

SOBRE COEFICIENTES BINOMIALES

Realizado por:
Herman Abel Gámez Terán

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Bucaramanga
2004

SOBRE COEFICIENTES BINOMIALES

Realizado por:
Herman Abel Gámez Terán

Monografía presentado como requisito para
optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director
Edilberto J. Reyes G.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Bucaramanga
2004

Dedicatoria

A las personas que mas quiero en este mundo y son mi más grande tesoro:
Mami, Papá, Pipe, Alex, Maria Camila, Diego y Mamá. Gracias por
todo su apoyo y amor.

Agradecimientos

Mi más sinceros agradecimientos:

- A **DIOS** por brindarme la oportunidad de alcanzar un nuevo triunfo en mi vida.
- Al profesor **EDILBERTO REYES** por su total y sincera colaboración.
- A mis padres **HERMAN** y **BASILIA** por su amor, apoyo y buen ejemplo.
- A mis hermanos **ALEX, PIPE, DIEGO** y **MARIA CAMILA** por ser parte de mi vida.
- A mi abuela **MERCEDES** por ser mi segunda madre.
- A **LUCHO, YENNY, ANDERSON** y **SERGIO** que siempre estuvieron acompañándome en esta travección, compartiendo muchas tristezas y alegrías.
- A **MI TIO** y **ALBA** por brindarme la mano cuando más lo necesité.
- A la familia **BUENO GUERRERO** por abrirme las puertas de su hogar.
- A los profesores **ISAACS, SONIA, LUIS H., ROSALBA, GERMAN, MAYORGA** por brindarme los conocimientos necesarios para alcanzar este gran logro.
- A las secretarias de la escuela **NUBIA** y **ROSALBA** por su gran colaboración a lo largo de la carrera.
- A todas aquellas personas que de una u otra forma hicieron que este sueño fuera una realidad.

TITULO: SOBRE COEFICIENTES BINOMIALES*

AUTOR: HERMAN ABEL GÁMEZ TERÁN**

PALABRAS CLAVES:

Coeficientes binomiales

Factorial

Números primos

DESCRIPCIÓN

Los coeficientes binomiales, notados comúnmente por $\binom{n}{k}$, son los coeficientes en el desarrollo de la n -ésima potencia del binomio $(a + b)$, debido a esto reciben este nombre. Estos coeficientes son utilizados en casi todas las ramas de la matemática principalmente en la estadística, la teoría de números, el álgebra, la matemática finita, etc.. A pesar de esto, se conocen solamente unas pocas propiedades de tales coeficientes, se desconoce su desarrollo histórico y normalmente se extienden únicamente a enteros positivos.

El primer capítulo de ésta monografía es una breve reseña histórica de los coeficientes binomiales, donde se presenta su origen, su posible desarrollo histórico y algunas aplicaciones que estos han tenido a lo largo de la historia. En el segundo capítulo se muestran las propiedades más importantes de los coeficientes binomiales, utilizando para su prueba diferentes herramientas como el triángulo de Pascal, la definición por el factorial, los principios básicos de conteo, y las funciones generadoras. En el tercer capítulo se dará una idea del uso de los coeficientes binomiales en un resultado muy importante en teoría de números: el teorema del número primo, obteniendo algunos resultados más débiles. En el cuarto capítulo se extienden los coeficientes binomiales a valores reales, utilizando para ello la función Coeficiente Binomial.

* Monografía ** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

Director Edilberto José Reyes G.

TITLE: ABOUT BINOMIAL COEFFICIENTS*

AUTHOR: HERMAN ABEL GÁMEZ TERÁN**

KEY WORDS:

Binomial coefficients

Factorial

Prime numbers

DESCRIPTION

The binomial coefficients, commonly noticed for $\binom{n}{k}$, they are the coefficients in the development of the powers $(a + b)^n$, due to this they receive this name. These coefficients are used in many branches of the mathematical. In spite of this, they know each other only some few properties of such coefficients, their historical development is ignored and they usually extend only to whole positive integers.

The first chapter of this monograph is a brief historical review of the binomial coefficients, where it is presented its origin, its possible historical development and some applications that have had along the history. In the second chapter the most important properties in the binomial coefficients are shown, using for their proof different tools like Pascal's triangle, the definition by means of the factorial, the basic principles of count and generating functions. In the third chapter an idea of the use of the binomial coefficients will be given in a very important result in Numbers Theory: the Theorem of Prime Number, obtaining so0me weaker results. In the fourth chapter the binomial coefficients extend to real values, using for it the Binomial Coefficient Function.

* Monograph ** FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS.
Director Edilberto José Reyes G.

Índice general

Introducción	1
1. Breve reseña histórica	2
2. Definición y propiedades básicas de los coeficientes binomiales	7
2.1. Triángulo de Pascal	7
2.2. Definición clásica y propiedades de los coeficientes binomiales.	12
2.3. Principios de conteo y coeficientes binomiales	17
2.4. Funciones generadoras	20
3. COEFICIENTES BINOMIALES Y NÚMEROS PRIMOS	23
3.1. Un poco de historia	23
3.2. Teorema del número primo	27
4. FUNCIÓN COEFICIENTE BINOMIAL	35
4.1. Función Gamma	35
4.2. Definición de la función coeficiente binomial	40
4.3. Una descripción general de C	42
4.4. Algunas secciones de C	43
4.4.1. Secciones verticales	44

4.4.2. Secciones horizontales	47
4.4.3. Secciones diagonales	50

Bibliografía	53
---------------------	-----------

Índice de figuras

1.1.	Diagrama del triángulo de Pascal hasta el orden 11 en el libro <i>aritmética</i> del matemático arabe Al-Samawal.	3
1.2.	Diagrama del triángulo de Pascal en el libro <i>Espejo precioso de los cuatro elementos</i> del matemático chino Chu Shih-Chieu escrita 1303.	4
1.3.	Portada del libro <i>Rechnung</i> del matemático alemán Apianus, donde aparece por primera vez en occidente el triángulo de Pascal en el año 1527.	5
2.1.	Triángulo de Pascal	8
2.2.	Propiedad de simetría del triángulo de Pascal	9
2.3.	Propiedad de la adición paralela	10
2.4.	Propiedad de la adición superior	10
2.5.	Suma de los términos de cada fila	11
2.6.	Sucesión de Fibonacci en el triángulo de Pascal	11
2.7.	Triángulo de Pascal expresado con coeficientes binomiales	13
4.1.	Función Gamma y su recíproca	37
4.2.	Gráfica de la función C	41
4.3.	Acercamiento de la función C	42
4.4.	Colección de Secciones Verticales	46
4.5.	Colección de Secciones Horizontales	49

4.6. Colección de Secciones Diagonales	52
--	----

Introducción

Los coeficientes binomiales, notados comúnmente por $\binom{n}{k}$, son los coeficientes en el desarrollo del binomio $(a + b)$, debido a esto reciben este nombre.

Alrededor del año 300 a.C. el caso particular $(1+a)^2$ aparece en *Los Elementos de Euclides*, pero fue mucho más adelante, cerca del año 1100 d.C., donde los matemáticos árabes *Al-Kajari* y *Al-Samaw'al* llegan a un resultado más general, dando a conocer una tabla de potencias de $(a + b)$ hasta el grado 12.

Blaise Pascal es el primero en relacionar rigurosamente los coeficientes binomiales con el teorema del binomio. También muestra nuevas propiedades y aplicaciones a la Combinatoria y a la Teoría de Probabilidades. Gracias a esto los coeficientes binomiales también reciben el nombre de números combinatorios.

Los coeficientes binomiales siguen apareciendo a lo largo de la historia de la matemática mostrando nuevas propiedades y aplicaciones. Es mucho, y al mismo tiempo poco, lo que conocemos acerca de ellos. Con este trabajo se pretende mostrar su historia, algunas propiedades (utilizando diferentes métodos), una aplicación a un resultado muy importante en Teoría de Números: el Teorema del Número Primo. Además se mostrará la función coeficiente binomial como una posible extensión de los coeficientes binomiales a valores reales.

Capítulo 1

Breve reseña histórica

El desarrollo de $(a + b)^2$ y $(a + b)^3$ es muy antiguo, el caso $(1 + a)^2$ se encuentra en *Los Elementos de Euclides* al rededor del año 300 a.C.. El matemático árabe *al-Karaji*, alrededor del año 1100 d.C., es el primero en mostrar un resultado más general. Él describió cómo evaluar los términos en el desarrollo binomial $(a + b)^4$ con la demostración, luego lo hizo con $(a + b)^5$ con solo una oración y así sucesivamente, todo por un proceso que puede ser generalizado.

Después, en informes del trabajo de los matemáticos arabes *Al-Kajari* y *Al-Samaw'al* rededor de (1175) describieron la regla generadora

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{m-1},$$

simultaneamente con una tabla para $(a + b)^{12}$. El procedimiento también fue conocido en por el poeta, matemático, astrónomo y filósofo persa *aka Omar Khayyam* (1039-1123), probablemente basándose en fuentes chinas e indias más antiguas. Este procedimiento fue a menudo usado, no en el cálculo de potencias, sino en el cálculo de raíces.

Los coeficientes binomiales son propuestos también en China, nuevamente con respecto a encontrar raíces. Hay ilustraciones de esto en la obra del matemático chino *Chu Shih-chieu, Ssu - yuan yu - chien (Espejo precioso de los cuatro elementos)* escrita en 1303, donde en su primera página aparece un delicado diagrama del llamado triángulo de Pascal; la obra refiere su estudio a los “cuatro elementos” cómo las cuatro incógnitas figurativamente llamadas



Figura 1.1: Diagrama del triángulo de Pascal hasta el orden 11 en el libro *aritmética* del matemático arabe Al-Samawal.

cielo, tierra, hombre y objeto. En la obra del también matemático chino *Yang Hui*, *Análisis detallado de las reglas matemáticas* (1261) se hace mención a tales coeficientes. Otro matemático chino *Chia Hsien* (1100) lo define como *Sistema de tabulación para calcular coeficientes de binomios*.

En Occidente, el triángulo de Pascal apareció en el título de una página de el libro *Rechnung* (1527) por el algebrista alemán *Petrus Apianus*. También hay una tabla de orden 18 en otro libro alemán, *Arithmetica Integra* del matemático *Michael Stifel* (1544), considerado como el más importante de los libros de álgebra impresos hasta esa época.

El nombre coeficiente binomial fue introducido más tarde por Stifel (1486-1567), que mostró, alrededor de 1550, cómo calcular $(1 + x)^n$ a partir del desarrollo de $(1 + x)^{n-1}$. El matemático italiano *Nicolo Tartaglia* (1499-1559) estudia en su obra en parte póstuma que consta de tres volúmenes publicados entre 1556 y 1560 *General trattato di numeri et misure* (*Tratado general sobre el número y la medida*) una disposición numérica similar que llamó *Rectángulo aritmético*.

El genial matemático, místico y polemista francés *Blaise Pascal* (1623-1662) es el primero en relacionar rigurosamente los números combinatorios con el *teorema del binomio* (ya en alguna forma conocidos desde el siglo XIV) en un tratado escrito en 1653 y póstumamente publicado en 1665 (que incluía tam-

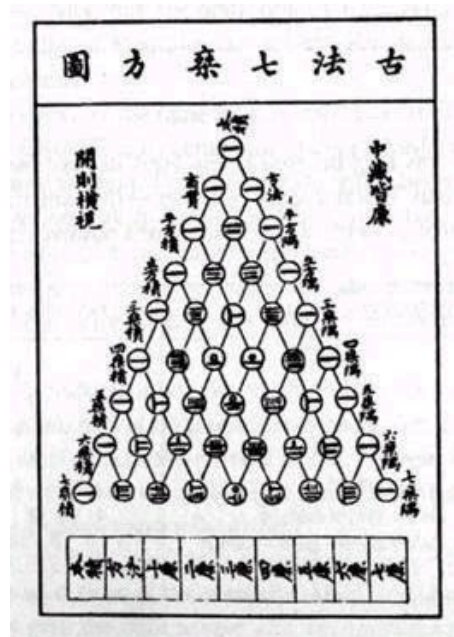


Figura 1.2: Diagrama del triángulo de Pascal en el libro *Espejo precioso de los cuatro elementos* del matemático chino Chu Shih-Chieu escrita 1303.



Figura 1.3: Portada del libro *Rechnung* del matemático alemán Apianus, donde aparece por primera vez en occidente el triángulo de Pascal en el año 1527.

bién su muy particular método de inducción): *Traité du triangle arithmétique* (*Tratado del triángulo aritmético*), deduciendo nuevas propiedades y aplicaciones del triángulo al desarrollo de $(a + b)^n$, a la teoría combinatoria y a la teoría de probabilidades. En 1886 el matemático escocés *George Chrystal* lo denomina *Triángulo de Pascal* en el volumen I de su obra *Algebra*.

Jaime Bernoulli (1654-1705) en su *Ars Conjectandi*, de 1713, usó una interpretación de Pascal para demostrar que

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Isaac Newton (1646-1727) mostró cómo calcular directamente $(1 + x)^n$ sin antes calcular $(1 + x)^{n-1}$. Él mostró que cada coeficiente puede ser determinado, usando el anterior, por medio de la fórmula

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}.$$

El teorema del binomio, descubierto entre 1664-1665, fue comunicado por

primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a *Henry Oldenburg* (entre 1615-1677), secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de *Leibniz* que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde, en una carta fechada el 17 de agosto del mismo año, que posee un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fechada el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

Aplicando los métodos de Wallis de interpolación y extrapolación a nuevos problemas, Newton utilizó los conceptos de exponentes generalizados mediante los cuales una expresión polinómica se transformaba en una serie infinita. Así estuvo en condiciones de demostrar que un buen número de series ya existentes eran casos particulares, bien directamente, por diferenciación o integración.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí; sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. El análisis mediante las series infinitas parecía posible, porque ahora resultaban ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban.

Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su *Algebra*, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Capítulo 2

Definición y propiedades básicas de los coeficientes binomiales

Los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ reciben este nombre porque son los coeficientes en el desarrollo de la n -ésima potencia del binomio $(a + b)$. Estos se aplican y se utilizan en muchas áreas de la matemática y tienen varias interpretaciones dependiendo del área de aplicación. En este capítulo se presentará su definición, sus propiedades básicas y algunas de sus aplicaciones a la matemática.

2.1. Triángulo de Pascal

El llamado *sistema de tabulación para calcular coeficientes de binomios* o *método celestial*, también llamado *triángulo aritmético* o *Rectángulo de Tartaglia* o más comunmente conocido como *Triángulo de Pascal* es uno de los modelos numéricos mas famoso en la historia de la matemática; sencillo en construcción y maravilloso como fuente, ofrece una notable correspondencia entre su simple construcción, los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton y los relevantes conceptos de combinaciones y variaciones del análisis combinatorio y el cálculo de probabilidades.

El triángulo de Pascal está formado por los coeficientes del desarrollo de $(a +$

anterior, y luego eso se divide por el exponente de b aumentado en 1, osea, el coeficiente del tercer término es $\frac{n(n-1)}{2}$. Este proceso se hace repetidamente hasta encontrar todos los coeficientes de $(a + b)^n$. Por lo tanto el desarrollo de $(a + b)^n$ es:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n}b^n.$$

Este resultado se conoce como *teorema del binomio*, el cual se va a utilizar más adelante.

El triángulo de Pascal tiene varias propiedades importantes. Algunas de esas propiedades se pueden determinar fcilmente al observar el triángulo, en cambio otras no se ven tan fcilmente. Una de las propiedades que se puede ver con mayor facilidad es el eje de simetría central que posee el triángulo:

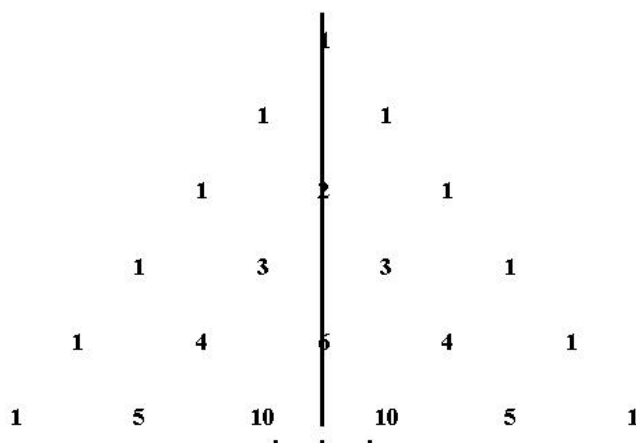


Figura 2.2: Propiedad de simetría del triángulo de Pascal

Si sumamos los términos de un segmento de diagonal obtenemos el término que está en la parte inferior izquierda, ésta propiedad se conoce como *propiedad de la adición paralela*

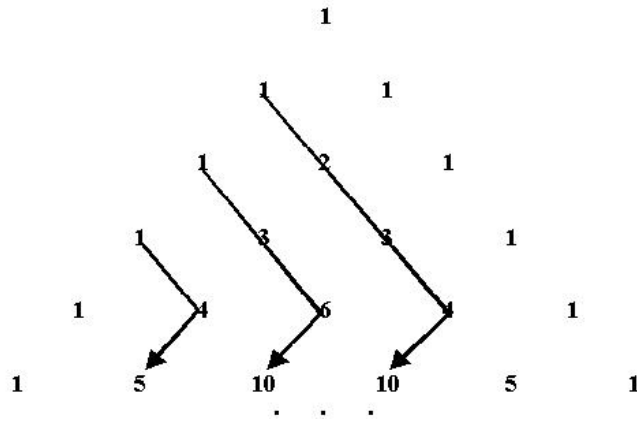


Figura 2.3: Propiedad de la adición paralela

Como este triángulo posee un eje de simetría se obtiene un propiedad similar a la adición paralela, ésta es la llamada *propiedad de la adición superior*

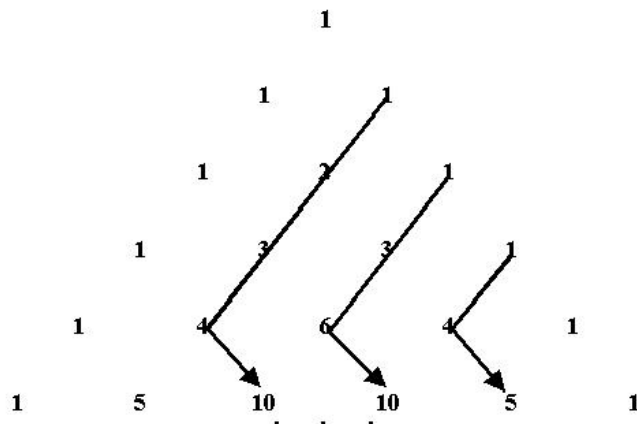


Figura 2.4: Propiedad de la adición superior

Sumando los términos de cada fila del triángulo obtenemos potencias de 2:

2.2. Definición clásica y propiedades de los coeficientes binomiales.

A continuación se presentará la definición más común de los coeficientes binomiales:

Definición 2.1. Sean n, k enteros no negativos, el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ está definido por

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases}$$

donde $n!$ es la función factorial y se define como $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

El factorial de n es también calculado por medio de la función *Gamma* como $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$, para $n > -1$. Esta definición permite generalizar el coeficiente binomial a valores no enteros, incluyendo valores complejos.

Utilizando la definición anterior de $\binom{n}{k}$ podemos demostrar algunas propiedades de los coeficientes binomiales de una manera sencilla, al igual nos provee la posibilidad de utilizar el método de inducción en los casos donde sea necesario utilizarlo.

Ahora veremos las dos propiedades principales de los coeficientes binomiales, estas son la propiedad de simetría y la propiedad de la adición.

Propiedad 2.1. (Propiedad de simetría) Sean n, k enteros no negativos, entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

□

los coeficientes binomiales:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \cdots + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k\end{aligned}$$

La demostración de este teorema es un ejercicio clásico de inducción matemática.

Otras propiedades importantes de los coeficientes binomiales son:

Propiedad 2.3. (*Propiedad de la adición paralela*) Sean n , k enteros no negativos, entonces

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Demostración. Usando la propiedad de la adición de forma iterada podemos escribir

$$\begin{aligned}\binom{n+k+1}{k} &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} \\ &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} \\ &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} + \binom{n+k-2}{k-3} \\ &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i}.\end{aligned}$$

□

Para $n = 1$ da la expresión

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{1+i}{i} = 1 + 2 + \dots + (k-1) + k = \binom{k+1}{k-1} = \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

que proporciona una fórmula para la suma de los k primeros naturales. Los números que resultan de la suma anterior, son los llamados *números triangulares*.

Propiedad 2.4 (Propiedad de la adición superior). Sean n, k enteros no negativos, entonces

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demostración. Aplicando la propiedad de simetría al coeficiente binomial $\binom{n+1}{k+1}$ obtenemos,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{n-k}.$$

Aplicando la propiedad de la adición en forma iterada al coeficiente $\binom{n+1}{n-k}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n-k} &= \binom{n}{n-k} + \binom{n}{n-k-1} \\ &= \binom{n}{n-k} + \binom{n-1}{n-k-1} + \binom{n-1}{n-k-2} \\ &= \binom{n}{n-k} + \binom{n-1}{n-k-1} + \binom{n-2}{n-k-2} + \binom{n-2}{n-k-3} \\ &= \binom{n}{n-k} + \binom{n-1}{n-k-1} + \dots + \binom{k+1}{1} + \binom{k}{0} \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la propiedad de simetría a la suma anterior, se obtiene

que

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{n-k} &= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k}.\end{aligned}$$

□

Esta propiedad es una suma de coeficientes binomiales contiguos donde el índice superior sigue el índice de sumación y el inferior es constante. Para $k = 2$ resulta

$$\sum_{i=2}^n \binom{i}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

que corresponde a la suma de los n primeros números triangulares. Los números que resultan de la suma anterior, son los llamados *números piramidales*.

Propiedad 2.5. Sean n, k enteros no negativos, entonces

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{n-k}{k+1} \\ &= \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Esta propiedad nos proporciona una manera de calcular un coeficiente binomial utilizando el anterior.

Otras propiedades básicas de los coeficiente binomiales se presentarán más adelante utilizando otras herramientas que facilitan su demostración.

2.3. Principios de conteo y coeficientes binomiales

En esta sección se presentarán algunas herramientas básicas que permiten determinar el número de elementos de algunos conjuntos sin que sea necesario enumerar sus elementos.

Uno de los procedimientos más utilizados en la historia de la humanidad es el de contar. A raíz de esto surgieron y se desarrollaron los sistemas de numeración, los cuales contribuyeron al desarrollo de la aritmética, la geometría y en general de toda la matemática.

Cuando se habla de “contar” se habla de enumerar los elementos de un conjunto para determinar cuantos elementos tiene. Existen principios que permiten resolver este problema de una manera rápida sin necesidad de nombrar y enumerar los elementos del conjunto. Dos de estos principios son el de la *Adición* y el de la *multiplicación*.

El *Principio de la Adición* plantea:

“Sean A y B dos conjuntos disyuntos, con p y q elementos respectivamente, entonces $A \cup B$ posee $p + q$ elementos”.

Este principio de la adición también puede nombrarse en los siguientes términos: *“Si un objeto A puede escogerse de p maneras y otro objeto B puede escogerse de q maneras, entonces el número de maneras de escoger el objeto A o el objeto B es $p + q$.”*

El *Principio de la multiplicación* también es llamado *Principio fundamental de enumeración* y plantea:

“Si un objeto A puede escogerse de p maneras y un objeto B puede escogerse de q maneras, entonces el número de maneras de escoger el objeto A y el objeto B es pq ”.

Estos principios dan origen a las permutaciones y combinaciones, las cuales son muy utilizadas en combinatoria. Las permutaciones se relacionan con el ordenamiento de objetos y las combinaciones con la escogencia de objetos.

Ejemplo 2.1. *Dados los objetos A, B, C . ¿De cuantas maneras estos se pueden ordenar?*

Los tres elementos se pueden ordenar de 6 maneras distintas, así: $ABC ACB BAC BCA CAB CBA$.

Para el caso general de n objetos, hay n maneras de escoger un objeto para el primer lugar, $n - 1$ maneras para el segundo lugar, $n - 2$ maneras para el tercer lugar, y así sucesivamente hasta 1 para el último lugar. Por el principio de la multiplicación tenemos que el número de maneras de ordenar n objetos distintos es:

$$n(n - 1) \cdots 1 = n!$$

Cada ordenación de los n objetos se denomina una *Permutación simple de n objetos* o simplemente una *Permutación*.

Ejemplo 2.2. *Sea el conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. De cuantas maneras se pueden escoger 3 elementos del conjunto?*

En total hay 10 maneras, estas son:

$$\begin{aligned} &\{a_1, a_2, a_3\} \{a_1, a_2, a_4\} \{a_1, a_2, a_5\} \{a_1, a_3, a_4\} \{a_1, a_3, a_5\} \\ &\{a_1, a_4, a_5\} \{a_2, a_3, a_4\} \{a_2, a_3, a_5\} \{a_2, a_4, a_5\} \{a_3, a_4, a_5\} \end{aligned}$$

Se podría pensar que la respuesta fuera 5 maneras para escoger el primer objeto, 4 maneras para el segundo y 3 para el tercero, o sea $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneras de escoger los 3 objetos. Algunos ejemplos de esa escogencia serían $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, etc..., los cuales son todos iguales. Por lo tanto hay que quitar las elecciones que se repiten. Como en cada elección los elementos pueden ser escritos en $3! = 6$ ordenes, cada escogencia fue contada 6 veces. Luego hay $\frac{60}{6} = 10$ maneras de escoger 3 objetos.

Para el caso general tenemos que el número de formas de escoger k objetos distintos de un conjunto de n objetos es:

$$\frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!}, 0 \leq k \leq n.$$

Si multiplicamos el numerador y denominador por $(n - k)!$ obtenemos

$$\frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{k}, 0 \leq k \leq n. \quad (2.1)$$

Cada escogencia de los n objetos se denomina una *Combinación simple de n objetos* o simplemente una *Combinación*.

El número que resulta de la ecuación (2.1) se denomina *número combinatorio* y coincide con la definición de los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ presentada en la sección anterior. Por lo tanto el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ representa el número de formas de escoger k objetos distintos de n objetos posibles.

Los coeficientes binomiales tienen también otro significado, ellos determinan el número de subconjuntos de un conjunto dado, osea

$\binom{n}{0} = 1$ es el número de subconjuntos de 0 elementos de un conjunto de n elementos.

$\binom{n}{1} = n$ es el número de subconjuntos de 1 elemento de un conjunto de n elementos.

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ es el número de subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de n elementos.

⋮

$\binom{n}{n} = 1$ es el número de subconjuntos de n elementos de un conjunto de n elementos.

En general se tiene que $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos que se obtienen de un conjunto de n elementos. Entonces el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Esta es una de las propiedades de los coeficientes binomiales ya presentada en la sección 2.1.

2.4. Funciones generadoras

Algunas propiedades de los coeficientes binomiales son difíciles de probar utilizando la definición (2.1). Por esta razón se presentará una herramienta muy útil y poderosa llamada *funciones generadoras*, ellas permiten demostrar algunas propiedades de los coeficientes binomiales de una manera rápida y sencilla.

Algunas veces enumerar significa determinar propiedades de alguna sucesión de números a_0, a_1, a_2, \dots , donde a_k es asociado con un problema P_k de alguna sucesión de problemas P_0, P_1, P_2, \dots . La manipulación de tales sucesiones es un aspecto importante en muchos problemas que tienen que ver con conteo.

La idea de esta técnica es asociar a cada sucesión de números reales una función de variable real de modo que las operaciones comunes en la sucesión correspondan a las simples operaciones en las correspondientes funciones.

Las técnicas analíticas para operar con funciones son frecuentemente más simples y poderosas que las técnicas combinatorias para operar con sucesiones directamente. Por lo tanto algunas veces es conveniente aplicar este método de funciones generadoras a algunas situaciones combinatorias.

Definición 2.2. Sean $\{a_r\}$ una sucesión de números y una sucesión de funciones $\{\delta_r(x)\}$, se llama *función generadora* de la sucesión $\{a_r\}$ a:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \delta_r = a_0 \delta_0 + a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \dots + a_k \delta_k + \dots$$

Los elementos de la sucesión de funciones $\delta_0(x), \delta_1(x), \delta_2(x), \dots$, se les llama *funciones indicadoras*. Aquí, a_k está asociado a $\delta_k(x)$ para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ y la función f se dice que genera a tales coeficientes.

Una sucesión de problemas combinatorios $\{P_k\}$ puede ser representado mediante una función generadora y esta función genera las soluciones a dichos problemas, soluciones que están dadas por los elementos de la sucesión $\{a_k\}$, donde cada problema combinatorio está relacionado con un elemento de $\{\delta_k(x)\}$.

Ejemplo 2.3. Sea $\{P_k\}$ una sucesión de problemas combinatorios, $k = 0, 1, 2, \dots$, donde el término P_k está definido por: “¿De cuántos modos se pueden distribuir k objetos idénticos en 5 personas?”. Esta sucesión se puede

representar mediante la siguiente función generadora:

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{4}{0}x^0 + \binom{5}{1}x^1 + \binom{6}{2}x^2 + \cdots + \binom{k+4}{k}x^k + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+4}{r}x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \end{aligned}$$

la cual genera las soluciones de los problemas P_k .

Así:

$\binom{4}{0}$ es la solución del problema P_0 . Problema indicado por el exponente k de x , en este caso $k = 0$.

$\binom{5}{1}$ es la solución del problema P_1 . Problema indicado por el exponente k de x , en este caso $k = 1$.

En general $\binom{k+4}{k}$ es la solución del problema P_k y la función indicadora conveniente para este tipo de problemas es $\delta_k(x) = x^k$.

Este caso particular de función generadora se conoce como *función generadora ordinaria*. Ellas permiten demostrar de una manera sencilla algunas propiedades de los coeficientes binomiales que de otro modo son difíciles de obtener y demostrar.

Sean n un número entero positivo fijo y una sucesión de números $\{a_r\}$ definida por $a_r = \binom{n}{r}$, tenemos entonces que la función generadora de la secuencia a_r es

$$f_n(x) = (1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r \quad (2.2)$$

Cabe recordar que $\binom{n}{r} = 0$ si $r > n$. Por lo tanto cuando $r \geq n+1$ los términos siguientes de la suma son 0's. Esta función generadora tiene solo un número finito de sumandos y se puede interpretar también como una función de x .

Para $x = 1$ en la ecuación (2.2), se tiene que

$$f_n(1) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (2.3)$$

que da el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

Si $x = -1$, se obtiene que

$$f_n(-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} (-1)^r = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + \binom{n}{n} = 0$$

Derivando la ecuación (2.2)

$$f'_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} r x^{r-1} = n(1+x)^{n-1} \quad (2.4)$$

Para $x = 1$ en la ecuación(2.4), se tiene que

$$f'_n(1) = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Tenemos que $f_{2n}(x) = (1+x)^n(1+x)^n = [f_n(x)]^2$. Al desarrollar $[f_n(x)]^2$, los coeficientes de x^n son $\binom{n}{0}\binom{n}{n}, \binom{n}{1}\binom{n}{n-1}, \dots$, osea $\binom{n}{0}^2, \binom{n}{1}^2, \binom{n}{2}^2, \dots, \binom{n}{n}^2$ (Por la propiedad de simetría) y el coeficiente de x^n en $f_{2n}(x)$ es $\binom{2n}{n}$, entonces

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Estas son algunas propiedades de los coeficientes binomiales que se pueden demostrar facilmente utilizando las funciones generadoras.

Capítulo 3

COEFICIENTES BINOMIALES Y NÚMEROS PRIMOS

En este capítulo se presentará una idea del uso de los coeficientes binomiales en un resultado muy importante en la teoría de números : *El teorema del número primo*. De igual forma se mostrarán algunos problemas, relacionados con este teorema, en una manera puramente elemental, obteniendo algunos resultados más débiles. Para esto se tomará como base un artículo de la revista *American Mathematical Monthly* llamado “A Story of Binomial Coefficients and Primes” (Una historia de los coeficientes binomiales y primos), cuyo autor es J.W. Sander.

3.1. Un poco de historia

Los números primos y sus propiedades fueron estudiados primero por los matemáticos griegos antiguos. Pitágoras y sus discípulos, en el año 600 a.c., realizaron un estudio muy completo de estos números, y en general de los enteros. Su interés también se centró en otro tipo de números, los números perfectos y amigos. Los números perfectos, como 6 y 28, son aquellos en donde la suma de sus divisores propios es el mismo número y un par de números son amigos, como 220 y 284, si la suma de los divisores propios de

uno de los números es el otro, y viceversa.

Para el momento en que aparecieron los *Elementos de Euclides* cerca del año 300 a.c., varios resultados importantes referente a los números primos habían sido probados. En el libro IX, Euclides prueba que hay infinitos primos. Esta es una de las primeras demostraciones que utiliza el método de contradicción para establecer un resultado. Euclides también da un prueba del teorema fundamental de la aritmética: “todo número se puede escribir como producto de primos de una manera única, salvo por el orden de los factores”.

Euclides demuestra que si el número $2^p - 1$ es primo, entonces el número $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto, donde p es primo. El matemático Euler (mucho más adelante en 1747) probó que todos los números perfectos pares son de esta forma.

Los siguientes progresos importantes sobre números primos fueron hechos por un matemático frances, Pierre de Fermat (1601-1665), que se conoce generalmente como el padre de la Teoría moderna de números. Él demostró que todo número primo de la forma $4n + 1$ se puede escribir de manera única como la suma de dos cuadrados, y que si p es primo, entonces para todo entero a se tiene que $a^p \equiv a \pmod{p}$. Este último resultado se conoce como el pequeño teorema de Fermat y es la base para la solución de muchos problemas en Teoría de números, y también en métodos para determinar si un número es primo o no.

Fermat coincidió con otros matemáticos de esos días, en particular con el monje Marin Mersenne. En una de las cartas dirigida a Mersenne, Fermat conjeturó que los números de la forma $2^n + 1$ son primos si n es una potencia de 2. Él verificó esta conjetura para $n = 1, 2, 4, 8$ y 16 . Los números de esta forma se llaman *números de Fermat*, y fue hasta después de 100 años que Euler demostró que el número $2^{32} + 1 = 4294967297$ es divisible por 641, así que no es primo.

Los números de la forma $2^p - 1$ atrajeron la atención de varios matemáticos, entre ellos Mersenne, el cual los estudió detalladamente. Gracias a ésto, estos números recibieron su nombre: *números de Mersenne*.

No todos los números de la forma $2^p - 1$, con p primo, son primos. Por ejemplo, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ es compuesto, aunque ésto fue observado tan solo en 1536. Por muchos años los números de esta forma proporcionaron los primos más grandes. En 1588 Cataldi demostró que el número M_{19} es primo, y éste

fue el más grande primo conocido durante cerca de 200 años hasta que Euler probó que M_{31} es primo. Un siglo más tarde Lucas demostró que M_{127} (el cual tiene 39 dígitos) es primo.

En 1952 Robinson demostró, usando una computadora, que los números M_{521} , M_{607} , M_{1279} y M_{2281} son primos. Antes del año 2003 un total de 40 primos de Mersenne se habían encontrado. El más grande es $M_{20996011}$ que tiene 632.043 dígitos.

A primera vista los primos parecen estar distribuidos entre los enteros de una manera muy irregular. Por ejemplo, en los 100 números inmediatamente anteriores a 10.000.000 hay 9 primos, mientras que en los 100 números siguientes hay solamente 2 primos, el primo 370.261 va seguido de 111 compuestos. No existe primo alguno entre 20.831.323 y 20.831.533. Sin embargo, si se examinan grandes bloques de primos se encuentra que su distribución media parece bastante regular.

Gauss y Legendre hicieron cálculos extensos acerca de la densidad de los números primos. Ambos dieron una estimación para $\pi(n)$ definida como el número de primos menores o iguales a n . Legendre estimó $\pi(n)$ por

$$\pi(n) = \frac{n}{\log(n) - 1,08366},$$

mientras que la estimación de Gauss esta en términos de la integral logarítmica

$$\pi(n) = \int_2^n \frac{1}{\log(t)} dt.$$

A continuación se presenta una breve tabla de esta función y su comparación con $n/\log(n)$.

Gauss y Legendre examinaron una tabla como esta para $n < 10^6$, propusieron independientemente que, para n grande, el cociente $\pi(n)/(n/\log(n))$ era próximo a 1, y conjeturaron que este cociente tiende a 1 cuando n tiende a ∞ . Tanto Gauss como Legendre intentaron demostrar esta afirmación pero no tuvieron éxito.

“En 1851 el matemático ruso Chebyshev dio un paso importante al demostrar que si dicho cociente tenía límite, este debía ser 1. Sin embargo, no fue capaz de demostrar que el cociente tenía límite”¹.

¹Apostol, Tom. Introducción a la Teoría Analítica de Números. Cuarta edición

n	$\pi(n)$	$n/\log n$	$\pi(n)(n/\log n)$
10	4	4,3	0,93
10^2	25	21,7	1,15
10^3	168	144,9	1,16
10^4	1229	1086	1,11
10^5	9592	8686	1,10
10^6	79498	72464	1,08
10^7	664579	621118	1,07
10^8	5761455	5434780	1,06
10^9	50847534	48309180	1,05
10^{10}	455052512	434294482	1,048

En 1859, Riemann estudió los números primos en conexión con la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$$

conocida como la función Zeta de Riemann. Él consideró valores complejos de s y conectó la distribución de los primos con las propiedades de la función $\zeta(s)$. Sin embargo, no fue capaz de resolver el problema anterior, pues no se habían desarrollado las matemáticas necesarias para justificar todos los detalles de este método.

Utilizando el método de análisis complejo, en 1896 Hadamard y de la Valle Poussin, demostraron independientemente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1.$$

Este resultado es el famoso *Teorema del número primo*, y su demostración constituyó en uno de los éxitos más completos en la teoría analítica de números.

“En 1949, dos matemáticos contemporáneos, *Atle Selberg* y *Paul Erdős*, causaron sensación en el mundo matemático al hacer una demostración elemental del teorema del número primo. Su prueba no utiliza ni $\zeta(s)$, ni la teoría de las funciones complejas y, en principio, es accesible a todo el que se halle familiarizado con el cálculo elemental”².

²Ibid.

3.2. Teorema del número primo

El primer matemático que mostró algunos resultados del comportamiento de la función $\pi(x)$ (mostrada en la sección anterior) fue *Chebyshev* en 1851/52. Él demostró que

$$C_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C_2 \frac{x}{\log x}, \quad (3.1)$$

para algunas constantes $0 < C_1 < 1 < C_2$. El resultado (3.1), sin embargo, se puede deducir de una manera “elemental” utilizando los coeficientes binomiales $\binom{2n}{n}$.

A continuación se escribe la descomposición en factores primos de $\binom{2n}{n}$ para algunos valores pequeños de n :

$$\binom{120}{60} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113$$

$$\binom{122}{61} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 61 \cdot \dots \cdot 113$$

$$\binom{124}{62} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67 \cdot \dots \cdot 113$$

$$\binom{126}{63} = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 67 \cdot \dots \cdot 113$$

$$\binom{128}{64} = 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 67 \cdot \dots \cdot 113 \cdot 127$$

La primera observación es que estos coeficientes binomiales tienen muchos factores primos y al mismo tiempo estos factores casi no se repiten, así que se puede utilizar a $\binom{2n}{n}$ como una aproximación para $\prod_{p < 2n} p$, con p primo.

Otro aspecto importante que hay que tener en cuenta es que cada primo p , $n < p \leq 2n$, divide a $\binom{2n}{n}$ exactamente una vez, puesto que p divide al numerador $(2n)!$ de $\binom{2n}{n}$ una vez, pero no puede dividir a $n!$ y por eso no es factor del denominador, por lo tanto todo $p > n$ está solo una vez en la descomposición en factores primos de $\binom{2n}{n}$.

Ahora, la principal idea para probar el resultado de Chebyshev (3.1) es usar $\binom{2n}{n}$ que es una aproximación para $\prod_{p < 2n} p$, p primo.

Tomando logaritmos y reemplazando $2n$ por x , obtenemos

$$x \approx \log \prod_{p \leq x} p = \sum_{p \leq x} \log p \approx \pi(x) \log x$$

Uno se podría preguntar la ventaja de usar $\binom{2n}{n}$ en lugar de $\prod_{p < 2n} p$. Una respuesta es que los coeficientes binomiales poseen propiedades multiplicativas, al igual poseen una buena propiedad aditiva: la fórmula de recursión. Esto provee la posibilidad de utilizar inducción para probar algunos resultados.

El matemático *Paul Erdős* indujo una bonita idea del uso de los coeficientes binomiales para una demostración del teorema de Chebyshev en 1930. Él conjeturó que para $n > 4$, los enteros $\binom{2n}{n}$ no tienen factores primos repetidos, aunque se ha mostrado que sus factores casi no se repiten. En 1985, *Sárközy*, probó que $\binom{2n}{n}$ no tiene factor primo repetido para todos los $n \geq n_0$ suficientemente grandes. Recientemente *Velammal* demostró el teorema de *Sárközy* con una constante explícita $n_0 = 2^{8000}$.

Para calcular el exponente de un primo p en la descomposición en factores primos de $n!$, designado como $e_p(n!)$, se usa una simple fórmula:

$$e_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}, \quad (3.2)$$

donde $S_p(n)$ denota la suma de los dígitos de n escritos en base p , i.e., $S_p(n) = \sum n_i$, donde

$$n = n_s p^s + n_{s-1} p^{s-1} + \dots + n_1 p + n_0, \quad (3.3)$$

para algunos enteros s , $0 \leq n_i < p$, $n_s > 0$.

Ejemplo 3.1. *Calcular el exponente del primo $p=3$ en el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$, para $n=60$.*

Por la ecuación (3.2), se tiene que

$$\begin{aligned} e_3 \left(\binom{2n}{n} \right) &= e_3 \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right) \\ &= e_3((2n)!) - 2e_3(n!) \\ &= e_3(120!) - 2e_3(60!). \end{aligned}$$

De (3.2) se obtiene que

$$e_3(120!) = \frac{120 - S_3(120)}{3 - 1}.$$

Escribiendo 120 como la expresión (3.3)

$$120 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 0,$$

luego $S_3(120) = 4$. Entonces

$$e_3(120!) = \frac{120 - 4}{2} = 58.$$

De forma análoga calculamos $e_3(60!)$

$$e_3(60!) = \frac{60 - S_3(60)}{3 - 1} = \frac{60 - 4}{2} = 28.$$

Por lo tanto

$$e_3 \left(\binom{120}{60} \right) = 58 - 2(28) = 2.$$

Utilizando la fórmula (3.2) podemos encontrar el exponente de todos los factores primos del coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$.

Definición 3.1. Sean n un entero positivo y p un primo, se define $L_p(n)$ como el número de dígitos $n_i \geq p/2$ en la representación (3.3).

Los dos siguientes teoremas, los cuales son reconocidos a Lagrange y a Kummer, muestran que el orden del primo p en $\binom{2n}{n}$ es relacionado finalmente con $L_p(n)$.

Teorema 3.1. Para un entero positivo n ,

$$e_2 \left(\binom{2n}{n} \right) = L_2(n) = S_2(n).$$

Demostración. Por (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned} e_2 \left(\binom{2n}{n} \right) &= e_2((2n)!) - 2e_2(n!) \\ &= 2n - S_2(2n) - 2(n - S_2(n)) \\ &= 2n - S_2(2n) - 2n + 2S_2(n) \\ &= 2S_2(n) - S_2(2n) \end{aligned}$$

Como n está escrito en base 2, una multiplicación de n por 2 significa simplemente un desplazamiento de dígitos, luego $S_2(2n) = S_2(n)$. Entonces

$$e_2 \left(\binom{2n}{n} \right) = 2S_2(n) - S_2(n) = S_2(n).$$

□

Teorema 3.2. *Para un entero positivo n y un primo p , se tiene que*

$$e_p \left(\binom{2n}{n} \right) \geq L_p(n).$$

Demostración. Sean $2n = \sum_{i=1}^s n'_i p^i$ y $n = \sum_{i=1}^s n_i p^i$ las representaciones de $2n$ y n en base p respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} e_p \left(\binom{2n}{n} \right) &= e_p((2n)!) - 2e_p(n!) \\ &= \frac{2n - S_p(2n)}{p-1} - \frac{2(n - S_p(n))}{p-1} \\ &= \frac{2S_p(n) - S_p(2n)}{p-1} \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^s (2n_i - n'_i). \end{aligned}$$

Para $n_i \geq p/2$ tenemos que $n'_i \leq 2n_i - p + 1$, entonces

$$e_p \left(\binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^s (2n_i - n'_i)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^s (n'_i + p - 1 - n'_i) \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^s p - 1 \\
&= \sum_{i=1}^s 1 \geq L_p(n).
\end{aligned}$$

□

Erdős constantemente formuló la pregunta: ¿Dado un entero positivo a , siempre encontraremos un primo p tal que $p^a \mid \binom{2n}{n}$, si n es suficientemente grande?. Este interrogante de Erdős nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.2. Sea a un número entero y p un primo, tenemos que

$$E_{a,p}(N) = \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < N, p^a \nmid \binom{2n}{n} \right\},$$

y

$$E_a(N) = \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < N, p^a \nmid \binom{2n}{n} \text{ para todos los primos } p \right\}.$$

$E_a(N)$ es el número de excepciones n , $0 \leq n < N$, de la pregunta de Erdős para potencias primas p^a .

Ejemplo 3.2. Calcular $E_{2,3}(5)$. 7 Por la definición (3.1) se tiene que

$$E_{2,3}(5) = \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < 5, 3^2 \nmid \binom{2n}{n} \right\}$$

Para $n=0$, tenemos que $3^2 \nmid \binom{0}{0} = 1$

Para $n=1$, tenemos que $3^2 \nmid \binom{2}{1} = 2$

Para $n=2$, tenemos que $3^2 \nmid \binom{4}{2} = 6$

Para $n=3$, tenemos que $3^2 \nmid \binom{6}{3} = 20$

Para $n=4$, tenemos que $3^2 \nmid \binom{8}{4} = 70$,

osea,

$$E_{2,3}(5) = \text{card} \{0, 1, 2, 3, 4\} = 5$$

Teorema 3.3. Para enteros $a \geq 1$ y $k \geq 0$

$$E_{a,2}(2^k) = \sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t},$$

osea, el conjunto

$$\left\{ \binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{2(2^k - 1)}{2^k - 1} \right\}$$

tiene exactamente $\sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t}$ elementos no divisibles por 2^a .

Demostración. Por el teorema (3.1) tenemos

$$\begin{aligned} E_{a,2}(2^k) &= \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < 2^k, 2^a \nmid \binom{2n}{n} \right\} \\ &= \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < 2^k, e_2 \left(\binom{2n}{n} \right) < a \right\} \\ &= \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < 2^k, L_2(n) < a \right\} \\ &= \text{card} \left\{ (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) \in \{0, 1\}^k : \sum n_i < a \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{a-1} \text{card} \left\{ (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) \in \{0, 1\}^k : \sum n_i = t \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4. Para enteros $a \geq 1$ y $k \geq 0$, y un primo $p \geq 3$, entonces

$$E_{a,p}(p^k) \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^k \sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t}$$

Demostración. Como hay $(p-1)/2$ dígitos $\geq p/2$ en la representación (3.3) de n , y son contados en $L_p(n)$, por el teorema (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} E_{a,p}(p^k) &= \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < p^k, p^a \nmid \binom{2n}{n} \right\} \\ &= \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < p^k, e_p \left(\binom{2n}{n} \right) < a \right\} \\ &\leq \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < p^k, L_p(n) < a \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{a-1} \text{card} \left\{ n : 0 \leq n < p^k, L_p(n) = t \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t} \left(\frac{p-1}{2}\right)^t \left(\frac{p-1}{2}\right)^{k-t} \\ &\leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^k \sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t}. \end{aligned}$$

□

Note que si $a > k$, entonces $\sum_{t=0}^{a-1} \binom{k}{t} = 2^k$, el cual es el cardinal del conjunto en el teorema anterior. Por lo tanto, 2^a no divide a alguno de los coeficientes del conjunto.

Teorema 3.5. Sean un entero $a \geq 1$ y un primo p , para algún $\varepsilon > 0$ y N suficientemente grande, se tiene que

$$E_{a,p}(N) \leq N^{\gamma_p + \varepsilon},$$

donde

$$\gamma_p = \frac{\log \frac{p+1}{2}}{\log p}$$

Para algún primo p y $a \geq 1$, podemos encontrar ε suficientemente pequeño talque $\gamma_p \pm \varepsilon < 1$. Por lo tanto, este teorema implica lo siguiente:

Corolario 3.1. *Sea un entero $a \geq 1$ y un primo p . Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{a,p}(N)}{N} = 0.$$

Decimos que $E_{a,p}(N)$ tiene densidad asintótica 0, y como $E_{a,p}(N) \geq E_a(N)$, se concluye que el conjunto de excepciones del problema de Erdős $E_a(N)$ también tiene densidad asintótica 0.

La demostración del teorema del número primo y otros resultados importantes referente a éste teorema puede encontrarlos en [4].

Capítulo 4

FUNCIÓN COEFICIENTE BINOMIAL

En el capítulo 2 se estudiaron los coeficientes binomiales solo para valores enteros no negativos, pero estos pueden extenderse a valores reales (incluso a valores complejos). Para ello utilizaremos la *función coeficiente binomial*.

Antes de definir la función coeficiente binomial es indispensable presentar primero otra función, *la función Gamma*. Esta función fue introducida por el matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783) para generalizar la función factorial a valores no enteros. Más adelante debido a su gran importancia, fue estudiada por otros matemáticos eminentes como *Andrien-Marie Legendre* (1752-1833), *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), *Joseph Liouville* (1809-1882), *Karl Weierstrass* (1815-1897), así como muchos otros.

4.1. Función Gamma

Durante los años 1729 y 1730, Euler introdujo esta función analítica que tiene la característica de interpolar la función factorial para valores no enteros. En una carta fechada el 13 de octubre de 1729 dirigida a Christian Goldbach, Euler le propuso la siguiente definición:

Definición 4.1 (Euler, 1729). Sea x un número real positivo, se define

$$\Gamma_p(x) = \frac{p!p^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+p)} = \frac{p^x}{x(x+1)\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{x}{p}+1\right)}, \quad (4.1)$$

entonces

$$\Gamma(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_p(x).$$

Este acercamiento, usando un producto infinito, fue utilizado también por Gauss en 1811, en su estudio de la función gamma. La notación $\Gamma(x)$ fue introducida por Legendre en 1809, mientras que Gauss la expresó por $\Pi(x)$ (que representa $\Gamma(x+1)$).

Claramente

$$\Gamma_p(1) = \frac{p!}{1(1+1)(1+2)\cdots(1+p)}p = \frac{p}{p+1}, \text{ y}$$

$$\Gamma_p(x+1) = \frac{p!p^{x+1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+p+1)} = \frac{p}{x+p+1}x\Gamma_p(x),$$

por lo tanto

$$\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (4.2)$$

La relación $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ se denomina *Ecuación Funcional*.

En otra carta escrita en 8 de enero de 1930, también dirigida a su amigo Goldbach, Euler dio otra definición equivalente para $\Gamma(x)$.

Definición 4.2 (Euler, 1730). Sea x un número real positivo, entonces

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\log(t))^{x-1} dt. \quad (4.3)$$

Haciendo un cambio de variable, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.1. Sea x un número real positivo, entonces

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (4.4)$$

o también

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt. \quad (4.5)$$

Demostración. Haciendo cambio de variable en la ecuación (4.3), tenemos

$$\int_0^1 (-\log(t))^{x-1} dt = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du.$$

Haciendo $u^2 = -\log(t)$, obtenemos

$$\int_0^1 (-\log(t))^{x-1} dt = 2 \int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

□

De este teorema vemos que la función gamma $\Gamma(x)$ está bien definida para $x > 0$ (y más generalmente para los números complejos con la parte real positiva), pero no está definida para valores enteros negativos.

Las gráficas de las funciones $x! = \Gamma(x + 1)$ y $\frac{1}{x!} = \frac{1}{\Gamma(x+1)}$ son:

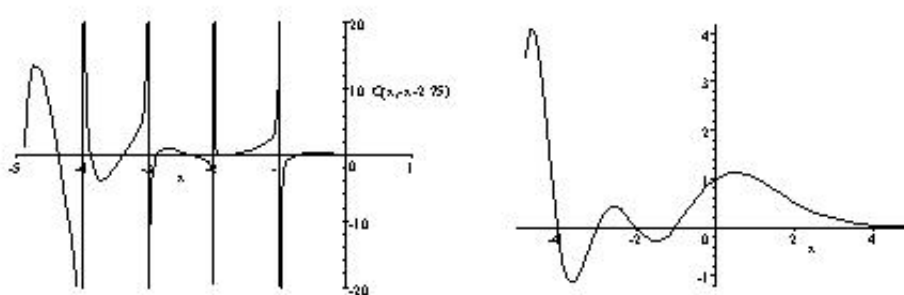


Figura 4.1: Función Gamma y su recíproca

Para $x = 1$ en la ecuación (4.3) tenemos

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (4.6)$$

Integrando por partes la ecuación (4.3), para $x > 0$, se obtiene

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Para valores enteros la ecuación funcional se convierte en

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

También es posible ampliar esta función a valores negativos invirtiendo la ecuación funcional (la cual se convierte en una identidad de la definición para $-1 < x < 0$)

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x} \quad (4.7)$$

Por ejemplo $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2})$. La reiteración de esta identidad permite extender la función gamma a los números reales negativos, excepto en los enteros negativos.

De la ecuación (4.5) tenemos

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Aplicando la ecuación funcional a todo entero positivo n , resulta:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n - 3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

y para valores negativos

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \sqrt{\pi}$$

No se conoce ninguna expresión básica para $\Gamma(\frac{1}{3})$ o $\Gamma(\frac{1}{4})$, pero fue probado que esos números son trascendentales (respectivamente por Le Lionnais en 1983 y Chudnovsky en 1984).

Teorema 4.2. (Weierstrass) Para todo número real x , $x \neq -1, -2, -3, \dots$, tenemos el producto infinito

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-x/p} \quad (4.8)$$

donde γ es la constante de Euler y se define

$$\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \log(p)\right) = 0,5772156649015328606\dots$$

Aplicando el teorema anterior a $\frac{1}{\Gamma(x)} \frac{1}{\Gamma(-x)}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{1}{\Gamma(-x)} &= -x^2 e^{\gamma x} e^{-\gamma x} \prod_{p=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-x/p} \left(1 - \frac{x}{p}\right) e^{x/p} \right] \\ &= -x^2 \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right). \end{aligned}$$

Por la ecuación funcional tenemos que $\Gamma(-x) = \frac{-\Gamma(1-x)}{x}$, por lo tanto la igualdad se puede escribir como

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \frac{1}{\Gamma(-x)} = x \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right),$$

y usando el producto infinito:

$$\text{sen}(\pi x) = \pi x \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right)$$

tenemos que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x} \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) se conoce como *la fórmula del complemento (o reflexión)* y es válida para cuando x y $(1-x)$ no son cero o enteros negativos. Esta fórmula también fue descubierta por Euler.

Aplicando la fórmula del complemento para los valores $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{4}$ se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Teorema 4.3. (*Legendre, 1809*) Para todo número real x , $x \neq 0, -1, -2, \dots$, se tiene que

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x) \quad (4.10)$$

Esta fórmula se conoce como *fórmula de la duplicación*.

4.2. Definición de la función coeficiente binomial

En esta sección se presentará la función coeficiente binomial como una posible extensión de los coeficientes binomiales a valores reales.

Definición 4.3. Sean x, y números reales, $x \neq -1, -2, -3, \dots$, entonces

$$C(x, y) = \begin{cases} \binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}, & x \geq y. \\ 0, & x < y \end{cases}$$

donde $x!$ está definido por medio de la función gamma vista en la sección anterior.

La superficie generada por la función C es

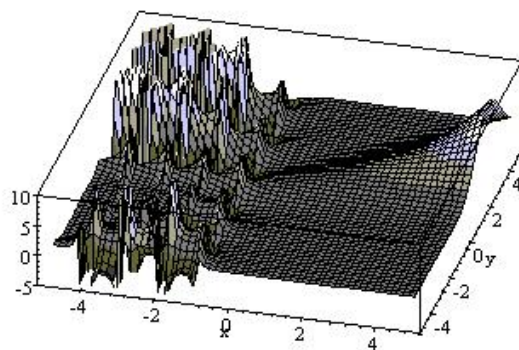


Figura 4.2: Gráfica de la función C

Realizando un acercamiento, se observan las llamadas “Avenidas de Manhattan”

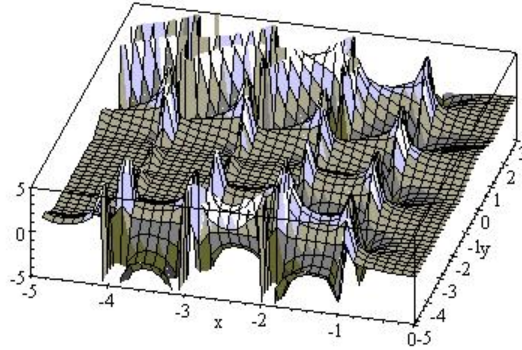


Figura 4.3: Acercamiento de la función C

4.3. Una descripción general de C

Como se vio anteriormente, la función factorial puede ser definida por $x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$, para $x > -1$, y extendido unicamente a enteros no negativos por $x! = (x+n)!/(x+n)(x+n-1)\dots(x+1)$, para un entero n talque $(x+n) > -1$.

La función C se define también de esa manera y es igual para $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{x = -1, -2, -3, \dots\}$. Como la función $x!$ no esta definida para $-1, -2, -3, \dots$, C tampoco lo estará para esos mismos valores. Un resultado muy importante que se utilizará repetidamente es que

$$\frac{1}{(-n)!} = \frac{(-n+1)(-n+2)\dots(-1)(0)}{0!} = 0.$$

La función C hereda las propiedades básicas de los coeficientes binomiales $\binom{n}{m}$, para n y m enteros positivos, así de una de estas propiedades se tiene que

$$C(x-1, y) = \frac{x-y}{x} C(x, y).$$

Para $x = 0$ en la ecuación anterior se tiene que C no está definida en $(-1, y)$, a menos que $C(0, y) = 0$ (luego y es un entero diferente de 0) o $y = 0$. Esto mismo ocurre para $x = -2, -3, -4, \dots$

Examinando la superficie generada por la función C , se puede ver que:

- Para $\{0 \leq x \leq y\} \cup \{-1 + \eta \leq x \leq 0, y \geq 0\}$, $0 < \eta < 1$, C es suavemente ondulada.
- Para la línea $y - x = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} C(x, y) = C(x, x + 1) &= \frac{x!}{(x + 1)!(x - x - 1)!} \\ &= \frac{x!}{(x + 1)!(-1)!} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto C vale 0 a lo largo de esta línea, y lo mismo sucede en las líneas $y - x = 2, 3, 4, \dots$

- Para $x > -1, y > 0$, se hace grande rápidamente, alternadamente positiva y negativa, pasando por cero en las líneas $y - x = 1, 2, 3, \dots$ y tendiendo a $\pm\infty$ en las líneas $x = -1, -2, -3, \dots$
- Para $y < 0$, es cero en $y = -1, -2, -3, \dots$, y muy cercana a cero en el cuadrante $x > -1, y < 0$.
- En el octante $-1 > y > x + 1$ se hace cercana a cero, excepto cerca a las líneas $x = -1, -2, -3, \dots$, donde tiende a $\pm\infty$.

4.4. Algunas secciones de C

Ahora veremos que ocurre en las secciones horizontales, verticales y diagonales de la función C .

En todas las fórmulas de esta sección $x \neq -1, -2, -3, \dots$, $0 < \eta < 1$; h un número real y n, m son enteros positivos, aunque algunas veces se trabajará con $\pm m$ y también incluiremos $m = 0$. Si una fórmula contiene un término $h!$, donde h es negativo, podemos reemplazarlo por $(h + n)!/(h + n)(h + n - 1) \dots (h + 1)$, para un entero n talque $(h + n) \geq 0$.

4.4.1. Secciones verticales

Para estudiar las secciones verticales de la función C , utilizaremos la identidad $\frac{\pi y}{y!(-y)!} = \text{sen}\pi y$, derivada de la ecuación (4.9).

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$: Se tiene que

$$C(0, y) = \frac{0!}{y!(-y)!} = \frac{\text{sen}\pi y}{\pi y}.$$

En particular, esta sección vale 1 cuando $y = 0$ y 0 cuando $y = \pm m$.

$\mathbf{x} = \mathbf{n}$: Se tiene que

$$C(n, y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} = \begin{cases} \text{Los clásicos coeficientes binomiales,} \\ \text{si } y = m, 0 \leq m \leq n. \\ 0, \text{ si } y = \pm m, \text{ fuera de ese intervalo.} \\ \frac{n!}{(n-y)(n-1-y)\dots(1-y)} \cdot \frac{\text{sen}\pi y}{\pi y}, \text{ en general.} \end{cases}$$

Con esta última definición se obtienen rápidamente muchos valores pequeños para $|y|$ grande, puesto que el denominador del polinomio es de grado $n + 1$ en y .

$\mathbf{x} = -\mathbf{h}, \mathbf{h} \neq \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots$: Se tiene que

$$C(-h, y) = \frac{(-h)!}{y!(-y-h)!}.$$

De la ecuación (4.9) tenemos que $\text{sen}\pi y = \frac{-\pi}{y!(-y-1)!}$, luego esta sección es una generalización para esta identidad, una especie de “casi-seno”. Esta función “casi-seno” tiene *ceros* en $-1, -2, -3, \dots$ y cuando $y = 1 - h$, se tiene que

$$C(-h, 1 - h) = \frac{(-h)!}{(1-h)!(-1+h-h)!} = \frac{(-h)!}{(1-h)!(-1)!} = 0.$$

Luego esta función también tiene un *cero* en $y = 1 - h$, y lo mismo sucede para $y = 2 - h, 3 - h, 4 - h, \dots$. La sección $C(-1, y)$ es un múltiplo de la función *seno*, pero el múltiplo $(-1)!$ no está definido.

Cuando $x = n + \frac{1}{2}$, obtenemos la sección

$$C\left(n + \frac{1}{2}, y\right) = \frac{(n + \frac{1}{2})!}{y!(n + \frac{1}{2} - y)!},$$

esta función tiene *ceros* en $y = -1, -2, -3, \dots$. Para $y = n + \frac{3}{2}$ se tiene que

$$C\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}\right) = \frac{(n + \frac{1}{2})!}{y!(n + \frac{1}{2} - n - \frac{3}{2})!} = \frac{(n + \frac{1}{2})!}{y!(-2)!},$$

luego la función tendrá un *cero* en este valor de y . Lo mismo sucede para los valores $n + \frac{5}{2}, n + \frac{7}{2}, n + \frac{9}{2}, \dots$

Cuando $x = -n - \frac{1}{2}$, la función tiene *ceros* nuevamente en $y = -1, -2, -3, \dots$, y en $y = -n + \frac{1}{2}, -n + \frac{3}{2}, -n + \frac{5}{2}, \dots$

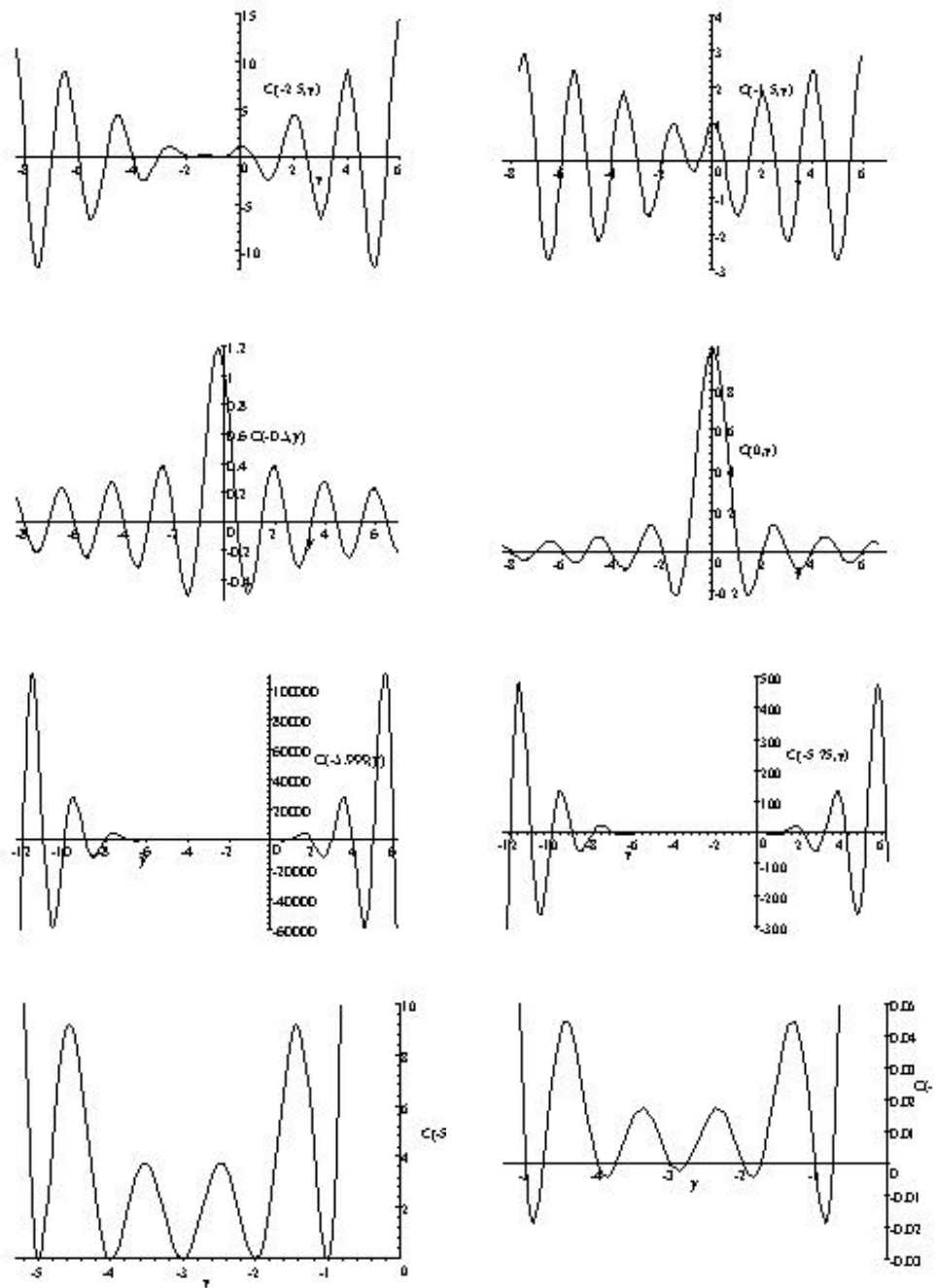


Figura 4.4: Colección de Secciones Verticales

4.4.2. Secciones horizontales

$y = 0$: Se tiene que

$$C(x, 0) = \frac{x!}{x!} = 1.$$

$y = \mathbf{m}$: Se obtiene que

$$C(x, m) = \frac{x!}{(m)!(x-m)!} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m!}$$

son los coeficientes binomiales extendido a los números reales. Cuando x es un entero positivo y $0 \leq x \leq y$ estas secciones son cero y se comportan como x^m para $|x|$ grande.

$y = -\mathbf{m}$: Se tiene que

$$C(x, -m) = \frac{x!}{(-m)!(x+m)!} = 0.$$

$y = \pm\eta$: Se tiene que

$$C(x, \pm\eta) = \frac{x!}{(\pm\eta)!(x \mp \eta)!}.$$

Para $\eta = \frac{1}{2}$ tendremos

$$C\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{x!}{\left(\frac{1}{2}\right)!(x - \frac{1}{2})!}.$$

Si $x = -\frac{1}{2}$, entonces

$$C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2}\right)!(-1)!} = 0.$$

Por lo tanto esta función tiene un *cero* en ese valor de x , de igual forma la función tiene *ceros* en $x = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \dots$, y su gráfica es presentada en la colección de secciones horizontales.

$y = \mathbf{m} + \eta$: Se tiene que

$$\begin{aligned} C(x, m + \eta) &= \frac{x!}{(m + \eta)!(x - \eta - m)!} \\ &= \frac{(x - \eta)(x - \eta - 1) \dots (x - \eta - m + 1)}{(\eta + 1)(\eta + 2) \dots (\eta + m)} \cdot C(x, \eta). \end{aligned}$$

Estas secciones de C tienen *ceros* en $\eta, \eta + 1, \eta + 2, \dots, \eta + m - 1$, y también tiene un *cero* en $\eta - 1$, pues $C(x, \eta)$ es 0 en ese punto. Así la función se hace muy cerrada a cero en el intervalo $[\eta, m + \eta - 1]$.

$y = -\mathbf{m} - \eta$: Se tiene que

$$\begin{aligned} C(x, -m - \eta) &= \frac{x!}{(-m - \eta)!(x + m + \eta)!} \\ &= (-1)^m \frac{\eta(\eta + 1) \dots (\eta + m - 1)}{(\eta + m + 1)(\eta + m + 2) \dots (x + \eta + m)} \cdot C(x, -\eta). \end{aligned}$$

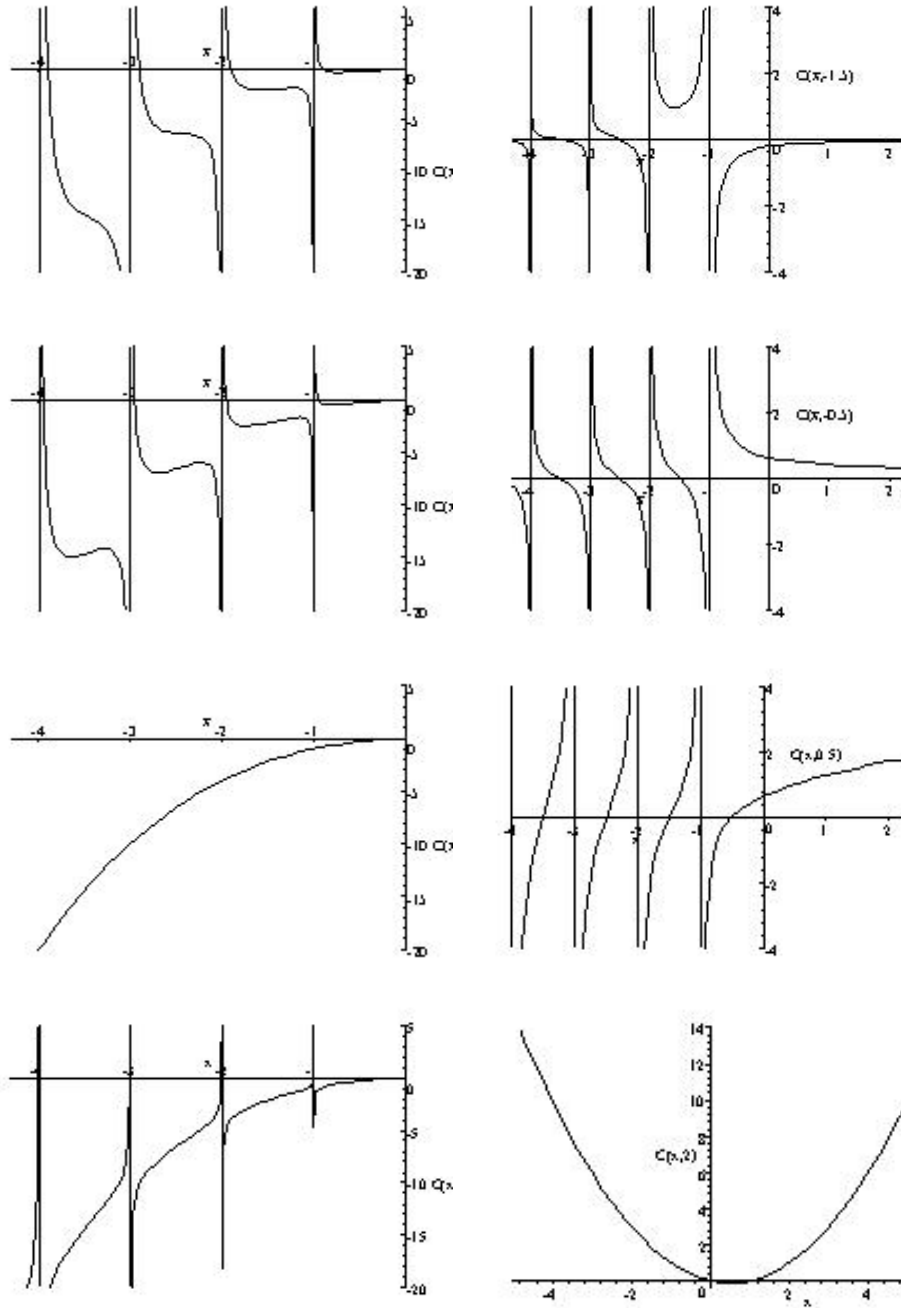


Figura 4.5: Colección de Secciones Horizontales

4.4.3. Secciones diagonales

Primero, veremos para rectas con pendiente positiva:

$y = x + h$: Se tiene que

$$C(x, x + h) = \frac{x!}{(x + h)!(-h)!} = C(x, -h),$$

la cual corresponde a las secciones horizontales descritas anteriormente.

Para las rectas con pendiente negativa recurriremos a la fórmula de la duplicación vista en la sección 4.1:

$$(2x)! = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) 2^{2x} x! \left(x - \frac{1}{2}\right)!,$$

Para los valores simples:

$y = -x$: Se tiene que

$$C(x, -x) = \frac{x!}{(-x)!(2x)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right)!(-x)!}.$$

Esta sección nuevamente es una función “casi-seno” (Ver $C(-h, y)$) y tiene *ceros* en $1, 2, 3, \dots$ y en $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$. Cuando $x < 0$ la función crece rápidamente y cuando $x > 0$ decrece rápidamente, esto se debe al factor 2^{-2x} .

$y = -x - n - \eta$: Se tiene que

$$C(x, -x - n - \eta) = \frac{x!}{(-x - n - \eta)!(2x + n + \eta)!}.$$

Esta función no está definida para $x = -1, -2, -3, \dots$ y tiene *ceros* cuando $-x - n - \eta = -1, -2, -3, \dots$ y cuando $2x + n + \eta = -1, -2, -3, \dots$, o sea cuando $x = \frac{1}{2}(-n - 1 - \eta), \frac{1}{2}(-n - 2 - \eta), \frac{1}{2}(-n - 3 - \eta), \dots$.

Para el caso $y = -x - 2\frac{3}{4}$ se tiene que

$$C\left(x, -x - 2\frac{3}{4}\right) = \frac{x!}{(-x - 2\frac{3}{4})!(2x + 2\frac{3}{4})!}.$$

Cuando $x = -1\frac{3}{4}$

$$C\left(x, 1\frac{3}{4} - 2\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1\frac{3}{4})!}{(-1)!(-\frac{3}{4})!}$$

Esta función también tiene *ceros* en $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, \dots$ y en $-1\frac{7}{8}, -2\frac{3}{8}, -2\frac{7}{8}, -3\frac{3}{8}, \dots$. En cada intervalo $[-2, -1], [-3, -2], [-4, -3], \dots$ la función tiene dos *ceros*, y tiende a infinito en la misma dirección en cada límite derecho de esos intervalos. Este comportamiento es típico de cada sección $y = -x - h$, $h < 3$, h no entero.

En el intervalo $[-2, -1]$ la función tiene un *cero*, en $[-3, -2]$ tiene 3 *ceros*. En los 2 primeros intervalos, la función tiende a infinito en direcciones opuestas a sus extremos derechos. Todo esto se ilustra aquí en una secuencia de gráficas alrededor de $y = -x - 3$.

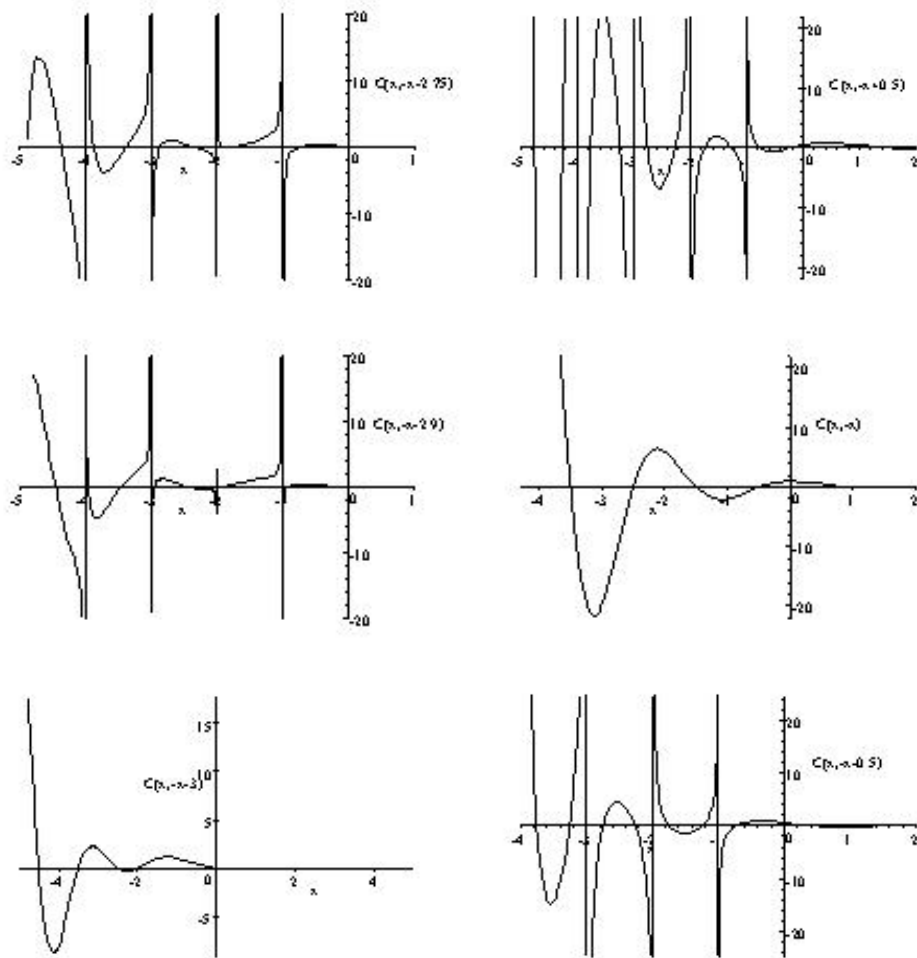


Figura 4.6: Colección de Secciones Diagonales

Bibliografía

- [1] SANDER, J. W. *A story of binomial coefficients and primes*. American Mathematical Monthly 102, 1995.
- [2] FOWLER, D. *The binomial coefficient function*. American Mathematical Monthly 103, 1996.
- [3] APOSTOL, Tom. *Introducción a la teoría de números*. Barcelona 1980.
- [4] HARDY, G. H. and WRIGHT, E. M. *Introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 1960.
- [5] FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, 1968.