etiqueta de ser “aptos” o no para estar en un aula ordinaria y volver al pensamiento retrogrado de adaptarse a las condiciones de la institución educativa (Guerrero, 2016). Sin embargo, la forma de enseñar como las de evidenciar el aprendizaje son tan variadas como los elementos que pueden caracterizar la realidad de un estudiante entonces, el aula de clase se convierte en una comunidad en las que se les da la bienvenida a las diversidad y no hay lugar para las diferencias (Herrera del Toro, 2016) es decir, es el mayor reflejo de la diversidad al acoger a personas ubicadas en distintos contextos geográficos, sociales, económicos y culturales sin precisar en las particularidades personales.

Luego, las aulas de instituciones oficiales están constituidas por estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje, capacidades intelectuales, habilidades físicas y características propias de su contexto; factores que no son tenidos en cuenta al momento de diseñar estrategias didácticas en la gestión de aprendizajes. Por lo que, Ainscow et al. (2006 citado por Ainscow y Miles, 2008) precisa que la inclusión puede ser vista desde distintas concepciones relacionadas con: la discapacidad y Necesidad Educativa Especial (NEE), como respuesta a exclusiones disciplinarias, referida a grupos vulnerables a la exclusión, promoción de escuela para todos y como educación para todos; por tal razón, al acoger tres de ellas, se precisa el contexto escolar desde un grupo

diverso donde hay cabida para estudiantes con NEE, trastornos de conducta, grupos vulnerables a la exclusión, trastornos de aprendizaje y estudiantes sin ninguna de estas características.

De tal modo que, un aula inclusiva de matemáticas que responda y tenga como propósito que la inclusión escolar sea una realidad, considera elementos relacionados con la cooperación en el aula, la eliminación de barreras estructurales, el apoyo de la comunidad educativa, la exteriorización, motivación, participación y las adaptaciones del currículo, la instrucción coherente, el valor por la diversidad y el respeto por la diferencia (Crisol et al., 2015). No obstante, las últimas cuatro características refieren al estudiante como protagonista, al reconocer la importancia de sumergirse en ese grupo diverso desde su propia heterogeneidad para poder articular acciones responsables.

Por lo tanto, la idea central de esta investigación desde el componente didáctico se basa en reconocer que, sí es posible incluir estudiantes con NE en un aula de matemáticas considerando diferentes recursos, metodologías y elementos del currículo para adaptar, modificar o construir estrategias de enseñanza y aprendizaje que respondan a las necesidades de los estudiantes ya que, como indica Arnaiz (2005), es la escuela quien debe adaptarse a los alumnos y no al contrario, pues cada miembro de la comunidad educativa es una pieza única del rompecabezas.

Así, para los cursos octavo y noveno los sistemas algebraicos y analíticos relacionados con el estudio de la variación y el cambio, no se limitan a la manipulación y agilidad con expresiones algebraicas pues, no están exentos de interpretarlos desde otras representaciones que actúan como piezas de un rompecabezas para construir los procedimientos y algoritmos con sentido, para definir un patrón y reglas de generación (MEN, 2006a) pues, más allá del común protagonismo del simbolismo algebraico es fomentar el desarrollo de estrategias variacionales a medida que se interpreta cómo varían las magnitudes en situaciones de variación y cambio, ya que como indica

Caballero (2018) es de vital importancia comprender cómo los estudiantes se apropian de la noción de variación pues, desde la perspectiva variacional del cálculo, es el punto de partida para la construcción de significados de objetos matemáticos como la derivada y la pendiente.

En síntesis, surge la inquietud acerca de cómo enfrentar factores como el abandonado desarrollo del pensamiento variacional desde la construcción de significados y la práctica de enseñanza al reconocer la diversidad inherente en el aula de matemáticas. De esta manera, este estudio se plantea como pregunta de investigación:

¿Cómo promover el desarrollo de prácticas variacionales en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado?

Y, como objetivo de investigación:

Describir una estrategia metodológica para el desarrollo de prácticas variacionales en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado.

CAPÍTULO II. ANTECEDENTES

En este apartado se mencionan algunos referentes que permiten ubicar la problemática del estudio de situaciones de variación y cambio para un grupo diverso en términos de la inclusión en clase de matemáticas y, a su vez, se identifican elementos a considerar para la inclusión educativa. Se referencian documentos relacionados con el marco legal de inclusión de estudiantes con NEE, datos estadísticos, estudios de intervención en el aula inclusiva de matemáticas y experiencias significativas orientadas a promover el pensamiento variacional en estudiantes con NE.

2.1. Marco legal para la inclusión

Históricamente la educación inclusiva ha pasado por distintas etapas: exclusión, segregación, integración e inclusión, lo que, hoy por hoy, ha llevado a distintas organizaciones mundiales, internacionales y locales a enfrentar el reto de garantizar una atención real a la diversidad en el aula.

2.1.1. A nivel internacional

La Declaración Mundial sobre la Educación para todos indica que: satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje demanda más que una innovación del compromiso con la educación básica, es decir, una visión ampliada con base en las herramientas actuales, las organizaciones institucionales, los planes de estudios y los sistemas tradicionales de enseñanza; (UNESCO, 1990, Art. 2) al recalcar que según las habilidades que poseen o no poseen para el aprendizaje de algunas personas se requiere de atención especial, tomar medidas que garanticen a dichas personas en sus distintas condiciones, la igualdad de acceso a la educación como elemento integral del sistema educativo. Por tanto, se exige a todos los estados “que la educación esté al alcance de todos, independientemente de sus condiciones sociales, cognitivas, económicas, culturales, entre otras” (UNESCO, 1990 citado por MEN, 2017, p.30) . Así mismo, la frase

“Educación para todos” también reconoce a las personas en riesgo de exclusión o susceptibles a ser discriminadas es por ello por lo que, indica la necesidad de suprimir los obstáculos que impidan su participación (UNESCO, 1990 citado por MEN, 2017).

De lo anterior, la importancia de reconocer la atención a la diversidad como una responsabilidad del sistema educativo que conlleva a transformar, reorganizar y precisar el conocimiento a todos los partícipes del aula, teniendo presente los aspectos relativos del aprendizaje, la evolución y actualización de innovaciones tecnológicas que ayuden en el proceso de enseñanza. En este sentido, el papel del docente será de mediador del conocimiento bajo la caracterización de una visión innovadora y recursiva desde el momento en que adopta estrategias centradas en el estudiante.

La conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y calidad realizado en Salamanca, 1994 precisa que la educación se debe centrar en el estudiante, por tanto, las personas con discapacidad deben tener acceso a la escuela ordinaria donde se les ofrezca una “pedagogía centrada en el estudiante” y así, ajustar el currículo para su formación igualitaria (UNESCO, 1994, citado por MEN, 2017, p. 309). Por consiguiente, la atención al currículo no se centra en buscar alternativas para que el estudiante con alguna condición especial realice actividades mientras sus compañeros trabajan en el plan curricular sino, realizar ajustes al currículo oficial en busca de la universalización del aprendizaje en el aula.

Siendo así, en la Convención sobre Derechos de las Personas con Discapacidad se concretan los términos de “ajuste razonable” y “diseño universal del aprendizaje” concibiendo la redefinición de denominaciones relacionadas con la discapacidad pues, ya no se refiere a “sordos, ciegos, etc., sino, persona con discapacidad auditiva, visual, etc. (Organización de Naciones Unidas [ONU], 2006 citado por MEN, 2017). De igual manera, indica que los estados parte se

comprometen a la “elaboración y aplicación de legislación y políticas para hacer efectiva la convención, y en procesos relacionados con las personas con discapacidad” (Art. 4). En el artículo 7, se garantiza que todos los niños y niñas con discapacidad gozarán plenamente de los derechos humanos y libertades fundamentales en igual magnitud con los demás niños y niñas; y en particular, en el artículo 24 se indica que las personas con discapacidad no pueden quedar excluidas del sistema general de educación por su condición por el contrario, deben recibir una educación de calidad en igual de condiciones de los demás, al considerar posibles ajustes razonables en función de las necesidades individuales (ONU, 2006). Sin embargo, la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2011) a partir de una recolección de datos en diversos países, afirma que “la formulación de políticas no siempre tiene en cuenta las necesidades de las personas con discapacidad, o bien no hacen cumplir las políticas y normas existentes” (p. 9) entonces, se ratifica que son cuestiones que se quedan más en el papel y no se llevan a la acción responsable. Además, las instituciones educativas no están lo suficientemente preparadas e incentivadas para que sea una realidad la inclusión escolar.

En la Conferencia Internacional de Educación. La educación inclusiva: El camino hacia el futuro. Cuadragésima octava reunión (ONU, 2008) resalta que las instituciones educativas deben promover culturas fundadas en el respeto por la diferencia, la aceptación de ritmos de aprendizaje individuales y específicos para todos y cada uno de sus estudiantes, y eliminar aquellas barreras que imposibiliten su desarrollo funcional para la vida. En tanto, la importancia de la no discriminación y creación constante de ambientes libres de exclusión y, en términos de educación inclusiva, la insistencia de que esa “educación para todos” sea una educación que forme para ser ciudadanos funcionales.

2.1.2. A nivel nacional

En Colombia, desde la carta magna se da plenitud de un estado igualitaria, equitativo y garantista donde se señala la igualdad de derechos y oportunidades a las personas con discapacidad sin lugar a ningún tipo de discriminación. A continuación, se indican algunas leyes, decretos y precisiones en el marco de la educación inclusiva.

La Ley 115 de febrero 8 de 1994 expide la Ley General de Educación, donde se establece el derecho a la educación que posee cada persona. Específicamente, se propone: la integración de las personas con capacidades o talentos excepcionales y/o limitaciones, dentro del sistema educativo público. Al resaltar que “los establecimientos públicos deben generar acciones de orden pedagógico y terapéutico, a favor de la integración académica y social de las personas con discapacidad” (Art.46) para ello, las instituciones deben adecuarse para garantizar la formación integral y brindar atención educativa a personas con limitación. Ahora, específicamente en el artículo 49, del mismo capítulo, se indica que el gobierno nacional brindará apoyo para la detención temprana de estudiantes con capacidades excepcionales para quienes se requerirá ajustes curriculares y así lograr una formación integral. A partir de allí, se percibe la preocupación del gobierno nacional por brindar apoyo a las instituciones educativas para garantizar la atención a la diversidad desde el ámbito pedagógico, integral y social, pero reconoce únicamente las adaptaciones curriculares para los estudiantes con talentos o capacidades excepcionales, es decir, ¿la atención educativa para personas con discapacidad y/o dificultades de aprendizaje no requieren de adaptaciones curriculares para su inclusión? Asimismo, sería interesante constatar la veracidad de la detención temprana de la condición específica del estudiantes, en especial, en una institución de orden público, a razón de que si el estudiante posee una condición profunda, el conocimiento

de su diagnóstico y valoraciones psicopedagógicas son el punto inicial para conocer y plantear adaptaciones que respondan a sus necesidades y características.

Ley estatutaria 1618 de 2013 precisa las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad, teniendo en cuenta las medidas de inclusión, acción afirmativa y ajustes razonables con el propósito de suprimir cualquier tipo de discriminación a razón de la discapacidad o condición particular de la persona. Así, en el artículo 5 se ordena:

A las entidades públicas de orden nacional, departamental, distrital, y local, en el marco del Sistema Nacional de Discapacidad, la responsabilidad de la inclusión real y efectiva de las personas con discapacidad, debiendo asegurar que todas las políticas, planes y programas, garanticen el ejercicio total y efectivo de sus derechos de manera inclusiva. (p.5).

Sin embargo, muchas instituciones oficiales que complementan su misión, en el PEI, con la “inclusión” aceptan el ingreso de personas con NE, pero no se responsabilizan totalmente de una atención real pues, lo reducen a una “integración social” en el aula o, en palabras de De Souza y Silva (2019) “algumas escolas encontram-se presas na primeira etapa do processo de inclusão. Elas ofertam o direito de matrícula, mas pouco fazem para assegurar a permanência e o sucesso desses estudantes, principalmente porque não modificam suas práticas de modo a promover uma educação voltada para as singularidades, fazendo, dessa forma, com que um local considerado inclusivo continue a promover práticas excludentes” (p.108).

El decreto 1421 de 2017 por medio del cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad, aparece para fortalecer lo postulado en la ley 1618 de 2013. El decreto 1421 define:

Ajustes razonables: son las acciones, adaptaciones, estrategias, apoyos, recursos o modificaciones necesarias y adecuadas del sistema educativo y la gestión escolar, basadas en necesidades

específicas de cada estudiante, que persisten a pesar de que se incorpore el Diseño Universal de los Aprendizajes [...]. A través de estas se garantiza que estos estudiantes puedan desenvolver con la máxima autonomía en los entornos en los que se encuentran, y así, poder garantizar su desarrollo, aprendizaje y participación para la equiparación de oportunidades y garantía efectiva de los derechos. [...]

Currículo flexible: es aquel que mantiene los mismos objetivos generales para todos los estudiantes, pero da diferentes oportunidades de acceder a ellos, es decir, organiza su enseñanza desde la diversidad social, cultural y estilos de aprendizaje de sus estudiantes, tratando de dar a todos la oportunidad de aprender y participar. [...]

Diseño Universal de Aprendizaje (DUA): comprende los entornos, programas, currículos y servicios educativos diseñados para hacer accesibles y significativas las experiencias de aprendizaje para todos los estudiantes a partir de reconocer y valorar desde su individualidad. [...]

Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR): herramienta utilizada para garantizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, basados en la valoración pedagógica y social, que incluye los apoyos y ajustes razonables requeridos, entre ellos los curriculares, de infraestructura y todos los demás necesarios para garantizar el aprendizaje, participación, permanencia y promoción. (Art. 2.3.3.5.1.4)

Siendo así, estas definiciones pasan a ser parte esencial de la atención a la diversidad pues, a partir de ellas se sostienen las acciones del docente e institución educativa en respuesta a los estudiantes con NE. Cabe destacar que, el PIAR se realiza de forma específica para cada asignatura teniendo presente el DUA, el currículo general y las orientaciones pedagógicas para atención a las personas con discapacidad.

En el mismo decreto se ratifica como responsabilidad de los establecimientos educativos: proveer las condiciones para que los docentes elaboren el PIAR, se garantice su articulación con la planeación de aula y Plan Educativo Institucional (PEI), y se dé garantía de cumplimiento; al

reconocer que, la promoción de estudiantes con discapacidad está regida por las mismas disposiciones de sus pares, con la salvedad de tener en cuenta la flexibilización curricular según las NE del estudiante.

Finalmente, la resolución 113 de 2020 por medio de la cual se disponen los elementos necesarios para la certificación de discapacidad y el Registro de Localización y Caracterización de Personas con Discapacidad, se precisan las categorías de discapacidad y, las características y orientaciones específicas para la valoración psicopedagógica. Además, se concretan los siguientes términos que alimentan el bagaje lingüístico para esta investigación:

Facilitadores: aquellos factores en el entorno de una persona que, cuando están presentes o ausentes, mejoran el funcionamiento y reducen la discapacidad.

Barreras: factores en el entorno de una persona que, cuando están presentes o ausentes, limitan el funcionamiento y generan discapacidad. (Anexo técnico: manual técnico del registro y certificación de discapacidad)

Cabe destacar que, la resolución 113 juega un papel importante en esta investigación en la medida en que se reconoce como orientación fundamental para la valoración psicopedagógica que realizan los docentes de apoyo a la inclusión. Más aún, la descripción detallada de los elementos para tener en cuenta para la valoración permite guiar la caracterización del estudiante y en particular, identificar todos los facilitares y barreras que permitan conocerlo.

2.2.Cifras sobre participación e incidencia de personas con discapacidad

La Clasificación Internacional del Funcionamiento, de la Discapacidad y de la Salud (CIF) define la discapacidad como un “término genérico que engloba deficiencias, limitaciones de actividad y restricciones para la participación” (OMS, 2011, p. 7). En tanto, en el informe se resume que, aproximadamente el 15% de la población mundial vive con algún tipo de

discapacidad, de los cuales, cerca del 19% son personas mayores de 15 años y 5.1% niños de 0-14 años teniendo en cuenta que, de estos últimos, 0,7% tienen “discapacidad grave” (afecciones como la tetraplejia, depresión grave o ceguera). En particular, en América Latina y el Caribe se estima que casi el 12% de la población posee al menos una discapacidad (Organización Panamericana de la Salud [OPS], 2022) considerando que son pocos los países que elaboran planes nacionales para enfrentar la discapacidad o los que tratan de hacerlo tienden a promover la integración en escuelas comunes (Blanco, 2006).

A nivel nacional, se estima que aproximadamente el 4% de la población tiene algún tipo de discapacidad (Departamento Administrativo Nacional de Estadística [DANE], 2020) y en particular, el 69% de los menores de 18 años con discapacidad asisten a instituciones educativas oficiales (DANE, 2005). Siendo así, se reporta que, en el año 2008 0,7% de los estudiantes matriculados en educación básica secundaria presentan algún tipo de discapacidad, al precisar que son pocos los que pasan a la educación media (Observatorio de Educación Inclusiva de Maedis, 2013 citado por Gómez, 2013). Asimismo, en referencia al acceso escolar, los niños con discapacidad representan un tercio de los niños no escolarizados (UNESCO, 2009), y quienes logran acceder a una escuela tienen pocas posibilidades de permanecer en ella y superar los cursos sucesivos.

Estas cifras muestran que, aunque la población con discapacidad no son un grupo mayoritario, si son un porcentaje considerable que no está recibiendo la atención necesaria. Además, en lo referente al acceso escolar, menos de un cuarto de los estudiantes que asisten a instituciones oficiales llegan a la secundaria sin considerar aún, los pocos que logran culminar el bachillerato. Ahora, estos últimos datos podrían ser relativos en la medida en que únicamente se tiene en cuenta la promoción, pero, no se da certeza de si dicha promoción responde a los

lineamientos académicos pues, algunos documentos y experiencias personales evidencian que muchos estudiantes con NEE al no presentar la edad regular para el ciclo académico, no poseer las competencias suficientes y la comunidad educativa no contar con un plan de intervención entonces, la institución promociona al estudiante grado a grado sin tener en cuenta los competencias académicas mínimas.

La preocupación aumenta al reconocer que no sólo los factores personales y característicos del estudiante muestran esa brecha de desigualdad, pues elementos del contexto como nivel socioeconómico, asistencia en salud y atención a la NEE dificultan el desarrollo integral como estudiante y persona, por ejemplo, los niños de familias pobres tienen mayor riesgo de discapacidad que sus pares (OMS, 2011). Si bien es cierto, el proceso de aprendizaje se puede ver afectado por diversos factores que perturban la estabilidad emocional, sensibilidad cognitiva y recepción de experiencias, por consiguiente, el proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser flexible y sensible no solo a las condiciones relacionadas con la discapacidad, sino también considerar las características transitorias relacionadas con los trastornos sociales, afectaciones familiares, situaciones de pobreza, migración, etc. Ahora, estudiantes que poseen discapacidad sumado de situaciones vulnerables, el reto es aún mayor.

Adicionalmente, el 53% de los niños con discapacidad que tienen acceso escolar, presentan discapacidad intelectual y los niños con esta condición tienen menos suerte que los niños con deficiencias físicas en tanto que, esta última discapacidad al presentar características visibles en cuanto al acceso físico o acercamiento al entorno escolar, reciben mayor atención desde las adaptaciones físicas y de recursos (Sistema Integrado de Matrícula, [SIMAT], 2016, citado por MEN, 2017).

2.3. Inclusión en clase de matemáticas

De acuerdo con Schnepel et al. (2019) es escasa la investigación que centra la atención en el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes en aulas inclusivas de hecho, en la revisión bibliográfica se evidenció que son pocas las publicaciones sobre intervención en el aula de matemáticas con estudiantes con NE y las que se encuentran reportan la intervención en un aula como la atención a un estudiante o grupo de estudiantes con una sola NE sin tener en cuenta a todos los presentes en el aula, es decir, pocos trabajos tiene como punto de partida la atención a la diversidad en un aula con distintas NE en un mismo entorno educativo.

Se torna complicado reconocer resultados de investigación que respondan realmente a la “educación matemática en un aula inclusiva” donde se problematice las diferencias del estudiante como el conocimiento matemático en juego pues, aunque la preocupación ha aumentado, las acciones se están dando paulatinamente. Por ejemplo, la formación de docentes de matemáticas con la capacidad de atender y responder a la diversidad es reciente, ya lo indica Pineda (2018) al afirmar que la mayoría de licenciaturas en matemáticas, que se ofrecen en el país, no incluyen en su plan de estudios cursos relacionados con la atención a la diversidad en el aula de matemáticas por ello, algunos reportes de investigación refieren a docentes de educación especial que realizan intervención en el aula de matemáticas o docentes de matemáticas que reflexionan sobre la intervención ejecutada por docentes de educación especial.

En concordancia con lo anterior, Fernández y Sahuquillo (2015) presentan un plan de intervención para un estudiante con discapacidad intelectual moderada implementado por una maestra de educación especial. El objetivo general fue plantear un plan de intervención acorde a las características del estudiante y que este lograra avances. El contenido de aprendizaje refirió a las relaciones lógicas del concepto de número donde, teniendo en cuenta la caracterización de

gustos y motivaciones del estudiante se contextualizaron las actividades. Tras el análisis de la intervención, se evidenció que las situaciones de enseñanza adaptadas al proceso de aprendizaje se enriquecen con la experimentación, el trabajo con los sentidos y manipulación de objetos concretos. De hecho, las actividades cortas, pausadas y en contexto favorecen el paso de la matemática manipulativa y lúdica, a la matemática formal. Estas precisiones se articulan con las halladas por Arciniegas y Acevedo-Rincón (2019) quienes reportan una experiencia significativa de intervención con una estudiante con Trastorno del Espectro Autista (TEA) al favorecer el aprendizaje significativo del concepto de número con el uso de material concreto; este trabajo emplea las mismas consideraciones que Fernández y Sahuquillo (2015), para fundamentar la elaboración de actividades y más allá de las conclusiones compartidas se reporta que, las habilidades observadas desde la mediación con material concreto permiten pensar en el fortalecimiento y construcción de aprendizaje hacia otros objetivos y contextos matemáticos y, más aún, la posibilidad de realizarlo en un aula regular reconociendo la pertinencia de la preparación del docente y el conocimiento del caso de estudio.

Bruno y Noda (2010) presentan una revisión de las investigaciones en educación matemática con estudiantes con NEE, en la primera parte de su reporte realizaron una revisión de trabajos de investigación en educación matemática dirigida a la NEE y en la segunda parte, presentan resultados propios de reflexión alrededor de diálogos, con docentes de un centro educativo para personas con Síndrome de Down sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como resultado de la revisión se resaltan varios aportes interesantes que dan fundamentación a esta investigación: en primer lugar, se concluye que muchos estudiantes con discapacidad aunque asisten a instituciones educativas terminan abandonando el sistema debido al fracaso reiterado; además, numerosas investigaciones refieren a promover el éxito en un contenido

matemático concreto partiendo desde el currículo oficial, sin considerar que tal vez este tipo de estudiantes requieren de un currículo adaptado; finalmente, algunos trabajos que tienen como objetivo la intervención con estudiantes con NEE focalizan su punto de partida en el componente clínico de tal forma que, esta intervención se descontextualiza del entorno escolar y social. Esto último, genera dificultad para conocer el pensamiento matemático que usan los estudiantes, ya que como indica Vidarte y Celis (2016) “tener una NEE o una discapacidad no implica que esto sea una imposibilidad dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje” (p.173). De esta manera, en el trabajo de Bruno y Noda (2010) se logra precisar que el abandono del sistema muy seguramente se debe a que las instituciones educativas no responden a los principios de inclusión; y que los trabajos que toman el componente clínico como punto central para determinar planes de intervención otorgan directamente las dificultades de aprendizaje a la discapacidad sin reconocer las habilidades intelectuales y demás aspectos que intervienen, influyen y posibilitan el aprendizaje.

En la segunda parte de la investigación, Bruno y Noda (2010) al centrar la reflexión alrededor de cómo abordar la enseñanza y elaborar secuencias de aprendizaje adaptadas a la población con discapacidad intelectual (síndrome de Down), se logra precisar que las actividades que se proponen a estudiantes con NEE, aunque siguen un mismo objetivo este no es estándar para todos ya que depende de las características de cada uno de ellos. En particular, con respecto al concepto de número, en las actividades de cardinalidad y resolución de problemas, los estudiantes presentaron menos dificultad en la aplicación del principio de orden estable que en el de correspondencia uno a uno; mientras que, en las actividades de ordenar series de números, los alumnos presentan grandes dificultades en la aplicación del principio de orden estable. De igual

modo, se identificó que el concepto de seriación fue bastante complejo para los estudiantes por lo cual, se sugiere adaptación curricular al respecto.

De acuerdo con estos autores, al considerar la sensibilidad y adaptabilidad de estrategias de enseñanza la atención no solo se debe dirigir en un objetivo general si no que se debe dar paso al planteamiento de objetivos parciales en función de las características de cada uno de los estudiantes y así, responder a las necesidades del grupo diverso.

Por otro lado, Reyes (2018) reconoce como papel importante del docente: saber cómo conocer de manera más específica a su alumnado, con la intención de comprender sus dificultades y fortalezas, aportando herramientas y actuaciones que lleven a la potencialización del desarrollo integral y su inclusión en la sociedad. Por consiguiente, en su trabajo propone una adaptación curricular significativa para un estudiante con TEA con el objetivo de beneficiar habilidades lingüísticas, sociales y de razonamiento matemático luego, las adaptaciones fueron específicamente en ajustes de recursos, materiales y procedimientos que corresponden a la fundamentación teórica y diagnóstica originada de una caracterización alrededor de aspectos: médicos, cognitivos, corporales, sensoriales, comunicativos y lingüísticos, sociales y afectivos y, familiares. El autor muestra claramente como cada aspecto de la caracterización da razón y lleva a una adaptación curricular que puede ser transitoria en tanto los avances del estudiante. Siendo así, es posible que se requiera reestructurar las adaptaciones y por ello, se resalta que la educación inclusiva es un proceso de transformación continuo.

Incluso, Schnepel et al. (2020) al preocuparse por el aprendizaje en matemáticas de estudiantes con discapacidad intelectual en aulas inclusivas de primaria encuentra que los conocimientos previos juegan un papel importante como predictores de progreso en el aprendizaje. Además, propiciar la educación inclusiva refleja un impacto positivo en las habilidades lingüísticas

de los estudiantes con dicha condición, pero no se hallan relaciones benefactoras con el aprendizaje en matemáticas lo cual se hace complicado justificar ya sea, por las habilidades de los estudiantes o el apoyo insuficiente o inadecuado. Por tanto, es primordial que la enseñanza de las matemáticas se adapte a los perfiles de conocimiento del estudiante.

El camino hacia la educación inclusiva debe considerar ciertos cambios y adaptaciones al currículo para poder responder a lo que requiere cada estudiante desde sus características, necesidades y contexto. Así, de los trabajos nombrados anteriormente se puede concretar que las adaptaciones curriculares contribuyen de manera efectiva en el aprendizaje matemático cuando es soportado desde la investigación y caracterización de los estudiantes. Desde el momento en que se tiene en cuenta el estudiante como protagonista, la forma en que se potencializa el razonamiento matemático y cómo se evalúa el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En Latinoamérica, De Souza y Silva (2019) resaltan que las tecnologías digitales educativas permiten la construcción de conceptos matemáticos que posiblemente los entornos no digitales limitan. En su trabajo de investigación se reconoce cómo las potencialidades de la tecnología pueden conectarse con la matemática para responder a ciertas características del estudiante, en especial, cuando se trata de atención. Afirman que el entorno digital atrae y precisa la atención del estudiante desde distintos factores relacionados con el color, la forma, sonido y demás. Un ejemplo de ello es su propuesta orientada al aprendizaje matemático relacionado con las operaciones aritméticas básicas para estudiantes con TEA donde se precisa nuevamente que el punto de partida es conocer a los estudiantes, en este caso, como indica Prado y Carmo (2004 citado por De Souza y Silva, 2019) “é importante para conhecer o estudante e o seu nível de desenvolvimento, para depois introducir novos conceitos” (p.1319).

Por otra parte, Méndez (2015) estudia una comunidad de sordos como constructores de conocimiento matemático, al dar atención no sólo a quiénes construyen sino, qué elementos permiten su construcción, lo cual es continuo desde la resignificación de conceptos esto, al incentivar un marco argumentativo alrededor de una situación de modelación de movimiento. En el proceso, la autora resalta que la educación inclusiva no se debe limitar a la integración sino, priorizar la inclusión en la medida en que se reconoce y provoca la argumentación con relación a las situaciones y escenarios en que sucede por ello el estudio de escenarios específicos que articulen y conlleven al conocimiento matemático. A partir de lo anterior, se logra precisar que, la valoración del conocimiento desde el principio de inclusión no es una actividad netamente alejada de lo que debería hacerse en un aula regular con o sin estudiantes con NE pues, al provocar la argumentación se logra distinguir el conocimiento que el estudiante construye desde su contexto, y sus habilidades a pesar de su condición, a medida que refleja los esquemas que justifican su aprendizaje.

De la misma manera, las situaciones de aprendizaje son mayormente aprovechadas cuando se relacionan con el contexto del estudiante ya que al facilitar el reconocimiento del entorno se promueve la relación de estructuras metacognitivas asociadas con habilidades del pensamiento matemático y así, llevarlas a aplicar conceptos y soluciones en la vida cotidiana. (Méndez, 2015; Cardona y Carmona, 2012; Aldana y López, 2016).

Ahora, una gran parte de los trabajos de intervención se estructuran a partir de adaptaciones al currículo ya sean modificaciones en los objetivos de aprendizaje, contenidos, instrumentos de evaluación, metodología de instrucción o elementos del entorno físico, con el fin de brindar equitativamente herramientas y medios de aprendizaje para todos los estudiantes. A partir de allí, algunos trabajos nacionales como el de Cardona y Carmona (2012) y Ortiz y Martínez (2017)

quienes realizaron intervención con estudiantes con discapacidad cognitiva y visual, respectivamente, resaltan que las adaptaciones de material, guías de apoyo y estrategias de enseñanza, favorecen el aprendizaje y dirigen la superación de “incapacidades” pues, el entorno debe ser el responsable de ofrecer posibilidades, herramientas y recursos para fortalecer las capacidades de cada estudiante y mejorar aquellos procesos en los que presentan dificultades.

Sin embargo, al pensar en la transformación y flexibilización del currículo se debe optar por un currículo diverso que piense en las necesidades individuales de cada estudiante, al reconocer la multiplicidad de aprendizajes (Navia y Vega, 2019) para esto, es importante no pasar por alto la caracterización, en pro del acercamiento a la discapacidad o condición específica del estudiante y, no se trata específicamente de un detalle clínico sino del contexto del estudiante como infante, persona, estudiante y miembro de una comunidad educativa desde lo cognitivo, social y emocional pues, en la medida en que mejor se conozca la condición, características y necesidades del estudiante se puede dar respuesta con mayor precisión en el proceso de enseñanza.

Incluso, Morales et al. (2022) realizan un estudio acerca de las prácticas de enseñanza de las matemáticas para la diversidad al centrar la atención en una institución educativa con un modelo de atención flexible a través de niveles conceptuales. En tanto, los autores dan cuenta de que, conocer las condiciones particulares de los estudiantes, discutir sobre la formación en matemáticas y la atención a la diversidad, garantizar la accesibilidad y permanencia de los estudiantes, planear ambientes de aprendizaje y actividades mediadores así, como asumir la responsabilidad docente frente al proceso de enseñanza y aprendizaje son elementos fundamentales previo al encuentro con los estudiantes en el aula de matemáticas. De tal modo que, la diversidad deber ser vista como punto de partida y meta, con el fin de garantizar la igualdad sin discriminación por características individuales de los estudiantes. Luego, el docente tiene como

función desarrollar habilidades de tolerancia a la frustración, paciencia, comprensión y respeto ante los estilos y ritmos de aprendizaje de los estudiantes para favorecer la atención a la diversidad en clase de matemáticas.

En ese sentido, el MEN (2017) sugiere para la atención a la diversidad, la caracterización educativa con base al modelo multifactorial de funcionamiento humano y calidad de vida, al distinguir dimensiones como: contexto y vida familiar, habilidades intelectuales, bienestar emocional, conducta adaptativa y desarrollo personal, salud y bienestar físico, participación e inclusión social y metas de aprendizaje.

Ahora, con respecto a las orientaciones para la inclusión, Velasco (2022) se cuestiona acerca de cómo incorporar lo sugerido en el Diseño Universal en el Aprendizaje (DUA) para la flexibilización curricular pues, en su trabajo da cuenta de las dificultades que viven los docentes en servicio, relacionadas con la escasa formación y recursos, para atender estudiantes con NEE y problematizar la enseñanza de las matemáticas. Por ende, entre sus resultados detalla una reinterpretación del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) para la enseñanza de la matemática que será considerada notoriamente en la metodología de esta investigación para términos de universalización en el aprendizaje.

Por último, algunos trabajos que reportan intervenciones en matemáticas a estudiantes con NE se evidencia que comúnmente el objetivo es generar un avance en el aprendizaje del estudiante por tanto, en el mejor de los casos se revisan sugerencias y orientaciones de tipo pedagógico y didáctico llevadas al área de matemáticas; otros, reflejan una propuesta innovadora que se justifica desde la evidencia de que se logró un avance en el aprendizaje del estudiante; por consiguiente, el abordaje en el aula de matemáticas no es característico para la problematización del saber y quien aprende.

2.4. Pensamiento variacional para estudiantes con NE

En los lineamientos propuestos por el MEN, se afirma que la educación del siglo XXI se debe orientar a la formación de ciudadanos competentes, lo que resulta de la combinación de conocimientos, capacidades y actitudes adecuadas al contexto para precisar la realización y desarrollo individual, la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo (MEN, 2009). En otras palabras, una formación para la vida, para lograr ser mínimamente un ciudadano funcional. Es por ello, que se prioriza la construcción de conocimiento desde experiencias y situaciones de aprendizaje que simulen la realidad.

Siendo así, el mundo es un todo cambiante o como lo dice Freudenthal (2002, citado por MEN, 2014) “el mundo es el reino del cambio” (p.10) por consiguiente diversas situaciones de la vida cotidiana se relacionan con fenómenos de movimiento, eventos de cambio y variación de cantidades, generalización, identificación de patrones, sistemas de relaciones y usos del lenguaje para su tratamiento, a lo que corresponde el pensamiento variacional.

Méndez (2015) resalta al conocimiento matemático en su funcionalidad, desde su construcción social. El estudio de fenómenos de variación y cambio responden a situaciones cotidianas que desde la perspectiva de quién aprende se construyen con variedad, y sin lugar a duda, a partir del marco de referencia de argumentaciones de estudiantes sordos. Al indagar aspectos sobre trayectoria, velocidad, rapidez y aceleración con miras en resignificar los usos del conocimiento matemático desde la perspectiva del sordo, se generan nuevas situaciones de modelación de movimiento de manera multidisciplinar. Además, la autora traduce las representaciones pictóricas del estudiante para asociarlo a la interpretación y construcción de conceptos de variación y cambio pues, cada componente de la representación tiene una razón de ser y significación en la matemática informal que como sordo significa. Entonces, el proceso de

enseñanza debe guiarse hacia el fomento de experiencias que promuevan la creación de esquemas y producciones que, al fin de cuentas, reflejan la apropiación y CCM.

Por otra parte, el trabajo de Moreno (2021) resalta practicas invariantes como visualizar, comparar, agrupar y generalizar como resultados de la caracterización del pensamiento matemático, normado por prácticas de personas con discapacidad visual cuando interactúan con soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3 de forma gráfica. El autor indica que pese a los intentos de inclusión en el aula, se hace “necesario buscar herramientas teóricas, metodologías y didácticas para promover la inclusión” (p.7) del estudiante con discapacidad no solo para beneficio de él sino para mejora de la sociedad. Por lo tanto, la visualización, que juega un papel muy importante en la investigación, no se restringe a lo visual sino a lo que se reconoce desde la capacidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar a partir de información háptica de tal modo que, propone el trabajo gráfico con el objetivo de promover argumentos algebraicos y analíticos sobre los gráficos. Así, logra concluir que el desarrollo del pensamiento matemático sucede independientemente de si la persona tiene o no discapacidad visual considerando que se refleja de distintas maneras por ejemplo, la práctica de comparar se reconocer que no es el mismo tipo de comparación. Además, los matices en el proceso de aprendizaje se ven influenciados por el escenario en que se desarrollan, el contexto, las personas involucradas y otras variables.

Un fuerte componente del pensamiento variacional en la educación básica corresponde a la ejercitación de procedimientos relacionados con expresiones algebraicas y ecuaciones que de por sí, son una piedra en el zapato para el estudiante debido a la visualización estricta desde el contexto de la matemática formal. Ante esta situación, Vidarte y Celis (2016) afirman que en los estudiantes con NEE la dificultad en el aprendizaje no es la excepción, más aún, el reto es mayor,

por consiguiente, sugieren que es posible contrarrestarlo con la potencialización de capacidades matemáticas a partir de ayudas y metodologías específicas adaptadas al protagonista del proceso de aprendizaje. De manera similar a Méndez (2015), los autores reconocen que al plantear situaciones que involucran al estudiante y el concepto matemático los resultados de aprendizaje se derivan de la movilización de elementos de enseñanza que fomentan la significación del conocimiento. Así pues, en su trabajo, Vidarte y Celis (2016) centran la atención en los problemas de enseñanza y aprendizaje con respecto a las ecuaciones de primer grado con variable real para dos estudiantes: uno con ceguera y otro con déficit de atención y dificultades de aprendizaje, para lo cual realiza inicialmente una caracterización detallada basada en 7 aspectos: participación del estudiante en actividades de la vida escolar, rutina sencilla y compleja, entorno familiar, experiencias, gustos e intereses del estudiante, historia terapéutica – planes de apoyo escolar y extracurricular, movilidad en la vida escolar y, conocimientos y competencias matemáticas, con el propósito de conocer el contexto tanto social como escolar del estudiante y así, abordar la búsqueda de estrategias metodológicas para atender la diversidad de necesidades individuales, intereses y modalidades de aprendizaje. Más aún, se destaca que la misión del docente es transformar y crear nuevas tareas para reflexionar acerca de lo que verdaderamente necesita aprender un estudiante, pensando en currículos y formas de evaluación flexibles.

Ahora, al pensar en un aula inclusiva Rueda y Molina (2019) precisan que “se debe proponer el desarrollo del pensamiento variacional dentro de un currículo que tenga en cuenta la diversidad para aprender y que adopte una enseñanza basada en el respeto y valor por la diferencia” (p.3) con el fin de que el estudiante con NEE pueda organizar, analizar y modelar situaciones y problemas relacionadas con su contexto social y escolar, al igual que sus compañeros de aula. Los autores presentan una propuesta que integra material manipulativo para el desarrollo de la

variación, generalización y cambio en estudiantes de un aula regular que incluye un estudiante con discapacidad visual por lo tal, implementan una caracterización similar a la de Vidarte y Celis (2016) para dar paso al trabajo de campo alrededor de 2 situaciones que movilizan al estudiante en el reconocimiento de regularidades y patrones, y dirigen a la conceptualización. Finalmente, en contraste con la comunidad de sordos como constructores de conocimiento matemático (Méndez, 2015), Rueda y Molina (2019) valoran el lenguaje natural y las representaciones pictóricas y numéricas con las cuales los estudiantes lograron demostrar su habilidad para reconocer regularidades y encontrar los términos consecutivos de una secuencia.

De acuerdo con Reyes (2020), se reconoce que la estructura tradicional generalmente no responde a la diversidad que caracteriza la población y frente a esto, propone el diseño de guías de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento numérico-variacional de estudiantes con discapacidad intelectual leve de grado quinto de primaria al priorizar la estimulación, motivación y participación, en el aprendizaje de nociones básicas de fracciones desde la clasificación y seriación, con lo cual logra avances en la dimensión del aprendizaje significativo. De manera similar, Miranda (2019) precisa que, aunque las orientaciones oficiales tienen en cuenta la atención a la diversidad sugiriendo adaptaciones y distintas estrategias, no se encuentran ejemplos que aterricen a la enseñanza de la matemática por ello, se interesa en analizar la comprensión de la ecuación lineal en estudiantes con discapacidad intelectual, con el propósito de reflejar diversas estrategias que usan los estudiantes para acceder al conocimiento matemático. Así, a partir de una Estrategia de Enseñanza Diferenciada junto con la aplicación de esquemas compensatorios acordes a la discapacidad intelectual se posibilitó la evolución gradual de nociones de equivalencia e igualdad a la estructura de la ecuación.

En el mismo sentido, Echeverría (2022) al centrar la atención en la enseñanza del cálculo para personas con características diferenciadas y la reflexión de profesores de matemáticas en formación encuentra que, desde el componente didáctico, los profesores en formación reconocen la importancia de contextualizar problemas a la realidad del estudiante, según las necesidades e intereses individuales y de la cultura. Sin embargo, resalta que para diseñar situaciones contextualizadas que vayan del objeto matemático a la realidad necesario conocer los presaberes y contexto del estudiante pues, estos favorecen la significación de la construcción de conocimiento tanto del estudiante como del profesor de matemáticas.

Por otra parte, al detallar en contenidos y estándares para el aprendizaje, en los Estándares Básicos de Competencias, el Pensamiento variacional está relacionado con el Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, que desde su enfoque general se orienta al reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos (MEN, 2006a). En contraste, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, en el estándar de álgebra, refiere a comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; analizar el cambio en contextos diversos (NCTM, 2003). De modo que, se evidencia que para los ciclos donde se encuentra incluido el grado noveno, en los dos referentes se sugiere la profundización en el conocimiento matemático relacionado con el estudio de la variación y el cambio.

Por último, de los referentes estudiados a lo largo de este apartado se puede identificar que son pocos los que presentan un marco teórico o similar para la problematización de la matemática

en juego (Méndez, 2015; Moreno 2021) o en su defecto, detallan sobre las categorías a analizar desde la matemática (Vidarte y Celis, 2016; Miranda, 2019). Pues en la mayoría, los resultados de aprendizaje en estudiantes con NEE se midieron desde el responder si se logró o no un aprendizaje en función de los principios de la educación inclusiva.

Además, se evidencia que la mayoría de los trabajos de intervención para estudiantes con NEE se caracterizan con discapacidad sensorial, intelectual o TEA, pero son muy pocos los que se dirigen a la discapacidad psicosocial, depresión o comunidades en situaciones vulnerables. En lo que refiere a la discapacidad psicosocial, las razones se deben a que, como indica Molina (2012, citado por Trigueros, 2019), la discapacidad psicosocial comúnmente se confunde con la discapacidad intelectual o mental y otra, se puede relacionar a lo que indica Fernández (2010) que, aunque la “discapacidad psicosocial no es nueva, es una de las más olvidadas y desatendidas, y está considerada como “invisible” debido a que no se puede detectar a simple vista” (p.6).

Por otro lado, en la revisión bibliográfica se refleja que en varios países latinoamericanos la investigación en educación matemática para la inclusión se orienta principalmente a trabajos de crítica y reflexión, los cuales no se llevan a la actuación en el aula de clase. Por consiguiente, estos trabajos orientan la investigación únicamente desde sus aportes en lo teórico y conceptual.

CAPÍTULO III. TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA Y LA INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS

Esta investigación se enmarca en los elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa al dirigir su atención a la construcción social del conocimiento matemático que surge desde las prácticas sociales y se ve inmerso en él, a partir de ahí se considera como elemento primordial la matemática funcional como resultado de la matemática conceptual y vivencial donde se significa, resignifica y transforma el objeto matemático. Por tanto, se precisa como punto de partida el estudio de situaciones de variación y cambio, para describir el conocimiento matemático que se moviliza en las PV estudiadas por Caballero (2018). Asimismo, el presente trabajo de investigación se sustenta en la TSME para distinguir las problemáticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la inclusión para describir un aula inclusiva y así, caracterizar un aula inclusiva de matemáticas.

3.1. Enseñanza y aprendizaje de la matemática: una mirada desde la Teoría Socioepistemológica de Matemática Educativa

Al precisar la TSME como base teórica de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, los principales referentes revisados fueron Cordero et al. (2015), Moreno (2021), Cantoral et al. (2014) y Soto y Espinoza (2015).

La Socioepistemología concibe la matemática como una creación humana que recrea la vida misma pues, el saber ha surgido de la construcción de conocimiento en respuesta a una necesidad inmersa en la práctica social. Aquella práctica social que hace hacer al estudiante lo que hace de manera inconsciente. De tal forma que, la práctica social se convierte en ese generador de conocimiento en la medida en que se conjuga la matemática conceptual y la matemática vivencial para concretar una matemática funcional que se resignifica constantemente.

Cantoral (2016, citado por Caballero, 2018) y Cantoral et al. (2014) afirma que la investigación que asume la TSME como sustento teórico asume cuatro principios fundamentales:

Principio de racionalidad contextualizada: la CCM es un producto sociocultural de tal manera que, la racionalidad con la que actúa el individuo se ve influenciada por el contexto del momento y lugar determinado en que se encuentre.

Principio del relativismo epistemológico: la validez del saber es relativa al individual y al colectivo (contextual), su valor de verdad depende de quién y dónde lo experimente. Es por ello, que se hace importante reconocer a “quien aprende” pues desde allí se evidencia los eventos que permean la CCM.

Principio de resignificación progresiva: el saber que se consolidó con el conocimiento puesto en uso adquiere significado bajo las argumentaciones y elementos del contexto en que se dio, de tal forma que, al cambiar el escenario contextual ese saber se puede significar nuevamente, es decir, estará en resignificación progresiva. De tal modo que, la misma realidad individual de la persona, desde su dimensión social, cultural y elementos personales, permite que constantemente se resignifique el conocimiento.

Principio normativo de la práctica social: la práctica social es la base de la CCM, al apreciar una identidad en el individuo, generar la construcción de argumentos y orientar la actividad humana. Así, la identidad del individuo se moviliza en todas las experiencias de su propia práctica que dan sentido a sus intereses y el trabajo en busca de respuestas.

Por lo tanto, el problema educativo visto desde la TSME no dirige la mirada hacia la matemática formal y abstracta sino, en su significación desde el uso culturalmente situado al reconocer al estudiante como un ciudadano que disfruta y participa en la cultura matemática con sentido desde su propia realidad. En tal caso, se concibe la triada de aula, saber en uso y sociedad

desde una visión crítica, solidaria y humanista; al entender el aprendizaje como un proceso complejo de significación que ocurre en contextos específicos y es situado en una práctica socialmente compartida de las experiencias del estudiante dentro y fuera del aula y en general, en su vida cotidiana. Es por ello, que la problemática no solo señala “la importancia de los estudios cognitivos, didácticos y epistemológicos, además considera los factores sociales asociados a la construcción del conocimiento matemático” (Cantoral 2013, citado por Cordero et al., 2015, p.58).

Además, al considerar los principios de la Socioepistemología, la naturaleza del saber refiere a cuatro dimensiones que están en constante interacción.

La *dimensión cognitiva* del saber analiza las formas de apropiación, significación y resignificación que experimenta la persona que construye conocimiento y desarrollo del pensamiento en la acción de significar y resignificar. En tanto, la inclusión de esta dimensión se precisa en la caracterización del pensamiento variacional en específico para un grupo diverso donde puede estar presente la NEE, los trastornos de aprendizaje, trastornos de conducta y ciertas condiciones que caracterizan la realidad del estudiante e influyen en su proceso de aprendizaje en matemáticas.

La *dimensión didáctica* refiere a los procesos de enseñanza e institucionalización del conocimiento matemático propios del ámbito escolar, vida diaria y campo profesional. De tal forma que vincula la manera en que se aborda la matemática escolar en las instituciones por consiguiente, esta dimensión sirve para localizar y explicar el papel del discurso matemático escolar. Entonces, en esta investigación esta dimensión es abordada desde la consideración del plan de asignatura y los Estándares básicos de Competencia para la población de estudio.

La *dimensión epistemológica* se centra en la problematización del saber a partir del análisis de las circunstancias que hicieron posible la CCM y las formas en que puede ser conocido en tanto,

la localización de fenomenologías y constructos característicos. En tal caso, esta dimensión será discutida en la medida en que se acoge y propone el fomento de las PV y los momentos de la situación de aprendizaje que postula Caballero (2018) para la CCM alrededor de la variación constante.

Finalmente, la *dimensión social y cultural* se basa en los roles que juegan los actores y el papel que tiene el saber en la construcción de los consensos, la elaboración y adaptación de instrumentos mediadores y los usos del saber en situaciones específicas. Por ello, esta dimensión precisa su participación en la consideración de una formación para ser *ciudadanos matemáticamente competentes* desde el conocimiento de la cultura y contexto del estudiante para precisar una situación de aprendizaje donde la construcción de conocimiento adquiera un valor de uso propio con relación al individuo como persona.

Así, la vivencia cotidiana debe ser la referencia principal que influya en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar de tal forma que, lo que el estudiante aprenda tenga estrecha relación con sus experiencias diarias como ciudadano. Por consiguiente, se precisa que la TSME modela la construcción social del conocimiento matemático, es decir, modeliza las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso donde ese conocimiento no es fijo, no está concreto, no es producto terminado pues, el paso del conocimiento estático al conocimiento en uso da sentido al estudio del saber que

“se construye, reconstruye, significa y resignifica, se le ubica en el tiempo y el espacio, se le explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva desde la perspectiva histórica, cultura e institucional, para que, en definitiva, se le rediseñe con fines didácticos. Esto es en definitiva que el saber se problematiza” (Cantoral et al. 2014, p.97).

Siendo así, el conocimiento matemático se problematiza desde la epistemología de la vida y la matemática escolar que deberían coincidir en las prácticas de enseñanza. Sin embargo, la matemática escolar comúnmente presenta conocimientos de forma mecánica, utilitaria y no funcional, sin aportar marcos de referencia que le permitan tanto al docente como al estudiante resignificar el conocimiento que está aprendiendo o estudiando. Es por ello por lo que, Cordero et al. (2015) discuten el conocimiento desde los fenómenos del discurso matemático escolar: adherencia, exclusión y opacidad, que al ser enfrentados se obtendría como resultado una matemática funcional. Más aún, para lograr partir de las prácticas sociales para construir conocimiento no solo se necesita explicar el conocimiento matemático, se requiere “ponerse en los zapatos” de quien aprende, saber cómo usa el conocimiento matemático desde su vivencia y el desarrollo mismo en la escuela, trabajo y ciudad.

Así pues, al hablar de adherencia refiere a un discurso hegemónico que no valora la diversidad cultural en el aula pues, cada individuo como integrante de una cultura, que no se construye, sino que se adhiere desde su propia realidad y concepción hereditaria, constituye una identidad y resistencia. Además, desde la identidad cultural es posible incorporar experiencias para la construcción del conocimiento pues, en esos escenarios es donde se ha constituido la base del saber matemático.

Por otra parte, se genera exclusión en la medida en que se reprime la construcción del conocimiento, cuando el estudiante es quien debe adaptarse al sistema didáctico y no al contrario. Más aún, este fenómeno evidencia que al centrar la atención en el objeto matemático y no en el sujeto que aprende concreta la concepción de la matemática como un conocimiento acabado. A partir de allí, la importancia de dar protagonismo al estudiante como eje central para el proceso de enseñanza y aprendizaje en la medida en que se reconoce que todos pueden construir conocimiento

y no necesariamente el mismo pues, el conocimiento alrededor del objeto matemático se resignifica a partir de la experiencia de cada estudiante.

El discurso matemático escolar debe desarrollar una pluralidad epistemológica al tener en cuenta argumentos de diferentes disciplinas, argumentos del conocimiento y argumentos histórico – epistemológicos, al considerar no solo qué y cómo se va a enseñar el conocimiento sino también para qué y a quién se enseñan; y así dar cuenta de la inclusión del sujeto que construye conocimiento matemático. Entonces, lo anterior refiere al fenómeno de opacidad al opacar los usos del conocimiento matemático que viven en la pluralidad epistemológica.

Por consiguiente, en respuesta a contrastar ese discurso matemático escolar se precisan categorías en la CCM:

Funcionalidad: en la medida en que el conocimiento emerge, vive y se transforma en una situación y contexto específico hacia una resignificación desde los usos del conocimiento matemático.

Centración en prácticas sociales: prácticas que dan sentido al uso del conocimiento matemático y se fundamenta desde las argumentaciones de los sujetos que construyen y no en el que aprende, haciendo entender a los saberes como el conocimiento puesto en uso.

Trasversalidad: reconocer que la matemática vive en otros contextos que conlleva a desarrollar investigación sobre los usos del conocimiento en el sentido en el que no se requiere conocer el concepto antes de su utilización.

Desarrollo de los usos del conocimiento matemático: resignificación progresiva natural del conocimiento matemático.

3.1.1. Estudio de situaciones de variación y cambio

En este apartado se presentan los elementos teóricos relacionados con el pensamiento variacional y como núcleos conceptuales principales, la variación y el cambio. Al revisar los referentes curriculares nacionales e internacionales se reconoce la dimensión didáctica del saber y posteriormente, se presenta una mirada desde la TSME al hacer énfasis en los elementos conceptuales para la CCM que se movilizarán en una situación de aprendizaje y así, finalmente puntualizar la manera en qué se realizará la caracterización del pensamiento variacional a partir de PV.

3.1.1.1 ¿Qué se dice en los referentes curriculares? A continuación, se precisan ideas generales de las matemáticas y la diversidad en los referentes nacionales, EBC (MEN,2006a) y los internacionales, Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003). Además, el énfasis en el pensamiento variacional.

Estándares Básicos de Competencias por el MEN. El desarrollo del pensamiento lógico y la preparación para la ciencia y la tecnología bajo la premisa de una formación que va más allá de los elementos en promedio que debe alcanzar un estudiante, el propósito se amplía hacia la integración social y equidad en una educación para todos. Teniendo en cuenta que, el conocimiento no parte únicamente de los aspectos cognitivos pues, la identificación del conocimiento matemático informal del educando relacionado con sus actividades prácticas en el entorno puede involucrar factores de orden afectivo y social vinculado al contexto de aprendizaje.

Además, la formación para el Siglo XXI exige a los ciudadanos competencias matemáticas, a razón de que deberán evidenciar el desempeño eficiente y creativo en la medida que participen de forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en

la toma de decisiones. Asimismo, la formación en valores democráticos desde la discusión toma de decisiones y ejecución de acciones que puedan transformar la sociedad.

Siendo así, se puntualiza el concepto de competencia no independiente de los contenidos pues refiere al desempeño relacionado con *saber qué*, del *saber cómo*, el *saber por qué* y el *saber para qué*. Por consiguiente, *ser competente en matemáticas* refiere a la apropiación de supuestos relacionados con la matemática como una actividad humana condicionada por la cultura y su historia y el reconocimiento de la matemática como un resultado de la reorganización de comunidades profesionales. En pocas palabras, *ser matemáticamente competente* requiere ser eficaz y eficiente en los procesos que movilizan la actividad matemática en los cuales el estudiante pasa por distintos niveles de competencia en el pensamiento matemático.

De forma particular, el *Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos* centran su atención en la resolución de problemas basados en el estudio de la variación y el cambio y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas, es por ello que la actividad matemática se orienta hacia la percepción, el reconocimiento, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas y registros simbólicos.

Por tanto, las nociones protagonistas de este pensamiento son: constante, variable, función, tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable respecto a otra y los distintos tipos de modelos de las funciones, así como las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones.

Principios y estándares para la educación matemática (PE-EM) del NCTM. Los principios y estándares proponen que todos los estudiantes deben aprender una base común en

matemáticas, lo cual refiere a un aprendizaje no estándar ya que no necesariamente lo que los estudiantes aprenden se debe parecer pues, cada uno muestra diferentes capacidades, habilidades, logros, necesidades e intereses. Asimismo, los estudiantes con necesidades especiales deben tener la oportunidad y el apoyo adecuado para alcanzar un sustancial entendimiento de matemáticas importantes.

Ahora, desde los principios para las matemáticas escolares se resalta la igualdad al indicar que no todos los estudiantes deben recibir la misma instrucción, en sentido contrario, este principio exige que se hagan ajustes razonables y apropiados para garantizar la posibilidad de que todos los estudiantes obtengan logros, lo que implica que la institución educativa deba asegurar que todos los estudiantes participen en un sólido proceso de enseñanza que apoye su aprendizaje matemático. Más aún, este principio se relaciona con un currículo coherente, una enseñanza eficaz, aprendizaje desde la comprensión y que la evaluación enriquezca el aprendizaje.

Los principios y estándares para la educación matemática no refieren al pensamiento variacional. Sin embargo, el estándar relacionado con este pensamiento es llamado “Álgebra” el cual se centra en las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representación de relaciones numéricas y el análisis del cambio, al responder a objetivos como: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y, analizar el cambio en contextos diversos.

Discusión. A manera de conclusión, la educación en Colombia se reglamenta desde los EBC sin embargo, el dar una mirada al PE-EM permite ampliar la visión desde un contexto diferente, en este caso particular se evidencia que los EBC dirige su mirada al estudio de la variación y el cambio en contraste, los PE-EM se orienta hacia el análisis del cambio únicamente;

a lo que refiere el cambio y la variación son conceptos que van de la mano desde la cuantificación y cualificación del cambio en fenómenos de variación.

Por otra parte, es importante protagonizar la formación como *ciudadano matemáticamente competente* pues si bien es cierto, la idea no es enseñar matemáticas hacia la formalidad sino orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje hacia competencias para la vida, donde el desempeño del estudiante se reflejará al responder a diversas situaciones de la vida diaria, fenómenos que implican movilizar la actividad matemática en un contexto y una realidad. De hecho, la TSME precisa que la matemática escolar procura socializar conocimientos hacia la formación de ciudadanos plenos que tengan la capacidad de usar como base la matemática para un mayor desarrollo personal y social en todos los componentes de la sociedad del siglo XXI (Cordero et al., 2015).

Siendo así, en coherencia con el sistema educativo colombiano se tendrá en cuenta los planteamientos de los EBC desde la reglamentación de la institución educativa pero no como referente teórico para el pensamiento variacional.

3.1.1.2. Una mirada desde la TSME. El estudio del cambio y la variación en situaciones de predicción posibilita el análisis de acciones, como: pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente, que evidencian el desenvolvimiento de la persona en la construcción de conocimiento. Por tanto, contribuye notablemente en el desarrollo del pensamiento variacional en la medida en que se centra su atención en estudiar la diversidad de formas cómo las personas reconocen el cambio y la variación de un fenómeno, además, cómo estas nociones se ponen en juego y contribuyen en la construcción social del conocimiento matemático. De tal forma que, en este apartado se presenta el estudio de situaciones de variación y cambio a partir de Caballero (2018).

El pensamiento variacional del individuo se ve reflejado en el lenguaje que construye y va perfeccionando para lograr explicar y comunicar sus ideas, es por ello por lo que, la TSME distingue *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (PyLV) como una línea de investigación que “se encarga de estudiar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social” (Caballero, 2018, p.18).

Las nociones protagonistas son *el cambio y la variación*, que no sólo hacen parte del entorno escolar, sino que se encuentran inmersos en todos los ámbitos de la vida diaria. Al igual que muchas otras nociones fundamentales de la matemática, la noción de variación y cambio surgió de la actividad y necesidad inherente al ser humano, la penuria de saber qué pasaría después, o qué pasa sí, *la predicción*, ya que diversas situaciones dependientes del tiempo no permitían pensar en cuáles eran los resultados venideros por tanto, a partir de allí empezaron a surgir diversos mecanismos para tratar de representar, modelar comportamientos basados en el estudio del cambio y orientados por la práctica social que daba sentido a la variación.

El fortalecimiento de dichas nociones se orienta a que es el punto inicial para la construcción de significados de objetos matemáticos más compuestos como derivada y pendiente, así que, juega un papel primordial en el aprendizaje del cálculo diferencial y consecutivos. Sin embargo, en ocasiones se confunde el estudio de la variación desde la creación y operatividad de modelos reducidos a expresiones algebraicas, pero, se debe reconocer que la atención en la operatividad de los conceptos no es suficiente para la construcción de la noción de variación debido a que no permite la transversalidad del saber matemático, para referir a la transferencia de definiciones y procedimientos de un contexto a otro. Allí juega un papel importante la modelación como un proceso que permite movilizar la matemática en el estudio del fenómeno al precisar que,

la modelación no se define como un proceso cíclico que usa expresiones matemáticas para resolver problemas sino en la creación de un modelo matemático para resolver e interpretar el problema y sus resultados a la luz del contexto.

Por tal razón, se distingue la matemática escolar y la matemática funcional en otras palabras, una matemática del mundo real al conjugar momentos donde se trasciende y resignifica el objeto matemático en cuestión al tomar como punto de partida la práctica social como fuente de reorganización de la matemática y el rediseño de la matemática escolar (Cordero 2006 citado por Arrieta y Diaz, 2015).

La noción de variación y cambio. La variación y el cambio son nociones que se relacionan desde la cualificación y cuantificación del cambio al explicar las razones del fenómeno, lo observable, lo que se puede calcular, cómo medirlo y por tanto cómo construir una interpretación variacional de la situación.

De tal forma que, para llegar a precisar la noción de variación primero se debe tener claridad de cómo se construye y es definido el cambio. Cantoral et al. (2015 citado por Caballero, 2018) precisan que, cambio se refiere a toda modificación que tiene el valor de una variable, por tanto, alude a una cualidad que es cuantificada a razón de una transformación que se dio en el comportamiento. Entonces, dicha cualidad al ser medible es percibida por los sentidos, sin embargo, percibir el cambio y proveer de situaciones que incentiven el estudio del cambio no son suficientes para que se dé la construcción de la noción de variación.

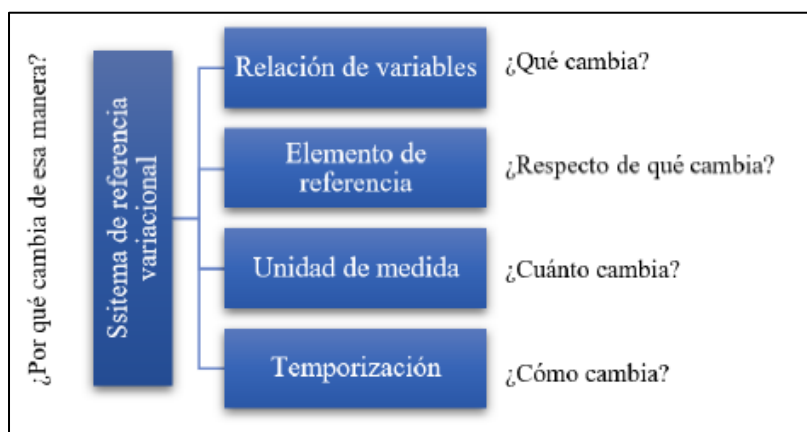
Más allá de los elementos observables y medibles, *la variación* no está presente de forma explícita, no se percibe por los sentidos sino con el pensamiento pues, responde a la abstracción de propiedades y características del cambio. Por lo tanto, al analizar la evolución del cambio en un

intervalo y el reconocimiento de porqué las variables cambian y cómo lo hacen, da un acercamiento más preciso hacia situaciones de cambio con fines predictivos.

La noción de variación permite articular significados y la interpretación del proceso que se inició con la cuantificación del cambio que se puede dar entre dos o más variables en tanto, el término de variación también amplía su visión al incluir la covariación, al aceptar que dos variables pueden cambiar juntas, en palabras de Caballero (2018) “partimos de la premisa de que las cantidades no cambian de manera independiente, se requiere de otra cantidad para determinar que la primera ha cambiado” (p.17).

Así, la construcción de la noción de variación desde el propósito de interpretar cómo se disponen las características, se da en torno a cinco interrogantes específicos correspondientes a los elementos del sistema referencial variacional: **¿qué cambia?**, **¿respecto de que cambia?**, **¿cómo cambia?**, **¿cuánto cambia?**, y **¿por qué cambia de esa manera?**, observe la figura 1.

Figura 1. Elementos del sistema referencial variacional.



Nota. Tomado de Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Caballero, 2018, p. 99).

Al considerar que, al estudiar la evolución del cambio en un intervalo, se deberá tener en cuenta el carácter estable del cambio, la identificación de regularidades en dicha evolución y lo más importante, la toma de conciencia a luz del fenómeno estudiado.

Situación de aprendizaje. La TSME precisa que el camino didáctico para la identificación de la construcción social del conocimiento matemático se evidencia alrededor de una situación de aprendizaje definida como una tarea o conjunto de tareas que propician la actividad del sujeto que construye, teniendo en cuenta el contexto de significación y el objetivo de problematizar el saber en la medida en que se analiza la interacción de los sujetos-individuos o colectivos con el conocimiento puesto en uso (Reyes-Gasparini, 2016 citado por Hinojo et al., 2020).

De tal forma que, la situación de aprendizaje que se propone debe incentivar la argumentación y justificación del estudiante en la CCM desde su propia realidad, reconociendo además, la diversidad de resultados que van a guiar la toma de decisiones y evidenciar la coherencia y racionalidad. De acuerdo con Cantoral et al. (2014) la validez del saber del estudiante es relativa pues, la TSME reconoce que las argumentaciones erradas son generadoras del estudio de pensamiento matemático para ser reconstruido.

Más aún, la situación de aprendizaje no es un ejercicio o traducción literal de un contexto. El objetivo es que la respuesta del estudiante no sea inmediata sino que se encuentre forzado a pensar en conocimientos previos, posibles relaciones, inferencias del contexto, construcciones y modificaciones para poder concretar una idea que lleve a la solución. Es por ello que, el aprendizaje desde el punto de vista de la TSME, es “el producto emergente de una dialéctica de construcción social del conocimiento, que parte de lo factual, articula a lo procedimental y se consolida en un nivel simbólico” (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología 2019a) esto refleja la significación que surge desde la práctica social que a medida que avanza es más compleja y estructurada. Entonces, una propuesta didáctica en función de esa dialéctica hace explícito aspectos relacionados con la resignificación progresiva, la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico y la funcionalidad del conocimiento.

Por lo tanto, la situación de aprendizaje se visualiza desde tres etapas secuenciales (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019a, 2019b):

Etapas factual: Esta etapa se orienta a que el estudiante se familiarice con la situación lo que implica la identificación de magnitudes y, asociar y comparar diferentes valores. Es posible incentivar y enfrentar expresiones con significado concreto para indicar cómo es el valor de una magnitud respecto a otra: “mayor que”, “menor que”, “más grande”, “más pequeño”, etc. De hecho, la actividad puede llevar a que el estudiante ejercite procedimientos en función del comportamiento explícito y la comprensión de la situación con los elementos dados.

Etapas procedimental: Esta etapa se centra en la construcción de argumentos comparativos, lenguaje y procedimientos a partir de los cuales se pueden estudiar los datos que se presentan en la representación del objeto matemático. El objetivo es que los criterios que los estudiantes construyan sean soporte para los métodos y estrategias para extraer información de la representación del objeto matemático y precisar juicios de valor en función del comportamiento de las variables por ejemplo, en una gráfica si los puntos son cercanos significa que son similares o si un punto está por encima de otro significa que es mayor.

Etapas simbólica: La actividad del estudiante se orienta a la adquisición de información acerca del comportamiento de las variables a partir de una representación, comparación de comportamientos, tendencias en el valor de las variables y desarrollo de estrategias para comparar valores en una representación del objeto matemático. En tanto, las preguntas se orientan a la predicción para lo que, el estudiante puede construir un modelo que responda a la configuración del comportamiento.

Caracterización del pensamiento variacional a partir de Prácticas Variacionales

Este apartado toma lo descrito por Caballero (2018) al cuestionarse sobre ¿cómo promover el desarrollo del PyLV? desde su hipótesis de que la temporización y causalidad como elementos transcendentales en la construcción de la noción de variación se articulan con el sistema de referencia variacional, pues indica que la temporización discretiza los fenómenos de cambio en estados intermedios, lo cual implica el desarrollo de prácticas predictivas de las cuales emergerá la variación sucesiva y el carácter estable del cambio, al responder ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia? al explorar y construir conocimiento sobre la medición del cambio, el análisis de su evolución y el reconocimiento de porqué las variables cambian de la forma en que lo hacen. Por tanto, estos procesos se reflejarán a través de formas específicas de cuantificar el cambio lo que corresponde a las *Prácticas Variacionales*.

Las *Prácticas Variacionales* se orientan al desarrollo de acciones para operar el cambio y la variación con fines predictivos lo cual implica, formas particulares de razonar y actuar ante una situación de cambio, prácticas como la *comparación*, la *seriación*, *predicción* y *estimación* que evidenciaran un carácter evolutivo desde una evaluación pragmática en el paso por cada una de ellas.

Comparación: acción de establecer diferencias entre dos estados, uno anterior y uno posterior, o bien dos estados equivalentes de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y cuantificar el cambio. Se puede evidenciar de dos formas: por medio de una diferencia y otra, a través de un cociente. Es importante aclarar que, la comparación se debe dar entre elementos de la misma naturaleza o que estén relacionados de algún modo.

Esta práctica variacional es el primer pilar que abre la puerta para pensar en variación, no se puede hablar de variación si no se hacen comparaciones entre diferentes estados del mismo

fenómeno o bien entre estados equivalentes de diferentes fenómenos. Su objetivo es identificar qué elementos se están comparando, respecto de qué se está comparando y cómo se realiza esa comparación (cociente o diferencia). Algunos indicadores verbales o de ejecución, de esta práctica variacional son:

- Más o menos grande que....
- Más o menos rápido que...
- Dibujos, esquemas, símbolos que expresen una diferencia de valor en dos cantidades.

Seriación: se trata en analizar estados consecutivos de un fenómeno y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional en el conjunto total o parcial de esos estados. Consiste en organizar e identificar una lógica a un conjunto finito de comparaciones que posibilite determinar el carácter estable del cambio.

Esta práctica se logra evidenciar cuando el estudiante articula varios estados consecutivos con el objetivo de encontrar una regularidad o patrón en el conjunto total o parcial entre ellos. Por lo tanto, se manifiesta como una organización de comparaciones de estados sucesivos.

Predicción: acción de anticipar un estado o valor específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen. Esta práctica se orienta a proveer el estado o valor futuro en una representación, por ejemplo, identificar el carácter estable del cambio en una sucesión numérica. También es posible caracterizar esta práctica como una predicción local.

Se logra evidenciar la predicción a manera de formulación aritmética, algebraica o analítica que tiene su origen en las prácticas anteriores o en la apreciación del valor de una variable respecto a otra.

Estimación: consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo. O bien, la estimación se refiere a una predicción global.

Se manifiesta como la descripción cualitativa o cuantitativa del comportamiento de una variable en un intervalo a través de descripciones verbales, dibujos, gráficas o indicaciones numéricas.

La diferencia entre la estimación y predicción se centra en que, por ejemplo, la estimación se usa para saber si habrá un crecimiento o disminución en un periodo determinado, la predicción, se encarga de determinar el valor específico en un instante.

En conclusión, la comparación y seriación constituyen las prácticas anfitrionas para determinar el carácter estable del cambio. Por su parte, la estimación y predicción precisan acciones concretas para determinar el estado futuro del fenómeno estudiado teniendo en cuenta las prácticas anteriores de tal forma que, en la segunda etapa (predicción y estimación) se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos.

3.2. Inclusión en el aula de matemáticas

En esta sección se pretende identificar los principios fundamentales de la inclusión en el aula para ello, se precisan autores como Moliner et al. (2017), Crisol et al. (2015), y Arnaiz (1996) al concretar características del aula inclusiva. Asimismo, se establece la fundamentación teórica de la población como un grupo diverso y, por último, teniendo en cuenta los elementos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la TSME y las características del aula inclusiva se establecen las características para el aula inclusiva de matemáticas.

3.2.1. Características del aula inclusiva

Moliner et al. (2017) identifican el desarrollo de prácticas inclusivas como un proceso de cambio y mejora educativa que incluyen elementos organizativos, de gestión y evaluación en el aula, con el fin de valorar y respetar la diferencia.

La presencia de alumnos diversos en el aula y en el centro es una realidad y ante esto la respuesta educativa debe tener en cuenta las siguientes posturas:

1. Seguir manteniendo el estatus quo al pensar que los miembros de la clase que no responden sufren algún problema que impide su participación.
2. Buscar un equilibrio reduciendo las expectativas al pensar que algunos estudiantes simplemente nunca serán capaces de alcanzar los niveles tradicionales.
3. Intentar desarrollar nuevas respuestas didácticas que puedan estimular y fomentar la participación de todos los miembros de la clase (Ainscow, 1999).

Es importante resaltar que, la postura 2 no refiere precisamente a limitar el aprendizaje de los estudiantes sino estructurar el proceso de enseñanza y aprendizaje desde un currículo flexible al tener presente que todos los estudiantes pueden llegar relativamente a la misma meta de aprendizaje desde caminos y niveles distintos.

Con respecto a la postura 3 se presentan los siguientes “ingredientes” del aula inclusiva para propiciar un aula verdaderamente eficaz para todos:

- ❖ Empezando con los conocimientos existentes: al reconocer que la enseñanza es un proceso de construcción de un significado donde cada individuo construye su propia versión de una experiencia compartida, por lo tal es importante que se fomenten en el aula contextos y condiciones que lo hagan posible.

- ❖ Planificar teniendo en cuenta todos los miembros de la clase: se trata de una “planificación activa” en la medida en que la planificación individual abarca la totalidad de la clase.
- ❖ Considerar las diferencias como oportunidades para el aprendizaje: tener en cuenta las causas del fracaso escolar con sus características y sus familias, para reflexionar sobre la propia institución escolar.
- ❖ Analizar los procesos que conducen a la exclusión: estar alerta para evitar cualquier proceso o práctica de exclusión.
- ❖ Utilizar todos los recursos disponibles en el aula y en el centro para lograr los principios que se proponen.

Por otra parte, Crisol et al. (2015) precisa la visión de construir una escuela inclusiva como respuesta que no sólo reconoce, sino que valora la heterogeneidad del alumnado, al centrar la atención en las habilidades y fortalezas y no en sus dificultades.

Teniendo en cuenta lo anterior, los autores corroboran que la inclusión en el aula de clase requiere de una reestructuración en el deber y la actitud del maestro, la familia y la comunidad frente a todos los niños que se encuentran en desventaja o vulnerabilidad, con el fin de construir conocimiento a medida que se respetan los ritmos de aprendizaje y se fomenta la participación como sujeto activo de una educación que brinda igualdad de condiciones y oportunidades. Se destaca que la NE norma la actuación del docente y debe guiarse a la adaptación en función de las necesidades del estudiante.

De tal forma que la Educación Inclusiva se orienta a que todos los alumnos sin excepción ni etiquetas estén escolarizados en los centros ordinarios, donde se les brinde la oportunidad de aprender, recibiendo una orientación, apoyo y calidad educativa en función de sus características.

Por ende, la transformación de aula debe responder a esa diversidad inherente que lleve a la actuación responsable.

Crisol et al. (2015) centra su atención en detectar las condiciones que deben cumplir los centros educativos para lograr prácticas inclusivas y las características de un aula inclusiva, para lo cual precisa elementos relacionados con: un currículo común, la valoración de la diversidad, la organización social, aprendizaje colaborativo y flexible, enfoque de evaluación curricular y participación activa del estudiante (Parilla y Moriña, 2004); la filosofía, las reglas en el aula, la instrucción acorde a las características y el apoyo dentro del aula ordinaria (Stainback & Stainback, 1999); además, agrupamientos heterogéneos, sentido de pertenencia al grupo, planteamiento de actividades de distinto nivel, uso de ambientes frecuentados por personas sin discapacidad y experiencias educativas equilibradas (Giangreco et al., 1994); y, principios del aula inclusiva: la eliminación de barreras estructurales, el desmantelamiento de programas y servicios aislados, el desarrollo de enfoques pedagógicos y, el fomento de valores de la inclusión (Ainscow & Miles, 2008).

De tal forma, que Crisol et al. (2015) teniendo en cuenta lo anterior y otros autores, precisa las siguientes como características del aula inclusiva:

- ❖ Se fomenta la cooperación y la creación de redes naturales de apoyo (tutoría entre compañeros, círculos de amigos, aprendizaje cooperativo). Stainback y Stainback (1999).
- ❖ El profesorado promueve actividades que motivan a todo el alumnado y que les hace participar en la dinámica del aula, además de tener en cuenta el conocimiento y la experiencia de los estudiantes. Stainback y Stainback (1999).

- ❖ Cuando hace falta la ayuda de “expertos” para satisfacer las necesidades de un estudiante, el sistema de apoyo en el aula y el currículo son modificados para ayudar no solo al estudiante necesitado, sino también a otros estudiantes que se pueden beneficiar. Stainback y Stainback (1999).
- ❖ Todo el alumnado pertenece y puede aprender en el aula ordinaria, al valorarse en ella la diversidad. Giangreggo(1994).
- ❖ Tienden a enfatizar la atmósfera social, sirviendo como ejemplo y enseñando a respetar las diferencias. Moriña y Parrilla (2004).
- ❖ La instrucción que ofrece es acorde a las características del alumnado y sus necesidades, proporcionando apoyo para conseguir con éxito todos los objetivos del curriculum. Stainback y Stainback (1999).
- ❖ Eliminación de barreras estructurales entre los distintos grupos de estudiantes y el personal. Ainscow y Miles (2008).
- ❖ Participación de los maestros, padres, alumnos... en las actividades de la escuela. Ainscow (2001).
- ❖ En la que se establecen comunidades escolares que dan la bienvenida a la diversidad y que valora las diferencias. En donde todo el alumnado pertenece y puede aprender en el aula ordinaria. Moriña y Parrilla (2004).

Desde otro punto de vista, Arnaiz (1996) reconoce e insiste que el camino hacia la educación inclusiva se talla con adaptaciones, cambios coherentes y conocimiento de la población es por ello por lo que, caracteriza una escuela inclusiva como una escuela comprensiva, eficaz e integradora. Por consiguiente, considera la escuela inclusiva desde los siguientes principios:

1. Clases que acogen la diversidad. Al establecer y mantener comunidades escolares que den la bienvenida a la diversidad y que honren las diferencias.
2. Un currículo más amplio donde se referencie la enseñanza a un grupo realmente heterogéneo.
3. Enseñanza y aprendizaje interactivo donde se apoye la preparación del docente y se reconozca el aprendizaje colaborativo.
4. El apoyo al profesor.
5. Participación paterna.

De tal forma que al caracterizar la escuela inclusiva más allá de la integración y adaptación para niños con discapacidad, precisa las siguientes características:

- ❖ Asume una filosofía bajo la cual todos los niños pertenecen y pueden aprender en el aula ordinaria, al valorarse en ella la diversidad y verla como una oportunidad para mejorar el aprendizaje.
- ❖ Los derechos de cada miembro son intencionalmente comunicados con el fin de reflejar un trato justo e igualitario y respeto mutuo entre los estudiantes, docentes y comunidad educativa.
- ❖ Instrucción acorde a las características del estudiante con el propósito de ayudar a conseguir con éxito los objetivos del currículo apropiado. Al reconocer que el currículo no es estándar, sino que se ajusta y/o expande, cuando es necesario para satisfacer las necesidades del estudiante.
- ❖ Apoyo dentro del aula con relación a modificaciones instructivas, técnicas especializadas para que los estudiantes tengan éxito educativo o socialmente, es decir, el sistema de apoyo es traído al estudiante. Por ejemplo: fomento de una red de apoyo

natural, acomodación, autorización, promover la comprensión de diferencias individuales y la flexibilidad. (Stainback & Stainback, 1992)

Por lo tanto, el objetivo es que las escuelas sean para todos y, para esto se requiere que las escuelas garanticen que todos los alumnos tengan acceso a un aprendizaje significativo.

Los autores mencionados anteriormente coinciden en que la educación inclusiva implica que se valore la diversidad, se reconozca y se tome como punto de partida para estructurar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula. En tanto, se evidencia que para caracterizarla se dimensiona desde la educación, la práctica y la cultura pues, en resumidas cuentas, debe reflejar todos los principios que allí se precisan.

Uno de los puntos más importantes se centra en el currículo común y equilibrado para un grupo diverso sin ánimo de estandarizar pues, la idea es encontrar un punto de congruencia que permita flexibilizar el currículo para que todos los estudiantes puedan acceder a él. A partir de allí, las modificaciones necesarias a la enseñanza y la manera en cómo se identifica el aprendizaje desde las necesidades y características de cada uno de los estudiantes.

En concordancia, las prácticas que se lleven a cabo en el aula deberán evidenciar esos principios de educación inclusiva: igualdad, equidad y justicia. Por consiguiente, en esta investigación, de acuerdo con Crisol et al. (2015) y en complemento de los demás autores nombrados, se precisan las siguientes características del aula inclusiva, observe la tabla 1.

Tabla 1. Características del aula inclusiva según referentes revisados.

Característica	
Cooperar para enseñar y aprender	Cooperación y red de apoyo en el aula en relación con las modificaciones relacionadas con la enseñanza y las estrategias para lograr el éxito en los estudiantes. Por ejemplo, el aprendizaje cooperativo, apoyo de tutores especialistas, promover la comprensión de las diferencias individuales, los trabajos en equipo y la flexibilidad.
Motivación y participación	Reconocer que todos los estudiantes pueden aprender y tener éxito. Superar la discriminación y segregación desde la participación, por tanto, el docente debe promover actividades llamativas para el estudiante.
Adaptaciones al currículo	El currículo es modificado no solo para ayudar al estudiante necesitado, sino también a otros estudiantes que se pueden beneficiar. Teniendo presente la flexibilización del currículo que reconoce al estudiante como un constructor de conocimiento en el proceso y los resultados, desde sus habilidades y destrezas.
Valorar la diversidad	Todos los estudiantes pertenecen y pueden aprender en el aula ordinaria, donde se reconoce la diferencia como una oportunidad para el aprendizaje. La atención no tiene punto de partida en las dificultades o falencias sino en las habilidades, destrezas y necesidades del estudiante.
Respeto por la diferencia	Orientar desde la atmósfera social, la solidaridad y tolerancia para aceptar al otro a través del respeto y el conocimiento. Al respetar la diferencia se conoce el valor que tiene cada uno como persona.
Instrucción coherente	La instrucción que ofrece es acorde a las características del alumnado y sus necesidades, proporcionando apoyo y un ambiente idóneo para conseguir con éxito todos los objetivos del currículo.
Eliminación de barreras estructurales	Eliminar todos los constructos sociales, comentarios o decisiones basadas en los prejuicios y estereotipos. Dejar a un lado la llamada “normalidad”.
Apoyo de comunidad educativa	Fomentar una cultura inclusiva con los maestros, padres, estudiantes y todos los integrantes de la comunidad educativa.
Exteriorización	En la que se establecen comunidades escolares que dan la bienvenida a la diversidad y que valoran las diferencias.

Nota. Tomada de “El aula inclusiva. Condiciones didáctica y organizativas” (Crisol et al. 2015).

Modificada por la autora.

3.2.1.1. Grupo diverso

La escuela inclusiva se orienta a que la educación sea lo más humana posible para todos los estudiantes que acuden a ella, al reconocer que la inclusión y el respeto por la diversidad no son principios limitados a los estudiantes con discapacidades o a los estudiantes con talento; las diferencias de raza, religión, etnia, entorno familiar, nivel económico, y capacidades están presentes en todas las aulas. Pues, el interés se debe centrar hacia el apoyo a las necesidades de cada miembro de la escuela, no solo a estudiantes con discapacidades. (Arnaiz 1996, Beck & Kosnik 2014) pues, la educación inclusiva no se plantea solo para las personas con NEE, sino que se “dirige a todo el alumno en situación de exclusión educativa por cualquier razón” (Fuentes et al., 2021, p.92) ya sea étnica, religión, género, nivel socioeconómico, grupo social, etc., y que debido a eso requiere de una atención educativa que considere los detalles.

Teniendo en cuenta lo anterior, Ainscow & Miles (2008) desde el análisis de diversas investigaciones internacionales precisan una tipología de cinco concepciones de la inclusión:

- a) en relación con la discapacidad y las necesidades educativas especiales.
- b) como respuesta a exclusiones disciplinarias. Estudiantes cuya conducta se considera “difícil” y que regularmente pueden ser expulsados de escuelas. Es primordial conocer el historial y contexto de circunstancias anteriores.
- c) referida a todos los grupos vulnerables a la exclusión. Dirigida a estudiantes en riesgo de exclusión social, es importante indagar la naturaleza de sus procesos de exclusión y los orígenes en las estructuras sociales.
- d) como promoción de una escuela para todos. Orientada a atender una comunidad socialmente diversa.

- e) como Educación para Todos. Educación como un concepto mucho más amplio que la escolarización.

Por tanto, para efectos de esta investigación se define “Grupo diverso” con relación a las concepciones de inclusión a), b) y c) definidos por Ainscow et al. (2006) citado por Ainscow y Miles (2008) aterrizadas en el contexto de una Institución de Educación Pública en Colombia. La gestión del aprendizaje y al practica de enseñanza teniendo en cuenta que los procesos de enseñanza y aprendizaje también deben considerar las diferencias sociales, culturales, de capacidad y de intereses de hecho, los estudiantes afectados por enfermedades, en riesgo de drogadicción, desplazados, migrantes, en pobreza extrema y que viven en la calle también requieren de estrategias educativas para la inclusión (Beck & Kosnic, 2014; Escudero y Martínez, 2011; Ministros de Educación de América Latina y el Caribe, 2001).

a. Necesidades Educativas Especiales

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, s.f.) indica que la población con Necesidades Educativas Especiales refiere a las personas con discapacidad o limitaciones y con capacidades o talentos excepcionales.

- ❖ Personas con capacidad excepcional: Persona con una capacidad global, que obtiene resultados muy altos en pruebas para medir la capacidad intelectual y los conocimientos generales. También puede presentarse capacidades o talentos excepcionales en personas con discapacidad.
- ❖ Persona con discapacidad: Persona con deficiencias o alteraciones en las funciones y/o estructuras corporales, limitaciones en las actividades que puede realizar una persona de su edad y contexto, así como restricciones en la participación en los espacios de la vida cotidiana.

- ❖ Persona con talento excepcional: Persona con alto potencial, general o restringido a un campo específico de la actividad humana, para aprender y desarrollar competencias, que supera con creces al que se espera que tengan otras personas de su edad y en su medio, habilidades metacognitivas superiores y auto maestría en una o varias áreas del saber. Se acompaña además de altos niveles de creatividad y de dedicación a las tareas que se emprenden.

b. Estudiantes de exclusiones disciplinarias relacionado con los trastornos de conducta

- ❖ Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH): Dificultad para fijar la atención, hiperactividad y comportamiento impulsivo.
- ❖ Trastorno Negativista Desafiante (TND): Patrón frecuente de ira, irritabilidad, discusión, desobediencia o resentimiento hacia el acompañante u orientador.
- ❖ Trastorno de Conducta (TC): Problemas conductuales y emocionales que pueden llevar a un comportamiento desafiante e impulsivo.

c. Estudiantes con trastornos de aprendizaje

- ❖ Dislexia: Alteración en la capacidad de leer, al confundir letras, sílabas y palabras.
- ❖ Discalculia: Dificultad para comprender, entender y realizar operaciones matemáticas relacionadas con números.
- ❖ Disgrafía: Dificultades para comprender textos escritos.

d. Estudiantes en riesgo de exclusión

Estudiantes pertenecientes a determinados grupos sociales o condiciones específicas del contexto.

- ❖ Pertenecientes a grupos indígenas.

- ❖ Población afectada por el conflicto armado.
- ❖ Reintegración de grupos al margen de la ley.
- ❖ Hogares de paso o bienestar familiar.
- ❖ Estudiantes trabajadores.
- ❖ Población en condiciones de pobreza extrema.
- ❖ Migración o provenientes de otros países.

e. Estudiantes típicos

Refiere a estudiantes sin ninguna de las características nombradas para los subgrupos anteriores.

Por lo tanto, la necesidad de definir el grupo diverso al que se dirige la investigación aporta una perspectiva de lo que realmente se puede hallar en un aula de clase de una institución pública, partiendo de la heterogeneidad.

Aula inclusiva de matemáticas

La matemática se ha constituido como una línea de investigación recurrente y fortalecida a razón de las diversas problemáticas de enseñanza y aprendizaje que pueden surgir específicamente en el aula de matemáticas. Es por ello, que, aunque en la literatura no se precisan características de la educación inclusiva para el aula de matemáticas en este apartado se pretende plantear una caracterización del aula inclusiva de matemáticas teniendo en cuenta al estudiante como protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje, en la medida que construye conocimiento matemático útil para su desempeño en las situaciones y actividad de la vida diaria para lo cual, se articulan las precisiones de la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la TSME y los principios de inclusión nombrados en el apartado anterior. Así, en la tabla 2 se detallan las características de un aula inclusiva de matemáticas.

Tabla 2. *Características del aula inclusiva de matemáticas*

	Característica
Adaptaciones al currículo e instrucción coherente	El currículo es modificado desde los contenidos, metas de aprendizaje y elementos susceptibles con el fin de “trastocar el conocimiento matemático” al reconocer una matemática manipulable y no estática, donde el sujeto que aprende es el protagonista del proceso de aprendizaje como constructor del conocimiento matemático desde su uso. La instrucción del docente responde a factores cognitivos, didácticos, epistemológicos, sociales y culturales que dan razón a la perspectiva del estudiante.
Valorar y respetar la diferencia	Todos los estudiantes pertenecen y pueden aprender en el aula ordinaria, al reconocer la diferencia como una oportunidad para el aprendizaje. El estudiante significa y resignifica la matemática desde su propia realidad, condición, contexto, cultura, habilidades e intereses. Por tanto, desde su diversidad se reconocen distintos contextos significativos que dan sentido a la CCM desde las distintas formas que se propicia la matemática funcional.
Aprender en comunidad	Reconocer al estudiante como constructor del conocimiento matemático donde el aprendizaje colaborativo y la cooperación de la red de apoyo permite potencializar habilidades individuales hacia la construcción colectiva.
Aprender para la vida	Aprendizaje hacia la matemática funcional, que promueve el crecimiento personal, permite concebir la realidad con sentido y la toma de decisiones frente a las situaciones del cotidiano del hombre. El estudiante toma el conocimiento matemático como instrumento para su vida cotidiana.
No “normalidad”	No hay un conocimiento estándar, fijo o estático. Las metas de aprendizaje son posibles para todos los estudiantes al reconocer que puede haber un nivel de acercamiento diferente, proceso y construcción. Eliminar las barreras estructurales que puedan llevar a la exclusión en todas sus dimensiones. En tanto, el docente amplía la posibilidades y ofertas de orientación para no limitar los alcances de aprendizaje del estudiante.
Cultura inclusiva	Fomentar la inclusión más allá del aula de matemáticas, propiciar espacios de aprendizaje desde situaciones o problemas en contextos de interdisciplinariedad que dan la bienvenida a la diversidad y el valor por la diferencia.

Nota. Elaboración propia.

CAPITULO IV. MARCO METODOLÓGICO. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE A PARTIR DE LA CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO DIVERSO

El enfoque cualitativo de investigación centra su atención en estudiar la “cualidad” de una persona, fenómeno o situación en tanto, la “manera de ser de una persona o cosa” y lo que da razón a que sea lo que es o caracteriza. De tal forma que, produce y busca datos descriptivos al intentar comprender hechos, sucesos, acontecimientos y en sí, la realidad y las interrelaciones que se dan en ella. Por lo tanto, el camino metodológico del investigador se orienta a la exploración, participación en el medio, comprensión de eventos e interpretación del conjunto de variables que se conjugan para dar sentido a un comportamiento o caracterización de un fenómeno (Martínez, 2004 y Rodríguez et al., 1999).

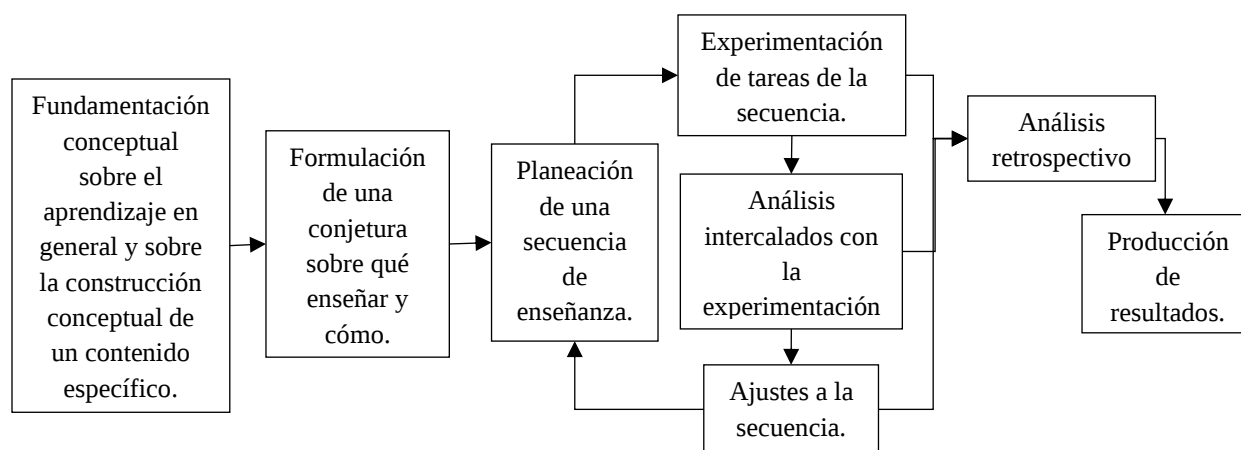
En Educación Matemática se han precisado enfoques que surgen y responden a las problemáticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Camargo (2021) define “*Estrategias investigativas de diseño* como aquellas estrategias donde el investigador responde a “¿qué pasaría si...?” sobre un fenómeno en particular” (p.72); de tal manera que, se plantea una hipótesis de trabajo sobre la que se desea indagar si se garantizan ciertas condiciones o circunstancias, por lo tanto, se diseña una situación para poner a prueba la hipótesis y estudiar los efectos logrados.

En particular, “*Estrategias investigativas de diseño para el experimento de enseñanza*” precisa el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza donde se pone en funcionamiento una conjetura teniendo como principal objetivo capturar los significados que las personas dan a ciertas dinámicas además, se indaga por procesos o mecanismos que se ejecutan en el aula y “la calidad de la experiencia matemática de los estudiantes cuando participan de la implementación de un diseño que busca crear oportunidades de aprendizaje” (Camargo, 2021, p.72). Uno de los resultados relevantes de este tipo de investigación son las “pruebas de existencia”

que muestran cómo, bajo ciertas circunstancias, es posible lograr un efecto deseado y vale la pena seguir intentándolo al indagar sobre la racionalidad que subyace en las acciones de los estudiantes. Por ello, este enfoque precisa el compromiso con un marco conceptual sobre el aprendizaje y la forma de fomentar el desarrollo específico del objeto matemático en un entorno determinado; teniendo en cuenta que a medida que la clase se desarrolla, es posible hacer ajustes a la luz de las limitaciones de la vida escolar, adaptaciones y retroalimentación constante.

En la figura 2 se muestra el esquema general que propone Camargo (2021) para un experimento de enseñanza.

Figura 2. Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.



Nota. Tomado de "Estrategias cualitativa de investigación en educación matemática" (Camargo, 2021, p.75).

La conjetura sobre qué enseñar y cómo surge de la problemática de estudio y la revisión crítica de la literatura sobre el fenómeno, por lo tanto, la conjetura posee dos dimensiones: una, referida al objeto matemático (qué enseñar) y otra, referida al aprendizaje (cómo enseñar). Dicha conjetura orienta las siguientes etapas del experimento. Adicionalmente, Camargo (2021) resalta que un experimento de enseñanza dura el tiempo necesario con el propósito de “implementar,

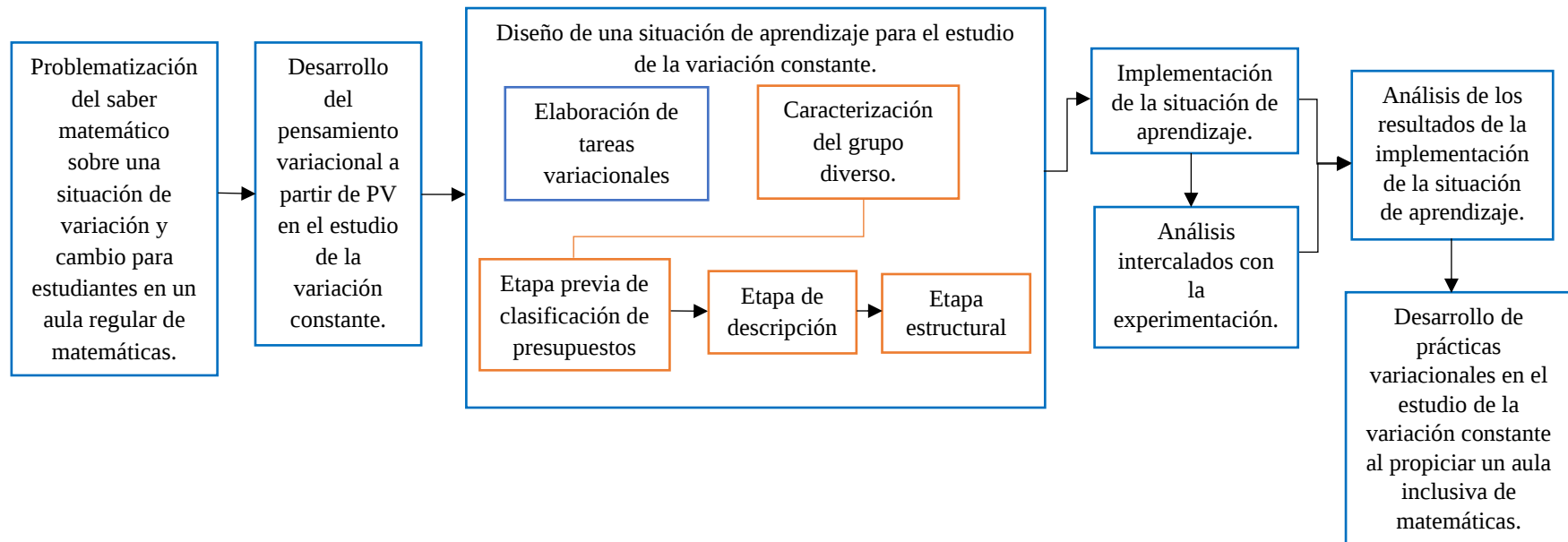
analizar y transformar una enseñanza para capturar regularidades subyacentes que no puede ser captada en inspecciones superficiales” (p.76).

Sin embargo, uno de los objetivos de este trabajo detalla en el conocimiento de la persona y su realidad lo que responde a principios de la fenomenología que busca dar significado y comprender realidades cuya naturaleza y estructura dependen de las personas que viven y experimentan, al destacar sobre lo individual, la subjetividad de los hechos y naturaleza de los fenómenos (Rodríguez et al., 1999). Así, el enfoque cualitativo de tipo fenomenológico se articula en tres etapas: (1) etapa previa de clasificación de presupuestos, donde se median los valores, actitudes, creencias, intereses, conjeturas e hipótesis para precisar su posible influencia en la investigación; (2) etapa de descripción, que tiene en cuenta la elección de técnicas y procedimientos adecuados, su realización y la elaboración de una descripción protocolar que muestre el fenómeno lo más completo posible desde el contexto natural y; finalmente, (3) etapa estructural que incluye la lectura general de la descripción protocolar, delimitación, determinación, expresión central e integración desde el objetivo de estudio.

Si bien es cierto, a partir de los principios que fundamentan la TSME se acepta que la investigación se adapte a las características del problema que se investiga, del saber, de la población de estudio, condiciones del ambiente en que se desarrolla la investigación y otros factores (Moreno, 2021). Por lo tanto, este trabajo de investigación se orienta a un estudio de corte cualitativo con elementos del enfoque “*Estrategias investigativas de diseño para el experimento de enseñanza*” y del fenomenológico, al precisar como punto de partida el “conocer” la población de estudio desde su propia percepción y realidad, interpretar el fenómeno de inclusión escolar desde una descripción estructurada de factores implicados y, cómo es posible efectuar una atención real a la diversidad en el aula de matemáticas a través de un diseño de situación de aprendizaje que

promueva el desarrollo del pensamiento variacional desde la diversidad de los estudiantes. Por lo tanto, en el recorrido investigativo se reconoce que el protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje es el estudiante como constructor de conocimiento matemático donde la instrucción coherente surgirá del “conocer” al estudiante desde las dimensiones del saber y como persona y de ahí, dar cuenta de los aprendizajes de los estudiantes al enfrentarse a situaciones de variación y cambios y propiciar un aula inclusiva de matemáticas.

Siendo así, en la figura 3 se presenta un esquema general del camino metodológico basado en el enfoque de “Estrategias investigativas de diseño para le experimento de enseñanza” con elementos fenomenológicos en lo que refiere a la “Caracterización del grupo diverso”.

Figura 3. Plan de ejecución de la investigación.

Los instrumentos, procedimientos y estrategias en la investigación de tipo cualitativo se basan en dos técnicas principales: la triangulación y las grabaciones de audio y video, que permiten observar y analizar repetidas veces la información de tal modo que, las técnicas se centran en el lenguaje hablado, escrito, natural y no verbal (Martínez, 2004).

4.1. Población de estudio

La Institución Educativa las Américas [IEA] es una institución de orden oficial ubicada en la ciudad de Bucaramanga, que precisa en su filosofía la acogida sin discriminación a todo personal que desee estudiar allí, incluyendo estudiantes con discapacidad, NEE o condición en especial desde factores sociales, económicos y culturales para “integrarlos” hacia el desarrollo de capacidades y habilidades para hacer de todos, seres humanos útiles (IEA, s.f.). Además, en su Sistema Institucional de Evaluación se menciona que el proceso de educación inclusiva en la institución tiene como objetivo principal la inclusión social y académica de niños, adolescentes y jóvenes con NEE matriculados en la institución teniendo en cuenta que, como garantía de apoyo se considera el DUA para la realización de ajustes razonables en lo que incluye la elaboración del PIAR orientado a una promoción y éxito académico (IEA, 2020).

4.1.1. Un panorama sobre la inclusión en la Institución Educativa Las Américas

La Secretaría de Salud de Bucaramanga en compromiso de la inclusión y atención a la diversidad en particular de estudiantes con alguna condición específica o NEE constituyo recientemente la figura de “Docente apoyo a la inclusión” asignando profesionales de la educación con énfasis en psicopedagogía para la orientación sobre cómo incluir a los estudiantes en un aula regular lo que implica la manipulación de diagnósticos, elaboración de valoraciones psicopedagógicas, estudio del caso y orientación para el diseño de adaptaciones con base en el DUA y consolidación del PIAR.

Así, desde el acercamiento con la docente de apoyo a la inclusión de la IEA se precisa que sus funciones son asignadas para el acompañamiento de 4 instituciones de orden público con la densidad de estudiantes y condiciones similares a las de la IEA por tanto, la atención y trabajo continuo en una sola institución no es del alcance de la docente a razón de que el acompañamiento semanal lo debe distribuir en las instituciones asignadas sumando las condiciones particulares y casos únicos de diferente nivel de funcionalidad.

El conocimiento sobre los estudiantes diagnosticados con una condición surge de la información presente en el SIMAT donde se condensan las valoraciones psicopedagógicas e historiales académicos. Posteriormente, esa información es triangulada con las apreciaciones del grupo de profesores, psicóloga e historial académico de la IE actual. En tanto, si es el caso de situaciones traumáticas o eventualidades especiales recientes se precisa la necesidad de renovar o no, la valoración psicopedagógica lo que implica documentación e intervención de más especialistas. Además, la relación con los docentes y psicóloga de la IE es primordial para la identificación de estudiantes que no tienen indicios de una NEE pero si una situación vulnerable o afectación traumática que requiere de adaptaciones temporales.

Cabe mencionar que, desde la perspectiva de la docente de apoyo a la inclusión, sería conveniente el acercamiento a los estudiantes diagnosticados durante el desarrollo de las clases para poder identificar ritmos de aprendizaje, barreras y habilidades con el fin de que las estrategias sean acordes a la caracterización del estudiante sin embargo, las horas de acompañamiento en la IE para la atención a estudiantes con NEE desde transición hasta undécimo es limitado, en palabras de la docente, “la realidad es otra y se hace lo que se puede”.

Por otro lado, la valoración psicopedagógica se realiza a partir de la Resolución 113 de 2020 y la construcción de estrategias y elaboración del PIAR con el apoyo del Decreto 1421 de

2017 y las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017); de tal modo que, las adaptaciones para los estudiantes con NEE se realiza de forma general (todas las asignaturas) y particular para asignaturas o temáticas según convenga.

Siendo así, para el aula de matemáticas, la docente titular recibe las orientaciones de la docente de apoyo a la inclusión sobre las consideraciones pertinentes sin embargo, dichas modificaciones pueden ser concebidas, modificadas o ampliadas según el punto de vista de la docente titular y desempeño del estudiante en la clase de matemáticas.

Adicionalmente, un aspecto relevante que la docente de matemáticas menciona acerca de la inclusión en el aula es el cuidado que debe tener con el abordaje de competencias, logros y objetivos de aprendizaje de los estudiantes con un diagnóstico pues, no pueden reflejar los mejores ni los peores resultados comparados con la media del grupo, para evitar problemas con los padres de familia y directivos al creer que se subestiman o desvaloran las habilidades del estudiante. Esto muestra la poca importancia que le dan al conocimiento de las habilidades del estudiante, la sobrevaloración de las condiciones de NEE o condición particular y la pobreza que se tiene sobre el proceso de inclusión en el aula regular.

4.1.2. La muestra

Desde el acercamiento a dicha institución educativa se reconoce que es un espacio pertinente para la investigación desde el reconocimiento inmediato de todas las necesidades y diversidad inherente en el aula ya que, a partir de observaciones participativas e implementaciones que se realizaron en años anteriores, se evidencia que factores socioeconómicos, familiares, sociales y personales de los estudiantes, que acceden a dicha institución, particularizan la realidad de cada individuo convirtiéndose en una problemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Factores como la pobreza extrema, NEE, diversidad cultural, entorno familiar, entre otros.

De manera particular, se selecciona como sujetos de estudio un grupo de noveno grado conformado por 38 estudiantes, 13 mujeres y 21 hombres, de los cuales asisten regularmente 35 estudiantes, 2 cuentan con un diagnóstico de NEE, TEA y DI y uno con trastorno de aprendizaje identificado con Dislexia y Alexia.

4.2. Orientaciones técnicas, didácticas y pedagógicas para la inclusión

En este apartado se pretende precisar las orientaciones generales y particulares desde referentes nacionales e internacionales para la inclusión educativa lo que incluye aportes sobre la inclusión en el aula de clase de matemáticas a partir de experiencias de investigación acción. Las orientaciones serán tenidas en cuenta en el diseño de adaptaciones curriculares orientadas a propiciar el aula inclusiva de matemáticas.

En primera medida se presentan los enfoques didácticos para la adaptación curricular desde el DUA y el PIAR. Posteriormente se exponen orientaciones para la atención a la diversidad en el aula de matemáticas distinguiendo NEE, condiciones específicas o poblaciones vulnerables.

4.2.1. *Ritmos de aprendizaje*

Desde los principios de relativismo epistemológico y resignificación progresiva que establece la TSME para la investigación en educación matemática se reconoce la CCM desde quien aprende y experimenta la matemática pues, la realidad individual de la persona, desde todas las dimensiones que precisan la heterogeneidad influyen y significan el conocimiento. En el mismo sentido, la educación inclusiva y el DUA indican la importancia de valorar las diferentes ritmos de aprendizaje para fomentar prácticas flexibles y adaptables, donde el docente actúa como mediador del conocimiento. Por lo tanto, se hace importante definir que son los ritmos de aprendizaje, ya que se convierte en una forma de identificar la diversidad de razonamiento del

estudiante en clase de matemáticas y establecer una orientación sobre el alcance de objetivos de aprendizaje desde sus habilidades. A continuación se define y describen los ritmos de aprendizaje a partir de Gallegos e Illescas (2017).

El ritmo de aprendizaje refiere a la capacidad que tiene un estudiante para receptar un nuevo aprendizaje de forma rápida o lenta, lo que incluye elementos que inciden en el rendimiento académico es por ello por lo que, cada estudiante procesa la información según su capacidad, motivación, ambiente y guía que el docente le brinda para su aprendizaje (Promebaz, 2008 y Bedoya, 2007 citados por Gallegos e Illescas, 2017). No obstante, el ritmo de aprendizaje de un estudiante no se asocia directamente a poseer o no, una NEE.

Luego, existen factores que determinan los ritmos de aprendizaje como: los fisiológicos, relacionados con el entorno familiar del estudiante, características físicas y de salud: factores psicológicos como la motivación, atención, percepción y memoria y; el entorno de aprendizaje que responde a factores ambientales. Por consiguiente, se ratifica la importancia de la caracterización del estudiante con ánimos de identificar los ritmos de aprendizaje y tomarlo como punto de partida para una respuesta educativa frente a la diversidad del grupo.

Se dice que un estudiante es de *ritmo de aprendizaje lento* si presenta dificultad para procesar, retener y recuperar información. Además, requiere de mayor tiempo y apoyo para comprender y captar nuevos conocimientos. Comúnmente, los estudiantes que poseen este ritmo de aprendizaje se caracterizan por poseer niveles bajos de estructuras cognitivas de acuerdo con el nivel académico, timidez, poca participación, baja motivación para aprender y requieren de la repetición de instrucciones.

Por su parte, el *ritmo de aprendizaje rápido* precisa la capacidad de adquirir conocimientos de forma breve e instantánea, usa menos tiempo del establecido, aprende y realiza procedimientos

habiéndolos realizado una sola vez, no requiere mayor orientación para comprender una actividad y generalmente, está en la capacidad de realizar actividades de forma autónoma es decir, el apoyo del docente es escaso o nulo. De tal modo que, los estudiantes que poseen este ritmo de aprendizaje se caracterizan por tener buena capacidad de observación y memorización, facilidad para motivarse y, aprecian los retos y la posibilidad de profundizar o estudiar nuevas condiciones en la situación. Sin embargo, en ocasiones pueden manifestar impotencia, frustración, intranquilidad y desconfianza frente al ritmo de aprendizaje de sus pares.

Finalmente, los estudiantes con *ritmo de aprendizaje moderado* se encuentran en la media del grupo, realizan actividades en el tiempo determinando, retienen información y alcanzan los objetivos básicos propuestos para la actividad.

4.2.2. Enfoques didácticos para la adaptación al currículo

Como se indicó en el apartado de Antecedentes, el decreto 1421 de 2017 define fundamentos como el Diseño Universal de Aprendizaje [DUA] y el Plan Individual de Ajuste Razonable [PIAR], esenciales para tener en cuenta en la inclusión escolar. De tal manera que, en este apartado se pretende describir a grandes rasgos cada uno de ellos y los elementos más importantes que se tendrán en cuenta en el diseño de la situación de aprendizaje.

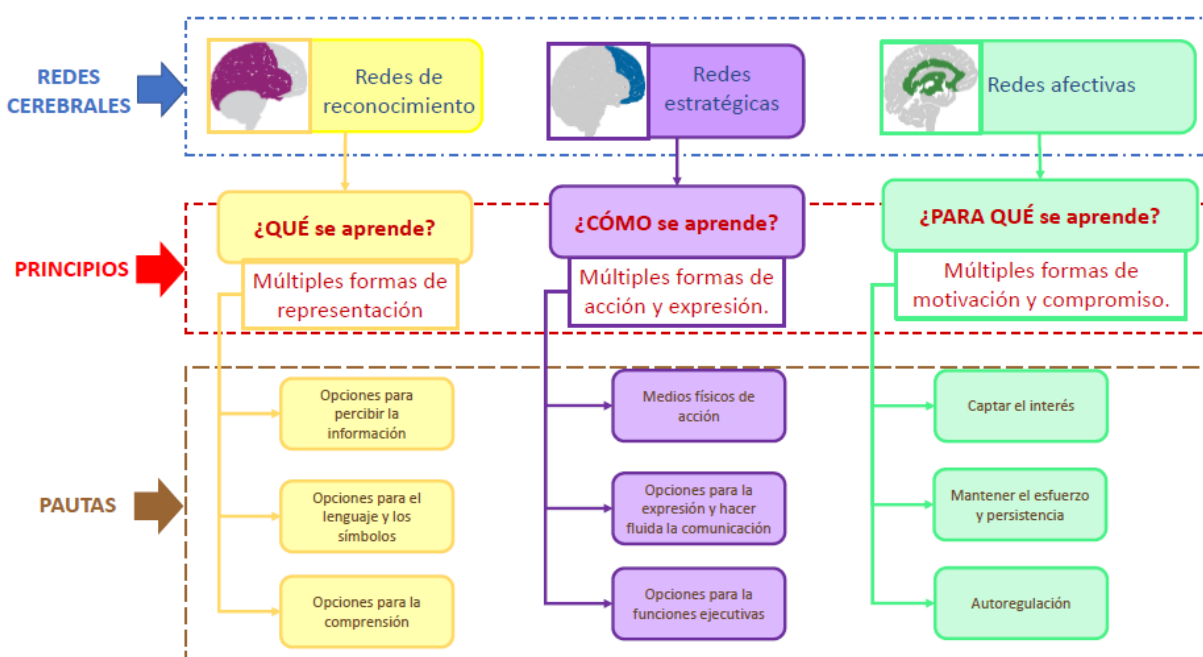
Diseño Universal para el Aprendizaje. El DUA es un enfoque basado en la investigación para el diseño del currículo, es decir, objetivos de aprendizaje, metodología, recursos, herramientas evaluativas y demás elementos inmersos en el proceso de aprendizaje del estudiante (Alba et al., 2014) al resaltar que las precisiones del diseño no solo benefician al estudiante con alguna condición sino, a todos los estudiantes del grupo desde su universalidad.

Al hablar del proceso de aprendizaje y la construcción de conocimiento se pone en juego el desarrollo cognitivo en particular, estructuras mentales que se potencializan. Es por ello, que el

DUA se preocupa por reconocer cómo funciona la estructura modular del cerebro considerando la diversidad neurológica en las personas que, a partir de los investigadores del CAST, se distinguen tres tipos de subredes cerebrales que se especializan en tareas específicas del procesamiento de información y ejecución.

De tal forma que el DUA propone tres principios relacionados con cada una de las subredes principales y en general 9 pautas para tener en cuenta en la adaptación curricular para la atención a la diversidad. En el esquema que se muestra en la figura 4 se resumen los principios y pautas del DUA.

Figura 4. Principios y pautas del DUA.



Nota. Elaboración propia con base a Alba et al (2014).

Cabe destacar que, para mayor profundidad, cada una de las pautas cuenta con una serie de subpautas que complementan la garantía del principio.

Plan Individual de Ajuste Razonable. El PIAR es una herramienta que busca garantizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes a partir de ajustes razonables como

adaptaciones al currículo, modificaciones estructurales, gestión escolar y demás, basado en la valoración pedagógica y social del estudiante y, su necesidad educativa específica (Fundación Saldarriaga Concha, 2019a). Además, es un elemento necesario en la planeación del docente que se elabora cuando el DUA no ha sido suficiente para garantizar la inclusión educativa.

Es importante aclarar que el PIAR debe estar articulado al Plan de Mejoramiento Institucional al consolidarse como una herramienta dirigida a estudiantes con discapacidad, dificultades de aprendizaje y para quien se vea necesaria la atención especial. Su elaboración se realiza en conjunto con la comunidad educativa (maestros, directivos, padres y estudiantes) y se sugiere que sea de manera regular, cada 3 meses, con el fin de responder a las necesidades específicas del estudiante y sus avances. En tanto, el MEN precisa que la IE debe garantizar la elaboración, desarrollo, seguimiento y evaluación del PIAR (MEN, 2017b).

La Fundación Saldarriaga Concha, encargada de orientar a Maestros por la Inclusión, precisa que el PIAR es una herramienta que permite a los maestros conocer a sus estudiantes desde lo pedagógico y social, porque brinda la posibilidad de identificar las barreras en el contexto que limitan la participación y el desarrollo autónomo del estudiante. De tal modo que, el PIAR no busca remplazar el diagnóstico del estudiante, ni ser una “check list”, sino una herramienta que permita conocer y plantear los ajustes necesarios cuando el DUA no es suficiente para llegar a todos los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, la Fundación Saldarriaga Concha (2020b) propone 5 pasos para la elaboración del PIAR:

1. Conocer las orientaciones del PIAR desde el MEN
2. Realizar la descripción de los entornos: información sobre el hogar, historia escolar y espacios sociales para reconocer la realidad donde se desarrolla y participa el estudiante.

3. Identificar las características del estudiante: conocer las habilidades, intereses, expectativas y particularidades de los estudiantes.
4. Plantear los ajustes razonables.
5. Generar recomendaciones y compromisos.

4.2.3. Orientaciones para la atención a la diversidad en el aula de matemáticas

Diversas publicaciones del MEN, organizaciones estatales de otros países, fundaciones y demás documentos han divulgado orientaciones técnicas, pedagógicas y didácticas para la inclusión de estudiantes con discapacidad; sin embargo, centran la atención en una discapacidad o comunidad en específico.

Siendo así, se ha indagado y consolidado orientaciones, recomendaciones, sugerencias y apreciaciones presentes en tales documentos y en publicaciones académicas de investigación en educación inclusiva y matemáticas para diversidad en el aula, organizadas por grupos con características mayormente recurrentes; no obstante en este apartado, se hace énfasis en las NEE y condiciones específicas con diagnóstico o indicios en la población de estudio: Trastorno del Espectro Autista, Discapacidad Intelectual, Discapacidad visual (deficiencias visuales), Discapacidad psicosocial, Trastornos de aprendizaje (en particular, Dislexia y alexia).

Trastorno del Espectro Autista [TEA]. El TEA se define como un conjunto de trastornos del neurodesarrollo que afecta habilidades específicas relacionadas con el reconocimiento y comprensión social, comunicación y comprensión pragmática y, flexibilidad mental y comportamental (MEN, 2017). Entre las características más frecuentes se encuentran:

- Relaciones sociales recíprocas: dificultades relacionadas con la comunicación no verbal, la formación de amistades y reciprocidad emocional.

- Comunicación y comprensión pragmática: dificultad para adecuar intereses conversacionales, tendencia a entender de forma literal e ignorar las opiniones de los demás.
- Flexibilidad comportamental y mental: dificultad con la adherencia de patrones repetitivos y restringidos de actividad, preocupación obsesiva por ciertas actividades e inflexibilidad en cambios de rutina.

A partir del MEN (2017) y, Merino y García (2017) se resaltan las siguientes recomendaciones:

- Dar instrucciones claras y cortas, en ocasiones es necesario primero darlas de forma general y luego en particular al estudiante.
- Instrucciones paso a paso. Evitar la sobrecarga verbal.
- Permitirles estar solo cuando lo prefiera pero, fomentar espacios donde se incentive el trabajo grupal.
- Separar las tareas en pasos pequeños o presentarla en diferentes formatos.
- Anticipar y justificar los cambios de rutina.
- Posibilitar las respuestas no verbales como señalar, encerrar o construir.

Brodzeller et al. (2018) recopila algunas orientaciones para la implementación y adaptación de entornos inclusivos para estudiantes con TEA, relacionadas con el análisis de tareas paso a paso, gráficos de ubicación, organización en el aula, apoyos visuales, intervención basada en antecedentes, apoyos sensoriales, instrucciones claras y concisas y elementos para evitar las alteraciones como auriculares. Además, Arciniegas y Acevedo (2019) indican que incentivar y estimular el logro o avance del estudiante beneficia la confianza y el mejor desempeño de la

actividad. Considerando actividades que fomenten la participación del estudiante, la construcción y descubrimiento en el aprendizaje de manera que los estudiantes con TEA se sientan más motivados y se muestren más creativos (Díaz y Andrade, 2015).

Abordaje en el aula de matemáticas. En la revisión de literatura se encuentra que los estudiantes con TEA requieren de un proceso a largo plazo para alcanzar la etapa final de hechos numéricos y algorítmicos. Además, es necesario el apoyo de recursos visuales y representaciones que faciliten el desarrollo de significados sobre las operaciones incluso, desde la puesta en escena, se concluye que el uso del lenguaje aumentativo (el uso de gestos, expresiones faciales, símbolos, ilustraciones e incluso, el uso de aparatos electrónicos que incluyan dibujos, simulaciones y símbolos) favorece la comunicación y aprendizaje del estudiante (Polo-Blanco et al., 2018). De hecho, Díaz y Andrade (2015) menciona que fomentar la participación del estudiante, construcción y descubrimiento en el aprendizaje motiva y hace más creativos a los estudiantes diagnosticados con autismo.

Discapacidad intelectual [DI]. Las personas con esta condición poseen limitaciones en el funcionamiento intelectual y en la conducta adaptativa relacionadas con las habilidades conceptuales, sociales y prácticas (MEN, 2017). De manera general, las características refieren a dificultades en el proceso de razonamiento, y funciones ejecutivas; sin embargo, para detallar DI superior al nivel “leve” se encuentran dificultades vinculadas al nivel de atención, memoria y habilidades de comunicación y lenguaje, por ejemplo, menor velocidad en el procesamiento de la información o identificar el hilo conductor de la actividad y dificultad en lenguaje expresivo respectivamente.

Las claves indicadas para los estudiantes con TEA se pueden retomar de igual manera para los estudiantes con DI (MEN, 2017) y de acuerdo con el Ministerio de Educación de Guatemala (2006) es posible complementar con las siguientes:

- Mostrar al estudiante lo que tiene que hacer, no solo por medio del lenguaje oral sino también usar estímulos visuales, táctiles, auditivos, entre otros.
- Usar objetos reales para que el estudiante pueda manipular y sentir.
- Reducir las distracciones para ello, se sugiere colocar al estudiante cerca al maestro o compañero de apoyo.

Abordaje en el aula de matemáticas. A pesar de que Miranda (2019) indica que es poca la investigación centrada en el desarrollo del pensamiento matemático para personas con DI, Cardona y Carmona (2012), revisan modelos pedagógicos para la enseñanza de estudiantes con Discapacidad Cognitiva [DC] y concluyen que el estudiante debe tener la oportunidad de hacerse cargo de un problema donde desarrolle habilidades relacionadas con elaborar procedimientos, ponerlos en práctica y según los resultados, adaptarlos, rechazarlos o hacerlos evolucionar, automatizar y ejercer un control sobre los resultados obtenidos. De tal forma que, las actividades del estudiante se orientan a actuar sobre el medio o fórmula para prever o explicar la situación, organizar estrategias, evaluar y reevaluar retroacciones y movilizar y crear modelos implícitos. Además, tanto Cardona y Carmona (2012) como Bruno y Noda (2010) concuerdan que las actividades multinivel posibilitan la flexibilización y ajuste a las necesidades y desarrollo cognitivo del estudiante.

Por otra parte, Schnepel et al. (2019) mencionan que el aprendizaje cooperativo y la adaptación de objetivos de aprendizaje para los estudiantes con DI favorece la instrucción matemática inclusiva.

Discapacidad sensorial [DS]. La discapacidad sensorial radica en la afectación del sentido del habla, visión, escucha o combinación de ellos; por tanto, sus principales características se refugian en el desarrollo y afectación del sentido, en términos precisos se habla de discapacidad auditiva, visual y sordoceguera. En este caso, se hará énfasis únicamente en la discapacidad visual en relación con problemas visuales.

Discapacidad visual [DSV]. Las personas que padecen dificultades relacionadas con la visión se categorizan desde la afectación a partir de criterios como: la agudeza visual, medida de campo visual, percepción de colores, opacidad, estímulos de brillo y contraste y, la movilidad ocular. Por lo tanto, la discapacidad visual no solo refiere a la pérdida total del sentido, también se pueden incluir los errores de refracción u otros problemas visuales que refieren a la deficiencia como dificultad para ver. Algunas de las recomendaciones que propone el MEN (2017) son:

- Identificar los estímulos que puede o no percibir.
- Aprovechamiento de recursos como el braille o tecnología.
- Fortalecer las capacidades de exploración del entorno.
- Uso de descripciones.

Abordaje en el área de matemáticas. Martín (s.f. citado por Navia y Vega, 2019) indica que es necesario comprender que las limitaciones visuales no perturban la personalidad pues, ninguna de las facultades mentales de la persona es afectada por tanto están en la capacidad de crear y potenciar cualquier conocimiento. De hecho, Andrade (2010) precisa que no se reporta relación directa entre la ceguera y el aprendizaje en matemáticas, sin embargo, se indican algunas determinaciones a tener en cuenta por ejemplo, la estimación en cálculo juega un papel importante ya que implica el conocimiento útil de los objetos, su medida, distancia y propia relación respecto a otros, ahora, la relación de lo anterior desde elementos corporales y acceso táctiles en situaciones

reales constituyen una aproximación importante para la habilidad y dominio en la vida diaria. Por consiguiente, para dar garantía de la atención a estudiantes con discapacidad visual toma protagonismo la adecuación de recursos y materiales acordes al estudiante, secuencias didácticas y ritmo de aprendizaje.

Discapacidad psicosocial [DP]. La discapacidad psicosocial es una condición donde se evidencia que las personas ven afectada su vida entonces, presentan paulatinamente dificultades en factores como: la comunicación, comprensión del mundo y participación, a razón del difícil manejo y control de eventos que implican altos niveles de estrés, regulación de emociones o interacciones con otros; por lo cual muchas veces se ven invisibles dando paso a la pérdida de habilidades para el buen desempeño personal y social (MEN, 2017 y, Trigueros, 2019). Entre las principales condiciones se identifican: trastornos de ansiedad y depresivos que son detonados por razones como la separación, fobias sociales o estrés postraumático (MEN, 2017). Por tanto, como esta discapacidad se relaciona con la parte emocional y social se recomienda el fortalecimiento afectivo del estudiante, la valoración de sentimientos y comportamientos y en especial, la sensibilidad y respeto en entornos sociales

Trastornos de aprendizaje. Por otro lado, el Ministerio de Educación de Guatemala (2006) identifica los trastornos de conducta y trastornos de aprendizaje como un solo conjunto de estudiantes renombrados como estudiantes con problemas de aprendizaje para los cuales sugiere las siguientes estrategias de abordaje en el aula como:

- Proponer actividades interesantes y permitir que los estudiantes participen en el diseño o selección de tareas académicas.
- Dar instrucciones claras y precisas (si es necesario, repetirlas).
- Tener en cuenta las emociones del estudiante e incentivar la motivación.

- Evitar la cercanía con distractores y en lo posible, ubicar cerca a los estudiantes.
- El juego es una buena opción para equilibrar las emociones y reforzar la atención.

En particular, *Dislexia* refiere a los problemas que puede presentar un estudiante con el procesamiento fonológico, ortográfico, visual y semántico en la lectura, identificar sonidos y la decodificación (Guerrero, et al., 2022). Además, entre las funciones neurocognitivas deficientes en niños con esta condición se encuentran: el lenguaje (procesamiento fonológico, semántico y sintáctico), atención selectiva, el procesamiento sucesivo, la memoria de trabajo y la percepción (López, 2007; Vásquez, 2022).

En el mismo sentido, una persona con dislexia puede llegar a presentar disfunciones en otras habilidades mentales como el razonamiento, interpretación, análisis y memoria (González, 2021 citado por Guerrero, et al., 2022). De hecho, los estudiantes diagnosticados con dislexia tienen mayor riesgo de padecer otros trastornos de aprendizaje que pueden afectar la comprensión del lenguaje y las matemáticas (Estivil, 2020).

Ahora, sobre el abordaje en el aula de clase, Bachmann y Mengheri (2018 citado por Guerrero, et al., 2022) afirma que, el uso de recursos digitales y fuentes de letra que eviten la confusión de letras similares y el espaciado entre una letra y otra, evitan el hacinamiento lector. Asimismo, la optimización de la presentación del texto a través de fondos de colores parados (contrastes por ejemplo, letras oscuras sobre fondos claros) y más opacos, las frases cortas, el uso de viñetas, énfasis y coloración de palabras clave favorece la comprensión e interpretación de la lectura (Gori & Facoetti, et al., 2015 citado por Guerrero, et al., 2022).

Cabe resaltar que en la revisión bibliográfica, no se encontraron reportes de investigación ni orientaciones acerca del abordaje en clase de matemáticas luego, se ratifica la poca investigación en educación matemática sobre la intervención con estudiantes con trastornos de aprendizaje.

Discusión. Se evidencia que al conjugar e interpretar los enfoques para la atención a la diversidad y las orientaciones nacionales e internacionales desde productos estatales o de investigación en educación matemática sobre cómo guiar la propuesta educativa para el estudiante con una condición en particular, el abordaje en el aula de matemáticas es escaso. Las recomendaciones para el diseño de adaptaciones curriculares y elementos para tener en cuenta en metodologías de instrucción de manera general refieren a la forma de la clase o elementos orquestales, sin hacer precisión en cómo incentivar y guiar la CCM.

En repetidas ocasiones se referencia a la inclusión efectiva desde la “individualización de la enseñanza” dicha cuestión refiere a que las modificaciones deben responder a ello en la medida en que reconocen las diferencias individuales del estudiante, orientadas a generar una inclusión real; además la individualización de la enseñanza mejora el rendimiento, el desarrollo socioeconómico y autoconcepto (Arnaiz, 2008). Entonces, la inclusión en clase de matemática debe tener como pilar fundamental la enseñanza individualizada desde el conocimiento de la persona y la movilización de la actividad matemática al solventar las necesidades, intereses y características particulares, sin pasar por alto la CCM que emerge desde el apoyo y colectividad en el grupo diverso.

Siendo así, los principios y pautas del DUA juegan un papel importante en el diseño de la situación de aprendizaje al ejecutarse como un filtro para poder asegurar la eliminación de barreras de exclusión. Además, las orientaciones para atención a la diversidad se articulan con la caracterización del estudiante y los objetivos de aprendizaje orientados a la CCM, bajo la premisa de que las adaptaciones a los elementos del currículo no beneficiarán a un estudiante en específico sino al grupo diverso.

Por otra parte, es importante precisar que dentro del marco de ejecución de esta investigación no se orienta a la realización detallada de un PIAR para cada estudiante caracterizado en el aula, la idea es reconocer y aceptar que, como se indica en marcos legales, la institución educativa garantiza que los estudiantes que requieren de este plan cuenten con él desde su elaboración consiente con personal de apoyo y comunidad educativa. Sin embargo, en caso de que esto no se cumpla, se establecerán pautas individuales para el estudiante durante el desarrollo de la situación de aprendizaje e intervención para efectos de esta investigación.

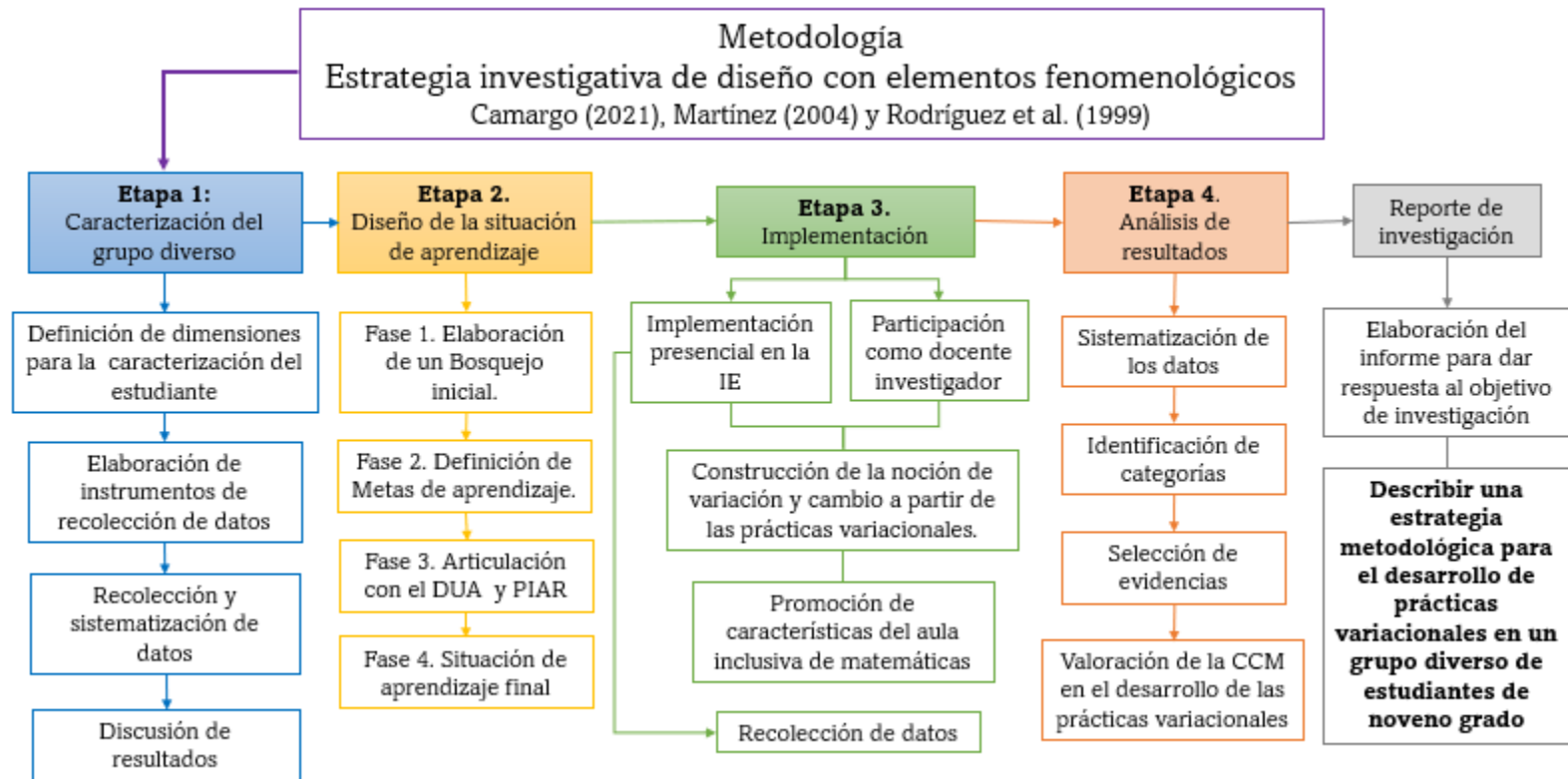
4.3. Etapas metodológicas

Teniendo en cuenta los aspectos teóricos y preliminares de este trabajo de investigación, se concreta un estudio cualitativo de estrategia investigativa de diseño, para el experimento de enseñanza, con elementos fenomenológicos y en concordancia con el objetivo de investigación se definen como etapas metodológicas: etapa 1: caracterización del grupo diverso, etapa 2: diseño de situación de aprendizaje, etapa 3: implementación del diseño y etapa 4: análisis y resultados. La etapa 2 se fundamenta a través del plan de ejecución establecido en la figura 3.

Cabe destacar que, cada una de las etapas alude a un proceso dentro de la estrategia metodológica que se propone alrededor de la pregunta de investigación; por lo tanto, el objetivo de cada una de ellas se relaciona con las características del aula inclusiva de matemáticas en miras de articular todos los elementos necesarios para abordar la problemática de estudio.

Como primer paso para la intervención en la IEA se realizó el acercamiento formal, a través de cartas de solicitud de espacio para la investigación, a directivos de la institución junto con los consentimientos informados a estudiantes (ver Anexo A) para el manejo de datos e información para efectos de la investigación.

En el esquema que se muestra en la figura 5 se precisa el proceso metodológico desarrollado a lo largo de esta investigación.

Figura 5. *Etapas metodológicas.*

En tanto que, la etapa 1 de caracterización del grupo diverso y la etapa 2 de diseño de la situación de aprendizaje, se convierten en núcleos fundamentales para el desarrollo de la investigación, se decidió detallar todo lo relacionado con ellas en los capítulos V y VI.

4.3.1. Sobre la puesta en escena

Esta etapa constituye la acción en el aula inclusiva de matemáticas, al implementar la situación de aprendizaje y poner en juego la instrucción coherente al actuar como docente investigadora, con el objetivo de reflejar las características del aula inclusiva de matemáticas e incentivar y evidenciar el desarrollo de las PV en un grupo diverso.

En un principio, se planeó realizar la implementación en un aula con equipos de cómputo para el trabajo individual de los estudiantes con el uso de GeoGebra pero, pese a los múltiples intentos no fue posible a razón de que la IE cuenta con pocos equipos en buen estado y aulas sin la capacidad necesaria para la magnitud del grupo por tanto, se decidió realizar la implementación en el aula común con el uso de video beams y la manipulación de GeoGebra por parte de la docente investigadora.

La docente titular del curso concedió dos sesiones de clase, de 110 min cada una, para la implementación de la situación de aprendizaje. Por consiguiente, con el fin de aprovechar al máximo el tiempo, las hojas de trabajo del estudiante se entregaron marcadas con los integrantes del grupo y, previo a iniciar la clase se organizó el salón de forma conveniente según lo establecido en la fase 3 del diseño de la situación de aprendizaje y la asignación de sillas izquierdas para los estudiantes zurdos, con el fin de cada estudiante desde sus propias características se sintiera participe de la construcción colectiva del conocimiento matemático a medida que significa y resignifica la matemática. En la figura 6 se muestra la organización del aula de clase.

Figura 6. Organización del salón de clase.



En la primera sesión de implementación no asistieron Est21 y Est33 y en ambas sesiones no estuvo presente Est15 por su proceso intensivo de recuperación a la adicción.

En tanto, se usaron dos videograbadoras, una grabadora de audio y un cámara telefónica para la recolección de datos. Así, se obtuvieron como evidencias informativas: videograbaciones, grabaciones de voz, fotografías y hojas de trabajo de los estudiantes.

4.3.2. Análisis de datos

Esta etapa busca identificar descriptores alrededor de las PV y las características del aula inclusiva de matemáticas. De tal modo que, el objetivo es evidenciar los argumentos variacionales que construyeron los estudiantes alrededor de la variación constante; teniendo en cuenta el sentido a aportó cada una de las etapas anteriores, para que el grupo diverso logrará trastocar el conocimiento matemático en la solución de la situación de aprendizaje.

Los instrumentos de recolección de datos en esta etapa fueron la transcripción de grabaciones, sistematización de respuestas de los estudiantes en el desarrollo de las PV en cada momento de la situación de aprendizaje y la organización según descriptores y patrones identificados en los argumentos variacionales correspondientes a las metas de aprendizaje en los tres ritmos de aprendizaje establecidos. El análisis se fundamenta inicialmente en el trabajo

individual del estudiante considerando las características del aula inclusiva de matemáticas como influyentes en el razonamiento y significación del conocimiento matemático. Por ende las contribuciones precisan el desarrollo de las PV en la identificación del comportamiento lineal del consumo de datos de WhatsApp y Facebook, la predicción de estados para cada aplicación y en el estudio de un comportamiento no lineal.

4.4. Instrumentos de recolección de datos

4.4.1. *Revisión de documentos*

Desde las directrices para la atención a la diversidad junto con las orientaciones del MEN se precisa la importancia del seguimiento de los diagnósticos y valoraciones psicopedagógicas de los estudiantes con NEE o condición específica. Por tanto, el acercamiento necesario a dichos documentos junto con los PIAR elaborados para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Sin embargo, desde una diálogo inicial con la docente de apoyo a la inclusión de la IE se concretó que no era posible tener acceso a las valoraciones psicopedagógicas de los estudiantes a razón del detalle de información susceptible; no obstante, la profesional accedió a entrevistas sobre datos relevantes para tener en cuenta en la flexibilización del currículo con respecto a los estudiantes reportados.

4.4.2. *Observación participativa*

Según Martínez (2004), en la observación participativa el investigador se acerca a las personas que desea investigar con el fin de responder a preguntas como quién, qué, dónde, cuándo, cómo y porqué alguien hizo algo, teniendo en cuenta el registro de notas de campo en el lugar de los eventos. Cabe destacar que las notas de campo pormenorizadas en el escenario juegan un papel importante a la hora de sintetizar la información en los formatos de observación.

De tal manera que, este instrumento tuvo como propósito identificar desde un ambiente global (grupo diverso) y particular (estudiantes con alguna condición específica), en la clase de matemáticas elementos que reflejarán características en cada una de las dimensiones. Para ello, con base en los referentes de investigación, las orientaciones del MEN (2017) y los objetivos de cada dimensión, se elaboraron una serie de preguntas orientadoras para facilitar la identificación de características relevantes. Las preguntas se muestran a continuación:

1. Contexto y vida familiar del estudiante

- ¿Qué características notorias se observan en el estudiante?
- ¿Cómo se refleja su cultura?
- ¿Qué y cómo las condiciones de su contexto familiar se reflejan en el aula?

2. Habilidades intelectuales

- ¿El estudiante se distrae con facilidad? ¿Qué factores ocasionan la distracción?
- ¿Se identifican estudiantes con focos fijos de atención por largos periodos de tiempo?
- ¿Cómo se percibe la atención a distintas fuentes de estímulos? ¿El estudiante es capaz de tomar apuntes y atender a la explicación del docente a la vez?
- ¿El estudiante logra atender varias fuentes de estímulos sin perder el hilo de la tarea en curso? (el discurso del profesor, los apuntes en el tablero, etc.).
- ¿El estudiante desarrolla actividades sin perder el hilo? por ejemplo, ¿logra seguir una secuencia de pasos dentro de un procedimiento global?, ¿se hace necesario repetir las orientaciones de la actividad a desarrollar?

- ¿Qué habilidades de argumentación individual y conjunta se observa en los estudiantes, en general y en particular cuando resuelve ejercicios o problemas planteados?
- ¿El estudiante se desenvuelve con fluidez cuando se dirige al docente o compañeros?
- Si el docente cuestiona, ¿el estudiante recuerda con facilidad conocimientos previos?
- ¿Qué vías de comunicación usa el estudiante?
- ¿El estudiante maneja una red de conceptos que evidencian dominio del tema y relación con la experiencia personal?
- ¿El estudiante identifica rápidamente regularidades en el comportamiento del fenómeno de estudio?
- ¿Qué procedimientos matemáticos usa correctamente y cuáles requieren de más atención para su apropiación?
- ¿El estudiante organiza, jerarquiza y relaciona conceptos sobre un tema ya conocido?
- ¿El estudiante lee con fluidez? ¿Identifica argumentos e ideas principales en lo que lee y realiza inferencia de los textos?
- ¿Las ideas que expresa reflejan un hilo conductor?
- ¿El estudiante es flexible ante los cambios e imprevistos?
- ¿El estudiante busca el monitoreo o seguimiento continuo de sus acciones?
- ¿El estudiante identifica sus propios errores y planea una estrategia para corregirlo?

3. Conducta adaptativa y desarrollo personal

- ¿Cuál es la actitud del estudiante frente a la clase de matemáticas?
- ¿Cómo es la reacción del estudiante cuando un compañero le ofrece/solicita ayuda?
- ¿Cómo reacción el estudiante cuando el docente/compañero le realiza una corrección?
- ¿Cuál es la actitud del estudiante frente al logro de un compañero?
- ¿Cómo es el trato del estudiante con un compañero que posee una característica específica?
- ¿El estudiante realiza la mayoría de las actividades de forma independiente?
- ¿Se evidencia en el estudiante un hábito de estudio?
- ¿El estudiante usa algún complemento para la ejecución de los sentidos o movilidad?
- ¿El estudiante muestra destreza básica en elementos del cotidiano como: el funcionamiento del reloj, el uso del dinero, la ubicación, etc.?
- ¿El estudiante reconoce los escenarios donde se deben cumplir las normas o no?
- ¿El estudiante tiene adecuadas habilidades para relacionarse con adultos?

4. Participación e inclusión social

- ¿El estudiante cuenta con una tutora personal?
- ¿El estudiante se siente parte del grupo, sin temor levanta la mano, participa en clase o hace intervenciones?
- ¿Cómo es la interacción entre el estudiante y sus pares?
- ¿El estudiante experimenta momentos de discriminación o exclusión?

- ¿Cómo es la actitud del estudiante si es asignado a trabajar en grupo?

5. Adaptaciones a las metas de aprendizaje.

- El docente realiza modificaciones para: el acceso de información, el desarrollo de actividades, alcances de aprendizaje, materiales, ubicación, entre otros, para el desarrollo integral del estudiante durante la clase.
- ¿El docente precisa una trayectoria de aprendizaje diferente para el estudiante?

Por tanto, para la observación participativa se precisa un formato sencillo de diario de campo para la toma de notas en escena, observe la figura 7.

Figura 7. Formato diario de campo.

Diario de campo
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



Datos de Identificación

Asignatura:	Docente:	
Fecha:	Hora de Inicio:	Hora de Finalización:
Observación N°	Tema:	
Objetivo de la clase:		

NOTAS:

Finalmente, con el propósito detallar en la caracterización del estudiante y su participación en el grupo, la observación participativa se distribuyó en dos partes: una de 6 momentos, donde se centró la atención al estudio de un subgrupo de estudiantes según las filas de organización en el aula y 2 momentos para la percepción general del grupo. Cada momento constituyó dos observaciones participativas para la realización de 16 observaciones en total.

4.4.3. Cuestionarios

Esta técnica busca recoger información desde una óptica exploratoria y no en profundidad, al indagar de forma cualitativa en la gama de posibles respuestas que permitan articular un factor de conexión (Rodríguez et al., 1999). En síntesis, el cuestionario se compone de preguntas con opciones de respuesta o abiertas que permitan indagar sobre el estudiante y su entorno con el objetivo de conectar elementos que caractericen la diversidad en el aula. De tal modo que, para su diseño se tuvieron en cuenta las orientaciones para caracterización del MEN (2017) y trabajos como los de Vidarte y Celis (2016), Cardona y Carmona (2012) y, Rueda y Molina (2019).

El cuestionario se aplicó a todos los estudiantes y padres de familia, teniendo en cuenta que los estudiantes identificados a través de los instrumentos anteriores, con alguna característica o condición específica, se les dio especial atención con un cuestionario adicional aplicado a la docente del área de matemáticas, en función de la caracterización de dicho estudiante. A continuación se describen cada una de las dimensiones con las intencionalidades de pregunta para cada uno de los informantes.

Cuestionario aplicado a estudiantes (ver anexo 2)

Contexto y vida familiar: se indaga sobre la identificación personal del estudiante (nombre, edad, fecha de nacimiento), identificación de los padres, número de hermanos, barrio o comuna donde vive y la pertenencia o no a grupo étnico. Además, situaciones difíciles que ha enfrentado la familia y la codependencia o apoyo personal con respecto a la asistencia a psicología, terapia ocupacional, etc., junto con la percepción acerca de si la IE cuenta con espacios acordes para el desplazamiento y desarrollo personal.

Habilidades intelectuales: con respecto a esta dimensión se desea investigar sobre cursos reprobados, fortalezas y debilidades en el aprendizaje y si cuenta o no con ayudas adicionales para el entendimiento y realización de trabajos escolares.

Conducta adaptativa y desarrollo personal: obtener información sobre la rutina del estudiante, gustos, preferencias y perspectiva de sí mismo sobre lo que puede lograr en la IE. Sumado a ello, poder conocer cómo se autoevalúa en relaciones interpersonales y su percepción, reacción y apoyos frente a eventos inesperados y cumplimiento de normas y deberes.

Participación e inclusión social: percepción sobre el trabajo en equipo e individual, sentimientos y particularidades sobre la participación en clase, relaciones y trato personal con compañeros en espacios abiertos y si ha experimentado o no, situaciones vulnerables en la IE.

Adaptaciones a las metas de aprendizaje: conocer la perspectiva del estudiante frente a su ritmo de aprendizaje y actividades diferenciadas durante la clase de matemáticas.

Para la aplicación de este instrumento de caracterización se usaron las herramientas disponibles en formularios de Google.

Cuestionario aplicado a padres de familia (ver anexo 3)

Contexto y vida familiar: con el padre de familia o acudiente como fuente de información se centra la atención en esta dimensión donde se indaga sobre la identificación personal del estudiante (nombre, edad, fecha de nacimiento), barrio o comuna donde vive, pertenencia o no a grupo étnico y estrato socioeconómico; identificación personal de los padres o cuidadores, junto con el nivel máximo de escolaridad alcanzado y ocupación. Además, obtener información sobre la dinámica familiar, si los padres del menor viven juntos o en tal caso, con quien vive el estudiante, relación y ocupación; y, eventos traumáticos por los que ha pasado la familia, y cómo lo enfrentó el menor.

Asimismo, datos del contexto escolar e historial académico del estudiante, por ejemplo, si cuenta con diagnóstico de NEE o condición específica o, por el contrario, si el padre de familia ha notado irregularidades, dificultades o comportamientos que le preocupan y, cómo describiría la vida del estudiante frente a dificultades, limitaciones, capacidades excepcionales y situaciones que le afectan.

Habilidades intelectuales: el objetivo es conocer el nivel de valoración que precisa el padre de familia o cuidador con respecto a preguntas relacionadas con la atención, funciones ejecutivas, memoria, competencia lectora y escritural y, el lenguaje.

Conducta adaptativa y desarrollo personal: indagar sobre la percepción frente a las relaciones interpersonales del estudiante y capacidad de autorregulación.

Participación e inclusión social: información sobre el comportamiento del estudiante con sus amigos y precisar información sobre la participación del estudiante en la IE; además, conocer sobre las razones por las cuales seleccionó la IE, los apoyos que la institución brinda para el desarrollo integral del menor y la sugerencias que le haría.

Adaptaciones a las metas de aprendizaje: indagar sobre los apoyos que el padre de familia o cuidador considera que el docente de matemáticas debería tener en cuenta para el desempeño del estudiante.

Cuestionario aplicado a docente (ver anexo 4)

Contexto y vida familiar: se indaga información sobre quién es el acudiente del estudiante, cómo es la relación con los padres, la situación socioeconómica y si el estudiante está diagnosticado con alguna condición o si hay sospecha de ello. Además, la pertenencia a algún grupo característico y conocimiento de si el menor ha pasado o no por alguna situación traumática.

Habilidades intelectuales: la información suministrada por el docente se profundiza en esta dimensión donde se indaga sobre aspectos relacionados con la atención (selectiva, sostenida y dividida), funciones ejecutivas, memoria, competencia lectora y escritural, lenguaje y procesos matemáticos (razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos).

Conducta adaptativa y desarrollo personal: preguntas relacionadas con las relaciones interpersonales, control de impulsos y emociones y, perspectiva del propio comportamiento.

Participación e inclusión social: se indaga sobre el desempeño del estudiante en trabajo individual y grupal, apoyos personales, reflejo de habilidades y destrezas frente a comportamientos ajenos y relaciones interpersonales en espacios diferentes al aula de clase.

Adaptaciones a las metas de aprendizaje: en esta dimensión se busca recolectar información sobre el seguimiento de instrucciones, la autorregulación del estudiante, ritmo de aprendizaje, metodologías de comunicación y representación, adaptaciones y existencia o no de un PIAR.

Cabe destacar que se elaboró una versión inicial del cuestionario (ver anexo D) donde las preguntas se distinguían en detalle según cada aspecto a indagar; sin embargo, en una entrevista que se realizó a la docente de matemáticas con el fin de conocer la percepción frente a los cuestionarios, la profesional manifestó no creer tener las facultades y conocimiento necesario para responder en detalle a las preguntas por tanto, sugirió el ajuste del formato a las preguntas dejándolas abiertas y generales y así, se establece el cuestionario a aplicar a la docente (ver anexo E). Adicionalmente, indicó no acceder a responder los cuestionarios para todos los estudiantes, únicamente para los tres estudiantes diagnosticados por lo cual se tomó la decisión de que los cuestionarios restantes lo respondería la docente investigadora centrando la atención únicamente

en la dimensión de habilidades intelectuales, estos cuestionario se responderían a la par durante la observación participativa, el formato se muestra en el Anexo F.

Los cuestionarios para estudiantes y docente fueron digitalizados en formularios de Google con el fin de que fueran más accesibles y cómodos para responder. En particular, para el caso de los cuestionarios a aplicar a los padres de familia se realizaron de forma física a razón de la dificultad para el manejo de la modalidad digital y flexibilidad para ser aplicado bajo la orientación presencial.

4.4.4. *Entrevista semiestructurada*

Esta técnica busca describir una situación, evento, hecho o razón a través de la persona entrevistada, con el fin de lograr interpretaciones fidedignas del significado del fenómeno que se está estudiando (Martínez, 2004). De tal modo que, el objetivo fue precisar información en función de las dimensiones de caracterización del estudiante haciendo mayor énfasis en el componente matemático para justificar desde las razones del comportamiento y características del estudiante la manera en cómo se da el aprendizaje en matemáticas, las dificultades y habilidades en general. En tanto, con esta técnica buscó contrastar y complementar la información obtenida en los demás instrumentos de recolección de datos a través de un diálogo más ameno e informal, de tal modo que fue aplicada a la docente de matemáticas y docente de apoyo a la inclusión, con relación a los estudiantes identificados para mayor atención en el aula inclusiva.

CAPÍTULO V. LA CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO DIVERSO. UN REFLEJO DE LA DIVERSIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS.

En esta etapa se realizó un acercamiento a la población de estudio con el propósito de conocer a la persona que aprende, inventa y usa el conocimiento matemático (estudiantes de noveno grado), y así identificar elementos que permitieron describir al estudiante en el grupo diverso.

5.1. Síntesis de elementos teóricos para la caracterización

El MEN (2017) precisa la importancia de caracterizar los estudiantes en el sistema educativo formal para lo cual propone conjugar el modelo multidimensional del funcionamiento humano y el modelo de calidad de vida. Teniendo en cuenta lo anterior y las redes funcionales del cerebro para el aprendizaje que describe el CAST, con relación al DUA, se concretan las dimensiones y su objetivo, como se detallan en la tabla 3.

Tabla 3. Dimensiones de caracterización.

Dimensión	Descripción	Propósito
Contexto y vida familiar	Datos generales del estudiante, núcleo familiar y lo relacionado con el entorno inmediato en que vive. Además, indagar sobre situaciones traumáticas a las que se haya enfrentado individualmente o en familia	Identificar el origen del estudiante, cómo vive y en qué condiciones, para relacionar con factores sociales en riesgo de exclusión.
Habilidades intelectuales	Percepción con respecto al rendimiento académico del estudiante, factores como: atención, proceso matemáticos, competencias de lectura y escritura, memoria, lenguaje y comunicación,	Identificar habilidades que influyen en la CCM; además, la presencia o no de trastornos de aprendizaje.

	funciones ejecutivas y dominio de contenidos específicos.	
Conducta adaptativa y desarrollo personal	Información sobre habilidades conceptuales, sociales y prácticas que orientan una vida autónoma e independiente.	Conectar dichas habilidades hacia el desempeño matemático con relación a contextos de la vida diaria y en su interacción personal y social.
Participación e inclusión social	Reconocer las redes de apoyo y grupos en los que el estudiante participa, cómo se desenvuelve en estos, con qué apoyos cuenta y cómo es su participación allí.	Identificar la participación que tiene el estudiante en la cultura inclusiva, para poder relacionar con estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática en el aula.
Adaptaciones a las metas de aprendizaje	Trayectorias y ritmos de aprendizaje, tipo de estrategias cognitivas y de orientación en la actividad del estudiante.	Identificar las modificaciones curriculares de objetivos, metas, contenidos y demás, que se plantean en atención al estudiante, al reconocer las diferencias como oportunidades para el aprendizaje.

Otro objetivo importante en esta etapa fue identificar cómo se daba la integración en el aula de matemáticas, cuáles eran las barreras estructurales, los comportamientos, reacciones y formas en que respondían e interactuaban los estudiantes frente a compañeros con alguna condición específica. No obstante, la caracterización no se centró únicamente en el estudiante también, en el contexto del ambiente educativo, práctica y cultura inclusiva.

5.2. Recolección de datos y sistematización

La intervención en la IE orientada a la caracterización del grupo diverso se desarrolló durante 4 meses (febrero a mayo de 2022), al realizar acompañamiento en clases de matemáticas dos días en la semana en sesiones de 110 minutos.

Con respecto a la revisión de documentos, a través de la docente de matemáticas se logró el acceso a un solo PIAR correspondiente al estudiante diagnosticado con trastorno de aprendizaje (dislexia y alexia), los demás se encuentran en rediseño y validación de la comunidad educativa por tanto, la docente de matemáticas y docente de apoyo a la inclusión indicaron el respaldo para la descripción de estrategias y adaptaciones usadas con los otros dos estudiantes diagnosticados con NEE.

Por otro lado, las observaciones participativas constituyeron un instrumento valioso para el acercamiento a la vida escolar de los estudiantes durante la clase de matemáticas, la realidad de las situaciones personales que se veían reflejadas en el accionar del estudiante, la interacción frente a sus compañeros con características diferenciadas, la vulnerabilidad frente a los cambios y situaciones en su etapa de crecimiento, entre otros factores eran un reflejo de la diversidad en el aula, lo que permitía consolidarla como un reto mayor desde la contribución del docente encargado. Así, en términos generales se realizaron 15 observaciones, de tal modo que, con los diarios de campo se realizó registro de las descripciones en un documento de Excel que combinaba estudiante y fecha, para finalmente, identificar patrones para la triangulación temporal y así, consolidar una caracterización del estudiante desde la observación participativa.

La recolección de información con los cuestionarios fue un proceso lento pero significativo para el detalle de información relevante sobre los estudiantes. En efecto, los cuestionarios respondidos por los padres de familia corresponden al 79% de la muestra, los respondidos por los estudiantes al 55.5% y la totalidad para lo correspondiente a la docente titular e investigadora. La información recolectada se sistematizó en un documento de Excel que distinguía por dimensiones e informante desde colores representativos para, posteriormente, realizar triangulación por informante y concluir con una caracterización del estudiante desde los cuestionarios.

Con respecto a las entrevistas semiestructuradas como instrumento complementario se consolidaron 8 entrevistas, de las cuales 6 corresponden a la docente titular del área de matemáticas en respuesta a características y datos relevantes de 7 estudiantes identificados con problemáticas particulares además de características sobre el grupo en general. Otra entrevista fue la realizada a la docente de apoyo a la inclusión con el propósito de conocer sobre la inclusión en la IEA junto con elementos relevantes sobre las adaptaciones curriculares para los dos estudiantes con NEE. Por último, a razón de los porcentajes de cumplimiento de los cuestionarios aplicados a padres de familia y estudiantes, se realizó una entrevista a la docente titular para indagar una perspectiva general acerca de 10 estudiantes de los que se tenía muy poca información. De tal manera que, a través de las transcripciones, la información recolectada con este instrumento fue organizada de forma individual en un documento de Excel que combinaba estudiante y dimensión de caracterización y, de forma global, en un documento de Word que distinguía las dimensiones de caracterización con respecto al grupo en general.

Finalmente, al tener la caracterización global e individual desde cada instrumento se realizó una triangulación de instrumentos de recolección de datos para concretar la caracterización del grupo diverso teniendo en cuenta las características y objetivos de cada dimensión.

5.3. Discusión de resultados

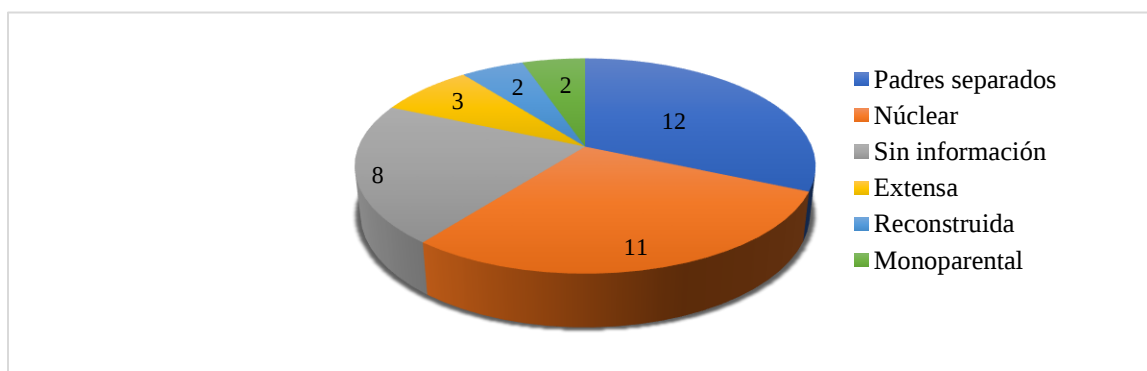
El análisis de los resultados obtenidos en esta etapa se orienta a la identificación del grupo diverso en función de las dimensiones de caracterización de cada uno de los estudiantes de forma global y particular. A continuación se presenta la discusión y resultados para cada una de las dimensiones de caracterización.

5.3.1. Contexto y vida familiar

Los factores de crianza, la posición socioeconómica, y la calidad del medio ambiente así como el origen cultural, la influencia de pares y la confianza en sí mismos influyen en el rendimiento escolar en la adolescencia (Papalia et al., 2012) por tanto, se hace importante indagar sobre factores como: dinámica familiar, situaciones difíciles en el contexto familiar, estrato socioeconómico, situaciones de vulnerabilidad desde el entorno social y escolar y, condiciones diagnosticadas o en sospecha para NEE. Por lo tanto, se describirá sobre cada una de ellas.

La edad de los estudiantes oscila entre 13 y 16 años, en su mayoría de 14 y 15 años entonces, se distingue un grupo característico en la etapa de la adolescencia, donde los menores enfrentan diversos cambios hormonales, de personalidad y conducta frente a situaciones difíciles (Papalia et al, 2012). Al centrar la atención en la dinámica familiar se encuentran 5 tipos: monoparental, padres separados, extensa, nuclear y reconstruida, observe la figura 8.

Figura 8. *Dinámica familiar.*

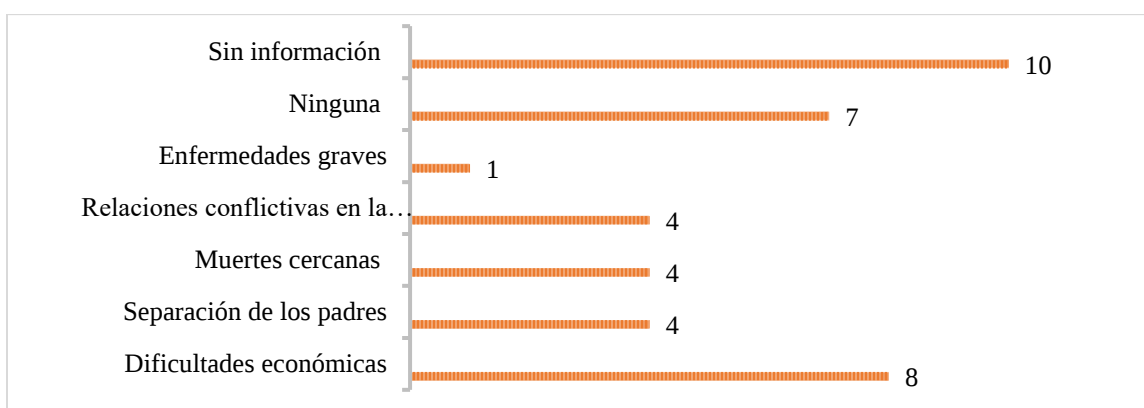


La mayor parte de los estudiantes se encuentran en una dinámica de padres separados y familia nuclear al distinguir que los primeros mencionan tener buenas relaciones interpersonales lo que se refleja en la atención y apoyo de los padres en el ambiente escolar. Por el contrario, en los estudiantes de familias monoparentales, por muerte de uno de los padres o abandono prematuro

se encuentran falencias afectivas, ya sea por la poca confianza, escaso tiempo de calidad o dificultades económicas por la sobrecarga laboral del progenitor.

En relación con las situaciones difíciles en el contexto familiar se distinguen las dificultades económicas, la separación de los padres, las muertes cercanas, las relaciones conflictivas con miembros de la familia y enfermedades graves del estudiante; resaltando que se identifican 7 estudiantes sin ninguna de estas condiciones, observe la figura 9.

Figura 9. *Situaciones difíciles que ha enfrentado la familia.*

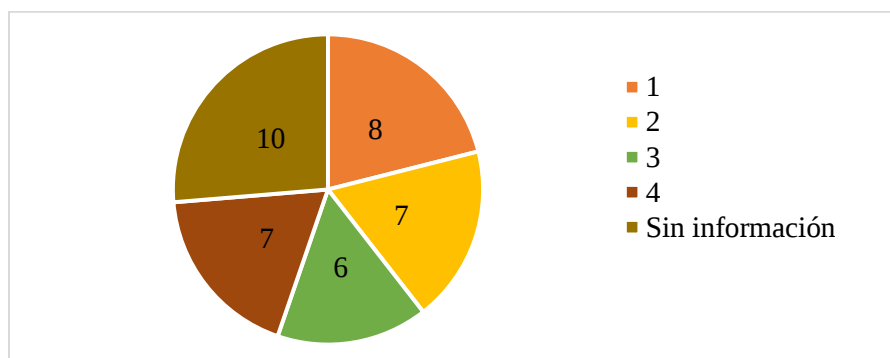


En particular, los estudiantes que han pasado recientemente duelos por muertes cercanas, todas de ellas se relacionan a afectaciones que trajo consigo la Pandemia del COVID-19. Además, para distinguir los 4 estudiantes que aquejan la separación de los padres como situación difícil se comparó con datos temporales para relacionarlo con situaciones recientes que afectan el actuar del estudiante; por consiguiente, la relaciones conflictivas y difícil comunicación con los padres caracterizan a este grupo. En relación con las demás situaciones se referirá en párrafos posteriores junto con otras particularidades.

Sobre los estratos socioeconómicos, en Colombia se diferencian según la capacidad económica de las familias indicando que los estratos 1, 2 y 3 corresponden a las familias con menores recursos y el estrato 4 el nivel medio que no recibe subsidios por vulnerabilidad

económica ni paga sobrecostos; luego, los estratos superiores refieren a mayor comodidad económica. En la figura 10 se muestra la distribución del grupo.

Figura 10. *Estrato socioeconómico.*



En la figura 10 se observa que la mayoría de los estudiantes se encuentra en estratos 1, 2 y 3, indicando el mayor número en estrato 1 que se distingue como nivel bajo-bajo, de allí las dificultades económicas que se reconocen en la figura 9. En general, esto refleja uno de los elementos sociales que más marca la IEA, la diversidad social, que determina la obtención de útiles escolares, acceso a tecnología y aparatos electrónicos; de hecho, en esta etapa de desarrollo, las dificultades económicas junto con los cambios hormonales influyen en la motivación para el desarrollo escolar aunque, son más llevaderas para los estudiantes en dinámica de familia nuclear (Papalia et al, 2012).

Por otra parte, situaciones de impacto social como el desplazamiento forzado, la afectación por el conflicto armado o la migración son circunstancias que afectan la estabilidad familiar, las oportunidades dentro de la sociedad y el desarrollo integral de cada miembro. Así, en el grupo se identifican 5 estudiantes, 3 de ellos precisan desplazamiento forzado (Est12, Est18 y Est19), 1 afectado por el conflicto armado (Est20) y una estudiante de migración (Est1). Sobre los primeros, no se precisan características vulnerables por integración, asimilación o adaptación en el grupo.

No obstante, Est1, la estudiante proveniente de Venezuela manifiesta que ha pasado por escenas de bullying donde subestiman su capacidad intelectual y personalidad a razón de su procedencia.

Si bien es cierto, los síntomas de depresión aumentan su aparición en la etapa de la adolescencia (Papalia et al, 2012) y en este grupo de estudiantes no es la excepción, algunos padres de familia y docente indican preocupación de indicios de depresión, insatisfacción corporal, ansiedad y bipolaridad; incluso, Papalia et al (2012) señala que en esta etapa de desarrollo la depresión se manifiesta generalmente con la irritabilidad, aburrimiento e insatisfacción continua lo que da razón al desinterés recurrente en el aula de clase. Otra cuestión preocupante es el consumo de drogas, se distinguen 3 estudiantes en esta condición (Est10, Est15, Est21); y, al comparar la información con su situación familiar se hallan patrones relacionados con el escaso tiempo en familia, el abandono, y las relaciones conflictivas.

Finalmente, sobre condiciones diagnosticadas se identifican Est2 y Est4 estudiantes diagnosticados con TEA y DI respectivamente. Además, se distinguen 9 estudiantes con deficiencias visuales (Est1, Est6, Est8, Est14, Est11, Est5, Est15, Est16 y Est17) teniendo en cuenta que únicamente 4 de ellos usan lentes (Est16, Est17, Est5 y Est15); los demás, manifiestan no contar con ellos debido a las dificultades económicas por ende, durante la clase de matemáticas la mejor opción ha sido llegar pronto a la clase para poder ubicarse en los lugares de adelante cerca al tablero.

5.3.2. Habilidades intelectuales

En esta dimensión se precisan factores relacionados con el historial académico del estudiante, percepción de las matemáticas y ayudas que recibe para su desempeño; además, procesos neurocognitivos como la memoria, atención, funciones ejecutivas y la comprensión

lectora y escritural y el lenguaje. Finalmente, se hace énfasis en los procesos matemáticos. Por lo tanto, en las siguientes líneas se discutirán los resultados relacionados con cada factor.

Conocer la percepción del estudiante sobre su desempeño en matemáticas refleja el autoconocimiento sobre fortalezas y debilidades. En particular, se identifican 4 estudiantes que han reprobado años anteriormente: Est3, Est7, Est1 y Est8; teniendo en cuenta que los motivos se orientan generalmente a las distracciones, falta de interés, pereza y “vagancia”, a excepción de Est8, su madre menciona que la razón se debe a su “enfermedad” y falta de atención por parte de la IE.

El caso de Est8 es particular, es un estudiante diagnosticado con trastorno de aprendizaje relacionado con dislexia y alexia; sumado a problemas de columna y varicocele por lo tal, es un niño que requiere de atención constante para no poner en riesgo su salud; además, fue acogido en la IEA a dos meses de haber iniciado el año lectivo y al indagar sobre el historial académico se detallan cambios recurrentes de IE e irregularidades con respecto a la percepción que tiene la madre sobre el proceso de inclusión, generalmente relaciona la inclusión en el aula con la sobreprotección y los privilegios sin tener en cuenta la actitud o disposición del estudiante frente a las diferentes adaptaciones.

Por otro lado, acerca de la percepción general de los estudiantes frente a las matemáticas se precisa que 19 estudiantes la consideran una fortaleza mientras 17, una debilidad. No obstante, 3 de los últimos reciben el apoyo de tutorías en extra-clase, entre ellos, Est8 y Est4.

Con respecto a la memoria se identificaron elementos sobre la retención, memoria de trabajo, memoria a largo plazo y los conocimientos previos. En tanto, se distingue la dificultad de los estudiantes para recordar propiedades básicas y encontrar relaciones con los objetos de estudio actuales; de hecho, la mecanización continua es uno de los mecanismos más usados para consolidar

propiedades; por lo tanto, son muy pocos los estudiantes que recuerdan conocimientos previos y tienen buena capacidad de memoria para las propiedades y algoritmos.

Sobre la atención se detallaron elementos sobre la atención sostenida y dividida así, se identifica que casi la mitad de los estudiantes se distraen con facilidad con elementos del entorno, conversaciones o en especial, con el uso del teléfono; los demás se caracterizan por centrar la atención en el objetivo de la actividad, mantener el hilo conductor y evitar distractores. Entonces, el uso de la tecnología y el teléfono participan como el mayor atractor y distractor de la atención de los estudiantes.

El proceso neurocognitivo relacionado con las funciones ejecutivas se orienta a la ejecución de tareas, la flexibilidad a los cambios y las estrategias de seguimiento y monitoreo. Así, en la diversidad del grupo se identifican pocos estudiantes que planifican las tareas a realizar sin embargo, si logran cumplir con los tiempos estipulados para la actividad. Cabe recordar que, en esta etapa de desarrollo es común la apatía y el desintereses por lo que se observan estudiantes despreocupados por tomar apuntes o establece estrategias de seguimiento por ello, son pocos los que se interesan por revisar el desarrollo de sus tareas, identificar errores, replantear estrategias y reconocer distintos caminos de solución. En particular, desde la condición de TEA de Est2, la flexibilidad ante los cambios no se ve recibida negativamente, el cambio de tareas o rutinas en un principio le confunden y cuestionan pero, con la asesoría pertinente, el estudiante logra adaptarse sin frustración ni alteración.

Acerca de la comprensión lectora y escritural y, el lenguaje se distinguieron elementos relacionados con lectura y escritura fluida, redacción, ortografía, vocabulario, léxico en conversaciones y la comprensión lectora. Por ende, se resaltan estudiantes que toman apuntes de forma concisa, identifican ideas principales y siguen instrucciones escritas sin mayor orientación;

además, la mayoría leen con fluidez y logran mantener conversaciones sobre un tema sin evocar ideas irrelevantes. También, se destaca que algunos estudiantes que regularmente se quedan atrasados en apuntes se debe a las deficiencias visuales teniendo en cuenta que las condiciones del espacio físico complican la ubicación en el aula. Asimismo, Est2 a razón de su condición realiza intervenciones repentinas comentando situaciones similares que, en la mayoría de los casos no perturban sino que, complementan la discusión.

Por último, con respecto a los procesos matemáticos se identifica que el proceso mayormente fortalecido es el de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos que se refleja cuando los estudiantes repiten procedimientos con facilidad y algunas veces razonan sobre ellos sin embargo, algunos replican procedimientos sin dar cuenta de que las condiciones del ejercicio han cambiado. De tal forma que, la representación mayormente trabajada en el proceso de modelación es la algebraica y aritmética, únicamente los estudiantes más destacados logran interpretar y construir diferentes representaciones del objeto matemático. Por la misma razón, el proceso de resolución y planteamiento de problemas es escaso; empero, en algunos momentos se identificó que la mayoría de los estudiantes extraen información explícita del enunciado, no elaboran un plan de ejecución pero si desarrollan el procedimiento más reciente con los datos numéricos y, unos pocos se preocupan por explorar diferentes estrategias de solución, concluir el problema y verificarlo.

En cuanto al proceso de razonamiento, son muy pocos los estudiantes que se destacan por identificar información clave, plantear hipótesis, construir argumentos, justificar afirmaciones matemáticas a partir de eventos sucesivos, argumentar y cuestionar sobre comportamientos cuando los parámetros cambian. De hecho, estos mismos estudiantes reflejan habilidades para explicar, justificar y argumentar ideas, lo que responde al proceso de comunicación.

5.3.3. *Conducta adaptativa y desarrollo personal*

Uno de los objetivos de esta dimensión fue conocer los apoyos que usa el estudiante para su desarrollo personal en tanto, en el grupo se distinguen únicamente deficiencias visuales desde la perspectiva física y sensorial, en tanto, el mayor apoyo es el uso de lentes, en el mejor de los casos.

En relación con las habilidades sociales se identifica que el cumplimiento de las normas y reglas escolares, los estudiantes dan cumplimiento especialmente cuando tienen presente la figura de autoridad; no obstante, la uniformidad no es de su agrado, esto se explica por la etapa de desarrollo donde se encuentran los estudiantes, algunas niñas no están conformes con su apariencia, es común el desacuerdo con la vestimenta reglamentaria, les divierte “llevar la contraria”, buscan experimentar cosas nuevas y son ansiosos por las relaciones amorosas.

Cabe destacar que, los estudiantes diagnosticados no son la excepción, Est2 identifica con claridad el significado de una norma y frente al cambio de escenario en ocasiones le toma tiempo adaptarse a la nuevas reglas del ambiente sin embargo, cuando presenta alteración está se refleja a través de la participación intermitente comentando experiencias similares a las que se discuten. De igual forma, Est4 no presenta dificultad sobre lo mencionado, logra adaptarse rápidamente al ritmo, actividades y conversaciones de sus pares. Por su parte, Est8 durante la clase se muestra muy sereno, callado y pasivo de hecho, en algunas sesiones el estudiante tiende a quedarse dormido sobre su escritorio; no obstante, fuera del aula de clase, es una persona diferente, alegre, entusiasta y activo con juegos y burlas a sus compañeros.

En las relaciones sociales se evidencia que la mayoría de los estudiantes mantienen mejores relaciones interpersonales con sus amigos que con los padres, esto explica uno de los fenómenos identificados en la dimensión de contexto y vida familiar relacionado con las recurrentes relaciones

conflictivas en casa. Siendo así, las redes de apoyo con los amigos se basan en la espontaneidad, confianza y apoyo mutuo; teniendo en cuenta que sobre los trabajos grupales, los estudiantes mencionan que el contraste de habilidades es lo más beneficioso.

Además, al indagar sobre los gustos y actividades extraescolares, se encuentra que la mayoría de los estudiantes son atraídos por la tecnología, el uso de redes sociales, los videojuegos y el deporte; al destacar que, sus expectativas se orientan hacia la independencia, crecimiento personal, “superarse a sí mismo”, ser profesional, “saber enfrentarse al mundo” y “ser una mejor persona”.

5.3.4. Participación e inclusión social

Entre los resultados que se precisan en esta dimensión se resalta: las modalidades de estudio, la percepción sobre la represión de habilidades para la participación, el comportamiento en espacios fuera de la clase, sobre la inclusión en el aula y las situaciones que le han afectado en el entorno escolar.

Al distinguir formas de trabajo individual y grupal, la mayoría de los estudiantes prefieren el trabajo grupal teniendo en cuenta que los estudiantes que prefieren trabajar de forma individual lo justifican desde las malas experiencias con compañeros y la falta de compromiso. En tanto, uno de los mayores motivos para preferir el trabajo grupal responde a la posibilidad de contrastar las habilidades individuales. A pesar de eso, algunos estudiantes mencionan que prefieren no participar por temor a ser molestados; así, se distinguen dos tipos de estudiantes: quienes no dan importancia a las burlas de los compañeros y actúan por iniciativa propia y, quienes prefieren pasar desapercibidos para evitar ser molestados. Por ello, algunos estudiantes mencionan episodios de bullying como situaciones que no quisieran repetir en el entorno escolar.

Sobre el comportamiento fuera del aula de clase, es de resaltar dos estudiantes en particular, Est9 y Est10 quienes se caracterizan por ser activos, intensos y tener reportes de indisciplina en general; sin embargo, sobre los procesos matemáticos se destacan por reflejar varias habilidades cognitivas. A saber, durante el acompañamiento se identificó que cuando los estudiantes reciben atención y se da aprovechamiento de sus habilidades aportan muy buenos razonamientos en la clase de matemáticas, lo que no podría afirmarse sobre su desempeño fuera de la clase. Además, el trabajo en grupo no es beneficioso para ellos ya que tienden a cargar los compromisos al otro compañero y no trabajar.

En particular, al hablar sobre los tres estudiantes diagnosticados y la inclusión en el aula de clase. Se resalta que, Est2 es un estudiante que por su acercamiento con el grupo, desde varios años atrás, refleja adaptación, confianza y desenvolvimiento sin represión, el estudiante participa en clase, se pronuncia cuando algo no le gusta, ayuda a sus compañeros y le agrada realizar las mismas actividades que sus pares. De forma similar, Est4 es un estudiante que no busca ser tratado de forma especial, se integra naturalmente con sus compañeros y le agrada tener funciones logísticas a su cargo. Por el contrario, Est8, si espera un trato particular, no tiene buenas relaciones con sus compañeros, es poco empático y no le gusta trabajar en equipo; de hecho, a sus compañeros no les agrada hacer grupo con él por su indisposición.

5.3.5. Adaptación a las metas de aprendizaje

En esta dimensión se distinguen habilidades de los estudiantes desde su ritmo de aprendizaje con el fin de definir las modificaciones y estrategias necesarias para la inclusión en clase de matemáticas.

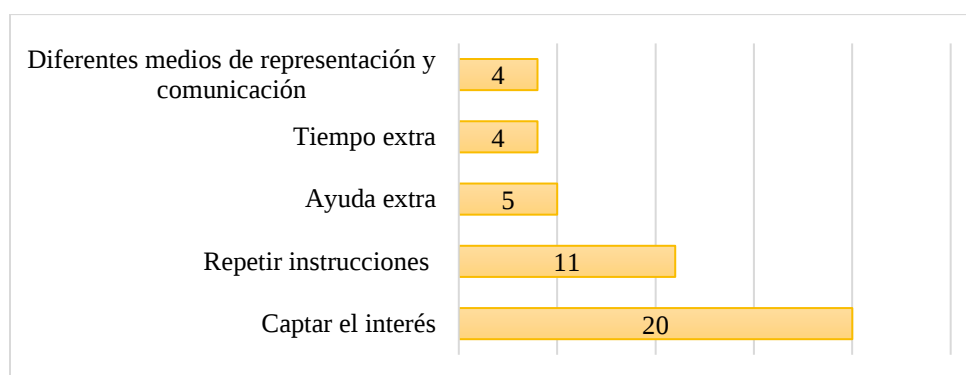
“Los ritmos de aprendizaje se evidencian durante la construcción de conocimientos, resolución de problemas y desarrollo de actividades” (Heredia, 2019, p.25). Por lo tanto, es

importante identificar los diferentes ritmos de aprendizaje en el aula con el fin de asumir competencias que favorezcan una cultura inclusiva basada en el respeto, tolerancia y solidaridad (Heredia, 2019). Siendo así, se distinguen 11 estudiantes de ritmo de aprendizaje rápido que se caracterizan por tener buena capacidad de observación, memoria, dominio de la información y autonomía en la ejecución de tareas; sin embargo, es posible que en ocasiones desconfíen del trabajo en equipo, se frustren o impacienten ante el ritmo de sus pares.

Por otro lado, el ritmo de aprendizaje moderado donde se ubica la mayoría de los estudiantes, 18 de la muestra, se mantienen en la media del grupo, realizan las actividades en el tiempo establecido dando cuenta de los objetivos de aprendizaje. Por último, el ritmo de aprendizaje lento en el que se encuentran 9 estudiantes que comúnmente requieren de mayor tiempo para el desarrollo de las actividades, tienen pocos focos de atención y dificultad para procesar la información y seguir instrucciones. Así, los estudiantes con ritmo de aprendizaje lento y rápido son los que mayormente requieren de adaptaciones curriculares (Gallegos e Illescas, 2017).

Ahora, al indagar sobre las adaptaciones necesarias para favorecer el aprendizaje de los estudiantes se distinguen las que se muestran en la figura 11.

Figura 11. *Adaptaciones a las metas de aprendizaje.*



En particular, los estudiantes que requieren tiempo y ayuda extra, así como diferentes medios de representación y comunicación son aquellos diagnosticados con NEE, trastorno de aprendizaje y Est5, quien evidenció dificultades para la comprensión; de hecho, la docente de matemáticas indica que la menor dice tener una constancia médica de su condición sin embargo, la IE no tiene tal registro por lo tal, se ha sugerido la valoración psicopedagógica y exámenes necesarios para conocer sobre la condición de la estudiante. Además, Est12 requiere de ayuda extra para el seguimiento de instrucción a razón de su dificultad para procesar y comprender la información.

Por otra parte, se suman 6 y 15 estudiantes más, respectivamente, que requieren de la repetición de instrucciones y el uso de estrategias para captar el interés lo que responde a factores identificados en dimensiones anteriores como: la desmotivación, la no identificación de una matemática funcional y la dificultad de conectarse con la actividad.

Cabe destacar que, a pesar de que la docente titular de matemáticas no cuenta con el PIAR actualizado de los estudiantes con NEE, menciona que las adaptaciones que realiza comúnmente responden a la flexibilidad en el tiempo, asesorías complementarias, cantidad de tareas y modificaciones en los objetivos de aprendizaje pues, precisa su alcance en nivel básico mínimo. Además, en cuanto a modificaciones estructurales indica la necesidad de ubicar los estudiantes cerca al tablero con el propósito de estar más pendiente de su proceso de aprendizaje.

Ahora, con respecto al PIAR de Est8, se mencionan como barreras: la dificultad para la concentración, ansiedad, depresión, mayor tiempo para realizar actividades, problemas de concentración cuando lee o escribe, combinación de letras y números, la escritura como sobreesfuerzo, dificultad para la percepción de distancias y ubicación espacial, confusión con el manejo de símbolos matemáticos, problemas para la comprensión de textos, interpretar

información y poca confianza en sí mismo. Por tanto, desde la convergencia en la comunidad educativa se indican las siguientes adaptaciones:

- Uso permanente de gafas.
- Flexibilidad en el tiempo para la ejecución de actividades.
- Adaptación en el tipo de actividades evaluativas, evitar la carga lectora y escritural.
- Permitir el uso de hojas en blanco.
- Evitar las preguntas redundantes.
- Uso de estrategias de representación para resaltar los elementos o ideas importantes.
- Ser concretos en los enunciados e instrucciones.
- Permitir el apoyo de material complementario.

Siendo así, dentro de los compromisos específicos para la clase de matemáticas la docente añade mantener al estudiante cerca al tablero, explicar de forma particular si lo requiere, ofrecer guías o memorias de los temas, acceder al uso de elementos tecnológicos como grabadoras y calculadores y controlar la cantidad de tareas. Empero, se evidencia que a pesar de que el estudiante requiere el uso permanente de los lentes, no los usa.

Para finalizar, durante el proceso de recolección de datos al dar cuenta del uso constante de aparatos electrónicos por parte de Est13 y, la distracción y sabotaje recurrente de Est10, se sugirió la ubicación cerca al tablero lo que benefició notoriamente la atención y desempeño de los estudiantes. De igual manera, Est1 y Est6 fueron reubicados para contrarrestar las deficiencias visuales a excepción de Est14 y Est11 a quienes la docente titular no accedió a su reubicación debido a su estatura.

5.4. Un grupo diverso de estudiantes de noveno grado de una institución pública de Colombia

Teniendo en cuenta la caracterización del grupo a través de las dimensiones y los subgrupos a los que responde la inclusión, establecidos en los aspectos teóricos, se consolida un grupo diverso conformado por:

- Estudiantes con NEE: Est2 y Est4 diagnosticados con TEA y DI respectivamente. Además, Est1, Est6, Est8, Est14, Est11, Est5, Est15, Est16 y Est17 con deficiencias visuales de los cuales, solo 4 estudiantes usan lentes (Est16, Est17, Est5 y Est15).
- Estudiantes con trastornos de aprendizaje: Est8 diagnosticado con Dislexia y Alexia. Además, Est5 de quien hay indicios de dificultades de aprendizaje en matemáticas.
- Estudiantes en riesgo de exclusión: Est12, Est18 y Est19 estudiantes de desplazamiento forzado, Est20 afectado por el conflicto armado y una estudiante de migración (Est1). Adicionalmente, se identifican 3 estudiantes que consumen sustancias alucinógenas (Est10, Est15, Est21) y otros estudiantes en condiciones de pobreza (Est6, Est12, Est3, Est18, Est22, Est7, Est4, Est1, Est11, Est23, Est10, Est24, Est16, Est25, Est17 y Est26).
- Estudiantes típicos sin ninguna de las características de los subgrupos anteriores (Est9, Est13 y Est27 hasta E38)

Así, desde factores físicos, psicológicos, socioeconómicos y culturales se da un reflejo de la diversidad inherente en el aula de matemáticas.

CAPÍTULO VI. DISEÑO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE SOBRE VARIACIÓN CONSTANTE

En esta etapa se describe el proceso mediante el cual se diseña la situación de aprendizaje alrededor de una situación de variación y cambio, teniendo en cuenta la caracterización del grupo diverso y las dimensiones del saber descritas en los aspectos teóricos. Así, se establecieron 4 fases para el diseño de la situación de aprendizaje alrededor de la variación constante en la medida en que se problematiza el saber matemático desde quien aprende. A continuación, se describen cada una de las fases.

6.1. Bosquejo desde la problematización del saber matemático

Esta fase inicial tiene como objetivo problematizar el saber matemático desde la construcción de conocimiento al promover las PV, el estudio de la variación constante y las etapas para una situación de aprendizaje. Así, la situación resultante responderá a la conexión de contextos significativos, la articulación de la matemática conceptual y vivencial para reconocer la matemática funcional y la caracterización del grupo diverso como punto de partida.

Teniendo en cuenta las características del grupo diverso en relación con la memoria y la participación individual y grupal en el aula de matemáticas, las tareas que conforman la situación de aprendizaje no son ejercicios o problemas de traducción literal sino, situaciones que incentivan el trabajo colaborativo, la construcción colectiva del conocimiento y apreciación de las diferentes argumentaciones del estudiante, quien deberá explorar sus conocimientos previos, identificar relaciones, plantear inferencias y justificar la construcción y modificación de ideas que lleven a la solución de la situación.

Así, las tareas variacionales consisten en actividades, acciones o ejecuciones que comparten similitudes en objetivos y contextos en que se desarrollan. De tal forma que, se

caracterizan por el empleo de una o más PV dentro de un mismo contexto de análisis que puede ser numérico, gráfico o analítico (Caballero y Cantoral, 2013). Cabe aclarar que, las representaciones del objeto matemático, desde el proceso de modelación, refieren a lo que Caballero y Cantoral (2013) llaman “contextos” y, para efectos de esta investigación, contexto refiere al entorno de la situación en ambientes cotidianos.

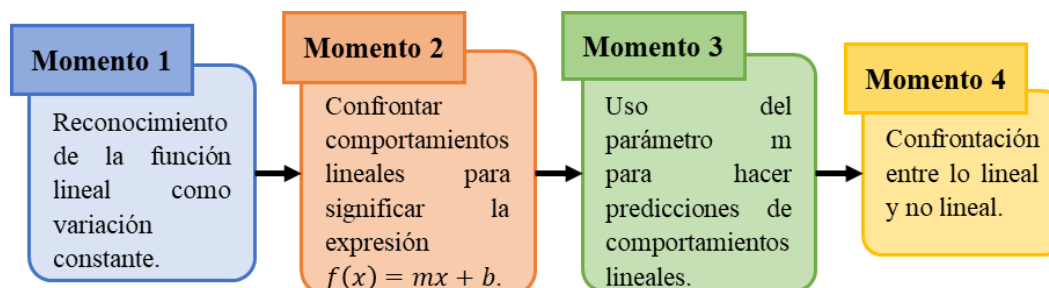
Caballero y Cantoral (2013) distinguen 4 tipos de tareas variacionales:

- Tabulación como variación numérica [TVN]: consiste en proporcionar valores distintos a una variable para observar y analizar sus efectos en cuanto al comportamiento, forma, posición o valor de algún sistema.
- Análisis de datos en tablas numéricas [ADT]: dada cierta información en una representación tabular, se realiza un análisis de esos datos fijándose en patrones de comportamiento y relaciones.
- Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia [CGV]: se basa en la construcción de gráficas a partir del análisis de las variaciones, ya sea por medio de datos numéricos o una gráfica. El objetivo es bosquejar una gráfica que modelo lo más cercano posible la situación.
- Análisis gráfico con la variación como punto de referencia [AGV]: esta tarea se orienta a la búsqueda de patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos en la representación gráfica; de tal modo que, las acciones se dirigen al análisis de variaciones, incluso en gráficas generadas por tecnología.

Por otra parte, Caballero y Moreno (2017) estudiaron el pensamiento variacional asociado al estudio de comportamiento lineales a través del diseño de una situación de aprendizaje en el contexto del llenado de tanques, donde precisa como elementos teóricos: la anidación de prácticas

de TSME y el uso de PV. A partir de allí, como resultado se concretan 4 momentos para el estudio de la variación constante, observe la figura 12.

Figura 12. Momentos para el estudio de la variación constante.



Además, tanto las etapas de la situación de aprendizaje (factual, procedimental y simbólica) como las PV se reflejan en cada uno de los momentos para el estudio de la variación constante teniendo en cuenta que en algunos se hace mayor énfasis en una o dos prácticas más que otras. Las prácticas de comparación y seriación se ven mayormente reflejadas en la etapa factual y procedimental y, la práctica de predicción y estimación en la etapa simbólica.

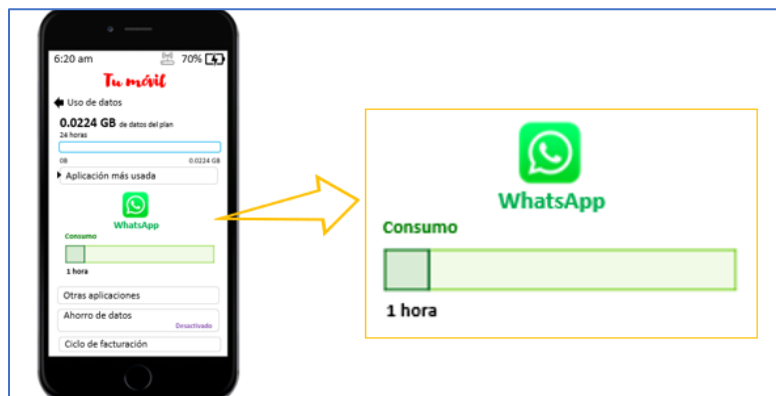
A partir de la caracterización del grupo diverso se precisa la necesidad de orientar y fortalecer los procesos matemáticos más allá del proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos por tanto, al favorecer la atracción de los estudiantes por el uso de la tecnología y dando crédito a las diferentes herramientas para la CCM, el dinamismo, la exploración y la representación que ofrece el software de geometría dinámica GeoGebra, se propone el trabajo conjunto con esta herramienta en tanto, todos los momentos de la situación de aprendizaje, excepto el último, precisan un espacio con el uso de lápiz y papel y otro con el uso de GeoGebra. Además, a partir de la diversidad de ritmos de aprendizajes y dificultades en la comprensión, las preguntas se caracterizan por ser concretas, secuenciadas y complementarias con un objetivo hacia el desarrollo de PV y comprensión de la situación de aprendizaje.

En detalle, a partir de las características de la dimensión de conducta adaptativa y desarrollo personal junto con los elementos que se resaltaron sobre la atención en el grupo diverso, se establece como contexto el consumo de datos de redes sociales (WhatsApp, Facebook, Instagram y Netflix) a razón de la cercanía, familiaridad y toma de decisiones en la vida cotidiana del estudiante. Así, se plantea en el primer momento, el consumo de datos de WhatsApp, donde la atención se centra en identificar la cantidad de datos que consume la aplicación cada hora y asociarlo a la representación gráfica. En el segundo se trabaja el consumo de datos de dos aplicaciones, WhatsApp y Facebook, comparando la velocidad del consumo de datos del plan al variar el consumo por hora. En el tercer momento, se compara el consumo de las dos aplicaciones desde la representación tabular y algebraica, con el fin de predecir cuál aplicación consume más datos. En el último momento se contrasta el comportamiento lineal con la gráfica del consumo de datos de la aplicación de Netflix ajustada a una variación no lineal.

A continuación se describen cada uno de los momentos donde se proponen diferentes tipos de tareas variacionales y complementarias para la construcción de noción de variación constante a través del desarrollo de las PV.

6.1.1. Primer momento

Hace poco tiempo fue lanzada la aplicación “Tu móvil” que brinda información sobre el consumo de datos en las aplicaciones más usadas. En la pestaña “Aplicación más usada” se muestra WhatsApp como protagonista, observa la figura 13.

Figura 13. *Momento 1 - Consumo de datos de WhatsApp.*

1. ¿Qué magnitudes intervienen en el consumo de datos?
2. Marque sobre la imagen qué cantidad de datos habrá consumido la aplicación de WhatsApp al cabo de 4 horas.
3. ¿Cuántas horas tardará en consumir los datos del plan? Explique su respuesta.
4. Realice un bosquejo de la gráfica que muestra la cantidad de datos consumidos al pasar las horas.

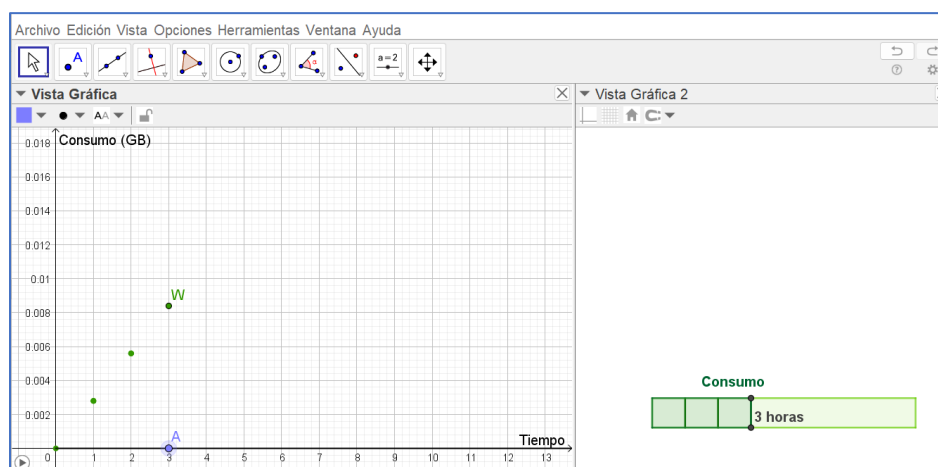
La primera pregunta busca identificar las variables del problema (¿qué cambia?) al reconocer el tiempo (horas) y el consumo de datos (GB) como magnitudes que intervienen en el fenómeno. Para la pregunta 2, se señala en el dibujo la parte en verde con el fin de que sea usada como medida cuantitativa así, se establece una forma de medir los incrementos con base en la longitud del segmento inicial (¿cuánto cambia?). Los trazos deben ser de tal modo que la longitud de la barra sea la misma, lo que lleva a la actividad de comparar el nuevo consumo respecto al referente inicial.

La tercera pregunta, se relaciona con la comparación de barras horizontales sucesivas hasta llegar al extremo derecho de la barra, entonces se articula con la práctica de seriación. Además, los segmentos son contados para predecir el tiempo para el consumo total de los datos del plan (¿cuánto cambia?). Para la pregunta 4, el objetivo es considerar la construcción de segmentos anteriores en la barra inicial para así, con la seriación reflejada en la comparación global del

comportamiento de las variables, se logre concluir que los incrementos son siempre iguales y reflejarlo en el bosquejo en tanto, también se evidencia la anticipación intuitiva de nuevos estados en la gráfica lo que refiere a la práctica de predicción (¿cómo cambia?).

Ahora, la segunda parte del momento 1 se propone con el uso e interacción con GeoGebra. Detalle el applet que se muestra en la figura 14 y las preguntas y tareas variacionales posteriores. Trabajemos con GeoGebra.

Figura 14. Momento 1 – Consumo de datos de WhatsApp - GeoGebra.



1. ¿Qué representa el gráfico que se muestra en la vista gráfica 2?
2. Describa qué pasa cuando se mueve el punto A.
3. ¿Qué representa el punto A?
4. ¿Qué pasa cuando $A=(0,0)$?
5. ¿Cuántos horas tardará WhatsApp en consumir los datos del plan? Justifique su respuesta.
6. Describa qué observa en la pantalla (en la vista gráfica 1) cuando se mueve el punto A.
7. ¿Qué representa el punto W?
8. ¿Qué representan los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?
9. ¿Qué características tienen los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?
10. ¿Qué pasa si el consumo de datos por hora aumenta? Justifique su respuesta.

En este caso, la pregunta 1 tiene como objetivo identificar las variables y cómo cambian en el ambiente dinámico que se muestra en vista gráfica 2 para así, en la segunda pregunta describir

el comportamiento de las variables al reconocer el cambio en el consumo de datos de WhatsApp a medida que varía el punto A, que representa el tiempo como variable independiente (¿cómo cambia?) y, la relación de variación entre las dos vistas graficas.

Si bien es cierto, en el applet de GeoGebra se muestra la nomenclatura de los ejes, en el eje x como conjunto de los elementos que puede tomar la variable independiente, “Tiempo (h)” y el eje y como conjunto de los elementos que puede tomar la variable dependiente, “Consumo (GB)”; en tanto, la pregunta 3 tiene como objetivo comparar lo que se observa en la vista gráfica 1 y 2, que al mover el punto A varía el consumo en la barra que se muestra en la vista gráfica 2 a razón de que ese punto representa la variable del tiempo en horas (¿qué cambia?), que lleva a la variación del consumo.

La pregunta 4 busca que el estudiante identifique que cuando el tiempo no ha transcurrido no hay consumo (¿respecto de qué cambia?). Asimismo, la quinta pregunta tiene como objetivo que el estudiante compare el referente inicial con la longitud de la barra que representa los datos del plan y así, indicar y verificar las horas que tardará la aplicación en consumir la totalidad de los datos (¿cuánto cambia?).

Posteriormente, al hacer visible el punto W en la vista gráfica 1, en la pregunta 6 se solicita al estudiante describir lo que observa al variar el tiempo en tanto, esta pregunta se orienta a reconocer la interdependencia entre las variables al observar el comportamiento del punto W respecto al punto A (¿respecto de qué cambia?). Así, al pregunta 7 responde al punto W como la variación del consumo de datos respecto al tiempo (¿qué cambia?) al comparar el cambio que se observa en las dos vistas gráficas con la ventaja del dinamismo que ofrece GeoGebra. Por consiguiente, se espera que con la octava pregunta el estudiante compare el comportamiento en el

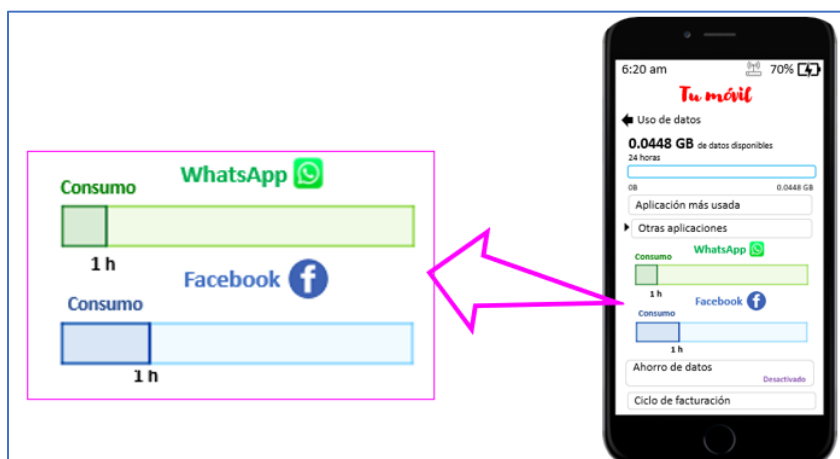
plano cartesiano con la barra inicial (¿cómo cambia?) al reconocer que los puntos representan el consumo de datos en función del tiempo.

Finalmente, la pregunta 9 tiene como objetivo identificar el cambio de forma cualitativa desde la representación gráfica (¿cómo cambia?); por ende, se incentiva la práctica de comparación y seriación. De igual modo, la siguiente pregunta tiene como fin indagar sobre el consumo de datos al modificar el consumo por hora, teniendo en cuenta el acercamiento a la variación del consumo desde la representación pictográfica y gráfica que se dio en este momento; en ese caso, se significa el comportamiento lineal a partir de la pendiente y se promueve la practica variacional de estimación.

6.1.2. Segundo momento

Juliana quiere saber el consumo de datos de las aplicaciones que más usa, WhatsApp y Facebook. En la pestaña “Otras aplicaciones” se muestra el consumo para cada una de ellas, observe la figura 15 y las preguntas posteriores.

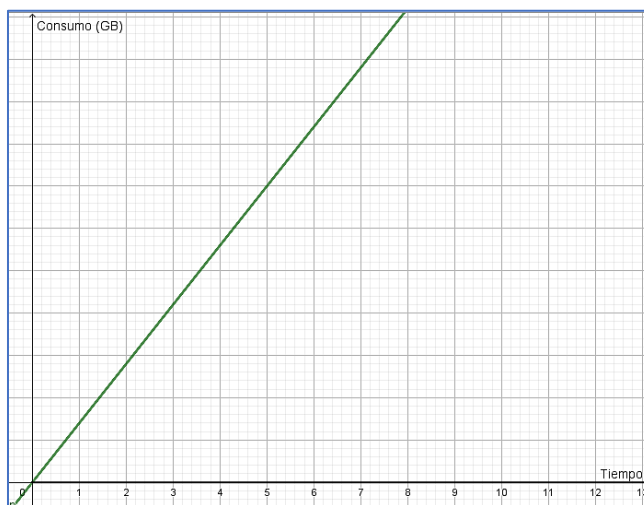
Figura 15. Momento 2 . Consumo de datos de WhatsApp y Facebook.



1. ¿Qué representa el gráfico que se muestra para cada una de las aplicaciones?
2. ¿Qué representa la longitud de la barra en el gráfico de las aplicaciones?
3. ¿Cuántos horas tardará Facebook en consumir los datos del plan? Justifique su respuesta.

4. Bosqueje la gráfica del consumo de datos para cada una de las aplicaciones.
5. ¿Qué diferencia hay entre el consumo de datos por hora para las dos aplicaciones?
6. ¿Cuál de las aplicaciones consume menos datos? ¿por qué?
7. En la siguiente gráfica se muestra el consumo de datos de WhatsApp. Construya la gráfica del consumo para Facebook teniendo en cuenta que su consumo de datos por hora es el doble que WhatsApp.

Figura 16. Para construir gráfica de Facebook a partir de la gráfica de WhatsApp.



Explique los procedimientos que lo llevaron a realizar la gráfica de esa manera.

En el segundo momento se agrega una nueva variable que hace que el comportamiento de las variables iniciales cambie en tanto, la primera pregunta busca la interpretación del consumo de datos (¿qué cambia?) al comparar las dos aplicaciones, WhatsApp y Facebook. De igual modo, en la siguiente pregunta se asigna significado a la longitud de la barra que actúa como otra variable fija.

Ahora, la pregunta 3 indaga sobre el consumo de datos de Facebook de manera similar como se hizo en el momento 1 con la aplicación de WhatsApp, la idea es que el estudiante reconozca el consumo por hora de la aplicación para compararlo con la longitud de la barra que representa la cantidad de datos disponibles y así, indicar cuántas horas tardará Facebook en

consumir los datos (¿cuánto cambia?); en ese caso, se incentiva la práctica de comparación y seriación.

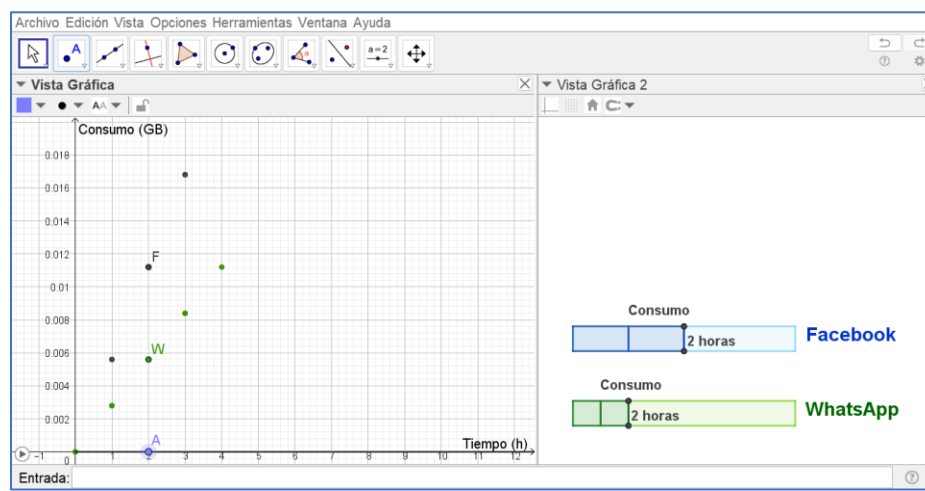
Teniendo en cuenta el consumo de datos percibido a través de las barras horizontales, en la pregunta 4, se orienta al estudiante a construir una gráfica para el consumo de datos de las dos aplicaciones (¿cómo cambia?), al tener presente que el consumo de datos de Facebook es mayor (el doble) que el de WhatsApp, entonces, se incentiva la práctica de comparación y seriación al identificar que el cambio es constante pero diferente en los dos casos del mismo fenómeno. Además, en la siguiente pregunta se solicita diferenciar el crecimiento de la longitud del referente inicial para el consumo de datos del plan de las dos aplicaciones (¿cómo cambia?); así, el estudiante desarrollaría la práctica de comparación al transponer o medir intuitivamente cada uno de los referentes iniciales. De tal forma que, en la sexta pregunta podrá justificar sobre la aplicación que consume menos datos pues, al ser menor el consumo por hora los datos alcanzarán para más horas por tanto consume menos datos.

La pregunta 7 tiene como propósito que el estudiante construya la gráfica del consumo de datos de Facebook dada la gráfica de WhatsApp (¿respecto de qué cambia?). La relación responde a una operación aritmética de duplicar el valor de la altura en cada instante de tiempo y localizar ese valor en el plano cartesiano, es decir, usar la variación en y para generar la variación de la otra aplicación (¿respecto de qué cambia?). En ese caso, se refleja la práctica de comparación cuando el estudiante garantiza que cada altura deba cumplir con la características de ser el doble respecto a la anterior donde los incrementos siguen siendo constantes para cada aplicación; en algunos casos si generaliza la relación gráfica usando la regla como elemento auxiliar se reflejaría la práctica de seriación.

Ahora, con respecto a la segunda parte del momento 2 con el uso e interacción con GeoGebra se presenta el applet que se muestra en la figura 17 y las preguntas y tareas variacionales posteriores.

Trabajemos con GeoGebra

Figura 17. Momento 2 – Consumo de datos de WhatsApp y Facebook - GeoGebra.



1. ¿Qué representa el gráfico que se muestra en la vista gráfica 2?
2. Describa qué pasa cuando se mueve el punto A
3. ¿Qué representa el punto F?
4. ¿Cuántas horas tardará Facebook en consumir los datos del plan? Justifique su respuesta.
5. ¿Cómo describiría el comportamiento del punto F respecto al punto W
6. ¿Qué características resalta del comportamiento de los puntos a medida que pasan las horas?
7. Pedro tiene mayor cantidad de datos disponibles que Juliana ¿cuál aplicación consume menos datos? ¿Por qué?

Con la intervención de GeoGebra se busca un análisis de la representación gráfica y pictográfica del consumo de datos de las dos aplicaciones. Inicialmente, las preguntas 1, 2 y 3 tienen como propósito que el estudiante interprete lo que aparece en la vista gráfica 2 como la variación del consumo de datos para las dos aplicaciones desde el dinamismo que la herramienta facilita. Además, dar cuenta de la variación del consumo de datos de las dos aplicaciones, de

manera simultánea, a medida que se mueve el punto A, como variable que genera el cambio y así, distinguir el punto F como la variación del consumo de datos de Facebook con respecto al tiempo (¿qué cambia?).

Con respecto a la pregunta 4, el objetivo es interpretar el consumo por hora de Facebook desde las dos representaciones para validar con mayor precisión cuántas horas tardará la aplicación en consumir los datos del plan (¿cuánto cambia?), en tal caso se incentiva la práctica de comparación y predicción. De forma similar, al tener más propiedad sobre el consumo de datos de WhatsApp se espera que el estudiante justifique la variación del consumo de datos de Facebook usando argumentos de la variación constante de WhatsApp (¿respecto de qué cambia?).

Luego, en la pregunta 6 al interpretar la representación gráfica y el comportamiento de los puntos que muestran el consumo de datos de Facebook respecto al consumo de WhatsApp, el objetivo es coincidir con las características de crecimiento y posición de los puntos para cada caso (¿cómo cambia?), al destacar que los puntos mantienen una misma distancia horizontal y vertical entre ellos pero, diferente para las dos aplicaciones, por consiguiente se promueve la práctica de comparación y seriación.

Finalmente, se propone la modificación de la variable que había estado fija (los datos del plan) para estimar cómo sería el consumo de datos de las dos aplicaciones; por lo tanto, el estudiante deberá justificar con seguridad que la modificación de dicha variable no afecta la variación del consumo por hora de cada aplicación ni la velocidad de consumo de datos del plan.

6.1.3. Tercer momento

Para más detalle del consumo de datos de WhatsApp y Facebook, se muestra una tabla de datos por separado (ver figura 18). Teniendo en cuenta que el consumo que se muestra es un acercamiento al promedio del uso diario (en horas) de la aplicación.

Figura 18. Momento 3 - Consumo de datos de WhatsApp y Facebook desde la representación tabular.

WhatsApp		Facebook	
Tiempo (h)	Consumo (GB)	Tiempo (h)	Consumo(GB)
1	0.0028	1	0.0056
2	0.0056	2	0.0112
3	0.0084	3	0.0168
4	0.0112	4	0.0224



1. Según la información que se muestra en las tablas de datos ¿cuál de las dos aplicaciones consumirá más rápido las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.
2. ¿Cuál es el consumo por hora de la aplicación de WhatsApp? Justifique su respuesta.
3. ¿Cuál es el consumo por hora de la aplicación de Facebook? Justifique su respuesta.
4. El estudio “We are social” afirma que, en promedio, una persona usa WhatsApp durante 6 horas por día. ¿Cuántos GB se consumen? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.
5. ¿Cómo se puede hallar el consumo de datos de WhatsApp para cualquier hora?
6. Si el consumo de GB por hora para WhatsApp aumenta 0.0012 GB ¿cuántas horas tardará en consumirse las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

El tercer momento centra la atención en el estudio de la variación constante a través de la representación tabular y la relación con las demás representaciones al comparar el consumo de datos de las dos aplicaciones (WhatsApp y Facebook) predecir sobre estados puntuales y estimar el comportamiento en caso de que la pendiente sea modificada. Por ello, la primera pregunta tiene como objetivo que el estudiante construya argumentos sobre la pendiente al establecer diferencias en el consumo de datos de las dos aplicaciones a través de los datos numéricos (¿por qué cambia de esa manera?); en tal caso, la práctica que se incentiva es la predicción; al responder cuál de las dos aplicaciones consumirá más rápido las GB del plan.

En los momentos anteriores se percibió la diferencia en el consumo de datos de las dos aplicaciones de una manera intuitiva, a partir de la representación gráfica. Ahora, en este momento, las preguntas 2 y 3 se orientan a la comparación numérica entre los datos de consumo para así concretar de forma cuantitativa el consumo por hora de cada aplicación (¿cuánto cambia?) a través

de la representación tabular donde se promueve la práctica de seriación. Siendo así, con el fin de argumentar cómo influye la pendiente en la asignación de un valor, en la cuarta pregunta se indaga sobre el consumo de datos de WhatsApp al usar la aplicación durante 6 horas (¿cuánto cambia?). En ese caso, son diversas las estrategias que puede usar el estudiante para predecir el comportamiento en ese estado, ya sea de manera aditiva, multiplicativa u otra, usando los datos del consumo de datos de WhatsApp o la relación con el consumo de datos de Facebook.

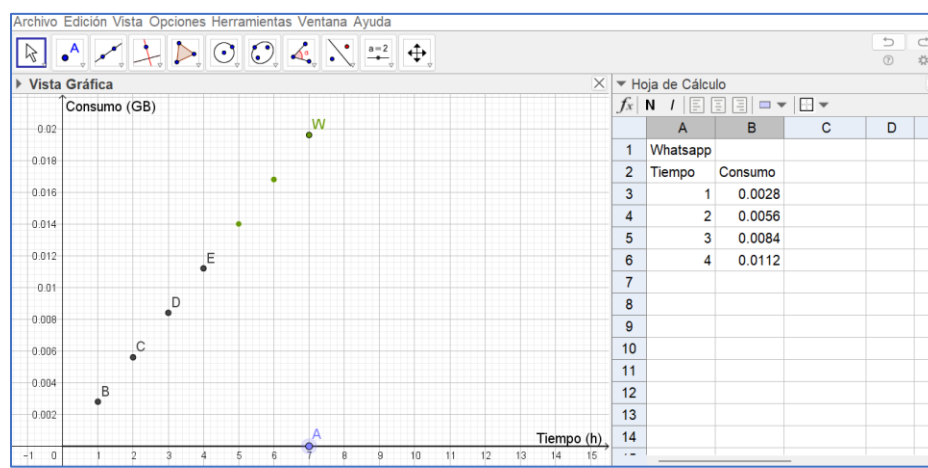
La pregunta 5 tiene como propósito generalizar el comportamiento lineal del consumo de datos de WhatsApp al reconocer la influencia de la pendiente (¿cómo cambia?); en tanto, se incentiva la práctica de estimación donde se evidenciará el nivel de razonamiento del estudiante desde procesos aditivos o multiplicativos para la interdependencia entre las variables. Cabe destacar que, no se espera que todos los estudiantes planteen una expresión algebraica sofisticada sino un acercamiento a ella, tal vez una expresión verbal donde se identifique la operación, la pendiente y relación entre las variables.

Por último, con el objetivo de que el estudiante construya argumentos para justificar el cambio desde la modificación de la pendiente, en la pregunta 6 se indica el aumento del consumo por hora de WhatsApp y se indaga sobre el efecto con respecto al consumo total de los datos del plan, entonces, la práctica que se promueve es la predicción donde los argumentos variacionales se basarán en justificar cómo el aumento en el consumo por hora se traduce en un cambio en la pendiente inicial (¿por qué cambia de esa manera?).

Ahora, con el applet que se muestra en la figura 19 se plantea la segunda parte del momento 3 con el uso e interacción con GeoGebra y las siguientes preguntas y tareas variacionales.

Trabajemos con GeoGebra.

Figura 19. Momento 3 - Consumo de datos de WhatsApp desde la representación tabular y gráfica - GeoGebra.



1. ¿Qué representan los datos que se muestran en la hoja de cálculo?
2. ¿Qué característica observa entre un punto y otro?
3. ¿Cómo ubicaría el consumo de datos para 5 horas? ¿Dónde?
4. ¿Cómo ubicarías el consumo de datos para 3.5 horas? ¿Dónde?
5. Complete la tabla, hallando la diferencia consecutiva entre los valores de consumo.

Tabla 4. Variación del consumo de datos de WhatsApp desde la representación tabular.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia	
1	0.0028		
2	0.0056		
3	0.0084		
4	0.0112		

6. ¿Qué característica observa en los valores hallados en las columna “Diferencia”?
7. ¿Cómo hallaría el consumo de datos para 5 y 3.5 horas al usar la aplicación de WhatsApp?
Escriba sus cálculos y explique su respuesta.
8. ¿Cómo se puede hallar el consumo de datos para cualquier hora?
9. Observe la vista gráfica. ¿Qué representa la recta que pasa por el punto E?
10. ¿Qué representan los puntos que aparecen después de la recta que pasa por E?
11. ¿Qué debería suceder para que la cantidad de datos alcance para más tiempo? Justifique su respuesta.

Con el uso del applet de GeoGebra se espera hacer mayormente visible el objeto matemático desde la representación tabular y gráfica así, la primera pregunta se orienta a identificar el consumo de datos en función del tiempo desde la representación tabular en la hoja de cálculo. Posteriormente con la creación de puntos en la gráfica a partir de la lista, el objetivo se centra en que el estudiante perciba la relación y conexión entre las dos representaciones e identifique la variación constante que se refleja en la distancia común (de forma horizontal y vertical) al comparar dos puntos y detallar el comportamiento ascendente (¿cómo cambia?), allí se refleja la práctica de seriación. Así, las preguntas 3 y 4 llevan a una predicción de forma gráfica teniendo en cuenta las características métricas de la variación constante y lo concluido en las preguntas anteriores (¿cuánto cambia?).

Por otra parte, en la tarea 5 el objetivo es identificar la variación constante desde la diferencia entre el consumo de datos al transcurrir las horas. En este caso, solo se centra la atención en el consumo de GB pero, durante la socialización se espera hacer visible la variación en cada variable pues, la diferencia en la variable independiente es de 1 hora. Por consiguiente, en la pregunta 6 el estudiante deberá indicar que la diferencia hallada es constante (¿cómo cambia?) y corresponde al consumo por hora de la aplicación para ello compara entre estados y generaliza las características en el comportamiento global así, se identifica la práctica de comparación y seriación.

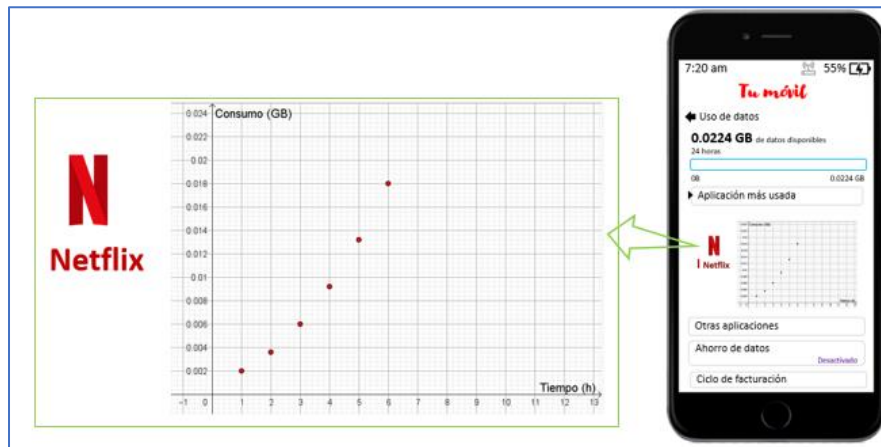
En la pregunta 7, teniendo en cuenta lo concluido en la pregunta 5 de la primera parte y la pregunta anterior, al identificar la pendiente como la diferencia constante entre el consumo para el comportamiento lineal del fenómeno, el propósito es que el estudiante corrobore o replantee los procedimientos necesarios para predecir numéricamente un nuevo estado, en particular, el consumo de datos para 5 y 3.5 horas (¿cuánto cambia?). Luego, en la tarea 8, se repite la pregunta

5 de la primera parte con el fin de que los estudiantes signifiquen la expresión que permite hallar el consumo de datos para cualquier hora desde el valor constante hallado en la representación tabular. De tal modo que, se concreta nuevamente cómo la pendiente influye en la asignación de un valor y el comportamiento lineal.

Finalmente, considerando la cantidad de datos del plan (0.0224 GB) y el uso de la representación gráfica en GeoGebra se propone construir la recta E, perpendicular al Eje y o paralela al eje x , y que pasa por el punto (0, 0.0224 GB), que posibilita hallar la cantidad de horas para las cuales la aplicación consume la totalidad de los datos. Por tanto, la pregunta 10 tiene como propósito reconocer la relación entre las variables después de la recta E teniendo en cuenta los datos y el contexto de la situación (¿cómo cambia?) y así, como respuesta a la siguiente pregunta, argumentar cómo la modificación de la pendiente está directamente relacionada con la variación del consumo a través de la inclinación de la recta (en la representación gráfica) que lleva a que el consumo de los datos del plan se dé en menos horas (¿por qué cambia de esa manera?), allí se incentiva la práctica de estimación.

6.1.4. Cuarto momento

Durante las vacaciones, la aplicación más usada por Pedro fue Netflix. En su aplicación se muestra el siguiente registro.

Figura 20. Momento 4 - Consumo de datos de Netflix.

1. Describa cómo es el consumo de datos de la aplicación Netflix.
2. ¿Cómo se diferencia el consumo de datos de la aplicación Netflix y WhatsApp? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.
3. ¿Cómo ubicaría el consumo de datos para 7 horas? ¿Dónde? Use la gráfica que se muestra en la parte inicial de la actividad.
4. En la siguiente tabla se muestra el consumo de datos de la aplicación de Netflix. Halle las diferencias consecutivas de los valores de consumo.

Tabla 5. Variación del consumo de datos de Netflix desde la representación tabular.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia
1	0.0020	-----
2	0.0036	
3	0.0060	
4	0.0092	
5	0.0132	
6	0.0180	

5. ¿Qué observa entre el valor hallado en la columna “Diferencia” y el valor hallado para en la actividad anterior con la aplicación de WhatsApp?
6. ¿Cómo o dónde ve reflejada la diferencia hallada para el consumo de datos de Netflix al detallar la representación gráfica?

El momento 4 tiene como objetivo plantear una situación de variación no constante con el fin de que el estudiante contraste lo aprendido con el comportamiento lineal para construir argumentos sobre la variación de un comportamiento no lineal. En este caso, de forma intensional se ajustaron los datos para una variación lineal. Por esa razón, la primera pregunta busca que el estudiante describa el comportamiento del consumo de datos de Netflix (¿cómo cambia?) a partir de parámetros lineales del consumo de datos de las aplicaciones estudiadas en los momentos previos, como conocimiento que se hace propio en tanto, la práctica variacional que se promueve es la estimación.

La pregunta 2 solicita establecer las diferencias entre el consumo de datos de Netflix y WhatsApp (¿cómo cambia?) lo que llevará a plantear justificaciones sobre la variación en el comportamiento lineal y no lineal, en ese caso, las prácticas que se movilizan son la comparación y la seriación. Luego, con argumentos intuitivos que respaldan la interpretación gráfica, el estudiante deberá predecir la ubicación del consumo de datos de Netflix para 7 horas al considerar las características métricas de los puntos del comportamiento creciente no constante.

Ahora, las preguntas 4 y 5 tiene como propósito reconocer la variación no lineal a través de la representación tabular donde el estudiante calculará las diferencias consecutivas y dará cuenta de que no se trata de un valor constante con el pasar de las horas, sino creciente (¿cómo cambia?). Así, al fomentar la práctica de estimación, la última pregunta busca relacionar las dos representaciones (tabular y gráfica) y significar la variación no constante en un comportamiento no lineal (¿por qué cambia de esa manera?).

Cabe mencionar que, para este momento no se propone el uso de GeoGebra a razón de que no se vio necesario para el detalle de la interpretación del comportamiento no lineal y el desarrollo de las PV.

6.2. Metas de aprendizaje para la inclusión en el aprendizaje y la flexibilización curricular

De acuerdo con Araque y Barrio de la Puente (2010), la atención a la diversidad implica que el modelo de educación sea capaz de ofrecer la ayuda necesaria a cada estudiante en la medida que se ajustan las intervenciones desde la individualidad es decir, adaptar la enseñanza a las capacidades, intereses y motivaciones del estudiante, lo que implica que el docente aprecie las cualidades del estudiante para el logro de objetivos racionales basados en cada uno de ellos (Moncayo, 2009; Ramon, 2015 y Ortiz, 2005 citados por Gallegos e Illescas, 2017). Siendo así, esta fase tiene como objetivo plantear metas de aprendizaje dentro de los objetivos de la situación de variación y cambio tanto para la ejecución y habilidades de los procesos matemáticos como para el desarrollo de las PV. Teniendo en cuenta las orientaciones técnicas, didácticas y pedagógicas para la inclusión en el aula de matemáticas y las habilidades intelectuales de los estudiantes. Así, se pretende enfrentar la inclusión en el aprendizaje al plantear como punto de partida que todos los estudiantes pertenecen y pueden aprender en el aula ordinaria siendo flexibles con sus ritmos de aprendizaje y habilidades.

Una situación es variacional cuando requiere del análisis y cuantificación de los cambios en las variables del fenómeno y se refiere por argumentos variacionales a aquellos que recurren al análisis del cambio y su cuantificación, y que son usados cuando se emplean estrategias, explicaciones y actividades que reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en una representación del objeto matemático en estudio (Caballero y Cantoral, 2013). Por consiguiente, el desarrollo de las PV lleva a la construcción de argumentos variacionales.

Siendo así, las metas de aprendizaje buscan ser percibidas a través de los argumentos variacionales que construyen los estudiantes para evidenciar el reconocimiento sobre la variación

constante. En tanto, constituyen una herramienta para reconocer el aprendizaje y las diversas formas en la que se reflejan las PV donde el propósito no es señalar o etiquetar hasta donde llegó o no un estudiante en la construcción alrededor de la variación constante sino valorar el aprendizaje desde sus habilidades. Cabe destacar que, la definición de verbos de acción para las metas de aprendizaje se estableció con el apoyo de las habilidades de los procesos matemáticos, en el estudio de la variación y el cambio, que plantean Fiallo y Parada (2018).

Seguidamente, se describen las metas de aprendizaje establecidas para cada momentos y sus objetivos teniendo en cuenta los tres ritmos de aprendizaje, lento, moderado y rápido, y el desarrollo de las PV.

6.2.1. Primer momento

Las preguntas del momento inicial se centraron en ¿qué cambia?, ¿respecto de que cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? Al identificar las variables, reconocer la participación de un referente inicial para analizar el crecimiento de una variable respecto a otra, describir el comportamiento en un punto particular y construir una representación a partir de la comprensión intuitiva de la variación constante desde la representación pictográfica y gráfica del consumo de datos de WhatsApp. Por lo tanto, en la tabla 6 se presentan las metas de aprendizaje para este momento.

Tabla 6. Metas de aprendizaje - Momento 1.

Práctica	Ritmo de aprendizaje		
	Variacional	Lento	Moderado
Comparación	Identifica el tiempo y el consumo de datos como magnitudes involucradas en el problema desde la representación pictográfica y gráfica.	Reconoce el tiempo como variable independiente del consumo de datos desde la representación pictográfica y gráfica.	Justifica el consumo por hora como el elemento inicial que genera la interdependencia entre el tiempo y el consumo de datos acumulado al pasar el primer periodo de tiempo desde la representación pictográfica, y gráfica.
	Reconoce el referente inicial en la barra como material para saber qué pasa con el consumo de datos y lo identifica como causal a medida que pasa el tiempo.	Explica que a medida que aumentan las horas de uso, el consumo de datos también lo hará, además, el consumo aumenta siempre y cuando se mantiene el cambio en el tiempo.	Justifica el cambio que sucede en la barra en relación con el consumo de datos a medida que se acumula un consumo más por hora.
	Usa el referente inicial para hacer marcas semejantes (aproximadas) para el consumo en una hora particular y el comportamiento para el consumo total de los datos del plan.	Justifica el uso de instrumentos para medir el referente inicial y precisar como el consumo para una hora particular y el consumo total de los datos del plan.	Justifica cómo el uso de la marca inicial es referente para el consumo de datos y la relación con los datos disponibles.
Seriación	Identifica de forma cualitativa la variación constante al comparar	Establece características de los puntos en la gráfica a partir de la relación entre el	Justifica la relación de las variables en el plano cartesiano y las características de la variación constante al comparar puntos

	puntos en la gráfica del consumo de datos.	tiempo y el consumo de datos.	en la gráfica del consumo de datos.
	Explica que el referente inicial muestra el consumo por hora entonces, el aumento es constante.	Justifica cómo el referente inicial es causal del consumo por hora entonces, el aumento es constante y puede decir cómo influye para consumir los datos disponibles.	Plantea cambios para que el consumo de datos rinda para más horas teniendo en cuenta el límite de datos disponibles.
Predicción	Representa gráficamente una relación constante entre elementos del tiempo y consumo de los datos en GB.	Ubica puntos en el plano cartesiano manteniendo una distancia común en relación con el consumo por hora considerando las horas que consumirían los datos disponibles.	Justifica la ubicación de puntos en el plano cartesiano para la relación entre consumo y tiempo y estima la unión con una recta como generalización.
Estimación	Reconoce que la modificación de la pendiente causa un cambio en el comportamiento de las variables del fenómeno.	Describe la relación entre las variables del comportamiento lineal al reconocer la modificación de la pendiente como causal.	Explica la relación entre las variables del comportamiento lineal cuando se indica un cambio en la pendiente.

6.2.2. Segundo momento

Los argumentos variacionales en este momento llevan a responder preguntas relacionadas con ¿qué cambia?, ¿respecto de que cambia?, ¿cómo cambia? Y ¿cuánto cambia? Al comparar la variación constante en dos situaciones del mismo fenómeno desde la representación gráfica y pictográfica. Por ello, se tiene en cuenta la participación de una nueva variable fija, la variación del consumo de datos de un fenómeno respecto a otro y en especial, reconocer que los cambios

son constantes a pesar de que el consumo por hora es diferente para cada caso. Las metas de aprendizaje para este momento se presentan en la tabla 7.

Tabla 7. Metas de aprendizaje. - Momento 2.

Práctica variacional	Ritmo de aprendizaje		
	Lento	Moderado	Rápido
Comparación	Realiza comparaciones internas en el consumo de datos y entre las dos aplicaciones.	Explica las comparaciones internas en el consumo de datos y entre las dos aplicaciones.	Argumenta las comparaciones internas en el consumo de datos y entre las dos aplicaciones.
Comparación y seriación	Identifica similitudes y diferencias entre el consumo de datos de Facebook y WhatsApp en la gráfica.	Explica las similitudes y diferencias entre el consumo de datos de Facebook y WhatsApp en la gráfica.	Justifica las similitudes y diferencias entre el consumo de datos de Facebook y WhatsApp en la gráfica.
Seriación	Representa gráficamente el consumo de datos de las aplicaciones considerando la diferencia en el consumo a partir de la inclinación mayor para WhatsApp que Facebook.	Explica la construcción de la representación gráfica del consumo de datos de las dos aplicaciones garantizando el doble del consumo de datos de Facebook respecto a WhatsApp.	Justifica la construcción de la representación gráfica del consumo de datos de las dos aplicaciones garantizando el doble del consumo de datos de Facebook respecto a WhatsApp.
	Reconoce que los incrementos en los dos casos son constantes a pesar de ser diferentes.	Relaciona cualitativamente los incrementos constante que surgen en el mismo fenómeno.	Relaciona de forma aritmética los incrementos constantes que surgen en el mismo fenómeno.

	Explica sobre la cantidad de horas que dura la aplicación en consumir los datos del plan a partir de la apreciación del cambio de una variable respecto a otra.	Justifica la cantidad de horas que dura la aplicación en consumir los datos del plan a partir de la apreciación del cambio de una variable respecto a otra.	Justifica la cantidad de horas que dura la aplicación en consumir los datos del plan a partir de la apreciación del cambio de una variable respecto a otra y relaciones numéricas entre las dos aplicaciones.
Estimación	Relaciona los datos disponibles con la longitud de la barra, como una variable fija.	Explica los datos disponibles como la longitud de la barra como variable fija que no afecta la variación del consumo respecto al tiempo.	Justifica los datos disponibles como la longitud de la barra como variable fija que no afecta la variación del consumo respecto al tiempo.

6.2.3. Tercer momento

Las preguntas en este momento movilizan las PV en preguntas como ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia? y ¿por qué cambia de esa manera? Por tanto, el objetivo es argumentar cómo la m influye en la asignación de un valor a la modificación del estado y describir el comportamiento lineal desde la representación tabular del consumo de datos de WhatsApp y Facebook. Así, en la tabla 8 se muestran las metas de aprendizaje en este momento.

Tabla 8. Metas de aprendizaje. - Momento 3.

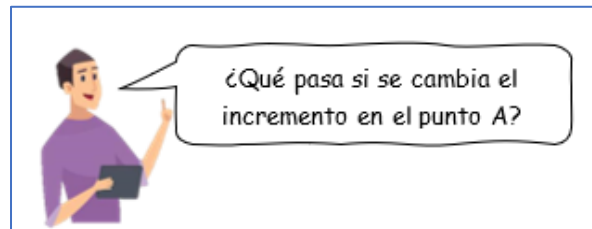
Práctica variacional	Ritmo de aprendizaje		
	Lento	Moderado	Rápido
Comparación	Identifica la variación constante en los datos que se obtienen en la representación tabular del consumo de datos de WhatsApp.	Identifica la variación constante y la relaciona con el consumo de datos por hora de WhatsApp, en la representación tabular.	Justifica y significa la relación de los datos de la representación tabular del consumo de datos de WhatsApp a través del cociente de las variables.
	Identifica relaciones numéricas para precisar que el consumo de Facebook es mayor que la de WhatsApp.	Identifica la pendiente como la causal de que el consumo de Facebook sea mayor la de WhatsApp a través de relaciones numéricas.	Justifica cómo la pendiente influye en que el consumo de Facebook sea mayor la de WhatsApp desde relaciones numéricas.
Seriación	Identifica diferencias desde la representación tabular para caracterizar la variación constante de las dos aplicaciones.	Justifica que una aplicación consume más datos que la otra, a partir de la variación encontrada en la representación gráfica y tabular.	Argumenta que una aplicación consume más datos de la otra, relacionando diversas características de la variación y del problema.
	Identifica la aplicación que consume más rápido los datos del plan a partir de la comparación de los datos en la representación numérica.	Explica cual aplicación consume más rápido los datos del plan a partir de la comparación de los datos en la representación numérica.	Justifica cuál aplicación consume más rápido los datos del plan a partir de la comparación de los datos en la representación numérica.
Predicción	Usa el parámetro constante para hallar nuevos estados de forma aritmética y	Explica el uso del parámetro m o relaciones de estados conocidos para determinar nuevos estados	Justifica el uso del parámetro m o relaciones de estados conocidos para determinar nuevos estados

	gráfica usando estructuras aditivas.	de forma aritmética y gráfica usando estructuras aditivas.	de forma aritmética y gráfica usando estructuras multiplicativas.
	Reconoce que el consumo de datos se ve modificado por el aumento del consumo por hora y describe cualitativamente nuevos estados.	Describe cómo el consumo de datos se ve modificado por el aumento del consumo por hora y encuentra nuevos estados a partir del uso de parámetros lineales.	Explica cómo el consumo de datos se ve modificado por el aumento del consumo por hora y encuentra nuevos estados a partir del uso de parámetros lineales.
Estimación	Describe un acercamiento a la generalización para hallar el consumo de datos para cualquier hora a partir de estructuras aditivas.	Establece una generalización para hallar el consumo de datos para cualquier hora a partir de estructuras aditivas o multiplicativas.	Establece generalización para hallar el consumo de datos para cualquier hora a partir de estructuras aditivas y multiplicativas.
	Propone modificaciones en la pendiente para que el consumo de datos sea menor.	Propone y justifica modificaciones en la pendiente para que el consumo de datos sea menor.	Propone y argumenta modificaciones en la pendiente para que el consumo de datos sea menor.

Además, en este momento se incluyen un apartado complementario para la identificación de la variación constante al cambiar el incremento de la variable tiempo y la modificación del punto de corte con el eje y para asignar mayor significado a la expresión $f(x) = mx + b$ donde $b \neq 0$ esto, con el fin de contar con material dentro de la situación de aprendizaje en respuesta al ritmo de aprendizaje rápido y su inquietud ante el ritmo de aprendizaje de los demás o, en el mejor de los casos, que el flujo y ambiente del grupo posibilite la realización de la actividad con todos

los estudiantes. Seguidamente, se presentan las tareas variacionales que se proponen para la actividad.

Figura 21. Cambio de incremento en el punto A. - Momento 3.



1. ¿Qué características resalta de los puntos que aparecen en la vista gráfica?
2. Halle la diferencia para cada una de las variables.

Tabla 9. Tabla para identificar variación en actividad complementaria del momento 3.

Tiempo (h)	Diferencia (tiempo)	Consumo (GB)	Diferencia (consumo)	
0		0		
0.5		0.0014		
1		0.0028		
1.5		0.0042		
2		0.0056		
2.5		0.0070		
3		0.0084		
3.5		0.0098		
4		0.0112		

3. ¿Qué características observa en los datos hallados en las columnas de diferencia?
4. ¿Qué relación o características observas entre los valores hallados en las diferencias de las dos tablas? (si es necesario, use la última columna de la tabla).
5. ¿Cuánto es el consumo de datos si se usa la aplicación durante 6 horas?

Un experto afirma que el consumo de datos de la aplicación de Instagram sin interacción del usuario es de 0.0020 GB y después de cada hora su aumento es 0.0030 GB.

6. Con la aplicación de Instagram ¿Cuál es el consumo cuando $t=0$? ¿Por qué?
7. Elabore la gráfica del consumo de datos de Instagram.

En este caso, se propone cambiar el incremento del punto A que representa el tiempo (horas) y con ayuda del applet en GeoGebra (se muestra en la figura 20) manipular el cambio en la variable independiente con el fin de que los estudiantes observen como aparecen los puntos que representan el consumo de datos en función del tiempo. De tal modo que, de forma similar a la pregunta 2 del trabajo con GeoGebra en el tercer momento, se incentiva la práctica de comparación y seriación, a razón de que el objetivo es identificar la variación constante como característica en los puntos, que se refleja desde la distancia horizontal y vertical, en este caso, cada media hora (¿cómo cambia?).

La tarea 2 busca identificar la variación constante desde la diferencia entre el tiempo (horas) y el consumo de datos (GB) con la intención de que posteriormente, el estudiante reconozca que la diferencia para cada variable es constante a pesar de ser diferente (¿cómo cambia?) y en tal caso, relacionar los valores hallados con el valor cuando el incremento era cada hora entonces, es posible atribuir esa relación al cociente entre los valores, que surge del estudio de la pendiente como cociente entre las variables del fenómeno. Por consiguiente, la pregunta 3 y 4 promueven la práctica de comparación y seriación.

Luego, la pregunta 5 busca constatar la comprensión sobre la predicción de un nuevo estado pues, a pesar de que la pendiente es estudiada hacia el cociente entre las variables, es la misma a la encontrada a través de la diferencia por lo tanto, la estrategia para hallar el consumo de datos para 6 horas debe llevar a la misma respuesta de la pregunta 4 de la primera parte del momento 3.

Por otra parte, se introduce una situación sobre el consumo de datos de Instagram como una aplicación de ejecución de segundo plano, debido a que consume datos a pesar de no estar en uso, esto con el fin de asignar significado a $b \neq 0$. En tanto, la pregunta 6 busca significar y justificar el consumo cuando $t = 0$ (¿por qué cambia de esa manera?) teniendo en cuenta la

diferencia con el consumo de datos de las demás aplicaciones usadas. Así, en la siguiente tarea el objetivo es construir una representación gráfica como modelo del consumo de datos de Instagram (¿cómo cambia?), allí el estudiante deberá reconocer que se trata igualmente de un comportamiento lineal pero con la particularidad de que hay consumo cuando $t = 0$, lo que afecta el consumo de datos y no, el consumo de datos por hora; es decir, la variable dependiente y no, la pendiente. Entonces, la PV que se promueven en las preguntas 6 y 7 es la predicción.

6.2.4. Cuarto momento

Las preguntas en este momento llevan a responder ¿cómo cambia? y ¿por qué cambia de esa manera? Con el fin de describir la variación al identificar parámetros no lineales y, justificar y construir una representación en función de argumentos intuitivos de variación no lineal. Por lo tanto, en la tabla 10 se presentan las metas de aprendizaje para este momento.

Tabla 10. Metas de aprendizaje. - Momento 4.

Práctica variacional	Ritmo de aprendizaje		
	Lento	Moderado	Rápido
Comparación	Describe comparaciones entre la variación de un comportamiento no lineal a partir de características intuitivas.	Establece comparaciones entre la variación de un comportamiento no lineal a partir de parámetros lineales.	Argumenta sobre comparaciones entre la variación de un comportamiento no lineal a partir de parámetros lineales.
Predicción	Usa características intuitivas de la variación no lineal para predecir puntos en la representación gráfica.	Usa características intuitivas de la variación no lineal para justificar y predecir puntos en la representación gráfica.	Usa características intuitivas de la variación no lineal para argumentar y predecir puntos en la representación gráfica.

	Interpreta la representación tabular y gráfica desde argumentos intuitivos de la variación no lineal.	Relaciona la representación tabular y gráfica desde argumentos intuitivos de la variación no lineal.	Coordina la representación tabular y gráfica desde argumentos intuitivos de la variación no lineal.
Estimación	Usa ideas intuitivas para indicar un comportamiento futuro al comparar fenómenos de variación lineal y no lineal.	Usa ideas intuitivas para explicar un comportamiento futuro al comparar fenómenos de variación lineal y no lineal.	Usa ideas intuitivas para justificar un comportamiento futuro al comparar fenómenos de variación lineal y no lineal.

De esta manera, hasta el momento, se consolida la situación de aprendizaje desde la problematización del saber matemático y las habilidades y ritmos de aprendizaje del estudiante.

6.3. Universalización e individualización del aprendizaje

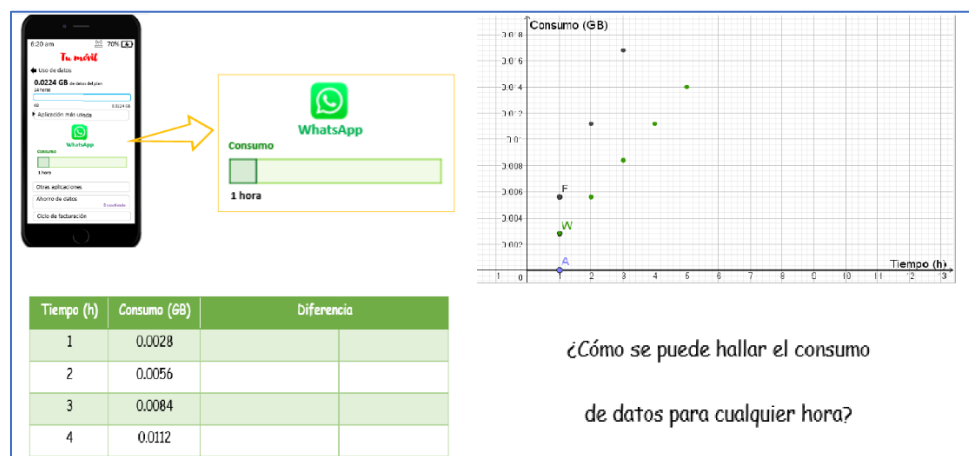
En esta fase se pretende mostrar la aplicación de los principios y pautas del DUA teniendo en cuenta las diferencias y habilidades individuales de los estudiantes del grupo diverso. Asimismo, la individualización del aprendizaje a través PIAR y las adaptaciones curriculares necesarias para Est2, Est4 y Est8.

6.3.1. *Diseño Universal para el Aprendizaje*

Como enfoque didáctico para la inclusión en clase de matemáticas se reconoce que las pautas pueden ser reflejadas en la situación de aprendizaje o en su implementación. Sin embargo, se admite la complejidad que implica articular todas las pautas en la situación de aprendizaje y su implementación.

Sobre el principio de múltiples formas de representación, desde el proceso de modelación se distingue la importancia de explorar, construir, transformar y coordinar las diferentes representaciones del objeto matemático por consiguiente, en la situación de aprendizaje se estudia la representación pictográfica; se interpreta y construye la representación gráfica y tabular y, se orienta al estudiante para la generalización del consumo de datos a través de la construcción de la representación algebraica (como se muestra en la figura 22), así como la coordinación de las representaciones nombradas.

Figura 22. Representaciones del objeto matemático.



Además, al identificar que en el grupo se encuentran estudiantes con deficiencias visuales con respecto a la discapacidad sensorial, dentro de la pauta de proporcionar diferentes opciones para percibir la información se planea la ubicación cerca al tablero o en puntos estratégicos laterales en especial, para los 5 estudiantes que no tienen lentes. Y con respecto a la situación de aprendizaje, se concreta como fuente “Comic Sans MS” en tamaño 12, al ser una un estilo de letra familiar a la escritura coloquial del estudiante; asimismo, en el applet de GeoGebra se configuró letra tamaño grande y colores atractivos para mejor accesibilidad de todos los estudiantes.

Con respecto a la pauta de proporcionar múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos se recalca la importancia de compartir ideas, describir y construir significados para las magnitudes

del tiempo (h) y el consumo de datos (GB); de igual forma la interpretación de los elementos en las representaciones presentes en el applet de GeoGebra y la importancia de resaltar las partes importantes durante el discurso y la socialización con los estudiantes.

Por otra parte, desde las dimensiones del saber y la caracterización del grupo diverso, la selección de la variación constante como objeto de estudio se articuló con el plan de área del curso y el momento en el que la docente titular tenía planeado implementarlo; por ende, para el diseño de la situación de aprendizaje se tuvo en cuenta activar conocimientos previos como: números reales y notación científica en relación con el contexto y la explicitación de habilidades previas para la resolución de problemas. Adicionalmente, a lo largo de las tareas variacionales se incentivó, paso a paso, la identificación de patrones para predecir y estimar el comportamiento lineal y su generalización, en respuesta a la pauta de proporcionar opciones para la comprensión del objeto matemático.

En el mismo sentido, dos adaptaciones importantes para la comprensión y acción fue la orientación en la representación tabular a partir de ejemplos, como se muestra en la tarea 5 del momento 3, observe la figura 23.

Figura 23. Ejemplos en la representación tabular. - Momento 3.

5. Complete la tabla, hallando la diferencia consecutiva entre los valores de consumo. Observe el ejemplo.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia	
1	0.0028	----	----
2	0.0056	$0.0056 - 0.0028$	0.0028
3	0.0084		
4	0.0112		

Del mismo modo, se facilitaron cuadrículas para la elaboración de las gráficas en las tareas 4 del momento 1 y 2 y, tarea 7 en la segunda parte del trabajo con GeoGebra en el momento 3 y,

para favorecer la predicción gráfica de nuevos estados en las tareas 3 y 4 del trabajo con GeoGebra en el momento 3, detalle la figura 24 y 25.

Figura 24. Cuadrícula para gráfica en tarea 4 - Momento 1 y Momento 2.

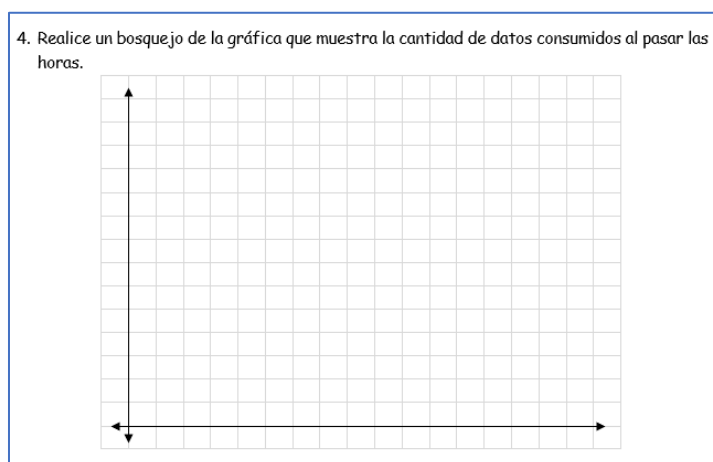
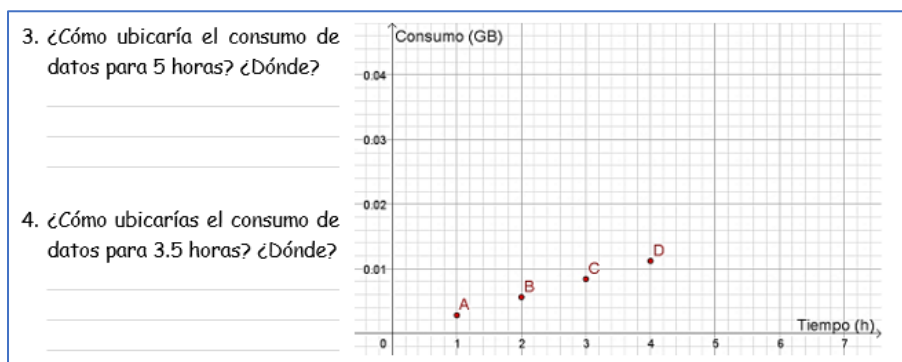


Figura 25. Tarea 3 y 4 - Trabajo con GeoGebra. - Momento 3.



Ahora, con el fin de guiar la visualización como apoyo en el desarrollo de las actividades, se establecieron espacios en blanco para las operaciones y guías con líneas horizontales para la escritura, como se observa en la figura 26.

Figura 26. *Guías y espacios.*

4. ¿Qué relación o características observas entre los valores hallados en las diferencias de las dos tablas? (si es necesario, use la última columna de la tabla).

Guías para la escritura

5. ¿Cuánto es el consumo de datos si se usa la aplicación durante 6 horas?

Espacio para procedimientos

Sobre el principio de acción y expresión, desde las metas de aprendizaje contempladas en la fase anterior se reconocen e identifican diferentes formas en que el estudiante puede expresar lo que sabe (verbal, gestual, escrito, etc.) además, se propone el uso de GeoGebra como benefactor en el razonamiento del estudiante. De hecho, desde el diseño de las preguntas se precisan diferentes métodos para movilizarse en el objeto matemático.

Ahora, para la implementación se pretende reconocer y valorar la variedad de estrategias de solución a una tarea así como el uso de la calculadora y el teléfono para el apoyo en el ejercitación de procedimientos, haciendo mayor énfasis en el razonamiento sobre ellos. Entonces, con respecto a la instrucción docente se precisa el apoyo graduado en función de las habilidades del estudiante, su ritmo de aprendizaje y autonomía; en ese caso, las estrategias aluden a la pauta de proporcionar acciones para la expresión y hacer fluida la comunicación.

En ese orden de ideas, se propone la retroalimentación constante y formativa durante el desarrollo de las tareas y al finalizar cada momento de la situación de aprendizaje, teniendo en cuenta los errores como puntos de partida para la discusión y CCM desde el razonamiento orientado. De tal forma que, según el actuar del estudiante se planificará la gestión de apoyo y desarrollo de tareas.

Finalmente, sobre el principio de múltiples formas de motivación y compromiso, con el fin de proporcionar opciones para captar el interés, la situación de aprendizaje fue diseñada desde el contexto real, los intereses y atractivos que motivan al estudiante; asimismo, desde los elementos teóricos que fundamentan la investigación, la orientación docente se basa en partir de la intuición hacia la CCM.

Para la puesta en escena de la situación de aprendizaje se propone el trabajo colaborativo en binas con la intención de contrastar las habilidades individuales y ritmos de aprendizaje de los estudiantes (Guerrero, 2016 y Heredia, 2019) y, a su vez, favorecer las habilidades sociales y aprendizaje de los estudiantes con NEE (Perlado, et al., 2021) por tal razón, a partir de la caracterización del grupo se estableció una organización conveniente de los estudiantes con especial atención en los agrupamientos que incluían estudiantes con alguna de las características de los subgrupos. Así, responder a la características del aula inclusiva de matemáticas de “aprender en comunidad” donde cada estudiante se sienta parte del grupo, donde su opinión tiene validez, sus habilidades aportan a la solución del problema y donde las habilidades de cada integrante del grupo se complementan para contrarrestar las debilidades o dificultades individuales.

Cabe destacar que como alternativa para variar los niveles de desafío y apoyo, las metas de aprendizaje se ajustan a los diferentes grados de dificultad y niveles de exigencia en una tarea en relación con las habilidades cognitivas de los procesos matemáticos. De igual modo, se propone la vinculación del estudiante en la revisión y argumentación de ideas durante la retroalimentación y trabajo individual.

6.3.2. Plan Individual de Ajuste Razonable

En relación con los tres estudiantes diagnosticados Est2, Est4 y Est8 y la singularidad de que únicamente Est8 cuenta con PIAR vigente, las consideraciones se centraron en la

implementación de la situación de aprendizaje y no, en la modificación de las tareas. Así, se acogen como adaptaciones para la implementación de la situación de aprendizaje: la flexibilización en el tiempo de ejecución de las tareas, permitir el uso de hojas adicionales y el apoyo continuo según el desenvolvimiento del estudiante en tanto, en contraste con las orientaciones técnicas didácticas y pedagógicas para los estudiantes sin PIAR, se acogen dichas estrategias en beneficio de los tres implicados.

En ese sentido, se resalta que varias de las adaptaciones establecidas desde el diseño inicial de la situación de aprendizaje y los aspectos teóricos responden a la flexibilización curricular en beneficio de la inclusión en el aprendizaje. De hecho, un elemento que participó notablemente durante el diseño de las tareas variacionales fue la verificación de la sintaxis y gramática, con el propósito de concretar instrucciones cortas, concretas y precisas, lo que beneficiaría a todos los estudiantes. De igual modo, para la instrucción docente, el discurso tendría como elementos principales la sensibilidad y la moderación gradual con el fin de no caer o incentivar los fenómenos del discurso matemático escolar.

En particular, se reconoce la necesidad de la atención constante en el proceso de Est2 y Est4 que poseen particularidades con mayor profundidad que el Est4. Por ende, los compañeros de trabajo para estos estudiantes se caracterizan por ser estudiantes entusiastas, pacientes, líderes y orientadores con el fin de que actúen como red de apoyo para la CCM.

No obstante, se consideró la posibilidad de realizar ajustes o modificaciones durante la implementación según la necesidad del momento.

6.4.Situación de aprendizaje final. El consumo de datos de aplicaciones móviles para el estudio de la variación constante.

En resumen, como consolidado del proceso de diseño de la situación de aprendizaje a lo largo de las fases anteriores, se precisa como resultado final de la situación de aprendizaje el anexo 7.

CAPÍTULO VII. LA CCM DE UN GRUPO DIVERSO EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN CONSTANTE

En este apartado se presentan los argumentos variacionales que construyeron los estudiantes frente a tareas para desarrollar las PV y operar el cambio y la variación con fines predictivos en un comportamiento lineal. Teniendo en cuenta el logro en las metas de aprendizaje establecidas para cada momento de la situación de aprendizaje sobre el consumo de datos de aplicaciones móviles.

Cabe destacar que, para la selección de evidencias se tomaron respuestas representativas de los estudiantes del grupo diverso. En tanto, el análisis de resultados se presenta según cada una de las PV, comparación, seriación, predicción y estimación.

7.1. Práctica variacional de comparación

La comparación es una herramienta imprescindible para el estudio de la variación, no se puede hablar de variación sin hacer comparaciones, bien entre diferentes estados del mismo fenómeno o entre estados equivalentes de fenómenos diferentes (Caballero, 2018). En tanto, en el consumo de datos de aplicaciones móviles, esta práctica se orienta a la comparación entre estados en el consumo de datos de WhatsApp, la comparación de estados equivalentes para WhatsApp y Facebook y finalmente, la comparación con un comportamiento no lineal. Por ende, el análisis de la comparación como punto de partida para identificar el uso de la variación se centra en reconocer ¿qué compara el estudiante?, ¿respecto de qué compara?, ¿cómo compara? Y, saber si ¿articula varios estados o los analiza por separado? (Caballero, 2018).

De acuerdo con Caballero (2018) y, Caballero y Moreno (2017), la comparación permite identificar aquello que cambia y cuantificarlo teniendo en cuenta que, la forma en que se establece la comparación es una de las características principales de la variación entonces, las explicaciones

en esta práctica se relacionan con estrategias cuantitativas y cualitativas lo que fundamenta los argumentos variacionales que construyeron los estudiantes para comparar estados. En la tabla 11 se muestra la mayor incidencia en las respuestas de los estudiantes con respecto a esta práctica variacional, los prefijos que se muestran entre paréntesis refieren al trabajo grupal.

Tabla 11. Estrategias cuantitativas y cualitativas de la práctica variacional de comparación.

Estrategias cuantitativas para comparar	Est7, Est20, Est24, Est30, Est36, (Est1, Est3), (Est4, Est32), (Est9, Est10), (Est13, Est27), (Est16, Est38), (Est2, Est37), (Est12, Est35), (Est14, Est29), (Est23, Est25), (Est26, Est28)
Estrategias cualitativas para comparar	Est5, Est17, Est22, Est30, (Est13, Est27), (Est4, Est32), (Est14, Est29), (Est6, Est31)
Respuestas que evidenciaron no comprender la tarea.	Est11, (Est18, Est34)
Sin respuesta	Est8, Est15, Est19, Est21, Est33

Al caracterizar el desarrollo de la práctica variacional de comparación desde la valoración de la CCM en cada una de las metas de aprendizaje según los ritmos y el tipo de estrategia se establecen los siguientes indicadores, ver tabla 12.

Tabla 12. Desarrollo de la práctica de comparación según estrategia y ritmo de aprendizaje.

	Estrategias cuantitativas	Estrategias cualitativas
Ritmo de aprendizaje lento	Establece una relación numérica escasa de justificación.	Describe con palabras como: “mayor”, “menor”, “ más o menos alto” cuando compara un único caso.
Ritmo de aprendizaje moderado	Establece una relación numérica con algunos procedimientos erróneos.	Describe con palabras como: “mayor”, “menor”, “ más o menos alto” al comparar varios casos.
Ritmo de aprendizaje rápido	Establece y argumenta una relación numérica y perfecciona procedimientos.	Describe con palabras como: “mayor”, “menor”, “ más o menos alto” y establece una consecuencia.

A continuación se describe el desarrollo de la práctica variacional de comparación desde los dos tipos de estrategias que usan los estudiantes para comparar, cuantitativas o cualitativas y, en cada una de ellas se precisan los argumentos variacionales y la CCM en la meta de aprendizaje a la que alude.

7.1.1. Estrategias cuantitativas para comparar

Los estudiantes emplearon diversas maniobras para usar el referente inicial como base para indicar un nuevo estado. Lo que revela que los estudiantes dan sentido a las comparaciones entre el referente inicial y la barra horizontal, ya que el referente inicial provee información sobre un aspecto especial (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019a), el consumo de datos por hora; lo que luego, se conceptualizará como la pendiente del comportamiento lineal.

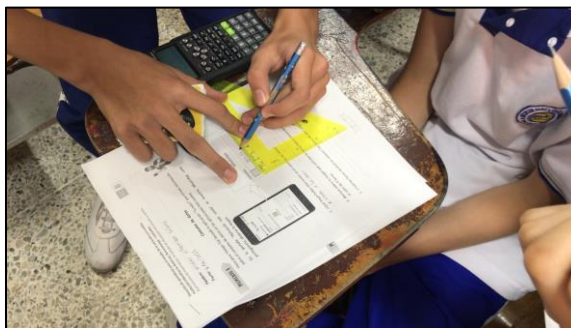
En particular, en el momento 1, dado el consumo de datos de WhatsApp para 1 hora, se solicitaba indicar en la imagen el consumo de datos de WhatsApp para 4 horas. En tal caso, la mayoría de los estudiantes optaron por usar una regla para medir el referente inicial y replicar la medida para el consumo de datos al cabo de 2, 3 y 4 horas, como se muestra en la figura 27.

Figura 27. *Est29 y Est4 usando la regla para medir el referente inicial.*



Seguidamente, se detalla el diálogo entre Est8, Est7 y Est27 donde el Est27 explica cómo usar el referente inicial y la regla para indicar el consumo de datos de WhatsApp al cabo de 4 horas, observe la figura 28 y el episodio 1.

Figura 28. Est27 explica a Est7 y Est8 usando la regla para medir y comparar.



Est27: Mire Est8. ¿A cuántos cm está la barrita?

Est7: Entonces lo que haríamos es, multiplicarlo para el 4.

Est27: No, solamente, aquí, 1 cm es una hora entonces los 4cm de acá sería el consumo y colocarlo ahí.

Est7: Ah ya.

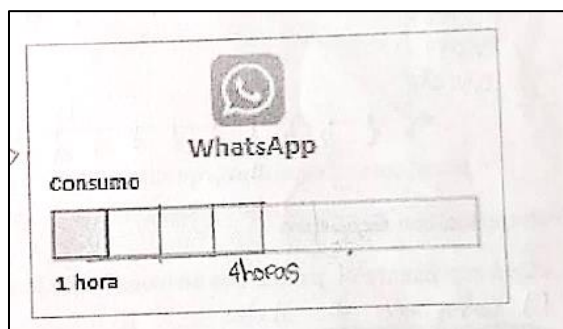
Est27: Entonces, ahí lo tienen.

Episodio 1.

El Est27 al tomar medidas con la regla, estableció una longitud de 1 cm para el consumo de datos por hora; por lo que menciona que, para hallar el consumo de datos para 4 horas basta con adicionar 1 cm por cada hora después de la primera (sin necesidad de multiplicar) así, la barra de longitud 4 cm representaría el consumo de datos para 4 horas.

Las explicaciones de los estudiantes se basaron en argumentos métricos e intuitivos sobre el consumo por hora para reconocer el comportamiento lineal que se mostraba en la representación. En la hoja de trabajo de los estudiantes se evidencian marcas como las que se muestra en la figura 29, detalle las explicaciones del Est20 en el episodio 2.

Figura 29. Respuesta del Est20 en pregunta M1-P2A. .



Est20: Profe, aquí para marcar las 4 horas, como tengo aquí 1 hora con eso mido y marco donde el consumo para las 4 horas.

Docente: A ver, ¿por qué te sirve hacer eso?

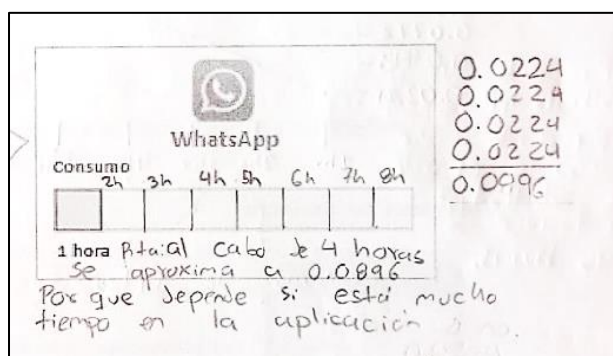
Est20: Porque, este pedacito [señala el referente inicial] es el consumo para 1 hora entonces sería 4 veces ese pedazo para las 4 horas.

Episodio 2.

El Est20 a diferencia del Est27, reconoce que el referente inicial al representar el consumo de datos de una hora es insumo para identificar el consumo para 4 horas, al garantizar 4 veces el consumo unitario. Por lo tanto, esta estrategia cuantitativa alude a la CCM en la meta de aprendizaje de ritmo rápido.

Por otro lado, desde la caracterización en habilidades intelectuales, se identificó la incidencia del proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos junto al pensamiento numérico, razón por la cual los estudiantes buscaron constantemente realizar operaciones con los datos numéricos que se daban en la situación sean o no influyentes en la tarea que buscan responder. Por ejemplo, los Est23 y Est25 inicialmente replicaron la medida del consumo de datos de una hora para los datos disponibles en el plan sin embargo, a pesar de que se solicitaba únicamente marcar sobre la imagen el consumo de datos para 4 horas, los estudiantes asumieron el total de los datos como el consumo por hora y sumaron 4 veces el primero (0.0224 GB) para hallar la cantidad de datos consumidos al cabo de las 4 horas., ver figura 30.

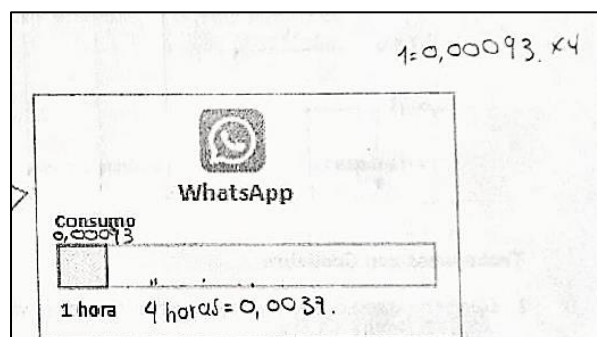
Figura 30. Respuesta de (Est23, Est25) en M1-P2A.



El valor de “0.0224 GB” era el único valor numérico que se mostraba en la representación pictórica inicial en tanto, era el único valor posible que los estudiantes podían tomar para realizar operaciones.

Análogamente, Est26 y Est28 (ver figura 31) a pesar de que realizaron las marcas para el consumo de datos en 4 horas, se apropiaron totalmente de la idea inicial de que 0.0224 GB correspondía a los GB disponibles para 24 horas entonces, realizaron $0.0224 \div 24$ de donde obtuvieron que el consumo por hora sería de 0.00093 GB es decir, conciben la idea de que los datos son distribuidos de forma equitativa para las 24 horas del día, independientemente del ritmo de consumo, se consume la misma cantidad de datos en cada hora del día. Así, precisan el producto con 4 para hallar el valor del consumo de datos al cabo de 4 horas (0.0037 GB), observe la siguiente figura.

Figura 31. Respuesta de (Est26, Est28) en M1-P2A.



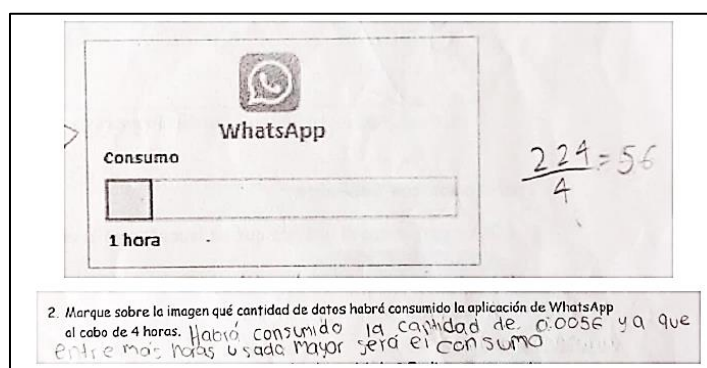
Aunque la solución numérica con los datos tomados no es la adecuada, se resalta que en las dos estrategias anteriores los estudiantes reconocen que el cambio es constante entre un estado y otro y, tratan de garantizarlo usando los datos numéricos desde la estructura aditiva o multiplicativa. Por consiguiente, la estrategia refiere a la CCM en la meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Siendo así, el Ministerio de Educación, Ciencia, Cultura y Tecnología (2019a) indica que es posible que la comparación se efectúe de forma numérica y visual a partir de las observaciones

en los gráficos y la información, lo que se evidencia en los casos anteriores pues, la representación gráfica con la barra horizontal aporta una idea de acumulación y, al articularlo con el crecimiento en una situación cercana al estudiante, hay mayor certeza para caracterizar la variación. Así, al usar instrumentos para medir los longitudes dadas se refleja la práctica variacional de comparación por diferencia (Caballero, 2018).

Por otra parte, la solución planteada por Est8, Est14 y Est29 indica que el consumo de datos se comporta en forma creciente, en palabras de los estudiantes “entre más horas usada mayor será el consumo” sin embargo, la confusión con la interpretación de la tarea variacional lleva a la concepción de que la totalidad de los datos del plan son gastados en 4 horas entonces, 0.0056 GB sería la cantidad de datos que gastó en cada hora no los datos que gasta WhatsApp al cabo de 4 horas, observe la figura 32. La comparación inversa para distribuir los datos plan en horas, precisa que el gasto por hora es constante por consiguiente, la estrategia alude a CCM en la meta de aprendizaje de ritmo moderado.

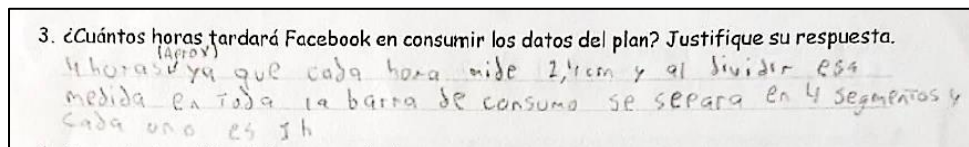
Figura 32. Respuesta de Est8 y (Est14, Est29) en M1-P2A.



Ahora, teniendo en cuenta que “la comparación respecto a un referente justifica el análisis del valor de una magnitud” (Ministerio de Educación, Ciencia, Cultura y Tecnológica, 2019a, p.16) al indagar acerca de las horas en que tardará WhatsApp y Facebook en consumir los datos del plan, se precisa la comparación del referente inicial respecto a la cantidad de datos disponibles, representada a través de la longitud de la barra horizontal. Por lo que, algunos argumentos

variacionales se basaron en la comparación numérica a partir de la estimación de medidas inicial, como se evidencia en la respuesta de los estudiantes Est13 y Est27 (ver figura 33).

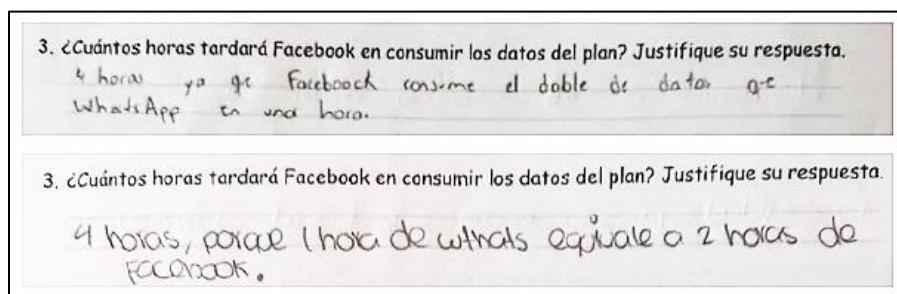
Figura 33. Respuesta de (Est13, Est27) en M2-P3A.



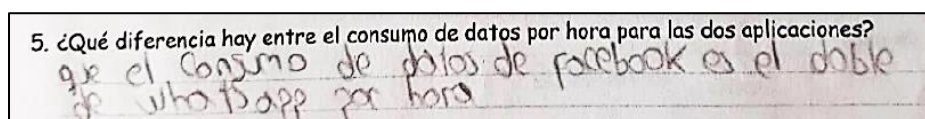
Los estudiantes reconocen que se trata de una aproximación debido al margen de error que se genera con el uso de instrumentos de medida. Además, conciben la interdependencia entre el consumo de datos y el tiempo, al tomar la longitud de la barra y dividirlo en la medida para el consumo de una hora, proceso contrario al que realizaron los mismos estudiantes en la pregunta 2 del momento 1, donde replicaron la longitud del referente inicial para hallar el consumo de datos de WhatsApp en 4 horas. Por lo tanto, esta estrategia precisa la CCM correspondiente a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Por otro lado, los estudiantes establecen relaciones para caracterizar estados equivalentes de diferentes fenómenos; en particular, el cambio en el consumo de datos de Facebook a partir del consumo de datos de WhatsApp por ejemplo, los estudiantes Est1, Est2, Est3, Est16, Est38, Est19, Est36 y Est37 coinciden en que Facebook consume los datos en 4 horas a razón de que el consumo por hora es el doble que el de WhatsApp; considerando que, previamente en la socialización se había concluido que WhatsApp empleaba 8 horas en consumir los datos disponibles, observe la figura 34.

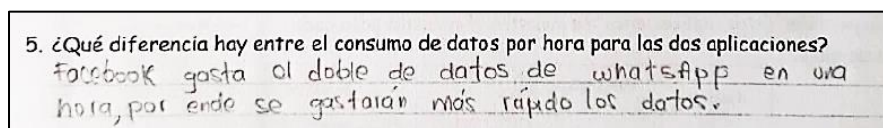
En la segunda imagen de la figura 34 se aprecia la palabra “equivale” que alude a una relación de igualdad que surge de la comparación entre el consumo por hora de WhatsApp y de Facebook. Por consiguiente, la estrategia precisa la CCM en la meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 34. Respuesta de Est3 y Est16 en M2-P3A.

Ahora, al preguntar sobre la diferencia entre el consumo de datos por hora para las dos aplicaciones los estudiantes establecen relaciones cuantitativas a partir de las observaciones en el gráfico inicial (ver figura 35), al hablar del doble del consumo de datos por hora de Facebook respecto al consumo de datos de WhatsApp, lo que evidencia el significado que asignan los estudiantes a los referentes iniciales que representan el consumo por hora para cada aplicación; entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 35. Respuesta de Est24 en M2-P5A.

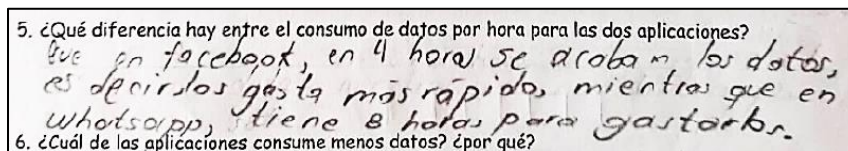
Asimismo, Est26 y Est28 plantean un argumento variacional de consecuencia al relacionar la característica cuantitativa entre los gastos para las dos aplicaciones y la rapidez de consumo, lo que indica un acercamiento a la razón de cambio entre el consumo datos y el tiempo, observe la figura 36.

Figura 36. Respuesta de (Est26, Est28) en M2-P5A.

En la figura 37 se muestra que el Est37 realiza una comparación de lo general a lo particular pues, compara el consumo de datos de las dos aplicaciones a partir del tiempo que emplea cada

una en gastar los datos del plan para así, indicar la diferencia del consumo por hora de las dos aplicaciones.

Figura 37. Respuesta de Est37 en M2-P5A.



De tal modo que, las repuestas que se muestran en la figura 36 y 37 refiere a la CCM en la meta de aprendizaje de ritmo rápido.

En particular, el acercamiento mayoritario que tienen los estudiantes al pensamiento numérico, que se evidencio en la caracterización del grupo diverso, junto con la interpretación de la representación pictográfica de las barras, posibilitó la comparación entre los dos referentes iniciales para identificar relaciones numéricas entre el consumo de datos de las dos aplicaciones, dando cuenta de cómo cambia el consumo de datos de Facebook respecto al consumo de datos de WhatsApp.

Por otra parte, el uso de la representación tabular tenía como propósito identificar la variación constante a partir de la diferencia entre los valores del consumo de datos de WhatsApp por ende, identificar que dicho valor es 0.0028 GB precisa únicamente haber comprendido la instrucción para hallar las diferencias consecutivas, comparar los valores hallados y mencionar la característica que se revela desde la observación, como se evidencia en las respuestas de Est1 y Est3, ver figura 38. En tal caso, la CCM de los estudiantes frente a esta pregunta refiere a una meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 38. Respuestas de (Est1, Est3) en M3-P5B, P6B.

5. Complete la tabla, hallando la diferencia consecutiva entre los valores de consumo. Observe el ejemplo.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia	
1	0.0028	----	----
2	0.0056	$0.0056 - 0.0028$	0.0028
3	0.0084	$0.0084 - 0.0056$	0.0028
4	0.0112	$0.0112 - 0.0084$	0.0028

6. ¿Qué característica observa en los valores hallados en las columna "Diferencia"?
 La diferencia en todas las restas es de 0.0028.

Por el contrario, los Est9 y Est10 precisan un estrategia de meta de aprendizaje de ritmo moderado, a razón de que identifican la relación de los datos desde una composición aditiva (ver figura 39) pues, comparan los datos y mencionan una inferencia a partir de la característica constante en los datos de la representación tabular.

Figura 39. Respuesta de (Est9, Est10) en M3-P5B, P6B.

5. Complete la tabla, hallando la diferencia consecutiva entre los valores de consumo. Observe el ejemplo.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia	
1	0.0028	----	----
2	0.0056	$0.0056 - 0.0028$	0.0028
3	0.0084	$0.0084 - 0.0056$	0.0028
4	0.0112	$0.0112 - 0.0084$	0.0028

6. ¿Qué característica observa en los valores hallados en las columna "Diferencia"?
 Que se tiene que sumar $28 + 28 = 56$ y ese es el resultado del consumo en 2 horas.

Ahora, al presentar el consumo de datos de Netflix se espera que el estudiante compare la representación gráfica con lo aprendido sobre el comportamiento lineal con WhatsApp y Facebook. Por ejemplo, el Est7 identifica la diferencia en el consumo de datos a partir de la recta y la curva, como un consumo constante y otro creciente respectivamente, observe la figura 40.

Figura 40. Respuesta de Est7 en M4-P2.

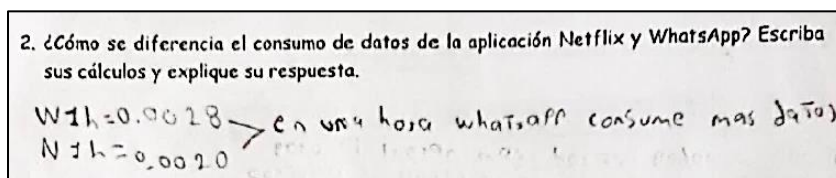
2. ¿Cómo se diferencia el consumo de datos de la aplicación Netflix y WhatsApp? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

Que en el de Netflix los puntos no iban en línea recta como los de WhatsApp si no que aumentaban mas y mas y no tenían la misma distancia.

De hecho, Est7 menciona que los puntos no tienen la misma distancia lo que alude a una comparación métrica en la variación del tiempo y el consumo de datos. Siendo así, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

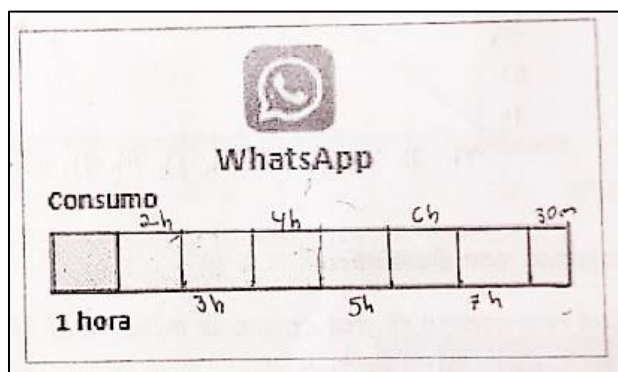
Otra solución es la presentada por Est14 y Est27 que precisan una estrategia en la meta de aprendizaje de ritmo lento a razón de que, pasan por alto la percepción general del comportamiento de Netflix y su variación, para darle sentido desde parámetros lineales pues deciden comparar numéricamente el consumo de la primera hora entre las dos aplicaciones y concluyen que el consumo de datos de WhatsApp es mayor que el de Netflix, ver figura 41.

Figura 41. Comparación entre el consumo de datos de la primera hora de WhatsApp y Netflix.



7.1.2. Estrategias cualitativas para comparar

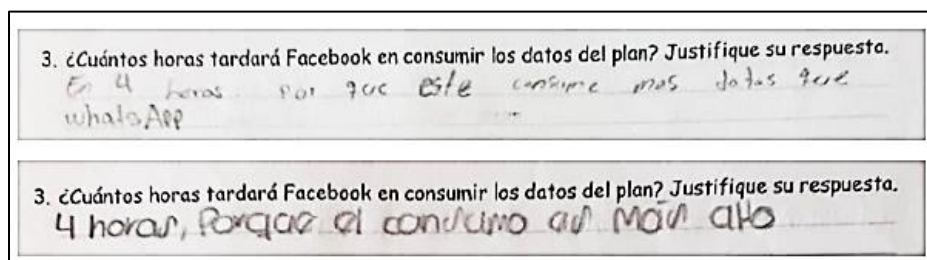
En el primer momento donde se busca caracterizar el comportamiento lineal como un crecimiento constante, las estrategias para comparar la longitud inicial con la barra del total de los datos precisa la posibilidad de reconocer que las longitudes son siempre iguales y que es posible determinar el consumo de los datos del plan (Caballero y Moreno, 2017). Por ejemplo, algunos estudiantes evidenciaron respuestas como la que se muestra en la figura 42, demuestran que no se usaron herramientas de medición para replicar el referente inicial sino que establecieron una medida aproximada.

Figura 42. *Replicas aproximadas del referente inicial.*

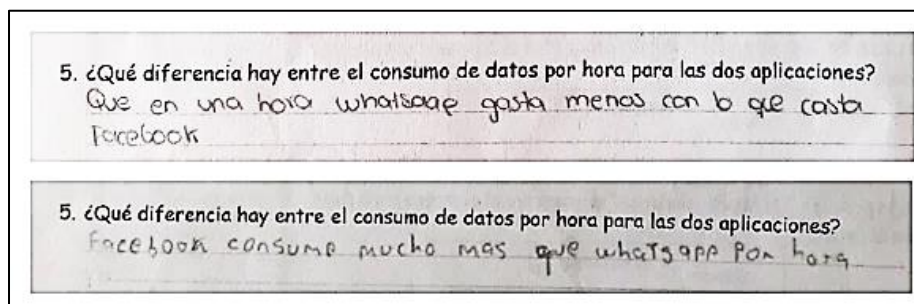
De hecho, Caballero (2018) indica que otra forma de establecer la comparación por diferencia es colocar la misma altura (longitud) hipotéticamente pues, constituye un referente para la caracterización del comportamiento lineal del fenómeno; por lo tanto, la estrategia alude a CCM en la meta de aprendizaje de ritmo lento.

Ahora, la pregunta acerca del tiempo en que tardará Facebook en consumir los datos del plan busca la contrucción de argumentos relacionados con el consumo de datos de Facebook respecto al consumo de datos de Whatsapp a través de la interpretación de la representación inicial. Por consiguiente, una estrategia cualitativa de comparación alude a la identificación de un consumo mayor desde la observación del referente inicial para cada aplicación. El estudiante compara el estado del fenómeno en dos puntos, uno inicial y otro final, con el propósito de establecer diferencias entre los dos estados equivalentes (Caballero y Cantoral, 2013), el consumo de datos de Whatsapp y de Facebook entonces, al conocer el tiempo que emplea whatsapp en consumir los datos del plan y relacionar los referentes iniciales de las aplicaciones, es posible identificar el tiempo en que Facebook consumirá el total de los datos, observe la figura 43.

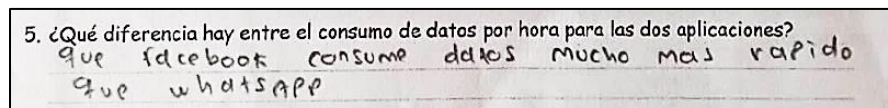
Otro elemento por resaltar es el uso de la expresión “más alto que” la cual surge de una comparación entre distancias; en este caso, se compara la longitud del referente inicial de las dos aplicaciones y la longitud de la barra que representa los datos del plan.

Figura 43. Facebook consume los datos del plan en 4 horas porque consume más datos que WhatsApp.

Caballero (2018) menciona que el uso de expresiones como “más que” o “menos que” son indicadores verbales o de ejecución de la práctica variacional de comparación. Luego, al indagar sobre las diferencias entre el consumo por hora de las dos aplicaciones, la comparación precisa la actividad de tratar de establecer un equilibrio para poder significar comportamientos lineales distintos. En la figura 44 se muestran dos tipos de respuesta que aluden a dicha estrategia, la primera refiere al consumo de WhatsApp respecto al consumo de datos de Facebook y la otra, al consumo de Facebook respecto al consumo de datos de WhatsApp.

Figura 44. WhatsApp consume más datos que Facebook por hora.

Similarmente, Est12 y Est35 usan la expresión “más rápido que” para distinguir el consumo mayor de Facebook respecto al consumo de datos de WhatsApp, observe la figura 45.

Figura 45. Facebook consume más rápido los datos que WhatsApp.

En suma, las estrategias inmediatamente anteriores (figuras 43, 44 y 45) refieren a CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado.

En el mismo sentido, la predicción comienza desde la comparación, por medio del reconocimiento de modificaciones en los valores de las variables por ejemplo, al comparar datos en la representación tabular (Caballero, 2018). Lo anterior, se refleja en la figura 46, el Est13 identifica el valor constante como aquel que “siempre” surge de restar el consumo de datos con su antecesor sin dar mayor detalle sobre las regularidades en los datos o lo justifica el procedimiento entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 46. El valor es el mismo que surge al buscar la diferencia.

5. Complete la tabla, hallando la diferencia consecutiva entre los valores de consumo. Observe el ejemplo.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia	
1	0.0028	----	----
2	0.0056	$0.0056 - 0.0028$	0.0028
3	0.0084	$0.0084 - 0.0056$	0.0028
4	0.0112	$0.0112 - 0.0084$	0.0028

6. ¿Qué característica observa en los valores hallados en las columna "Diferencia"?

- Que la diferencia es restar la primera hora por las siguientes y que siempre al restar la primera hora con otra hora, el consumo anterior por ejemplo.

$0.0056 - 0.0028 = 0.0028$ el dato anterior al que le buscamos la diferencia

Por el contrario, Est20, Est22, Est26 y Est28 precisan CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado a razón de que relacionan el valor común con el consumo por hora de la aplicación (ver figura 47) lo que precisa la significación del valor constante que se identifica en los datos de la columna diferencia. Con respecto a eso, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019a) indica que comparar magnitudes a través de una representación y asociarlo con el significado de esas comparaciones, contempla el reconocimiento, uso y análisis de la función en la situación problema.

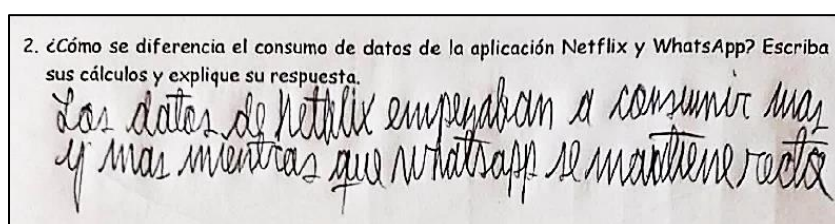
Figura 47. Valor común se relaciona con el consumo por hora de WhatsApp.

6. ¿Qué característica observa en los valores hallados en las columna "Diferencia"?

Que el valor de 1 hora de whatsapp.

En el momento 4, al comparar el consumo de datos de Netflix a partir de los parámetros lineales construidos a lo largo de la SA, la primera diferencia perceptiva en los puntos de la gráfica del comportamiento no lineal es la forma en que están ubicados o el rastro que siguen. De tal modo que, el lugar geométrico diferente a la recta lleva a los estudiantes a buscar relaciones entre un estado y otro para dar sentido al consumo de datos de Netflix. Por ejemplo, observe la respuesta (figura 48) y el diálogo con Est2 y Est7 en el episodio 3.

Figura 48. Comparación de Netflix y WhatsApp a partir de la forma de la gráfica.



Docente: ¿Cómo se diferencia el consumo de Netflix es decir, este de acá, con lo que veíamos en WhatsApp? ¿Qué ves en los puntos?

Est2: De que los puntos empiezan relativamente normales pero poco a poco se elevan más y más.

Docente: ¿Y en la de WhatsApp que pasaba?

Est7: Se mantenía nivelados.

Episodio 3.

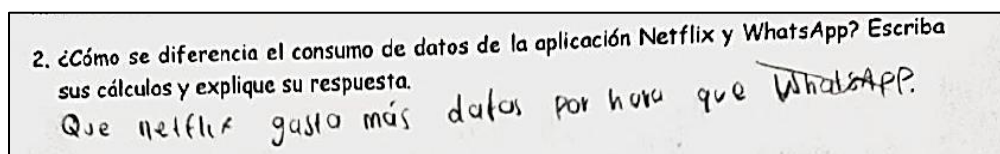
En términos cualitativos se identifican varios elementos que precisan el lenguaje para la comparación por ejemplo, los estudiantes usan la expresión “más y más” para indicar que el consumo de datos no es constante sino que aumenta entre un estado y otro. De hecho, el Est4 relaciona la variación constante con la “normalidad” lo que permite intuir que el estudiante se ha apropiado del conocimiento en relación con el comportamiento lineal pues, inicialmente los primeros 2 o 3 puntos del consumo de datos de Netflix simulan una variación casi constante (“normal”) pero luego, para los puntos posteriores se hace mayormente visible la variación creciente (“se elevan más y más”).

Asimismo, Est7 relaciona la expresión “mantenerse nivelados” con el comportamiento de los puntos para el consumo de datos de WhatsApp, parámetro lineal que no observa común con la representación gráfica del consumo de datos de Netflix.

Lo anterior refleja una comparación por diferencia del consumo de datos en dos fenómenos diferentes debido a que el Est4 caracteriza el comportamiento de los puntos en la gráfica de Netflix con la expresión “aumenta más y más”, por no describir un rastro hacia una recta (Caballero, 2018). Por consiguiente, CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

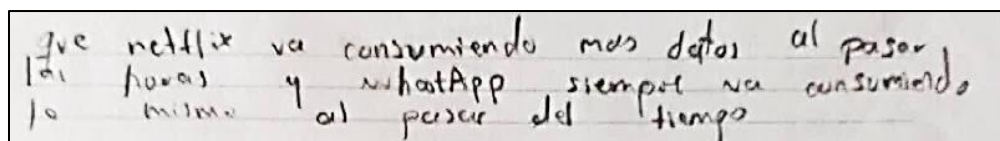
Otra respuesta recurrente es la que se muestra en la figura 49, los estudiantes indican que el consumo de datos por hora de Netflix es mayor que el de WhatsApp lo que podría estar relacionado con una comparación entre la forma de la gráfica de un comportamiento lineal y uno que no lo es, por el alcance del lugar geométrico cuando el tiempo tiende a infinito. En tal caso, la CCM refiere a meta de aprendizaje de ritmo lento a escasas de justificación.

Figura 49. Netflix consume más datos por hora que WhatsApp.



Por otro lado, los Est9 y Est10 justifican el consumo de datos de Netflix usando características del comportamiento lineal, detalle el episodio 4 y la respuesta en la figura 50.

Figura 50. Netflix consume más cada hora y WhatsApp consume siempre lo mismo.



Docente: Aquí dices que el consumo de Netflix aumenta. ¿pero cómo? ¿de la misma manera que WhatsApp?

Est10: No, porque cada vez la aplicación va consumiendo más datos.

Docente: Exacto aumenta pero, diferente.

Est10: Sí, porque cada vez aumenta más.

Docente: Entonces, ¿cómo se diferencia el consumo de datos de Netflix y WhatsApp?

Est10: *La aplicación de Netflix va consumiendo más datos al pasar de las horas.*

Docente: *En cambio WhatsApp?*

Est9: *También consume pero menos. Siempre consume lo mismo.*

Est10: *Es que Netflix va aumentando al pasar el tiempo.*

Episodio 4.

El Est10 menciona que Netflix consume más datos que WhatsApp, cuando se dice “aumenta pero diferente” pues, el estudiante detalla que el consumo de datos de Netflix aumenta cada vez más por consiguiente, el consumo no es el mismo al pasar las horas, lo que evidencia la comparación entre alturas para el consumo de los datos. Entonces, se evidencia que el estudiante compara la pendiente del comportamiento lineal con lo que se observa en el comportamiento no lineal. Por ende, la CCM refiere a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

7.2. Práctica variacional de seriación

La práctica variacional de seriación consiste en “organizar y establecer una lógica a conjunto finito de comparaciones” (Caballero, 2018, p.56) con el propósito de caracterizar el carácter estable del cambio. Por lo tanto, no hay seriación si la comparación no alude a la identificación de una regularidad (Caballero, 2018).

Teniendo en cuenta lo anterior, la seriación concebida como la sucesión de comparaciones conlleva a una caracterización cuantitativa y/o cualitativa del patrón de regularidad en la variación del conjunto de estados (Caballero y Moreno, 2017) del comportamiento lineal. En la tabla 13 se muestra la mayor incidencia en las respuestas de los estudiantes con respecto al desarrollo de la práctica variacional de seriación, las parejas que se muestran entre paréntesis refieren al trabajo grupal.

Tabla 13. *Seriación a través de la caracterización cuantitativa y/o cualitativa.*

Seriación a través de la caracterización cuantitativa	Est4, Est5, Est6, Est7, Est12, Est14, Est25, Est26, Est29, Est30, Est31, (Est1, Est3), (Est9, Est10), (Est11, Est17), (Est13, Est27), (Est16, Est38), (Est19, Est36)
Seriación a través de la caracterización cualitativa	Est2, Est8, Est14, Est23, Est24, Est28, Est32, Est35, Est37, (Est19, Est36), (Est20, Est22), (Est18, Est34)
Sin respuesta	Est15, Est21, Est33

Al reconocer y valorar el desarrollo de la práctica variacional de seriación desde la CCM en la diversidad de metas de aprendizaje según los ritmos y el tipo de caracterización, se establecen los siguientes indicadores, ver tabla 14.

Tabla 14. *Desarrollo de la práctica variacional de seriación según la caracterización y ritmo de aprendizaje.*

	Caracterización cuantitativa	Caracterización cualitativa
Ritmo de aprendizaje lento	Identifica una relación numérica (con datos erróneos) entre estados del mismo fenómeno o fenómenos equivalentes.	Describe con palabras como: “lento”, “rápido”, “aumentar”, “elevar”, “disperso” para caracterizar el comportamiento lineal.
Ritmo de aprendizaje moderado	Establece y justifica una relación numérica entre estados del mismo fenómeno o fenómenos equivalentes.	Describe con expresiones como: “mayor que”, “menor que”, “ más o menos alto que” para caracterizar el comportamiento lineal.
Ritmo de aprendizaje rápido	Realiza y razona sobre procedimientos a partir de la relación numérica entre estados del mismo fenómeno o fenómenos equivalentes.	Usa expresiones como “consumo de datos por hora menor o mayor que” para caracterizar y establecer consecuencias acerca del comportamiento lineal.

7.2.1. Seriación a través de la caracterización cuantitativa

Se reconoce que el estudiante desarrolla la práctica variacional de seriación a través de una caracterización cuantitativa cuando las comparaciones surgen de estrategias cuantitativas como la

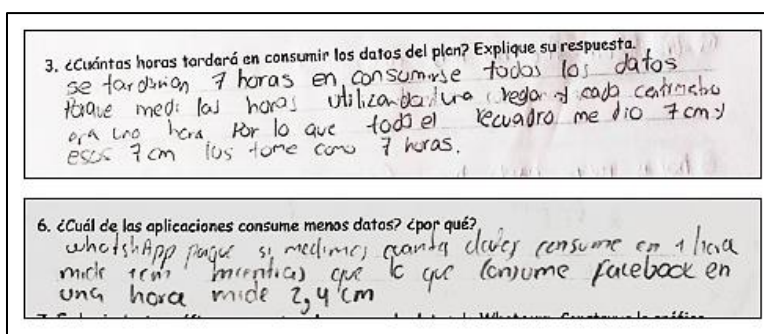
medición, la relación numérica del comportamiento de una variable respecto a otra y la inferencia a través de componentes aritméticos.

En el momento inicial, donde se pregunta por la cantidad de horas que empleará WhatsApp en consumir los datos del plan, surge la práctica de seriación cuando el estudiante coloca marcas semejantes para indicar el consumo para cada hora en la barra horizontal pues, las longitudes semejantes aluden a la variación constante (Caballero, 2018). Por ejemplo, detalle las siguientes respuestas.

En la figura 51, en la pregunta 3, el Est7 menciona que realizó una medición con regla encontrando que cada centímetro equivalía a una hora del consumo de datos de aquí, es posible afirmar que el estudiante midió el referente inicial y aproximó la medida a 1 cm. Luego, midió la barra horizontal que representaba los datos del plan, obteniendo una medida de 7 cm por lo que concluye que, la aplicación tardará 7 horas en consumir los datos del plan.

No obstante, en la pregunta 6 (figura 51), el Est13 construye una conjetura basada en parámetros similares al Est7. Al indagar sobre la aplicación que menos consume datos, el estudiante indica que se trata de WhatsApp a razón de que su consumo de datos por hora es equivalente a 1 cm mientras que el de Facebook es a 2.4 cm.

Figura 51. Respuestas del Est7 en M1-P3A y M2-P6A.

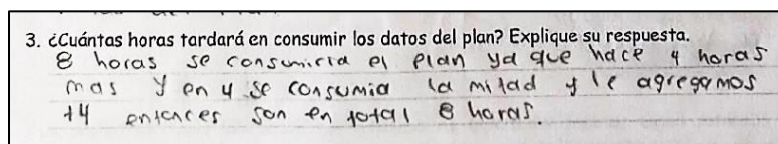


Entonces, al afirmar que cada centímetro o aproximación refiere al consumo de una hora y comparar con la longitud de la barra, los estudiantes han asumido que los incrementos son

constantes y lo usan como justificación para indicar que la aplicación que consume menos datos es WhatsApp. Por consiguiente, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Ahora, el Est12 y Est20 usan la pregunta previa (donde se solicitaba indicar el consumo de datos para 4 horas) para relacionarlo con el total de los datos pues, identifica que el consumo de 4 horas de WhatsApp representa la mitad de la barra horizontal por tanto, basta con agregar el consumo de 4 horas más, para acabar los datos del plan luego, se evidencia que el estudiante establece relaciones equivalentes de incrementos constantes. En este caso, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido, detalle la figura 52 y la afirmación del Est20 en el episodio 5.

Figura 52. Respuesta de Est12 en M1-P3A.

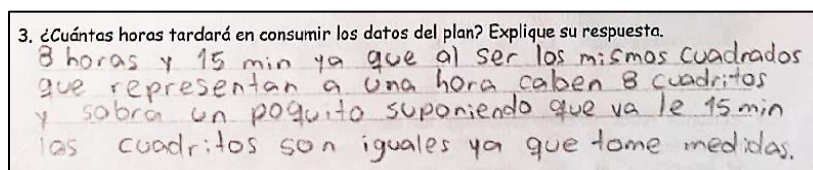


Est20: Ya tenía las 4 horas y estaba más o menos en la mitad entonces, hice otras cuatro hasta llenar la barra.

Episodio 5.

En la respuesta que se muestra en la figura 53, el Est6 dispone una relación entre el consumo de datos por hora y los datos del plan. Inicialmente, indica que cada cuadrado representa el consumo de datos para una hora, “cuadritos” iguales; lo que indica que el estudiante, reconoce el aumento constante y lo compara con la longitud de la barra, que representa los datos del plan, lo que le permite afirmar que en la barra caben aproximadamente 8 cuadritos y un poco más entonces, la aplicación emplea 8 horas y 15 min para consumir los datos del plan. Por ende, la CCM es de meta de aprendizaje de ritmo moderado.

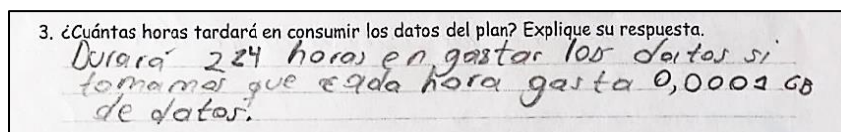
Figura 53. Respuesta de Est6 en M1-P3A.



En consecuencia, se rectifica que las respuestas reportadas en las figuras 51, 52, y 53, precisan el nivel de acción en la práctica variacional de seriación a razón de que los estudiantes consideran la construcción o comparación de segmentos, medidas o cuadrados para determinar que los incrementos son siempre constantes (Caballero y Moreno, 2019).

Por otro parte, desde el fortalecido pensamiento numérico que poseen los estudiantes, persiste el afán por usar y dar sentido a los datos numéricos que se presentan en la situación. Por ejemplo, como en la imagen inicial se muestra que los datos disponibles son 0.0224 GB para 24 horas, el Est37 indica que la aplicación empleará 224 horas para consumir los datos del plan a razón de que consume 0.0001 GB cada hora. A pesar de que la respuesta es errónea, el estudiante establece una relación constante entre el consumo por hora (0.0001GB) y los datos disponibles. Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento, observe la figura 54.

Figura 54. Respuesta de Est37 en M1-P3A.



El Est23 en la respuesta que se muestra en la figura 55 presenta un encrucijada entre lo que observa en la representación pictográfica y la necesidad de operar con los valores numéricos de la situación. Inicialmente, indica que la aplicación consumirá los datos del plan en 8 horas (aparentemente), lo que posiblemente surgió de la comparación de magnitudes con el referente inicial en la barra. Entonces, toma 0.0224 GB como el consumo por hora y lo suma 8 veces sin embargo, al final indica que la aplicación consumirá los datos del plan en 7 horas porque, la casilla 8 no se completa. Por ende, tanto en la suposición inicial de 8 horas para el consumo total y el procedimiento para hallar el total de datos consumidos para 8 horas, el estudiante trabaja con la premisa de que los incrementos son constantes entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 55. Respuesta de Est23 en M1-P3A.

3. ¿Cuántas horas tardará en consumir los datos del plan? Explique su respuesta.

Si una hora consume 0.0224 en 8 horas consumirá 0.1792 pero ese no sería el resultado porque va que a la asilla 8 le falta para completar una hora entonces sería 7 horas.

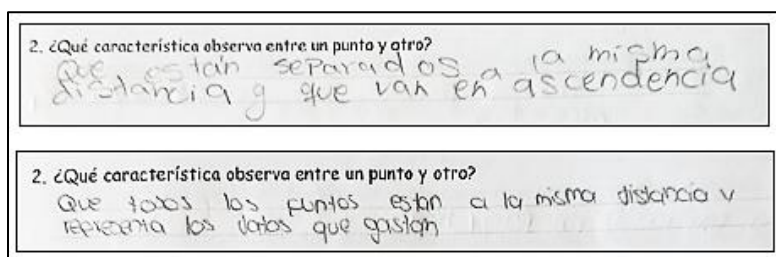
0.0224
0.0224
0.0224
0.0224
0.0224
0.0224
0.0224
0.0224

0.1792

-0.1792
0.0112

0.168

Luego, al promover la identificación de regularidades del comportamiento lineal en la representación gráfica del consumo de datos de WhatsApp, los estudiantes mencionan la distancia común entre los puntos concebida como la longitud del segmento que une cada dos puntos, como se observa en la figura 56 y lo dicho por el Est29 y Est10 (ver Episodio 6), que además de identificar la distancia común menciona que los puntos van ascendiendo (tendencia en el comportamiento lineal) o el Est17 que además, significa los puntos como la representación de los datos consumidos.

Figura 56. Respuestas de Est29 y Est11 en M3-P2B.

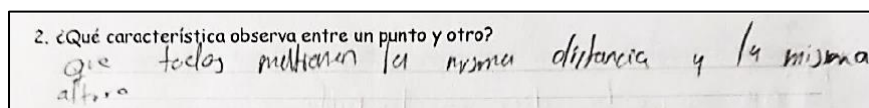
Docente: ¿Qué característica observan en los puntos que aparecen en la vista gráfica?

Est29: Están separados a la misma distancia.

Est10: Que siempre aumentan en altura y en los puntos del tiempo.

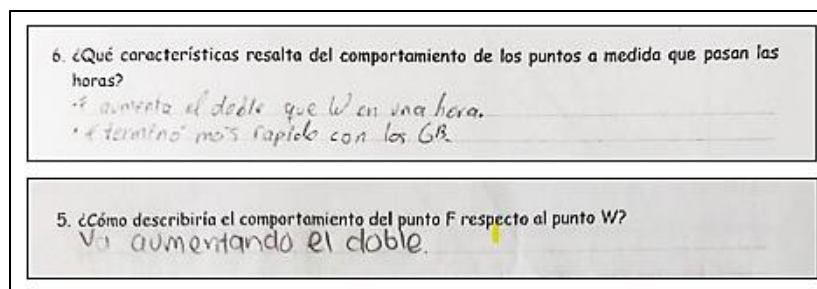
Episodio 6.

No obstante, Est6 y Est10 indican que la característica común refiere a un aumento en altura (datos consumidos) y en tiempo (ver figura 57), afirmación más cercana a la identificación de la distancia común como la pendiente, al relacionar la distancia horizontal con respecto al tiempo y vertical con respecto a los datos consumidos. Entonces para los dos argumentos (figura 56 y 57), la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado y rápido, respectivamente.

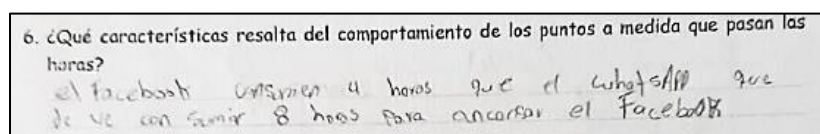
Figura 57. *Respuesta de Est10 en M3-P2B.*

Al comparar el rastro de puntos de cada aplicación en la representación gráfica, en la misma pantalla, los estudiantes se inclinan mayormente por establecer relaciones numéricas al responder cómo cambia el consumo de datos de Facebook con respecto al consumo de datos de WhatsApp. Por ejemplo en la figura 58, Est1 y Est22 inicialmente indican que el punto F aumenta el doble que W en una hora luego, Facebook consume más rápido los datos.

Más tarde, con el uso de GeoGebra, los estudiantes confirman que el punto F aumenta el doble con respecto al punto W de tal modo que, se evidencia la comparación entre estados equivalentes de fenómenos diferentes y la identificación de consecuencias a partir de la relación establecida.

Figura 58. *Respuestas de Est1 en M2-P6B y Est22 en M2-P5B.*

Similarmente, el Est4 indica que el comportamiento del consumo de datos de Facebook es tal que, para lo que WhatsApp consume en 8 horas, Facebook lo hace en 4 horas, lo que verbalmente lleva a una razón de proporcionalidad 1 a 2 del consumo de datos de las dos aplicaciones, observe la respuesta del estudiante en la figura 59. Por consiguiente, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 59. *Respuesta de Est4 en M2-P6B.*

En el estudio del cambio y la variación en fenómenos equivalentes, la práctica de seriación también busca reflejar cómo cambia el consumo de datos de Facebook respecto al consumo de datos de la aplicación de WhatsApp es decir, la interdependencia entre las variables por ello, una de las tareas variacionales se orientaba a la construcción de una nueva representación, un bosquejo de la gráfica del consumo de datos para cada una de las aplicaciones, con el propósito de conocer la regularidad que el estudiante busca garantizar en la construcción a partir del cambio observable en la representación inicial.

Los estudiantes que elaboraron construcciones como las que se muestran en la figura 60 reflejan CCM en meta de aprendizaje de ritmo rápido pues, los estudiantes desarrollan estrategias de medición con regla o manualmente contando los cuadros de la cuadrícula para garantizar que Facebook consume el doble de datos de WhatsApp. Detalle la figura 60 y el diálogo con el Est10 y Est28 en el episodio 7.

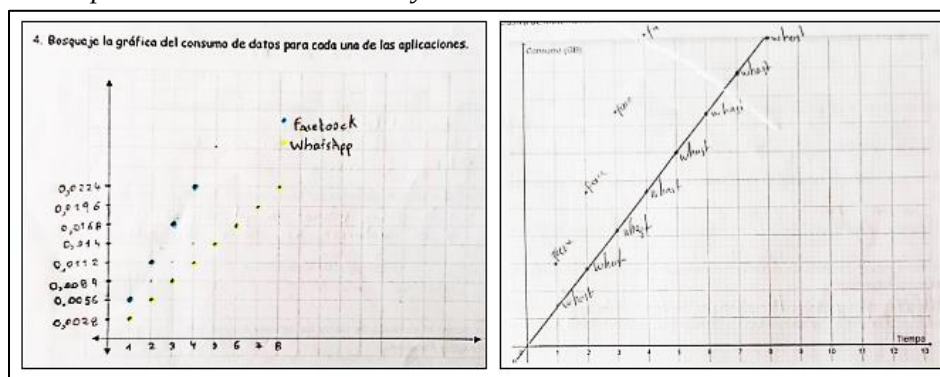
Est10: *Profe, revíseme esto. Es así?*

Docente: *¿Cómo la hizo?*

Est10: *Pues profe, como dice que Facebook es el doble de WhatsApp pues yo medí.*

Docente: *¿Qué midió?*

Est10: *Yo medí con la regla. Lo que hay de aquí a aquí (marca puntos en la recta de WhatsApp y mide con respecto al eje x) y mido lo mismo aquí (después del punto sobre la recta de WhatsApp).*

Figura 60. Respuesta de Est3 en M2-P4A y Est10 en M2-P7A.

Est28: Profe no sé cómo representar el doble de Facebook.

Docente: Ahí tienes la de WhatsApp y te dicen que Facebook es el doble, agarremos un punto. Por ejemplo, en 1 hora aquí (señala un punto sobre la recta de WhatsApp)

Est28: Ah, ya se cómo. Puedo contar los cuadritos que hay de aquí (punto (1,0)) a aquí (punto sobre la recta de WhatsApp). Digamos hay 7 cuadritos chiquitos (mide otros 7 cuadritos después del punto sobre la recta de WhatsApp y ubica el punto). Así?

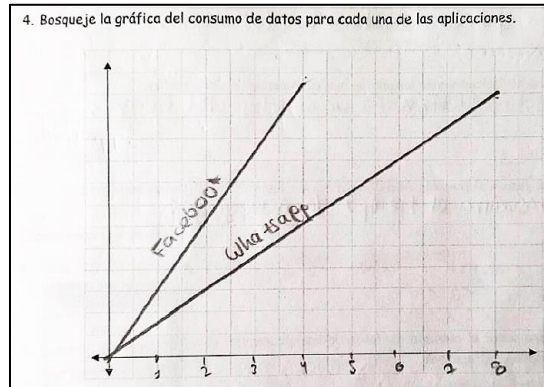
Episodio 7.

En particular, el Est10 menciona que para garantizar que Facebook consume el doble de datos que WhatsApp mide con la regla la distancia entre el punto $(x, 0)$ y el consumo de WhatsApp en x horas para luego, tomarlo como punto de partida para replicar la medida y ubicar el consumo de datos de Facebook para x horas. Análogamente, la estrategia que usa Est28 al medir la distancia a través del conteo de cuadritos que separan los puntos. Por consiguiente, al generalizar la estrategia de medición para los puntos se establece la característica global del comportamiento de los estados.

En el mismo sentido, Caballero (2018) indica que en la práctica de comparación y seriación “los estados intermedios que se identifican no se quedan al nivel de imágenes estáticas sino que se vuelven estados de transición del fenómeno, lo que da cuenta de la evolución y el cambio (su variación) (p. 89). En tanto, otros estudiantes usaron el consumo total de los datos del plan para cada una de las aplicaciones como insumo para elaborar la recta luego, la estrategia se basa en la característica de que basta con dos puntos para trazar el bosquejo, lo que establece el

comportamiento global y por supuesto, de los estados intermedios, observe la figura 61 y el diálogo con Est5.

Figura 61. Respuesta de Est5 en M2-P4A.



Docente: ¿Por qué la gráfica es así?

Est5: Profe, porque ahí mostraba así.

Docente: Pero cuénteme, yo quiero saber cómo la hizo.

Est5: Pues, Facebook consume más rápido los datos que WhatsApp y ahí midiendo con la regla, consume los datos en 4 horas mientras que WhatsApp en 8 horas, por eso hasta aquí (señala Facebook hasta $t=4$) y hasta aquí (señala WhatsApp hasta $t=8$)

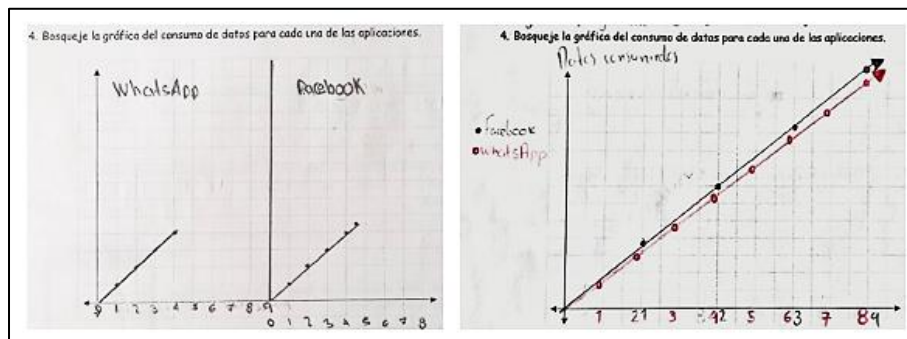
Episodio 8.

A partir del episodio 8, se identifica que la estudiante reconoce el consumo de 0 GB, $t = 0$ para cada aplicación, $(0,0)$, y ubica el punto $(8, w(8))$ y $(4, f(4))$ donde $w(8) = f(4)$, equivalente al tiempo en que cada aplicación consume los datos del plan y con la unión del punto inicial y final, traza la recta que representa el consumo de datos de WhatsApp y Facebook. Lo que muestra que Est5 asume la variación constante para los estados intermedios es decir, para $t \in (0,8)$ y $t \in (0,4)$ respectivamente. Por consiguiente, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Un argumento similar usan los estudiantes que evidencian respuestas como la que se muestra en la figura 62, donde realizan rectas semejantes para las dos aplicaciones es decir, asumen igual pendiente para los dos fenómenos, con la diferencia en la variación del tiempo, está idea surge de la premisa de que Facebook consume el doble de datos de WhatsApp, interpretado

por los estudiantes así: lo que Facebook consume en 1 hora, WhatsApp lo hace en 2. Detalle el diálogo con Est27 y Est13 en justificación de la imagen de la derecha de la figura 62.

Figura 62. Respuesta de Est35 y (Est27, Est13) en M2-P4A.



Est13: Cómo se puede mostrar que una consume el doble, cómo así.

Est27: Mientras una consume 1 hora, la otra consume en 2 horas, lo que Facebook consume en 2 horas, WhatsApp lo consume en 4 horas.

Est13: Pero yo no que creo que las dos en la misma.

Docente: Pero no es necesario poner dos 1, dos 2 y así, puedes poner uno solo aquí abajo (señala el eje x) y colocas el consumo para cada aplicación.

Est13: No profe, porque si Facebook consume en 1 hora, WhatsApp consume en 2 horas por eso el 1 y el 2 ahí.

Docente: Ah! Ya le entendí.

Est27: Si profe, porque WhatsApp consume siempre la mitad de lo que consume Facebook. Es decir, que el consumo de WhatsApp en dos horas, Facebook lo hace en 1.

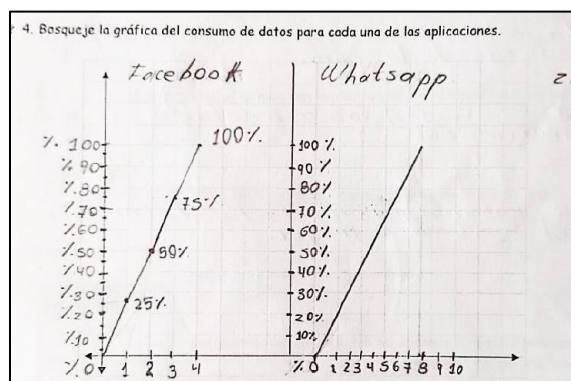
Docente: Y si preguntamos por el consumo de Facebook cuando WhatsApp lo consume en 5 horas.

Est27: Lo mismo, el consumo de Facebook sería en 2.5 horas.

Episodio 9.

Durante la implementación se identificó la dificultad de los estudiantes para representar gráficamente lo interpretado del problema, como se evidencia en el episodio 9. Est13 y Est27 reconocen que el consumo por hora de cada aplicación es diferente pero, se relacionan. En tanto, ante la dificultad de representarlo, optaron por garantizarlo desde la nomenclatura del eje x, para la variable tiempo; evidenciando cómo cambia el consumo de datos de Facebook a partir del consumo de datos de WhatsApp. Por lo tanto, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Por otro lado, el Est37 propone una gráfica de porcentajes equivalentes para representar el consumo de datos de las dos aplicaciones, observe la figura 63 y el episodio 10.

Figura 63. Respuesta de Est37 en M2-P4A.

Est9: ¿De dónde sacó el 25%?

Docente: A ver Est37, cuéntales como lo hiciste.

Est37: Pues yo lo hice con porcentajes, yo no sé.

Est37: Por lo que se ve ahí, con la barra porque si usted multiplica 25 por 4, ¿Cuánto le da?

Est7: Da 100.

Est29: Pero, y eso que tiene que ver.

Est9: Entonces, cual es para WhatsApp si son 8 horas.

Est37: Sería 12.5, la mitad de 25%.

Est9: Ah ya se, 25 + 25 + 25 + 25 es eso.

Est10: Pues las horas que pasan, 25% una hora, y así, en 4 horas que se acaban los datos, ha consumido el 100%.

Est37: Si profe, dependiendo de las horas que pase, yo saco el porcentaje.

Est9: Pero, ahí faltaría porque son 0.0224 GB.

Est20: Si, él dice que cada hora Facebook consume el 25%.

Est10: Entonces es, en una hora consume el 25% de los datos del plan.

Est37: Eso es.

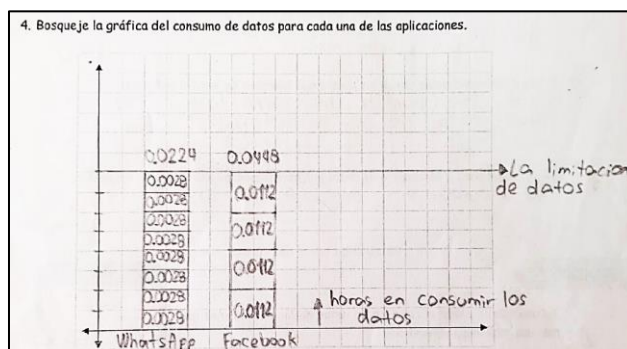
Episodio 10.

Se evidencia que el Est37 estableció una regularidad para el porcentaje de consumo a partir del consumo de datos del plan según cada aplicación, a razón de que en la ilustración inicial de la situación se muestra la barra horizontal que representa los datos del plan para el consumo por hora de cada aplicación, que a partir de los fraccionamientos podría hacer alusión a la unidad para la fracción como parte-todo. Entonces, se identifica que al pasar 2 horas, Facebook ha consumido la mitad de los datos del plan es decir, el 50%, mientras que WhatsApp la mitad, el 25%. Sin embargo, de forma similar a la solución de la figura 62, a pesar de que los estudiantes conciben el consumo de datos por hora diferente para cada aplicación asumen igual pendiente para las rectas

en la gráfica. Por ende, la pendiente desde la interpretación del problema coincide con la intención inicial de construir el bosquejo pero, no con lo que finalmente los estudiantes representan.

Ahora, en la figura 64 se muestra una ilustración basada en la estructura aditiva para el consumo de datos. El Est6 precisa el eje Y para la variable tiempo y asume que Facebook cuenta con el doble de datos del plan que WhatsApp. Sin embargo, la práctica de seriación se evidencia al reconocer que los datos consumidos en cierto tiempo corresponden a la acumulación de datos que se consumieron en cada hora, los cuales son constantes por consiguiente, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 64. Respuesta de Est6 en M2-P4A.



Por otra parte, al preguntar sobre cuál aplicación consume menos datos, algunos estudiantes refieren al tiempo que emplea cada aplicación en consumir los datos del plan para justificar que WhatsApp consumirá menos datos por emplear un menor número de horas, observe la respuesta de Est11 en la figura 65. Por consiguiente, se evidencia la referencia cuantitativa como argumento para afirmar una regularidad percibida al comparar el comportamiento lineal de las dos aplicaciones, luego la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

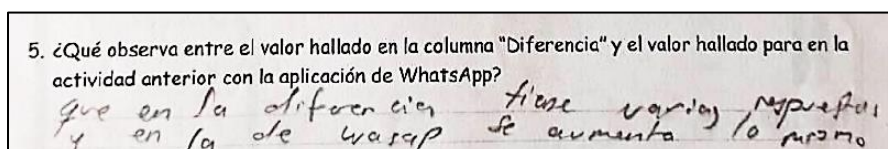
Figura 65. Respuesta de Est11 en M2-P6A.

6. ¿Cuál de las aplicaciones consume menos datos? ¿por qué?

Es WhatsApp porque esta porque a facebook se le acaban los datos a las 3 h y medias y whatsapp sigue porque consume menos

Finalmente, pocos estudiantes llegaron a desarrollar las tareas del momento 4. Sin embargo, Est9 y Est10 que si lograron trabajarla, compararon las diferencias consecutivas en la representación tabular del consumo de datos de Netflix para determinar una regularidad y precisar la diferencia con el comportamiento lineal del consumo de datos de WhatsApp. Observe la figura 66 y el diálogo con Est10.

Figura 66. Respuesta de (Est9, Est10) en M4-P5.



Est10: Profe, encontré algo.

Docente: Qué?

Est10: Siempre va aumentando pero lo mismo entre las horas.

Docente: ¿Cómo así?

Est10: Entre los valores de acá [señala la diferencia entre el consumo de Netflix en la tabla de datos] aumentan 0.0008 GB.

Docente: Muéstrame, digamos con el 0.0024 GB y 0.0032 GB.

Est10: Digamos para 0.0024 GB y 0.0032 GB, ya lo hice y da 0.0008 GB y con los otros también.

Episodio 11.

En la figura 66, el Est10 menciona que las diferencias tienen varias respuestas es decir, no es constante, a diferencia del consumo de datos de WhatsApp, donde aumenta lo mismo (si es constante). De hecho en el episodio 11, el estudiante afirma que encuentra una relación en las diferencias consecutivas del consumo de datos pues, aumentan 0.0008 GB, lo que describe una variación creciente en el comportamiento no lineal. Por tanto, se evidencia la práctica de seriación cuando los estudiantes identifican la variación no constante en el consumo de datos de Netflix al comparar con parámetros lineales entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

7.2.2. Seriación a través de la caracterización cualitativa

La organización de comparaciones cualitativas que lleva al reflejo de la seriación en los argumentos variacionales de los estudiantes precisa características relacionadas con la forma, el

crecimiento, la posición, entre otras. Por ejemplo, se identifica un patrón de regularidad cuando el estudiante reconoce que el crecimiento es constante, es cada vez mayor o cada vez menor, etc. (Caballero, 2018).

Al aprovechar las ventajas visuales que aporta el uso de GeoGebra se busca dar precisión sobre la variación constante al comparar puntos que describen el comportamiento lineal. En tanto, se indaga sobre las características que el estudiante identifica de los puntos que observa en la vista gráfica. De hecho, el contexto de la tarea favorece la construcción de argumentos variacionales basados en la caracterización cualitativa. Por ejemplo, en la respuesta que se muestra en la figura 67, el Est7 en la pregunta 9 menciona que mientras pasa el tiempo el consumo es mayor que el anterior análogamente, Est9 en la pregunta 5 sobre el comportamiento del punto F respecto al punto W indica que, el punto F es mayor que el punto W y, el Est13 expresa como característica entre los puntos, que un punto es más alto que el otro. Por ende, se refleja la comparación cada dos estados consecutivos y la interdependencia entre la variable tiempo y los datos consumidos a través de indicadores verbales de crecimiento entonces, la CCM refiere a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 67. Respuesta de Est7 en M1-P9B, Est13 en M3-P2B y Est9 en M2-P5B.

9. ¿Qué características tienen los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?
Que son verdes y que mientras mas pase el tiempo el consumo es mucho mayor que el anterior.
2. ¿Qué característica observa entre un punto y otro?
que se separan por horas y uno es mas alto que el otro.
5. ¿Cómo describiría el comportamiento del punto F respecto al punto W?
que el punto F es mayor que el W.

Ahora, varios estudiantes, tanto en la gráfica de WhatsApp como en la que se compara está ultima con Facebook, distinguen la relación de aumento en el consumo de los datos, como se aprecia en la pregunta 9 y 6 de figura 68. Los estudiantes perciben el crecimiento sin dar detalle

sobre cómo es el aumento; de hecho, el argumento en la pregunta 2 menciona el aumento en función del cambio en el tiempo es decir, se centra la atención únicamente en una variable.

Figura 68. Respuesta de Est16 en M1-P9B, Est38 en M2-P6B y Est12 en M3-P2B.

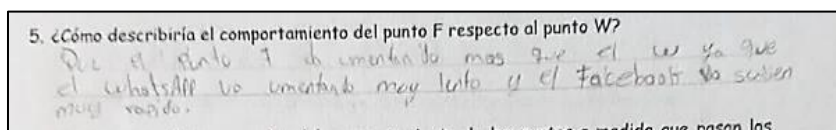
9. ¿Qué características tienen los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?
Se va aumentando el consumo de datos.
6. ¿Qué características resalta del comportamiento de los puntos a medida que pasan las horas?
que el consumo va aumentando.
2. ¿Qué característica observa entre un punto y otro?
que con base a que pasan las horas el consumo de datos aumenta.

Otros estudiantes usan los verbos “subir” o “elevar” para referirse al comportamiento creciente de los puntos, como se muestra en las respuestas de la figura 69. Incluso, se menciona que cada punto refiere al consumo de una hora. Por ende, los argumentos variacionales de la figura 68 y 69, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

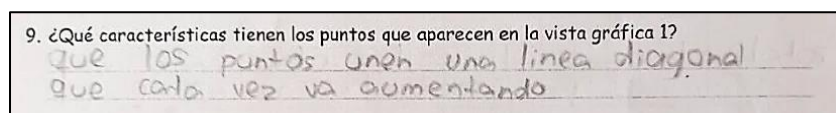
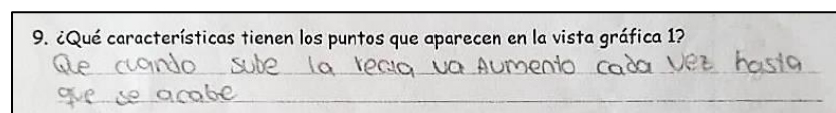
Figura 69. Respuesta de (Est4, Est32) y Est19 en M3-P2B.

2. ¿Qué característica observa entre un punto y otro?
subir eso está en una hora diferente y están en subida o un subiendo
2. ¿Qué característica observa entre un punto y otro?
que cada punto se va elevando más y más

Análogamente, al preguntar sobre el comportamiento del punto F respecto a W, en la respuesta que se muestra en la figura 70, el Est4 menciona que el punto F aumenta más que W a razón de que whatsapp aumenta “lento” y Facebook “sube más rápido”. Desde luego, el estudiante relaciona el comportamiento y establece una regularidad a partir de la tendencia que describe cada conjunto de puntos a medida que aumenta el tiempo.

Figura 70. Respuesta de (Est4, Est32) en M2-P5B.

Otros estudiantes identifican regularidades relacionadas con la dirección de los puntos y la coincidencia hacia una recta. Por ejemplo, en la figura 71, la afirmación que realiza el Est6 indica la caracterización de la posición de los puntos con la forma de la trayectoria que describe, “una línea diagonal”, semejante a la función $f(x) = x$; además, lo articula con el comportamiento creciente del consumo de datos. Incluso, los estudiantes relacionan la recta con el aumento del consumo de los datos hasta gastar los datos del plan, como se muestra en la respuesta del Est17 en la figura 72.

Figura 71. Respuesta de Est6 en M1-P9B.**Figura 72.** Respuesta de Est17 en M1- P9B.

En ese sentido, durante la socialización surgió la discusión sobre la conveniencia o no de unir los puntos con un recta a lo que algunos estudiantes indicaron que la recta permite ver con exactitud cuántas GB se han consumido en determinado tiempo lo que fue tomado como insumo para hablar sobre la densidad del dominio y rango de la función, pues la recta posibilita identificar el consumo de datos para cualquier fracción de tiempo.

En tal caso, los argumentos que se muestran en las dos figuras anteriores (71 y 72) precisan la CCM en la meta de aprendizaje de ritmo moderado a razón de que la seriación conlleva a una idea de dirección que se refleja en una relación causal entre los estados luego, al identificar y secuenciar estados intermedios emerge y se desarrolla la noción de tiempo (Caballero, 2018).

Ahora, durante la socialización, al preguntar sobre las características de los puntos en la gráfica surgió la siguiente discusión:

Docente: ¿Qué características tienen los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?

Est10: Son verdes, van aumentando.

Est20: Se van dispersos.

Docente: Que significa dispersos.

Est20: Se van alejando.

Est22: Es el consumo por las horas. La cantidad de GB que se consumen.

Est36: Van todos así como... (señala hacia arriba con el brazo, en forma de diagonal)

Est9: Van todos en diagonal.

Docente: Qué significa que vayan en diagonal.

Est10: Va aumentando.

Est37: En diagonal, en línea recta.

Episodio 12.

Figura 73. Expresión corporal de Est37 durante la socialización.



La Est36 indica que los puntos responden a una dirección diagonal y lo muestra con el movimiento de su brazo (ver figura 73). En tanto, el movimiento corporal que realiza la estudiante revela el aumento y la tendencia de los puntos por ende, alude a otra forma de evidenciar la práctica variacional de seriación.

Por otro lado, al posibilitar la gráfica con los puntos del comportamiento lineal de WhatsApp y Facebook, la seriación podría surgir en el comportamiento interno de los puntos de cada aplicación, de una respecto a otra o características de la percepción general de las dos aplicaciones. En este último, es el caso de los argumentos variacionales contruidos por el Est2 y Est28 quienes mencionaron características sobre el comportamiento de los puntos a lo largo del tiempo (ver figura 74). La palabras “disperso” (uno de sus significados refiere a ”separar”) y

“alejar” aluden, de forma general, al comportamiento del consumo de datos de una aplicación respecto a la otra como consecuente de que la pendiente del consumo de datos de Facebook es mayor que la de WhatsApp. Entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 74. Respuestas de Est2 y Est28 en M2-P6B.

6. ¿Qué características resalta del comportamiento de los puntos a medida que pasan las horas?	Que se vuelven más y mas dispersos.
6. ¿Qué características resalta del comportamiento de los puntos a medida que pasan las horas?	los dos puntos se van alejando a medida que pasan las horas

Al indagar sobre cuál aplicación es la que consume menos datos, algunos estudiantes refieren al consumo de datos por hora de cada aplicación (ver A en figura 75) en tanto, se evidencia la alusión a la pendiente como causal del comportamiento lineal. De hecho, Est3 afirma que ambas aplicaciones consumen la misma cantidad de datos (ver B en figura 75), lo que refiere a los datos de plan que fueron distribuidos de forma equitativa para las dos aplicaciones sin embargo, aclara que WhatsApp consume menos datos por hora que Facebook por tanto, consume menos datos, detalle la figura 75. De tal modo que, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

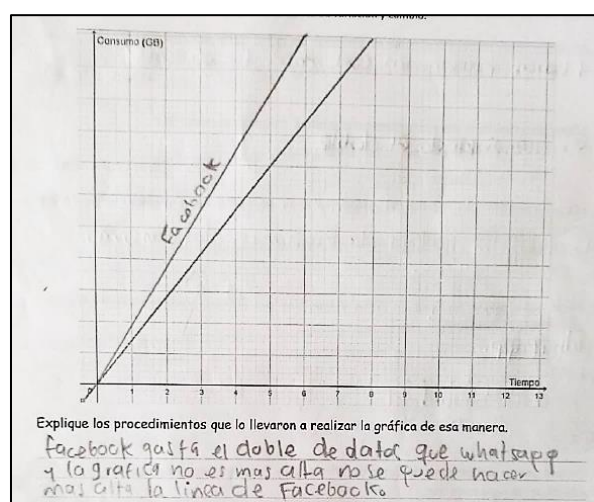
Figura 75. Respuestas de Est7 y Est3 en M2-P6A.

A	6. ¿Cuál de las aplicaciones consume menos datos? ¿por qué? WhatsApp porque consume menos datos que Facebook
B	6. ¿Cuál de las aplicaciones consume menos datos? ¿por qué? ambas consumen la misma cantidad de datos solo que WhatsApp consume menos cantidad de datos en una hora que Facebook

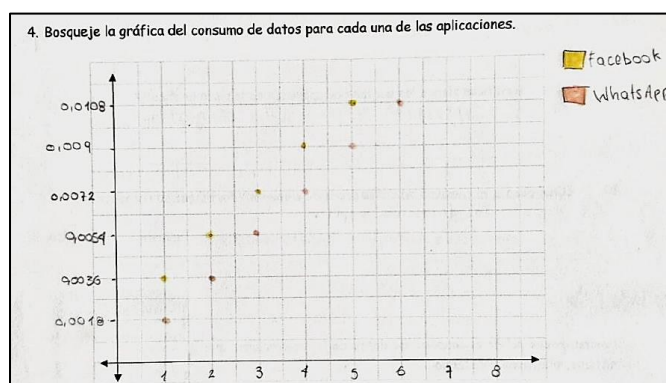
Caballero y Cantoral (2013) mencionan que la seriación se evidencia cuando el estudiante analiza datos del comportamiento de la función en distintos intervalos y establece una relación que subyace entre las variables, lo que lleva a responder cómo cambia una cuando la otra cambia. Siendo así, cuando se solicita construir un bosquejo de la gráfica del consumo de datos de

Facebook a partir de la gráfica del consumo de datos de WhatsApp, Est22 construye una recta menos inclinada que la del consumo de datos de WhatsApp (observe la figura 76) y menciona que debido a que Facebook consume el doble de datos que WhatsApp no puede ser más alta que ella. Por ende, la estrategia cualitativa se basa en que la gráfica de Facebook debe estar por encima que la de WhatsApp es decir, mayor pendiente. Por consiguiente, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 76. Respuesta de Est22 en M2-P7A.



Un argumento similar usó Est28 para construir la gráfica del consumo de datos de WhatsApp y Facebook (ver figura 77). Se evidencia que los puntos que representan el consumo de datos de Facebook tienen mayor altura que los de WhatsApp luego, las rectas paralelas surgen de la interpretación del “doble” del consumo de datos de Facebook respecto a WhatsApp, aumentar dos unidades Sin embargo, el paralelismo significa que, las rectas tienen la misma pendiente lo que indica que la representación concibe un consumo para $t = 0$ con la aplicación de Facebook. Reafirmando así, la incidencia de las dificultades de los estudiantes con el proceso de representación. Luego, la solución precisa CCM de meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 77. Respuesta de (Est26, Est28) en M2-P4A.

7.3. Práctica variacional de predicción

La práctica variacional de predicción refiere a la acción de anticipar un comportamiento, estado o valor a partir del análisis de los estados previos pues, de allí se abstraen inferencias y regularidades que se buscarán garantizar para la predicción a mediano o largo plazo, constituyendo una predicción local (Caballero y Cantoral, 2013). Luego, la forma en cómo se puede presentar la predicción está relacionada con las representaciones del objeto matemático. En particular, Caballero (2018) indica que la predicción se puede presentar a manera de formulación aritmética, algebraica o analítica o bien, a través de una apreciación del valor de una variable respecto a otra.

Teniendo en cuenta el nivel educativo en el que se enmarca esta investigación, el tipo de tareas de la SA y los datos recolectados, no se percibe la predicción como formulación algebraica o analítica. Por tanto, las categorías para esta práctica variacional son: la predicción como formulación aritmética y predicción como apreciación del valor de una variable respecto a otra. En la tabla 15, se muestra la incidencia en las respuestas de los estudiantes del grupo diverso frente a la práctica variacional de predicción, las parejas que se muestran entre paréntesis refieren al trabajo grupal.

Tabla 15. Incidencia de las repuestas de los estudiantes en el desarrollo de la práctica variacional de predicción.

Predicción como formulación aritmética	Est4, Est7, Est13, Est14, Est19, Est21, Est22, Est26, (Est9, Est10)
Predicción como apreciación del valor de una variable respecto a otra	Est5, Est8, Est13, Est16, Est20, Est23, Est24, Est26, Est27, Est31, Est32, Est34, Est36, Est37, Est38, (Est1, Est3), (Est2, Est7), (Est11, Est17), (Est14, Est29), (Est26, Est28)
Respuestas que evidenciaron no comprender la tarea	Est6, Est12, Est18, Est35
Sin respuesta	Est15, Est25, Est30, Est33

Al valorar el desarrollo de la práctica variacional de predicción desde la CCM en las diferentes metas de aprendizaje según los ritmos y el tipo de predicción, se establecen los siguientes indicadores, ver tabla 16.

Tabla 16. Desarrollo de la práctica de predicción según el tipo de predicción y ritmo de aprendizaje.

Formulación aritmética		Apreciación del valor de una variable respecto a otra
Ritmo de aprendizaje lento	Usa estructuras aditivas para predecir usando datos erróneos para el consumo por hora.	Predice nuevos estados garantizando una relación constante para los datos disponibles al pasar el tiempo o el consumo de datos suponiendo cierto consumo por hora. Predice comportamientos a partir del relaciones cualitativas entre los estados de un fenómeno o fenómenos equivalentes.
Ritmo de aprendizaje moderado	Usa estructuras aditivas para predecir usando el consumo por hora o estados conocidos del mismo fenómeno.	Predice nuevos estados garantizando una relación constante en el consumo de datos tomando datos numéricos erróneos para el consumo por hora. Predice estados o comportamientos a partir de la relación numérica entre los estados de un fenómeno o fenómenos equivalentes.

Ritmo de aprendizaje rápido	Identifica el consumo por hora como pendiente y protagonista de la estructura multiplicativa para predecir nuevos estados.	Predice nuevos estados garantizando una relación constante en el consumo de datos. Valida la predicción de comportamientos a partir de relaciones y comparaciones numéricas que surgen de la variación constante de fenómenos equivalentes.
------------------------------------	--	---

7.3.1. Predicción como formulación aritmética

Caballero y Moreno (2017) menciona que la predicción se evidencia cuando se anticipa un estado o valor futuro a través del uso de un conocimiento matemático específico como la configuración de operaciones aritméticas y relaciones cuantitativas de la variación de fenómenos equivalentes. Por ende, se concibe la predicción como formulación aritmética cuando se basa en estructuras de operaciones como la adición, sustracción, multiplicación o división. En este caso, la variación constante se puede identificar a través de la diferencia o el cociente por tanto, la predicción se va a reflejar a partir de estructuras aditivas o multiplicativas.

Generalmente, los estudiantes usaron estrategias aditivas y multiplicativas con los datos conocidos de la representación tabular para hallar nuevos estados. Por ejemplo, en la figura 78, el Est3 toma el consumo de datos de WhatsApp de 4 y 2 horas para hallar el consumo para 6 horas lo que evidencia la identificación de la variación constante entre los estados como insumo para hallar un nuevo estado a partir de la suma de estados conocidos, observe la figura 78 y el episodio 13.

Figura 78. Respuesta de Est3 en M3-P4A.

4. El estudio "We are social" afirma que, en promedio, una persona usa WhatsApp durante 6 horas por día. ¿Cuántos GB se consumen? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

0,0112	→	4H	whatsapp
0,0056	→	2H	"
0,0168	→	6H	"

Resp: 0,0168 GB

Docente: ¿Cuántas GB se consumen al cabo de las 6 horas con WhatsApp?

Est3: Se suman las horas totales de WhatsApp y de Facebook.

Docente: ¿Cómo así?

Est3: Sumo lo de las 4 horas de WhatsApp y luego el 0.0056 GB.

Est1: Es que son 4 horas de WhatsApp y $4+2$ es 6 entonces con la hora de Facebook se puede sacar el dato.

Est3: Porque esa hora de Facebook son dos de WhatsApp.

Episodio 13.

En el episodio 13, los estudiantes mencionan que también es posible hallar el consumo de datos para 6 horas usando el consumo de datos de 4 horas de WhatsApp y el consumo por hora de Facebook, a razón de que una hora de Facebook equivale a dos de WhatsApp. En tanto, se evidencia que el razonamiento de los estudiantes tiene presente la variación de una aplicación respecto a la otra para predecir nuevos estados entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

De forma similar, al preguntar por el consumo de datos para 5 y 3.5 horas, algunos estudiantes usan nuevamente la misma estrategia, suman el consumo de 4 y 1 hora para hallar el consumo de 5 horas (ver figura 79). Sin embargo, se resalta que al momento de hallar el consumo para 3.5 horas conciben una relación multiplicativa para obtener el consumo de 0.5 horas y luego, vuelven a la estrategia aditiva para hallar el consumo final. Observe la figura 53 y el episodio 14.

Figura 79. Respuesta de Est1 en M3-P7B.

7. ¿Cómo hallaría el consumo de datos para 5 y 3.5 horas al usar la aplicación de WhatsApp?
Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

$$\begin{array}{r}
 0.0112 \rightarrow 4h \\
 0.0028 \rightarrow 1h \\
 \hline
 0.0140 = 5h
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0.0028 \\
 \hline
 2 \\
 = 0.0014
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0.0084 - 3h \\
 0.0014 + 0.5h \\
 \hline
 0.0098 = 3.5h
 \end{array}$$

Docente: ¿Cómo podemos hallar el consumo para 5 horas?

Est14: Y si se suma o multiplica.

Est9: Pues profe con el 0.0112 GB

Docente: Y de dónde salió ese 0.0112GB

Est9: Es el consumo de 4 horas entonces a 0.0112GB le sumamos 0.0028 GB y ese sería el de 5 horas.

Docente: Muy bien y para 3.5 horas ¿cómo lo haría?

Est9: 0.0028 dividirlo en dos.

Docente: Ah bueno y ¿por qué? ¿eso que sería?

Est10: La mitad de lo que se consume en una hora.

Docente: Entonces, ese valor [señala 0.0014 GB] sería el consumo de qué?

Est9: De 3.5 horas?

Docente: No. A ver, veamos qué hiciste, 0.0028 GB es de qué?

Est9: Consumo de hora.

Docente: ¿Luego?

Est10: La mitad, entonces, el consumo de media hora.

Est9: Ah sí.

Docente: Ahora, para 3.5 horas.

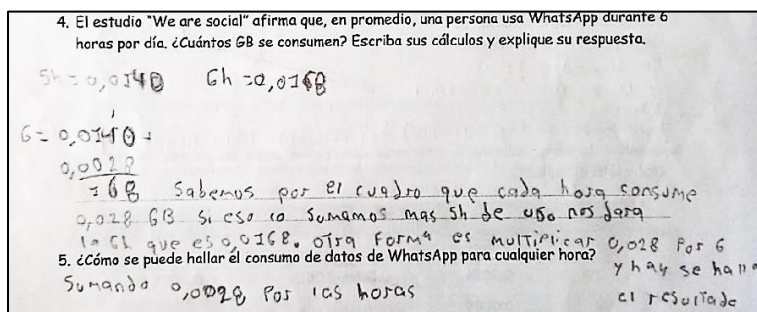
Est10: Sería lo de 3 horas y se le suma la mitad de 0.0028 GB.

Episodio 14.

En el episodio 14, se evidencia la pertinencia de preguntar por el consumo de datos para un tiempo no entero, pues los estudiantes experimentaron nuevas estrategias para garantizar la variación constante en estados intermedios y reconocen que la variación se mantiene para fracciones de tiempo. Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

El PyLV exige constantemente el desarrollo de explicaciones causales y reconocimiento de una causalidad de tal modo que, identificar aquello que cambia y la variación del comportamiento posibilita la anticipación de nuevos estados (Caballero, 2018) como se evidencia en la figura 80 y el diálogo con Est13 y Est27 (ver episodio 15). En este caso, los estudiantes usan tanto la relación entre el consumo de datos de WhatsApp y Facebook como la estructura aditiva con la pendiente para hallar el consumo de datos de WhatsApp para 6 horas.

Figura 80. Respuesta de (Est13, Est27) en M3-P4A.



Docente: Muy bien. Y ¿cómo hallaste el consumo para 6 horas?

Est27: Pues sabemos que 0.0056GB es en 1 hora entonces en 2 horas sería el doble de esto es decir, 0.0112 GB que es lo mismo que dice aquí para 4 horas [señala la columna de consumo de datos de WhatsApp].

Est13: Luego, se le suma lo otro.

Est13: Entonces, si son 5 horas le sumamos 0.0028GB y si le sumamos otra vez 0.0028GB sería lo de 6 horas, y ya.

Est27: Ah, pero también se puede en forma de multiplicación, ósea ese 0.0028GB 6 veces, $0.0028\text{ GB} \times 6$.

Episodio 15.

Teniendo en cuenta que, el consumo de datos de Facebook es el doble que el WhatsApp, los estudiantes toman el consumo de datos de Facebook para 2 horas equivalente al consumo de datos de WhatsApp para 4 horas y proceden a añadir 2 veces el consumo de datos por hora (0.0028 GB) para hallar el consumo para 5 horas y finalmente, el consumo para 6 horas. No obstante, el Est27 detalla una nueva característica que surge de los procedimientos repetitivos al sumar el mismo factor, indicando que es posible hallar el consumo para 6 horas con el producto entre 0.0028 GB y 6. Lo anterior evidencia que el camino de la estructura aditiva permite orientar la identificación de nuevas regularidades para perfeccionar la estrategia de predicción. Siendo así, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

Las tareas tuvieron un fuerte énfasis en incentivar la identificación de la variación constante a través de la diferencia consecutiva por lo tanto, era de esperarse la mayor recurrencia de los estudiantes hacia la estructura aditiva con el consumo de datos por hora para determinar nuevos estados. Por ejemplo, en la figura 81, el Est12 suma 6 veces el consumo por hora (0.0028 GB) para determinar el consumo de datos para 6 horas y el Est21 menciona que el procedimiento responde a una secuencia, lo que indica la intención de garantizar un patrón entre un estado y otro es decir que, el estudiante reconoce cómo cambian las variables y establece una racionalidad al cambio entre estados de un intervalo, lo que alude a la práctica de predicción (Caballero, 2018) y meta de aprendizaje de ritmo moderado. Detalle la figura 81 y el diálogo en el episodio 16.

Figura 81. Respuesta de Est12 en M3-P4A.

4. El estudio "We are social" afirma que, en promedio, una persona usa WhatsApp durante 6 horas por día. ¿Cuántos GB se consumen? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

$$\begin{array}{r}
 0.0028 \\
 0.0028 \\
 0.0028 \\
 0.0028 \\
 0.0028 + \\
 0.0028 \\
 0.0028 \\
 \hline
 0.0168
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 0.0028 \times 6 = 0.0168 \\
 \text{serán } 0.0168 \text{ GB} \\
 \text{en 6 horas.}
 \end{array}$$

Docente: ¿Cómo supiste cuánto es el consumo de datos para 6 horas?

Est21: con la tabla, es que no sé cómo justificarlo.

Docente: A ver, revisemos "We are social" afirma que en promedio una persona usa WhatsApp 6 horas al día ¿cuántas GB se consumen?, ¿cómo hallaste para las 6 horas?

Est21: Profe, seguí la secuencia.

Docente: ¿Cómo así? Muéstrame.

Est21: Pues cada vez aumenta 0.0028 GB siempre lo mismo. Entonces va sumando, sumando.

Episodio 16.

No obstante, otros estudiantes identificaron con facilidad la relación multiplicativa entre las variables para anticipar nuevos estados. En la figura 82, los Est21, Est24 realizan el producto entre el consumo de datos por hora y el tiempo para hallar el consumo de datos de WhatsApp para 6, 5 y 3.5 horas.

Figura 82. Respuestas de Est24 en M3-P4A y Est21 en M3-P7B.

4. El estudio "We are social" afirma que, en promedio, una persona usa WhatsApp durante 6 horas por día. ¿Cuántos GB se consumen? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

$$\begin{array}{r}
 0.0028 \times 6 \\
 \hline
 0.0168
 \end{array}$$

se consumen 0.0168 GB

7. ¿Cómo hallaría el consumo de datos para 5 y 3.5 horas al usar la aplicación de WhatsApp? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

$$\begin{array}{r}
 0.0028 \times 5 \\
 \hline
 0.0140
 \end{array}$$

5h = 0.0140 GB

$$\begin{array}{r}
 0.0028 \times 3.5 \\
 \hline
 0.0140 \\
 0.0084 \\
 \hline
 0.00980
 \end{array}$$

3.5h = 0.00980 GB

A diferencia de lo anterior, el Est3 a pesar de que usa la estrategia multiplicativa para hallar el consumo de datos para 5 horas, decide usar otro procedimiento para hallar el consumo de datos para 3.5 horas. En tanto, toma el consumo para 3 horas (conocido de la representación tabular) y

usa la relación constante de la unidad de tiempo para determina el consumo de datos para 0.5 horas y finalmente, con la suma de los componentes establecer el consumo de datos para 3.5 horas, observe la figura 83.

Figura 83. Respuesta de Est3 en M3-P7B.

7. ¿Cómo hallaría el consumo de datos para 5 y 3.5 horas al usar la aplicación de WhatsApp?
Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

$$0,0028 \times 5 = 0,014$$

$$\frac{0,0028}{2} = 0,0014$$

$$3,5h = 0,0098$$

Entonces, para los dos casos inmediatamente anteriores (figura 82 y 83), los estudiantes reconocen que la variación constante se conserva para fracciones de tiempo. Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

Por otra parte, una de las tareas del momento 3 tenía como objetivo estudiar la causalidad y consecuencia a través del cambio de la pendiente. Inicialmente, la atención se centraba en la modificación del consumo de datos por hora al aumentar 0.0012 GB y luego, predecir la cantidad de horas que la aplicación emplearía para consumir los datos del plan. Cabe mencionar que, el tiempo sería un número no entero lo que llevó a los estudiantes a experimentar diversas estrategias para acercarse o concretar el tiempo de consumo.

Por ejemplo, en la figura 84, el Est1 reconoce el aumento en la pendiente al sumar 0.0028 GB y 0.0012 GB. Luego, para predecir el tiempo de consumo primero suma 2 dos veces el consumo de datos por hora (0.0040 GB) después, realiza sumas sucesivas de los estados que halló previamente. Entonces, cada vez que suma 2 veces estados anteriores, está aumentando en potencia de 2 el tiempo del consumo de los datos. La intención del estudiante es obtener un valor cercano a los datos del plan (0.0224 GB), detalle la figura 84 y la interpretación de los procedimientos del estudiante.

Figura 84. Respuesta de Est1 en M3-P6A.

6. Si el consumo de GB por hora para WhatsApp aumenta 0.0012 GB ¿cuántas horas tardará en consumirse las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

Handwritten calculations and answer:

$$\begin{array}{r}
 0.0012 \\
 + 0.0028 \\
 \hline
 0.0040
 \end{array}$$

Serian con 8h y 45min

$$\begin{array}{r}
 0.0224 \\
 - 0.0160 \\
 \hline
 0.0064
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.0040 \\
 + 0.0040 \\
 \hline
 0.0080
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.0080 \\
 + 0.0080 \\
 \hline
 0.0160
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.0160 \\
 + 0.0160 \\
 \hline
 0.0320
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.0320 \\
 + 0.0320 \\
 \hline
 0.0640
 \end{array}$$

- A) El consumo por hora es 0.0040 GB entonces, al sumarlo dos veces obtiene 0.0080 GB es decir, el consumo de datos en 2 horas.
- B) Cada 0.0080 GB es el consumo de 2 horas entonces, al sumarlos dos veces obtiene 0.0160 GB es decir, el consumo de datos de 4 horas.
- C) Cada 0.0160 GB es el consumo de 4 horas entonces, al sumarlos dos veces obtiene 0.0320 GB es decir, el consumo de datos de 8 horas.
- D) Cada 0.0320 GB es el consumo de 8 horas entonces, al sumarlos dos veces obtiene 0.0640 GB es decir, el consumo de datos de 16 horas.
- Sin embargo, al dar cuenta que el total de los datos es 0.0224 GB y que los resultados de las sumas hechas en C) y D) exceden el valor, decide comparar con el consumo de datos de 4 horas es decir, 0.0160 GB.
- E) Con la diferencia entre 0.0224 GB y 0.0160 GB, es posible que el estudiante deseaba identificar la fracción de consumo para compararla con el consumo de datos por hora.

Si bien es cierto, el procedimiento fue acertado para simplificar los cálculos y obtener un consumo cercano a los datos del plan. Sin embargo, al momento de concluir la respuesta e interpretar todos los procedimientos realizados, el estudiante paso por alto la coherencia y orden con el que había realizado las sumas sucesivas. Más aún, la comparación entre el restante y el consumo por hora no fue la más conveniente. Lo anterior evidencia que el estudiante posee diversas habilidades para estructurar procedimientos articulados y con la intención de predecir un nuevo estado pero, algunas dificultades relacionadas con la atención, el orden y la concentración

obstaculizaron concluir de forma acertada la respuesta a la tarea. En tal caso, se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Similarmente, Est11 y Est25 usan el producto entre el consumo de datos por hora y el tiempo para predecir estados del comportamiento lineal. Los estudiantes, deciden comparar el consumo de datos al cabo de 5 y 6 horas, entero menor y mayor más cercano al total de los datos, para predecir las horas que empleará la aplicación en consumir los datos del plan, observe la figura 85.

La diferencia entre las dos respuestas es que el Est11 opta por el tiempo entero menor (5 horas, ver figura 85A) y el Est25 decide tomar el punto medio entre los estados es decir, 5 horas y media (ver figura 85B). Posterior a la figura 85 se presenta el diálogo con el Est11 y Est17 en el episodio 17.

Figura 85. Respuesta de Est11 y Est25 en M3-P6B

A

6. Si el consumo de GB por hora para WhatsApp aumenta 0.0012 GB ¿cuántas horas tardará en consumirse las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

28 GB +
12 GB
40 GB

y multiplicando 40 x 5 nos da 0.0208 GB
antes en 5 horas se gasta 0.0208 GB
y como los datos llegan a 0.0224 GB
se gastará en 5 horas
en 6 horas no daría tiempo porque
se gasta 0.0240 GB

B

6. Si el consumo de GB por hora para WhatsApp aumenta 0.0012 GB ¿cuántas horas tardará en consumirse las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

28 + 12 = 40
40 - 22 = 18
18 / 3.2 = 5.625

24 es lo que sobra a la 5 horas o sea que
se gasta en 5.5 horas.
Porque si ponemos 6 horas se gasta de el
límite de datos que es 0.0224

Docente: Si, aquí teníamos los datos del plan (señala la actividad inicial). Pero, en esta pregunta es, ¿qué pasa si el consumo por hora aumenta esto?

Est11: Pues que se va sumando, se van gastando los datos.

Docente: Sí, pero que implica que aumente esto (0.0012 GB). Porque, tú me dices que el consumo por hora es de 0.0028 GB y aquí, me dice que aumenta 0.0012 GB.

Est17: Es decir, cuál es el consumo por hora, ahora. Ya entendí. El consumo es esto (señala 0.0028 GB) y ahora aumenta 0.0012 GB entonces hay que sumarle eso.

Docente: Entonces, el consumo por hora cambió. Ya no es este 0.0028GB, sino el valor que les dio sumando eso.

Est11: Ah, y volver a sumar.

Docente: Luego, como hallar para saber cómo consume para el total del plan.

Est11: Se suma hasta que dé el total del plan.

[minutos después]

Est11: Profe, aquí no encontramos cuanto tiempo demora en consumir los datos con el 0.0040 GB.

Docente: ¿Por qué? ¿Qué pasó?

Est11: Es que si llegamos a 5 horas no sirve y en 6 horas ya se pasa.

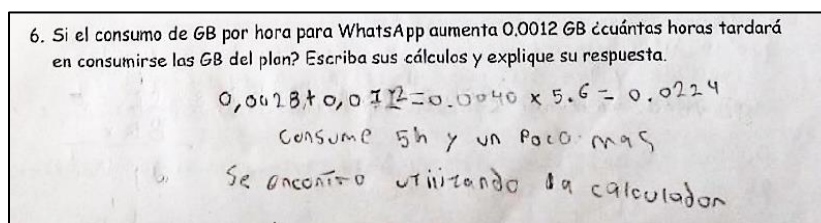
Est17: Ósea, es entre 5 y 6 horas.

Episodio 17.

Del episodio 17, se evidencia que los estudiantes reconocen la modificación del consumo por hora a través del aumento y la variación constante en estados intermedios, al realizar procedimientos para el cambio en el consumo por hora y usarlo para hallar el de 5 y 6 horas y concluir el consumo intermedio. No obstante se evidencia que, al momento de predecir el tiempo de consumo para los datos del plan, el conflicto por hallar un valor entero los dirige a tomar el punto medio entre 5 y 6 horas.

Por otra parte, pese a que la implementación se desarrolló posterior a las adaptaciones que experimentó el sistema educativo con respecto al uso de aparatos electrónicos y tecnología para enfrentar la pandemia del COVID-19, en el mejor de los casos, el uso del computador y el teléfono fue primordial para el proceso de enseñanza y aprendizaje en las instituciones de orden público como IEA. Pero, al retomar la presencialidad en las aulas se observó, el renacer de la restricción con los aparatos electrónicos durante la clase.

Teniendo en cuenta lo anterior, ante la dificultad de hallar el tiempo exacto en que la aplicación consume los datos del plan, algunos estudiantes decidieron usar la calculadora o el teléfono para agilizar los cálculos de ensayo y error, como el caso de Est27 (ver figura 86). Es de resaltar que, durante la práctica de instrucción se percibió la inquietud e inseguridad de los estudiantes por el uso o no de la herramienta (detalle el episodio 18).

Figura 86. Respuesta de Est27 en M3-P6A

Docente: ¿cómo llegaste a que en 5.6 horas se consumen los datos con el nuevo consumo por hora?

Est13: Yo no sé, yo probe.

Docente: ¿cómo así? ¿probando con qué?

Est13: con la calculadora del celular.

Docente: ósea, intentaste con 5.1, 5.2 y así.

Est13: si profe, ¿está mal?

Docente: no, claro que no.

Episodio 18.

En particular, el Est13 usó el producto entre el consumo de datos por hora y el tiempo para predecir el consumo de datos para 5 horas, el entero menor más cercano a los datos del plan. Luego, menciona que la aplicación empleará un poco más de 5 horas. Tiempo después, al verificar la posibilidad del uso de la calculadora del teléfono indica que el tiempo que empleará la aplicación será 5.6 horas lo que evidencia que el estudiante reconoce que en el comportamiento lineal la variación se mantiene para estados intermedios (tiempo no entero).

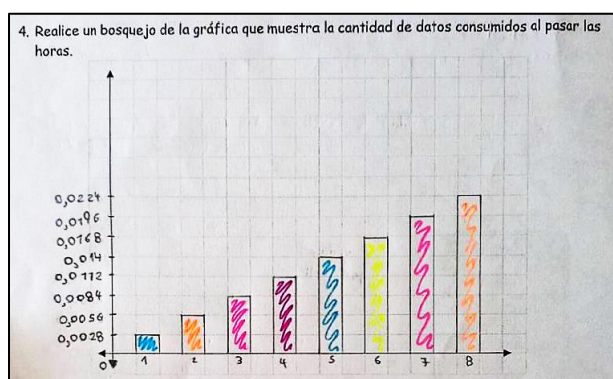
La estrategia de usar ensayo y error con la calculadora para determinar el tiempo exacto del consumo de datos se conoce como una heurística en términos de resolución de problemas. Por lo tanto, en las justificaciones y argumentos variacionales, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

7.3.2. Predicción como apreciación del valor de una variable respecto a otra

La predicción como apreciación del valor de una variable respecto a otra se concibe como la predicción de comportamientos a partir del cambio de una variable respecto a otra o desde la representación gráfica donde el estudiante previamente ha identificado una regularidad ya sea desde la representación pictográfica o tabular.

En particular, en la primera tarea de la SA que constituye una predicción, se solicita a los estudiantes construir un bosquejo de la gráfica para el consumo de datos en función del tiempo; allí la predicción es mayormente cualitativa e intuitiva a razón de que la construcción se fundamenta en la regularidad constante observada al comparar el referente inicial (consumo de datos por hora) con los datos del plan. Por ejemplo, en la figura 87, los estudiantes no elaboran una gráfica con coordenadas rectangulares en el plano cartesiano sino que realizan una gráfica de barras, tiempo vs consumo, detalle la figura y el diálogo con Est1 y Est3 en el episodio 19.

Figura 87. Respuesta de (Est1, Est3) en M1-P4A.



Docente: ¿Qué representan los números de eje horizontal?

Est3: Las horas que van pasando.

Docente: ¿Y la altura de la barra?

Est3: El consumo de datos. Porque aquí [señala la primera barra], pasa un 1 cuadrito, luego 2 cuadritos y así sucesivamente.

Docente: Pero, aquí, si lo vemos mejor por la altura. La altura de la barra qué representa?

Est3: Lo mismo, el consumo de datos.

Docente: Pero, cómo sé a qué altura están.

Est1: Ah, lo podemos hacer así profe, aquí (dibujo inicial) nos dice que hay 0.0224 GB para 24 horas pero como WhatsApp acaba los datos en 8 horas entonces en cada hora consume 0.0028 GB. Eso sería lo de una hora, entonces para dos horas sería 0.0056 GB y así para los otros.

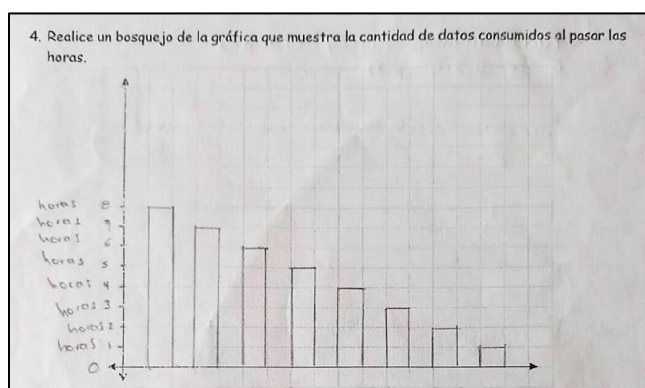
Episodio 19.

A partir del episodio 19 y la representación elaborada por los estudiantes se infiere que la idea inicial surge de la representación pictográfica donde se muestra la barra horizontal para el consumo de datos de WhatsApp. Sin embargo, se evidencia que los estudiantes conservan una variación constante vista como la acumulación en la barra vertical, cada cuadrado de base 1 h y

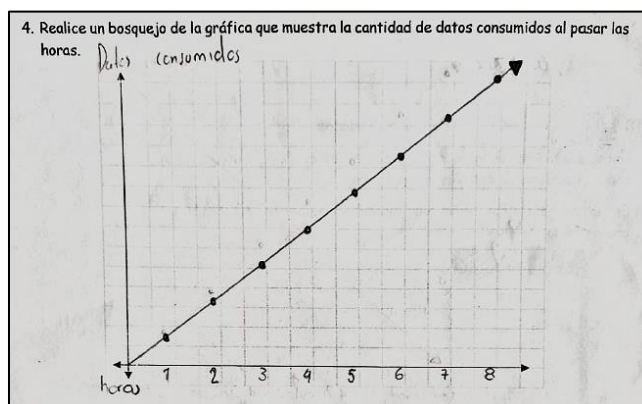
altura 0.0028 GB representa el consumo para una hora y con ello, predicen el consumo de datos para 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 horas. En tal caso, los estudiantes usan la relación entre el consumo de datos por hora y el total de los datos para predecir es decir, aprecian el cambio en el consumo de los datos en función del cambio en el tiempo y el total de los datos. Por consiguiente, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Similarmente, Est12 elabora una gráfica de barras verticales donde la altura disminuye al pasar el tiempo (ver figura 88). En tanto, la representación refleja los datos disponibles al cabo del tiempo no, el consumo de datos al pasar las horas. Además, el estudiante identifica el eje Y como el tiempo (en horas) y el eje X lo mantiene sin nomenclatura. Lo que evidencia la dificultad que tienen los estudiantes con el uso del plano cartesiano. En este caso, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 88. Respuesta de Est12 en M1-P4A.



Otro tipo de respuesta es la que se muestra en la figura 89. Los estudiantes reconocen el crecimiento constante del consumo de datos a medida que pasa el tiempo pues, a pesar de no conocer numéricamente el consumo por hora, garantizan la variación constante de una variable respecto a otra para indicar el consumo de datos para más de 1 hora.

Figura 89. Respuesta de Est13 en M1-P4A.

Sin embargo, fueron pocos los estudiantes que concibieron la posibilidad de establecer el eje Y sin nomenclatura. Los demás, optaron por forzar relaciones entre la cantidad de datos y el tiempo para establecer un consumo por hora. En la tabla 17, se mencionan las diferentes escalas que usaron los estudiantes para el eje Y, la interpretación, evidencia de aprendizaje y a la meta de aprendizaje que alude la CCM.

Tabla 17. Tipos de escala para el eje Y para la gráfica del consumo de datos en función del tiempo.

Escala en el eje y	Interpretación	Evidencia de aprendizaje	CCM
Sin graduaciones en el eje Y	No es conocida la cantidad de GB que se consumen por hora.	El estudiante reconoce que a pesar de no saber numéricamente cuánto es el consumo de datos por hora, es posible representar cómo varía el consumo de datos en función del tiempo.	Meta de aprendizaje de ritmo rápido.
Cada 0.0032 GB	Como 0.0224 GB era la cantidad de datos del plan y desde la interpretación de la información inicial indican que los datos serán consumidos al cabo de 7 horas entonces, $0.0224 \div 7 =$	Usa la comparación entre el referente inicial y los datos del plan para obtener de forma aritmética el consumo de datos por hora.	Meta de aprendizaje de ritmo moderado.

	0.0032 <i>GB</i> entonces, 0.0032 <i>GB</i> es el consumo de datos por hora.	
Cada 0.00093 <i>GB</i>	Como 0.0224 <i>GB</i> era la cantidad de datos del plan (para un día, 24 horas) realizan $0.0224 \div 24 = 0.00093$ <i>GB</i> y el consumo por hora sería 0.00093 <i>GB</i>	Asumen que en cada hora del día hay consumo y es constante.
Cada 0.0224 <i>GB</i>	Asume el total de los datos (0.0224 <i>GB</i>) como el consumo por hora.	Refleja la necesidad de articular
Cada 5<i>GB</i> o 1 <i>GB</i>	Asignan un valor al consumo por hora al azar, sin reconocer el significado en la variación con los datos dados.	la representación con datos numéricos.
		Meta de aprendizaje de ritmo lento.
Cada 0.0001 <i>GB</i>	Como 0.0224 <i>GB</i> era la cantidad de datos del plan (para un día, 24 horas) realizan $0.0224 \div 24$ y asumen 0.0001 <i>GB</i> como consumo por hora.	Asume que en cada hora del día habrá consumo de datos.

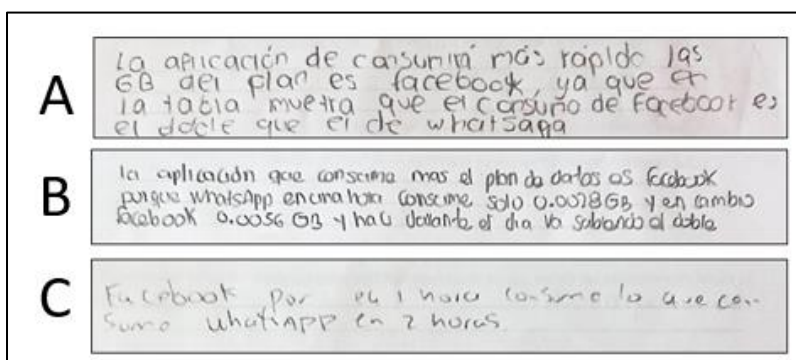
Desde la diversidad de gráficas para representar la interdependencia entre el consumo de datos y el tiempo, se evidencia que los estudiantes comprendieron la dinámica que las variables y la variación siguen pues, garantizaron un patrón de comportamiento para la variación constante, lo que constituye como característica de la práctica de predicción (Caballero, 2018).

Ahora, cuando se indaga sobre cuál es la aplicación que consumirá más rápido los datos del plan, el desarrollo de la práctica variacional de predicción se teje al anticipar el comportamiento con respecto a la variación de los dos fenómenos. En tal caso, en dicha tarea no se presenta de forma explícita la cantidad numérica de los datos del plan pero si, la representación tabular con el consumo de datos de las dos aplicaciones para las primeras 4 horas. Por consiguiente, la predicción

se fundamenta en estrategias cualitativas o cuantitativas que surgieron del estudio del carácter estable de cambio con las PV previas (comparación y seriación).

En la figura 90, se presentan respuestas basadas en estrategias cuantitativas sobre el consumo de datos de Facebook con respecto al de WhatsApp para determinar que la primera será la que consumirá más rápido los datos del plan.

Figura 90. Respuesta de Est14, Est35 y (Est4, Est32) en M3-P1A.



La figura 90A refleja que Est14 realizó una comparación entre los estados de las dos aplicaciones en la representación tabular para validar la regularidad acerca del consumo mayor de Facebook. De manera similar, lo realizaron Est4 y Est32, detalle el episodio 20.

Docente: ¿Cuál de las dos aplicaciones consume más rápido los datos?

Est4: Facebook

Docente: ¿Por qué?

Est4: Porque consume el doble.

Docente: Bien, ya sabes que el doble pero ¿qué características lo lleva a determinar que es el doble?

Est32: En la tabla, lo que cada uno hace en una hora, es más el de Facebook que WhatsApp.

Episodio 20.

Luego, tanto la figura 90B como la 90C, tienen argumentos similares al anterior, con la diferencia de que se evidencian la comparación del consumo de datos por hora, lo que refiere a la pendiente del comportamiento lineal en cada fenómeno, y la relación entre las dos aplicaciones, respectivamente. Detalle el diálogo con Est20 (ver episodio 21) quien alude al argumento de la respuesta B y C en la figura 90.

Docente: ¿Cómo hiciste el primero Est20? ¿cómo supiste cuál es mayor?

Est20: Pues, por la tabla.

Docente: ¿Cómo así?

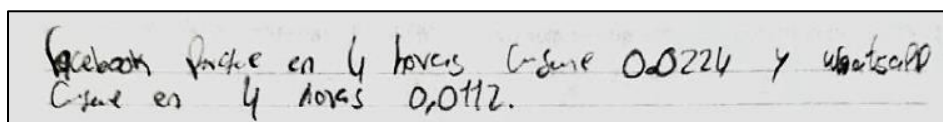
Est20: En la tabla. Lo que consume Facebook en una hora, WhatsApp lo hace en dos horas porque aquí, en una hora de Facebook son 0.0056 GB y en WhatsApp son 0.0028 GB.

Episodio 21.

Los argumentos variacionales del Est20 evidencian una validación de la relación entre el consumo de WhatsApp y Facebook a través de los datos de la representación tabular y el consumo por hora de las dos aplicaciones. Por consiguiente, los estudiantes que precisan el desarrollo de la práctica variacional de predicción con respuestas como las mostradas en la figura 90, aluden a CCM en la meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Similarmente, la respuesta discutida por Est9 y Est10 refieren a la predicción basada en estrategia cuantitativa, detalle la figura 91 y el episodio 22.

Figura 91. Respuesta de (Est9, Est10) en M3-P1A.



Est9: Profe, ¿podemos sumarlo acá en el celular?

Docente: Sí o con la calculadora. ¿y qué vas a sumar?

Est9: Estos [señala la columna de consumo de WhatsApp] ¿no? Porque es el consumo de GB. Es para saber si consume más rápido o no las GB del plan.

Docente: Muy bien. ¿Cuál de las dos consume más rápido las GB del plan?

Est9: Pues, el que de resultado mayor es el que más consume.

Docente: Ah, ok.

Est10: Pero ¿si se puede así?

Docente: Discutan entre los dos a ver a qué llegan o qué concluyen.

[Tiempo después]

Est10: Eh, sí profe, es obvio.

Docente: Y bueno ¿de qué otra manera se podría hacer?

Est10: Pues mirando.

Docente: Ajá, ¿qué miras?

Est10: Que, Facebook consume más en menos tiempo.

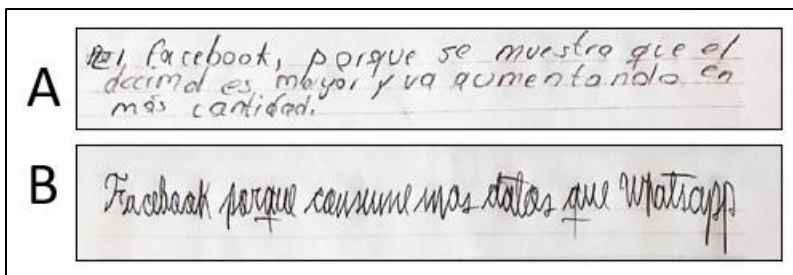
Docente: Muy bien chicos, eso también puede ser una razón.

Episodio 22.

En el episodio 22 se evidencian dos argumentos variacionales contruidos por los estudiantes. Inicialmente, optan por sumar los consumos de las primeras 4 horas para cada aplicación y comparar los totales, dicha estructura aditiva refleja que los estudiantes reconocen que la variación es constante pero diferente para las dos aplicaciones. Luego, al sumar los consumos precisan la acumulación de GB bajo la gráfica que describe el consumo de datos en función del tiempo para $t \in [0,4]$, indicando que la aplicación con mayor GB consumidos al cabo de 4 horas será la que consuma más rápido los datos. Además, Est10 comenta sobre la regularidad que surge a través de la observación de los estados en la representación tabular pues, Facebook consume mayor cantidad de datos en menos tiempo. Por ende, para esta evidencia de aprendizaje la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

Por otra parte, el Est37 indica que Facebook consumirá más rápido los datos del plan a razón de que el decimal es mayor, lo que refiere a una comparación numérica de los datos de consumo de GB (ver figura 92A). En tal caso, la predicción se basa en una estrategia cualitativa. Análogamente, el argumento presentado por Est2 (ver figura 92B), quien menciona que Facebook consumirá más rápido los datos del plan porque consume más datos que WhatsApp. Siendo así, para los dos casos, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 92. Respuesta de Est37 y Est2 en M3-P1A.



Si bien es cierto, es posible anticipar un nuevo estado a partir de relaciones de fenómenos equivalentes que mantienen la misma variación, como el caso del consumo de datos de WhatsApp

y Facebook, insumo usado por el Est20 para determinar el consumo de datos de WhatsApp para 6 horas, detalle la figura 93.

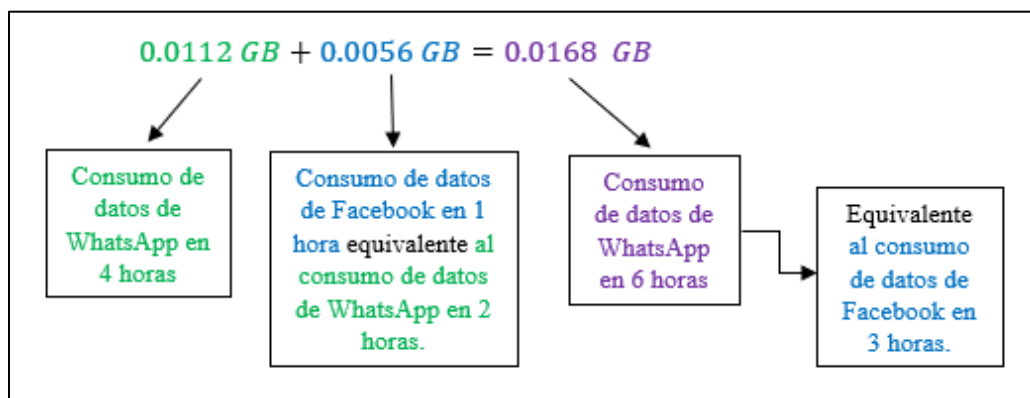
Figura 93. Respuesta de Est20 en M3-P4A.

4. El estudio "We are social" afirma que, en promedio, una persona usa WhatsApp durante 6 horas por día. ¿Cuántos GB se consumen? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

Pues si 4 horas son 0.0112 GB y cada hora de whatsapp son 0.0028 GB entonces sumamos 0.0056 GB ya que a eso equivalen 2 horas de whatsapp y ya que 4+2=6 entonces en 6 horas se gastaron 0.0168 GB y en la tabla se muestra que facebook en 3 horas gasta esta misma cantidad ya que como facebook gasta el doble entonces en 6 horas de whatsapp se gasta lo de 3 horas de facebook.

De la información de la figura 93 se interpreta que, el Est20 toma el consumo de datos de WhatsApp al cabo de 4 horas (0.0112 GB) y trae a colación la relación 1 a 2 entre el consumo por hora de Facebook y WhatsApp para sumar los consumos correspondientes para 4 + 2 horas y obtener el consumo de datos de WhatsApp para 6 horas, para mayor claridad sobre el procedimiento realizado por Est20 observe la figura 94.

Figura 94. Explicación de la respuesta mostrada en figura 93.

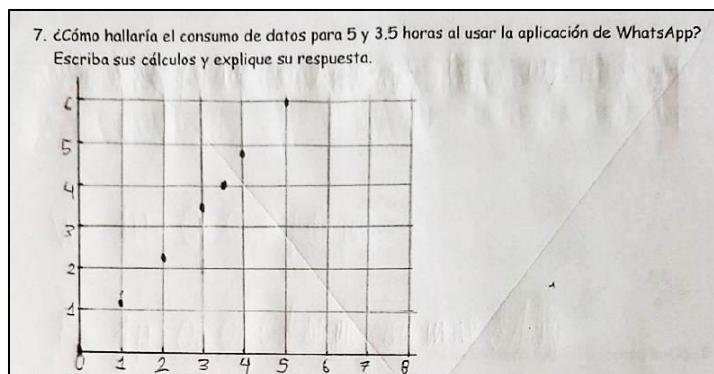


Se evidencia que el Est20 reconoce la variación de una variable respecto a otra dentro del mismo fenómeno y en fenómenos equivalentes que poseen la misma variación. Por consiguiente, se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Por otra parte, Caballero (2018) menciona que reconocer la variación permite determinar comportamientos específicos es decir, predecir. Sin embargo, no es limitante la forma en cómo un

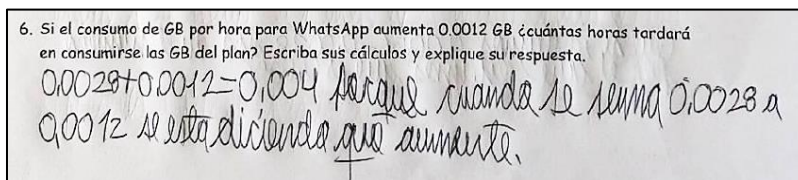
estudiante predice un nuevo estado pues, es allí donde se refleja el principio de relativismo epistemológico, desde quien construye la matemática. Por ejemplo, al preguntar por el consumo de datos de WhatsApp para 5 y 3.5 horas, el Est2 decide usar la gráfica para realizar una predicción cualitativa, observe la figura 95.

Figura 95. Respuesta de Est2 en M3-P7B.

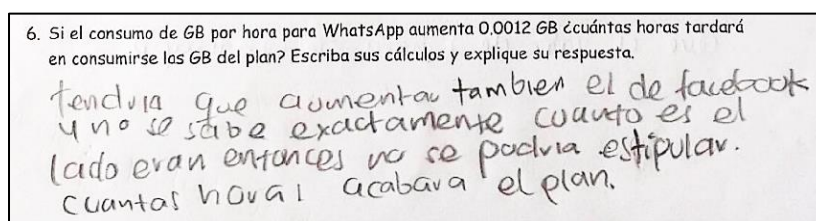


A pesar de que en tareas previas se presentó la representación tabular del consumo de datos de WhatsApp donde era posible extraer el consumo de datos por hora, el Est2 no establece escalas en el eje vertical para el consumo de datos en *GB* pero, se rescata que reconoce la variación constante de forma gráfica al mantener una distancia vertical y horizontal entre un estado y otro, incluso para fracciones de tiempo. Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Ahora, el mismo estudiante reconoce los cambios en el consumo de los datos pero, no lo usa para hallar el número de horas que la aplicación duraría en consumir los datos del plan; como sucedió en respuesta a la pregunta acerca del aumento del consumo de datos para significar la modificación de la pendiente (ver figura 96). Lo anterior indica que a pensar que los estudiantes reconocen los cambios en la pendiente, no lo usan como causal del comportamiento en la tarea que se solicita.

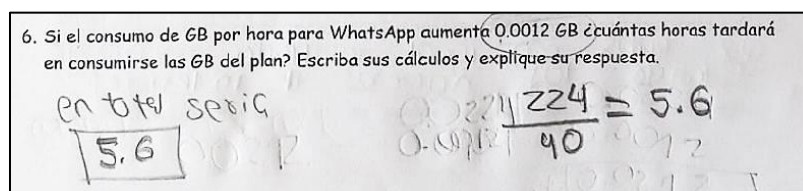
Figura 96. Respuesta de Est2 en M3-P6A.

Otro tipo de respuesta es la que reporta el Est22, quien ve la necesidad de conocer el comportamiento del consumo de datos de Facebook para poder saber qué pasa con el consumo de los datos del plan con respecto a la modificación del consumo por hora. Lo que indica que, la idea del estudiante era predecir a partir de la relación de equivalencia con el consumo de datos de Facebook, observe el argumento variacional en la figura 97.

Figura 97. Respuesta de Est22 en M3-P6A.

Por lo tanto, los argumentos mostrados en la figura 96 y 97 aluden a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Por el contrario, la Est36 usa la relación multiplicativa de apreciación del cambio de una variable respecto a otra para hallar el tiempo exacto en que la aplicación de WhatsApp consume los datos del plan. Detalle la figura 98 y el episodio 23.

Figura 98. Respuesta de Est36 en M3-P6A.

Docente: ¿Cuántos datos hay en total? revisa por ahí, que ese dato está desde el inicio.

Est36: Ah, 0.0224 GB

Docente: Ahora, ¿cuánto es el consumo por hora?

Est36: 0.0028 GB.

Docente: Pero, dice que aumenta 0.0012 GB

Est36: Lo sumo. Entonces, 0.0040 GB

Docente: Muy bien entonces, ahora el consumo por hora es de....

Est36: 0.0040 GB

Docente: Entonces, ahora, cómo haces para saber en cuántas horas se consume el total de los datos.

Est36: ¿Divido ese 0.0040 en 0.0224 GB?

Docente: ¿Seguro?

Est36: ¿O al contrario? Ah si, 0.0224 GB dividido en 0.0040 GB.

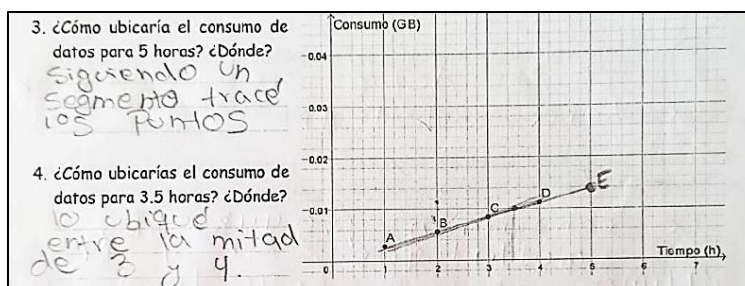
Episodio 23.

En el episodio 23 se evidencia que Est36 inicialmente reconoce la modificación a la pendiente y luego, al establecer la relación entre el consumo por hora y los datos del plan garantiza la variación constante desde la razón. Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo rápido.

La predicción desde el tratamiento gráfico favorece el reconocimiento de relaciones funcionales y la interdependencia entre las variables del fenómeno (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019a). Por esto, al indagar sobre la predicción en la representación gráfica los estudiantes se inclinan por usar la tendencia a una recta o medir distancias para garantizar la variación constante para los nuevos estados.

Por ejemplo, en la figura 99 se muestra que el estudiante ubica el punto medio entre C y D y, el punto E a partir de la tendencia al lugar geométrico de una recta, lo que evidencia el uso de una regularidad en la representación gráfica que surge de la interdependencia entre las variables para predecir nuevos estados. Detalle la figura 99 y el episodio 24.

Figura 99. Respuesta de Est29 en M3-P3B y M3-P4B



Docente: ¿Qué característica observas entre un punto y otro?

Est2: Que van creciendo de manera lenta.

Docente: ¿Qué más? ¿Los puntos están ubicados de cualquier forma?

Est2: No superan.

Docente: ¿Qué otra característica?, ¿será que yo puedo ubicar un punto en cualquier lugar?

Est2: No, no se puede.

Docente: ¿Por qué?

Est2: Porque tiene que ir de manera lenta y mantenerse [simula con la mano una recta].

Docente: ¿Mantener qué?

Est2: Como una línea.

Docente: Entonces, como ubicarías el consumo de 3.5 horas.

Est2: Buscando la distancia y el medio.

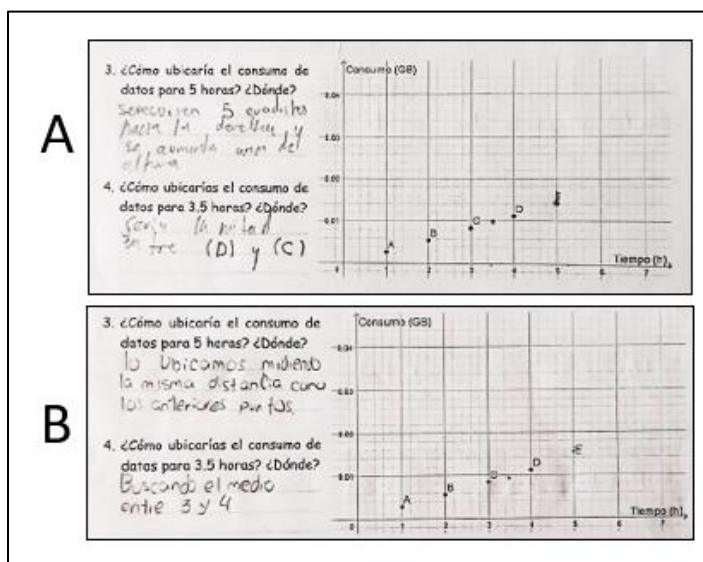
Docente: ¿El medio entre quién y quién?

Est2: Entre 3 y 4.

Episodio 24.

Del episodio 24 se evidencia que el Est2 reconoce la variación constante, esto se refleja cuando justifica que la ubicación del punto no puede ser de forma aleatoria pues, debe ajustarse a la característica de la tendencia (que describe con la mano) y el crecimiento (de forma lenta). Asimismo, reconoce que la variación constante se mantiene para estados intermedios al precisar el consumo para 3.5 horas. Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

En el mismo sentido, respuestas como la de Est7 (A en figura 100) y Est10 (B en figura 100) se fundamentan en estrategias cuantitativas métricas. En el caso de la figura 100A, el estudiante menciona que cuenta 5 cuadritos a la derecha y uno en altura, lo que refleja la variación entre el tiempo y el consumo de GB para los nuevos estados asimismo, en la figura 100B el Est10 menciona que para ubicar los puntos precisa la misma distancia entre los estados y por supuesto, la equivalencia para estados intermedios. Luego, en ambos casos, se precisa “la mitad” entre el punto C y D para ubicar el consumo para 3.5 horas. Detalle la figura 100 y el diálogo con Est4 (ver episodio 25) que registra una respuesta similar a la que se muestra en la figura 100A.

Figura 100. Respuesta de Est37 y Est10 en M3-P3B y M3-P4B

Docente: ¿Cómo ubicaría el consumo para 5 horas? Aquí en la gráfica.

Est4: Eh...

Docente: ¿Qué miras? Dime.

Est4: Estoy más o menos calculando para ponerlo.

Docente: ¿Qué cuentas?

Est4: Los cuadritos hacia arriba.

Docente: Entonces, ¿cómo harías para 3.5

Est4: Eh, no sé. ¿Pero, ese 3.5 qué ... qué significa?

Docente: Tres horas y media. De nuevo, dónde está el de 3 horas?

Est4: Acá [señala el punto]

Docente: Y el de 4 horas?

Est4: Acá [señala el punto]

Docente: Entonces, donde estaría el de 3 horas y media.

Est4: Acá. [ubica el punto en medio de los anteriores]

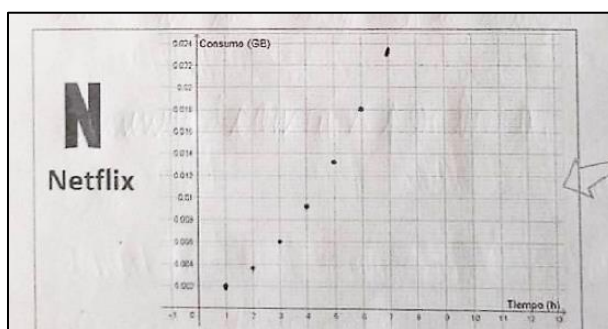
Episodio 25.

Cabe destacar que, fue recurrente en los estudiantes la confusión al momento de interpretar el número 3.5 como unidad de tiempo, en horas, como le sucedió al Est4. Sin embargo, del diálogo se resalta que el estudiante predice los nuevos estados teniendo en cuenta una distancia, medición o cálculo con respecto a la relación entre las dos variables.

En síntesis, respuestas como las que se muestran en la figura 100, la CCM aluden a meta de aprendizaje de ritmo rápido y moderado respectivamente.

La predicción consiste en la determinación de un estado desconocido de un fenómeno con base en el estudio sistemático y lógico del cambio y la variación que presenta las variables del fenómeno (Caballero, 2018 p. 41). Por ello, en el momento 4 la práctica variacional de predicción se concreta en la representación gráfica para ser justificada a partir de parámetros lineales. Algunos de los estudiantes que lograron llegar a este momento ubicaron el consumo de datos de Netflix para 7 horas teniendo en cuenta un cambio mayor que el consumo anterior, como se evidencia en la figura 101. De hecho, al preguntar sobre ¿cómo es el consumo de datos de Netflix? Los estudiantes indican que “*comienza normal pero se va elevando*” lo que se podría interpretar como: inicialmente, el consumo parece constante pero, luego aumenta. Por consiguiente, respuestas como está, donde los estudiantes indicaron el consumo de Netflix para 7 horas pero no consolidaron la justificación de forma escrita refieren a CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento.

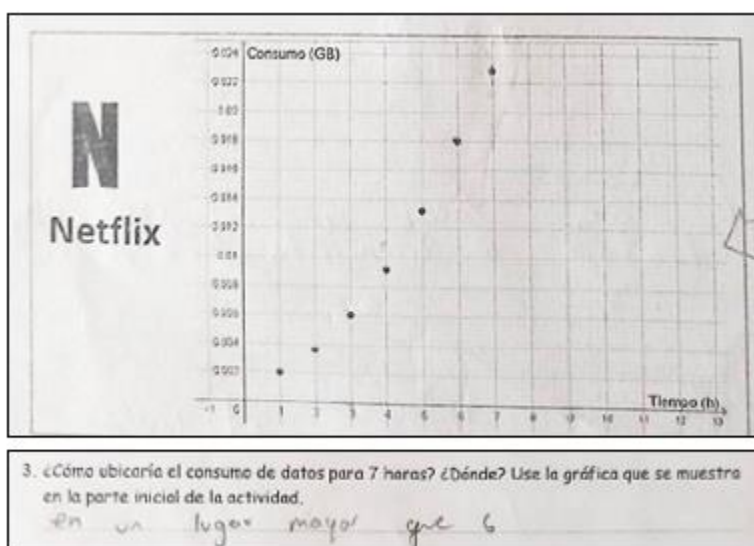
Figura 101. Respuesta de Est2 en M4-P3.



No obstante, Est9 y Est10 protagonizaron un diálogo interesante a razón de que no llegaban a un acuerdo sobre la ubicación exacta del consumo de datos de Netflix para 7 horas. Ambos coincidían en que el consumo sería mayor que el anterior es decir, no había un cambio constante entre un estado y otro. Sin embargo, Est9 justificaba su ubicación a partir de una regularidad

observada con el consumo de datos de Netflix cada 3 horas y el Est9 afirmaba que había un aumento del consumo cada 2 horas. Observe la figura 102 y el episodio 26.

Figura 102. Respuesta de (Est9, Est10) en M4-P3.



Est10: ¿Cómo ubicaría el consumo de datos para 7 horas? Entonces, yo digo que cada 2 horas aumenta. O sea va aumentando el consumo.

Est9: Es que, qué es lo que preguntan. Ubica el consumo para 7 horas usando la gráfica.

Docente: ¿Entonces?

Est10: Es que yo creo que va aquí [ubica el punto] porque al pasar tres horas aumenta y al pasar otras 3 horas aumentaría mucho más.

Docente: Exacto, aumenta más, cada vez aumenta más.

Est10: Y pille que va aumentando

Est9: Pero si acá aumento, y acá también aumento entonces, acá porque tiene que aumentar mucho más si dice que aumenta cada tres horas.

Est10: Por eso.

Est9: Acá aumenta, y luego aumentaría acá, porque aumenta más o menos cada tres horas.

Docente: Pero, si estamos de acuerdo que aumenta.

Est9: Si profe, pero él dice que aumenta como 20 cm más de lo normal y eso no es así.

Docente: Bueno, pero podemos tener una idea en común, sabemos que aumenta, aumenta más que anterior. Saber cuánto con exactitud aquí no es necesario, la idea es indicar dónde estaría más o menos el punto cumpliendo esa característica.

Est9: Pere, si él dice que aumenta cada tres horas. Pero entonces, no sería tan arriba.

Docente: Bueno, vamos concluyendo, aumenta la mismo que en 6 o más que seis.

Estudiantes: Más.

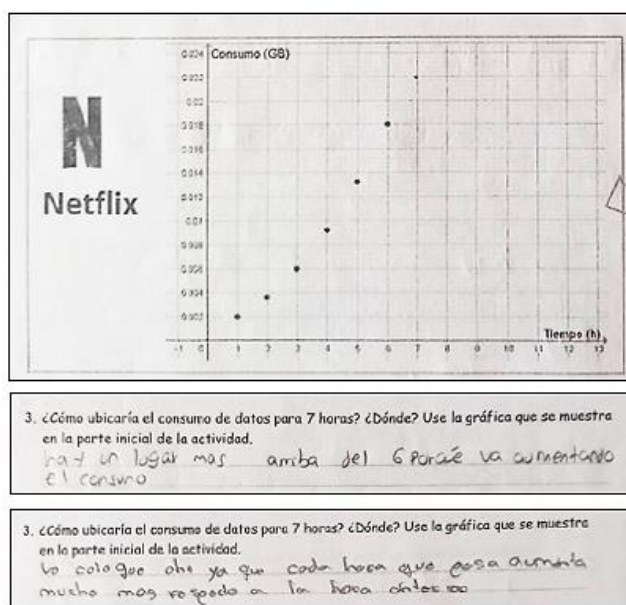
Docente: Listo, entonces dejémoslo ahí, lo importante es que cada uno lo ubico tal cual que aumenta más que en 6 horas, no nos interesa ahorita saber con exactitud cuánto aumentó, al menos cumplir con esa característica que encontraron.

Episodio 26.

Si bien es cierto, en el tratamiento gráfico se favorece la predicción cuando se busca identificar el comportamiento en periodos de intervalos concretos con el fin de reconocer qué se repite y cómo se repite pues, así se asigna un carácter dinámico a la gráfica al reconocer un tipo de comportamiento (Caballero, 2018). Similarmente a lo que hicieron los estudiantes pues, intentaron hallar una regularidad entre los estados anteriores a 7 horas con el fin de determinar con mayor exactitud la ubicación del consumo de datos Netflix para 7 horas, lo que evidencia el uso de las PV para identificar el carácter estable del cambio para luego, predecir. Por lo tanto, se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo rápido.

De forma similar, Est7 y Est20 indicaron la ubicación del consumo de datos de Netflix para 7 horas afirmando que el consumo aumenta al pasar el tiempo, como se muestra en la figura 103. Luego, se evidencia que los estudiantes buscan comparar entre un estado y otro con el fin de identificar parámetros lineales pues mencionan que, “*cada hora que pasa aumenta mucho más respecto a la hora anterior*”. En este caso, se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Figura 103. Respuestas de Est7 y Est20 en M4-P3



7.4. Práctica variacional de estimación

La práctica variacional de estimación consiste en anticipar comportamientos o tendencia del fenómeno de manera global (Caballero, 2018) entonces, los cuestionamientos en la SA llevan a responder preguntas acerca del comportamiento lineal si se supone un cambio de parámetros que afectan o no la variación, la búsqueda de la generalización a través de una expresión y el contraste global del comportamiento no lineal a través de parámetros de la variación constante.

De tal forma que, la estimación se presenta como una descripción cuantitativa o cualitativa con respecto al comportamiento de una variable en un intervalo, a través de descripciones verbales, dibujos, gráficas o indicaciones numéricas (Caballero, 2018). En la tabla 18 se muestra la mayor incidencia en las respuestas de los estudiantes con respecto a esta práctica variacional de estimación, las parejas que se muestran entre paréntesis refieren al trabajo grupal.

Tabla 18. *Estimación como una descripción cuantitativa y/o cualitativa*

Estimación como una descripción cuantitativa	Est4, Est7, Est10, Est13, Est25, Est38
Estimación como una descripción cualitativa	Est2, Est4, Est5, Est9, Est11, Est16, Est23, Est29, Est34, Est35, Est37, (Est1-Est3), (Est20 – Est22), (Est24 - Est30), (Est26 – Est28),
Respuestas que evidenciaron no comprender la tarea	Est12, Est14, Est17, Est18, Est31, Est32
Sin respuesta	Est6, Est8, Est15, Est19, Est21, EST27, Est30, Est33, Est36

Al caracterizar el desarrollo de la práctica variacional de estimación desde la CCM en cada una de las metas de aprendizaje según los ritmos y el tipo de descripción, se establecen los siguientes indicadores, ver tabla 19.

Tabla 19. *Desarrollo de la práctica de estimación según estrategia y ritmo de aprendizaje.*

	Caracterización cuantitativa	Caracterización cualitativa
Ritmo de aprendizaje lento	Predice comportamientos futuros a partir de relaciones cuantitativas (erróneas) de la variación constante. Generaliza el comportamiento lineal a partir de una estructura aditiva con el consumo de datos por hora.	Predice la relación futura de una de las variables a partir de la relación cualitativa, con respecto a la otra variable, en el comportamiento lineal. Predice un comportamiento futuro sin desprenderse de los datos numéricos conocidos.
Ritmo de aprendizaje moderado	Predice comportamientos futuros a partir de las relaciones cuantitativas de la variación constante. Generaliza el comportamiento lineal a partir de una estructura aditiva y multiplicativa con el consumo de datos por hora para un fenómeno.	Predice la relación futura entre las variables del comportamiento lineal a partir del consumo “mayor”, “menor”, “más o menos rápido”, “irregular”, “no normal” de los datos.
Ritmo de aprendizaje rápido	Predice comportamientos futuros a partir de las relaciones cuantitativas de la variación constante reconociendo cambios en variables que no afectan el comportamiento lineal. Generaliza el comportamiento lineal a partir de una estructura multiplicativa con el consumo de datos por hora para fenómenos equivalentes.	Predice comportamientos futuros a partir de la variación constante entre las variables al relacionar varias representaciones del objeto matemático.

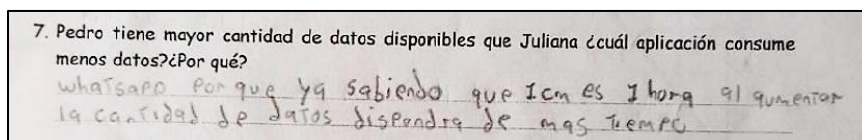
7.4.1. Estimación como una descripción cuantitativa

El carácter estable del cambio se asocia al uso de la práctica de estimación cuando esta consiste en una descripción de la intensidad del cambio. Luego, si la unidad de medida es numérica, el carácter estable del cambio se constituye como una regularidad numérica siempre y cuando se haya dado la práctica de seriación (Caballero, 2018). Por consiguiente, un argumento

variacional refleja la práctica de estimación como una descripción cuantitativa cuando se basa en datos, comportamientos y regularidades de comparaciones cuantitativas ya sean de origen numérico o métrico.

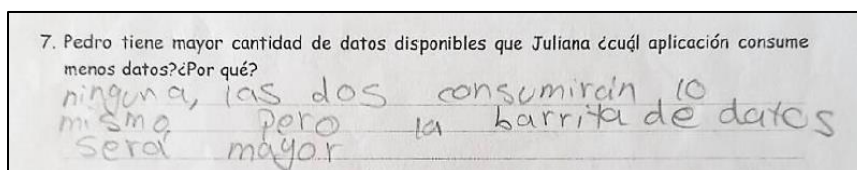
Así, al indagar sobre la aplicación que consume menos datos si se modifica la cantidad de datos del plan, la práctica de estimación se refleja cuando el estudiante reconoce que el cambio en los datos del plan no afecta el consumo de datos por hora de cada aplicación. Por ejemplo, en la figura 104, el Est27 indica que el consumo por hora de WhatsApp se representa de forma métrica como un 1cm con respecto a la barra horizontal entonces, si la cantidad de datos aumenta dispondrá de más tiempo para consumir los datos del plan.

Figura 104. Respuesta de Est27 en M2-P7B.



Por otro lado, el Est29 menciona que el consumo de datos de las aplicaciones no se verá afectado pues, lo que cambia es la barra horizontal que representa los datos del plan (ver figura 105). A pesar de que la respuesta es correcta, el estudiante omitió responder cuál de las dos aplicaciones consume menos datos. Sin embargo, se resalta que el estudiante identifica lo que cambia y la influencia o no en el comportamiento lineal.

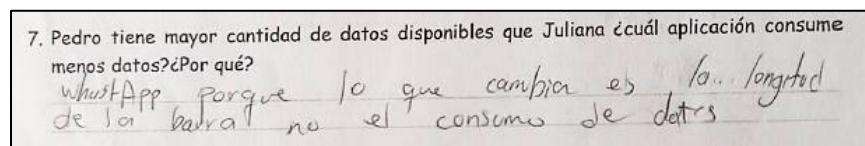
Figura 105. Respuesta de Est29 en M2-P7B.



Así, en las respuestas anteriores (figura 104 y 105) se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado y, respuestas como la Est10 (ver figura 106) refieren a meta de

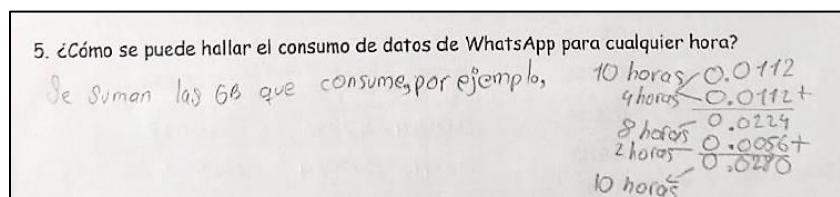
aprendizaje de ritmo rápido pues, se evidencian la comprensión acerca de la interdependencia entre las variables de fenómeno y la causalidad en el comportamiento lineal.

Figura 106. Respuesta de Est10 en M2-P7B.

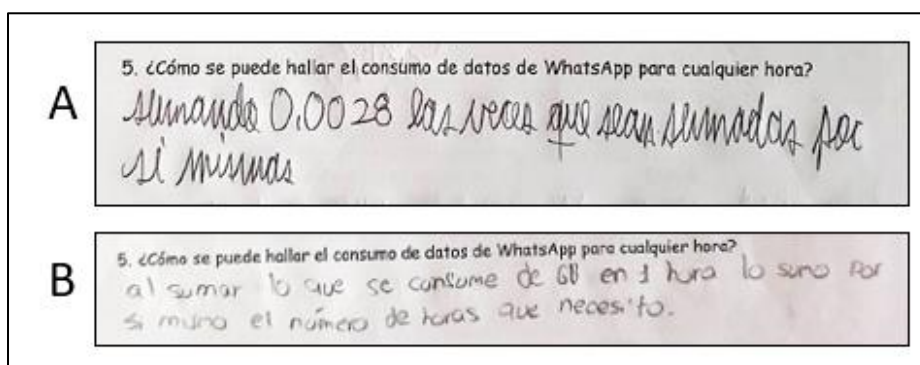


La estimación se sustenta a partir del incremento dado por el consumo por hora entonces, la estimación recae sobre una cuantificación descriptiva del consumo de datos, al reconocer cómo cambia para así, generalizar el comportamiento lineal (Caballero, 2018). Siendo así, en el momento 3 se pregunta sobre cómo se puede hallar el consumo de datos para cualquier hora con el fin de que el estudiante proponga una generalización desde la significación de la pendiente por ello, la pregunta se realiza dos veces, después del estudio de la representación tabular y al culminar el estudio de la representación gráfica. Las respuestas de los estudiantes reflejan el uso de estructuras aditivas, multiplicativas y relación de estados conocidos para generalizar el consumo de datos de WhatsApp.

Por ejemplo, en la figura 107, el Est1 indica que para hallar el consumo de datos se deben sumar estados conocidos es decir, consumo de datos de horas previas con el fin agruparlas y hallar el consumo que se desea. De hecho, ilustra el procedimiento para hallar el consumo de datos para 10 horas. En tanto, se evidencia que el estudiante identifica que es posible garantizar la variación constante de un nuevo estado a partir de la agrupación de estados que comparten la misma característica (variación constante). Sin embargo, el razonamiento del estudiante aún se encuentra ligado a la predicción de comportamientos locales en decir, no reconoce la participación de la pendiente en relación con las variables del fenómeno para describir de forma global el comportamiento lineal. Por ende, se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 107. Respuesta de Est1 en M3-P5A.

En el mismo sentido, estudiantes como Est4 y Est7 indican una generalización a partir de la suma sucesiva del consumo por hora, 0.0028 GB (ver figura 108).

Figura 108. Respuesta de Est2 y Est7 en M3-P5A.

Docente: ¿Cómo hallas el consumo de datos para cualquier hora?

Est37: Sumándole 0.0028 GB.

Docente: Pero siempre vas a necesitar el anterior y... cómo hallas el consumo para 5 horas.

Est37: Sumando también, con lo de 4 horas.

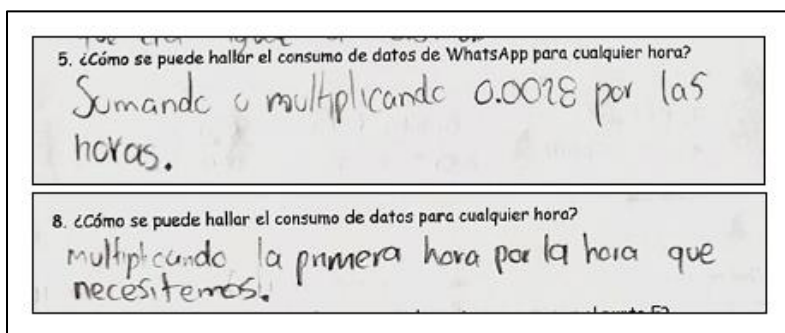
Episodio 27.

Al detallar el episodio 27, el Est37 presentó una respuesta similar a la del Est4, se identifica que a pesar de que se le incentiva a pasar de la estructura aditiva a la multiplicativa, persiste la atadura a los procedimientos aditivos a partir de los estados inmediatamente anteriores. Luego, el Est7 a diferencia de la respuesta del Est4 establece una generalización para un comportamiento lineal de consumo de datos para cualquier aplicación, pues indica que, basta con tomar el consumo de GB por hora y sumarlo por sí mismo el número de horas que se requiera (ver figura 108B).

Ahora, en la respuesta de Est21 (ver figura 109), se evidencia la transición de la estructura aditiva a la multiplicativa. No obstante, el estudiante relaciona el consumo por hora con el consumo de datos de la primera hora sin embargo, dicha equivalencia se cumple en este caso por ser una

función lineal proporcional en caso contrario, la pendiente no coincide con el consumo de datos de la primera hora. Detalle el diálogo con Est9 y Est10 (ver episodio 28) donde se refleja la transición de la estructura aditiva a la multiplicativa.

Figura 109. Respuesta de Est21 en M3-P5A y M3-P8B.



Est9: Voy sumando 0.0028 GB hasta llegar a las horas.

Docente: Ah bueno. Pero, para eso, siempre necesita saber el anterior no?

Est10: Sí, obvio.

Est9: No, porque con el mismo 0.0028 se puede descifrar. Digamos $0.0028 + 0.0028$ usted ya sabe cuántas horas lleva y cuánto se gasta cada hora.

Est10: Pues sí. Por eso. Entonces, ¿usted se va a sumar 0.0028, 8 veces?

Docente: Digamos, si le preguntan por 10 horas, necesita saber lo que pasó en las 9 horas anteriores.

Est10: Por eso.

Docente: ¿Y si no supiera los 9 anteriores?

Est10: Pues profe, 0.0028 y multiplicarlo por 10.

Episodio 28.

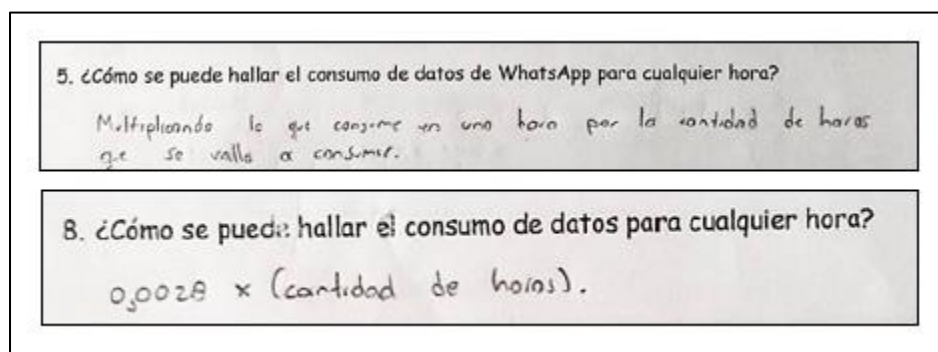
En el episodio 28 se evidencia cómo la pregunta orientadora de la docente movilizó el razonamiento de los estudiantes para establecer una generalización no dependiente de los estados previos y pasar de las sumas sucesivas al producto entre el consumo por hora y el número de horas.

Por consiguiente, respuesta como las que se muestran en la figura 108 y 109 reflejan CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Por otro lado, Est3 y Est13 coinciden en que el producto entre el consumo de datos por hora y el número de horas permite hallar el consumo de datos de WhatsApp para cualquier hora,

como se muestra en la figura 110 y 111 respectivamente. Cabe destacar que en la figura 110 se muestran dos tipos de representación para la generalización, una verbal y otra, cercana a la simbólica. De hecho, en el diálogo con Est1 y Est3 (Episodio 29) se evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para pasar de lo dicho verbalmente a la escritura, lo que refleja dificultades en el proceso de comunicación y representación.

Figura 110. Respuestas de Est3 en M3-P5A y M3-P8B.



Docente: ¿Cómo se puede hallar el consumo de datos para cualquier hora?

Est3: Pues, multiplicar por la...

Est1: Con el consumo por hora.

Est3: Si el 0.0028 GB. Pero, cómo lo escribo.

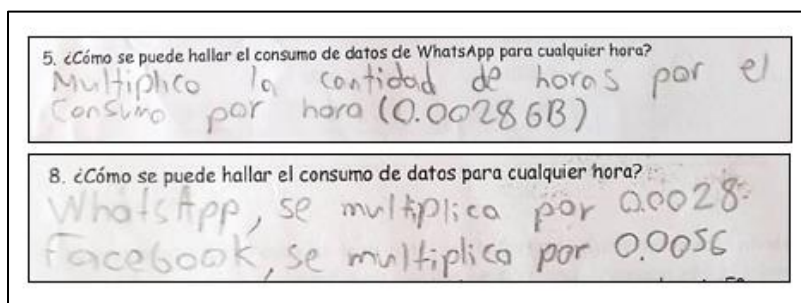
Docente: Entonces, coloca eso 0.0028 GB y como lo dijiste.

Est3: Pero como escribo lo de multiplicar?

Docente: Así tal cual, entonces, coloca un paréntesis y escribe número de horas.

Episodio 29.

Asimismo en la figura 111, el Est13 no solo describe la forma para hallar el consumo de datos para WhatsApp también, el de Facebook lo que evidencia que el estudiante reconoce la pendiente como causal para la relación entre las variables del comportamiento lineal para las aplicaciones estudiadas.

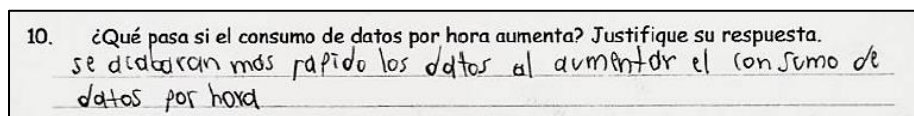
Figura 111. Respuestas de Est13 en M3-P5A y M3-P8B.

Siendo así, las respuestas inmediatamente anteriores (figura 110 y 111) aluden a CCM de meta de aprendizaje de ritmo rápido.

7.4.2. Estimación como una descripción cualitativa

De acuerdo con Caballero y Cantoral (2013) cuando se conoce el comportamiento de estados previos y luego, se pregunta sobre el comportamiento del fenómeno a corto plazo de manera global se promueve la práctica de estimación. En tanto, en el primer momento de la SA, la estimación se basa en argumentos intuitivos desde la interpretación de la relación entre las variables estudiadas en la representación pictórica.

Entonces, al indagar sobre el consumo de datos de WhatsApp si el consumo por hora aumenta, los estudiantes afirman que habrá un consumo mayor o más rápido, lo que evidencia la comprensión sobre la causalidad y consecuencia del comportamiento lineal al modificar la pendiente, observe la respuesta de Est8 en la figura 112 y el episodio 30.

Figura 112. Respuesta de Est8 en M1-P10B.

Docente: ¿Qué pasa si el consumo de datos por hora aumenta?

Est37: Se acaban más rápido los datos porque el consumo de datos es mayor.

Docente: Muy bien y qué pasará con la gráfica.

Est20: Se acabaría más rápido, es decir en menos hora se consume los datos.

Docente: ¿Y la ubicación de los puntos como sería?

Est28: Más cerquita.

Est20: Más arriba.

Est9: *Profe, entonces serían menos horas porque digamos 0.0224 dividido en 5 horas.*

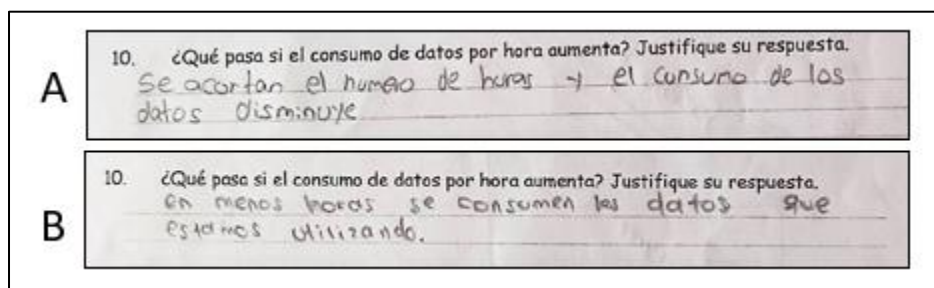
Est29: *Consume en menos horas.*

Episodio 30.

Del episodio 30, se evidencia que los estudiantes identifican los cambios en el consumo de los datos y el tiempo a razón de la modificación de la pendiente. De hecho, muestran indicios de lo que sucederá en la representación gráfica, al aumentar la pendiente la inclinación de la recta es menor por tanto, los puntos que representan el consumo de datos estarán ubicados a alturas mayores que con el consumo de datos habitual. Incluso, el Est9 menciona la posible relación numérica con los datos del plan, concibiendo el consumo en una cantidad de horas menor a 8.

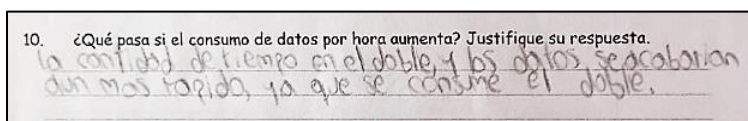
Ahora, en la figura 113A, Est7 menciona que “se acortan” el número de horas en tal caso, la palabra hace referencia a una “disminución” en la variable tiempo. En la figura 113B, el Est12 indica que en menos horas se consumen los datos. De tal modo que, los estudiantes identifican el cambio en la variables de fenómeno al modificar el consumo por hora.

Figura 113. *Respuesta de Est7 y Est12 en M1-P10B.*

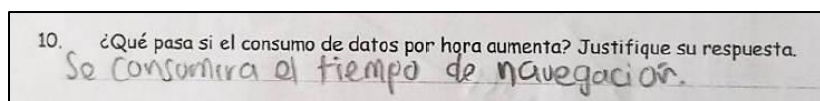


Las respuestas similares a la que se muestran en la figura 112 y 113 evidencian CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado.

Si bien es cierto, estimar un comportamiento sin contar con datos numéricos es confuso para los estudiantes más aún, para quienes el pensamiento numérico es su fortaleza. Por ello, otro tipo de respuesta es como la que se muestra en la figura 114, donde el estudiante asume que el aumento será el doble y por tanto, los datos se acabarán más rápido. Sin embargo, el razonamiento del estudiante se inclina por el aumento en cantidades enteras.

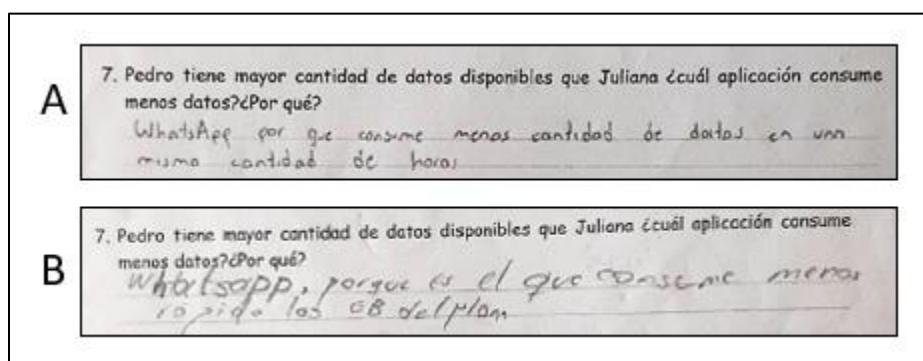
Figura 114. Respuesta de Est24 en M1-P10B.

En la figura 115, se muestra otro tipo de respuesta, donde los estudiante dan cuenta del cambio únicamente en una variable, el tiempo. Lo que evidencia que, en ese momento, los estudiantes aún no reconocían con claridad la relación de interdependencia entre el tiempo y el consumo de datos de WhatsApp.

Figura 115. Respuesta de Est22 en M1-P10B.

Por lo tanto, respuestas como las que se muestran en la figura 114 y 115 reflejan CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento.

Por otra parte, cuando se indaga sobre la aplicación que menos consume datos al modificar una variable que no afecta directamente el comportamiento lineal, los estudiantes centran la atención en la variación de cada aplicación y la relación entre ellas. Por ello, en algunas respuestas se indica que WhatsApp consume menos datos porque, en cierto tiempo, consume menos datos que Facebook (figura 116A) o consume menos rápido los datos del plan (figura 116B).

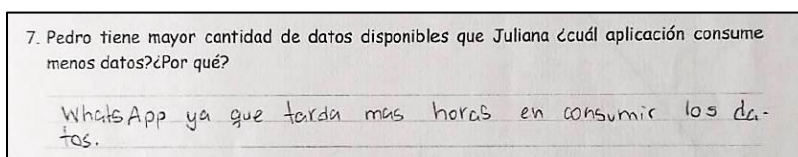
Figura 116. Respuesta de Est3 y Est37 en M2-P7B.

Luego, se refleja la práctica de estimación en el sentido de que, sin conocer los datos que tiene Pedro y realizar los procedimientos para comparar las aplicaciones, el estudiante identifica

cuál de las dos consumirá menos datos es decir, logra realizar un análisis de las magnitudes (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología 2019a).

En la figura 117, se indica que WhatsApp consume menos datos a razón de que tarda más horas en consumir los datos del plan lo que refleja una comparación con respecto al tiempo que tarda WhatsApp en consumir los datos.

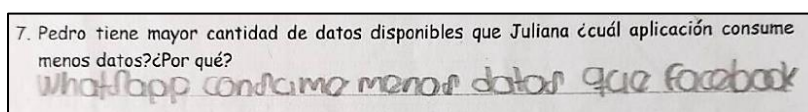
Figura 117. Respuesta de Est18 en M2-P7B.



Así, las respuestas anteriores (figura 116 y 117) evidencian CCM en la meta de aprendizaje de ritmo moderado.

En caso contrario, la siguiente respuesta (ver la figura 118) refleja la CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento a razón de que, se refleja una comparación cualitativa entre las dos aplicaciones sin dar mayor detalle.

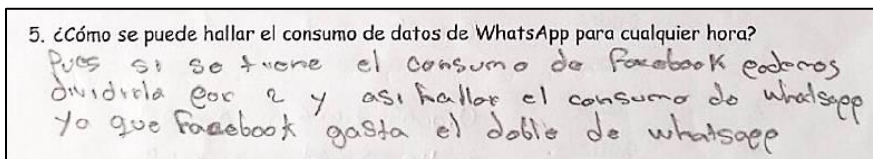
Figura 118. Respuesta de Est5 en M2-P7B.



Por otra parte, en camino a la generalización del consumo de datos de WhatsApp para cualquier hora, el Est20 menciona la necesidad de conocer el consumo de datos de Facebook para poder determinar el consumo para WhatsApp teniendo en cuenta la relación de equivalencia entre las dos aplicaciones (ver figura 119). Si bien es cierto, la afirmación no es errónea pero, alude mayormente a una predicción local a partir de la apreciación del cambio de una variable respecto a otra lo que indica que, posiblemente el estudiante no significó la pendiente como causal del

comportamiento lineal del consumo de datos hacia la generalización. Detalle la figura 119 y el episodio 31.

Figura 119. Respuesta de Est20 en M3-P5A.



Docente: El consumo de datos para cualquier hora. Tú me dices que a partir de Facebook.

Est20: Si, tomo el Facebook y lo divido entre 2.

Docente: Bien, pero bueno, ¿si no tienes el de Facebook?

Est20: Pues si me dan el total de datos, yo cogería con ese.

Docente: ¿Cómo así?

Est20: Como el consumo total se da en 8 horas, yo trataría de dividir ese total en 8 para ver si me da exacta. Como en la primera actividad, que nos daba el consumo de datos total y se hallaba el pedacito. Yo me guiaría con eso.

Episodio 31.

De hecho, en el último comentario del episodio 31, se evidencia que el Est20 sí reconoció el crecimiento constante y propone hallar la pendiente a partir de la relación entre el tiempo y el consumo total de los datos del plan entonces, la CCM refiere a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Posteriormente, se pregunta sobre las modificaciones que haría el estudiante a las variables o pendiente del comportamiento lineal para que la cantidad de datos dure para más tiempo. A pesar de que se indicó asumir la aplicación de WhatsApp como una aplicación de ejecución en primer plano, algunos estudiantes mencionaron ideas basadas en sus experiencias previas y la familiaridad con el contexto. Por ejemplo, activar el ahorro de datos, desconectar los datos móviles mientras no se usa el teléfono incluso, apagar el teléfono durante la noche que, si bien es cierto, no están alejadas de la racionalidad del contexto no aludían directamente a los parámetros de la variación constante.

Sin embargo, se encuentran respuestas como las que se muestran en la figura 120. El Est29 indica que se debe disminuir el consumo de los datos (ver figura 120A) lo que se interpreta como:

disminuir el uso de la aplicación en efecto, el tiempo de uso (ver figura 120B) o como lo indica el Est27 (ver figura 120C), disminuir la regularidad de uso de la aplicación. Siendo así, es posible que el tiempo promedio de consumo de los datos del plan sea mayor lo que implica que el consumo por hora sea menor. Por lo tanto, se evidencia CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 120. Respuesta de Est29, Est27 y Est3 en M3-P11B.

The figure shows three separate boxes, each containing a question and a handwritten answer. The question in all three is: "11. ¿Qué debería suceder para que la cantidad de datos alcance para más tiempo? Justifique su respuesta." (11. What should happen for the amount of data to last longer? Justify your answer.)

- A:** The answer is "debemos disminuir el consumo de datos." (we must decrease data consumption).
- B:** The answer is "no utilizar tan seguido la aplicación y así durar más tiempo" (not use the application so often and thus last longer).
- C:** The answer is "disminuir el tiempo en el que se usan las apps." (decrease the time in which the apps are used).

Otros estudiantes, centran la atención directamente en el consumo por hora, la pendiente del comportamiento lineal, al indicar que se debe disminuir el consumo por hora para que los datos alcancen para más tiempo es decir, el estudiante significa la pendiente como la causal de la relación entre el tiempo y el consumo de los datos. Por lo tanto, la CCM refiere a meta de aprendizaje de ritmo moderado, ver figura 121.

Figura 121. Respuesta de Est14 en M3-P11B.

The figure shows a single box with the same question as Figure 120: "11. ¿Qué debería suceder para que la cantidad de datos alcance para más tiempo? Justifique su respuesta." (11. What should happen for the amount of data to last longer? Justify your answer.) The handwritten answer is "disminuir el consumo por hora" (decrease consumption per hour).

A continuación se muestra el diálogo con algunos estudiantes acerca del mismo cuestionamiento pero con la representación gráfica, con el fin de indagar cómo los estudiantes precisan modificaciones para el comportamiento de los puntos que representa el consumo de datos de WhatsApp y su tendencia respecto a una recta paralela al eje x que representa el límite de los datos del plan.

Docente: En la gráfica ¿qué debería suceder para que la cantidad de datos alcance para más tiempo?

Est20: Necesitamos que la recta este más arriba.

Docente: A bueno, también es una opción, porque tendríamos más datos en el plan. Pero, si tenemos fija la cantidad de datos del plan, no la modificamos, ¿qué debería pasar con el consumo de datos por hora?

Est11: Disminuirlo.

Docente: Muy bien, si el consumo de datos es menor, este punto [señala uno de los puntos] no estaría aquí sino, por aquí entonces, ¿qué pasa con el resto de los puntos?

Est37: El ángulo es menor.

Docente: ¿Cuál ángulo?

Est37: La recta de los puntos.

Est32: La inclinación.

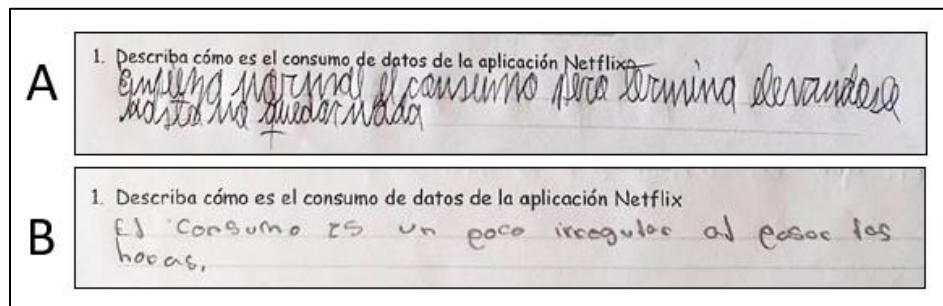
Episodio 32.

En el episodio 32 se evidencia que, los estudiantes identifican la modificación en la pendiente como causal en el comportamiento lineal con respecto a la comparación con un valor específico de la variable dependiente (en relación con el límite de los datos). Asimismo, significan gráficamente la pendiente con la inclinación de la recta a la que tienden los puntos en tanto, si disminuye el valor absoluto de la pendiente, el ángulo de inclinación también lo hará.

Por otra parte Caballero (2018) indica que, la práctica de estimación se efectúa cuando el estudiante considera los aumentos o disminuciones en ciertos tramos de la gráfica de tal modo que, al comparar con las características del comportamiento lineal va estableciendo características propias de la variación no constante. Por ejemplo, en la figura 122A el Est2 indica que inicialmente el consumo de datos parece “normal” pero, luego va elevándose más, hasta acabar con los datos. En tanto, el estudiante atribuye el término “normal” a la variación constante que observaba en el consumo de datos de WhatsApp y Facebook, lo que evidencia la apropiación del conocimiento construido en experiencias previas y lo usa para realizar comparaciones con un comportamiento que no se ajusta a los parámetros lineales. Similarmente, a la respuesta que presenta Est20 (ver figura 122B) que indica que el consumo es “irregular” al pasar las horas lo que se fundamenta en

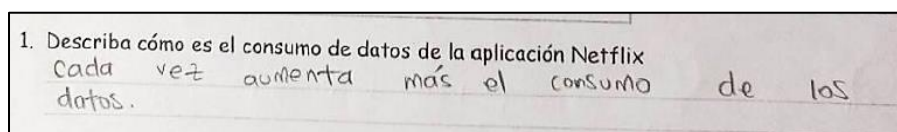
la observación de una distancia no común entre los estados. Entonces, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento.

Figura 122. Respuesta del Est2 y Est20 en M4-P1.



No obstante, otros estudiantes afirman que el consumo de datos aumenta cada vez más (ver figura 123), lo que evidencia levemente que el consumo de datos por hora no es constante. Por consiguiente, la práctica de estimación se refleja cuando los estudiantes intentan usar parámetros lineales para construir características que describan el comportamiento no lineal. Así, la CCM refiere a meta de aprendizaje de ritmo moderado.

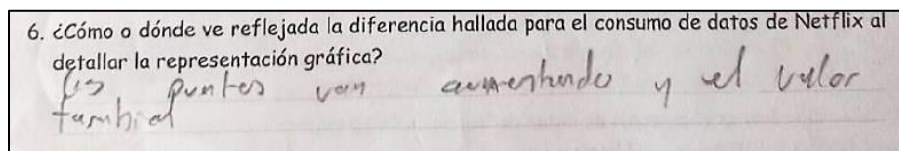
Figura 123. Respuesta de Est26 en M4-P1.



Por otro lado, pocos estudiantes lograron llegar a las últimas preguntas del momento final de la situación de aprendizaje en donde se consolidaba un acercamiento a la variación lineal desde la representación gráfica y tabular del consumo de datos de Netflix. Los únicos estudiantes que trabajaron la última tareas fueron Est9 y Est10 quienes indicaron que, la relación entre la regularidad observada con los estados en la gráfica y la diferencia consecutiva en los datos de la tabla se sustenta en un aumento de la variación en las dos representaciones, desde una perspectiva métrica de la distancia horizontal y vertical de los puntos y el crecimiento en el valor hallado a

través de la diferencia consecutiva, ver figura 124. En tal caso, los estudiantes evidencian CCM en meta de aprendizaje de ritmo rápido.

Figura 124. Respuesta de (Est9, Est10) en M4-P6.



7.5. Síntesis

La comprensión acerca de la interdependencia entre las variables de la SA se movilizó en el desarrollo de las PV que desde los aspectos teóricos se reflejaron en las categorías reportadas por Caballero (2018) y Caballero y Moreno (2017) teniendo en cuenta la diversidad en la CCM desde la racionalidad y la resignificación que surgió de la realidad, experiencias y características de cada estudiante. Siendo así, esa diversidad fue concebida en garantía de condiciones que propiciaron la inclusión en el aprendizaje y por supuesto, un aula inclusiva de matemáticas.

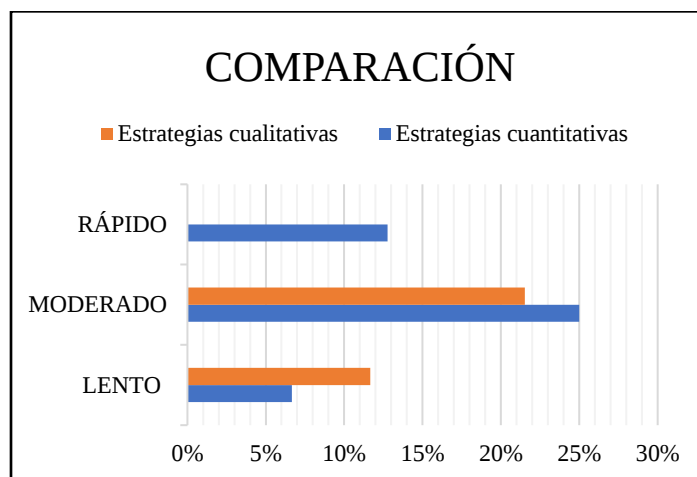
Luego, en términos de la articulación con la caracterización del grupo diverso y una práctica de enseñanza basada en las habilidades de cada estudiante, se evidenciaron los alcances en relación con la meta de aprendizaje en los tres ritmos, lo que posibilitó mostrar el desarrollo de cada una de las PV valorando la CCM de cada estudiante.

La construcción de argumentos variacionales en el estudio del carácter estable del cambio fue más cercano a la actividad del estudiante. En general, los estudiantes lograron comparar e identificar regularidades en los estados de un comportamiento lineal, dos equivalentes y uno no lineal en las distintas representaciones del objeto matemático. Sin embargo, el ritmo de aprendizaje moderado y rápido fue mayormente evidenciado cuando las tareas variacionales se basaban en la representación pictórica y tabular que en la gráfica, a razón de la fortaleza que tienen los

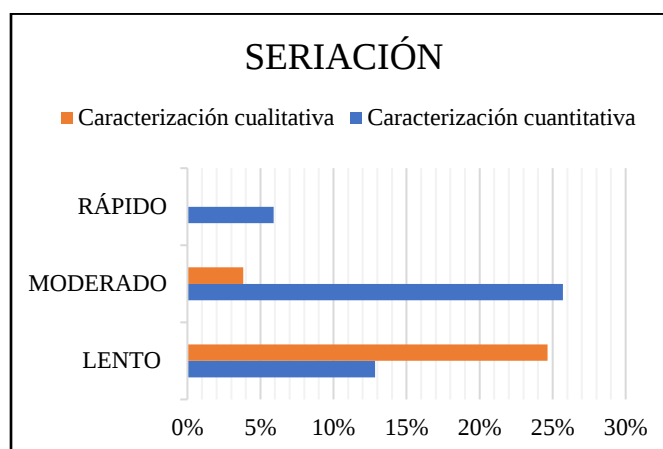
estudiantes en el pensamiento numérico y el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos que en los demás pensamientos y procesos matemáticos.

Con respecto a la práctica variacional de comparación cerca del 47% de los estudiantes evidenciaron CCM en meta de aprendizaje de ritmo moderado, aproximadamente el 19% en ritmo lento y 13% en ritmo rápido, como se aprecia en la figura 125. No obstante, 5 estudiantes no evidenciaron el desarrollo de la práctica. Teniendo en cuenta que, de acuerdo con Cuellar (2019) la práctica de “comparación es la más frecuente al momento de analizar una situación variacional” (p.134).

Figura 125. Desarrollo de la práctica variacional de comparación.

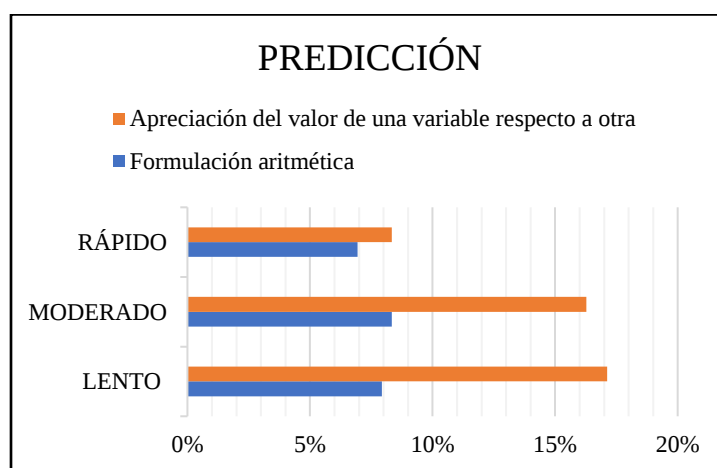


Luego, pasar de las comparaciones entre estados a la identificación de una regularidad que describiera el comportamiento lineal implicó mayor orientación y razonamiento en el estudiantes. Por ello en la práctica variacional de seriación, el mayor número de estudiantes (14) evidenciaron CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento, 11 estudiantes en ritmo moderado y 2 de ritmo rápido, como se observa en la figura 126. Sin embargo, 4 estudiantes no evidenciaron el desarrollo de la práctica.

Figura 126. *Desarrollo de la práctica variacional de seriación.*

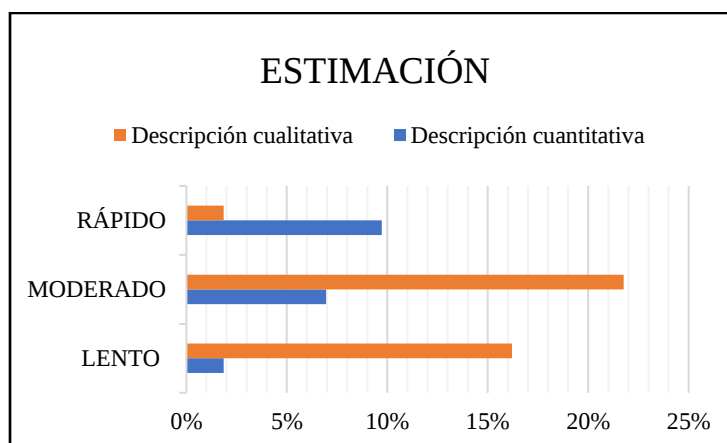
Ahora con respecto al carácter futuro del cambio, como era de esperarse, fue recurrente el uso de estrategias aditivas para realizar predicciones locales. Asimismo, se evidenció que los estudiantes usaron la interdependencia entre las variables, la interpretación de variables fijas y la relación entre los dos fenómenos para establecer estimaciones para el comportamiento lineal. Sin embargo, persistió la necesidad de articular datos numéricos para construir procedimientos que justificaran los argumentos variacionales.

Con respecto a la predicción, cerca de la mitad de los estudiantes evidenciaron CCM en meta de aprendizaje de ritmo lento o moderado, el restante en ritmo rápido (ver figura 127). Considerando que, 5 estudiantes no evidenciaron el desarrollo de la práctica.

Figura 127. *Desarrollo de la práctica variacional de predicción.*

Finalmente en relación con la práctica variacional de estimación, el 29% de los estudiantes reflejaron CCM en ritmo de aprendizaje moderado, 18% en ritmo lento y aproximadamente, el 12% en ritmo rápido (ver figura 128). No obstante, 6 estudiantes no evidenciaron el desarrollo de la práctica.

Figura 128. Desarrollo de la práctica variacional de estimación.



Finalmente, en la tabla 20 se presenta la síntesis de la CCM en relación con las metas de aprendizaje en los ritmos en los que cada estudiante reflejó mayor incidencia con respecto a cada una de las PV comparado con el ritmo de aprendizaje identificado en la caracterización. Para mayor claridad en la lectura de la tabla: los estudiantes que se encuentran cada dos filas sombreados representan los grupos de trabajo en binas y, la expresión “No hizo” refiere al no desarrollo de la práctica que, mayormente coincide con los estudiantes que no resolvieron la tarea.

Tabla 20. Comparación ritmo de aprendizaje en la caracterización y durante el desarrollo de las PV.

	Ritmo de aprendizaje identificado en la caracterización	CCM en el desarrollo de las PV			
		Comparación	Seriación	Predicción	Estimación
Est2	Moderado	Moderado	Lento	Lento	Moderado
Est37	Rápido	Rápido	Moderado	Lento	Moderado
Est7	Moderado	Rápido	Moderado	Moderado	Moderado
Est8	Moderado	Moderado	No hizo	No hizo	No hizo
Est4	Lento	Moderado	Lento	Moderado	Moderado
Est32	Moderado	Moderado	Lento	Moderado	Moderado
Est28	Moderado	Moderado	Lento	Lento	Moderado
Est26	Moderado	Moderado	Lento	Moderado	Moderado
Est36	Moderado	No hizo	Moderado	Rápido	No hizo
Est19	Moderado	No hizo	Lento	Moderado	Lento
Est27	Rápido	Moderado	Moderado	Rápido	Moderado
Est13	Lento	Moderado	Lento	Rápido	Moderado
Est9	Rápido	Moderado	Rápido	Moderado	Rápido
Est10	Moderado	Moderado	Rápido	Moderado	Rápido
Est29	Rápido	Moderado	Moderado	Lento	Moderado
Est14	Lento	Moderado	Lento	Lento	Moderado
Est1	Rápido	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado
Est3	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado

Est24	Rápido	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado
Est30	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado
Est5	Lento	Moderado	Moderado	Lento	Moderado
Est21	Rápido	No hizo	No hizo	Moderado	No hizo
Est38	Moderado	Moderado	No hizo	Lento	Moderado
Est16	Moderado	Moderado	No hizo	No hizo	Moderado
Est34	Lento	No hizo	Lento	Lento	No hizo
Est18	Rápido	No hizo	Lento	No hizo	No hizo
Est25	Moderado	Moderado	Moderado	Lento	Moderado
Est23	Lento	Moderado	Moderado	Lento	Moderado
Est17	Rápido	Moderado	Moderado	Lento	Moderado
Est11	Moderado	Moderado	Moderado	Lento	Moderado
Est12	Lento	Moderado	Moderado	No hizo	Moderado
Est35	Moderado	Moderado	Lento	No hizo	Moderado
Est6	Lento	Moderado	Moderado	Moderado	No hizo
Est31	Rápido	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado
Est20	Rápido	Moderado	Moderado	Moderado	Lento
Est22	Moderado	Moderado	Lento	Moderado	Lento

Si bien es cierto, los estudiantes no evidenciaron un mismo ritmo de aprendizaje para todas las preguntas ya que como indica Ortiz (2005, citado por Gallego e Illescas, 2007) los ritmos de aprendizaje no son definitivos y su reflejo depende de la actividad, interpretación y contexto en el

momento. De hecho, a pesar de que los estudiantes estaban trabajando en binas, en algunos casos, el argumento variacional no refería a meta de aprendizaje en el mismo ritmo, esto se debe a las “huecos cognitivos” en el proceso de comunicación, desacuerdos, trabajo individual o diferencias en la estructura del argumento al momento de condensarlo en la respuesta.

Además, se precisa que en algunos casos la organización conveniente de las binas a partir de las características y necesidades individuales de cada estudiante benefició la CCM alrededor de la variación constante. A pesar de eso, algunos estudiantes no trabajaron las actividades de la SA por ende, no reflejaron el desarrollo de las PV como el caso de: Est8, Est36, Est21, Est34, Est18 y Est6.

Por último, la dificultad, objetivo y desenvolvimiento del estudiante frente a cada tarea variacional precisó el razonamiento y CCM frente al desarrollo de las PV. Teniendo en cuenta que, la identificación de ritmos de aprendizaje a priori posibilitó la consideración del nivel de apoyo, orientación y exigencia para cada estudiante según sus características y necesidades y más aún, la valoración del aprendizaje en el grupo diverso.

CAPITULO VIII. UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO DE PRÁCTICAS VARIACIONALES EN UN GRUPO DIVERSO

Este trabajo de investigación surge de una problemática ubicada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en un aula inclusiva donde la instrucción docente, las actividades, las características del aula, la discusión de la matemática y la caracterización del grupo diverso sustentan la CCM, alrededor de la variación y el cambio. De tal modo, se precisa la inclusión en el aprendizaje desde la CCM en las diferentes metas de aprendizaje para el desarrollo de las PV en el estudio de la variación constante. Donde cada meta es definida según los ritmos de aprendizaje.

Desde luego, reconocemos que este trabajo no presenta una solución final que garantiza la CCM al propiciar un aula inclusiva de matemáticas pero sí, es un acercamiento a una estrategia metodológica que reconoce la heterogeneidad de un grupo diverso; indica como punto de partida las habilidades más allá de las debilidades del estudiante, y precisa la práctica de instrucción en función de la problematización de la matemática y del sujeto que aprende. Siendo así, cabe recordar que la pregunta que orientó este trabajo de investigación fue:

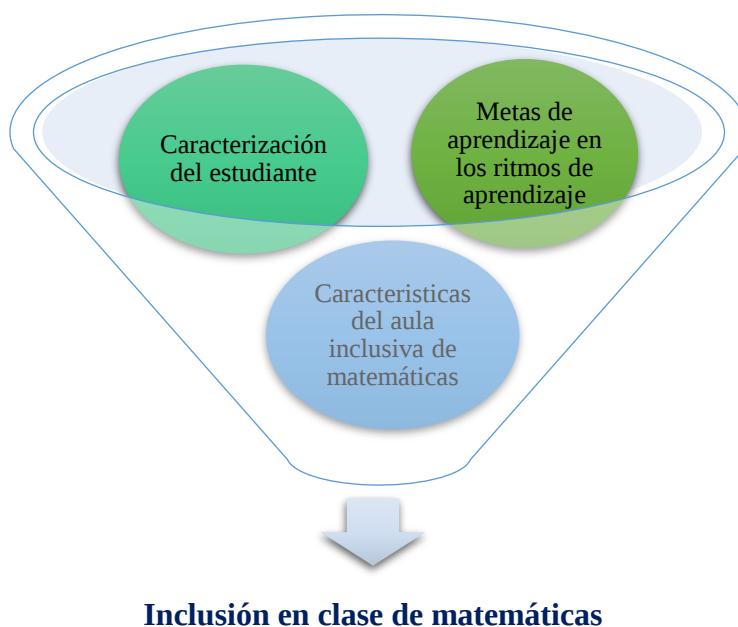
¿Cómo promover el desarrollo de las prácticas variacionales en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado?

De tal forma que, este apartado se subdivide en dos partes: (1) para concluir, se describe la estrategia metodológica que responde a la pregunta de investigación; (2) otras consideraciones, donde se presentan algunas conclusiones adicionales en relación con la participación del docente, la inclusión y el contexto del estudiante.

8.1. Para concluir

Se concibe una estrategia metodológica como un conjunto de principios, métodos y procedimientos que orientan la práctica de enseñanza y aprendizaje por tanto, a lo largo de este trabajo se infirió que, la investigación en educación matemática para la diversidad requiere un engranaje entre *el conocer a quien aprende, valorar el aprendizaje desde las habilidades y características del estudiante ,y por supuesto, garantizar ambientes de inclusión en la clase de matemáticas*. Por ello, este apartado responde a estos tres elementos a partir de los resultados de esta investigación como se aprecia en la figura 129.

Figura 129. Estrategia metodológica para la inclusión en clase de matemáticas.



8.1.1. La caracterización como punto de partida para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas

La caracterización como un proceso detallado que indagó elementos del entorno personal, familiar, social y escolar de los estudiantes posibilitó el acercamiento a la realidad del grupo

diverso y a la detección de habilidades, desarrollo del pensamiento matemático, intereses, ritmos de aprendizaje, entre otros aspectos.

En particular, las características individuales en el ambiente familiar se vieron reflejadas en la empatía, comunicación, desenvolvimiento en las interacciones con compañeros, trabajo individual y grupal durante el acompañamiento y la implementación de la SA. Pues, como docente investigadora, tener una “radiografía” de la situación personal del estudiante movilizó sensibilidad y empatía para favorecer el apoyo en los procesos individuales, y a no juzgar o dejarse contagiar de los prejuicios sociales de la comunidad educativa. Así como, persistir en el objetivo de que todos los estudiantes del grupo diverso pueden aprender.

Evidentemente, los estudiantes diagnosticados con NEE o trastorno de aprendizaje precisaron tres casos totalmente disyuntos, desde el apoyo familiar, la integración, el interés por aprender, la capacidad de trabajar de forma colaborativa, la participación y en general, el desenvolvimiento durante la implementación de la SA.

En el caso de Est2 y Est4, el desempeño en la implementación de la SA fue similar al común durante las observaciones al destacar algunos elementos que desde la caracterización significan el actuar del estudiante.

En particular, el Est2 quien desde la caracterización reflejó mayor fortalecimiento en el aprendizaje desde lo gráfico y visual, en el desarrollo de la tareas se evidenció la construcción de argumentos variacionales basados en estructuras y relaciones en la representación gráfica (como se evidenció en la figura 95) y la identificación de regularidades principalmente con estrategias cualitativas ya que, como indica Díaz y Andrade (2015) los estudiantes con autismo tienen mayor tendencia a describir y señalar las características en lugar de mencionarlas. Además, la condición

propia del autismo precisa la apropiación de elementos repetitivos para establecer rutinas lo que favoreció la comparación de parámetros en un comportamiento no lineal ya que, el estudiante se había apropiado cualitativamente de la variación constante en tanto, el comportamiento de los puntos en la gráfica del consumo de datos de Netflix refería a una características fuera de lo “normal”, que es expresado con seguridad en las respuestas del estudiante.

Cabe destacar que, la personalidad de Est2 en términos de interés e independencia para resolver actividades en el aula no se vio afectada notablemente por el compañero de grupo. De hecho, al identificar que con el primer compañero de grupo no había funcionado la estrategia de tutor, se realizó el cambio para la segunda sesión donde, la comunicación y el apoyo se vieron favorecidos. Siendo así, en la caracterización se identificó ritmo de aprendizaje moderado y en la implementación, la CCM se mantuvo en ritmo lento y moderado.

Con respecto al Est4, en la caracterización se evidenció la poca dinámica de trabajo independiente y la importancia de la red de apoyo para la solución de actividades. Durante la implementación, en cuanto a los procesos y habilidades, el trabajo grupal con el Est32 benefició la interpretación de representaciones, el desarrollo de los procesos de comunicación y razonamiento. No obstante, fue necesaria la intervención a través de preguntas orientadoras con el fin de que el estudiante construyera sus propios argumentos. Siendo así, en la caracterización se identificó un ritmo de aprendizaje lento y durante el desarrollo de la SA la CCM aludió a ritmo lento y moderado.

Con respecto al Est8, desde la caracterización se identificaron elementos del entorno familiar que restringen las habilidades del estudiante al dar mayor importancia a las condiciones y dificultades que a sus habilidades por ello, su dependencia a esperar condiciones y respuestas educativas especiales que le lleven un menor esfuerzo, es allí donde se evidencia que la

sobreprotección del estudiante y la desconfianza en la relación familia-escuela afecta su proceso educativo (Antognazza y González, 2011). Luego, desde la SA se concibió el principio de que todos los estudiantes podrían aprender al tener en cuenta sus habilidades, sin embargo, a pesar de que se movilizaron las características de un aula inclusiva de matemáticas, de que los compañeros de trabajo insistieron en la realización de las actividades, de que la investigadora docente estuvo al pendiente ofreciendo el apoyo necesario, el estudiante no se interesó por resolver las tareas. Incluso, se mostró apático, indiferente y algunas veces decidió colocarse sobre el escritorio y dormir. Por ende, Est8 no reflejó el desarrollo de las PV.

Por otro lado, la **SA respondió a los objetivos de motivación e interés en los estudiantes**. La cercanía y el conocimiento de los estudiantes frente al contexto de la situación posibilitó que emergiera de forma natural la discusión de la variación constante, la significación de las regularidades y características de la interdependencia entre las variables en el comportamiento lineal es decir, la significación en la CCM. Por lo tanto, la caracterización en términos de la conducta adaptativa y desarrollo personal permitió diseñar una SA que respondiera a las características, necesidades e intereses del grupo diverso.

En relación con las funciones neurocognitivas, se evidenció que las tareas repetitivas desde el trabajo con lápiz y papel y, el trabajo en GeoGebra favoreció la interpretación de la interdependencia entre la variables, la comparación, validación y la formalización del conocimiento. Asimismo, el detalle en el diseño de las instrucciones para que fueran precisas, concretas y mayormente comprensibles para los estudiantes posibilitaron el trabajo autónomo.

En relación con los procesos generales, durante la caracterización se evidenció que el proceso matemático mayormente fortalecido en los estudiantes era el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, razón por la cual durante la implementación se

evidenció la fuerte necesidad de los estudiantes de operar datos numéricos de la situación y se les dificultó reconocer que era posible caracterizar el cambio y la variación desde elementos intuitivos y cualitativos sin necesidad de forzar cálculos. Más aún, fue interesante percibir cómo fueron fluyendo los procedimientos y la relación con los datos numéricos posterior a la interpretación desde la representación pictórica y gráfica desde elementos descriptivos e intuitivos. En cuanto al proceso de razonamiento los mayores hallazgos se evidenciaron en las discusiones de los estudiantes y la socialización donde, la intención era convencer al otro sobre la estrategia de solución. En tanto, a la par se evidenció el fortalecimiento del proceso de comunicación en la medida en que, como docente-investigadora se plantaban preguntas orientadoras en función de la estrategia propuesta por el estudiante, el objetivo y la meta de aprendizaje con respecto a su ritmo. En la figura 130, se evidencia un espacio de discusión entre dos grupos de estudiantes.

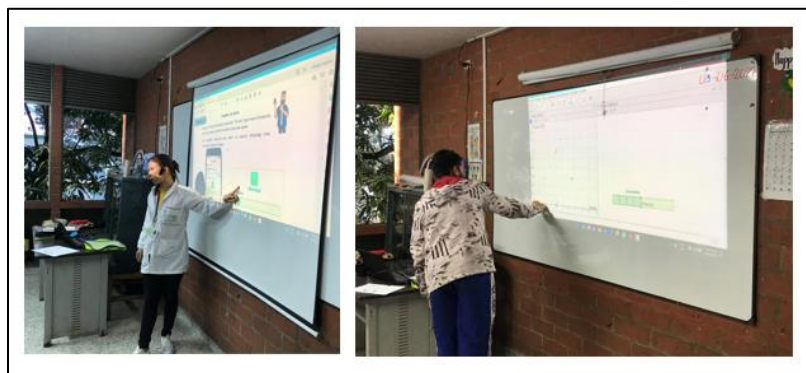
Figura 130. *Discusión entre estudiantes*



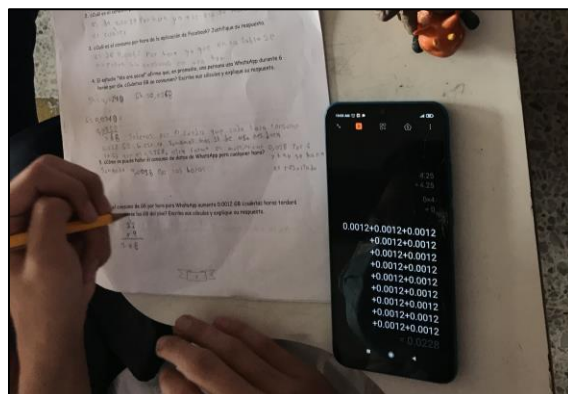
Por otra parte, en la caracterización se identificó ***la tecnología como distractor y atractor de la atención de los estudiantes*** lo que motivó al uso de las diferentes herramientas y ventajas del software de geometría dinámica GeoGebra. A pesar de que no fue posible el uso individual del software, la socialización y la manipulación de la herramienta por parte de la docente investigadora favoreció el desarrollo de las PV, dando cabida a la interpretación y relación entre las diferentes

representaciones del objeto matemático. En la figura 131, se evidencia el uso de las proyecciones y GeoGebra para la explicación, orientación y participación del estudiante.

Figura 131. *Uso de la tecnología en el aula inclusiva de matemáticas.*



El sistema educativo sufrió algunos cambios a raíz de la pandemia del COVID-19. Por ejemplo, el uso de teléfono celular y/o computadores fue fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Pero, al regresar a la modalidad presencial la docente del curso retomó ciertas restricciones como la del uso del teléfono celular ya que este, desde su perspectiva, se limita a ser un distractor y no una herramienta para el aprendizaje. Sin embargo, durante la implementación se accedió a que los estudiantes usaron el teléfono para realizar cálculos e incluso, detallar el consumo de datos que se registra en el aparato. En tanto, la posibilidad de usarlo amplió las expectativas de los estudiantes frente a las estrategias para resolver una tarea y ante la posibilidad de hacer cálculos de forma rápida y precisa. En la figura 132, se evidencia cómo el estudiante usa la calculadora del teléfono para realizar sumas sucesivas de un valor constante.

Figura 132. *Uso del teléfono para realizar cálculos.*

Si bien es cierto, el ***abandono de estereotipos y prejuicios sociales*** observados desde la caracterización del estudiante y lo que puede o no aprender, precisa un contraste necesario para la orientación, flexibilización, apoyo e instrucción al estudiante. Por ejemplo, Est9 y Est10 eran reconocidos por los docentes debido a la indisciplina, desinterés y consumo de sustancias alucinógenas, que posiblemente está relacionado con el abandono familiar y las dinámicas del contexto personal que fueron identificadas desde la caracterización. No obstante, con respecto al desarrollo de las PV y en general, el razonamiento y resolución de las tareas propuestas en la SA, fueron los estudiantes más destacados. Se evidenció que su CCM es de ritmo rápido, pues, identificaban patrones y regularidades en menos tiempo, relacionaban ideas y construían argumentos variacionales elaborados para significar el comportamiento lineal.

Similarmenete, el Est13 y Est36 quienes los docentes caracterizaban por su excesivo desinterés en clase de matemáticas. En la implementación, se evidenció que la SA no limitó que los estudiante se sumergieran en ella, de hecho se reflejó constantemente su interés en la manera en que significaban o contradecían ideas usando el conocimiento del contexto. En común, los dos estudiantes tenían dificultades para expresar sus ideas de forma verbal en tanto, usaron estrategias gestuales, corporales o hicieron uso del teléfono celular para agilizar estrategias de solución.

Por lo anterior, es importante tener en cuenta que cuando se rotulan, etiquetan o se ven a los estudiantes desde una categoría se crean falsas expectativas, prejuicios y presunciones acerca de su comportamiento frente a una situación (Blanco, 2009) limitando el desenvolviendo del estudiante, la oportunidad de crear nuevas experiencias, y la valoración de su aprendizaje.

Finalmente, acerca de la ***universalización e individualización de la enseñanza*** reflejada en la implementación de algunos principios del DUA, del PIAR para los estudiantes diagnosticados y la flexibilización desde las adaptaciones curriculares (planteadas desde la caracterización y las que surgieron en el aula durante el desarrollo de la implementación), se concluye que las adaptaciones pensadas en el diseño de la SA favorecieron la inclusión en el aprendizaje. Esto, porque se observó que la CCM, desde la emergencia de PV, fue mayormente de un ritmo moderado (ver tabla 20).

Asimismo, se reconoce que la caracterización realizada fue muy detallada en tanto que se buscaba obtener una “radiografía” lo más precisa posible del grupo diverso. Pero, tal vez un profesor en ejercicio, que cuenta con toda su carga laboral, no podría replicarla por cuestiones prácticas. De hecho, se dice que los docentes únicamente conocen los diagnósticos del sector de la salud generalmente, porque no cuentan con las herramientas y organización para realizar una caracterización más profunda (MEN, 2017). No obstante, ante la posibilidad de un buen liderazgo y organización de la comunidad educativa, sí sería posible tener una caracterización del grupo para ser actualizada en los términos necesarios, ya sea cada vez que sucede una eventualidad o de forma anual. De tal modo, que como se concluyó en el apartado de revisión bibliográfica, la caracterización constituye un punto de partida fundamental para estructurar una respuesta educativa acorde a las necesidades y características del estudiante y su contexto.

8.1.2. Contribuciones a la caracterización del pensamiento variacional a partir de las prácticas variacionales

Desde los principios de la TSME se reconoce la relatividad epistemológica en la CCM desde lo individual y colectivo. Asimismo, la educación inclusiva resalta la flexibilización en las formas de reconocer y valorar el aprendizaje de todos los estudiantes en tanto, desde este trabajo de investigación se atiende la diversidad en el aula de matemáticas desde la valoración de la CCM caracterizado a partir de los diferentes ritmos de aprendizaje al identificar descriptores en los argumentos variacionales que reflejaron el desarrollo de las PV. De tal modo que, a las estrategias que menciona Caballero (2018) acerca del desarrollo de las PV se detallan diversas formas en que dentro de cada una de ellas, los estudiantes operan el cambio y la variación en el comportamiento lineal, en lo que fue necesario describir la CCM desde los ritmos de aprendizaje. Por ende, resulta importante definir cada ritmo de aprendizaje al contrastar la perspectiva teórica, metodológica y consecuente de esta investigación.

Se dice que un estudiante es de *ritmo de aprendizaje lento* frente a una tarea cuando requiere de apoyo o sub-instrucciones cortas para comprender un enunciado, instrucción o plantear una estrategia de solución, sus momentos de concentración son cortos, requiere que todos los pasos procedimentales sean justificados, leve comprensión y uso de símbolos, tiene mayor agilidad para identificar características en las representaciones gráficas y pictóricas que las demás, es común que use señales, gestos o movimientos corporales para explicar cuando no se da la fluidez verbal y requiere mayor tiempo para revolver la actividad

Por el contrario, un estudiante que refleja *ritmo de aprendizaje rápido* frente a una tarea o actividad cuando se identifica la profundidad en la comprensión de las instrucciones o enunciados sin orientación o apoyo, relaciona representaciones del objeto matemático, realiza nuevas

preguntas o plantea conjeturas como consecuencia de la solución a una tarea, usa y significa símbolos matemáticos, expresa con seguridad sus argumentos evidenciando causales y consecuentes, busca constantemente convencerse a sí mismo y a los demás y, en poco tiempo resuelve la actividad.

De tal modo que, se dice que un estudiante es de *ritmo de aprendizaje moderado* frente a una tarea o actividad cuando comprende los elementos necesarios y suficientes en instrucciones o enunciados, no siempre requiere apoyo para resolver la actividad y en algunos casos, el estudiante es quien solicita el apoyo en ideas concretas, comprende representaciones del objeto matemático y lenguaje simbólico, resuelve la actividad dando cuenta de los objetivos propuestos, construye argumentos verbales a partir de ideas explícitas y generalmente, usa el tiempo planeado para resolver la actividad, son los estudiantes que se encuentra en la media del grupo.

En ese sentido a partir de los resultados de esta investigación, se redefine la caracterización del pensamiento variacional a través de las PV al reconocer la inclusión en el aprendizaje desde cada una de las metas, lo que responde a la problematización del saber y de quien aprende en el proceso de enseñanza y aprendizaje en un aula inclusiva de matemáticas, observe la tabla 21.

Tabla 21. *Descriptores de las PV desde metas en los ritmos de aprendizaje.*

Práctica Variacional	Metas de aprendizaje		
	Ritmo de aprendizaje lento	Ritmo de aprendizaje Moderado	Ritmo de aprendizaje rápido
Comparación	Identifica qué cambia y cómo cambia a través de relaciones de numéricas o usando indicadores verbales como “mayor” o menor”, “más o menos alto” al comparar únicamente dos estados de un fenómeno o estados equivalentes de dos fenómenos diferentes.	Identifica qué cambia y cómo cambia a través de relaciones numéricas acompañadas de procedimientos o usando indicadores verbales como “mayor o menor”, “más o menos alto” al comparar varios estados de un fenómeno o estados equivalentes de dos fenómenos diferentes.	Identifica qué cambia y cómo cambia a través de relaciones numéricas acompañadas de procedimientos elaborados o usando indicadores verbales como “mayor o menor”, “más o menos alto” al comparar varios estados de un fenómeno o estados equivalentes de dos fenómenos diferentes además, establece una consecuencia en el comportamiento según la variación.
Seriación	Establece una relación numérica o usa indicadores verbales como “lento”, “rápido”, “aumentar” o “elevar” al reconocer cómo cambia una variable respecto a otra para significar una regularidad o patrón en estados consecutivos de un fenómeno.	Establece y justifica una relación numérica o usa indicadores verbales como “mayor/menor que” o “más / menos alto” al reconocer cómo cambia una variable respecto a otra para significar una regularidad o patrón en estados consecutivos de un fenómeno o de fenómenos equivalentes.	Razona sobre procedimientos o conjeturas que surgen al identificar una relación cuantitativa o cualitativa al reconocer cómo cambia una variable respecto a otra para significar una regularidad o patrón en estados consecutivos de un fenómeno o de fenómenos equivalentes.
Predicción	Anticipa un nuevo estado, valor específico o comportamiento de una variable a través de	Anticipa un nuevo estado, valor específico o comportamiento de una variable a través de	Anticipa y valida un nuevo estado, valor específico o comportamiento de una variable a través de estructuras

	estructuras aritméticas o la apreciación del cambio de una variable respecto a otra desde una aproximación cualitativa a la variación que caracteriza el fenómeno.	estructuras aritméticas elaboradas, la relación con fenómenos equivalentes o la apreciación del cambio de una variable respecto a otra, al garantizar la variación que caracteriza el fenómeno.	aritméticas elaboradas, la relación con fenómenos equivalentes o la cambio de una variable respecto a otra, al garantizar la variación que caracteriza el fenómeno.
Estimación	Generaliza y anticipa comportamientos o tendencias a partir de una estructura aritmética o del uso de indicadores verbales como “mayor/menor”.	Generaliza y anticipa comportamientos o tendencias a partir de las diversas estructuras aritméticas que dan sentido a la variación que describe el fenómeno.	Generaliza y anticipa comportamientos o tendencias a partir de las diversas estructuras aritméticas teniendo en cuenta los cambios que no afectan los parámetros de la variación que describe el fenómeno.

8.1.3. Características del aula inclusiva de matemáticas como base para favorecer la inclusión en el aprendizaje.

Se ha mencionado que para responder a la inclusión en clase de matemáticas se debe garantizar la flexibilidad, no limitación y coherencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje en tanto, desde el origen de esta investigación se concretaron elementos característicos que reflejarían un aula inclusiva de matemáticas y que serían necesarios garantizarlos para movilizar el aprendizaje en todos los estudiantes sin excepción alguna.

Siendo así, las distinciones que se tuvieron en cuenta para el diseño de la SA movilizaron modificaciones desde la discusión del objeto matemático, los objetivos, metas de aprendizaje, instrucciones, representaciones y adaptaciones no significativas que permitieron que el estudiante reconociera una matemática manipulable en una situación cercana. Asimismo, el diseño

fundamentado en las dimensiones del saber y la práctica de instrucción del docente al conjugar la sensibilidad, caracterización del estudiante, conocimiento disciplinar, modulación de habilidades y fomento de la actividad matemática dieron sentido a la CCM alrededor de las PV. En la figura 133 se muestran algunos momentos de orientación a los estudiantes.

Figura 133. *Orientación docente a los estudiantes.*



A pesar de que todos los estudiantes no culminaron satisfactoriamente las actividades propuestas se evidenció que, generalmente, se sintieron participes en el aprendizaje, dieron significado a ideas matemáticas a partir de la cercanía con el contexto, lo que responde a la significación de la matemática desde la realidad, habilidades, contexto y condición del estudiante para encaminarla a una matemática funcional. De tal modo que, de acuerdo con Beck & Kosnic (2014) cuando los estudiantes se sienten cómodos e incluidos pueden aprender pues, al **valorar y respetar las diferencias individuales** se posibilitó la CCM desde las habilidades y metas de aprendizaje establecidas previamente teniendo en cuenta la flexibilidad en el ritmo de aprendizaje que podría reflejar el estudiante en el desarrollo de una tarea.

En la figura 134, se evidencia un acercamiento del Est27 para explicar y orientar la comprensión de una tarea al Est8 y su compañera de grupo.

Figura 134. *Proceso de comunicación en discusiones entre grupos de trabajo.*



El contraste de habilidades de los estudiantes a través del trabajo colaborativo no se limita a organizar los estudiantes a partir de los elementos en común y habilidades cognitivas inversas en busca de un complemento pues, lograr organizar grupos de trabajo que realmente beneficien la CCM colectivo donde los estudiantes sean la red de apoyo mutua requiere de conocer el desempeño, desenvolvimiento y actuar del estudiante cuando su compañero comparte las mismas características o contrarias, es ahí, donde la caracterización del grupo se reafirma como elemento fundamental en la inclusión. Por ejemplo, durante la caracterización se evidenció que si Est10 estaba en grupo con un estudiante con buen desempeño académico optaba por esperar a que este resolviera mientras él no participaba o se dedicaba a otras actividades, pero, si su compañero de grupo compartía sus mismas características, sí trabajaba las actividades teniendo en cuenta que si, no participaba no habría resultados por entregar. De hecho, el estudiante se caracterizó por reflejar mayormente ritmo de aprendizaje rápido que se evidenciaba en el trabajo colaborativo con el compañero que sí convenía. Otros estudiantes reflejaron el caso contrario, como Est13 donde el trabajo colaborativo con Est27 caracterizado por su sensibilidad, habilidades de razonamiento y comunicación, incentivaron el trabajo y desempeño en la CCM. Casos similares con otros estudiantes del grupo diverso.

En la figura 135, se evidencia la red de apoyo que se genera en el trabajo colaborativo al promover la comunicación y respeto por la diferencia.

Figura 135. *Red de apoyo en el trabajo colaborativo.*



De tal modo que, la caracterización del estudiante posibilitó, en la mayoría de los casos, la **organización conveniente** al favorecer la construcción colectiva del conocimiento en la medida en que se movilizaban habilidades en el proceso de comunicación y razonamiento al contrastar ideas, discutir, comparar y sintetizar los argumentos variacionales (ver figura 135, una muestra del trabajo colaborativo de los estudiantes organizados en binas). De hecho, la organización y ubicación dispersa en el aula benefició la visualización de los estudiantes al tablero y la participación durante la socialización sin desconocer, la necesidad que surgió de realizar algunos cambios durante la implementación de la SA (ver figura 136).

Ahora, fue interesante apreciar cómo los estudiantes percibían una matemática cercana y funcional para resolver situaciones del cotidiano como la presentada en la SA de tal modo que, el contraste entre la matemática conceptual y contextual reflejó la significación de la matemática funcional a partir de la familiaridad y conocimiento del estudiante frente a la situación de consumo de datos de las aplicaciones.

Figura 136. Trabajo colaborativo, estudiantes organizados en binas.



Similarmente, la **valoración del aprendizaje**, desde las metas en cada uno de los ritmos, posibilitó reconocer el desarrollo de las PV y CCM alrededor la variación constante y favoreció la significación y resignificación de un conocimiento que no es fijo, estándar o estático, en la medida en que la articulación de las demás características y la instrucción docente no buscaron limitar sino ampliar los alcances del estudiante.

Para terminar, la **cultura inclusiva** como característica que busca propiciar espacios de aprendizaje desde situaciones cercanas al contexto del estudiante precisó la puesta en escena como muestra de la funcionalidad de un aula inclusiva de matemáticas que le apuesta a la atención real a la diversidad de un grupo que no es hipotético ni ajeno a la realidad de la educación pública en Colombia con el fin de responder a esa correspondencia entre la investigación en educación matemática y la práctica escolar. Teniendo en cuenta que incluir a todos los estudiantes en aulas ordinarias es posible, siempre que existan docentes que realicen el esfuerzo de acogerlos, integrarlos y hacerlo una realidad (Herrera, 2016).

Una estrategia metodológica para la inclusión en clase de matemáticas es un engranaje entre el conocer a quien aprende, la enseñanza y aprendizaje desde la problematización del saber y los elementos contextuales que propician un aula inclusiva de matemáticas.

8.2. Otras consideraciones

A continuación se mencionan algunas conclusiones adicionales y problemáticas que quedan en consideración para futuras investigaciones alrededor de la inclusión en clase de matemáticas.

- Desde el marco legal para la inclusión se precisa la garantía de una diagnóstico oportuno a la condición específica del estudiantes. Sin embargo, la realidad en una institución de orden público no lo evidencia pues, los contratos oportunos del personal idóneo, la actualización del SIMAT, la articulación con la reglamentación de la IE y la sobrecarga de funciones en diferentes instituciones para la docente de apoyo a la inclusión lleva a que la realización de valoraciones psicopedagógicas y elaboración del PIAR no sea oportuno para el inicio de los periodos académicos del año lectivo, lo que lleva al desconocimiento de la condición por parte del docente de área y por tanto, la ejecución de un proceso de enseñanza y aprendizaje acorde a las necesidades y características del estudiante.
- Aunque los referentes legales precisen que para los estudiantes con alguna NE la promoción y evaluación debe mantener los mismos parámetros de los estudiantes sin NE con la salvedad de la flexibilización curricular necesaria, se evidencia que al identificar un estudiante con NEE, desde las creencias personales y constructos sociales, se cree no debería obtener ni la más baja ni la más alta nota como desempeño porque demostraría “regalar nota” o “no valorar las capacidades del estudiante” respectivamente. Por ende, la flexibilización curricular debe priorizar el reconocer y valorar los desempeños del estudiante desde sus habilidades intelectuales más allá de sus limitaciones y evaluación cuantitativa.

- Se reafirma que la inclusión no puede ser vista como la atención a un solo estudiante o grupo de estudiantes con una condición o característica específica, pues en ese caso, no sería inclusión. Más bien, hablar de inclusión implica pensar en y para todos. De tal modo que, la propuesta educativa debe tener como principal componente la flexibilización acorde a las necesidades y características del estudiante.
- Para un docente que reconoce, valora y trabaja para la diversidad es importante la comunicación y trabajo en equipo con profesionales en la red de apoyo educativa. Pues, los elementos y características que aporta una psicorientadora, cada docente desde su disciplina, el coordinador o directivos y padres de familia posibilitan la sistematización, comparación y síntesis de la caracterización del grupo con el objetivo de dar mayor coherencia al proceso de enseñanza y aprendizaje.
- La clase de matemáticas debiera ser vista más allá de la clase magistral y la saturación de procedimientos pues, se olvida el porqué y el para qué de enseñar matemáticas. Por ello, es importante continuar la investigación en educación matemática ligada a las prácticas escolares que permitan evidenciar y divulgar procesos de enseñanza y aprendizaje orientados a la formación como ciudadanos funcionales, a lo que las situaciones cercanas a la realidad constituyen una buena estrategia para movilizar la construcción de conocimiento matemático en el aula.
- A pesar de que, actualmente son pocos los programas de formación que incluyen cursos relacionados con la atención a la diversidad en el aula de matemáticas es importante incentivar, recalcar y promover la formación, inmersión y responsabilidad de los docentes frente a la atención a la diversidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ainscow, M. y Miles, S. (2008). Por una educación para todos que sea inclusiva: ¿Hacia dónde vamos ahora? *Perspectivas Revista trimestral de educación comparada*, 38(1), 17-45.
- Alba, C. Sánchez, J. y Zubillaga, A. (2014). Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). Pautas para su introducción en el currículo. *Aplicación del Diseño Universal para el Aprendizaje y utilización de materiales digitales accesibles: implicaciones para la enseñanza de la lectoescritura y formación del profesorado [Proyecto]*
- Aldana, E. y López, J.H. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Rev.investig.desarro.innov*, 7(1), 77-92.
- Andrade, P. (2010). *Desafíos de la diferencia en la escuela. Guía de orientación para la inclusión de alumnos con necesidades educativas especiales en el aula ordinaria Alumnos con deficiencia visual. Necesidades y respuesta educativa*. Escuelas Católicas.
- Antognazza, M. y González, M. (2011). El niño disléxico y su entorno educativo. Percepciones y representaciones sobre la dislexia. *Ciencias Psicológicas* 2, 193-200
- Araque, N. y Barrio de la Puente, J. (2010). Atención a la diversidad y desarrollo de procesos educativos inclusivos. *Prismasocial Revista de ciencias sociales*, 4, 1-47.
- Arciniegas, H. y Acevedo-Rincón, J. P. (2019). Enseñanza del concepto de número. El caso de una niña con autismo. *Foro EMAD 2019: Investigación e innovación en Educación matemática*. Universidad de los Andes, Bogotá. <http://funes.uniandes.edu.co/13993/>
- Arnaiz, P. (1996). Las escuelas son para todos. *Siglo cero*, 27(2), 25-34.

- Arnaiz, P. (2005). Fundamentos y principios de la educación inclusiva. En Alba, C., Sánchez, M y Rodríguez, J. (Coords). *Actas de las jornadas de cooperación educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa*, 25-44.
- Arnaiz, P. (2008). Cómo promover prácticas inclusivas en educación secundaria. *Opiniones*, 57-71.
- Arrieta, J. y Diaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48.
- Beck, C. & Kosnic, C. (2014). Creating a more inclusive classroom. En Salend, S (Autor), *Creating Inclusive Classrooms: Effective and Reflective Practices*, 7, 87-100.
- Blanco, A. (2009). Dislexia, escuela y exclusión social: un estudio desde la sociología acerca de la educación especial. *Configurações* 5/6, 1-24
- Blanco, R. (1999). Hacia una escuela para todos y con todos. *Boletín Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe* (48), 55-72.
- Blanco, R. (2006). La equidad y la inclusión social: uno de los desafíos de la educación y la escuela hoy. *REICE Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 4(3), 1-15.
- Brodzeller, K., Ottley, J., Jung, J. y Coogle, C. (2018). Interventions and Adaptations for Children with Autism Spectrum Disorder in Inclusive Early Childhood Settings. *Early Childhood Educ J* 46, 277-286.
- Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 141-162.

- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN]. Archivo digital. <https://www.researchgate.net/publication/331563013>.
- Caballero, M. y Cantoral. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flórez, R. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1197-1205.
- Caballero, M. y Moreno, G. (2019). El pensamiento y lenguaje variacional como fundamento para el diseño de situaciones de aprendizaje del cálculo. *REDIEM*, 1 (1), 92-92
- Caballero, M. y Moreno, G. (2017). *Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. En Serna, L. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1066-1074.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y análisis*. Editorial Universidad de Antioquia y Universidad Pedagógica Nacional.
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.
- Cardona, J. y Carmona, M. (2012). *Estrategias pedagógicas en el área de matemáticas para la inclusión educativa de escolares con discapacidad cognitiva de los grados 1º, 2º y 3º de la Institución Educativa Gimnasio Risaralda Sede América mixta del municipio de Pereira*. [Tesis de pregrado, Universidad Tecnológica de Pereira]. DSpace UTP. <http://hdl.handle.net/11059/2693>
- Congreso de Colombia. (27 de febrero de 2013). Ley Estatutaria. [Ley 1618 de 2013].

- Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994].
- Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.
- Crisol, E., Martínez, J. y El Homrani, M. (2015). El aula inclusiva. Condiciones didácticas y organizativas. *Revista nacional e internacional de educación inclusiva*, 8(3), 254-270.
- Cuellar, C. (2019). *Estrategias variacionales en situaciones periódicas en un aula de formación técnico laboral* [Tesis de posgrado, Pontificia Universidad Javeriana] <http://hdl.handle.net/10554/43666>.
- DANE (2005). *Boletín censo general 2005*. https://www.dane.gov.co/files/censo2005/PERFIL_PDF_CG2005/73124T7T000.PDF
- DANE (2020). *Personas con discapacidad, retos diferenciales en el marco del COVID-19. Colombia*. <https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/salud/discapacidad>
- De souza , A. C. y Silva, G. G. H. (2019). Incluir não é Apenas Socializar: as Contribuições das Tecnologias Digitais Educacionais para a Aprendizagem Matemática de Estudantes com Transtorno do Espectro Autista. *Bolema*, 33(65), 1305-1330.
- Díaz, E. y Andrade, I. (2015). El trastorno del Espectro Autista (TEA) en la educación regular: estudio realizado en instituciones educativas de Quito, Ecuador. *Revista intercontinental de Psicología y Educación*, 17(1), 163. 181.
- Echeita, G. (2013). Inclusión y Exclusión educativa. De nuevo “voz y quebranto”. *Revista Iberoamericana sobre Calidad Eficacia y Cambio en Educación*, 11(2), 100-118.
- Echeverría, C. (2022). *Enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas: reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación* [Tesis de posgrado, maestría, Universidad Industrial de Santander]. Archivo no publicado.

- Escudero, J. y Martínez, B. (2011). Educación inclusiva y cambio escolar. *Revista iberoamericana de educación* 5, 85-105.
- Estivil, R. (2020). *Alteraciones en la conectividad funcional cerebral asociadas a las dificultades lectoras y numéricas en la infancia* [Tesis de maestría, Universitat de Barcelona]. Dipositi Digital de la Universidad de Barcelona. <http://hdl.handle.net/2445/172666>
- Fernández, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Pautas para maestros de la educación primaria*. [Tesis de posgrado, maestría, Universidad Internacional de la Rioja]. Re-UNIR <https://reunir.unir.net/handle/123456789/1588>
- Fernández, M. (2010). La discapacidad mental o psicosocial y la convención sobre los derechos de las personas con discapacidad. *Revista de derechos humanos* (11), 3-26.
- Fernández, R. y Sahuquillo, A. (2015). Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual. *Edma 0-6: Educación matemática en la infancia*, 4(1), 11-23.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS.
- Fuentes, V., García-Domingo, M., Amezcua, P., y Amezcua, T. (2021). La atención a la diversidad funcional en educación primaria. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 19(1), 91-106.
- Fundación Saldarriaga Concha. (2020a, 17 de agosto). *Plan Individual de Ajuste Razonable PIAR* [video]. Recursos - Fundación Saldarriaga Concha. <https://www.saldarriagaconcha.org/centro-de-recursos-maestros-por-la-inclusion/plan-individual-de-ajustes-razonables/>
- Fundación Saldarriaga Concha. (2020b, 26 de mayo). *¿Cómo hacer un Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR)? 5 pasos prácticos para elaborarlo a partir de un caso*. [video].

- Recursos - Fundación Saldarriaga Concha. <https://www.saldarriagaconcha.org/centro-de-recursos-maestros-por-la-inclusion/cinco-pasos-para-realizar-un-plan-individualizado-de-ajustes-razonables-piar/>
- Gallegos, M. y Illescas, J. (2017). *Rol del docente frente a los diferentes ritmos de aprendizaje en educación general básica media* [Tesis de pregrado, Universidad de Cuenca]. UCuenca. <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/27440>
- Gómez, P. (2013). *Guía de indicadores de prácticas pedagógicas que favorecen la atención a la diversidad* (Pdte). Fundación Compartir y Fundación Saldarriaga Concha.
- Guerrero, B. (2016). Desafíos para la educación inclusiva en secundaria, de la utopía a lo tangible. *Revista nacional e internacional de Educación inclusiva*, 9(2), 87-103.
- Guerrero, D. Naranjo, J. Rodríguez, M. y Benítez, I. (2022). Comunicación y herramientas digitales para la dislexia ¿Un problema en la Educación? Una revisión. *Polo del conocimiento* 7(4), 1014-1037.
- Heredia, M. (2019). *El trabajo cooperativo, una estrategia para la atención a diferentes ritmos de aprendizaje* [Tesis de pregrado, Universidad de Cuenca]. UCuenca. <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/33737>
- Herrera de Toro, C. (2016). *La educación inclusiva ¿una escuela para todos?* [Tesis de posgrado, maestría, Universitat Jaume I]. Repositori Universitat Jaume I. <http://hdl.handle.net/10234/161926>
- Hinojo, J., Romero, F. y Farfán, Ro. (2020). Principio de diseño de tareas en Socioepistemología. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 11, 1-20.

- Institución Educativa las Américas (2020). *Sistema institucional de evaluación de los aprendizajes y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica, media de la Institución Educativa las Américas*. [Documento institucional de evaluación]. Archivo no publicado.
- Institución Educativa las Américas (sf). *Institución Educativa las Américas – Presentación del Colegio*. [Borrador proyecto escolar (no publicado), Institución Educativa las Américas]. Archivo digital.
- Lastre, K., Anaya, F. y Martínez, L. (2019). Índices de inclusión en una institución de educación pública de Colombia. *Espacios*, 40(33), 16.
- López, D. (2007). Contribuciones de la neurociencia al diagnóstico y tratamiento educativo de la dislexia del desarrollo. *Revista de neurología*, 44(3), 173-180.
- López-Mojica, J., Méndez, C., Ávila, M. y Olvera, B. (2017). Matemática educativa y educación especial: experiencias en investigación y del aula. *Innovación e investigación en matemática educativa*, 2(1), 38-50.
- Martínez, M. (2004). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Trillas S.A.
- MEN (2006a). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2014). *Documento de ajustes a los Estándares Básicos de Competencias de matemáticas*. [Documento no publicado]. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2017). *Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad en el marco de la educación inclusiva*. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (29 de agosto de 2017) Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. [Decreto 1421 de 2017].

MEN. (s.f.). <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-82788.html>

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de sordos. Lo matemático y la escuela*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. Archivo digital (No publicada).

Merino, M. y García, R. (2017). *Guía para profesores y educadores de alumnos con autismo*. Federación autismo Castilla y León (Promotor)
<https://autismocastillayleon.com/Publicaciones/guia-de-profesores/>

Ministerio de Educación de Guatemala. (2006). *Manual de atención a las necesidades educativas en el aula*. Dirección General de Educación Especial.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019a). *Predecir. ¿Qué cambia? y ¿cómo cambia? Para saber qué pasa y que pasará*. Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México (Desarrollo de contenido).

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019b). *Predecir. ¿Qué se mantiene? ¿qué cambia? Analizando patrones*. Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México (Desarrollo de contenido).

Ministerio de salud y protección social. (31 de enero de 2020). Por la cual se dictan disposiciones en relación con la certificación de discapacidad y el Registro de Localización y caracterización de Personas con Discapacidad. [Resolución 113 de 2020].

- Ministros de Educación de América Latina y el Caribe. (2001). Recomendaciones sobre políticas educativas al inicio del siglo XXI. *Unipluriversidad*, 1(1).
- Miranda, I. (2019). *Comprensión de la ecuación lineal de estudiantes con discapacidad intelectual del segundo grado de secundaria*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero]. RIUAGRO. <http://ri.uagro.mx/handle/uagro/1005>
- Moliner, O., Sanahuja, A. y Benet, A. (2017). *Prácticas inclusivas en el aula desde la investigación – acción*. Universidad de Jaume I.
- Morales, M; Valencia, L., Munera, M. y González, S. (2022). Prácticas de enseñanza para atender a la diversidad en la educación matemática. *Cuadernos Pedagógicos*, 24(33), 1-8.
- Moreno, R. (2021). *Estudio socioepistemológico de las raíces polinómicas en población con discapacidad visual*. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN]. Archivo digital en <https://www.researchgate.net/publication/357002321>
- Navia, A. y Vega, D. (2019). *Enseñanza de las matemáticas para población en condición de discapacidad visual en educación básica y media*. [Proyecto curricular, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio institucional UDistrital. <http://hdl.handle.net/11349/15339>
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. The National Council of Teachers Mathematics.
- OMS. (2011). *Informe mundial sobre la discapacidad*. <https://www.minsalud.gov.co/sites/rid/Lists/BibliotecaDigital/RIDE/INEC/INTOR/informe-mundial-discapacidad-oms.pdf>
- ONU. (2006). *Convención sobre derechos de las personas con discapacidad*. <https://www.un.org/esa/socdev/enable/documents/tccconvs.pdf>

- ONU. (2008). *Conferencia internacional de educación, cuadragésima octava reunión. La educación inclusiva: el camino hacia el futuro*.
http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Policy_Dialogue/48th_ICE/General_Presentation-48CIE-4__Spanish_.pdf
- Organización Panamericana de la Salud [OPS]. (2022, 11 de enero). *Discapacidad*.
<https://www.paho.org/es/temas/discapacidad>.
- Ortiz, M. y Martínez, Y. (2017). *Educación matemática inclusiva para reducir los índices de desigualdad de la población con discapacidad visual en el colegio OEA IED. Informe de pasantía*. [Trabajo de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. DSpase UD. <http://hdl.handle.net/11349/5562>
- Papalia, D., Feldman, D. y Martorell, G. (2012). *Desarrollo humano*. Mc Graw Hill.
- Pastor, C., Sánchez, M. y Rodríguez, J. (Coords). (2004). *Actas de jornadas de cooperación educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa*. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad*. [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Archivo no publicado.
- Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M. y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con trastorno del espectro autista: un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva*, 11(2),161-180.
- Reyes, C. (2020). *Diseño de guías de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento lógico matemático de estudiante del grado quinto con discapacidad leves cognitivas (DIL)*. [Tesis

- de pregrado, Universidad Antonio Nariño]. DSpace UAN.
<http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/2235>
- Reyes, L.R. (2018). *Adaptación curricular significativa par aun alumno con Trastorno del Espectro Autista (TEA)*. [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. Digibug UGR.
<http://hdl.handle.net/10481/65505>
- Rodríguez, G., Gil-Flórez, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Aljibe.
- Rueda, M. y Molina, L (2019). *Una propuesta de aula que integra material manipulativo para el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional en estudiantes con deficiencia visual en un aula regular*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. DSpace UniValle.
<http://hdl.handle.net/10893/14735>
- Schnepel, S., Krahenmann, H., Sermier-Dessementet, R. y Moser-Opitz, E. (2020). The mathematical progress of students with an intellectual disability in inclusive classrooms: results of a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal* (32), 103-119.
- Soto, D. y Espinoza, L. (2015). Investigaciones de la matemática educativa para la inclusión. *Revista chilena de educación matemática*, 4 (1), 13-19.
- Trigueros, E. (2019). *Análisis del concepto de discapacidad psicosocial que tiene el personal docente de educación especial del Centro de Enseñanza especial de Heredia*. [Tesis de maestría, Universidad de Costa Rica]. Kérwá. <https://hdl.handle.net/10669/79188>
- UNESCO. (1990). Declaración Mundial sobre Educación para Todos. "Satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje". *Foro Consultivo Internacional sobre Educación para Todos*. Jomtien, Tailandia. <https://unesdoc.unesco.org/>

UNESCO. (2009). *Directrices sobre políticas de inclusión en la educación*.
<https://unesdoc.unesco.org/>

UNESCO., UNICEF., ONU., Banco Mundial., Fondo de Población de las Naciones Unidas., Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. y Alto Comisionado de las Naciones Unidas para los Refugiados. (2016). *Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización de Objetivo de Desarrollo Sostenible 4*.
https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656_spa.locale=es

Vásquez, D. (2022, 28 de mayo). *Neuropsicología de la dislexia* [video en vivo]. Neuropsicología República Dominicana.

Velasco, A. (2022). *Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas*. [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Archivo no publicado.

Vidarte, R. y Celis, S. (2016). *Una propuesta de aula para la enseñanza de las ecuaciones lineales con variable real, en dos estudiantes que requieren una educación diferencial*. [Tesis de maestría, Universidad del Valle]. DSpace UniValle. <http://hdl.handle.net/10893/10244>.

ANEXOS

Anexo 1. Formato de consentimiento informado a estudiantes.

 	 
DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFÍA Y FIJACIÓN AUDIOVISUAL (VIDEO) PARA USO ACADÉMICO	DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFÍA Y FIJACIONES AUDIOVISUALES (VIDEO) PARA USO PÚBLICO
Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2620 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, Haidée Usad Arechilegas Rueda identificada con cédula de ciudadanía N°....., estudiante de tercer semestre de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante _____, identificado(a) con tarjeta de identidad número _____, alumno de la Institución Educativa Las Américas de Bucaramanga, para que aparezca ante la cámara, en fotografías y material audiovisual con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio. El propósito de las fotografías y fijaciones audio-visuales es evidenciar el desarrollo de la investigación de tipo fenomenológico denominado Aula Inolusiva de matemáticas: un estudio de situaciones de variación y cambio, dirigido y trabajado en el posgrado Maestría en Educación Matemática; así mismo la evidencia recolectada será usada únicamente como elemento de estudio para los objetivos y finalidades de la investigación, podrá ser publicado en eventos académicos y usado con propósitos demostrativos de otros investigadores. Sus fines son netamente pedagógicos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos. Para tal caso, se usará el AVAL del comité de ética de la UIS que fue otorgado para el desarrollo del proyecto 70783: Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión de profesores. Autorizo, Nombre del padre/madre de familia o acudiente _____ Cédula de ciudadanía _____ Nombre del estudiante _____ Tarjeta de Identidad _____ Fecha: ____ / ____ / ____	Yo _____, identificado(a) con cédula de ciudadanía número _____, en mi calidad de padre/madre _____ acudiente autorizo para que aparezca la imagen de mi hijo ante la cámara, en una videogración o fotografía con fines pedagógicos que se realizará para la Institución Educativa de Educación Superior Universidad Industrial de Santander dentro de marco de la implementación del trabajo de investigación en programa de Maestría en Educación Matemática. El propósito de las fotografías y fijaciones audio-visuales es evidenciar el desarrollo de la investigación de tipo fenomenológico denominado Aula Inolusiva de matemáticas: un estudio de situaciones de variación y cambio, dirigido y trabajado en el posgrado Maestría en Educación Matemática; así mismo la evidencia recolectada será usada únicamente como elemento de estudio para los objetivos y finalidades de la investigación, podrá ser publicado en eventos académicos y usado para fines demostrativos de otros investigadores. Sus fines son netamente pedagógicos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos. Para tal caso, se usará el AVAL del comité de ética de la UIS que fue otorgado para el desarrollo del proyecto 70783: Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión de profesores. Autorizo, Nombre del padre/madre de familia/acudiente _____ Cédula de ciudadanía _____ Fecha: ____ / ____ / ____
Calle 43 No. 57 - 14 Centro Administrativo Nacional, C.A.N., Bogotá, D.C. PDX: +57 (1) 333 3666 - Fax 333 4953 www.mineducacion.gov.co - atencionciudadano@mineducacion.gov.co	Calle 43 No. 57 - 14 Centro Administrativo Nacional, C.A.N., Bogotá, D.C. PDX: +57 (1) 333 3666 - Fax 333 4953 www.mineducacion.gov.co - atencionciudadano@mineducacion.gov.co

Anexo 2. Cuestionario aplicado a estudiantes.

Cuestionario de caracterización

Estimado estudiante, el presente cuestionario tiene como objetivo indagar sobre las características personales y en contexto como estudiante participante de un grupo diverso de noveno grado. Para ello, las preguntas se orientan a las siguientes dimensiones: contexto y vida familiar, habilidades intelectuales, conducta adaptativa, participación e inclusión social y adaptaciones a las metas de aprendizaje.

Este cuestionario no tiene valoración cuantitativa ni tiene fines selectivos, la recolección de datos y tratamiento de información tiene propósitos exclusivamente para efectos de una investigación de tipo académico.

Agradezco de antemano su participación y respuesta de forma sincera a este cuestionario.

*Obligatorio

Uso de datos personales

1. Acepto el uso y tratamiento de datos para efectos de la investigación realizada por la docente Haided Lised Arciniegas Rueda. *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

Datos personales

2. Nombre completo *

3. Fecha de nacimiento *

Ejemplo: 7 de enero del 2019

4. Edad *

5. Nombre del padre *

6. Nombre de la madre *

7. Número de hermanos *

8. Barrio o comuna donde vive *

Contexto y vida familiar

9. Su familia ha enfrentado situaciones como: *

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Conflictos familiares
☐ Dificultades económicas
☐ Divorcio
☐ Adicciones
☐ Desplazamiento forzado
☐ Víctimas del conflicto armado
☐ Reintegración a la sociedad
☐ Desacuerdos con el bienestar familiar
☐ Ninguna
☐ Otro: _____

10. ¿Considera que la institución educativa cuenta con espacios acordes para su desplazamiento y desarrollo personal? ¿Por qué? *

11. ¿Ha asistido a psicología, terapia ocupacional, fonoaudiología, fisioterapia u otra terapia? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí Salta a la pregunta 12
☐ No Salta a la pregunta 14

12. ¿Cuál fue el motivo? *

13. ¿Qué cambios ha tenido a partir de la asistencia a tales terapias? *

Conducta adaptativa y desarrollo personal.

14. ¿Qué actividades diferentes fuera de la jornada escolar realizas durante el día? *

15. ¿Cuáles son tus gustos o preferencias en actividades? *

16. ¿Qué expectativas tienes de ti mismo frente a lo que puedas lograr en este establecimiento educativo? *

17. ¿Cómo es la relación con tus padres? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Excelente
☐ Buena
☐ Regular
☐ Mala

18. ¿Porqué? *

19. ¿Cómo es la relación con tus amigos? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Excelente
☐ Buena
☐ Regular
☐ Mala

20. ¿Porqué? *

21. ¿Qué caracteriza la relación con sus amigos? *

22. ¿Consideras que se te facilita relacionarte con otras personas? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

23. ¿Porqué? *

24. ¿Cómo reaccionas ante las circunstancias difíciles? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Me siento frustrado
- ☐ Reconozco que son cosas que pueden pasar y se deben superar con paciencia.
- ☐ Huyo del lugar en el que sucedió
- ☐ Me quedo callado y dejo que el tiempo pase
- ☐ Otro: _____

25. ¿Qué apoyos buscas? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Hablo con un amigo.
- ☐ Hablo con un familiar.
- ☐ Busco ayuda con un profesional (psicólogo, terapeuta, etc.)
- ☐ Ninguna.
- ☐ Otro: _____

26. ¿Cómo te va con el manejo de normas, límites, reglas? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Excelente
- ☐ Bien
- ☐ Regular
- ☐ Mal

Habilidades intelectuales

27. ¿Has reprobado cursos? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí Salta a la pregunta 28
- ☐ No Salta a la pregunta 29

28. ¿Cuáles considera que fueron los motivos o causas de la pérdida el año escolar? *

29. ¿Qué asignaturas, conocimientos o actividades del aprendizaje escolar se te facilitan? *

30. ¿Qué asignaturas, conocimientos y actividades del aprendizaje escolar se te dificultan? *

31. ¿Cómo te han apoyado para solucionar esas dificultades? *

32. ¿Qué crees que podríamos hacer para ayudarte? *

33. ¿Considera que presenta dificultades en el área de matemáticas? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí Salta a la pregunta 34
- ☐ No Salta a la pregunta 35

34. Menciona las dificultades *

35. ¿Recibe alguna clase de ayuda en su casa para el entendimiento y realización de tareas o trabajos? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí Salta a la pregunta 36
☐ No Salta a la pregunta 37

36. Describe las ayudas que recibes en casa. *

37. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Si	No
¿Recibe tutorías extra en el colegio?	☐	☐
¿Recibe tutorías particulares fuera del colegio?	☐	☐

Participación e inclusión social.

38. ¿De qué forma te gusta estudiar? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Individual
☐ Grupal
☐ De las dos formas

39. ¿Cuándo trabajas en grupo tienes en cuenta la opinión del otro? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

40. ¿Sientes que puedes aportar o participar en clase sin temor a ser molestado por los compañeros? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

41. ¿Porqué? *

42. ¿Prefieres quedarte callado y seguir la corriente por no estar solo o perder la amistad? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

43. ¿Cómo es el trato con los estudiantes de otros cursos durante espacios abiertos como recreos, jornadas deportivas, etc.? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Excelente
☐ Bueno
☐ Regula
☐ Mal

44. ¿Porque? *

45. ¿Qué situación no quisieras repetir en el establecimiento educativo? *

46. Generalmente, ¿Cómo es tu ritmo de aprendizaje frente al de tus compañeros? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Excelente
☐ Bueno
☐ Regular
☐ Malo

47. ¿Porqué? *

48. ¿Consideras que el profesor te ofrece actividades especiales o diferentes a las de tus compañeros? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí Salta a la pregunta 49
☐ No

49. ¿Cuáles? *

Anexo 3. Cuestionario aplicado a padres de familia

Formato de cuestionario para padres

Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.

Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



Cuestionario de caracterización a estudiantes

Estimado padre de familia o acudiente, el presente cuestionario tiene como objetivo indagar sobre las características personales y en contexto escolar, de estudiantes del grado noveno con el fin de conocer la población estudiantil y ofrecer una educación inclusiva acorde a sus necesidades. Para ello, las preguntas se orientan a las siguientes dimensiones: contexto y vida familiar y conducta adaptativa del estudiante, participación e inclusión social, habilidades intelectuales y adaptaciones a las metas de aprendizaje.

Tenga en cuenta que la recolección de datos y tratamiento de información tiene propósitos exclusivamente para efectos de una investigación de tipo académico.

Agradezco de antemano su participación y respuesta de forma sincera a este cuestionario.

Contexto y vida familiar

- Datos personales del estudiante

1. Nombre completo del estudiante: _____
2. Fecha de nacimiento: _____ Edad actual: _____
3. Género: ☐ Masculino ☐ Femenino ☐ Prefiero no decirlo.
4. ¿Pertenece a algún grupo étnico? ☐ SI ☐ NO ¿cuál? _____
5. Estrato socioeconómico: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6
6. Dirección de la vivienda actual: _____

- Datos personales del padre

1. Nombre completo: _____
2. Edad: _____ Dirección de la vivienda actual: _____
3. ¿Pertenece a algún grupo étnico? ☐ SI ☐ NO ¿cuál? _____
4. Estrato socioeconómico: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6
5. Máximo nivel educativo alcanzado: _____

#Aided Lised Arciniegas Rueda – Docente e investigadora en Educación matemática

1

Formato de cuestionario para padres

Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.

Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



6. Ocupación actual: _____

- Datos personales de la madre

1. Nombre completo: _____
2. Edad: _____ Dirección de la vivienda actual: _____
3. ¿Pertenece a algún grupo étnico? ☐ SI ☐ NO ¿cuál? _____
4. Estrato socioeconómico: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6
5. Máximo nivel educativo alcanzado: _____
6. Ocupación actual: _____

- Dinámica familiar

1. ¿Con quién (s) vive el estudiante en la actualidad?

2. ¿Los padres del menor viven juntos? ☐ SI ☐ NO
3. Si la respuesta a la pregunta anterior fue "NO". ¿Hace cuánto tiempo los padres están separados?

- Historia de vida y situación del estudiante en contexto familiar

1. Su familia ha enfrentado situaciones como:
(Marque con una X)

☐	Situaciones de conflicto entre miembros de la familia.
☐	Separación de los padres.
☐	Un miembro de la familia, importante para el menor, lo abandona o corta relaciones con el núcleo familiar.
☐	Relaciones conflictivas con miembros de la familia (tíos, primos, abuelos, otros).
☐	Maltrato intrafamiliar (físico, emocional, psicológico, abuso sexual, negligencia, o abandono físico o emocional).
☐	Secuestro o violencia social.

#Aided Lised Arciniegas Rueda – Docente e investigadora en Educación matemática

2

Formato de cuestionario para padres
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
 Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



☐	Adicciones en algún miembro de la familia (alcohol, drogas, juegos, apuestas, etc.).
☐	Enfermedades graves o accidentes.
☐	Trastornos psicológicos en algún miembro de la familia.
☐	Muertes cercanas.
☐	Pérdidas económicas o dificultades graves.
☐	Desplazamiento forzoso o vivencia en violencia urbana o rural.
☐	otra. ¿Cuál? _____
☐	Ninguna.

Si su respuesta a la pregunta anterior fue diferente a “Ninguna”. Por favor indique ¿Cómo lo enfrentó el estudiante?

☐	Aún le cuesta la situación.
☐	Habló con un profesional (psicólogo, terapeuta, etc.)
☐	Habló con un amigo
☐	Se habló en familia.
☐	Sintió frustración y se deprimió algunos días.
☐	Sintió frustración y se deprimió varias semanas.
☐	Sintió frustración y se deprimió varios meses.
☐	Se desahogó hasta sentir tranquilidad.
☐	otra. ¿Cuál? _____

2. ¿Cómo es la relación del estudiante con los demás miembros de la familia?

___ Excelente ___ Buena ___ Regular ___ Mala

- Datos del contexto escolar

1. ¿El estudiante siempre ha ingresado al sistema educativo formal? ___ SI ___ NO

2. ¿Cuál es el último año escolar cursado? _____

3. Establecimiento educativo en el que cursó el último año.

___ Institución Educativa las Américas ___ Otro. ¿Cuál? _____

Si el estudiante cursó el último año escolar en una institución diferente a la Institución Educativa las Américas, ¿Cuál fue el motivo por el cual retiró al estudiante de la institución?

#Aidee Lised Arciniegas Rueda – Docente e investigadora en Educación matemática

3

Formato de cuestionario para padres
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
 Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



- Historial académico del estudiante

1. ¿El estudiante está diagnosticado con NEE o alguna condición en especial? ___ SI ___ NO

Si su respuesta fue afirmativa. Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo se dieron las sospechas o diagnóstico al respecto? _____

b. ¿El estudiante tiene conocimiento de su diagnóstico? ___ SI ___ NO

c. ¿A qué terapias o tratamientos ha asistido? _____

d. ¿Qué efecto ha tenido en el estudiante? _____

e. ¿Continúa en tratamiento? ___ SI ___ NO

2. ¿Ha notado alguna dificultad, en su hijo, que le preocupa o le llama la atención?

___ SI ___ NO ¿Cuál? _____

3. ¿Cómo describiría la vida actual del estudiante? (Con respecto al nivel de independencia, fortalezas, debilidades, características en el desarrollo, relación familiar, hábitos, preferencias e intereses, cosas en que se destaca, limitaciones, etc.).

4. ¿Qué situaciones considera que le afectan al menor? ¿Cómo es su reacción y cómo lo maneja?

Conducta adaptativa y desarrollo personal

1. ¿Considera que al estudiante se le hace difícil conseguir amigos? ___ SI ___ NO

2. ¿El estudiante acepta con responsabilidad sus errores y no busca culpables? ___ SI ___ NO

#Aidee Lised Arciniegas Rueda – Docente e investigadora en Educación matemática

4

Formato de cuestionario para padres

Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.

Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



Habilidades intelectuales

Estimado padre de familia o acudiente para responder las siguientes preguntas marque con una X el nivel de valoración.

ATENCIÓN				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Mantiene focos de atención sin distraer su mirada a otros elementos irrelevantes.				
Mantiene su atención hasta lograr culminar la actividad propuesta.				
Es capaz de mantenerse atento a varias fuentes de estímulos sin perder el hilo conductor de la actividad.				
FUNCIONES EJECUTIVAS				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Organiza su tiempo para poder cumplir con las tareas escolares.				
Es flexible ante los cambios y los imprevistos.				
Planifica sus actividades día tras día y se ajusta a lo que ha programado.				
MEMORIA				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Habla de sí mismo y de su proyección en su vida personal, familiar y escolar.				
Evidencia conocimientos muy especializados sobre un tema particular.				
Recuerda los conocimientos aprendidos previamente sin mayor dificultad.				
COMPETENCIA LECTORA Y ESCRITURAL				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante evidencia una adecuada lectura “automática” (lee con fluidez, con signos de puntuación y con entonación adecuada)				
Tiene una buena escritura “automática”, sin omitir letras, pegar palabras, confundir letras o demás.				
LENGUAJE				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Puede comunicarse con otros por vía oral.				
Es capaz de seguir el hilo de las conversaciones.				

#Aided Lised Arciniegas Rueda – Docente e investigadora en Educación matemática

5

Formato de cuestionario para padres

Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.

Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



Participación e inclusión social

1. ¿Considera que el estudiante prefiere quedarse callado y seguir la corriente para evitar desacuerdos y no perder amistades? __SI __NO
2. ¿Qué fortalezas resalta que le permitieron seleccionar la institución educativa las Américas?

3. ¿Cuáles son las debilidades en las que la institución debería trabajar?

4. ¿Qué apoyos considera que se requieren o se debe ofrecer la institución para el desarrollo integral del menor?

5. ¿Qué apoyos se les da en casa, que considera deberían darse o reforzarse en la institución?

Adaptación a las metas de aprendizaje

1. ¿Qué apoyos considera que se requieren o debe ofrecer el docente de matemáticas para el desempeño del menor?

#Aided Lised Arciniegas Rueda – Docente e investigadora en Educación matemática

6

Anexo 4. Cuestionario aplicado a docente de matemáticas - Versión 1.

Cuestionario de caracterización a estudiantes

Estimado docente, el presente cuestionario tiene como objetivo indagar sobre las características personales y en contexto escolar, de estudiantes que presentan alguna NEE o característica particular identificada desde la observación participativa. Además, poder precisas en elementos de tipo escolar desde su perspectiva como maestro. Para ello, las preguntas se orientan a las siguientes dimensiones: contexto y vida familiar, habilidades intelectuales, conducta adaptativa, participación e inclusión social y adaptaciones a las metas de aprendizaje.

Tenga en cuenta que la recolección de datos y tratamiento de información tiene propósitos exclusivamente para efectos de una investigación de tipo académico.

Agradezco de antemano su participación y respuesta de forma sincera a este cuestionario.

***Obligatorio**

1. Nombre del estudiante *

2. ¿Quién es el acudiente del estudiante? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Papá
☐ Mamá
☐ Herman@
☐ Otro familiar
☐ Cuidador
☐ Otro: _____

3. ¿Cómo calificaría la relación del estudiante con sus padres? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Excelente
☐ Buena
☐ Regular
☐ Mala

4. *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Opción 1

5. ¿El estudiante está diagnosticado con alguna condición? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

6. ¿Cuál? *

Salta a la pregunta 9

7. ¿Tiene sospechas de que el estudiante posea alguna condición especial? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí Salta a la pregunta 8
☐ No Salta a la pregunta 9

8. ¿Con qué condición relacionaría las características del estudiante? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Capacidad excepcional
☐ Discapacidad
☐ Talento excepcional
☐ Trastorno de Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH)
☐ Trastorno Negativista Desafiante (TND)
☐ Trastorno de conducta (TC)
☐ Dislexia
☐ Discalculia
☐ Disgrafía
☐ Otro: _____

9. ¿El estudiante pertenece a alguno de los siguientes grupo? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Grupo étnico Salta a la pregunta 10
☐ Población afectada por el conflicto armado Salta a la pregunta 11
☐ Reintegración de grupos al margen de la ley. Salta a la pregunta 11
☐ Hogares de paso o bienestar familiar. Salta a la pregunta 11
☐ Estudiantes trabajadores. Salta a la pregunta 11
☐ Población en condiciones de pobreza extrema. Salta a la pregunta 11
☐ Migración o provenientes de otros países. Salta a la pregunta 11
☐ Ninguno Salta a la pregunta 11
☐ Otro: _____

10. ¿A qué grupo étnico pertenece el estudiante? *

11. ¿Tiene conocimiento de que el estudiante haya pasado por alguna de las siguientes situaciones traumáticas? *

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Situaciones de conflicto entre miembros de la familia.
☐ Separación de padres o cuidadores.
☐ Duelo por un familiar cercano.
☐ Maltrato intrafamiliar
☐ Secuestro o violencia social.
☐ Adicciones en algún miembro de la familia.
☐ Enfermedades graves
☐ Trastornos psicológicos en algún miembro de la familia.
☐ Ninguna
☐ No tengo conocimiento
☐ Otro: _____

Habilidades intelectuales

Estimado docente a las siguientes preguntas marque el nivel que considere pertinente al desarrollo del estudiante.

Atención selectiva

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante se centra de forma específica en aquellos elementos del ambiente que son relevantes para la tarea que debe desarrollar.	☐	☐	☐	☐
El estudiante consigue ignorar aquella información del contexto y entorno que no le es útil para lograr el desarrollo de las actividades.	☐	☐	☐	☐
El estudiante cuando se distrae logra reorientar la atención y retomar la actividad con facilidad.	☐	☐	☐	☐

Atención sostenida

13. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante logra mantenerse concentrado en clase, por lapsos de 40 a 45 minutos.	☐	☐	☐	☐
El estudiante no se distrae fácilmente a pesar de que en el ambiente haya estímulos que puedan incentivarlo.	☐	☐	☐	☐
Si la tarea o actividad lo demanda, cambia de foco de atención y deja lo anterior con facilidad.	☐	☐	☐	☐

Atención dividida

14. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante es capaz de mantenerse atento a varias fuentes de estímulos sin perder el hilo conductor de la actividad.	☐	☐	☐	☐
El estudiante puede tomar apuntes o notas de clase de buena calidad sin desviarse del tema que se está tratando.	☐	☐	☐	☐
El estudiante sigue apropiadamente instrucciones.	☐	☐	☐	☐

Funciones ejecutivas

15. *

Marca solo un óvalo por fila.

Nunca A veces Casi siempre Siempre

El estudiante organiza su tiempo para poder cumplir con las tareas escolares.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante es flexible ante los cambios y los imprevistos.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante considera diversas rutas para resolver una tarea y elige la más adecuada.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante contempla diversas posibilidades para enfrentar una actividad y se acomoda a cualquiera, si la quiere poner en práctica no se puede implementar.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante tiene adecuadas estrategias de monitoreo y seguimiento de sus acciones, y reconoce cuando debe modificar lo planeado si no está alcanzando la meta propuesta.

☐ ☐ ☐ ☐

Memoria

16. *

Marca solo un óvalo por fila.

Nunca A veces Casi siempre Siempre

El estudiante comenta experiencias de su vida cotidiana en diversos espacios y contextos.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante habla de sí mismo y de su proyección en su vida personal, familiar y escolar

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante evidencia conocimientos muy especializados sobre un tema particular.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante recuerda los conocimientos aprendidos previamente sin mayor dificultad.

☐ ☐ ☐ ☐

Competencia lectora y escritural

17. *

Marca solo un óvalo por fila.

Nunca A veces Casi siempre Siempre

El estudiante evidencia un adecuada lectura "automática" (lee con fluidez, con signos de puntuación y con entonación adecuada)

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante es hábil para hacer esquemas o diagramas en los que identifica los conceptos fundamentales sobre los que trata un texto determinado y sus relaciones.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante tiene una buena escritura "automática", sin omitir letras, pegar palabras, confundir letras o demás.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante escribe con buena redacción.	☐	☐	☐	☐
El estudiante escribe con buena ortografía	☐	☐	☐	☐
El estudiante utiliza una red de conceptos y de vocabulario altamente enriquecido.	☐	☐	☐	☐
El vocabulario que domina el estudiante resulta poco frecuente, comparado con el de sus compañeros o con personas de su edad y medio cultural.	☐	☐	☐	☐

Lenguaje

18. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante puede comunicarse con otros por vía oral.	☐	☐	☐	☐
El estudiante es capaz de seguir el hilo de las conversaciones.	☐	☐	☐	☐
El estudiante expresa sus ideas con frases gramaticalmente correctos.	☐	☐	☐	☐
El estilo de conversación del estudiante parece extraño, utiliza un vocabulario rebuscado, sus frases suenan demasiado elaboradas, no emplea expresiones coloquiales.	☐	☐	☐	☐

El estudiante emplea un tono de voz ajustado a lo que dice.	☐	☐	☐	☐
---	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

Razonamiento

19. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante es hábil para plantear hipótesis o explicaciones frente a determinados fenómenos o situaciones que se exponen en clase.	☐	☐	☐	☐
El estudiante usa conocimientos previos u experiencias relevantes para plantear hipótesis o explicaciones.	☐	☐	☐	☐
El estudiante sabe defender sus argumentos haciendo uso de lo que sabe sobre el tema.	☐	☐	☐	☐

Resolución y planteamiento de problemas

20. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante identifica fácilmente los datos, información relevante y punto de llegada.	☐	☐	☐	☐
El estudiante realiza inferencias que vinculan sus conocimientos con los planteamientos del enunciado.	☐	☐	☐	☐

El estudiante sabe qué procedimientos de los que ha aprendido le sirve para solucionarlo.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante genera un plan o alternativa de solución adecuada para enfrentar el problema.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante busca documentarse en torno a aquellos conocimientos o procedimientos que no conoce o no domina.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante mientras soluciona el problema, reconoce dónde se equivoca y se autocorrigie.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante verifica si la solución es correcta.

☐ ☐ ☐ ☐

En caso de que la solución no sea correcta, el estudiante reconoce dónde se equivocó y redirecciona el proceso.

☐ ☐ ☐ ☐

Comunicación

21. *

Marca solo un óvalo por fila.

Nunca A veces Casi siempre Siempre

El estudiante puede transferir un conocimiento que le es familiar y domina muy bien, para explicar.

☐ ☐ ☐ ☐

En una discusión o debate, el estudiante plantea un argumento claro que dé cuenta de su opinión o posición al respecto.

☐ ☐ ☐ ☐

En los debates el estudiante "tiende a irse por otro camino", nombrar datos irrelevantes, pero, no presenta un argumento claramente definido.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante busca hacerse entender en cuanto a lo que quiere o necesita.

☐ ☐ ☐ ☐

Modelación

22. *

Marca solo un óvalo por fila.

Nunca A veces Casi siempre Siempre

El estudiante reconoce e interpreta distintas representaciones del objeto matemático

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante construye diferentes presentaciones del objeto matemático

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante interpreta la relación entre las representaciones del objeto matemático y pasa conscientemente de una a otra.

☐ ☐ ☐ ☐

El estudiante reconoce la construcción de un modelo como un puente entre la situación y la matemática.

☐ ☐ ☐ ☐

23. Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
El estudiante reconoce los números reales, establecer relaciones entre ellos y operar con ellos	☐	☐	☐	☐
El estudiante mide, comparar y calcula magnitudes.	☐	☐	☐	☐
El estudiante elaborar procedimientos con ayuda de geometría u otras ramas de la matemática.	☐	☐	☐	☐
El estudiante razona y estructura procedimientos analíticos.	☐	☐	☐	☐

Conducta adaptativa y desarrollo personal.

24. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Sí	No
¿Considera que al estudiante se le hace difícil conseguir amigos?	☐	☐
¿Al estudiante le cuesta controlar sus impulsos y emociones frente a un problema?	☐	☐
¿El estudiante acepta con responsabilidad sus errores y no busca culpables?	☐	☐

Participación e inclusión social.

25. El estudiante muestra un buen desempeño trabajando de forma: *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Individual
☐ Grupal
☐ Ambas

26. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Sí	No
¿Considera que el estudiante prefiere quedarse callado y seguir la corriente para evitar desacuerdos y no perder amistades?	☐	☐
¿El estudiante cuenta con un acompañante o tutor personal?	☐	☐
¿El estudiante requiere del acompañamiento constante del psicólogo o psicorientador?	☐	☐
¿Considera que el estudiante reprime ciertas habilidades por temor a ser rechazado o burlado por sus compañeros?	☐	☐

Adaptaciones a las metas de aprendizaje

27. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Sí	No
¿El estudiante requiere que se le diga constantemente lo que tiene que hacer?	☐	☐

¿Si el estudiante no puede cumplir lo propuesto, hace nuevos planes?v

☐ ☐

¿Considera que el estudiante requiere de tiempo extra (en comparación con sus compañeros) para lograr los objetivos de aprendizaje?

☐ ☐

¿Usted requiere repetir las indicaciones con frecuencia para que el estudiante actúe?

☐ ☐

¿Considera que el estudiante requiere de ayuda extra para poder lograr los objetivos de aprendizaje?

☐ ☐

¿El estudiante requiere diferentes medios de comunicación y representación para poder dar entendimiento a la actividad a realizar?

☐ ☐

¿El estudiante requiere de varias estrategias para poder captar la atención e interés?

☐ ☐

¿Usted considera que las habilidades intelectuales del estudiante son coherentes con el grado que cursa?

☐ ☐

¿El estudiante cuenta con un PIAR para el área de matemáticas?

☐ ☐

28. ¿Usted realiza adaptaciones curriculares para el aprendizaje del estudiante? *

Marca solo un óvalo.

☐ Sí Salta a la pregunta 29

☐ No

29. ¿Cuáles adaptaciones? *

Anexo 5. Cuestionario aplicado a docente de matemáticas - Versión 2.

Cuestionario de caracterización a estudiantes

Estimado docente, el presente cuestionario tiene como objetivo indagar sobre las características personales y en contexto escolar, de estudiantes que presentan alguna NEE o característica particular identificada desde la observación participativa. Además, poder precisar en elementos de tipo escolar desde su perspectiva como maestro. Para ello, las preguntas se orientan a las siguientes dimensiones: contexto y vida familiar, habilidades intelectuales, conducta adaptativa, participación e inclusión social y adaptaciones a las metas de aprendizaje.

Tenga en cuenta que la recolección de datos y tratamiento de información tiene propósitos exclusivamente para efectos de una investigación de tipo académico.

Agradezco de antemano su participación y respuesta de forma sincera a este cuestionario.

***Obligatorio**

1. Nombre del estudiante *

2. ¿Qué persona acude a los llamados cuando se requiere hacer revisión académica o en relación a observaciones disciplinarias? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Papá
☐ Mamá
☐ Herman@
☐ Otro familiar
☐ Cuidador
☐ Otro: _____

3. ¿Con qué condición está diagnosticado el estudiante? *

Estimado docente, frente a las siguientes preguntas escriba un comentario que refleje a su percepción desde lo que conoce y puede caracterizar al estudiante.

Atención

4. Como describiría los episodios de concentración del estudiante durante las explicaciones u orientaciones en la clase. Tenga en cuenta apreciaciones relacionadas con: si el estudiante logra centrar la atención evitando elementos que pueden distraer, si logra mantener el hilo conductor de la orientación, sigue instrucciones o si tiene habilidad o no para copiar y a su vez prestar atención. *

5. ¿Cuál es su apreciación sobre la forma como el estudiante enfrenta el desarrollo de una actividad y las estrategias de desempeño que implementa? Por ejemplo, si el estudiante es ordenado para realizar las tareas a tiempo y se realiza su propio seguimiento de la actividad, si se autoevalúa y corrige. *

Memoria

6. ¿Cuál es su apreciación con respecto a funciones relacionadas con la memoria del estudiante? Por ejemplo: si el estudiante recuerda con facilidad núcleos conceptuales estudiados anteriormente, si memoriza con facilidad elementos claves o si evidencia conocimientos más avanzados relacionados con un tema. *

Competencia lectora y escritural y lenguaje.

7. ¿Cuál es su apreciación con respecto a las habilidades de estudiante para tomar apuntes, expresarse de forma oral, participar en debates, dirigirse a compañeros o docente, entre otras cosas relacionadas con la comprensión lectora y escritural, junto con habilidades y características en el lenguaje? *

El proceso de razonamiento

8. ¿Qué apreciación tiene del estudiante con respecto a habilidades del proceso de razonamiento? Tenga en cuenta que a este proceso refieren cuestiones relacionadas con plantear hipótesis, defender sus estrategias o ideas a través de argumentos válidos u organizar diferentes estrategias de solución o en tal caso, representaciones del objeto matemático para establecer conjeturas. *

Proceso de Resolución y planteamiento de problemas

9. ¿Cómo describiría el desempeño del estudiante frente a la solución de un problema? Resalte elementos *
relacionados con: si el estudiante identifica los datos restando importancia a elementos irrelevante, si
sabe que procedimientos debe usar para resolver, genera una estrategia de solución, precisa
respuestas teniendo en cuenta el contexto y verifica la solución.

Proceso de Comunicación

10. ¿Cuál es su apreciación sobre habilidades del proceso de comunicación en el estudiante? Tenga en *
cuenta que en este proceso se precisan elementos sobre si el estudiante es capaz de explicar,
justificar y argumentar ideas, participa en discusiones y busca hacerse entender cuando lo necesita.

Proceso de Modelación

11. ¿Qué opina sobre el desempeño del estudiante con respecto a identificar, reconocer, construir, y *
coordinar representaciones del objeto matemático?

Proceso de Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

12. ¿Cómo describiría el desempeño del estudiante frente habilidades relacionadas con el proceso de *
elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos? A este proceso resalte cuestiones
relacionadas con operar con los números reales, medir, comparar, calcular magnitudes, elaborar
procedimientos usando diversos elementos y razonar en función de ellos.

Conducta adaptativa y desarrollo personal

13. ¿Cómo describiría el comportamiento del estudiante frente al control de impulsos, emociones o *
alteraciones cuando no entiende o debe asumir responsabilidades?

Participación e inclusión social

14. El estudiante muestra un buen desempeño en matemáticas trabajando de forma: *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Individual
☐ Grupal
☐ Ambas
☐ Otro: _____

Adaptaciones a las metas de aprendizaje

15. Las siguientes preguntas refieren a cuestiones técnicas, didácticas y pedagógicas que se han *
ejecutado en el aula con el fin de ayudar o brindar el apoyo que necesita el estudiante para su
desempeño.

Marca solo un óvalo por fila.

	Sí	No
¿El estudiante requiere que se le diga constantemente lo que tiene que hacer?	☐	☐
¿Si el estudiante no puede cumplir lo propuesto, hace nuevos planes?	☐	☐
¿Considera que el estudiante requiere de tiempo extra (en comparación con sus compañeros) para lograr los objetivos de aprendizaje?	☐	☐

¿Considera que el estudiante requiere de ayuda extra para poder lograr los objetivos de aprendizaje?

☐ ☐

¿El estudiante requiere diferentes medios de comunicación y representación para entender la actividad a realizar?

☐ ☐

¿El estudiante requiere de varias estrategias para poder captar la atención e interés?

☐ ☐

¿Usted considera que las habilidades intelectuales del estudiante son coherentes con el grado que cursa?

☐ ☐

¿El estudiante cuenta con un PIAR para el área de matemáticas?

☐ ☐

16. ¿El estudiante cuenta con un PIAR para el área de matemáticas? En caso de que lo tenga, ¿Qué elementos resalta? *

17. Observaciones y/o sugerencias

Anexo 6. Cuestionario de habilidades intelectuales.

Formato de cuestionario a docente de observación
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



Caracterización de habilidades intelectuales

ESTUDIANTE: _____

ATENCIÓN				
Atención selectiva				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Se centra de forma específica en aquellos elementos del ambiente que son relevantes para la tarea que debe desarrollar.				
Consigue ignorar aquella información del contexto y entorno que no le es útil para lograr el desarrollo de las actividades.				
Cuando se distrae logra reorientar la atención y retomar la actividad con facilidad.				
Atención sostenida				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Logra mantenerse concentrado en clase, por lapsos de 40 a 45 minutos.				
No se distrae fácilmente a pesar de que en el ambiente haya estímulos que puedan incentivarlo.				
Si la tarea o actividad lo demanda, cambia de foco de atención y deja lo anterior con facilidad.				
Atención dividida				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Es capaz de mantenerse atento a varias fuentes de estímulos sin perder el hilo conductor de la actividad.				
Puede tomar apuntes o notas de clase de buena calidad sin desviarse del tema que se está tratando.				
Sigue apropiadamente instrucciones.				

FUNCIONES EJECUTIVAS				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Organiza su tiempo para poder cumplir con las tareas escolares.				
Es flexible ante los cambios y los imprevistos.				
Considera diversas rutas para resolver una tarea y elige la más adecuada.				
Contempla diversas posibilidades para enfrentar una actividad y se acomoda a cualquiera, si la quiere poner en práctica no se puede implementar.				
Tiene adecuadas estrategias de monitoreo y seguimiento de sus acciones, y reconoce cuando debe modificar lo planeado si no está alcanzando la meta propuesta.				

Formato de cuestionario a docente de observación
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



MEMORIA				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Comenta experiencias de su vida cotidiana en diversos espacios y contextos.				
Habla de sí mismo y de su proyección en su vida personal, familiar y escolar.				
Evidencia conocimientos muy especializados sobre un tema particular.				
Recuerda los conocimientos aprendidos previamente sin mayor dificultad.				

COMPETENCIA LECTORA Y ESCRITURAL				
El estudiante	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
evidencia una adecuada lectura “automática” (lee con fluidez, con signos de puntuación y con entonación adecuada)				
Es hábil para hacer esquemas o diagramas en los que identifica los conceptos fundamentales sobre los que trata un texto determinado y sus relaciones.				
Tiene una buena escritura “automática”, sin omitir letras, pegar palabras, confundir letras o demás.				
Escribe con buena redacción.				
Escribe con buena ortografía.				
Utiliza una red de conceptos y de vocabulario altamente enriquecido.				
El vocabulario que domina resulta poco frecuente, comparado con el de sus compañeros o con personas de su edad y medio cultural.				

LENGUAJE				
El estudiante:	Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
Puede comunicarse con otros por vía oral.				
Es capaz de seguir el hilo de las conversaciones.				
Expresa sus ideas con frases gramaticalmente correctas.				
Su estilo de conversación parece extraño, utiliza un vocabulario rebuscado, sus frases suenan demasiado elaboradas, no emplea expresiones coloquiales.				
Emplea un tono de voz ajustado a lo que dice.				



PROCESOS MATEMÁTICOS				
Razonamiento				
El estudiante:	Nunca	Casi nunca	Casi siempre	Siempre
Es hábil para plantear hipótesis o explicaciones frente a determinados fenómenos o situaciones que se exponen en clase.				
Usa conocimientos previos u experiencias relevantes para plantear hipótesis o explicaciones.				
Sabe defender sus argumentos haciendo uso de lo que sabe sobre el tema.				
Resolución y planteamiento de problemas				
El estudiante:	Nunca	Casi nunca	Casi siempre	Siempre
Identifica fácilmente los datos, información relevante y punto de llegada.				
Realiza inferencias que vinculan sus conocimientos con los planteamientos del enunciado.				
Sabe qué procedimientos de los que ha aprendido le sirve para solucionarlo.				
Genera un plan o alternativa de solución adecuada para enfrentar el problema.				
Busca documentarse en torno a aquellos conocimientos o procedimientos que no conoce o no domina.				
Mientras soluciona el problema, reconoce dónde se equivoca y se autocorrige.				
Verifica si la solución es correcta.				
En caso de que la solución no sea correcta reconoce dónde se equivocó y redirección el proceso.				
Comunicación				
El estudiante:	Nunca	Casi nunca	Casi siempre	Siempre
Puede transferir un conocimiento que le es familiar y domina muy bien, para explicar.				
En una discusión o debate, plantea un argumento claro que dé cuenta de su opinión o posición al respecto.				
En los debates "tiende a irse por otro camino", nombrar datos irrelevantes, pero, no presenta un argumento claramente definido.				
Busca hacerse entender en cuanto a lo que quiere o necesita.				



Modelación		Nunca	Casi nunca	Casi siempre	Siempre
El estudiante:					
	Reconoce e interpreta distintas representaciones del objeto matemático				
	Construye diferentes presentaciones del objeto matemático				
	Interpreta la relación entre las representaciones del objeto matemático y pasa conscientemente de una a otra.				
	Reconoce la construcción de un modelo como un puente entre la situación y la matemática.				
Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos					
El estudiante:		Nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
	Reconoce los números reales, establecer relaciones entre ellos y operar con ellos				
	Mide, comparar y calcula magnitudes.				
	Elaborar procedimientos con ayuda de geometría u otras ramas de la matemática.				
	Razona y estructura procedimientos analíticos.				

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Anexo 7. Situación de aprendizaje final.

Situación de aprendizaje para el estudio de la variación y el cambio.
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



Nombre: _____

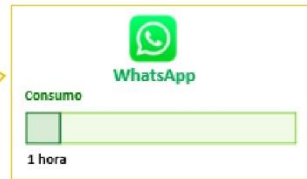
Fecha: _____

MOMENTO 1

Consumo de datos

Hace poco tiempo fue lanzada la aplicación "Tu móvil" que brinda información sobre el consumo de datos en las aplicaciones más usadas.

En la pestaña "Aplicación más usada" se muestra WhatsApp como protagonista, observa la imagen.



1. ¿Qué magnitudes intervienen en el consumo de datos?

2. Marque sobre la imagen qué cantidad de datos habrá consumido la aplicación de WhatsApp al cabo de 4 horas.

3. ¿Cuántas horas tardará en consumir los datos del plan? Explique su respuesta.



Situación de aprendizaje para el estudio de la variación y el cambio.
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



4. Realice un bosquejo de la gráfica que muestra la cantidad de datos consumidos al pasar las horas.



Trabajemos con GeoGebra

1. ¿Qué representa el gráfico que se muestra en la vista gráfica 2?

2. Describa qué pasa cuando se mueve el punto A.

3. ¿Qué representa el punto A?

4. ¿Qué pasa cuando $A=(0,0)$?

5. ¿Cuántos horas tardará WhatsApp en consumir los datos del plan? Justifique su respuesta.



Situación de aprendizaje para el estudio de la variación y el cambio.
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



6. Describa que observa en la pantalla (En la vista gráfica 1) cuando se mueve el punto A.

7. ¿Qué representa el punto W?

8. ¿Qué representan los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?

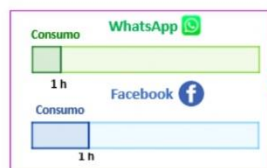
9. ¿Qué características tienen los puntos que aparecen en la vista gráfica 1?

10. ¿Qué pasa si el consumo de datos por hora aumenta? Justifique su respuesta.

MOMENTO 2

Juliana quiere saber el consumo de datos de las aplicaciones que más usa, WhatsApp y Facebook.

En la pestaña "Otras aplicaciones" se muestra el consumo para cada una de ellas.



1. ¿Qué representa el gráfico que se muestra para cada una de las aplicaciones?



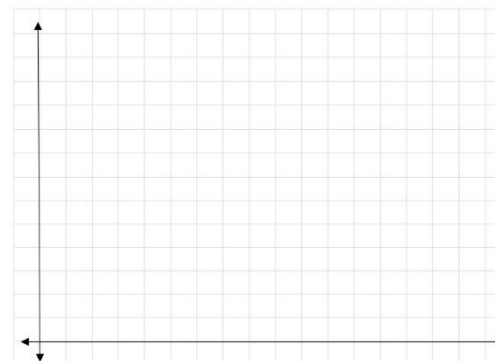
Situación de aprendizaje para el estudio de la variación y el cambio.
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



2. ¿Qué representa la longitud de la barra en el gráfico de las aplicaciones?

3. ¿Cuántos horas tardará Facebook en consumir los datos del plan? Justifique su respuesta.

4. Bosqueje la gráfica del consumo de datos para cada una de las aplicaciones.

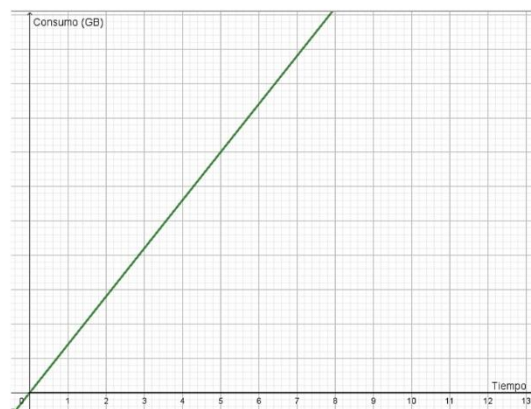


5. ¿Qué diferencia hay entre el consumo de datos por hora para las dos aplicaciones?

6. ¿Cuál de las aplicaciones consume menos datos? ¿por qué?

7. En la siguiente gráfica se muestra el consumo de datos de Whatsapp. Construya la gráfica del consumo para Facebook teniendo en cuenta que su consumo de datos por hora es el doble que Whatsapp.





Explique los procedimientos que lo llevaron a realizar la gráfica de esa manera.

Trabajemos con GeoGebra.

1. ¿Qué representa el gráfico que se muestra en la vista gráfica 2?

2. Describa qué pasa cuando se mueve el punto A

3. ¿Qué representa el punto F?



4. ¿Cuántas horas tardará Facebook en consumir los datos del plan? Justifique su respuesta.

5. ¿Cómo describiría el comportamiento del punto F respecto al punto W?

6. ¿Qué características resalta del comportamiento de los puntos a medida que pasan las horas?

7. Pedro tiene mayor cantidad de datos disponibles que Juliana ¿cuál aplicación consume menos datos? ¿Por qué?

MOMENTO 3

Para más detalle del consumo de datos de WhatsApp y Facebook, se muestra una tabla de datos para cada una.

Tenga en cuenta que el consumo que se muestra es un acercamiento al promedio del uso diario (en horas) de la aplicación.



WhatsApp	
Tiempo (h)	Consumo (GB)
1	0.0028
2	0.0056
3	0.0084
4	0.0112

Facebook	
Tiempo (h)	Consumo(GB)
1	0.0056
2	0.0112
3	0.0168
4	0.0224

1. Según la información que se muestra en las tablas de datos ¿cuál de las dos aplicaciones consumirá más rápido las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.





2. ¿Cuál es el consumo por hora de la aplicación de WhatsApp? Justifique su respuesta.

3. ¿Cuál es el consumo por hora de la aplicación de Facebook? Justifique su respuesta.

4. El estudio "We are social" afirma que, en promedio, una persona usa WhatsApp durante 6 horas por día. ¿Cuántos GB se consumen? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

5. ¿Cómo se puede hallar el consumo de datos de WhatsApp para cualquier hora?

6. Si el consumo de GB por hora para WhatsApp aumenta 0.0012 GB ¿cuántas horas tardará en consumirse las GB del plan? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.



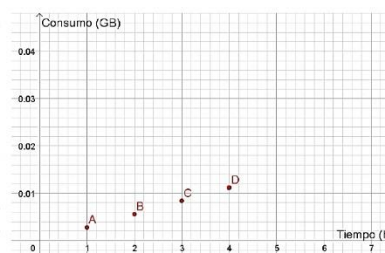
Trabajemos con GeoGebra.

1. ¿Qué representan los datos que se muestran en la hoja de cálculo?

2. ¿Qué característica observa entre un punto y otro?

3. ¿Cómo ubicaría el consumo de datos para 5 horas? ¿Dónde?

4. ¿Cómo ubicaría el consumo de datos para 3.5 horas? ¿Dónde?



5. Complete la tabla, hallando la diferencia consecutiva entre los valores de consumo. Observe el ejemplo.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia	
1	0.0028	----	----
2	0.0056	0.0056-0.0028	0.0028
3	0.0084		
4	0.0112		

6. ¿Qué característica observa en los valores hallados en la columna "Diferencia"?



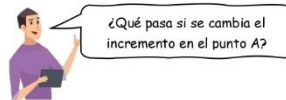
7. ¿Cómo hallaría el consumo de datos para 5 y 3.5 horas al usar la aplicación de WhatsApp?
Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

8. ¿Cómo se puede hallar el consumo de datos para cualquier hora?

9. Observe la vista gráfica. ¿Qué representa la recta que pasa por el punto E?

10. ¿Qué representan los puntos que aparecen después de la recta que pasa por E?

11. ¿Qué debería suceder para que la cantidad de datos alcance para más tiempo? Justifique su respuesta.



1. ¿Qué características resalta de los puntos que aparecen en la vista gráfica?



2. Halle la diferencia para cada una de las variables.

Tiempo (h)	Diferencia (tiempo)	Consumo (GB)	Diferencia (consumo)
0		0	
0.5		0.0014	
1		0.0028	
1.5		0.0042	
2		0.0056	
2.5		0.0070	
3		0.0084	
3.5		0.0098	
4		0.0112	

3. ¿Qué características observa en los datos hallados en las columnas de diferencia?

4. ¿Qué relación o características observas entre los valores hallados en las diferencias de las dos tablas? (si es necesario, use la última columna de la tabla).

5. ¿Cuánto es el consumo de datos si se usa la aplicación durante 6 horas?



Un experto afirma que el consumo de datos de la aplicación de Instagram sin interacción del usuario es de 0.0020 GB y después de cada hora su aumento es 0.0030 GB.

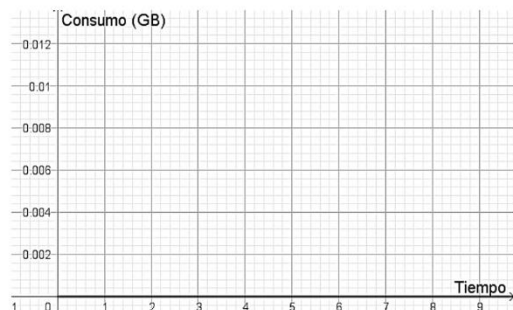


6. Con la aplicación de Instagram ¿Cuál es el consumo cuando $t=0$? ¿Por qué?

Situación de aprendizaje para el estudio de la variación y el cambio.
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



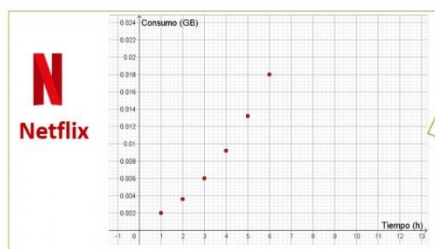
7. Elabore la gráfica del consumo de datos de Instagram.



MOMENTO 4



Durante las vacaciones, la aplicación más usada por Pedro fue Netflix. En su aplicación se muestra el siguiente registro.



1. Describa cómo es el consumo de datos de la aplicación Netflix

Situación de aprendizaje para el estudio de la variación y el cambio.
Institución Educativa las Américas, Bucaramanga – Santander.
Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio.



2. ¿Cómo se diferencia el consumo de datos de la aplicación Netflix y WhatsApp? Escriba sus cálculos y explique su respuesta.

3. ¿Cómo ubicaría el consumo de datos para 7 horas? ¿Dónde? Use la gráfica que se muestra en la parte inicial de la actividad.

4. En la siguiente tabla se muestra el consumo de datos de la aplicación de Netflix. Halle las diferencias consecutivas de los valores de consumo.

Tiempo (h)	Consumo (GB)	Diferencia
1	0.0020	-----
2	0.0036	
3	0.0060	
4	0.0092	
5	0.0132	
6	0.0180	

5. ¿Qué observa entre el valor hallado en la columna "Diferencia" y el valor hallado para en la actividad anterior con la aplicación de WhatsApp?

6. ¿Cómo o dónde ve reflejada la diferencia hallada para el consumo de datos de Netflix al detallar la representación gráfica?
