

**TEORÍA DE PROBABILIDADES APLICADAS EN LA ESTIMACIÓN DE
INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN.**

GINER JOHAN PERDOMO HERNÁNDEZ

JAIME ALBERTO SARMIENTO RONDÓN



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO -MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA

2010

**TEORÍA DE PROBABILIDADES APLICADAS EN LA ESTIMACIÓN DE
INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN.**

Autores:

GINER JOHAN PERDOMO HERNÁNDEZ

JAIME ALBERTO SARMIENTO RONDÓN

Trabajo de grado para optar por el título de Ingeniero Electricista

Director

Gabriel Ordóñez Plata

Profesor Titular

Universidad Industrial de Santander

Codirector

Gerardo Porras Rueda

Ingeniero Electricista

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO -MECÁNICAS

ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES

BUCARAMANGA

2010

*Doy gracias a Dios por permitirme alcanzar este logro.
A mis padres Jaime Perdomo y Orlina Hernández por su apoyo
incondicional.
A mis hermanos Evelyn, Jaime y Heidy que son mi inspiración
para seguir adelante.*

Giner Johan Perdomo Hernández

*A Dios, a mi mama María Rondón, a
mis hermanos William, María y
Martha*

Jaime Sarmiento

AGRADECIMIENTOS

A nuestro director Gabriel Ordóñez y codirector Gerardo Porras por su colaboración y asesorías.

A todos los profesores que hicieron parte de nuestra formación académica.

A los compañeros que compartieron esta oportunidad y nos brindaron su apoyo.

A las empresas que nos ayudaron con la información y préstamo de los laboratorios de medición.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	19
1. GENERALIDADES	21
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	21
1.2 JUSTIFICACIÓN	21
1.3 OBJETIVOS DEL PROYECTO	22
1.3.1 Objetivo general	22
1.3.2 Objetivos específicos	22
1.4 ALCANCE	23
2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA	24
2.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD	24
2.2 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE DISPERSIÓN	24
2.2.1 Esperanza matemática	25
2.2.2 Varianza	25
2.2.3 Desviación estándar	26
2.3 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD UNIFORME	26
2.4 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD TRIANGULAR	28
2.4.1 Distribución de probabilidad triangular asimétrica	28
2.4.2 Distribución de probabilidad triangular simétrica	30
2.5 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL	31
2.6 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD T-STUDENT	35
3. PROCEDIMIENTO A SEGUIR PARA LA ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EMPLEADA EN LA CALIBRACIÓN DE EQUIPOS DE MEDICIÓN	39
3.1 MENSURANDO	39
3.2 MODELO FÍSICO Y MATEMÁTICO	39
3.3 IDENTIFICACIÓN DE FUENTES DE INCERTIDUMBRE	40
3.4 CUANTIFICACIÓN DE LAS FUENTES DE INCERTIDUMBRE Y DISTRIBUCIÓN ASOCIADA	40
3.5 EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR	41
3.5.1 Método de evaluación de la incertidumbre estándar tipo A	41
3.5.2 Método de evaluación de la incertidumbre estándar tipo B	41
3.6 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA	42
3.7 NIVEL DE CONFIANZA REQUERIDO	43
3.8 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA	44

3.9 RESULTADO DE LA MEDICIÓN.....	45
4. CASOS DE LABORATORIOS DONDE SE ESTIMA LA INCERTIDUMBRE DE UN PROCESO DE MEDICIÓN.....	47
4.1 LABORATORIO DE CALIBRACIÓN DE MEDIDORES DE ENERGÍA ELÉCTRICA.....	47
4.2 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN EL LABORATORIO DE MEDICIONES ELÉCTRICAS BÁSICAS DE LA UIS.....	56
4.3 LABORATORIO DE ENSAYOS DE CONDUCTORES ELÉCTRICOS....	59
5. CONCLUSIONES	68
6. BIBLIOGRAFÍA	70
7. ANEXOS	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme con parámetros a y b	27
Figura 2. Funciones de densidad de probabilidad de distribuciones triangulares asimétricas.....	29
Figura 3. Función de densidad de probabilidad de una distribución triangular simétrica.....	30
Figura 4. Función de densidad de probabilidad de una distribución normal	32
Figura 5. Función de densidad de probabilidad de una distribución distribución t-student.....	36
Figura 6. Procedimiento para la estimación de la incertidumbre en la calibración de equipos de medición.	46
Figura 7. Diagrama del circuito.	56
Figura 8. Conductor aislado para ensayo.	59
Figura 9. Esquema de la conexión.....	60
Figura 10. Carrete sumergido en el estanque.....	60
Figura B.1 Distribución uniforme.....	77
Figura B.2 Distribución triangular simétrica.....	79
Figura B.3 Distribución normal estándar	85
Figura G.1 Posibles valores que puede tomar la variable aleatoria	120
Figura H.1 Número de cuentas para un multímetro digital.....	122

LISTA DE TABLAS

TABLA 1. CUADRO COMPARATIVO. DISTRIBUCIÓN ASIGNADA EN FUNCIÓN DE LA INFORMACIÓN DISPONIBLE	38
TABLA 2. CARACTERÍSTICAS DEL MEDIDOR DE ENERGÍA ELÉCTRICA DÍGITAL A CALIBRAR.....	47
TABLA 3. CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO PARA PRUEBA DE MEDIDORES (EPM)	47
TABLA 4. RESUMEN DE DATOS PARA LA PRUEBA DE EXACTITUD	48
TABLA 5. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 1	50
TABLA 6. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 2.....	51
TABLA 7. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 3.....	52
TABLA 8. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 4.....	53
TABLA 9. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 5.....	54
TABLA 10. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 6....	55
TABLA 11. REGISTRO DE LAS OBSERVACIONES DEL CASO 2.	56
TABLA 12. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA RESISTENCIA	57
TABLA 13. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA REACTANCIA CAPACITIVA.....	58
TABLA 14. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA TENSIÓN ELÉCTRICA DEL CABLE	62
TABLA 15. REGISTRO DE LAS OBSERVACIONES	63
TABLA 16. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA RESISTENCIA MEDIDA.....	63
TABLA 17. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA TEMPERATURA.....	65
TABLA 18. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LONGITUD DEL CABLE	66
TABLA 19. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA RESISTENCIA DE AISLAMIENTO.....	67
TABLA C.1 CAMBIO DE LA EXACTITUD DEL PATRÓN A TRAVÉS DEL TIEMPO	90
TABLA D.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE EN CONSIDERACIÓN.....	98
TABLA D.2 CÁLCULOS DE DESVIACIONES RESPECTO AL VALOR MEDIO	99
TABLA D.3 RESULTADOS DE CÁLCULOS RELATIVOS A LA DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA (R)	105
TABLA D.4 RESULTADOS DE CÁLCULOS RELATIVOS A LA DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA (Xc).....	106

TABLA D.5. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL VÓLTMETRO	107
TABLA D.6. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL AMPÉRMETRO	107
TABLA D.7. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL OSCILOSCOPIO	108
TABLA E.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE A CONSIDERAR EN EL EJEMPLO	110
TABLA E.2 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE TENSIÓN APLICADA ...	111
TABLA E.3 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA TENSIÓN ELÉCTRICA APLICADA	111
TABLA E.4 REGISTRO DE OBSERVACIONES.....	112
TABLA E.5 CÁLCULO DE CORRELACIONES ENTRE VARIABLES	112
TABLA E.6 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE MEDICIÓN DE RESISTENCIA	113
TABLA E.7 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA RESISTENCIA MEDIDA ...	113
TABLA E.8 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE MEDICIÓN DE TEMPERATURA.....	114
TABLA E.9 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA TEMPERATURA	114
TABLA E.10 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE MEDICIÓN DE LONGITUD	115
TABLA E.11 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA LONGITUD.....	115
TABLA E.12 RESUMEN DE DATOS PARA LA OBTENCIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA	116
TABLA F.1 VALOR MEDIDO POR EQUIPOS DE DIFERENTE RESOLUCIÓN.	118
TABLA F.2 REGISTRO DE LAS MEDIDAS DE LOS VÓLTMETROS.	118

LISTA DE ANEXOS

A. FUNDAMENTOS TEORICOS DE METROLOGÍA	71
B. DEMOSTRACIONES DE ECUACIONES	77
B.1 DISTRIBUCIÓN UNIFORME.....	77
B.1.1 Cálculo de la media.....	78
B.1.2 Cálculo de la varianza.....	78
B.1.3 Cálculo de la desviación estándar.....	78
B.2 DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR.....	79
B.2.1 Cálculo de la media.....	80
B.2.2 Cálculo de la varianza.....	82
B.2.3 Cálculo de la desviación estándar.....	84
B.3 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR	84
B.3.1 Cálculo de la media.....	87
B.3.2 Cálculo de la varianza.....	87
B.3.3 Cálculo de la desviación estándar.....	88
C. DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS DEL CASO 1	89
C.1 PRUEBA 1 (5%ln RT fp=1)	89
C.2 PRUEBA 2 (100%ln RT fp=1)	93
C.3 PRUEBA 3 (100%ln R fp=1)	93
C.4 PRUEBA 4 (100%ln T fp=1).....	94
C.5 PRUEBA 5 (100%ln RT fp=0,5 ind)	95
C.6 PRUEBA 6 (600%ln RT fp=1)	95
D. DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS DEL CASO 2.....	97
D.1 IDENTIFICACIÓN DEL MENSURANDO	97
D.2 PLANTEAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO.....	97
D.3 FUENTES DE INCERTIDUMBRE A CONSIDERAR	98
D.4 CUANTIFICACIÓN Y DISTRIBUCIÓN ASOCIADA A CADA FUENTE...98	
D.5 DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR.....	98
D.5.1 Evaluación de la Incertidumbre tipo A.....	99
D.5.2 Evaluación de la Incertidumbre tipo B.....	102
D.6 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR COMBINADA... 104	
D.7 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA	105
D.8 RESULTADO DE LA MEDICIÓN	107
E. DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS DEL CASO 3.....	109
E.1 IDENTIFICACIÓN DEL MENSURANDO.....	109

E.2 PLANTEAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO	109
E.3 FUENTES DE INCERTIDUMBRE A CONSIDERAR.....	109
E.4 CUANTIFICACIÓN Y DISTRIBUCIÓN ASOCIADA A CADA FUENTE .	109
E.5 DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR	110
E.5.1 Para la tensión	110
E.5.2 Para la resistencia de aislamiento.....	112
E.6 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR COMBINADA...	115
E.7 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA	116
E.8 RESULTADO DE LA MEDICIÓN	117
F. EJEMPLOS SOBRE EXACTITUD Y PRECISIÓN.....	118
G. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN RECTANGULAR	120
H. EJEMPLO DE UN MULTÍMETRO DÍGITAL	122
I. TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN T-STUDENT	124
J. TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR	125

RESUMEN

TÍTULO:

TEORÍA DE PROBABILIDADES APLICADAS EN LA ESTIMACIÓN DE INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN¹.

AUTORES:

GINER JOHAN PERDOMO HERNÁNDEZ
JAIME ALBERTO SARMIENTO RONDÓN²

PALABRAS CLAVE:

INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN, DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD, CALIBRACIÓN.

DESCRIPCIÓN:

En este documento se presenta un estudio teórico de las distribuciones de probabilidad más utilizadas en la evaluación de la incertidumbre de medición. Estas distribuciones son simétricas respecto a su valor esperado y reconocidas en la Guía de expresión de la incertidumbre en la medición (GUM). Se describen las características principales de las distribuciones de probabilidad rectangular, triangular, normal y t-student como son: la función de densidad de probabilidad, la función de distribución acumulada, el valor esperado y la varianza de cada distribución respectivamente.

Debido a que la GUM reconoce las distribuciones de probabilidad como un medio para cuantificar la incertidumbre tipo A y tipo B, se realiza un estudio detallado de cada una de estas y las condiciones para las cuales se pueden seleccionar, de tal forma que se pueda contribuir con el aseguramiento metrológico de la medida. Seguidamente se expone el procedimiento para la estimación de la incertidumbre de la medición empleada en la calibración de un medidor de energía eléctrica.

Por último, se ilustra a través de ejemplos prácticos como las distribuciones de probabilidad pueden ser útiles en la cuantificación de las incertidumbres asociadas a cada fuente individual y en la incertidumbre total.

En los anexos se encuentra material de apoyo que contiene información sobre temas de metrología y sirven para aclarar dudas respecto al tema.

¹ Proyecto de grado

² Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica Electrónica y de Telecomunicaciones. Gabriel Ordóñez Plata

ABSTRACT

TITLE:

THEORETICAL OF PROBABILITIES APLIED IN THE MEASURMENT'S UNCERTAINTY³.

AUTHORS:

GINER JOHAN PERDOMO HERNÁNDEZ
JAIME ALBERTO SARMIENTO RONDÓN⁴

KEY WORDS:

UNCERTAINTY IN MEASURMENT, PROBABILITY DISTRIBUTION, CALIBRATION.

DESCRIPTION:

This document shows a theoretical study about the most used probability distributions in the evaluation of the measurement's uncertainty. These distributions are symmetrical in relation to their waited value and are acknowledge in the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM). It is described the main features of the probability distributions rectangular, triangle, normal and t-student like: probability density function, cumulative distribution function, expected value and variance of each respective distribution.

Because of the GUM recognizes the probability distributions as valid means to quantify uncertainty type A and type B, is realized a detailed study of each of these and the conditions for their selection, so that it contribute with the metrologic insurance of the measurement. Next is exposed the method for the estimation of the measurement's uncertainty which is used in the calibration of an electrical energy meter.

Finally, it illustrates through by practical examples how the probability distributions may be useful in the quantification of the associated uncertainty to each source individual font and in the total uncertainty.

In the attachments it's founded material supportive material that contains information about metrologic topics that help to solve questions about the theme.

³ Undergraduate thesis

⁴ Physic-Mechanic Science Faculty. Electric, Electronic and telecommunication Engineering school. Gabriel Ordóñez Plata

INTRODUCCIÓN

En la década de los 70, surgió el problema entre las diferentes entidades metrológicas de cómo llegar a un acuerdo sobre la estimación de la incertidumbre en las mediciones, los parámetros individuales que se tenían en cuenta para su conocimiento y un método que les permitiera hacer comparaciones entre ellos. Esto obligó al CIPM (Comité International des Poids et Mesures) que sugiriera al BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) que estudiara el tema con ayuda de los laboratorios de metrología nacionales. [4]

El BIPM realizó una reunión en la que asistieron expertos en metrología de la época y estuvieron de acuerdo en uniformar el procedimiento para la estimación de la incertidumbre de medida. De esta reunión se conformó un grupo de trabajo que elaboró la recomendación INC-1 (1980), Expresión de Incertidumbres Experimentales. El CIPM la aprobó y la reafirmó en los años siguientes y después le delega a la ISO (International Organization for Standardization) para que elaborará una guía para estimar la incertidumbre basada en la recomendación INC-1 (1980). A su vez ISO delega la tarea al TAG4 (Grupo Asesor Técnico en Metrología) que en conjunto con seis organizaciones más, la IEC (International Electrotechnical Commission), el CIPM y la OIML (Organization of Legal Metrology), la IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) y la IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) y la IFCC (International Federation of Clinical Chemistry) trabajaron en el tema. [4]

El TAG4 a su vez conformó el grupo de trabajo 3 (ISO/TAG4/WG3) compuesto por expertos de la BIPM, IEC, ISO Y LA OIML, los cuales elaboraron la GUM (Guide to the expression of Uncertainty in Measurement). El propósito de esta guía es la de proporcionar información para la estimación de la incertidumbre en las mediciones y así poder contribuir con el aseguramiento de la medida. [4]

Como se puede observar, el estudio de la incertidumbre es un tema relativamente nuevo y en este documento se pretende conocer un poco más acerca de la importancia de la metrología en los diferentes campos de acción de la ingeniería y demás ciencias.

El aseguramiento de la medida es una herramienta preventiva que permite minimizar la probabilidad de tomar decisiones incorrectas, reducir pérdidas económicas y humanas en los distintos procesos donde se obtienen y analizan datos utilizados en metrología, además, dar garantía de que se tiene un claro conocimiento de lo que se produce y de la forma como se obtiene ese resultado. [5] Su finalidad es que los datos obtenidos de productos y procesos estén libres de errores significativos para el uso que se pretende de ellos y que, por tanto, sean una base para asegurar calidad y eficiencia.

El no tener un buen control estadístico de las medidas puede llevar a consecuencias desfavorables como entrega de productos defectuosos, quejas por parte de los clientes, pérdida de la confianza e imagen y mala calidad en

los procesos utilizados. Para evitar este problema los instrumentos con que se realizan las medidas deben estar calibrados a patrones nacionales. Pero se debe tener en cuenta que si estas calibraciones se realizan en puntos de trabajo y condiciones ambientales diferentes a las especificaciones del instrumento, el resultado de medición arrojado por este puede no ser fiable.

En el proceso de calibración de equipos de medición las medidas que se realizan deben ir acompañadas por una incertidumbre asociada al resultado. Esta incertidumbre es utilizada para establecer si un instrumento cumple con los límites de tolerancia permitidos por las normas con que estos se calibren.

La incertidumbre se estudia mediante guías, de la cual se considera como referencia la guía para expresión de la incertidumbre en las mediciones GUM.

La guía se basa en el método de la ley de propagación de incertidumbres y propone procedimientos estadísticos básicos y distribuciones de probabilidad de las cuales se encuentran la distribución rectangular, triangular, normal y la t-student para la determinación de la incertidumbre de la medida. Estas distribuciones son simétricas respecto a su valor esperado. Cada una de estas tiene características particulares de las cuales se escoge la que mejor represente una magnitud de entrada de la cual dependa el mensurando en consideración.

Toda magnitud sometida a medición presenta características aleatorias por lo que el estudio de estas se deben realizar mediante distribuciones de probabilidad. Es por ello que en este documento se analizan las distribuciones de probabilidad como una herramienta fundamental para la cuantificación y estimación de las fuentes de incertidumbre y se describe el procedimiento para la estimación de la incertidumbre empleada en procesos de calibración siguiendo la metodología de la GUM.

También se exponen algunos ejemplos de procesos de medición realizados en laboratorios de medición donde se aplican los conceptos estudiados en este documento sobre incertidumbre.

1. GENERALIDADES

En este capítulo se describe el contenido del proyecto, mediante el planteamiento del problema, la explicación de las razones por las cuales se realiza el estudio de las distribuciones de probabilidad en la estimación de incertidumbre de medición, el objetivo general, los objetivos específicos, y el alcance del proyecto.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En todos los sectores de la sociedad es importante que las estimaciones de una misma variable, realizadas por distintas entidades, no presenten diferencias significativas que dificulten procesos transparentes. Por ello es necesario que todas las mediciones realizadas estén referenciadas a patrones de medición, es decir debe garantizarse la trazabilidad del proceso de medición.

Para asegurar el mantenimiento de esta trazabilidad, los equipos de medida deben estar calibrados, pero no sólo eso, las condiciones en donde se toman las medidas también deben estar controladas o referenciadas mediante registros.

Para realizar estas medidas, se tienen en cuenta factores específicos que aportan incertidumbre, tales como condiciones ambientales no controladas, errores propios del patrón de medición, características de repetibilidad y en general todos los factores que ocasionen posibles alteraciones en el resultado final y que influyan por ejemplo en que dos medidas, tomadas en diferentes instantes de tiempo y bajo condiciones similares den resultados muy diferentes.

Algunos de estos factores deben ser agrupados y cuantificado su efecto a través de herramientas estadísticas para lo cual se agrupa esta información como una serie de datos, los cuales tienen una probabilidad de ocurrencia. Es por ello que en este trabajo se analizan las diferentes distribuciones de probabilidad propuestas en la GUM para así establecer una base de estudio desde el punto de vista estadístico que fundamente la selección de las distribuciones de probabilidad en la estimación de incertidumbre en una medición, lo cual permitirá un mejor aseguramiento metrológico en los laboratorios que realicen procesos de medición.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Obtener medidas fiables es una exigencia en una organización competitiva porque de esos valores dependen decisiones cuyas consecuencias técnicas y económicas son importantes para cualquier negocio. La calibración y el ajuste

de los equipos de medida contribuyen al adecuado funcionamiento de un sistema de calidad que requiere de procesos de medida confiables.

Por consiguiente es conveniente realizar un estudio que fundamente las decisiones de seleccionar las distribuciones de probabilidad para la determinación de la incertidumbre en los procesos de medición basados en la GUM, la cual es considerada como la referencia base.

1.3 OBJETIVOS DEL PROYECTO

En este numeral se describe el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo de grado.

1.3.1 Objetivo general

Analizar y documentar las distribuciones de probabilidad de población aplicadas a la estimación y evaluación de incertidumbre que garanticen el aseguramiento metrológico de un laboratorio de medición de acuerdo con las pautas de la guía de expresión de incertidumbre en procesos de medición "Guide to the expresión of Uncertainty in Measurement" (GUM) según la metodología del valor medio.

1.3.2 Objetivos específicos

- Realizar un análisis de cada una de las distribuciones de probabilidad propuestas por la GUM (normal, rectangular, triangular, t student) y compararlas con el objeto de establecer en qué casos es conveniente aplicar cada una de ellas.
- Analizar casos de laboratorios de medición en donde se requiere determinar la incertidumbre a variables de medida, aplicando la metodología de la GUM, y estableciendo la forma correcta como se debe proceder en la selección de las distribuciones de probabilidad para garantizar el aseguramiento metrológico.
- Documentar el proceso aplicado en la estimación de incertidumbre empleada en la calibración de equipos de medición, mediante las pautas establecidas por la GUM y el análisis realizado de las distribuciones de probabilidad.

1.4 ALCANCE

Con la realización de este proyecto se documentarán los aspectos estadísticos a tener en cuenta en las distribuciones de probabilidad en las que se basan el método estadístico del teorema del valor medio para la evaluación de incertidumbre en los procesos de calibración en cualquier jerarquía de equipos de medición según las pautas establecidas por la GUM.

2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

En este capítulo se realiza un resumen de las funciones de probabilidad más utilizadas en procesos de metrología de variables eléctricas. Como complemento a este resumen, el anexo A describe una serie de definiciones fundamentales en procesos de metrología.

En general, cualquier magnitud sometida a medición suele ser afectada por fenómenos aleatorios que no se pueden controlar totalmente haciendo que los resultados obtenidos no sean los mismos. Estos fenómenos impredecibles se representan mediante variables aleatorias. Una variable aleatoria puede tomar valores dentro de un conjunto finito o infinito de valores de una población y lleva asociada una probabilidad de ocurrencia. Existen variables de tipo discreta en donde toman valores enteros y las hay de tipo continua las cuales toman cualquier valor dentro de un intervalo finito o infinito de valores. [2]

2.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

De acuerdo con la naturaleza de la medición, esta se puede considerar como una variable aleatoria⁵ de tipo continua y la probabilidad de que dicha variable pueda tomar cualquier valor dentro de un rango de valores se obtiene mediante una función de densidad de probabilidad.

El área bajo la curva entre los límites de un intervalo $[a, b]$ indica la probabilidad de la variable aleatoria x para tomar valores en ese intervalo.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.1)$$

Donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad.

2.2 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE DISPERSIÓN

El estudio de las variables aleatorias se puede realizar de una forma sencilla si se consideran las medidas de tendencia central y de dispersión. Las más utilizadas son:

La media, la varianza y la desviación estándar de la población.

⁵ En el presente documento se centrara el estudio a las variables aleatorias continuas.

2.2.1 Esperanza matemática

Es el valor medio de la variable aleatoria, es decir, el valor al que tiende dicha variable aleatoria. Se obtiene como:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) dx \quad (2.2)$$

Según la definición, se tendría que conocer todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria (población). Esto sería algo complejo, lo que regularmente se hace es tomar una muestra y bajo el estudio de ésta, estimar un resultado que represente el comportamiento global de la variable aleatoria.

En la práctica, se estima la media de la población mediante la media aritmética de un número finito de datos (muestra) mediante la ecuación:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (2.3)$$

Donde n es el tamaño de la muestra.

Dos variables aleatorias pueden tener la misma esperanza. El término varianza establece qué tan dispersos se encuentran los datos de su valor medio.

2.2.2 Varianza

Es la esperanza del cuadrado de la variable aleatoria centrada⁶.

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (2.4)$$

La varianza poblacional se estima mediante la varianza muestral dada en la ecuación (3.5) y mide la dispersión entre cada uno de los valores respecto al valor promedio dividida por el número de observaciones menos uno.

⁶ Una variable aleatoria para la cual la esperanza es cero.

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.5)$$

Entre mayor sea el tamaño de la muestra, mejor será el estimador.

2.2.3 Desviación estándar

La desviación estándar se obtiene como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma \quad (2.6)$$

Para el caso práctico, como se cuenta con un número determinado de valores, se estima la desviación estándar de la población mediante la desviación estándar experimental o de la muestra:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.7)$$

Las funciones de densidad de probabilidad son caracterizadas por su valor medio y su varianza⁷. Entre las diferentes funciones de densidad de probabilidad se encuentran la distribución uniforme, la distribución triangular, la distribución normal y la distribución t-student. Las demostraciones de las medidas de tendencia central se encuentran en el Anexo B.

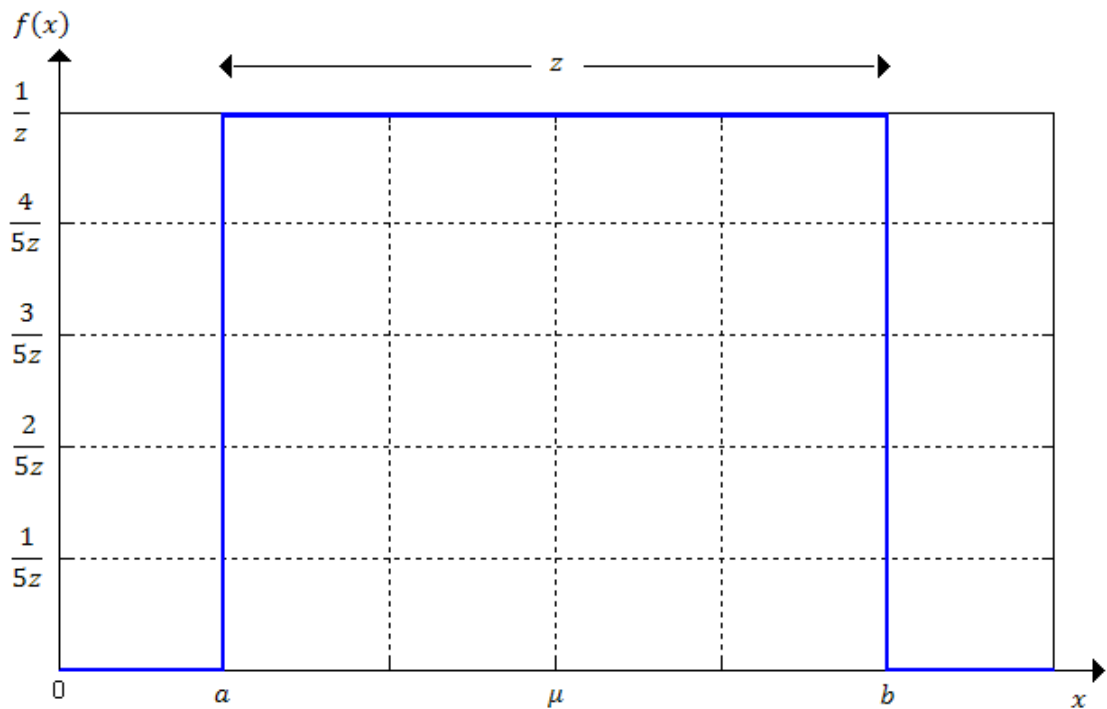
2.3 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD UNIFORME

Se dice que la variable aleatoria cumple una función de distribución rectangular o uniforme si todos los valores comprendidos en un intervalo $[a, b]$ tienen igual probabilidad de ocurrencia y probabilidad cero por fuera de este.

El parámetro de ubicación para esta distribución es el valor mínimo y la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo es el parámetro de escala. No hay parámetro de forma (ver Figura 1).

⁷ Algunas distribuciones como la rectangular, son definidas por sus límites superior e inferior además de su media y varianza. Dependiendo del tipo de distribución, se pueden tener en cuenta otros parámetros que las caractericen. Generalmente se consideran estos dos.

Figura 1. Función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme con parámetros a y b



Para la distribución rectangular, la función de densidad de probabilidad se describe de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{z} \quad a \leq x \leq b \quad (2.8a)$$

$$f(x) = 0 \quad x < a ; x > b \quad (2.8b)$$

La función de distribución acumulada se obtiene por integración de la función de densidad de probabilidad definida en (2.8a) y (2.8b) y esta es:

$$F(x) = 0 \quad x < a \quad (2.9a)$$

$$F(x) = \frac{x - a}{z} \quad a \leq x \leq b \quad (2.9b)$$

$$F(x) = 1 \quad x > b \quad (2.9c)$$

La esperanza matemática o media poblacional de X es el punto medio del intervalo:

$$E(X) = \mu = \frac{a + b}{2} \quad (2.10)$$

La varianza de esta distribución es:

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (2.11)$$

Y su desviación estándar es:

$$\sqrt{V(X)} = \sigma = \frac{(b - a)}{\sqrt{12}} \quad (2.12)$$

Esta distribución es utilizada en metrología en los siguientes casos:

- Cuando se cuenta con muy poca información (no se conoce el comportamiento de frecuencias o tendencia a algún valor específico) de la variable analizada se puede utilizar la distribución uniforme. [2]
- En la resolución de un instrumento digital o la apreciación de la lectura de un instrumento analógico. Por ejemplo, los dispositivos digitales están diseñados para mostrar un número finito de cuentas de la medida por lo que, para considerar los posibles valores del mensurando en el cambio en un paso en la indicación del dígito menos significativo, se considera una fuente de incertidumbre de tipo rectangular con ancho de la ventana igual a la resolución del equipo.

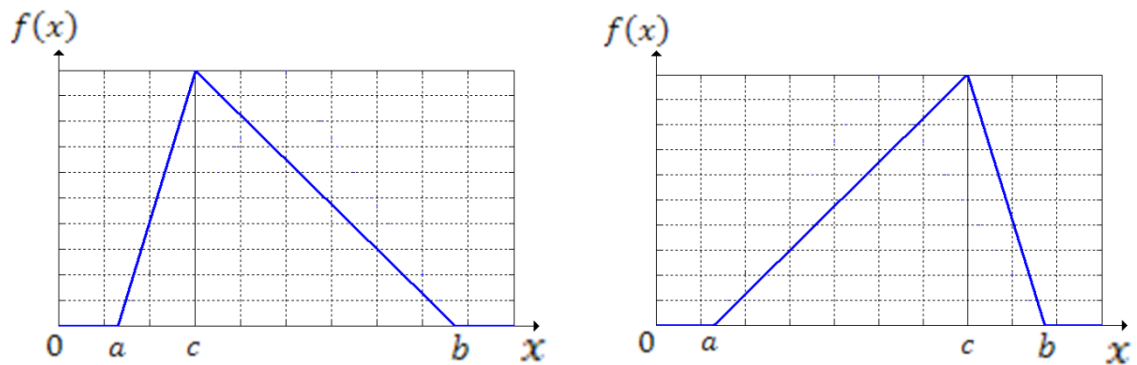
2.4 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD TRIANGULAR

Esta distribución puede ser simétrica o asimétrica.

2.4.1 Distribución de probabilidad triangular asimétrica

Esta distribución está definida por tres parámetros: un valor mínimo a , un valor máximo b y el valor más probable c . Variando el valor más probable respecto a los extremos, la distribución puede ser simétrica o no. Una característica es que es cerrada lo que elimina la posibilidad de valores extremos que podrían ocurrir en la realidad (ver Figura 2).

Figura 2. Funciones de densidad de probabilidad de distribuciones triangulares asimétricas



Una variable aleatoria sigue una distribución triangular asimétrica si su función de densidad de probabilidad es de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} ; a \leq x \leq c \quad (2.13a)$$

$$f(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} ; c \leq x \leq b \quad (2.13b)$$

$$f(x) = 0 \quad x \leq a, x \geq b \quad (2.13c)$$

La función de distribución acumulada se obtiene por integración de la función de densidad de probabilidad definida en (2.13a), (2.13b) y (2.13c) de la siguiente forma:

$$F(x) = 0 ; \quad x < a \quad (2.14a)$$

$$F(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} ; \quad a \leq x \leq c \quad (2.14b)$$

$$F(x) = 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} ; \quad c \leq x \leq b \quad (2.14c)$$

$$F(x) = 1 ; \quad b < x \quad (2.14d)$$

La esperanza matemática o media poblacional de X es el punto medio del intervalo:

$$E(X) = \mu = \frac{a+b+c}{3} \quad (2.15)$$

La varianza de esta distribución es:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \quad (2.16)$$

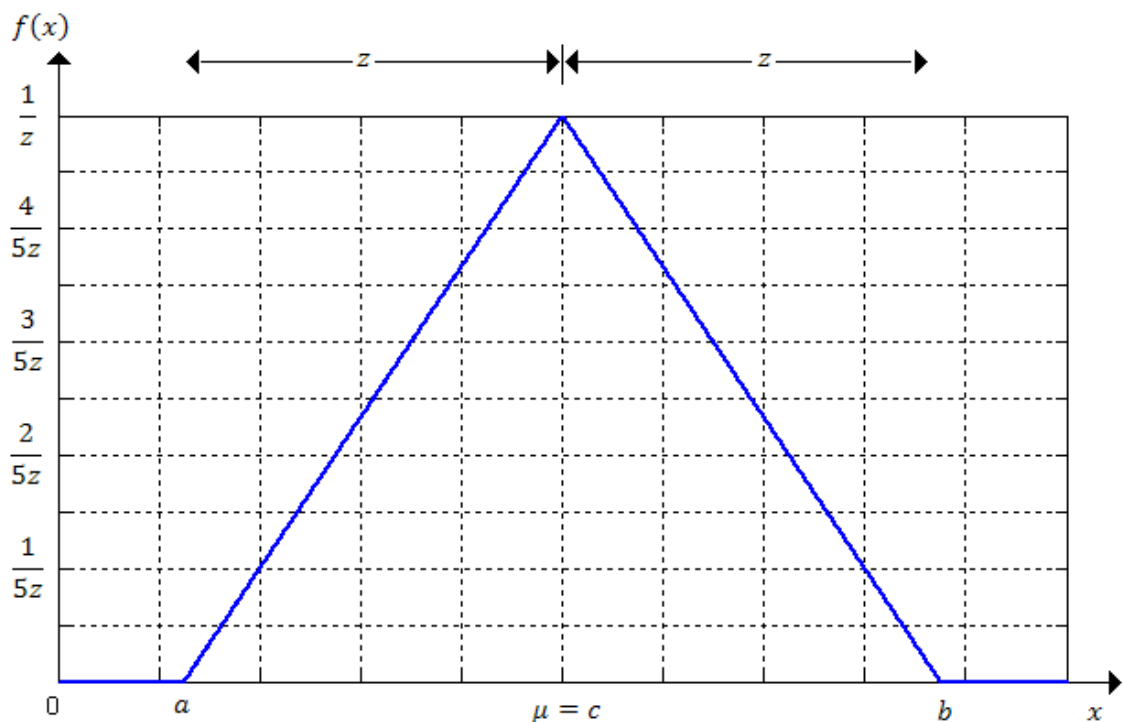
Y su desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}} \quad (2.17)$$

2.4.2 Distribución de probabilidad triangular simétrica

La distribución triangular simétrica se puede utilizar como aproximación de otras distribuciones como la normal o cuando se tiene poca información acerca del mensurando (Ver Figura 3).

Figura 3. Función de densidad de probabilidad de una distribución triangular simétrica



Para el caso en que la distribución triangular es simétrica, para una magnitud de entrada X_i , el mejor valor estimado de X_i está dado por:

$$\mu = c = \frac{a + b}{2} \quad (2.18)$$

Una variable aleatoria sigue una distribución triangular simétrica si su función de densidad de probabilidad es de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{(x - a)}{z^2} ; a \leq x \leq c \quad (2.19a)$$

$$f(x) = \frac{(b - x)}{z^2} ; c \leq x \leq b \quad (2.19b)$$

$$f(x) = 0 \quad x \leq a , \quad x \geq b \quad (2.19c)$$

La esperanza matemática o media poblacional de X es el punto medio del intervalo:

$$\mu = E(X) = c = \frac{a + b}{2} \quad (2.20)$$

La varianza de esta distribución es:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b - a)^2}{24} \quad (2.21)$$

Y su desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{(b - a)}{\sqrt{24}} \quad (2.22)$$

La distribución triangular simétrica se utiliza en la estimación de la incertidumbre cuando: [2]

- Existe información disponible concerniente al mensurando. Los valores cercanos a μ son más probables que los cercanos a los límites.
- Es hecho un estimado en la forma de un rango máximo descrito por una distribución simétrica.

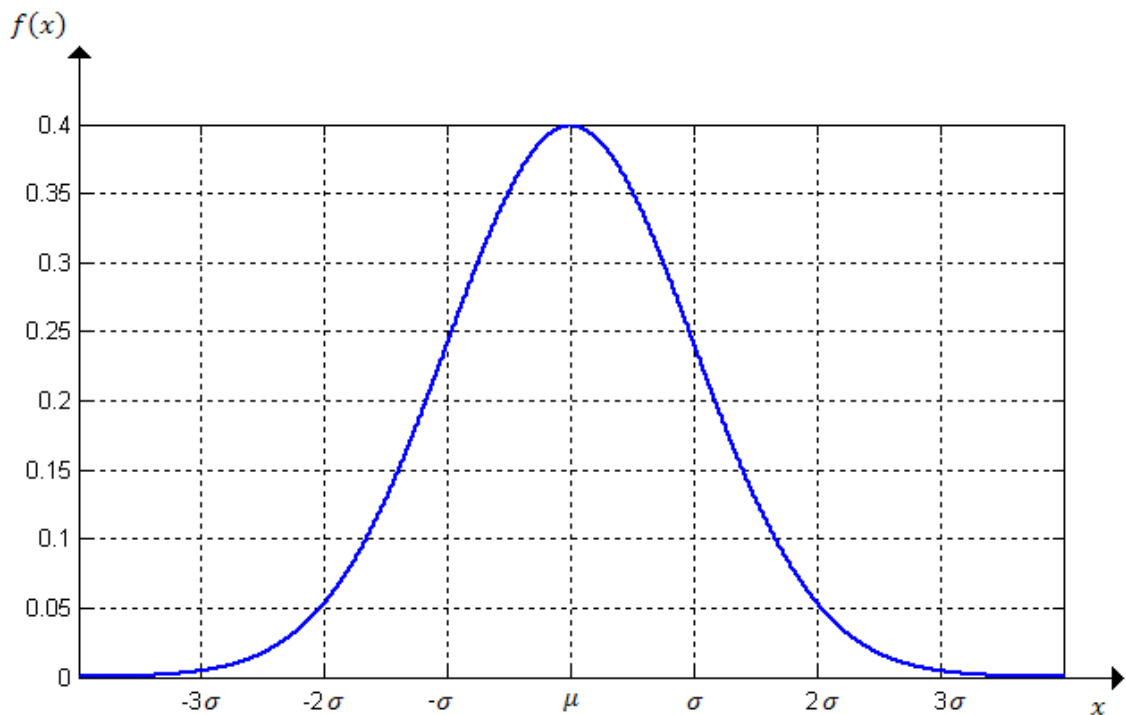
2.5 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL

Muchas variables aleatorias continuas asociadas a fenómenos naturales presentan un comportamiento en su función de densidad muy similar al modelo de la distribución normal.

Esta distribución tiene forma acampanada y la media, mediana y moda coinciden. Se caracteriza por dos parámetros: la media μ (parámetro de ubicación) y la varianza σ^2 o desviación estándar σ (parámetro de escala).

La media μ indica la posición central de la gráfica por lo que esta es simétrica respecto a μ . Para distintos valores de μ , la gráfica se desplaza sobre el eje de las abscisas. Para $\mu > 0$ o $\mu < 0$ (en el caso de una función normal estándar) las curvas tendrán las mismas formas pero estarán desplazadas μ unidades a la derecha o a la izquierda respectivamente. Tiene valor máximo en la media lo que hace ver que la mayor densidad se encuentra cerca a esta a pesar de no ser cerrada. Al ser simétrica respecto al eje $x = \mu$, el área a la derecha y a la izquierda de este eje es igual a 0,5 (Ver Figura 4).

Figura 4. Función de densidad de probabilidad de una distribución normal



La desviación estándar σ es una medida del grado de dispersión. Entre mayor sea su valor más dispersión tendrán los datos respecto a la media por lo que la curva se hará más plana, en cambio, un valor menor indicará que habrá una gran probabilidad de encontrar datos cercanos a la media de la distribución. El eje de las abscisas es una asíntota de la curva por lo que cualquier valor entre $(-\infty, +\infty)$ es posible. El área total bajo la curva es igual a 1.

En los puntos $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ presenta puntos de inflexión.

Con límites a y b se tiene:

- Si $a = \mu - \sigma$ y $b = \mu + \sigma$, la probabilidad de encontrar un valor o medida en dicho intervalos es de $0,6826=68,26\%$.
- Si $a = \mu - 2\sigma$ y $b = \mu + 2\sigma$, la probabilidad de encontrar un valor o medida en dicho intervalos es de $0,9545=95,45\%$.

- Si $a = \mu - 3\sigma$ y $b = \mu + 3\sigma$, la probabilidad de encontrar un valor o medida en dicho intervalos es de 0,9973=99,73%.

Una variable aleatoria sigue una distribución normal si su función de densidad de probabilidad es de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (2.23)$$

En general, no existe una única distribución normal sino una familia de distribuciones que tienen una forma común pero que difieren en los valores de su media y su varianza. De todas ellas, la más utilizada es la distribución normal estándar que tiene $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

La función de densidad normal estándar está dada por la siguiente ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.24)$$

La esperanza matemática o media poblacional es: [3]

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{N} \quad (2.25)$$

Donde N es un número grande de los objetos bajo consideración, es decir tiende a infinito. [3]

Para la muestra se estima este parámetro mediante la ecuación (2.3)

La desviación estándar (de la población)

$$\sqrt{V(X)} = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{N}} \quad (2.26)$$

Para la muestra se estima la desviación estándar mediante la ecuación (2.7).

De la referencia [8] se tiene que:

Consideradas las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n y las constantes c_1, c_2, \dots, c_n se establece la combinación lineal de estas variables como:

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \quad (2.27)$$

La esperanza de Y es igual a:

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \dots + c_nE(X_n) \quad (2.28)$$

Ahora si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes entonces:

$$V(Y) = c_1^2X_1 + c_2^2X_2 + \dots + c_n^2X_n \quad (2.29)$$

Si $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ con $E(X_i) = \mu$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $E(\bar{X}) = \mu$

Además, si $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ también son independientes con $V(X_i) = \sigma^2$ para $i = 1, 2, \dots, n$

Entonces

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.30)$$

La teoría establece que si la media muestral se utiliza como estimador puntual de la media de la población, el error estándar de \bar{x} se mide:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.31)$$

Pero como la desviación estándar de la población es desconocida, ésta se sustituye por la desviación estándar muestral, entonces el error estándar estimado es:

$$s(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.32)$$

Esta distribución es utilizada en metrología cuando:

- Se utiliza la incertidumbre expandida del certificado de calibración del patrón de medida, asumiendo que esta incertidumbre fue obtenida de una muestra grande de observaciones.
- Se tiene más de 32 observaciones del mensurando, por lo que para la distribución normal se puede hacer una aproximación del divisor del radical de la ecuación (2.7) y cambiar $n - 1$ por n sin llevar a grandes diferencias. Esto debido a que si se evalúa la razón entre la varianza muestral y la varianza poblacional, el resultado es aproximadamente 1 lo que quiere decir que de ahí en adelante las diferencias son menores al 3,121%.

En la práctica se utiliza para determinar la incertidumbre tipo A dependiendo de la incertidumbre requerida.

- Del ítem anterior, se concluye que se puede determinar el factor de

amplificación k de la incertidumbre combinada a partir de una tabla normal estándar ya que este valor será muy similar al valor que se obtiene de tabla T-student⁸

2.6 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD T-STUDENT

Las características de esta distribución son:

- Tiene proporcionalmente mayor área en los extremos que la distribución normal.
- Tiene valor máximo en la media y es simétrica respecto al eje $x = \mu$.
- Tiene forma de campana.
- Existe una distribución t para cada tamaño de la muestra, es decir, no hay una distribución t sino una familia de distribuciones t todas con la misma media μ , con sus respectivas desviaciones estándar diferentes por lo que existe una distribución para cada uno de los grados de libertad⁹.
- La distribución t -student es más ancha y más plana en el centro que la distribución normal estándar, por lo que presenta mayor varianza alrededor de la media.

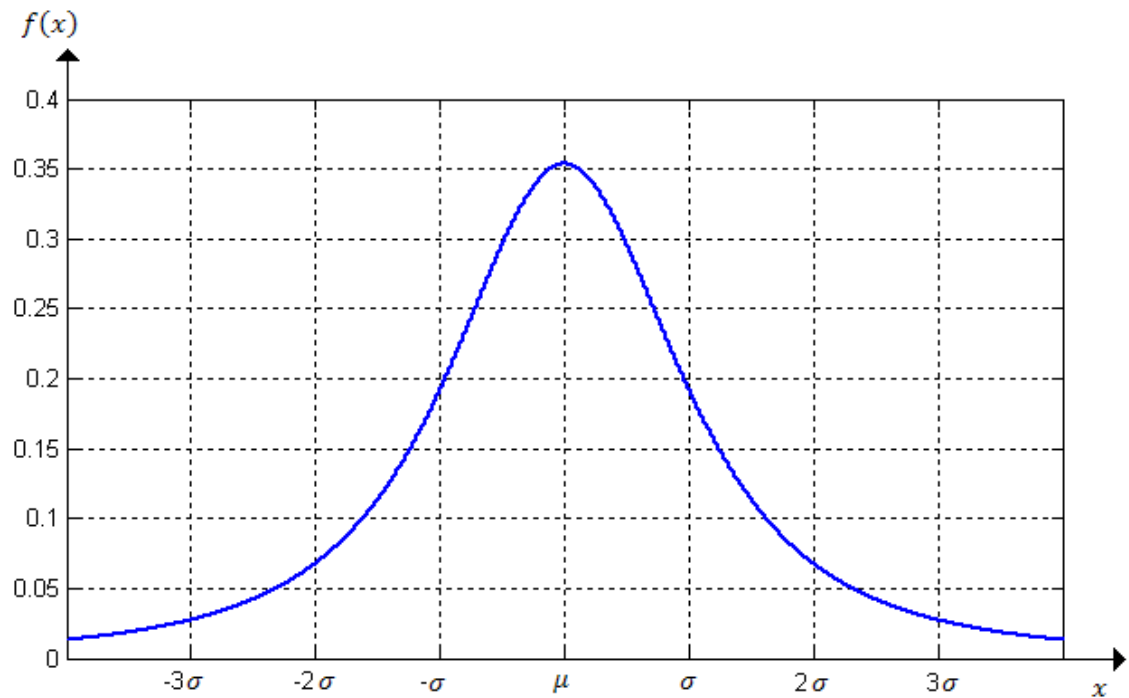
La gráfica de esta distribución se muestra en la Figura 5.

Cuando el número de grados de libertad tiende a infinito ($\nu \rightarrow \infty$), es decir, a medida que aumenta la muestra, la distribución t -student se aproxima a la distribución normal estándar.

⁸ Ver Anexos I y J.

⁹ Los grados de libertad son el número de muestras elegidas libremente menos uno. Ver ecuación 3.14

Figura 5. Función de densidad de probabilidad de una distribución t-student



La función de densidad de probabilidad se describe de la siguiente forma:

$$f(x, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} * \frac{\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{v}{2}\right]} * \left[1 + \frac{x^2}{v}\right]^{-\frac{v-1}{2}} \quad (2.33)$$

Donde:

v = grados de libertad

Γ =función gamma

La esperanza matemática o media poblacional de X es el punto medio del intervalo:

$$E(X) = \mu = 0 \quad v > 1 \quad (2.34)$$

La varianza está dada por:

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{v}{v-2} \quad v > 2 \quad (2.35)$$

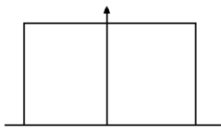
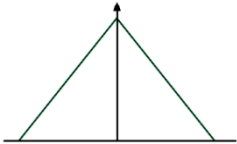
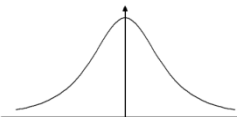
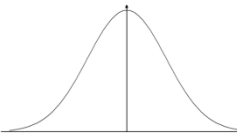
Esta distribución es utilizada cuando:

- Se disponga de un grupo pequeño de observaciones (menores a treinta y dos) y se presente la no repetibilidad de la variable medida.
- Se estima la incertidumbre expandida para determinar el factor de amplificación de la incertidumbre combinada, que depende del cálculo de los grados efectivos de libertad mediante la fórmula de Welch-Satterhwaite¹⁰.

En la Tabla 1 se presenta un cuadro comparativo de las distribuciones estudiadas y los parámetros característicos de cada una de estas.

¹⁰ Esta ecuación se encuentra en el capítulo 3 sección 3.7 de este documento.

TABLA 1. CUADRO COMPARATIVO. DISTRIBUCIÓN ASIGNADA EN FUNCIÓN DE LA INFORMACIÓN DISPONIBLE

TIPO DE DISTRIBUCIÓN	MEDIA	VARIANZA	OBSERVACIONES	GRÁFICA
Rectangular	$\mu = \frac{a + b}{2}$	$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$	Se utiliza cuando se posee poca información del mensurando.	
Triangular	$\mu = \frac{a + b}{2}$	$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{24}$	Además de lo anterior es utilizada cuando se observa un valor más probable de la medida.	
T-student	$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$	$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$	Es utilizada para estimar parámetros de la población partiendo de la muestra. Media y varianza desconocidos.	
Normal	μ	σ^2	Es útil si se conoce la mayoría o toda la población. Media y varianza conocidos.	

3. PROCEDIMIENTO A SEGUIR PARA LA ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EMPLEADA EN LA CALIBRACIÓN DE EQUIPOS DE MEDICIÓN.

A continuación, se describe el procedimiento para estimar la incertidumbre en la medición de acuerdo a las pautas de la GUM en procesos de calibración [4,7].

3.1 MENSURANDO

Se debe especificar claramente la magnitud que se desea estimar y aquellas magnitudes de entrada que interactúen o de las que dependa el mensurando buscado.

3.2 MODELO FÍSICO Y MATEMÁTICO

Luego de determinar las variables de entrada, se plantea el modelo físico que consiste en suposiciones sobre el propio mensurando y las variables químicas o físicas que se relacionan en el fenómeno considerado como comportamiento temporal, espacial, propiedades térmicas, etc.

El modelo físico se representa por medio del lenguaje matemático (modelo matemático), en el que se expone aproximadamente la situación real que se está analizando y las relaciones de las variables que intervienen.

Las magnitudes de entrada se representan mediante el conjunto $\{X_i\}$ donde el índice i toma valores entre 1 y el número de magnitudes de entrada N . La relación entre las magnitudes de entrada y el mensurando Y se representa mediante la función: [4]

$$Y = f(\{X_i\}) = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (3.1)$$

Para la calibración de equipos, el modelo matemático puede incluir factores de corrección de la medida (errores debidos a la resolución, exactitud, etc).

El siguiente modelo es el de calibración por comparación directa.

$$E = A - A_r \quad (3.2)$$

$$A = \bar{A} - E_{resol}$$

$$A_r = \bar{A}_r - E_{exact}$$

Donde:

E : Error de la comparación.

A : Mejor estimado del mensurando.

\bar{A} : Valor promedio de las observaciones realizadas del mensurando.

A_r : Valor de referencia o patrón de medición.

\bar{A}_r : Valor promedio del patrón.

E_{resol} : Error por resolución del instrumento de medida.

E_{exact} : Error por exactitud del patrón de medida.

El planteamiento del modelo matemático depende del metrólogo. Se parte de las variables que aportan incertidumbre y se empieza a descartar aquellas que su incidencia no sea significativa, hasta considerar un modelo aceptable que permita realizar un estimado de la incertidumbre en la medición. El modelo propuesto en esta sección ha sido seleccionado después de analizar que variables como temperatura, humedad, incertidumbre por la resolución con que fue medido el patrón y demás variables están controladas en el laboratorio de modo que los aportes a la medición son insignificantes.

3.3 IDENTIFICACIÓN DE FUENTES DE INCERTIDUMBRE

En esta etapa, se establecen las diferentes fuentes que aportan incertidumbre y que deben ser consideradas en el análisis de la estimación de la incertidumbre.

En procesos de calibración, las causas comunes a considerar para la estimación de la incertidumbre son las siguientes:

- Incertidumbre por repetibilidad en las mediciones u_{rep} .
- Incertidumbre del patrón u_{patr} .
- Incertidumbre por resolución u_{res} .
- Incertidumbre por deriva u_{der} .

3.4 CUANTIFICACIÓN DE LAS FUENTES DE INCERTIDUMBRE Y DISTRIBUCIÓN ASOCIADA

Después de determinar las posibles fuentes de incertidumbre, se asocia una distribución de probabilidad a cada una de ellas con el objetivo de cuantificar la variabilidad de éstas según las características que presenten.

3.5 EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR

Para la evaluación de la incertidumbre estándar se consideran dos métodos principales.

3.5.1 Método de evaluación de la incertidumbre estándar tipo A

Es el método de evaluación de la incertidumbre estándar mediante el análisis estadístico de una serie de observaciones.

La incertidumbre por repetibilidad se obtiene como:

$$u_A = u_{rep} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3.3)$$

Donde s se obtiene mediante la ecuación (3.7) y se recomienda que sea un buen estimador de la desviación de la población en consideración. El número de muestras a elegir n para determinar s depende de la incertidumbre requerida por el laboratorio.

3.5.2 Método de evaluación de la incertidumbre estándar tipo B

Es el método de evaluación de la incertidumbre estándar por otros medios diferentes al análisis estadístico de una serie de observaciones.

Para instrumentos de medida las incertidumbres de resolución y de deriva se estiman mediante la distribución rectangular:

$$u_{res} = \frac{\text{Resolución}}{\sqrt{12}} \quad (3.4)$$

$$u_{der} = \frac{\pm \text{maxima variación de la exactitud}}{\sqrt{3}} \quad (3.5)$$

La incertidumbre por el patrón para cada punto de prueba se obtiene del certificado de calibración como:

$$u_{patr} = \frac{U_{exp}}{k} \quad (3.6)$$

Siendo

U_{exp} : Incertidumbre expandida.

k : Factor de amplificación obtenido de la Tabla t student.

3.6 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA

La incertidumbre combinada se obtiene mediante la ecuación conocida como la ley de propagación de incertidumbres.

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i, x_j)} \quad (3.7)$$

Donde $u(x_i, x_j)$ es la covarianza que estima la correlación entre dos magnitudes de entrada. Por ejemplo, para dos variables q, w correlacionadas se tiene:

$$u(x_i, x_j) = u(q, w) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})(w_i - \bar{w}) \quad (3.8)$$

El coeficiente de sensibilidad c_i se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (3.9)$$

En procesos de calibración donde la correlación es igual a cero, la ecuación (3.7) se reduce a:

$$u_C = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2} \quad (3.10)$$

Los coeficientes de sensibilidad quedan expresados como:

$$c_1 = \frac{\partial E}{\partial A} = 1$$

$$c_2 = \frac{\partial E}{\partial A_r} = -1$$

Considerando las fuentes de incertidumbre de la sección 3.3, la incertidumbre combinada queda expresada como:

$$u_C = \sqrt{(c_1 * u_{res})^2 + (c_2 * u_{patr})^2 + (c_2 * u_{der})^2 + (c_1 * u_{rep})^2} \quad (3.11)$$

Donde:

u_{res} : Incertidumbre por resolución.

u_{patr} : Incertidumbre por el instrumento o patrón utilizado.

u_{der} : Incertidumbre por deriva o exactitud del instrumento patrón.

u_{rep} : Incertidumbre por repetibilidad en las medidas.

Como los coeficientes de sensibilidad dan 1 y -1, la ecuación anterior se reduce a:

$$u_C = \sqrt{u_{res}^2 + u_{patr}^2 + u_{der}^2 + u_{rep}^2} \quad (3.12)$$

3.7 NIVEL DE CONFIANZA REQUERIDO

El nivel de confianza requerido es el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad resultante de la suma de todas las contribuciones de las fuentes de incertidumbre. Por lo general, en los certificados de calibración se utiliza un nivel de confianza del 95,45%.

Factor de cobertura

Para determinar el factor de cobertura utilizado en la estimación de la incertidumbre expandida, lo primero que se hace es estimar los grados

efectivos de libertad de la contribución de las fuentes de incertidumbres consideradas mediante la ecuación de Welch-Satterthwaite:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (3.13)$$

Donde N es el número de fuentes de incertidumbre identificadas.

Para incertidumbres tipo A los grados de libertad se obtienen mediante la siguiente ecuación:

$$v_{eff} = n - 1 \quad (3.14)$$

Donde n es el tamaño de la muestra.

Para incertidumbres tipo B los grados de libertad serán los indicados en el correspondiente certificado de calibración del equipo. Si no se encuentran reportados y se está seguro de la incertidumbre que se informa, los grados de libertad se pueden asumir infinitos $v_i = \infty$ o por el contrario, con el nivel de confianza reportado, se pueden estimar mediante la siguiente aproximación¹¹:

$$v_i \approx \frac{1}{2} \left[\frac{u(x_i)}{\Delta u(x_i)} \right]^2 \quad (3.15)$$

Donde

$u(x_i)$: Es la incertidumbre estándar de cada fuente identificada en la sección 3.3.

$$\Delta u(x_i) = 1 - conf$$

$conf$: Es la confianza reportada en el certificado de calibración del instrumento. Generalmente, este nivel de confianza es aproximadamente del 95%=0,95.

3.8 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

La incertidumbre expandida U_{exp} se evalúa multiplicando la incertidumbre estándar combinada asociada a la estimación de salida, por el factor de cubrimiento determinado. (El factor k se obtiene de la tabla T-Student en función de los grados de libertad y con un nivel de confianza del 95,45%)

$$U_{exp} = k * u_c \quad (3.16)$$

¹¹ En la práctica, el fabricante reporta en el certificado del instrumento un nivel de confianza del 95% en la estimación de la incertidumbre. Cuando el nivel de confianza sea del 99%, los grados de libertad son 5000.

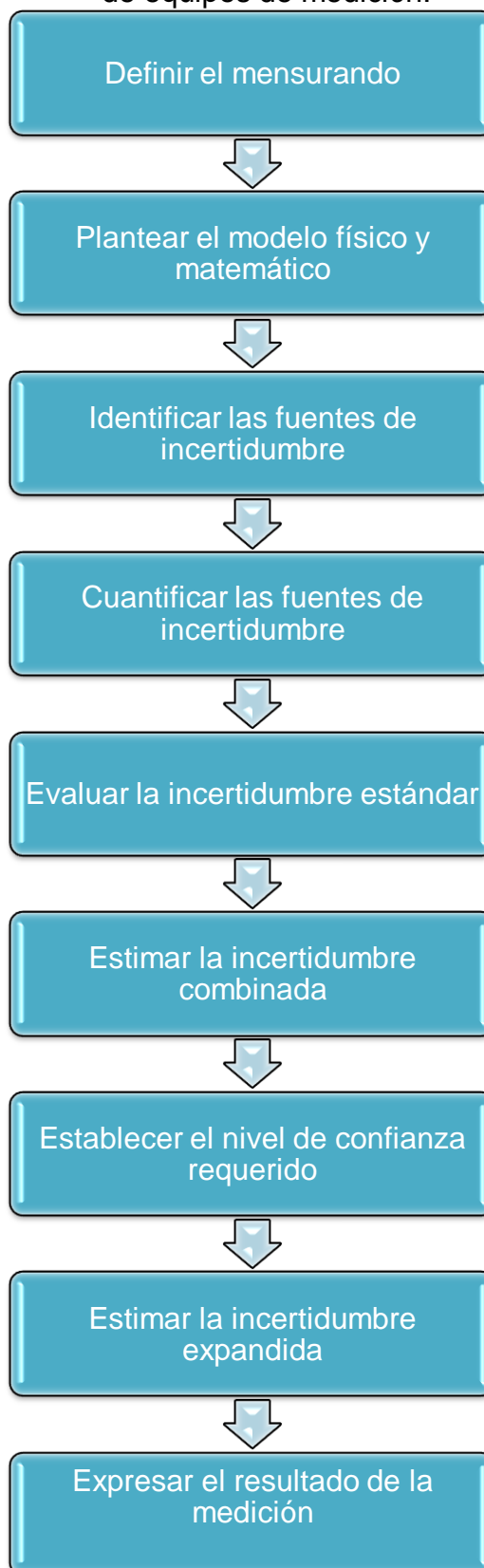
3.9 RESULTADO DE LA MEDICIÓN

La expresión final debe informar el resultado de la medición junto con su incertidumbre asociada. Por ejemplo

$$Y = y \pm U_{exp} \quad (3.17)$$

Los pasos anteriores se resumen en el diagrama de la Figura 6.

Figura 6. Procedimiento para la estimación de la incertidumbre en la calibración de equipos de medición.



4. CASOS DE LABORATORIOS DONDE SE ESTIMA LA INCERTIDUMBRE DE UN PROCESO DE MEDICIÓN.

En este capítulo se analizan casos de laboratorios donde se requiere estimar la incertidumbre en procesos de medición. Se presenta el caso de calibración de medidores de energía eléctrica, se estima la incertidumbre de la medición de una impedancia en el laboratorio de circuitos de la UIS y por último, el caso de medición de la resistencia de aislamiento y la tensión aplicada a un carrete de cable.

4.1 LABORATORIO DE CALIBRACIÓN DE MEDIDORES DE ENERGÍA ELÉCTRICA.

En este caso, se realiza la calibración de un medidor de energía eléctrica con las especificaciones mostradas en la Tabla 2.

TABLA 2. CARACTERÍSTICAS DEL MEDIDOR DE ENERGÍA ELÉCTRICA DÍGITAL A CALIBRAR

Número de serie	7699117
Clase activa	1
Tensión nominal	120 V
Corriente nominal (Básica)	10 A
Constante activa	1000 Imp/kWh
Resolución	0,01
Corriente máxima	100 A
Numero de hilos	3
Numero de fases	2
Frecuencia nominal	60 Hz

Las características del patrón utilizado en el proceso de calibración son presentadas en la Tabla 3.

TABLA 3. CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO PARA PRUEBA DE MEDIDORES (EPM¹²)

Incertidumbre del patrón para $f_p=1,0$	0,023
Incertidumbre del patrón para $f_p=0,5$	0,026
Incertidumbre del patrón para $f_p=0,8$	0,026
Incertidumbre resolución	0,0029
Incertidumbre deriva	0,023

Nota:

Estas incertidumbres fueron facilitadas por el laboratorio de Medidores de Energía Eléctrica donde se realizó la práctica.

¹² Banco de Prueba No 2 del laboratorio.

Prueba de exactitud

Se hacen seis experimentos registrando tres observaciones en cada prueba a excepción de la última en la que se toman cinco observaciones. En cada prueba se le aplica al medidor una tensión constante de 120 V y diferente porcentaje de la corriente nominal.

1. Se realiza al cinco por ciento de la corriente nominal (básica) con factor de potencia igual a uno en las fases RT.
2. Se realiza al cien por ciento de la corriente nominal (básica) con factor de potencia igual a uno en las fases RT.
3. Se realiza al cien por ciento de la corriente nominal (básica) con factor de potencia igual a uno en la fase R.
4. Se realiza al cien por ciento de la corriente nominal (básica) con factor de potencia igual a uno en la fase T.
5. Se realiza al cinco por ciento de la corriente nominal (básica) con factor de potencia igual a 0,5 en atraso en las fases RT.
6. Se realiza al seiscientos por ciento de la corriente nominal (básica) con factor de potencia igual a uno en las fases RT.

Prueba de constante o de registrador

Para medidores electromecánicos se debe verificar que el medidor cumpla con los datos de placa que trae con respecto a las revoluciones del disco por kW.

Prueba de arranque

Aplicando la mínima carga según el tipo de medidor este debe arrancar o dar una revolución completa. Se hace una prueba al respecto.

Los datos obtenidos en las seis pruebas planteadas son mostrados en la Tabla 4.

TABLA 4. RESUMEN DE DATOS PARA LA PRUEBA DE EXACTITUD

n	5InRT fp=1	100InRT fp=1	100InR fp=1	100InT fp=1	100InRT fp=0.5 ind	600InRT fp=1
1	0,20	0,29	0,24	0,25	0,18	0,14
2	0,26	0,28	0,26	0,24	0,19	0,23
3	0,08	0,24	0,24	0,25	0,21	0,22
4	-	-	-	-	-	0,12
5	-	-	-	-	-	0,4
\bar{x}	0,18	0,27	0,25	0,25	0,19	0,22
s_p	0,119	0,034	0,015	0,007	0,02	0,125

\bar{x} : Se obtiene mediante la ecuación (2.3)

s_p : Es la desviación histórica que se estima con diez medidas en cada experimento para el modelo y marca de medidor especificada anteriormente.

La desviación histórica es la misma para todos los medidores de un lote que contenga medidores del mismo modelo y una marca. Se obtiene a partir de diez medidas utilizando la ecuación (2.7).

Los periodos para determinar la desviación histórica lo determina el jefe encargado del laboratorio de metrología. Se recomienda que se estime la s_p cada vez que se disponga de un lote de medidores.

ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN LA PRUEBA DE EXACTITUD

En la siguiente tabla se encuentra resumida la evaluación de la incertidumbre. Los cálculos numéricos se encuentran en el Anexo C.

Prueba 1 (5%In RT fp=1)

Para esta prueba los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.

TABLA 5. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 1

Y:		Función de relación:					
e_x		$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	-	0,069	Normal	1	0,069	2
2	A_r	-	0,023	Normal	-1	-0,023	∞
3	E_{res}	0	0,0029	Rectangular	-1	-0,0029	∞
4	E_{der}	0	0,023	Rectangular	-1	-0,023	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			A_r		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 0,18%		$U_C: 0,077$			$V_{eff}: 2,969$		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 4,53			$U_{exp}: 0,349$		

Nota: Los valores de A y A_r no se muestran debido a que, el visualizador del banco (Cabezote foto sensible del Equipo de prueba de medidores), realiza la operación internamente e imprime el valor de e_x en porcentaje.

Prueba 2 (100%In RT fp=1)

Para esta prueba los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.

TABLA 6. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 2

Y:		Función de relación:					
e_x		$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	-	0,02	Normal	1	0,02	2
2	A_r	-	0,023	Normal	-1	-0,023	∞
3	E_{resol}	0	0,0029	Rectangular	-1	-0,0029	∞
4	E_{deriv}	0	0,023	Rectangular	-1	-0,023	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			A_r		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 0,27%		U _C : 0,038			V _{eff} : 26,25		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2,11			U _{exp} : 0,081		

Prueba 3 (100%In R fp=1)

Para esta prueba los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 7.

TABLA 7. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 3

Y:		Función de relación:					
e_x		$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	-	0,009	Normal	1	0,009	2
2	A_r	-	0,023	Normal	-1	-0,023	∞
3	E_{resol}	0	0,0029	Rectangular	-1	-0,0029	∞
4	E_{deriv}	0	0,023	Rectangular	-1	-0,023	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			A_r		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 0,25%		U _C : 0,034			V _{eff} : 436,35		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2			U _{exp} : 0,068		

Prueba 4 (100%In T fp=1)

Para esta prueba los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 8.

TABLA 8. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 4

Y:		Función de relación:					
e_x		$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	-	0,004	Normal	1	0,004	2
2	A_r	-	0,023	Normal	-1	-0,023	∞
3	E_{resol}	0	0,0029	Rectangular	-1	-0,0029	∞
4	E_{deriv}	0	0,023	Rectangular	-1	-0,023	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			A_r		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 0,25%		U _C : 0,033			V _{eff} : 6290,64		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2			U _{exp} : 0,066		

Prueba 5 (100%In RT fp=0,5 ind)

Para esta prueba los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 9.

TABLA 9. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 5

Y:		Función de relación:					
e_x		$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$					
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			A _r		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 0,19%		U _C : 0,037			V _{eff} : 198,15		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2			U _{exp} : 0,074		
N ^o	Magnitud de entrada X _i fuente de incertidumbre	Valor estimado x _i	Incertidumbre estándar u(x _i)	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c _i	Contribución u _i (y)	Grados de libertad V _{eff}
1	A	-	0,012	Normal	1	0,012	2
2	A _r	-	0,026	Normal	-1	-0,026	∞
3	E _{resol}	0	0,0029	Rectangular	-1	-0,0029	∞
4	E _{deriv}	0	0,023	Rectangular	-1	-0,023	∞

Prueba 6 600%ln RT fp=1

Para esta prueba los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 10.

TABLA 10. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA PRUEBA 6

Y:		Función de relación:					
e_x		$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	-	0,056	Normal	1	0,056	4
2	A_r	-	0,023	Normal	-1	-0,023	∞
3	E_{resol}	0	0,0029	Rectangular	-1	-0,0029	∞
4	E_{deriv}	0	0,023	Rectangular	-1	-0,023	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			A_r		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 0,22%		U _C : 0,065			V _{eff} : 7,137		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2,43			U _{exp} : 0,158		

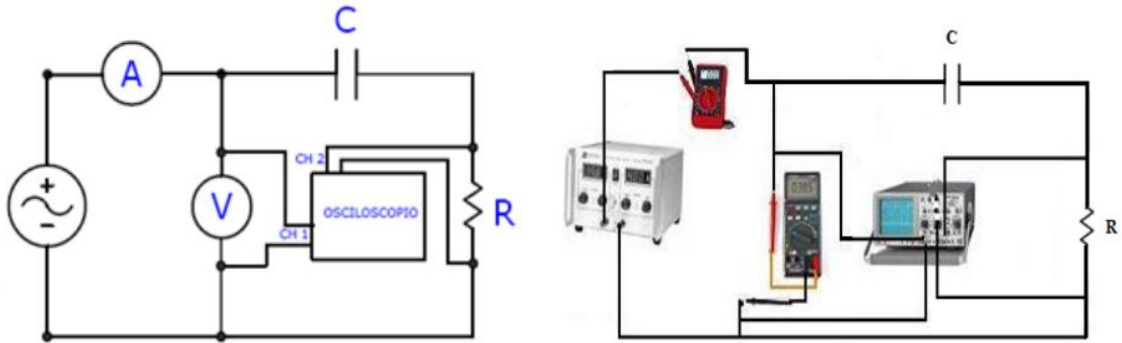
Análisis de resultados

Los resultados de las incertidumbres obtenidas en cada prueba son razonables y cumplen con las tolerancias del equipo que se encuentran en la norma NTC 4856. El método de calibración utilizado es por comparación directa del medidor objeto de prueba y el patrón trifásico. El equipo utilizado para la calibración del medidor objeto de prueba esta trazado con Patrones Nacionales de las magnitudes respectivas. Las condiciones ambientales del laboratorio durante las pruebas fueron las siguientes. Temperatura de 24,70 Grados Celsius. Humedad 61,90% HR. Presión Atmosférica 905,5 mbar.

4.2 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN EL LABORATORIO DE MEDICIONES ELÉCTRICAS BÁSICAS DE LA UIS

El siguiente ejemplo es un experimento de carácter académico que se realizó en el laboratorio de mediciones eléctricas de la UIS. Se desea estimar el valor de la impedancia del circuito mostrado en la Figura 7, estimando el valor de la resistencia y la reactancia capacitiva del mismo. Los instrumentos de medida utilizados son un multímetro digital utilizado en la escala de tensión A.C, un multímetro analógico-digital usado en la escala de corriente A.C y un osciloscopio. Los cálculos detallados para el caso en consideración y las especificaciones técnicas de estos instrumentos se encuentran en el Anexo D.

Figura 7. Diagrama del circuito.



Fuente: [6]

R: Resistencia eléctrica

C: Condensador

En la Tabla 11 se registran los datos obtenidos con los tres instrumentos

TABLA 11. REGISTRO DE LAS OBSERVACIONES DEL CASO 2.

# Medida	Vóltmetro [V]	Ampérmetro [mA]	Desfase		
			[ms]	$\angle\theta^\circ$	[rad]
1	7,20	2,71	3,9	84,24	1,4703
2	7,19	2,71	3,9	84,24	1,4703
3	7,18	2,70	4,0	86,40	1,5079
4	7,21	2,69	4,0	86,40	1,5079
5	7,23	2,70	4,0	86,40	1,5079
Promedio	7,202	2,702	3,96	85,54	1,4928

La tensión y la corriente son valores eficaces y el ángulo θ es el desfase entre la onda de tensión y la onda de corriente de la impedancia.

Para este caso los resultados obtenidos para la resistencia se muestran en la Tabla 12.

TABLA 12. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA RESISTENCIA

Y:		Función de relación:					
R		$R = \frac{V}{I} \cos \theta$					
N°	Magnitud de entrada X_i	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	V	7,202 V	8,599E-3 V	Normal	28,837	0,2479	4
2	I	2,702 mA	3,74138 μ A	Normal	-76862,79	-0,2876	4
3	θ	1,4928 rad	9,208E-3 rad	Normal	-2657,33	-24,469	4
4	$E_{resol V}$	0	2,8867 mV	Rectangular	28,837	0,08324	∞
5	$E_{exact V}$	0	0,050585 V	Rectangular	28,837	1,4587	∞
6	$E_{resol A}$	0	0,28867 μ A	Rectangular	-76862,79	-0,02218	∞
7	$E_{exact A}$	0	0,04072 mA	Rectangular	-76862,79	-3,1298	∞
8	$E_{exact O}$	0	0,08618E-3 rad	Rectangular	-2657,3	-0,229	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables	V, I		V, θ		I, θ		
Covarianza	-55E-9 V*A		0,1316E-3 V*rad		-0,1504E-6 A*rad		
Coef de correlación	-0,34187		0,33237		-0,87312		
y: 207,68 Ω		U _C : 24,38 Ω		V _{eff} : 4,16353 \approx 4			
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2,87		U _{exp} : 69,97 Ω			

Los resultados obtenidos para la reactancia capacitiva se muestran en la Tabla 13.

TABLA 13. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA REACTANCIA CAPACITIVA

Y:		Función de relación:					
X_C		$X_C = \frac{V}{I} \operatorname{sen} \theta$					
N°	Magnitud de entrada X_i	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad v_{eff}
1	V	7,202 V	8,599E-3 V	Normal	368,97	3,1727	4
2	I	2,702 mA	3,74138 μA	Normal	-983467,66	-3,6795	4
3	θ	1,4928 rad	9,208E-3 rad	Normal	207,68	1,9123	4
4	$E_{\text{resol } V}$	0	2,8867 mV	Rectangular	368,97	1,0651	∞
5	$E_{\text{exact } V}$	0	0,050585 V	Rectangular	368,97	18,664	∞
6	$E_{\text{resol } A}$	0	0,28867 μA	Rectangular	-983467,66	-0,28389	∞
7	$E_{\text{exact } A}$	0	0,04072 mA	Rectangular	-983467,66	-40,0468	∞
8	$E_{\text{exact } \theta}$	0	0,08618E-3 rad	Rectangular	207,68	0,01789	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables	V, I		V, θ		I, θ		
Covarianza	-55E-9 V*A		0,1316E-3 V*rad		-0,1504E-6 A*rad		
Coef de correlación	-0,34187		0,33237		-0,87312		
y: 2657,33 Ω		U _C : 44,77 Ω		V _{eff} : 6043,22			
Nivel de confianza: 95,45%		k: 2		U _{exp} : 89,54 Ω			

Análisis de resultados

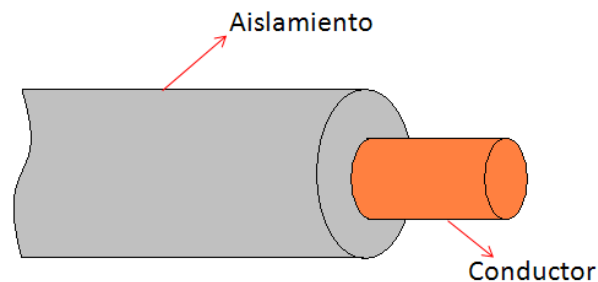
En el laboratorio de mediciones de la UIS las incertidumbres estimadas para la resistencia y la reactancia son altas debido a que algunas variables como la temperatura y humedad no están controladas y no se consideraron en el modelo planteado. Además, la clase de los instrumentos utilizados no era la

adecuada en el proceso de medición, debido a que las medidas obtenidas dan idea de que los datos son repetibles por lo que la incertidumbre tipo A es pequeña en comparación con la incertidumbre tipo B. Sin embargo, el objetivo de esta prueba fue la de aplicar el procedimiento de obtención de la incertidumbre y mostrar el resultado desde la óptica académica aplicando la metodología de la GUM.

4.3 LABORATORIO DE ENSAYOS DE CONDUCTORES ELÉCTRICOS

En este laboratorio se realizan ensayos para probar el óptimo estado o deficiencia de conductores eléctricos que son comercializados en el mercado. En la Figura 8 se muestra el conductor sometido a ensayo.

Figura 8. Conductor aislado para ensayo.

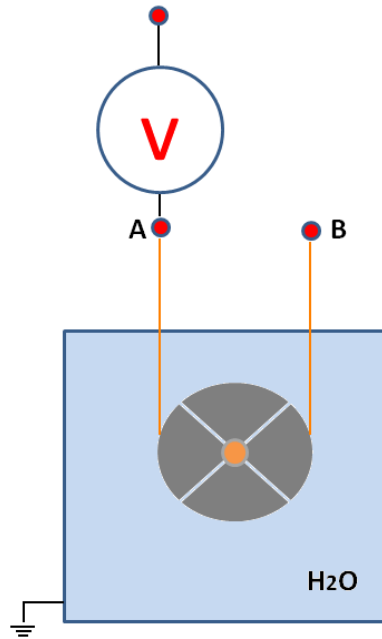


Fuente: Autores

PROCESO DEL ENSAYO

El ensayo se desarrolla según el método especificado en la norma NTC 3203 “NORMA GENERAL PARA ALAMBRES, CABLES Y CORDONES FLEXIBLES ELECTRICOS”. El carrete donde se encuentra el conductor enrollado es sumergido en un estanque de agua que se encuentra conectado a un sistema de puesta a tierra con el fin de cubrir toda la superficie del conductor dejando los extremos por fuera del agua. Al aplicar tensión en uno de los extremos se busca observar la resistencia del aislamiento frente a la corriente que circula por el cable. La corriente tenderá a ir hacia afuera del conductor (hacia el agua que lo rodea). Si el aislamiento soporta el flujo de corriente por un determinado tiempo según la norma, el conductor habrá pasado la prueba. Si el aislamiento no resiste la prueba, se perforará y se observará una chispa. En la Figura 9 se presenta el esquema de conexión del conductor y en la Figura 10 una fotografía del carrete sumergido en el estanque.

Figura 9. Esquema de la conexión.



Fuente: Autores

Figura 10. Carrete sumergido en el estanque.



Fuente: Autores

El ensayo se realiza mediante dos pruebas

- 1) Tensión eléctrica aplicada: Se debe informar la tensión aplicada con su respectiva incertidumbre. Debido a esto, se tendrá una fuente de

incertidumbre debido a la repetibilidad de las tensiones aplicadas y las aportadas por el instrumento que mide esta tensión.

- 2) Resistencia de aislamiento: Puede suceder que en la prueba a simple vista no se observe ninguna chispa, pero internamente, en el carrete pudo haber perforación del aislamiento luego puede existir un corto circuito en el cable. Para salir de dudas se realiza una segunda prueba. Se conecta un medidor (Megohmetro) en los terminales del cable para medir la resistencia del mismo. Se aplica una tensión V y una corriente I conocidas y por ley de ohm se determina R . Si el cable no tuvo perforaciones, el Megohmetro indicará una resistencia¹³. Si este presento rompimiento interno, el Megohmetro indicará 0Ω lo que significa que hubo un corto circuito y el cable no habrá pasado la prueba.

La resistencia de aislamiento depende de tres magnitudes de entrada las cuales son:

- Resistencia medida: Se determina de acuerdo al número de medidas registradas y el equipo con que se mide la resistencia.
- Temperatura de la prueba: La prueba se debe llevar a una temperatura de referencia que según la NTC 3203 es de $15,6^{\circ}\text{C}$ o a una de 20°C mediante factores de corrección. Normalmente la temperatura del agua del laboratorio oscila entre los 26°C y los 28°C . En el informe del ensayo se reporta a una temperatura de 20°C .
- Longitud del conductor: Se mide la longitud del cable para cada observación registrada.

Al final se reporta la tensión aplicada y la resistencia de aislamiento

$$Y_1 = V \pm U$$

$$Y_2 = R \pm U$$

- Una vez conocido el proceso de ensayo, se muestran los resultados obtenidos al realizar la prueba en un cable tipo XLPE.

En las Tablas 14, 15, 16, 17, 18 y 19 se muestran los resultados de la estimación de la incertidumbre para la tensión, resistencia medida, temperatura y longitud del cable. Los cálculos detallados se encuentran en el Anexo E.

¹³ Para cables de tipo PVC el orden está entre los $250 \text{ M}\Omega$ y si son de tipo XLPG está en el orden de los $250 \text{ T}\Omega$.

MEDICIÓN DE LA TENSIÓN ELÉCTRICA APLICADA AL CABLE

TABLA 14. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA TENSIÓN ELÉCTRICA DEL CABLE

Y:		Función de relación:					
V		$V = A - E_{patrón} - E_{exact} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coeficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	8000	0	Normal	1	0	19
2	$E_{patrón}$	0	3,68E+01 V	Normal	-1	- 3,68E+01	200
3	E_{res}	0	2,89E+01 V	Rectangular	-1	- 2,89E+01	∞
4	E_{exact}	0	4,68E+01 V	Rectangular	-1	- 4,68E+01	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A			$E_{patrón}$		
Covarianza		0			0		
Coef de correlación		0			0		
y: 8000 V		U _C : 66,12 V			V _{eff} : 2092,48		
Nivel de confianza: 95,45%		k: 1,98			U _{exp} : 130,92 V		

MEDICIÓN DE LA RESISTENCIA DE AISLAMIENTO

TABLA 15. REGISTRO DE LAS OBSERVACIONES

Mediciones Realizadas			
#	Valor (MΩ)	t (°C)	L (Km)
1	34234,00	27,3	0,999
2	33380,00	27,3	0,999
3	33076,00	27,3	0,999
4	33154,00	27,3	0,999
5	34672,00	27,3	0,999
6	33178,00	27,3	0,999
7	34798,00	27,3	0,999
8	33946,00	27,3	0,998
9	33362,00	27,4	0,999
10	34180,00	27,3	0,999
11	33904,00	27,3	0,999
12	33732,00	27,3	0,999
13	33274,00	27,3	0,999
14	33902,00	27,3	0,999
15	34156,00	27,3	0,999
16	33244,00	27,3	0,999
17	33590,00	27,3	0,999
18	34474,00	27,3	0,999
19	33802,00	27,3	0,999
20	33070,00	27,3	0,999
Prom	33756,40	27,31	0,999
Des.est	539,918746	0,02236068	0,000223607
#medidas	20	20	20

Resistencia medida R_m

TABLA 16. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA RESISTENCIA MEDIDA.

Y:		Función de relación:					
R_m		$R_m = A - E_{patrón} - E_{exact} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}

1	A	33756,4	1,207E+2	Normal	1	1,207E+2	19
2	$E_{patrón}$	0	3,000E-2	Normal	-1	-3,000E-2	200
3	E_{resol}	0	2,887E-3	Rectangular	-1	-2,887E-3	∞
4	E_{exact}	0	9,745E+2	Rectangular	-1	- 9,745E+2	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A		$E_{patrón}$			
Covarianza		0		0			
Coef de correlación		0		0			
y: 33756,4			U _C : 981,9136406		V _{eff} : 83136,77		
Nivel de confianza: 95,45%			k: 1,98		U _{exp} : 1944,189008		

Medición de la temperatura del agua

TABLA 17. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA TEMPERATURA

Y:		Función de relación:					
T		$T = A - E_{patrón} - E_{exact} - E_{res}$					
N ^o	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	27,31	5,000E-03	Normal	1	5,000E-03	19
2	$E_{patrón}$	0	0,0385000	Normal	-1	-0,0385000	200
3	E_{res}	0	0,0028867	Rectangular	-1	-0,0028867	∞
4	E_{exact}	0	0,4729364	Rectangular	-1	-0,4729364	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A		$E_{patrón}$			
Covarianza		0		0			
Coef. de correlación		0		0			
y: 27,31 °C		U _C : 0,47453608 °C		V _{eff} : 4,6E+6			
Nivel de confianza: 95,45%		k: 1,98		U _{exp} : 0,94 °C			

Medición de la longitud

TABLA 18. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LONGITUD DEL CABLE

Y:		Función de relación:					
L		$L = A - E_{patrón} - E_{exact} - E_{res}$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	A	0,999	5,000E-05	Normal	1	5,000E-05	19
2	$E_{patrón}$	0		Normal	-1		200
3	E_{resol}	0	0,28867513	Rectangular	-1	- 0,28867513	∞
4	E_{exact}	0	0,00230698	Rectangular	-1	- 0,00230698	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		A		$E_{patrón}$			
Covarianza		0		0			
Coef de correlación		0		0			
y: 0,999 km			U _C : 0,002325 km		V _{eff} : 88908348		
Nivel de confianza: 95,45%			k: 1,98		U _{exp} : 0,0046 km		

Medición de la resistencia de aislamiento

TABLA 19. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARA LA RESISTENCIA DE AISLAMIENTO.

Y:		Función de relación:					
R_a		$R_a = R_m * L * F_C$					
N°	Magnitud de entrada X_i fuente de incertidumbre	Valor estimado x_i	Incertidumbre estándar $u(x_i)$	Tipo de distribución	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución $u_i(y)$	Grados de libertad V_{eff}
1	R_m	33756,4	981,913641	Normal	1,858047	1824,44169	19
2	L	0,999	0,002325	Normal	72786,904	169,229543	200
3	F_C	1,86	0	Normal	0	0	∞
Correlación de las variables de entrada							
Variables		R_m, t		t, L		R_m, L	
Covarianza		-0,10378947		1,31579E-08		-0,000498947	
Coef de correlación		-0,17193722		0,052631579		-0,082655417	
y: 62720,98		U _C : 1823,64756		V _{eff} : 82992,10933			
Nivel de confianza: 95,45%		k: 1,98		U _{exp} : 3610,82			

Análisis de resultados

En este ejemplo se estimó la incertidumbre combinada y expandida de cada magnitud de entrada de la resistencia de aislamiento. Después se toman las incertidumbres combinadas de esas magnitudes y se utilizan para estimar la incertidumbre expandida de la resistencia de aislamiento. Esta es otra forma de evaluar la incertidumbre sin la necesidad de integrar todo el cálculo de los resultados en un solo procedimiento¹⁴ como se hizo en el ejemplo 4.2. El valor obtenido de la resistencia de aislamiento es razonable en este tipo de ensayos para cables tipo XLPE.

¹⁴ Al evaluar la incertidumbre en un solo procedimiento de cálculo debe dar el mismo resultado que evaluar las incertidumbres combinadas de cada magnitud de entrada del modelo planteado y posteriormente utilizadas en la estimación de la incertidumbre del mensurando sometido a medición.

5. CONCLUSIONES

Una vez realizado el trabajo de grado, las conclusiones del mismo son las siguientes:

- Los objetivos propuestos fueron realizados satisfactoriamente, lo que permitió la elaboración de este documento que significa un aporte al estudio de la incertidumbre de medición que actualmente es un tema importante en los diferentes campos de desempeño de las ingenierías.
- Las distribuciones de probabilidad consideradas en el presente documento son simétricas respecto a su valor medio, lo que hace más sencillo los cálculos para la estimación de la incertidumbre de medición. Para las fuentes que generan incertidumbre, se debe asignar la distribución que mejor caracterice la variable aleatoria en estudio de acuerdo con la información que se tiene de esta.
- Los casos analizados en los diferentes laboratorios de metrología en donde se realizaron las prácticas dan un grado de confianza sobre el tema ya que la teoría sobre incertidumbre en la medición se sustenta en un proceso real donde se puede observar cómo se estima este parámetro. También cabe resaltar que el procedimiento para estimar la incertidumbre es el mismo por lo que se pueden realizar comparaciones si fuese necesario entre distintas entidades metrológicas.
- En aplicaciones metrológicas, de acuerdo al nivel confianza requerido en la medición, luego de haberse hecho un análisis detallado y garantizado el aseguramiento de algunas variables de entrada, se puede plantear un modelo que sea sencillo y de fácil comprensión y dejar un intervalo de incertidumbre más amplio a la medida para evitar así plantear un modelo complejo que contenga un gran número de variables de entrada y por ende sea poco entendible para la mayoría de personas. En el caso de calibración de instrumentos, esto puede representar un mayor tiempo en la realización del proceso, por lo que se controlan algunas variables de tal forma que las consideradas en el modelo final sean las que más contribuyen en la incertidumbre total.
- De acuerdo al estudio de la incertidumbre en la calibración de equipos de medida, es mejor que este sea preciso que exacto ya que la exactitud va asociada con el error, el cual se puede sumar o restar al valor mostrado por el equipo y así corregir la medida. Para la precisión, entre menor sea la dispersión de los valores medidos por el instrumento, menor es el intervalo de incertidumbre por repetibilidad de los datos.

- Entre mayor número de observaciones por prueba se realicen menor es la incertidumbre tipo A. La incertidumbre combinada se aproxima a la incertidumbre tipo A cuando la incertidumbre tipo A es dominante y la tipo B es insignificante.
- Se recomienda utilizar la metodología propuesta en la GUM cuando se considera que la magnitud de salida va ser caracterizada por medio de una distribución normal si los grados de libertad son infinitos o t-student si los grados de libertad son finitos con el propósito de establecer un intervalo de cobertura para la medida. En el caso en que el efecto de una magnitud o magnitudes de entrada que no sean normales predominen sobre las magnitudes que sean normales, la incertidumbre obtenida puede no ser un buen estimado para el mensurando. Si esto sucede, se debe buscar métodos alternativos para la evaluación de la incertidumbre.
- La metodología de la GUM garantiza el aseguramiento de la medida cuando se consideran modelos lineales ya que la incertidumbre combinada se estima a partir de una expansión de la serie de Taylor de primer orden.
- La realización de este documento fomentó el trabajo en equipo que resulta muy útil para analizar los temas tratados desde diferentes puntos de vista, fortaleciendo las habilidades de comprensión, tolerancia y desempeño para la vida profesional.
- Para trabajos futuros se podría analizar otras distribuciones de probabilidad como la trapezoidal, la chi-cuadrado, exponencial, gamma etc. y observar sus aplicaciones en la estimación de la incertidumbre de medida y otros métodos alternativos para la evaluación de la incertidumbre, como por ejemplo el método de Monte Carlo.

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] GTC-ISO-IEC99. Vocabulario Internacional de Metrología, conceptos fundamentales, generales y términos asociados (VIM).
- [2] SAENZ, Sifredo J; AVILA, Luis Font. Incertidumbre de la medición: teoría y práctica. Primera Edición. Consultores C.A. Maracay. Febrero (2001).
- [3] Box, G.E.P; Hunter W.G. Statics for experimenters. New York. (1978)
- [4] ISO /IEC Guide 98-3:2008/ Suppl-1, Uncertainty of Measurement. Part 3: Guide to the expression of Uncertainty in Measurement. (GUM: 1995)
- [5] Guía general para el aseguramiento de la medida. REASISTEME. Instituto Tecnológico de Castilla y León. España.
- [6] ORDÓÑEZ PLATA, Gabriel. Apuntes de Mediciones Eléctricas Disponible en internet: http://gavilan.uis.edu.co/~gaby/index_general.htm
- [7] PORRAS, Gerardo; ZIPAQUIRÁ Alvaro. “Expresión de incertidumbre en la calibración de equipos de medición de energía eléctrica”. En: *Superintendencia de Industria y Comercio*; p. 1-15
- [8] MONTGOMERY, Douglas C; RUNGER, George C. Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería. Edición, Mc-Graw-Hill. (1996)
- [9] Centro Nacional de Metrología (online), México. Disponible en internet: URL: [http:// www.cenam.mx](http://www.cenam.mx)
- [10] Centro Español de Metrología (online).Disponible en internet: URL: <http://www.cem.es>
- [11] BIPM/JCGM 2008 Evaluation of Measurement Data—Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement—Propagation of distributions using a Monte Carlo method (GUM S1).
- [12] Estimación de la incertidumbre en la determinación de la densidad del aire (online). Disponible en internet: URL: [http:// www.cenam.mx](http://www.cenam.mx)

7. ANEXOS

A. FUNDAMENTOS TEORICOS DE METROLOGÍA

Las siguientes definiciones son tomadas de la referencia [1,6] y son de gran importancia para el estudio de la incertidumbre de medida.

Metrología: Ciencia de las mediciones y sus aplicaciones.

Medición: Proceso que consiste en obtener experimentalmente uno o varios valores que pueden atribuirse razonablemente a una magnitud.

Principio de medición: Fenómeno que sirve como base de una medición.

Método de medición: Descripción genérica de la secuencia lógica de operaciones utilizadas en una medición.

Procedimiento de medición: Descripción detallada de una medición conforme a uno o más principios de medición y a un método de medición dado, basado en un modelo de medición y que incluye los cálculos necesarios para obtener un resultado de medición.

NOTA 1 Un procedimiento de medición se documenta habitualmente con suficiente detalle para que un operador pueda realizar una medición.

NOTA 2 Un procedimiento de medición puede incluir una incertidumbre de medición objetivo.

Mensurando: Mensurando, m. Magnitud que se desea medir.

NOTA 1 La especificación de un mensurando requiere el conocimiento de la naturaleza de la magnitud y la descripción del estado del fenómeno, cuerpo o sustancia cuya magnitud es una propiedad, incluyendo las componentes pertinentes y las entidades químicas involucradas.

NOTA 2 En la segunda edición del VIM y en la norma IEC 60050-300:2001, el mensurando está definido como "magnitud sujeta a medición".

NOTA 3 La medición, incluyendo el sistema de medición y las condiciones bajo las cuales se realiza ésta, podría alterar el fenómeno, cuerpo o sustancia, de tal forma que la magnitud bajo medición puede diferir del mensurando. En este caso sería necesario efectuar la corrección apropiada.

Magnitud de influencia: Magnitud que, en una medición directa, no afecta a la magnitud que realmente se está midiendo, pero sí afecta a la relación entre la indicación y el resultado de medida.

Valor verdadero: Es un concepto idealizado, pero en términos prácticos se considera el patrón como el valor verdadero.

Valor convencional de una magnitud: Valor asignado a una magnitud, mediante un acuerdo, para un determinado propósito.

Exactitud de medición: Proximidad del acuerdo entre un valor medido y un valor verdadero de un mensurando.

NOTA 1 El concepto "exactitud de medición" no es una magnitud y no se expresa numéricamente. Se dice que una medición es más exacta cuanto más pequeño es el error de medición.

Condición de repetibilidad de una medición: Condición de medición, dentro de un conjunto de condiciones que incluye el mismo procedimiento de medición, los mismos operadores, el mismo sistema de medición, las mismas condiciones de operación y el mismo lugar, así como mediciones repetidas del mismo objeto o de un objeto similar en un periodo corto de tiempo.

Repetibilidad: Precisión de medición bajo un conjunto de condiciones de repetibilidad.

Condición de reproducibilidad: Condición de medición, dentro de un conjunto de condiciones que incluye diferentes lugares, operadores, sistemas de medición y mediciones repetidas de los mismos objetos u objetos similares.

Reproducibilidad: Precisión de medición bajo un conjunto de condiciones de reproducibilidad.

Precisión: Proximidad del acuerdo entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, o de objetos similares, bajo condiciones especificadas.

Incertidumbre: Parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un mensurando, a partir de la información que se utiliza.

NOTA 1 La incertidumbre de medición incluye componentes procedentes de efectos sistemáticos, tales como componentes asociadas a correcciones y a valores asignados a patrones, así como la incertidumbre debida a la definición. Algunas veces no se corrigen los efectos sistemáticos estimados y en su lugar se tratan como componentes de incertidumbre.

NOTA 2 El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación estándar, en cuyo caso se denomina incertidumbre estándar de medición (o un múltiplo de ella), o una semiamplitud con una probabilidad de cobertura determinada.

NOTA 3 En general, la incertidumbre de medición incluye numerosas componentes. Algunas pueden calcularse mediante una evaluación tipo A de la incertidumbre de medición, a partir de la distribución estadística de los valores que proceden de las series de mediciones y pueden caracterizarse por desviaciones estándares. Las otras componentes, que pueden calcularse mediante una evaluación tipo B de la incertidumbre de medición, puede caracterizarse también por desviaciones estándares, evaluadas a partir de

funciones de densidad de probabilidad basadas en la experiencia u otra información.

NOTA 4 En general, para una información dada, se sobrentiende que la incertidumbre de medición está asociada a un valor determinado atribuido al mensurando. Por tanto, una modificación de este valor supone una modificación de la incertidumbre asociada.

Error de medición: Diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia.

Error sistemático de medición: Componente del error de medición que, en mediciones repetidas, permanece constante o varía de manera predecible.

Error aleatorio de medición: Componente del error de medición que, en mediciones repetidas, varía de manera impredecible.

Instrumento de medición: Dispositivo destinado a ser utilizado para realizar una medición solo o en conjunto con dispositivos complementarios.

Medida materializada: Instrumento de medición que reproduce o proporciona de manera permanente durante su utilización, magnitudes de una o varias naturalezas, cada una de ellas con un valor asignado.

Intervalo nominal de indicaciones: Conjunto de valores comprendidos entre dos indicaciones extremas redondeadas o aproximadas, que se obtiene para una configuración particular de los controles del instrumento o sistema de medición y que sirve para designar dicha configuración.

Valor nominal: Valor redondeado o aproximado de una magnitud característica de un instrumento o sistema de medición, que sirve de guía para su utilización apropiada.

Instrumento de medición con dispositivo indicador: Instrumento de medición que produce una señal de salida con información sobre el valor de la magnitud medida.

Escala de un instrumento de medición con dispositivo visualizador: Parte de un instrumento visualizador, que consiste en un conjunto ordenado de marcas, eventualmente acompañadas de números o valores de la magnitud.

Intervalo de medición: Conjunto de los valores de magnitudes de una misma naturaleza que un instrumento o sistema de medición dado puede medir con una incertidumbre instrumental especificada, en unas condiciones determinadas.

Condición de régimen estacionario: Condición de funcionamiento de un instrumento o sistema de medición en la que la relación establecida por calibración permanece válida para un mensurando aún cuando éste varíe en función del tiempo.

Condición nominal de funcionamiento: Condición de funcionamiento que debe satisfacerse durante una medición para que un instrumento o un sistema de medición funcionen conforme a su diseño.

NOTA Las condiciones nominales de funcionamiento determinan generalmente intervalos de valores para la magnitud medida y para las magnitudes de influencia.

Condición límite de funcionamiento: Condición extrema que un instrumento o sistema de medición debe poder soportar sin que se dañen o degraden sus características metrológicas especificadas, cuando posteriormente se utilice en sus condiciones nominales de funcionamiento.

Resolución: Mínima variación de la magnitud medida que da lugar a una variación perceptible de la indicación correspondiente.

Resolución de un dispositivo visualizador: Mínima diferencia entre indicaciones visualizadas, que puede percibirse de forma significativa.

Estabilidad de un instrumento de medición: Aptitud de un instrumento de medición para conservar constantes sus características metrológicas a lo largo del tiempo.

NOTA La estabilidad puede expresarse cuantitativamente de varias formas.

EJEMPLO 1 Mediante un intervalo de tiempo en el curso del cual una característica metrológica varía una cantidad determinada.

EJEMPLO 2 Por la variación de una propiedad en un intervalo de tiempo determinado.

Deriva instrumental: Variación continua o incremental de una indicación a lo largo del tiempo, debida a variaciones de las características metrológicas de un instrumento de medición.

Clase de exactitud: Clase de instrumentos o sistemas de medición que satisfacen requisitos metrológicos determinados destinados a mantener los errores de medición o las incertidumbres instrumentales dentro de límites especificados, bajo condiciones de funcionamiento dadas.

NOTA 1 Una clase de exactitud habitualmente se indica mediante un número o un símbolo adoptado por convenio.

NOTA 2 El concepto de clase de exactitud se aplica a las medidas materializadas.

Error máximo tolerado: Valor extremo del error de medición, con respecto a un valor de referencia conocido, permitido por especificaciones o reglamentaciones, para una medición, instrumento o sistema de medición dado.

Error en un punto de control: Error de medición de un instrumento o sistema de medición, para un valor medido especificado.

Error en cero: Error en un punto de control, cuando el valor medido especificado es igual a cero.

NOTA No debe confundirse el error en cero con la ausencia de error de medición.

Patrón primario: Patrón establecido mediante un procedimiento de medición primario o creado como un objeto elegido por convenio.

Patrón secundario: Patrón establecido por medio de una calibración respecto a un patrón primario de una magnitud de la misma naturaleza.

Patrón de medición de referencia: Patrón designado para la calibración de patrones de magnitudes de la misma naturaleza, en una organización o lugar dado.

Trazabilidad metrológica: Propiedad de un resultado de medición por la cual el resultado puede relacionarse con una referencia mediante una cadena ininterrumpida y documentada de calibraciones, cada una de las cuales contribuye a la incertidumbre de medición.

Calibración: Operación que bajo condiciones especificadas establece, en una primera etapa, una relación entre los valores y sus incertidumbres de medición asociadas obtenidas a partir de los patrones de medición, y las correspondientes indicaciones con sus incertidumbres asociadas y, en una segunda etapa, utiliza esta información para establecer una relación que permita obtener un resultado de medición a partir de una indicación.

Ajuste de un sistema de medición: Conjunto de operaciones realizadas sobre un sistema de medición para que proporcione indicaciones prescritas, correspondientes a valores dados de la magnitud a medir.

NOTA 1 Diversos tipos de ajuste de un sistema de medición son: ajuste de cero, ajuste del desplazamiento y ajuste de la amplitud de escala (denominado también ajuste de la ganancia).

NOTA 2 No debe confundirse el ajuste de un sistema de medición con su propia calibración, que es un requisito para el ajuste.

NOTA 3 Después de su ajuste, generalmente un sistema de medición debe ser calibrado nuevamente.

Ajuste de cero de un sistema de medición: Ajuste de un sistema de medición para que éste proporcione una indicación nula cuando la magnitud a medir tenga valor cero.

Material de referencia: Material suficientemente homogéneo y estable con respecto a propiedades especificadas, establecido como apto para su uso previsto en una medición o en un examen de propiedades nominales.

Material de referencia certificado (MRC): Material de referencia acompañado por la documentación emitida por un organismo autorizado, que proporciona uno o varios valores de propiedades especificadas, con incertidumbres y trazabilidades asociadas, empleando procedimientos válidos.

Incertidumbre estándar de medición: Incertidumbre de medición expresada como una desviación estándar

Incertidumbre estándar combinada de medición: Incertidumbre estándar obtenida a partir de las incertidumbres estándar individuales asociadas a las magnitudes de entrada de un modelo de medición.

Incertidumbre expandida de medición: Producto de una incertidumbre estándar combinada y un factor mayor que uno.

NOTA 1 El factor depende del tipo de distribución de probabilidad de la magnitud de salida en un modelo de medición y de la probabilidad de cobertura elegida.

NOTA 2 El factor que interviene en esta definición es un factor de cobertura.

Intervalo de cobertura: Intervalo que contiene el conjunto de valores verdaderos de un mensurando con una probabilidad determinada, basada en la información disponible.

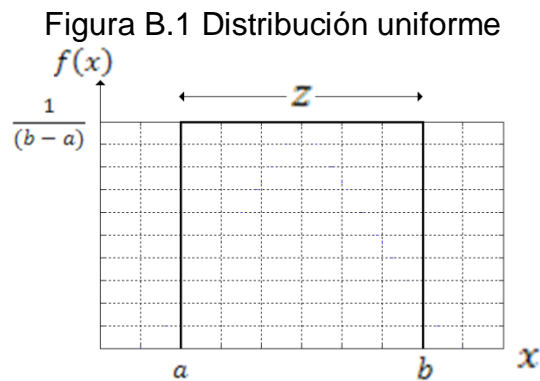
Probabilidad de cobertura: Probabilidad de que el conjunto de los valores verdaderos de un mensurando esté contenido en un intervalo de cobertura especificado.

Factor de cobertura: Número mayor que uno por el que se multiplica una incertidumbre estándar combinada para obtener una incertidumbre expandida.

B. DEMOSTRACIONES DE ECUACIONES

B.1 DISTRIBUCIÓN UNIFORME

La Figura B.1 muestra la gráfica de la distribución uniforme.



Una variable aleatoria tiene distribución uniforme en un intervalo $[a, b]$ si su función de densidad es constante en ese intervalo, es decir:

$$f(x) = \begin{cases} k & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a ; x > b \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_a^b kdx = 1 \Rightarrow k(b-a) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{(b-a)}$$

Definiendo

$$z = b - a$$

Se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{z} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a ; x > b \end{cases}$$

B.1.1 Cálculo de la media

$$\begin{aligned}\mu &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x * \frac{1}{z} dx = \frac{1}{z} \int_a^b x * dx = \frac{1}{z} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2z} (b^2 - a^2) \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2z} = \frac{z(b+a)}{2z} = \frac{b+a}{2} \\ \mu &= \frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

B.1.2 Cálculo de la varianza

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx \\ \sigma^2 &= \int_a^b (x - \mu)^2 \frac{1}{z} dx = \frac{1}{z} \left[\frac{(x - \mu)^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{3z} [(b - \mu)^3 - (a - \mu)^3] \\ &= \frac{1}{3z} \left[\left(b - \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3z} \left[\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)^3 - \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3z} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3z} \left[\left(\frac{z}{2} \right)^3 - \left(\frac{-z}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3z} \left[\frac{z^3}{8} + \frac{z^3}{8} \right] = \frac{1}{3z} \left[\frac{z^3}{4} \right] = \frac{z^2}{12} \\ \sigma^2 &= \frac{z^2}{12}\end{aligned}$$

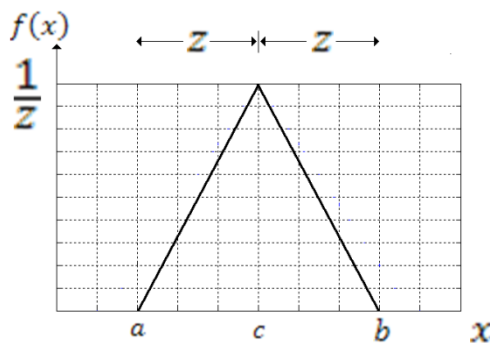
B.1.3 Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{z}{\sqrt{12}} = \frac{z}{\sqrt{2^2 * 3}} = \frac{z}{2\sqrt{3}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

B.2 DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR

La Figura B.2 muestra la gráfica de la distribución triangular simétrica.

Figura B.2 Distribución triangular simétrica



Definiendo

$$b - a = 2z \quad , \quad z = \frac{b - a}{2}$$

De acuerdo con estos valores, las ecuaciones de las dos rectas de esta distribución son:

Ecuación de la recta 1 (pendiente positiva)

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{z} - 0}{c - a} = \frac{1}{z(c - a)}$$

En $(a, 0)$

$$0 = \frac{a}{z(c - a)} + k \quad , \quad k = \frac{-a}{z(c - a)}$$

$$f(x)_1 = \frac{x}{z(c - a)} - \frac{a}{z(c - a)} = \frac{x - a}{z(c - a)} = \frac{x - a}{\frac{(b - a)}{2}(c - a)} = \frac{2(x - a)}{(b - a)(c - a)}$$

$$f(x)_1 = \frac{2(x - a)}{(b - a)(c - a)} \quad a \leq x \leq c$$

Ecuación de la recta 2 (pendiente negativa)

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - \frac{1}{z}}{b - c} = \frac{-1}{z(b - c)}$$

En $(b, 0)$

$$0 = \frac{-b}{z(b - c)} + k, \quad k = \frac{b}{z(b - c)}$$

$$f(x)_2 = \frac{-x}{z(b - c)} + \frac{b}{z(b - c)} = \frac{b - x}{z(b - c)} = \frac{b - x}{\frac{(b - a)}{2}(b - c)} = \frac{2(b - x)}{(b - a)(b - c)}$$

$$f(x)_2 = \frac{2(b - x)}{(b - a)(b - c)} \quad c \leq x \leq b$$

B.2.1 Cálculo de la media

$$\begin{aligned} \mu &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^c \frac{x * 2(x - a)}{(b - a)(c - a)} dx + \int_c^b \frac{x * 2(b - x)}{(b - a)(b - c)} dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \int_a^c x(x - a) dx + \frac{2}{(b - a)(b - c)} \int_c^b x(b - x) dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \int_a^c (x^2 - ax) dx + \frac{2}{(b - a)(b - c)} \int_c^b (bx - x^2) dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^c + \frac{2}{(b - a)(b - c)} \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_c^b \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{c^3}{3} - \frac{ac^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} \right] + \frac{2}{(b - a)(b - c)} \left[\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{bc^2}{2} + \frac{c^3}{3} \right] \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{a^3}{6} - \frac{ac^2}{2} + \frac{c^3}{3} \right] + \frac{2}{(b - a)(b - c)} \left[\frac{b^3}{6} - \frac{bc^2}{2} + \frac{c^3}{3} \right] \\ &= \frac{1}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{a^3}{3} - ac^2 + \frac{2c^3}{3} \right] + \frac{1}{(b - a)(b - c)} \left[\frac{b^3}{3} - bc^2 + \frac{2c^3}{3} \right] \\ &= \frac{1}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{a^3}{3} - \frac{3ac^2}{3} + \frac{2c^3}{3} \right] + \frac{1}{(b - a)(b - c)} \left[\frac{b^3}{3} - \frac{3bc^2}{3} + \frac{2c^3}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3(b-a)(c-a)} [a^3 - 3ac^2 + 2c^3] + \frac{1}{3(b-a)(b-c)} [b^3 - 3bc^2 + 2c^3] \\
&= \frac{1}{3(b-a)(c-a)} [a^3 - ac^2 - 2ac^2 + 2c^3 + ca^2 - ca^2] \\
&+ \frac{1}{3(b-a)(b-c)} [b^3 - bc^2 - 2bc^2 + 2c^3 + cb^2 - cb^2] \\
&= \frac{1}{3(b-a)(c-a)} [(a^2 + ca - 2c^2)a - (a^2 + ac - 2c^2)c] \\
&+ \frac{1}{3(b-a)(b-c)} [(b^2 + cb - 2c^2)b - (b^2 + bc - 2c^2)c] \\
&= \frac{1}{3(b-a)(c-a)} [(a^2 + ca - 2c^2)(a - c)] \\
&+ \frac{1}{3(b-a)(b-c)} [(b^2 + cb - 2c^2)(b - c)] \\
&= \frac{(a^2 + ca - 2c^2)}{3(a-b)} - \frac{(b^2 + cb - 2c^2)}{3(a-b)} \\
&= \frac{a^2 + ca - 2c^2 - b^2 - cb + 2c^2}{3(a-b)} \\
&= \frac{a^2 + ca - b^2 - cb}{3(a-b)} \\
&= \frac{a^2 - b^2 + (a-b)c}{3(a-b)} \\
&= \frac{(a+b)(a-b) + (a-b)c}{3(a-b)} \\
\mu &= \frac{a+b+c}{3}
\end{aligned}$$

Si la densidad de probabilidad es simétrica

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$\mu = \frac{a+b + \frac{a+b}{2}}{3} = \frac{3(a+b)}{6} = \frac{a+b}{2} = c$$

B.2.2 Cálculo de la varianza

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_a^b (x - \mu)^2 p(x) dx = \int_a^c \frac{(x - \mu)^2 * 2(x - a)}{(b - a)(c - a)} dx + \int_c^b \frac{(x - \mu)^2 * 2(b - x)}{(b - a)(b - c)} dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \int_a^c (x - \mu)^2 * (x - a) dx + \frac{2}{(b - a)(b - c)} \int_c^b (x - \mu)^2 (b - x) dx\end{aligned}$$

Parte 1: Resolviendo la primera integral.

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \int_a^c (x^2 - 2x\mu + \mu^2) * (x - a) dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \int_a^c (x^3 - 2\mu x^2 + x\mu^2 - ax^2 + 2a\mu x - a\mu^2) dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \int_a^c (x^3 - (2\mu + a)x^2 + (\mu^2 + 2a\mu)x - a\mu^2) dx \\ &= \frac{2}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{x^4}{4} - (2\mu + a) \frac{x^3}{3} + (\mu^2 + 2a\mu) \frac{x^2}{2} - a\mu^2 x \right]_a^c \\ &= \frac{1}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{c^4}{2} - 2(2\mu + a) \frac{c^3}{3} + (\mu^2 + 2a\mu)c^2 - 2a\mu^2 c - \frac{a^4}{2} + 2(2\mu + a) \frac{a^3}{3} \right. \\ &\quad \left. - (\mu^2 + 2a\mu)a^2 + 2a^2\mu^2 \right] \\ &= \frac{1}{(b - a)(c - a)} \left[\frac{c^4}{2} - \frac{4}{3}\mu c^3 - \frac{2}{3}ac^3 + 2a\mu c^2 + \mu^2 c^2 - 2a\mu^2 c - \frac{a^4}{2} + \frac{4}{3}\mu a^3 + \frac{2}{3}a^4 \right. \\ &\quad \left. - 2\mu a^3 - \mu^2 a^2 + 2\mu^2 a^2 \right] \\ &= \frac{6}{6(b - a)(c - a)} \left[\frac{c^4}{2} - \frac{4}{3}\mu c^3 - \frac{2}{3}ac^3 + 2a\mu c^2 + \mu^2 c^2 - 2a\mu^2 c + \frac{a^4}{6} - \frac{2}{3}\mu a^3 \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 a^2 \right] \\ &= \frac{1}{6(b - a)(c - a)} [3c^4 - 8\mu c^3 - 4ac^3 + 12a\mu c^2 + 6\mu^2 c^2 - 12a\mu^2 c + a^4 - 4\mu a^3 \\ &\quad + 6\mu^2 a^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6(b-a)(c-a)} [3c^4 - 8\mu c^3 - ac^3 - 3ac^3 + 4a\mu c^2 + 8a\mu c^2 + 6\mu^2 c^2 - 6a\mu^2 c \\
&\quad - 6a\mu^2 c + a^4 - 4\mu a^3 + 6\mu^2 a^2 + ca^3 - ca^3 + a^2 c^2 - a^2 c^2 + 4c\mu a^2 \\
&\quad - 4c\mu a^2] \\
&= \frac{1}{6(b-a)(c-a)} [(a^3 + ca^2 - 4\mu a^2 + ac^2 - 4\mu ca + 6a\mu^2 - 3c^3 + 8\mu c^2 - 6c\mu^2)a \\
&\quad - (a^3 + ca^2 - 4\mu a^2 + ac^2 - 4\mu ca + 6a\mu^2 - 3c^3 + 8\mu c^2 - 6c\mu^2)c] \\
&= \frac{1}{6(b-a)(c-a)} [(a^3 + ca^2 - 4\mu a^2 + ac^2 - 4\mu ca + 6a\mu^2 - 3c^3 + 8\mu c^2 \\
&\quad - 6c\mu^2)(a - c)] \\
&= \frac{a^3 + ca^2 - 4\mu a^2 + ac^2 - 4\mu ca + 6a\mu^2 - 3c^3 + 8\mu c^2 - 6c\mu^2}{6(a-b)} \\
&= \frac{a^3 + a^2(c - 4\mu) + a(c^2 - 4\mu c + 6\mu^2) - c(3c^2 - 8\mu c + 6\mu^2)}{6(a-b)}
\end{aligned}$$

Pero

$$\mu = \frac{a + b + c}{3}$$

Reemplazando nos da

$$= \frac{a^3 - 3ca^2 + a(2b^2 - 4bc + 5c^2) - c(2b^2 - 4bc + 3c^2)}{18(a-b)}$$

Parte 2: Resolviendo la segunda integral de igual forma que en el caso anterior

$$\frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_c^b (x^2 - 2x\mu + \mu^2) * (b-x) dx$$

Nos da

$$= - \left[\frac{b^3 + b^2(c - 4\mu) + b(c^2 - 4\mu c + 6\mu^2) - c(3c^2 - 8\mu c + 6\mu^2)}{6(a-b)} \right]$$

Pero

$$\mu = \frac{a + b + c}{3}$$

Reemplazando nos da

$$= - \frac{(2a^2 - 4ac + b^2 - 2bc + 3c^2)(b-c)}{18(a-b)}$$

Sumando los resultados

$$\sigma^2 = \text{parte 1} + \text{parte 2}$$

$$\sigma^2 = \frac{a^3 - 3ca^2 + a(2b^2 - 4bc + 5c^2) - c(2b^2 - 4bc + 3c^2)}{18(a-b)} - \frac{(2a^2 - 4ac + b^2 - 2bc + 3c^2)(b-c)}{18(a-b)}$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2 - a(b+c) + b^2 - bc + c^2}{18}$$

Si la densidad de probabilidad es simétrica, entonces

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2}{18} \\ &= \frac{a^2 - ab - a\left(\frac{a+b}{2}\right) + b^2 - b\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a+b)^2}{4}}{18} \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{3(a^2 - 2ab + b^2)}{4 * 18} = \frac{(a-b)^2}{4 * 6} = \frac{(b-a)^2}{24}$$

B.2.3 Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{a^2 - a(b+c) + b^2 - bc + c^2}{18}}$$

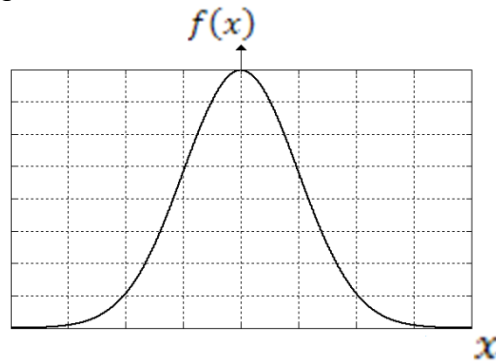
Si la densidad de probabilidad es simétrica, entonces

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{b-a}{\sqrt{24}} = \frac{b-a}{\sqrt{2^2 * 6}} = \frac{b-a}{2\sqrt{6}} = \frac{z}{\sqrt{6}}$$

B.3 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

La Figura B.3 muestra la gráfica de la distribución normal estándar.

Figura B.3 Distribución normal estándar



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Para que esta función sea una densidad de probabilidad, debe satisfacer dos criterios:

- $f(x) \geq 0$ (trivial)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Para la demostración de la segunda condición se debe tener en cuenta:

- Integral de gauss:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Se calcula en \mathbb{R}^2 por integración doble, para después hacer un cambio a coordenadas polares y obtener su valor. Por el teorema de Fubini se tiene:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) * \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 ; \text{ si } x = y$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) * \left(\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \right) \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr ; \quad u = r^2 \quad du = 2r dr \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \pi[-e^{-u}]_0^{+\infty} = \pi(0 - (-1)) = \pi$$

Entonces:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi ; \text{ cuando } x = y.$$

Por lo que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- Función gamma

En términos de la función gamma, también se puede expresar el resultado anterior de la siguiente forma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} Z^{\alpha-1} e^{-z} dz ; \quad \alpha > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Haciendo

$$z = x^2 \quad dz = 2x dx \quad x = \sqrt{z} \quad dx = \frac{dz}{2x} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} * Z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \int_0^{+\infty} Z^{\frac{1}{2}-1} e^{-z} dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, comprobemos el segundo criterio para la distribución normal.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Haciendo:

$$t = \frac{x^2}{2} ; dt = x dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\pi}) = 1$$

Por lo que, la ecuación (3.23) es la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria normal estándar.

B.3.1 Cálculo de la media

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Haciendo

$$t = \frac{x^2}{2} ; dt = x dx$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

B.3.2 Cálculo de la varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Integrando por partes:

$$u = x ; du = dx$$

$$dw = x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ; w = \int x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\sigma^2 = u * w - \int w * du$$

$$\sigma^2 = \left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 + 1 = 1$$

B.3.3 Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1$$

C. DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS DEL CASO 1

C.1 PRUEBA 1 (5%In RT fp=1)

$$0,05 \cdot 10 \text{ A} = 0,5 \text{ A}$$

Identificación del mensurando

Se desea estimar el error entre la energía registrada por el medidor y la energía enviada por el patrón de calibración.

El patrón que se utiliza para la calibración es proporcional a la frecuencia es decir, emite mayor cantidad de impulsos/segundo de acuerdo a la potencia suministrada, y la magnitud que se está midiendo y comparando es frecuencia dada en impulsos/segundo.

Se fijan valores de tensión, corriente, factor de potencia a especificaciones dadas. El patrón lo que hace es proporcionar a la energía que se le suministra una cantidad de impulsos, a través de una salida de frecuencia.

La comparación se realiza entre los impulsos enviados y los impulsos medidos por el objeto de prueba reportando un error en porcentaje.

Planteamiento del modelo matemático

$$e_x = A - A_r - E_{der} - E_{res}$$

Donde:

e_x : Error medido en porcentaje

A : Error en porcentaje de impulsos enviados e impulsos registrados por el objeto de prueba.

E_{der} : Error por deriva de patrón.

E_{res} : Error por resolución

A_r : Error del patrón.

En el laboratorio de calibración, el visualizador del patrón muestra el valor de e_x directamente, es decir, la operación se hace internamente.

Fuentes de incertidumbre a considerar

- Incertidumbre por repetibilidad en las mediciones.
- Incertidumbre del patrón
- Incertidumbre por resolución
- Incertidumbre por deriva

Cuantificación y distribución asociada a cada fuente

- Resolución

El visualizador del patrón que muestra el valor porcentual del error en cada medición tiene un número finito de cuentas, la incertidumbre por resolución se estima mediante la siguiente ecuación:

$$u_{resol} = \frac{\frac{resolución}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{resolución}{\sqrt{12}}$$

Existe una probabilidad del 50% de que el valor mostrado por el visualizador sea mayor o menor es decir, por ejemplo el valor 0,29 puede realmente ser cualquiera de los siguientes valores {0,286 0,287 0,288 0,289 0,290, 0,291 0,292 0,293 0,294}. Por lo tanto, al tenerse poca información acerca del comportamiento de la resolución del instrumento, le asignamos una distribución rectangular.

- Deriva

Se selecciona la variación más alta durante cada periodo de calibración. Por ejemplo, el PTB (Physikalisch Technische Bundesanstalt) cuando realiza la calibración de un patrón nacional de energía eléctrica reporta un error para cada punto de prueba acompañado de una incertidumbre expandida.

Ejemplo:

Para el punto con valor de tensión 120 V corriente 12 A; factor de potencia igual a uno y conexión trifásico balanceado se tienen los errores de calibración para cada año mostrados en la Tabla C.1.

TABLA C.1 CAMBIO DE LA EXACTITUD DEL PATRÓN A TRAVÉS DEL TIEMPO

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Error %	0,03	0,04	0,02	0,05	0,03	0,02
$ E_t - E_{t-1} $	0,03	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01

Donde:

E_t = error en el tiempo t.

E_{t-1} = error en el tiempo anterior t-1.

Estas calibraciones se realizan en el mes de enero de cada año. El caso propuesto en este documento es la calibración de un medidor con el patrón nacional en el mes de mayo del año 2010. Como no se tiene el valor de deriva a la fecha de calibración ya que no existe un modelo de deriva en función del tiempo, lo que se hace para estimar la incertidumbre por deriva es asignar una distribución rectangular con semi-ancho de la ventana igual a la diferencia del error de calibración máxima.

$$u_{deriva} = \frac{|E_t - E_{t-1}|_{m\acute{a}x}}{\sqrt{3}}$$

- Patrón

El patrón utilizado en la calibración de medidores de energía eléctrica tiene una cantidad definida de puntos de calibración. A su vez cada punto tiene un error específico y una incertidumbre asociada a la estimación de ese error con un nivel de confianza de 95,45 % para una distribución normal. La incertidumbre debida al patrón se puede obtener del certificado de calibración del mismo mediante la siguiente ecuación:

$$u_{patron} = \frac{U_{expup}}{k}$$

Donde

k= Factor t-student

U_{expup} : Incertidumbre expandida en el punto de prueba

Determinación de la incertidumbre estándar

Evaluación de la incertidumbre tipo A.

$$u_A = \frac{0,119}{\sqrt{3}} = 0,069$$

Para incertidumbre por repetibilidad los grados de libertad son, ecuación (4.13):

$$v = n - 1 = 3 - 1 = 2$$

Coeficientes de sensibilidad

$$C_1 = \frac{\partial e_x}{\partial E_{der}} = -1$$

$$C_2 = \frac{\partial e_x}{\partial E_{patrón}} = -1$$

$$C_3 = \frac{\partial e_x}{\partial E_{res}} = -1$$

$$C_4 = \frac{\partial e_x}{\partial E_{impul}} = 1$$

Evaluación de la incertidumbre tipo B.

Mediante la ecuación (4.9) se tiene:

$$U_B = \sqrt{0,023^2 + 0,023^2 + 0,0029^2} = 0,033$$

Estimación de la incertidumbre estándar combinada

Evaluación de la incertidumbre combinada, ecuación (4.11):

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,069^2 + 0,033^2} = 0,077$$

Estimación de la incertidumbre expandida

Evaluación de los grados efectivos de libertad, ecuación(4.12):

$$v_{eff} = \frac{U_C^4}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i^4}{v_i}} = \frac{U_C^4}{\frac{U_A^4}{2} + \frac{U_B^4}{\infty}} = \frac{0,77^4}{\frac{0,069^4}{2} + 0} = 2,969$$

Para el nivel de confianza de 95,45% $k = 4,53^{15}$

Evaluación de la incertidumbre expandida, ecuación (4.14):

$$U_{exp} = k * U_C = 4,53 * 0,077 = 0,349$$

¹⁵ Valor obtenido de la tabla T-Student del Anexo E.

Resultado de la medición

Por la ecuación (4.15):

$$e_x = 0,18 \pm 0,349 \%$$

Para las demás pruebas se sigue el mismo procedimiento. En forma resumida, se muestran los resultados de la evaluación de la incertidumbre para cada una de estas.

C.2 PRUEBA 2 (100%ln RT fp=1)

1*10 A =10 A

Evaluación de la incertidumbre tipo A.

$$U_A = \frac{0,034}{\sqrt{3}} = 0,02$$

Evaluación de la incertidumbre tipo B.

$$U_B = \sqrt{0,023^2 + 0,023^2 + 0,0029^2} = 0,033$$

Evaluación de la incertidumbre combinada:

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,020^2 + 0,033^2} = 0,038$$

Evaluación de los grados efectivos de libertad.

$$v_{eff} = \frac{U_C^4}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i^4}{v_i}} = \frac{U_C^4}{\frac{U_A^4}{2} + \frac{U_B^4}{\infty}} = \frac{0,038^4}{\frac{0,020^4}{2} + 0} = 26,25$$

Para el nivel de confianza de 95,45% $k=2,11$

Evaluación de la incertidumbre expandida.

$$U_{exp} = k * U_C = 2,11 * 0,038 = 0,081$$

$$e_x = 0,27 \pm 0,081 \%$$

C.3 PRUEBA 3 (100%ln R fp=1)

1*10 A =10 A

Evaluación de la incertidumbre tipo A.

$$U_A = \frac{0,0155}{\sqrt{3}} = 0,009$$

Evaluación de la incertidumbre tipo B.

$$U_B = \sqrt{0,023^2 + 0,023^2 + 0,0029^2} = 0,033$$

Evaluación de la incertidumbre combinada:

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,009^2 + 0,033^2} = 0,034$$

Evaluación de los grados efectivos de libertad.

$$v_{eff} = \frac{U_C^4}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i^4}{v_i}} = \frac{U_C^4}{\frac{U_A^4}{2} + \frac{U_B^4}{\infty}} = \frac{0,034^4}{\frac{0,009^4}{2} + 0} = 436,35$$

Para el nivel de confianza de 95,45% $k=2$

Evaluación de la incertidumbre expandida.

$$U_{exp} = k * U_C = 2 * 0,034 = 0,068$$

$$e_x = 0,25 \pm 0,068 \%$$

C.4 PRUEBA 4 (100%ln T fp=1)

1*10 A =10 A

Evaluación de la incertidumbre tipo A.

$$U_A = \frac{0,007}{\sqrt{3}} = 0,004$$

Evaluación de la incertidumbre tipo B.

$$U_B = \sqrt{0,023^2 + 0,023^2 + 0,0029^2} = 0,033$$

Evaluación de la incertidumbre combinada:

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,004^2 + 0,033^2} = 0,033$$

Evaluación de los grados efectivos de libertad.

$$v_{eff} = \frac{U_C^4}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i^4}{v_i}} = \frac{U_C^4}{\frac{U_A^4}{2} + \frac{U_B^4}{\infty}} = \frac{0,033^4}{\frac{0,004^4}{2} + 0} = 6290,64$$

Para el nivel de confianza de 95,45% $k=2$

Evaluación de la incertidumbre expandida.

$$U_{exp} = k * U_C = 2 * 0,033 = 0,066$$

$$e_X = 0,25 \pm 0,066 \%$$

C.5 PRUEBA 5 (100%ln RT fp=0,5 ind)

1*10 A =10 A

Evaluación de la incertidumbre tipo A.

$$U_A = \frac{0,02}{\sqrt{3}} = 0,012$$

Evaluación de la incertidumbre tipo B.

$$U_B = \sqrt{0,026^2 + 0,023^2 + 0,0029^2} = 0,035$$

Evaluación de la incertidumbre combinada:

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,012^2 + 0,035^2} = 0,037$$

Evaluación de los grados efectivos de libertad.

$$v_{eff} = \frac{U_C^4}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i^4}{v_i}} = \frac{U_C^4}{\frac{U_A^4}{2} + \frac{U_B^4}{\infty}} = \frac{0,037^4}{\frac{0,012^4}{2} + 0} = 198,15$$

Para el nivel de confianza de 95,45% $k=2$

Evaluación de la incertidumbre expandida.

$$U_{exp} = k * U_C = 2 * 0,037 = 0,074$$

$$e_X = 0,19 \pm 0,073 \%$$

C.6 PRUEBA 6 (600%ln RT fp=1)

6*10 A =60 A

Evaluación de la incertidumbre tipo A.

$$U_A = \frac{0,125}{\sqrt{5}} = 0,056$$

Para incertidumbre por repetibilidad los grados de libertad son:

$$v = n - 1 = 5 - 1 = 4$$

Evaluación de la incertidumbre tipo B.

$$U_B = \sqrt{0,023^2 + 0,023^2 + 0,0029^2} = 0,033$$

Evaluación de la incertidumbre combinada:

$$U_C = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = \sqrt{0,056^2 + 0,033^2} = 0,065$$

Evaluación de los grados efectivos de libertad.

$$v_{eff} = \frac{U_C^4}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i^4}{v_i}} = \frac{U_C^4}{\frac{U_A^4}{2} + \frac{U_B^4}{\infty}} = \frac{0,065^4}{\frac{0,056^4}{2} + 0} = 7,137$$

Para el nivel de confianza de 95,45% $k = 2,43$

Evaluación de la incertidumbre expandida.

$$U_{exp} = k * U_C = 2,43 * 0,065 = 0,158$$

$$e_x = 0,22 \pm 0,158 \%$$

D. DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS NÚMERICOS DEL CASO 2

D.1 IDENTIFICACIÓN DEL MENSURANDO

En este ejemplo se tienen dos mensurandos: la resistencia y la reactancia capacitiva de la impedancia.

Los valores promedios de las magnitudes de entrada X_i son:

$$\bar{V} = \frac{7,20 + 7,19 + 7,18 + 7,21 + 7,23}{5} = 7,202 \text{ V}$$

$$\bar{I} = \frac{2,71 + 2,71 + 2,70 + 2,69 + 2,70}{5} = 2,702 \text{ mA}$$

$$\bar{\theta} = \frac{1,4703 + 1,4703 + 1,5079 + 1,5079 + 1,5079}{5} = 1,4928 \text{ rad}$$

D.2 PLANTEAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO

El valor de la impedancia depende de las magnitudes de tensión y corriente que interactúan entre sí así como la frecuencia de la red de alimentación.

Se recomienda que el modelo matemático contenga factores de corrección de las magnitudes de entrada (errores).

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V} - E_V}{\bar{I} - E_I}$$

$$\bar{R} = \bar{Z} \cos(\bar{\theta} - E_\theta)$$

$$\bar{X}_c = \bar{Z} \text{sen}(\bar{\theta} - E_\theta)$$

Generalmente esos errores son pequeños que para este caso práctico los consideraremos como cero, lo que facilita el planteamiento de nuestro modelo para el mensurando.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

$$\bar{R} = \bar{Z} \cos \bar{\theta}$$

$$\bar{X}_c = \bar{Z} \text{sen} \bar{\theta}$$

D.3 FUENTES DE INCERTIDUMBRE A CONSIDERAR

Las fuentes de incertidumbre que se deben considerar en este caso son:

- Repetibilidad en las mediciones
- Exactitud del voltmetro
- Resolución del voltmetro
- Exactitud del ampermetro
- Resolución del ampermetro
- Exactitud del osciloscopio

D.4 CUANTIFICACIÓN Y DISTRIBUCIÓN ASOCIADA A CADA FUENTE

La incertidumbre por repetibilidad se la asigna una distribución T-Student debido a que se tiene un número pequeño de muestras.

Para los instrumentos de medición de cada variable de entrada, se les asigna una distribución rectangular porque no se conoce el comportamiento o cambio metrológico de cada uno de los parámetros de estos equipos.

Resumiendo lo anterior se tienen las fuentes de incertidumbre descritas en la Tabla D.1

TABLA D.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE EN CONSIDERACIÓN

Fuente	Valor	Distribución asignada	Cuantificación	Grados de libertad
Repetibilidad	S	Normal	$\frac{s}{\sqrt{n}}$	$n - 1$
Exactitud	E	rectangular	$\pm \frac{e}{\sqrt{3}}$	∞
Resolución	R	rectangular	$\frac{r}{\sqrt{12}}$	∞

D.5 DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR

Para la estimación de la incertidumbre se realizan los cálculos de las respectivas desviaciones expuestas en la Tabla D.2.

D.5.1 Evaluación de la Incertidumbre tipo A

TABLA D.2 CÁLCULOS DE DESVIACIONES RESPECTO AL VALOR MEDIO

$V_i - \bar{V}$		
$V_1 - \bar{V}$	$7,20 - 7,202$	-0,002
$V_2 - \bar{V}$	$7,19 - 7,202$	-0,012
$V_3 - \bar{V}$	$7,18 - 7,202$	-0,022
$V_4 - \bar{V}$	$7,21 - 7,202$	0,008
$V_5 - \bar{V}$	$7,23 - 7,202$	0,028
$I_i - \bar{I}$		
$I_1 - \bar{I}$	$2,71 - 2,702$	0,008
$I_2 - \bar{I}$	$2,71 - 2,702$	0,008
$I_3 - \bar{I}$	$2,70 - 2,702$	-0,002
$I_4 - \bar{I}$	$2,69 - 2,702$	-0,012
$I_5 - \bar{I}$	$2,70 - 2,702$	-0,002
$\theta_i - \bar{\theta}$		
$\theta_1 - \bar{\theta}$	$1,4703 - 1,4928$	-0,0225
$\theta_2 - \bar{\theta}$	$1,4703 - 1,4928$	-0,0225
$\theta_3 - \bar{\theta}$	$1,5079 - 1,4928$	0,0151
$\theta_4 - \bar{\theta}$	$1,5079 - 1,4928$	0,0151
$\theta_5 - \bar{\theta}$	$1,5079 - 1,4928$	0,0151

Se calculan las correspondientes desviaciones estándar

$$s(V) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} [(-0,002)^2 + (-0,012)^2 + (-0,022)^2 + (0,008)^2 + (0,028)^2]}$$

$$s(V) = 0,01923 V$$

$$s(I) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} [(0,008)^2 + (0,008)^2 + (-0,002)^2 + (0,012)^2 + (-0,002)^2]}$$

$$s(I) = 0,008366 * 10^{-3} A$$

$$s(\theta) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} [(-0,0225)^2 + (-0,0225)^2 + (0,0151)^2 + (0,0151)^2 + (0,0151)^2]}$$

$$s(\theta) = 0,02059 \text{ rad}$$

Calculo de las covarianzas

$$s(V, I) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^4 (V_i - \bar{V})(I_i - \bar{I})$$

$$= \frac{1}{4} [(-0,002)(0,008) + (-0,012)(0,008) + (-0,022)(-0,002) + (0,008)(-0,012) + (0,028)(-0,002)] * 10^{-3}$$

$$s(V, I) = -55 * 10^{-9} V * A$$

$$s(V, \theta) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^4 (V_i - \bar{V})(\theta_i - \bar{\theta})$$

$$= \frac{1}{4} [(-0,002)(-0,0225) + (-0,012)(-0,0225) + (-0,022)(0,0151) + (0,008)(0,0151) + (0,028)(0,0151)]$$

$$s(V, \theta) = 0,1316 * 10^{-3} V * rad$$

$$s(I, \theta) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^4 (I_i - \bar{I})(\theta_i - \bar{\theta})$$

$$= \frac{1}{4} [(0,008)(-0,0225) + (0,008)(-0,0225) + (-0,002)(0,0151) + (-0,012)(0,0151) + (-0,002)(0,0151)] * 10^{-3}$$

$$s(I, \theta) = -0,1504 * 10^{-6} A * rad$$

Factores de correlación

$$r(V, I) = \frac{s(V, I)}{s(V)s(I)} = \frac{-55 * 10^{-9}}{0,01923 * 0,008366 * 10^{-3}} = -0,34187$$

$$r(V, \theta) = \frac{s(V, \theta)}{s(V)s(\theta)} = \frac{0,1316 * 10^{-3}}{0,01923 * 0,02059} = 0,33237$$

$$r(I, \theta) = \frac{s(I, \theta)}{s(I)s(\theta)} = \frac{-0,1504 * 10^{-6}}{0,008366 * 10^{-3} * 0,02059} = -0,87312$$

Coefficientes de sensibilidad

Para la resistencia

$$C_1 = \frac{\partial R}{\partial V} = \frac{\cos(\theta)}{I} \Big|_{\bar{I}, \bar{\theta}} = \frac{\cos(1,4928)}{0,002702} = 28,837 \frac{\Omega}{V}$$

$$C_2 = \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{-V \cos(\theta)}{I^2} \Big|_{\bar{V}, \bar{I}, \bar{\theta}} = \frac{-7,202 \cos(1,4928)}{0,002702^2} = -76862,79 \frac{\Omega}{A}$$

$$C_3 = \frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{-V \operatorname{sen}(\theta)}{I} \Big|_{\bar{V}, \bar{I}, \bar{\theta}} = \frac{-7,202 \operatorname{sen}(1,4928)}{0,002702} = -2657,33 \frac{\Omega}{\text{rad}}$$

Para la reactancia

$$C_4 = \frac{\partial X_C}{\partial V} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{I} \Big|_{\bar{I}, \bar{\theta}} = \frac{\operatorname{sen}(1,4928)}{0,002702} = 368,97 \frac{\Omega}{V}$$

$$C_5 = \frac{\partial X_C}{\partial I} = \frac{-V \operatorname{sen}(\theta)}{I^2} \Big|_{\bar{V}, \bar{I}, \bar{\theta}} = \frac{-7,202 \operatorname{sen}(1,4928)}{0,002702^2} = -983467,66 \frac{\Omega}{A}$$

$$C_6 = \frac{\partial X_C}{\partial \theta} = \frac{V \cos(\theta)}{I} \Big|_{\bar{V}, \bar{I}, \bar{\theta}} = \frac{7,202 \cos(1,4928)}{0,002702} = 207,68 \frac{\Omega}{\text{rad}}$$

Varianza estimada

Para la resistencia

$$s^2(R) = \left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 s^2(V) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 s^2(I) + \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 s^2(\theta) + 2 \frac{\partial R}{\partial V} \frac{\partial R}{\partial I} s(V)s(I)r(V, I)$$

$$+ 2 \frac{\partial R}{\partial V} \frac{\partial R}{\partial \theta} s(V)s(\theta)r(V, \theta) + 2 \frac{\partial R}{\partial I} \frac{\partial R}{\partial \theta} s(I)s(\theta)r(I, \theta)$$

$$\begin{aligned} s^2(R) &= 28,837^2 * 0,01923^2 + 76862,79^2 * 0,008366^2 * 10^{-6} + 2657,33^2 \\ &\quad * 0,02059^2 + 2 * 28,837 * (-76862,79) * 0,01923 * 0,008366 * 10^{-3} \\ &\quad * (-0,34187) + 2 * 28,837 * (-2657,33) * 0,01923 * 0,02059 \\ &\quad * 0,33237 + 2 * (-76862,79) * (-2657,33) * 0,008366 * 10^{-3} \\ &\quad * 0,02059 * (-0,87312) \end{aligned}$$

$$s^2(R) = 2913,025$$

$$s(R) = 53,9724 \Omega$$

Incertidumbre tipo A:

$$u_A(R) = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = \frac{53,9724}{\sqrt{5}} = 24,137 \Omega$$

Para la reactancia

$$\begin{aligned} s^2(X_C) &= \left(\frac{\partial X_C}{\partial V}\right)^2 s^2(V) + \left(\frac{\partial X_C}{\partial I}\right)^2 s^2(I) + \left(\frac{\partial X_C}{\partial \theta}\right)^2 s^2(\theta) \\ &+ 2 \frac{\partial X_C}{\partial V} \frac{\partial X_C}{\partial I} s(V)s(I)r(V, I) + 2 \frac{\partial X_C}{\partial V} \frac{\partial X_C}{\partial \theta} s(V)s(\theta)r(V, \theta) \\ &+ 2 \frac{\partial X_C}{\partial I} \frac{\partial X_C}{\partial \theta} s(I)s(\theta)r(I, \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2(X_C) &= 368,97^2 * 0,01923^2 + 983467,66^2 * 0,008366^2 * 10^{-6} + 207,68^2 \\ &* 0,02059^2 + 2 * 368,97 * (-983467,66) * 0,01923 * 0,008366 \\ &* 10^{-3} * (-0,34187) + 2 * 368,97 * 207,68 * 0,01923 * 0,02059 \\ &* 0,33237 + 2 * (-983467,66) * 207,68 * 0,008366 * 10^{-3} \\ &* 0,02059 * (-0,87312) \end{aligned}$$

$$s^2(X_C) = 257,844$$

$$s(X_C) = 16,0575 \Omega$$

Incertidumbre tipo A

$$u_A(X_C) = \frac{s(X_C)}{\sqrt{n}} = \frac{16,0575}{\sqrt{5}} = 7,181 \Omega$$

D.5.2 Evaluación de la Incertidumbre tipo B

La información de los equipos se encuentra en la ficha técnica en el Anexo D.

Vóltmetro digital:

Escala utilizada: 20 V

- Resolución: 10 mV = 0,01 V

$$u(V)_R = \frac{0,01}{\sqrt{12}} = 2,8867 \text{ mV}$$

- Exactitud:

$$\pm(0,8\%Lect + 3 \text{ digitos})$$

Quiere decir que son 0,8% de la lectura promedio

$$0,008 * \bar{V} = 0,008 * 7,202 = 0,057616 \text{ V}$$

3 dígitos en la escala usada representan:

$$\# \text{ digito} * \text{resolución} = 0,01 * 3 = 0,03 \text{ V}$$

Entonces:

$$\pm(0,8\% \text{ lectura} + 3 \text{ digitos}) = \pm(0,057616 + 0,03) = \pm 0,087616 \text{ V}$$

$$u(V)_E = \frac{0,087616}{\sqrt{3}} = 0,050585 \text{ V}$$

Ampérmetro analógico-digital:

Escala utilizada: 20 mA

- Resolución: 0,01 mA

$$u(I)_R = \frac{0,01 * 10^{-3}}{\sqrt{12}} = 0,28867 \mu A$$

- Exactitud:

$$\pm(1,5\%Lect + 3 \text{ digitos})$$

$$\pm(0,015 * \bar{I} + 3 * 0,00001) = \pm(0,015 * 0,002702 + 0,00003) = \pm 0,07053 * 10^{-3}$$

$$u(I)_E = \frac{0,07053 * 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 0,04072 \text{ mA}$$

Osciloscopio

- Exactitud:

$$\pm 0,01\%Lect = 0,0001 * 1,4928 = 0,14928 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$u(\theta)_E = \frac{0,14928 * 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 0,08618 * 10^{-3} \text{ rad}$$

Ahora procedemos a obtener las incertidumbres tipo B

Para la resistencia

$$u_B(R) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u^2(x_i) \left[\frac{\partial R}{\partial x_i} \right]^2}$$

$$u_B(R) = \sqrt{(u(V)_R^2 + u(V)_E^2) \left(\frac{\partial R}{\partial V} \right)^2 + (u(I)_R^2 + u(I)_E^2) \left(\frac{\partial R}{\partial I} \right)^2 + u(\theta)_E^2 * \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2}$$

$$u_B(R)^2 = (2,8867^2 * 10^{-6} + 0,05058^2)(28,837)^2 \\ + (0,28867^2 * 10^{-12} + 0,04072^2 * 10^{-6})(76862,8^2) \\ + (0,08618 * 10^{-3} * 2657,33)^2$$

$$u_B(R)^2 = 11,9833$$

$$u_B(R) = 3,4617 \Omega$$

Para la reactancia

$$u_B(X_C) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u^2(x_i) \left[\frac{\partial X_C}{\partial x_i} \right]^2}$$

$$u_B(X_C) = \sqrt{(u(V)_R^2 + u(V)_E^2) \left(\frac{\partial X_C}{\partial V} \right)^2 + (u(I)_R^2 + u(I)_E^2) \left(\frac{\partial X_C}{\partial I} \right)^2 + (u(\theta)_E^2 * \frac{\partial X_C}{\partial \theta})^2}$$

$$u_B(X_C)^2 = (2,8867^2 * 10^{-6} + 0,05058^2)(368,97)^2 \\ + (0,28867^2 * 10^{-12} + 0,04072^2 * 10^{-6})(983467,66)^2 \\ + (0,08618 * 10^{-3} * 207,68)^2$$

$$u_B(X_C)^2 = 1953,25$$

$$u_B(X_C) = 44,195 \Omega$$

D.6 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR COMBINADA

Para la resistencia

$$u_c(R) = \sqrt{u_A(R)^2 + u_B(R)^2}$$

$$u_c(R) = \sqrt{24,137^2 + 3,4617^2}$$

$$u_c(R) = 24,38 \Omega$$

Para la reactancia

$$u_c(X_C) = \sqrt{u_A(X_C)^2 + u_B(X_C)^2}$$

$$u_c(X_C) = \sqrt{7,181^2 + 44,195^2}$$

$$u_c(X_C) = 44,77 \Omega$$

D.7 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

Obtención de los grados efectivos de libertad para determinar el factor de cobertura.

Para la resistencia

En la Tabla D.3 se muestran los resultados de las incertidumbres asociadas a cada fuente de incertidumbre considerada y los grados de libertad correspondientes.

TABLA D.3 RESULTADOS DE CÁLCULOS RELATIVOS A LA DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA (R)

Fuente		Tipo de distribución	Incertidumbre de cada fuente $u(x_i)$	Grados de libertad
Resistencia	Repetibilidad	Normal	24,137	4
Vóltmetro	Exactitud	Rectangular	0,050585	∞
	Resolución	Rectangular	2,8867*E-3	
Ampérmetro	Exactitud	Rectangular	0,04072*E-3	∞
	Resolución	Rectangular	0,28867*E-6	
Osciloscopio	Exactitud	Rectangular	0,08618*E-3	∞

Entonces:

$$V_{eff} = \frac{U_c^4(R)}{\sum \frac{u^4(x_i)}{V_i}} = \frac{(24,38)^4}{\frac{(24,137)^4}{4} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0} = 4,16353 \approx 4,0$$

Se aproxima el resultado al valor entero de 4 debido a que no se encuentra este valor en la tabla t-student, además se aproxima por debajo para dejar un mayor intervalo a la medida.

Para un nivel de confianza del 95,45% se tiene $k=2,87$ y por consiguiente:

$$U(R) = k * u_c(R) = 2,87 * 24,38 = 69,97 \Omega$$

Para la reactancia

En la Tabla D.4 se muestran los resultados de las incertidumbres asociadas a cada fuente de incertidumbre considerada y los grados de libertad correspondientes.

TABLA D.4 RESULTADOS DE CÁLCULOS RELATIVOS A LA DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA (X_c)

Fuente		tipo de distribución	incertidumbre estándar $u(x_i)$	grados de libertad
Reactancia	Repetibilidad	Normal	7,181	4
Vóltmetro	Exactitud	Rectangular	0,050585	∞
	Resolución	Rectangular	2,8867*E-3	
Ampérmetro	Exactitud	Rectangular	0,04072*E-3	∞
	Resolución	Rectangular	0,28867*E-6	
Osciloscopio	Exactitud	Rectangular	0,08618*E-3	∞

$$V_{eff} = \frac{U_c^4(X_c)}{\sum \frac{U^4(x_i)}{V_i}} = \frac{(44,77)^4}{\frac{(7,181)^4}{4} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0} \approx 6043,22$$

Para un nivel de confianza del 95,45% se tiene $k=2$ y por consiguiente:

$$U(X_c) = k * u_c(R) = 2 * 44,77 = 89,54 \Omega$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{7,202}{0,002702} = 2665,43 \Omega$$

$$\bar{R} = \bar{Z} \cos \bar{\theta} = 2665,43 \cos(1,4928) = 207,68 \Omega$$

$$\bar{X}_c = \bar{Z} \sin \bar{\theta} = 2665,43 \sin(1,4928) = 2657,33 \Omega$$

D.8 RESULTADO DE LA MEDICIÓN

Los resultados de los dos mensurandos son:

$$R = 207,68 \pm 69,97 [\Omega]$$

$$X_C = 2657,33 \pm 89,54 [\Omega]$$

Las especificaciones de los instrumentos de medida utilizados en este caso se muestran en las tablas D.5, D.6 y D.7.

TABLA D.5. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL VÓLTMETRO

MULTÍMETRO DIGITAL			
MARCA: DIGITAL MULTIMETER			
MODELO: 890 SERIES/840D			
SERIAL: 66B2660			
CATEGORIA DE MEDICIÓN: CAT II 600V			
Parámetro a medir:	Escala	Resolución	Exactitud
Tensión AC	200 mV	0,1 mV	$\pm(1,2\% + 2)$
	2 V	1 mV	$\pm(0,8\% + 3)$
	20 V	10 mV	$\pm(0,8\% + 3)$
	200 V	100 mV	$\pm(0,8\% + 3)$
	1000 V	1V	$\pm(1,5\% + 3)$
	Impedancia de entrada: 10 M Ω para todos los rangos Frecuencia: 40Hz-1000Hz 40Hz-100Hz para rangos entre 200V y 750V Indicación: RMS de la onda seno		

TABLA D.6. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL AMPÉRMETRO

MULTÍMETRO ANALÓGICO-DIGITAL				
MARCA: MASTECH				
MODELO: 7030				
SERIAL: -				
CATEGORIA DE MEDICIÓN: CAT II 600V				
Parámetro a medir:	Escala	Resolución	Exactitud	
			Digital	Analógico
Corriente AC	200 μ A	0,1 μ A	$\pm(1,5\% + 3)$	$\pm(4\%$ del rango total)
	2 mA	1 mA		
	20 mA	0,01 mA		
	200 mA	0,1 mA	$\pm(1,8\% + 3)$	
	10 A	0,01 A	$\pm(2,5\% + 5)$	

TABLA D.7. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL OSCILOSCOPIO

OSCILOSCOPIO DE ALMACENAMIENTO DIGITAL	
MARCA:	GW INSTEK
MODELO:	GDS-1000 SERIES
SERIAL:	-
CATEGORIA DE MEDICIÓN:	CAT II 300V
HORIZONTAL	
Rango	1ns/div ~ 10s/div (1-2-5 increments); ROLL :
250ms/div ~ 10s/div	
Modos	Main, Window, Window Zoom, Roll, X-Y
Exactitud	±0.01%
Pre-Trigger	10 div maximum
Post-Trigger	1000 div

E. DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS NÚMERICOS DEL CASO 3

E.1 IDENTIFICACIÓN DEL MENSURANDO

Se desea medir la tensión eléctrica a la que se realiza la prueba y la resistencia de aislamiento del conductor sometido al ensayo.

E.2 PLANTEAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO

Para la tensión eléctrica se plantea el modelo siguiente:

$$V = A - E_{patrón} - E_{exact} - E_{res}$$

Para la resistencia de aislamiento, se plantea el modelo siguiente:

$$R_a = R_m * L * F_C$$

Donde;

R_a = Resistencia corregida a la temperatura de referencia de 20 °C y longitud 1 Km

R_m = Resistencia de Aislamiento medida en MΩ

F_C = Factor de corrección de la temperatura a 20 °C

L = Longitud de la muestra bajo prueba en Km.

E.3 FUENTES DE INCERTIDUMBRE A CONSIDERAR

Las fuentes de incertidumbre consideradas en este caso son:

- Incertidumbre por repetibilidad u_{rep} .
- Incertidumbre por resolución u_{resol} .
- Incertidumbre por exactitud u_{exac} .
- Incertidumbre del instrumento¹⁶ u_{inst} .
-

E.4 CUANTIFICACIÓN Y DISTRIBUCIÓN ASOCIADA A CADA FUENTE

¹⁶ Incertidumbre del certificado de calibración, emitido por el laboratorio que calibró el equipo. La denotaremos como fuente de incertidumbre patrón.

Las distribuciones que se asignan a los equipos de medición de cada una de las variables de entrada son de tipo rectangular debido a que no se tiene suficiente información acerca de los parámetros de los instrumentos utilizados en la medición. Para cada uno de los equipos con que se miden las diferentes magnitudes de entrada se determinan sus contribuciones mediante los criterios de la Tabla E.1:

TABLA E.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE A CONSIDERAR EN EL EJEMPLO

Fuente	Valor	Distribución asignada	Cuantificación	Grados de libertad
Repetibilidad	s	Normal	$\frac{s}{\sqrt{n}}$	$n - 1$
Exactitud	e	Rectangular	$\frac{e}{\sqrt{3}}$	∞
Resolución	r	Rectangular	$\frac{r}{\sqrt{12}}$	∞
Patrón	U	Normal	$\frac{U}{k}$	$\frac{1}{2(1 - conf)^2}$

Los grados de libertad para el patrón se obtienen mediante la ecuación (3.15) con $\Delta u(x_i) = 1 - conf$

Donde:

conf = Confianza reportada en el certificado de calibración del instrumento. Casi siempre es 0,95.

E.5 DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR

En esta sección se estiman las incertidumbres estándar para cada fuente de incertidumbres consideradas en la sección anterior tanto para la tensión como para la resistencia de aislamiento.

E.5.1 Para la tensión

Tensión aplicada: 8000 V.

En la Tabla E.2 se muestran las características del equipo de medición de tensión.

TABLA E.2 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE TENSIÓN APLICADA

Resolución	100 V
Exactitud \pm	1%tensión aplicada +1V
Incer Expan	75 V
K	2,04
Nivel de confianza	95%
Tipo	Digital

No se tiene incertidumbre tipo A debido a que solo se aplica una tensión de 8000 V. las incertidumbres consideradas son de tipo B, las del instrumento.

Aplicando las ecuaciones del capítulo 2 se obtienen las incertidumbres para la tensión descritas en la Tabla E.3.

TABLA E.3 CÁLCULOS NÚMERICOS PARA LA TENSIÓN ELÉCTRICA APLICADA

Tensión						
Compon ente	Valor	tipo distribución	incertidumb re estándar u_i	Coefic iente de sensib ilidad c_i	$(c_i * u_i)^2$	Grados de Liberta d ν_i
u_{resol}	100	Rectangula r	2,89E+01	1	8,333E+0 2	∞
u_{exac}	81	Rectangula r	4,68E+01	1	2,187E+0 3	∞
u_{inst}	75	Normal	3,68E+01	1	1,352E+0 3	200

E.5.2 Para la resistencia de aislamiento

TABLA E.4 REGISTRO DE OBSERVACIONES

Mediciones Realizadas			
#	Valor (MΩ)	t (°C)	L (Km)
1	34234,00	27,3	0,999
2	33380,00	27,3	0,999
3	33076,00	27,3	0,999
4	33154,00	27,3	0,999
5	34672,00	27,3	0,999
6	33178,00	27,3	0,999
7	34798,00	27,3	0,999
8	33946,00	27,3	0,998
9	33362,00	27,4	0,999
10	34180,00	27,3	0,999
11	33904,00	27,3	0,999
12	33732,00	27,3	0,999
13	33274,00	27,3	0,999
14	33902,00	27,3	0,999
15	34156,00	27,3	0,999
16	33244,00	27,3	0,999
17	33590,00	27,3	0,999
18	34474,00	27,3	0,999
19	33802,00	27,3	0,999
20	33070,00	27,3	0,999
Prom	33756,40	27,31	0,999
Des.est	539,918746	0,02236068	0,000223607
#medidas	20	20	20

El valor de las correlaciones entre las variables de las que depende la resistencia de aislamiento se muestra en la Tabla E.5.

TABLA E.5 CÁLCULO DE CORRELACIONES ENTRE VARIABLES

COVARIANZAS			
Variables	R_m, t	t, L	R_m, L
	-		-
Covarianza	0,10378947	1,31579E-08	0,000498947
	-		-
Coef.correl	0,17193722	0,052631579	0,082655417

Datos de referencia

Temperatura T=20 °C

Factor de corrección FC=1,86

La resistencia de aislamiento depende de tres magnitudes que se consideraran cada una por separado y después se combinaran en el resultado final.

- Medición de la resistencia medida.

El equipo para la medición de la resistencia presenta las características descritas en la Tabla E.6.

TABLA E.6 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE MEDICIÓN DE RESISTENCIA

Resolución	0,01 MΩ
Exactitud ±	5%Lectura ±0,03 MΩ
Incer Expan	0,06
K	2
Nivel de confianza	95%
Tipo	Digital

Evaluación de las incertidumbres tipo A y B.

El resumen de los cálculos para la evaluación de las incertidumbres tipo A y B se muestran en la Tabla E.7.

TABLA E.7 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA RESISTENCIA MEDIDA

Resistencia						
Componente	Valor	tipo distribución	incertidumbre estándar u_i	Coficiente de sensibilidad c_i	$(c_i * u_i)^2$	Grados de Libertad (V1)
u_{rep}	539,91875	Normal	1,207E+02	1	1,4576E+04	19
u_{resol}	0,01	Rectangular	2,887E-03	1	8,3333E-06	∞
u_{exac}	1687,820	Rectangular	9,745E+02	1	9,4958E+05	∞
u_{inst}	0,06	Normal	3,000E-02	1	9,0000E-04	200

La incertidumbre combinada para la resistencia medida es:

$$U(R_m) = \sqrt{(c_1 * u_{rep})^2 + (c_2 * u_{resol})^2 + (c_3 * u_{exac})^2 + (c_4 * u_{inst})^2} = 981,9136406$$

$$v_{eff} = \frac{U^4(R_m)}{\sum \frac{u_i^4}{v_i}} = 83136,77$$

- Medición de temperatura

El equipo para la medición de la temperatura presenta las características descritas en la Tabla E.8.

TABLA E.8 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE MEDICIÓN DE TEMPERATURA

Resolución	0,01
Exactitud ±	3%Lectura ±0,03 °C
Incer Expan	0,077 °C
K	2
Nivel de confianza	95%
Tipo	Digital

El resumen de los cálculos para la evaluación de las incertidumbres tipo A y B se muestran en la Tabla E.9.

TABLA E.9 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA TEMPERATURA

Temperatura						
Componente	Valor	tipo distribución	incertidumbre estándar u_i	Coefficiente de sensibilidad c_i	$(c_i * u_i)^2$	Grados de Libertad (V1)
u_{rep}	2,23607 E-02	Normal	5,000E-03	1	0,000025	19
u_{resol}	0,01	Rectangular	0,00288675	1	0,000008	∞
u_{exac}	0,8192	Rectangular	0,47293647	1	0,223669	∞
u_{inst}	0,077	Normal	0,03850000	1	0,001482	200

La incertidumbre combinada para la temperatura es:

$$U(t) = \sqrt{(c_1 * u_{rep})^2 + (c_2 * u_{resol})^2 + (c_3 * u_{exac})^2 + (c_4 * u_{inst})^2} = 0,47453608$$

$$v_{eff} = \frac{U^4(t)}{\sum \frac{u_i^4}{v_i}} = 4,60 * 10^6$$

- Medición de la longitud

El equipo para la medición de la longitud del conductor presenta las características descritas en la Tabla E.10.

TABLA E.10 CARACTERÍSTICAS DEL EQUIPO DE MEDICIÓN DE LONGITUD

Resolución	1
Exactitud ±	0,40%Lectura
Incer Expante	0,089 m
K	2
Nivel de confianza	95%
Tipo	Digital

El resumen de los cálculos para la evaluación de las incertidumbres tipo A y B se muestran en la Tabla E.11.

TABLA E.11 CÁLCULOS NUMÉRICOS PARA LA LONGITUD

longitud						
Componente	Valor	tipo distribución	incertidumbre estándar u_i	Coficiente de sensibilidad c_i	$(c_i * u_i)^2$	Grados de Libertad (V1)
u_{rep}	2,23607 E-04	Normal	5,000E-05	1	2,5000E-09	19
u_{resol}	1	Rectangular	0,28867513	0,001	8,3333E-08	∞
u_{exac}	0,0039958	Rectangular	0,00230698	1	5,3221E-06	∞

La incertidumbre combinada para la variable longitud es:

$$U(L) = \sqrt{(c_1 * u_{rep})^2 + (c_2 * u_{resol})^2 + (c_3 * u_{exac})^2} = 0,002325505$$

$$v_{eff} = \frac{U^4(L)}{\sum \frac{u_i^4}{v_i}} = 88908348$$

E.6 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR COMBINADA

Para la tensión

$$U_C(V) = \sqrt{(c_2 * u_{resol})^2 + (c_3 * u_{exac})^2 + (c_4 * u_{inst})^2} = 66,12$$

Para la resistencia de aislamiento

Calculamos los coeficientes de sensibilidad.

$$\frac{\partial R_a}{\partial L} = R_m * F_c = 62786,904$$

$$\frac{\partial R_a}{\partial R_m} = F_c * L = 1,858047$$

Los datos a tener en cuenta en la estimación de la incertidumbre combinada son los mostrados en la Tabla E.12.

TABLA E.12 RESUMEN DE DATOS PARA LA OBTENCIÓN DE LA INCERTIDUMBRE COMBINADA

Variables	$U(x_i)$	c_i	$c_i * u_i$	$(c_i * u_i)^2$	v_{eff}
R_m	981,913641	1,858	1824,44169	3,32859E+06	83137
L	0,002326	62786,904	146,01125	21319,28403	8,9E+07

A incertidumbre combinada de la resistencia de aislamiento es:

$$U_C(R_a) = \sqrt{(F_c * L)^2 U^2(R_m) + (F_c * R_m)^2 U^2(L) + 2(F_c * L)(F_c * R_m)U(L, R_m)}$$

$$= 1823,64756$$

E.7 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

Para la tensión

Calculo de los grados efectivos de libertad para determinar el factor de cobertura.

$$v_{eff} = \frac{U_C^4(V)}{\sum \frac{u_i^4}{v_i}} = 2092,48 \quad k = 1,98 \quad \text{por tabla } t - \text{student}$$

$$U = k * U_C(V) = 130,92$$

Para la resistencia de aislamiento

$$v_{eff} = \frac{U_C^4(R_a)}{\frac{U^4(R_m)}{v_{eff}(R_m)} + \frac{U^4(L)}{v_{eff}(L)}} = 82992,10933 \quad k = 1,98$$

$$U = k * U_C(R_a) = 3610,82$$

E.8 RESULTADO DE LA MEDICIÓN

Para la tensión eléctrica

$$V = 8000 \pm 130,92 \text{ V}$$

Para la resistencia de aislamiento

$$R_a = 62720,98 \pm 3610,82 \frac{M\Omega}{k}$$

F. EJEMPLOS SOBRE EXACTITUD Y PRECISIÓN

Ejemplo 1

En metrología, para hablar de precisión, no basta con que un equipo de medida presente repetibilidad en los valores tomados, sino que también esas medidas sean obtenidas con una suficiente resolución. En la Tabla F.1 se muestran los diversos valores dependiendo de la resolución, para una serie de mediciones de una variable.

TABLA F.1 VALOR MEDIDO POR EQUIPOS DE DIFERENTE RESOLUCIÓN.

Resol=0,1	Resol=0,01	Resol=0,000001
13,9	13,89	13,897652
13,9	13,89	13,897653
13,9	13,89	13,897651
13,9	13,89	13,897650

Del ejemplo se observa que para tres diferentes equipos, los tres tienen la característica de ser precisos ya que los tres muestran repetibilidad en la medida, pero el equipo tres es mejor ya que este percibe la variación más pequeña en el último dígito de la medida.

Algunos laboratorios de metrología informan sobre la precisión de un equipo y la resolución con la que se le hacen las medidas para garantizar lo mejor posible esta cualidad.

Ejemplo 2

Se tienen dos voltímetros para medir tensión.

El equipo patrón registra 120 V.

Voltímetro 1: V1

Voltímetro 2: V2

En la Tabla F.2 se muestran las cinco medidas tomadas simultáneamente:

TABLA F.2 REGISTRO DE LAS MEDIDAS DE LOS VÓLTMETROS.

# Medida	V1[V]	V2[V]
1	144	186
2	128	185
3	96	187
4	119	184
5	112	186
\bar{x}	119,8	185,6
S	17,89	1,14

V_{OP} = Valor objeto de prueba.

V_P = Valor patrón.

$$error1 = \frac{V_{OP} - V_P}{V_P} * 100\% = \frac{119,8 - 120}{120} = -0,16\%$$

$$error2 = \frac{V_{OP} - V_P}{V_P} * 100\% = \frac{185,6 - 120}{120} = 54,67\%$$

Si nos dijeran como ingenieros de mantenimiento comprar uno de los dos equipos. ¿Cuál se debe elegir?

De acuerdo a las características de los voltímetros se debe comprar el equipo 2. La razón es porque este equipo es más preciso. Podríamos pensar en comprar el equipo 1 ya que tiene un error muy pequeño en comparación con el equipo 2 pero este presenta más dispersión en las medidas registradas luego presenta mayor incertidumbre y el intervalo donde puede estar la medida es más amplio.

Para el equipo 2, a la medida registrada se le resta el error que presenta y ya obtengo la medida que quiero.

De lo anterior podemos concluir que en metrología una característica importante de un equipo es que sea más preciso que exacto. El error es un valor que se puede sumar o restar y así obtener la medida buscada.

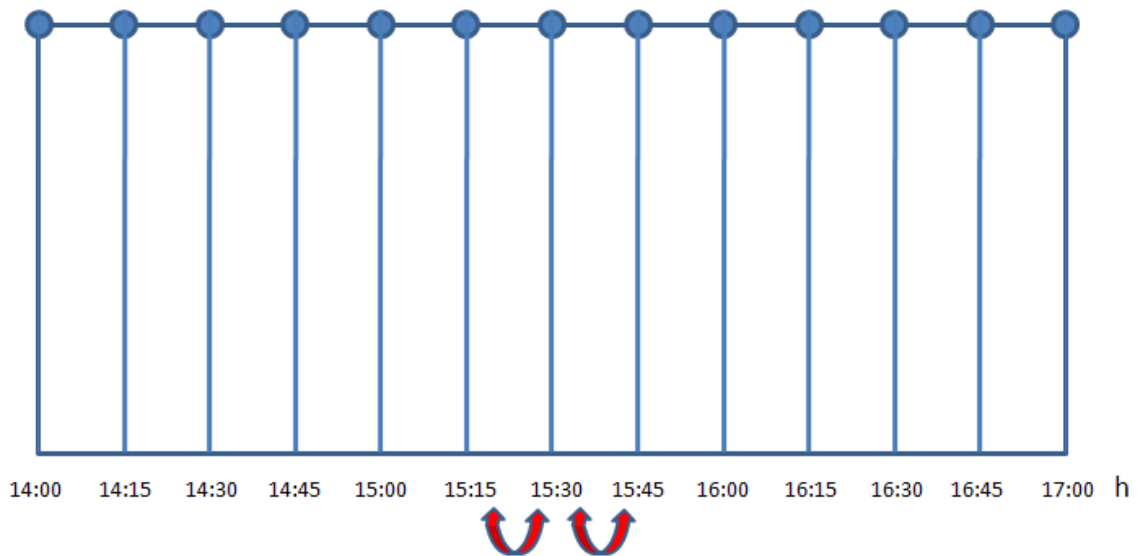
Al observar repetibilidad en las mediciones, la incertidumbre por este parámetro es menor ya que el intervalo donde se pueda encontrar la medida es más estrecho.

G. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN RECTANGULAR

Un almacén de eléctricos siempre vende 35 interruptores entre las 14.00 y las 17:00 de la tarde.

Un comprador requiere esa cantidad de artículos y los podría comprar a las 15:15. También puede suceder que los compre a las 15:30 o a las 15:45. Como existe la misma probabilidad de comprar los interruptores en cualquier instante de ese intervalo y como no se tiene más información acerca del momento de la venta, uno puede considerar una distribución rectangular para esa probabilidad. También puede suceder que el comprador compre los interruptores a las 15:15:37:00 o las 15:15:37:08... etc. Lo cual la distribución será de tipo continua. Según esto, la variable aleatoria puede tomar infinitos valores en el tiempo lo que nos lleva a decir que la variable aleatoria tiene infinitos grados de libertad¹⁷. La situación planteada se muestra de forma gráfica en la Figura G.1.

Figura G.1 Posibles valores que puede tomar la variable aleatoria



Fuente: autores

En metrología es común utilizar este tipo de distribución en la resolución de los equipos. Por ejemplo:

Un equipo digital muestra en el visualizador la siguiente medida:

1,85

¹⁷ Los grados de libertad son los valores que puede tomar libremente la variable aleatoria.

Esta medida es un redondeo¹⁸ del valor del mensurando a dos dígitos sometido a medición. La centésima 5 me da la duda ya que este valor puede ser el redondeo de:

Posibilidades: { 1,854
1,853
1,852
1,851
1,850
1,849
1,848
1,847
1,846

Para estos valores el equipo registra la medida como 1,85. Si se consideran más cifras después de la milésima, se tiene:

1,854236....

1,854237...

1,8542378...

1,85423781...

Lo cual nos deja ver que la variable aleatoria que se está midiendo puede tomar infinitos valores, o en términos metrológicos, infinitos grados de libertad que se pueden redondear a la medida del visualizador.

De este ejemplo se puede observar una de las razones por la que se considera que los instrumentos de medida al atribuirles una distribución de tipo rectangular, tienen infinitos grados de libertad.

¹⁸ Mediante normas de redondeo de números. Para este caso, supondremos que lo hace mediante notación científica básica.

H. EJEMPLO DE UN MULTÍMETRO DÍGITAL

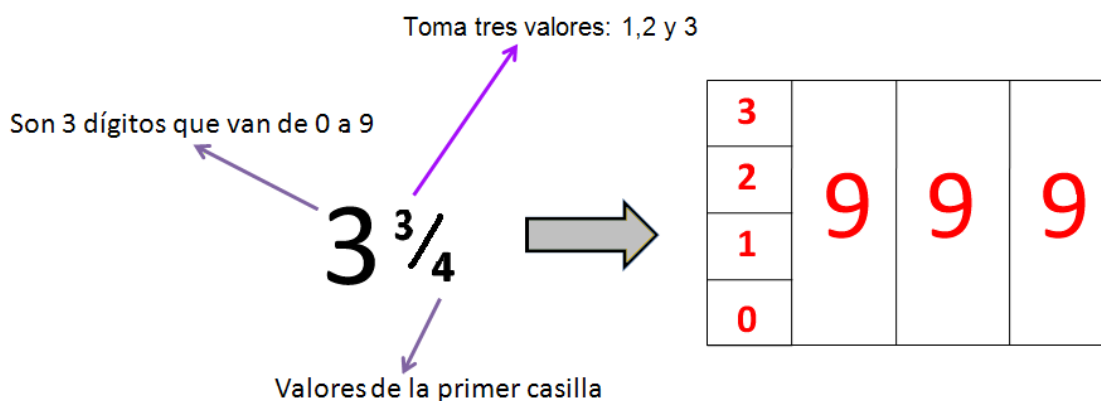
Para multímetros digitales es común expresar su resolución mediante un número entero y una fracción o como un número mixto en donde el primer número indica los valores que pueden variar de 0 a 9. En la fracción, el numerador nos dice los valores que puede tomar el primer dígito sin incluir el cero y el denominador el número total de posibles valores incluido el cero.

Supongamos que se tiene el promedio de 5 observaciones de tensión continua de cierto circuito. Se quiere saber las incertidumbres por exactitud y resolución aportadas por el instrumento en el proceso de medición.

Especificaciones del instrumento.

$3\frac{3}{4}$ dígitos (3999 cuentas), rango usado 4V, exactitud 0,9%+2 dígitos, impedancia de entrada 1 M Ω . En la Figura H.1 se muestra el significado de estas especificaciones.

Figura H.1 Número de cuentas para un multímetro digital.



Fuente: Autores

La tensión promedio es: $\bar{V} = 1,76 V$

El instrumento es de 4000 cuentas incluido el cero, por lo que la resolución del equipo es:

$$\text{resolución} = \frac{\text{escala}}{\# \text{ cuentas}} = \frac{4V}{4000} = 0,001 V$$

Para 10 V el patrón debe indicar

$$V_p = \frac{10 V}{0,991} = 10,09 = 10 + 10 * 0,009 V$$

De acuerdo a lo anterior, la exactitud es:

$$\pm(0,9\%Lect + 2 \text{ digitos})$$

El 0,09% de la lectura promedio es:

$$0,009 * \bar{V} = 0,009 * 1,76 V = 0,016 V$$

2 dígitos representan en la escala usada

$$\frac{\text{escala}}{\# \text{ cuentas}} * \# \text{dígito} = \text{resolución} * \# \text{dígito} = 0,001 * 2 = 0,002 V$$

Entonces el valor en tensión por exactitud del multímetro es:

$$\pm(0,9\%Lect + 2 \text{ digitos}) = 0,016 + 0,002 = 0,018 V$$

Asignando una distribución rectangular al instrumento se tienen las siguientes incertidumbres

Por resolución

$$u(V)_{res} = \frac{0,001 V}{\sqrt{12}} = 0,0003 V$$

Por exactitud

$$u(V)_{exact} = \frac{0,018 V}{\sqrt{3}} = 0,010 V$$

I. TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN T-STUDENT

TABLA T-STUDENT

Grados de Libertad	Fracción p en por ciento					
ν	68,27	90	95	95,45	99	99,73
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,8
2	1,32	2,92	4,3	4,53	9,92	19,21
3	1,2	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,6	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,9
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,5	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,8	2,2	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,2	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,9	3,51
18	1,03	1,73	2,1	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,7	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,7	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,7	3,2
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,06	2,68	3,16
100	1,005	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1	1,645	1,96	2	2,576	3

Fuente: [4]

J. TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

TABLA NORMAL

Nivel de Confianza p (por ciento)	Factor de Cobertura k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Fuente: [4]