ESPACIOS HOMOGÉNEOS NUMERABLES

JULIÁN ENRIQUE NEIRA DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

ESPACIOS HOMOGÉNEOS NUMERABLES

JULIÁN ENRIQUE NEIRA DÍAZ

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

DEDICATORIA

A mi madre, Martha Liliana.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a la vida por permitirme culminar exitosamente la carrera y disfrutar del proceso. Doy gracias a mi madre por haber sido un apoyo todos estos años, pues sin ella no habría conseguido este logro. También le agradezco a todos los profesores que fueron partícipes en mi formación, en especial al profesor Carlos Uzcátegui, quien es una persona y un profesional excepcional y fue una guía esencial para el desarrollo de este trabajo. Por último, le agradezco a los grandes amigos que hice en esta etapa de mi vida: Cristian, Vanessa, Natalia, Natalí, Pilar y Yusleny; ellos hicieron mi estadía por la universidad más agradable.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

pág.

RESUMEN

TÍTULO: ESPACIOS HOMOGÉNEOS NUMERABLES *

AUTOR: JULIÁN ENRIQUE NEIRA DÍAZ **

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS HOMOGÉNEOS, TOPOLOGÍAS INVARIANTES, GRUPOS TOPOLÓGICOS, AXIOMA DE MARTIN, HOMEOMORFISMOS.

DESCRIPCIÓN:

Es sabido que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, pero existen espacios homogéneos que no admiten una estructura de grupo topológico, por ejemplo, el cubo de Hilbert. Por esto, estudiaremos los espacios con topologías $*$-invariantes, que son una versión débil de los grupos topológicos, basándonos en el trabajo de van Douwen [1]. Probaremos que si (X, τ) es numerable, regular y homogéneo y $(G, *)$ es un grupo numerable, entonces existe una topología $*$-invariante ρ sobre G tal que $(X, \tau) \approx (G, \rho)$. Con esto demostraremos que τ es $*$-invariante para alguna operación de grupo $*$ sobre X.

En el primer capítulo, recordaremos algunos conceptos y resultados clásicos de la topología centrándonos en el estudio de los espacios numerables. En el siguiente capítulo, daremos el concepto de espacio homogéneo y mostraremos una caracterización esencial que relaciona el grupo de autohomeomorfismos $\mathcal{H}(X)$ con la existencia de una topología $*$-invariante ρ sobre un grupo $(G, *)$ tal que $(G, \rho) \approx X$. Gracias a esta equivalencia, nuestro trabajo se reduce a construir homeomorfismos a partir de una versión verdadera del axioma de Martin. Por último, mostramos el espacio S_ω y la topología $+$-invariante ρ sobre $\mathbb{Z}$ para la cual $(\mathbb{Z}, \rho) \approx S_\omega$.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

1 Eric VAN DOUWEN. “Countable homogeneous spaces and countable groups”. En: *General topology and its relations to modern analysis and algebra* 6 (1986), págs. 135-154.

ABSTRACT

TITLE: COUNTABLE HOMOGENEOUS SPACES *

AUTHOR: JULIÁN ENRIQUE NEIRA DÍAZ **

KEYWORDS: HOMOGENEOUS SPACES, INVARIANT TOPOLOGIES, TOPOLOGICAL GROUPS, MARTIN'S AXIOM, HOMEOMORPHISMS.

DESCRIPTION:

It is known that every topological group is a homogeneous space, but there are homogeneous spaces that do not admit a topological group structure, for example, the Hilbert cube. Therefore, we will study spaces with $*$-invariant topologies, which are a weak version of topological groups, based on the work of van Douwen [1]. We will prove that if (X,τ) is countable, regular and homogeneous and $(G,*)$ is a countable group, then there is a $*$-invariant topology ρ on G such that $(X,\tau) \approx (G,\rho)$. With this we will show that τ is $*$-invariant for some group operation $*$ on X.

In the first chapter, we will recall some classical concepts and results of topology focusing on the study of countable spaces. In the next chapter, we will give the concept of homogeneous space and show an essential characterization that relates the group of autohomeomorphisms $\mathcal{H}(X)$ with the existence of a $*$-invariant topology ρ on a group $(G,*)$ such that $(G,\rho) \approx X$. Thanks to this equivalence, our work is reduced to constructing homeomorphisms based on a true version of Martin's axiom. Finally, we show the space S_ω and the $+$-invariant topology ρ on $\mathbb{Z}$ for which $(\mathbb{Z},\rho) \approx S_\omega$.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Dóctor en Matemáticas.

Introducción

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *homogéneo* si para cualesquiera $x, y \in X$, existe un homeomorfismo h de X en X tal que $h(x) = y$. Esto es que dos puntos cualesquiera son indistinguibles topológicamente.

Es sabido que los grupos topológicos son un ejemplo de espacios homogéneos. Sin embargo, los grupos topológicos no son los únicos ejemplos de espacios homogéneos. Por ejemplo, estudiaremos el espacio S_ω que es homogéneo pero su topología no es compatible con ninguna operación de grupo. Otro ejemplo, más sofisticado, es el cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$, como lo mencionan Arhangel'skiĭ y van Mill en [1]. Sin embargo, van Douwen [1] mostró que para los espacios homogéneos numerables el resultado es, como veremos, aproximadamente verdadero.

Una versión más débil de los grupos topológicos son los espacios con topologías $*$-invariantes. Sea (X, τ) un espacio topológico y $*$ una operación de grupo sobre X, entonces τ es una topología $*$-invariante si $g * U \in \tau$, para cualesquiera $g \in X$ y $U \in \tau$.

En 1986, van Douwen mostró que si X es un espacio regular T_1 numerable y G un grupo numerable, entonces X es homogéneo si, y solo si, existe una topología $*$-invariante ρ sobre G tal que $X \approx (G, \rho)$. En particular, X es homogéneo si, y solo si, $X \approx (\mathbb{Z}, \rho)$, con ρ alguna topología $+$-invariante sobre $\mathbb{Z}$. Esto muestra que un espacio regular T_1 numerable es homogéneo si, y solo si, admite una operación de grupo $*$ que haga a su topología $*$-invariante.

¿Cuál es el espacio más sencillo al que le podemos aplicar el teorema de van Douwen? Ciertamente, es $\mathbb{Q}$. De hecho, mostraremos dos topologías $+$-invariantes ρ sobre $\mathbb{Z}$ que hacen a $(\mathbb{Z}, \rho)$ idéntico a $\mathbb{Q}$ en el sentido topológico. Además, estudiaremos y aplicaremos el teorema de van Douwen al espacio S_ω de Arhangel'skiĭ-Franklin, que juega un papel importante en topología general.

---

[1] Jan ARHANGEL'SKII A.V. y VAN MILL. “Topological Homogeneity”. En: *Recent Progress in General Topology III* (ene. de 2014). DOI: 10.2991/978-94-6239-024-9_1.

1. Topologías $*$-invariantes

El objetivo de este capítulo es tener los resultados y conceptos necesarios para estudiar con éxito 2.2.1 y 2.3.2, que son los teoremas principales de la tesis y la motivación de este texto. Para esto, presentamos una versión débil pero verdadera del axioma de Martin y las topologías $*$-invariantes.

El axioma de Martin nos sirve como herramienta para nuestras demostraciones principales, pues nos facilita la construcción de homeomorfismos y homomorfismos. Por otro lado, las topologías $*$-invariantes son una versión débil de los grupos topológicos y dirigen nuestro estudio al relacionarlas con los espacios homogéneos.

1.1. Preliminares

En esta sección recordamos varias propiedades de separación y nos centramos en el estudio de los espacios numerables. Más específicamente, mostramos si un espacio numerable es regular y T_1, entonces es normal y cero dimensional. En esta implicación es fundamental que el espacio sea numerable, pues en general no es cierta.

1.1.1. Propiedades de separación Aquí definimos varios conceptos que necesitamos y recordamos diferentes propiedades de separación. Además, damos diferentes caracterizaciones que usamos a lo largo del texto según nos convienen.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico. X es $\boldsymbol{T}_1$ si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen U y V abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$ y $y \notin U$.

La siguiente caracterización de la propiedad T_1 es inmediata, por lo que no la demostramos.

Proposición 1.1.2. *Sea X un espacio topológico. X es T_1 si, y solo si, los conjuntos unipuntuales son cerrados.*

Definición 1.1.3. Sea X un espacio topológico. X es **Hausdorff** si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen U y V abiertos disyuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Ejemplo 1.1.4. Si X es un espacio infinito y tiene la topología cofinita, entonces no es Hausdorff pero sí T_1.

Definición 1.1.5. Sea X un espacio topológico. X es **regular** si para cualesquiera F cerrado y $x \in X \setminus F$, existen U y V abiertos disyuntos tales que $F \subseteq U$ y $x \in V$.

Ejemplo 1.1.6. Todo espacio métrico es regular.

Proposición 1.1.7. *Si X es un espacio regular y T_1, entonces es Hausdorff.*

La siguiente caracterización de un espacio regular es bien conocida. Como la usamos bastante incluimos la demostración.

Proposición 1.1.8. *Sea X un espacio topológico. X es regular si, y solo si, para todo U abierto y $x \in U$, existe W abierto tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.*

Demostración. Supongamos que X es regular. Sea U abierto y $x \in U$. Como $X \setminus U$ es cerrado y $x \notin X \setminus U$, existen abiertos V y W disyuntos con $X \setminus U \subseteq V$ y $x \in W$. Veamos que $\overline{W} \subseteq U$. Como $X \setminus U \subseteq V$, entonces $X \setminus V \subseteq U$. Así, dado que $W \subseteq X \setminus V$ que es cerrado, entonces $\overline{W} \subseteq X \setminus V \subseteq U$. Sigue que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.

Probemos la recíproca. Sea F cerrado y $x \notin F$. Como $x \in X \setminus F$ que es abierto, entonces existe W abierto tal que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus F$. Sea $V = X \setminus \overline{W}$. Tenemos que $F \subseteq V$ que es abierto y $V \cap W = \emptyset$. De esto, X es regular. □

Definición 1.1.9. Sea X un espacio topológico. X es **normal** si dados F y G cerrados disyuntos, existen U y V abiertos disyuntos tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

El siguiente resultado lo usamos en 1.1.15. Su prueba es análoga a la de 1.1.8, por lo que no la incluimos.

Proposición 1.1.10. *Sea X un espacio topológico. X es normal si, y solo si, dados $F \subseteq U \subseteq X$ con F cerrado y U abierto, entonces existe W abierto tal que $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.*

Definición 1.1.11. Sea X un espacio topológico. X es $\boldsymbol{D_2}$ si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen U y V abiertos-cerrados disyuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Notemos que todo espacio D_2 es Hausdorff.

Definición 1.1.12. Sea X un espacio topológico. X es **cero dimensional** si admite una base de abiertos-cerrados y es T_1.

Finalizamos mostrando que todo espacio cero dimensional es D_2 y regular. En la siguiente parte de la sección probamos que la recíproca es cierta en espacios numerables.

Teorema 1.1.13. *Sea X un espacio topológico. Si X es cero dimensional, entonces X es D_2 y regular.*

Demostración. Veamos que X es D_2. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sabemos que X es T_1 y admite un base de abiertos-cerrados. De esto, existe U abierto de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$ y V abierto-cerrado tal que $x \in V \subseteq U$. Tomemos $W = X \setminus V$. Entonces W es abierto-cerrado y $y \in W$. Concluimos que X es D_2.

Ahora probemos que X es regular. Sean U abierto y $x \in U$. Existe V abierto-cerrado tal que $x \in V = \overline{V} \subseteq U$. Así, X es regular. □

1.1.2. Espacios numerables En esta segunda parte demostramos que si un espacio es numerable, regular y Hausdorff, entonces es cero dimensional. Para esto, recordamos y probamos algunos resultados para espacios numerables.

Empezamos probando que si un espacio es numerable y regular, entonces es normal. Este resultado es esencial porque trabajamos con espacios numerables.

Teorema 1.1.14. *Sea X un espacio topológico. Si X es numerable y regular, entonces X es normal.*

Demostración. Sean $F \subseteq U \subseteq X$ con F cerrado y U abierto. Usaremos 1.1.10 para probar que X es normal, esto es, construiremos W abierto tal que $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.

Si F es finito, la existencia de W sigue fácilmente de 1.1.8. Sea F infinito. Fijemos las enumeraciones $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Construiremos por recursión una sucesión no decreciente de abiertos $(W_n)_n$ tal que $f_n \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta sucesión tomaremos $W = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} W_n$. La construcción se ilustra en 1.1.
Por 1.1.8, existe W_0 abierto tal que $f_0 \in W_0 \subseteq \overline{W_0} \subseteq U$. Si $x_0 \notin \overline{W_0} \cup F$, esto es, $x_0 \in X \setminus (\overline{W_0} \cup F)$, entonces por 1.1.8 existe O_0 abierto tal que $x_0 \in O_0$ y $\overline{O_0} \cap (\overline{W_0} \cup F) = \emptyset$. Si $x_0 \in \overline{W_0} \cup F$, tomemos $O_0 = \emptyset$.

Definamos $U_1 = U \setminus \overline{O_0}$. Así, existe W_1 abierto tal que $f_1 \in W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq U_1$. Como $W_0 \cup W_1$ es abierto y $\overline{W_0 \cup W_1} = \overline{W_0} \cup \overline{W_1} \subseteq U_1$, podemos asumir que $W_0 \subseteq W_1$. Si $x_1 \notin \overline{W_1} \cup F$, entonces existe O_1 abierto tal que $x_1 \in O_1$ y $\overline{O_1} \cap (\overline{W_1} \cup F) = \emptyset$. Si $x_1 \in \overline{W_1} \cup F$, $O_1 = \emptyset$.

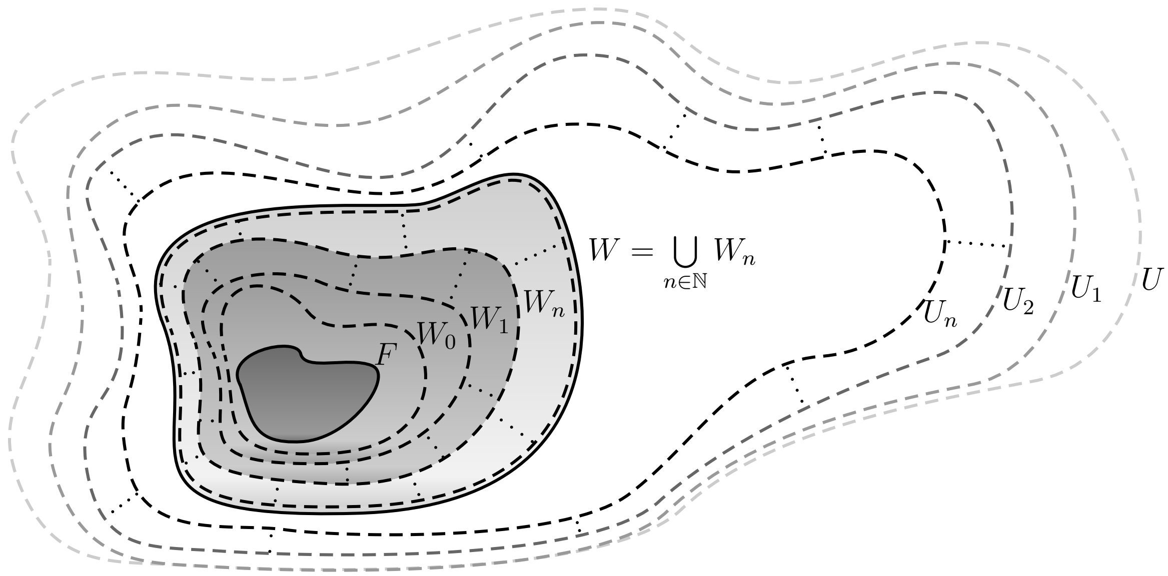

Figura 1.1: Sucesión $(W_n)_n$.

Para la recursión, supongamos que hemos construido U_n, O_n y W_n abiertos tales que:

I) $f_n \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq U_n$ y $W_{n-1} \subseteq W_n$.

II) Si $x_n \notin \overline{W_n} \cup F$, entonces $x_n \in O_n$ y $\overline{O_n} \cap (\overline{W_n} \cup F) = \emptyset$. En caso contrario, $O_n = \emptyset$.

Definamos $U_{n+1} = U_n \setminus \overline{O_n}$. Así, existe W_{n+1} abierto tal que $f_{n+1} \in W_{n+1} \subseteq \overline{W_{n+1}} \subseteq U_{n+1}$ y $W_n \subseteq W_{n+1}$. Ahora, si $x_{n+1} \notin \overline{W_{n+1}} \cup F$, tomemos O_{n+1} a un abierto tal que $x_{n+1} \in O_{n+1}$ y $\overline{O_{n+1}} \cap (\overline{W_{n+1}} \cup F) = \emptyset$. Si $x_{n+1} \in \overline{W_{n+1}} \cup F$, entonces $O_{n+1} = \emptyset$.

Sea

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Es claro que W es abierto y $F \subseteq W$. Verifiquemos que $\overline{W} \subseteq U$. Sea $x \notin U$ y n tal que $x = x_n$. Sabemos que $x_n \in O_n$ abierto y $O_n \cap W = \emptyset$, por lo tanto, $x_n \notin \overline{W}$. $\square$

Recordemos que todo espacio X Lindelöf (es decir, toda cubierta abierta de X admite una subcubierta numerable) y regular es normal. Por tanto, una prueba inmediata del teorema anterior sigue de que todo espacio numerable es claramente Lindelöf.

A continuación, probamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.1.15. *Sea X un espacio topológico. Si X es numerable, Hausdorff y regular, entonces X es cero dimensional.*

Demostración. Como X es Hausdorff entonces es T_1. Sean U abierto y $x \in U$. Sabemos que si existe W abierto-cerrado tal que $x \in W \subseteq U$, entonces X admite una base de abiertos-cerrados.

Construiremos recursivamente una sucesión de abiertos $(W_n)_n$ tal que $x \in W_0$ y $\overline{W_n} \subseteq W_{n+1} \subseteq U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta, tomaremos $W = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$.

Fijemos una enumeración $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por 1.1.8, existe W_0 tal que $x \in W_0 \subseteq \overline{W_0} \subseteq U$. Si $x_0 \notin \overline{W_0}$, entonces existe O_0 abierto con $x \in O_0$ y $\overline{O_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset$. Si $x_0 \in \overline{W_0}$, tomemos $O_0 = \emptyset$.

Definamos $U_1 = U \setminus \overline{O_0}$. Como X es normal por 1.1.14, por 1.1.10 existe W_1 abierto con $\overline{W_0} \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq U_1$. Supongamos que $x_1 \notin \overline{W_1}$, entonces existe O_1 abierto tal que $x_1 \in O_1$ y $\overline{O_1} \cap \overline{W_1} = \emptyset$. Si $x_1 \in \overline{W_1}$, tomemos $O_1 = \emptyset$. Como se esperaría, definamos $U_2 = U_1 \setminus \overline{O_1}$.

Sigamos recursivamente. Supongamos que hemos contruido U_n, W_n y O_n abiertos tales que:

I) $\overline{W_{n-1}} \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq U_n$.

II) Si $x_n \notin \overline{W_n}$, entonces $x_n \in O_n$ y $\overline{O_n} \cap \overline{W_n} = \emptyset$. En caso contrario, $O_n = \emptyset$.

Definamos $U_{n+1} = U_n \setminus \overline{O_n}$. Por 1.1.10, existe W_{n+1} tal que $\overline{W_n} \subseteq W_{n+1} \subseteq \overline{W_{n+1}} \subseteq U_{n+1}$. Definamos por último O_{n+1}. Si $x_{n+1} \notin \overline{W_{n+1}}$, tomemos O_{n+1} a un abierto tal que $x_{n+1} \in O_{n+1}$ y $\overline{O_{n+1}} \cap \overline{W_{n+1}} = \emptyset$. Si $x_{n+1} \in \overline{W_{n+1}}$, entonces $O_{n+1} = \emptyset$. La construcción se ilustra en 1.2.
Con la sucesión formada, tomemos

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Claramente W es abierto. Veamos que W es cerrado. Sea $x_n \in \overline{W}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \notin \overline{W_n}$ entonces $x_n \in O_n$. Como $O_n \cap W = \emptyset$, entonces $x_n \notin \overline{W}$. De esto, $x_n \in \overline{W_n} \subseteq W_{n+1} \subseteq W$. Así, $\overline{W} \subseteq W$. $\square$

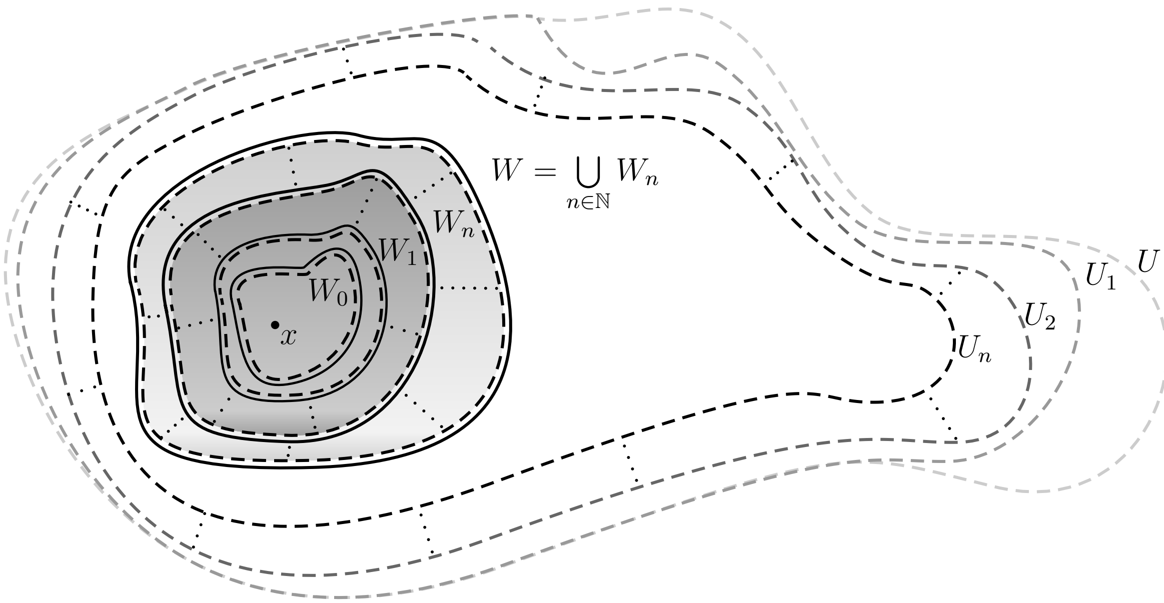

Figura 1.2: Construcción de W.

Probaremos de otra forma este último resultado. Para esto, usaremos el lema de Urysohn, pero solo daremos su enunciado. Puede encontrarse una demostración del lema en [2].

Lema 1.1.16. *(Lema de Urysohn). Sea X un espacio topológico. Entonces, X es normal si, y solo si, dados dos cerrados disjuntos A y B no vacíos, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.*

Demostración alternativa de 1.1.15. Es inmediato que X es T_1. Veamos que X admite una base de abiertos-cerrrados. Sean U un abierto de X y $x \in U$. Por 1.1.14, X es normal. Como $X \setminus U$ y $\{x\}$ son cerrados, por 1.1.16 existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(X \setminus U) = \{0\}$ y $f(x) = 1$.

Como X es numerable, existe $r \in (0,1) \setminus f(X)$. De esto, $x \in f^{-1}((r,1]) \subseteq U$. Probemos que $f^{-1}((r,1])$ es abierto-cerrado. Como $[0,r)$ y $(r,1]$ son abiertos de $[0,1]$, entonces $f^{-1}([0,r))$ y $f^{-1}((r,1])$ son abiertos disyuntos de X. Además, $X = f^{-1}([0,r)) \cup f^{-1}((r,1])$. Así, $f^{-1}((r,1])$ es abierto-cerrado. $\square$

En particular, 1.1.15 prueba que todo espacio regular, T_1 y numerable es D_2, sin embargo, el recíproco no es válido, como lo muestra 2.1.4.

---

[2] Elder CAMARGO Javier y VILLAMIZAR. *Topología General*. Ediciones UIS, 2019.

Ejemplo 1.1.17. $\mathbb{Q}$ con la topología usual es cero dimensional, pues admite como base de abiertos-cerrados al conjunto

$$\mathcal{B} = \{(r, s) \cap \mathbb{Q} : r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

El siguiente corolario lo usamos en la prueba de 2.1.7.

Corolario 1.1.18. *Sean X un espacio numerable, regular y T_1 sin puntos aislados. Sea U un abierto, entonces U puede escribirse como una unión enumerable de abiertos-cerrados no vacíos disyuntos dos a dos.*

Demostración. Para empezar, por 1.1.15, X es cero dimensional y por lo tanto, D_2. Sea U un abierto. Como X no tiene puntos aislados y es D_2, entonces U es infinito. Consideremos una enumeración $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Como X es D_2, existe V abierto tal que $u_0 \in V \subsetneq U$. Así, como X admite una base de abiertos-cerrados, existe W_0 abierto-cerrado tal que $u_0 \in W_0 \subseteq V \subsetneq U$.

Definamos $U_1 = U \setminus W_0$ y $k_1 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : u_m \in U_1\}$. Existe W_1 abierto-cerrado tal que $u_{k_1} \in W_1 \subsetneq U_1$.

Siguiendo recursivamente, supongamos que hemos definido k_n, W_n abierto-cerrado y U_n abierto tales que:

I) $k_n = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : u_m \in U_n\}$.

II) $u_{k_n} \in W_n \subsetneq U_n$.

Definamos $U_{n+1} = U_n \setminus W_n$ y $k_{n+1} = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : u_m \in U_{n+1}\}$. Existe W_{n+1} abierto-cerrado tal que $u_{k_{n+1}} \in W_{n+1} \subsetneq U_{n+1}$.

Por la forma en que tomamos los k_n, sigue que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$. □

Nos referiremos a $\mathbb{Q}$ como el conjunto de los números racionales con la topología inducida por la métrica usual. Claramente, $\mathbb{Q}$ es un espacio métrico numerable sin puntos aislados.

De hecho, $\mathbb{Q}$ es el único espacio de tales características, como lo muestra el siguiente resultado. Su demostración se encuentra en [3].

Teorema 1.1.19. *Sea X un espacio topológico. Si X es numerable, metrizable y sin puntos aislados, entonces $X \approx \mathbb{Q}$.*

Esta caracterización de $\mathbb{Q}$ la usaremos para construir topologías sobre $\mathbb{Z}$ homeomorfas a $\mathbb{Q}$.

El siguiente resultado es parte del teorema de metrización de Urysohn. Su demostración se encuentra en [2].

Teorema 1.1.20. *Sea X un espacio topológico. Si X es regular, $T1$ y admite una base numerable, entonces X es metrizable.*

1.2. Un teorema sobre órdenes parciales

En esta sección presentamos una versión débil del axioma de Martin para espacios numerables, la cual puede demostrarse. Dicha versión la usamos al momento de construir funciones con propiedades específicas, como lo veremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.2.1. Sea $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ si para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

A continuación mostramos la versión débil del axioma de Martin para espacios numerables.

Teorema 1.2.2. *Sea $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathcal{D} = \{D_n \subseteq \mathbb{P} : n \in \mathbb{N}\}$ una colección numerable de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, entonces existe una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\mathcal{C} \cap D_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Construiremos la cadena recursivamente. Sea $d_0 \in D_0$. Como D_1 es denso en $\mathbb{P}$ y $d_0 \in \mathbb{P}$, existe $d_1 \in D_1$ tal que $d_1 \leq d_0$. Siguiendo recursivamente, supongamos que encontramos $d_n \in D_n$ tal que $d_n \leq d_{n-1}$, para algún $n \geq 1$. Como D_{n+1} es denso en $\mathbb{P}$, existe $d_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $d_{n+1} \leq d_n$.

---

[3] Frederick DASHIELL. “Countable Metric Spaces Without Isolated Points”. En: *The American Mathematical Monthly* 128 (mar. de 2021), págs. 265-267. DOI: 10.1080/00029890.2021.1856586.

Tomemos $\mathcal{C} = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como

$$... \leq d_{n+1} \leq d_n \leq ... \leq d_1 \leq d_0,$$

entonces $\mathcal{C}$ es una cadena. Claramente $d_n \in \mathcal{C} \cap D_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Recordemos que una función es un conjunto de pares ordenados, en este sentido, podemos decir que una función contiene a otra. Además, la unión de una $\subseteq$-cadena de funciones es una función. Con esto en cuenta, terminamos esta sección con una aplicación de la versión débil del axioma de Martin.

Corolario 1.2.3. *Sean X y Y espacios topológicos. Definamos*

$$\mathbb{P} = \{h : h \text{ es un homeomorfismo de un abierto de } X \text{ en un abierto de } Y\}.$$

Ordenemos $\mathbb{P}$ por inclusión inversa, esto es, $f \leq h$ si $f \supseteq h$.

Si $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección numerable de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, entonces existen abiertos U de X, V de Y y un homeomorfismo $g : U \to V$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $h \in D_n$ con $g \supseteq h$.

Demostración. Por 1.2.2, existe una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D_n \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$g = \bigcup \mathcal{C}.$$

Tenemos que g es una función, pues $\mathcal{C}$ es una cadena de funciones. Sean

$$U = dom(g) = \bigcup_{h \in \mathcal{C}} \text{dom}(h) \text{ y } V = ran(g) = \bigcup_{h \in \mathcal{C}} \text{ran}(h).$$

Claramente $g : U \to V$ es sobreyectiva. Mostremos que g es inyectiva. Sean $x, y \in U$ con $x \neq y$. Existen $f, l \in \mathcal{C}$ tales que $x \in$ dom(f) y $y \in$ dom(l). Tomemos $h = \min\{f, l\}$. Así, $x, y \in$ dom(h). Como h es inyectiva, entonces $h(x) = g(x) \neq g(y) = h(y)$. Concluimos de esto que g es una biyección.

Veamos que g es continua. Sean $x \in U$ y $h \in \mathcal{C}$ tales que $x \in$ dom(h). Como $g\big|_{\text{dom}(h)} = h$ que es continua en x, entonces g es continua en x. Dado que x fue tomado arbitrariamente, entonces g es continua. La demostración de la continuidad de g^{-1} es análoga.

Para terminar, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $h \in C \cap D_n$. Como $g = \bigcup \mathcal{C}$, es claro que $g \supseteq h$ $\square$

1.3. Topologías sobre grupos

Dado un espacio X, el conjunto de los autohomeomorfismos de X resulta ser un grupo con la composición de funciones. Para este, presentamos algunas propiedades que serán importantes más adelante. Además, intruducimos el concepto de grupo topopológico, pues si bien la tesis no está dedicada a su estudio, estos son el ejemplo más común de espacios homogéneos.

Escribiremos xy en lugar de $x * y$ para la operación binaria en un grupo $(G, *)$, a menos que haya ambigüedad. Además, escribiremos al elemento identidad del grupo como 1.

En el siguiente lema mostramos una forma de definir una operación de grupo sobre un conjunto numerable.

Lema 1.3.1. *Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ un conjunto numerable. Consideremos*

$$\begin{aligned} *\colon X \times X &\to X \\ (x_i, x_j) &\mapsto x_{i+j}. \end{aligned}$$

Entonces, $(X, *)$ es un grupo cíclico.

Demostración. Veamos primero que $(X, *)$ es un grupo. Como ϕ está bien definida, $*$ es una operación binaria. Sean $x_i, x_j, x_k \in X$. Verifiquemos que se cumplen los axiomas de grupo:

I) Como $x_i * (x_j * x_k) = x_{i+j+k} = (x_i * x_j) * x_k$, entonces ϕ es asociativa;

II) Claramente, $x_0 * x_i = x_i * x_0 = x_i$, entonces existe el elemento neutro;

III) Para x_i, $x_{-i} \in X$ y $x_i * x_{-i} = x_{-i} * x_i = x_0$, por lo que x_i tiene elemento inverso.

Así, $(X, *)$ es un grupo. Como $X = \{(x_1)^n : n \in \mathbb{Z}\}$, entonces es cíclico. $\square$

En el desarrollo de la tesis utilizamos equivalencias que relacionan a un espacio topológico X con un grupo G mediante $\mathcal{H}(X)$, al que definimos a continuación.

Definición 1.3.2. Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathcal{H}(X)$ al conjunto de todos los autohomeomorfismos de X, esto es, todos los homeomorfismos de X en X.

Teorema 1.3.3. $(\mathcal{H}(X), \circ)$ *es un grupo.*

Demostración. Sean $f, g, h \in \mathcal{H}(X)$.

I) Sabemos que $f \circ g$ es un homeomorfismo de X en X, esto es, $f \circ g \in \mathcal{H}(X)$;

II) Como la composición de funciones es siempre asociativa, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;

III) Sea $x : X \to X$ la función identidad, como x es un homeomorfismo, entonces $x \in \mathcal{H}(X)$ y $x \circ f = f \circ x = f$;

IV) Para f, f^{-1} es un homeomorfismo de X en X, así, $f^{-1} \in \mathcal{H}(X)$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$.

De esto, concluimos que $(\mathcal{H}(X), \circ)$ es un grupo. □

A continuación, definimos cuándo un subgrupo de $\mathcal{H}(X)$ es transitivo o efectivo. Estos conceptos nos permiten relacionar a un grupo $(G, *)$ con X, como se muestra en 2.1.6.

Definición 1.3.4. Sea G un subgrupo de $\mathcal{H}(X)$, entonces G es llamado

I) **transitivo** si, para cualesquiera $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$;

II) **efectivo** si, para todo $g \in G$, con g diferente de la identidad, g no tiene puntos fijos.

Ahora presentamos el concepto de grupo topológico junto a algunos ejemplos.

Definición 1.3.5. Un **grupo topológico** es un grupo $(G, *)$ dotado de una topología τ, tal que

I) $\phi : G \times G \to G$ con $\phi(x, y) = x * y$, es continua;

II) $\psi : G \to G$ con $\psi(x) = x^{-1}$, es continua.

Ejemplo 1.3.6. Cualquier grupo es un grupo topológico con la topología discreta o indiscreta.

Ejemplo 1.3.7. Los grupos $GL(n,\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, de las matrices invertibles reales o complejas, son grupos topológicos como subespacios de $\mathbb{K}^{n^2}$ con la topología producto.

El siguiente concepto es una versión débil de los grupos topológicos.

Definición 1.3.8. Sea τ una topología sobre un grupo $(G,*)$. Diremos que τ es **$*$-invariante por la izquierda**, o simplemente $*$-invariante si $gU\in\tau$, para cualesquiera $g\in G$ y $U\in\tau$.

En el ejemplo 2.4.2 de la sección 2.4 mostramos una topología $+$-invariante sobre $\mathbb{Z}$ que no hace a $\mathbb{Z}$ un grupo topológico.

En el siguiente resultado mostramos que en un grupo topológico, la función resultante de operar por un elemento fijo a la izquierda es un homeomorfismo. Dicho resultado sigue siendo válido si la topología es $*$-invariante.

Teorema 1.3.9. *Sea $(G,*)$ con τ un grupo topológico. Para cualquier $g\in G$, la función*

$$\begin{aligned}\phi_g\colon G&\to G\\ x&\mapsto gx,\end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Es inmediato que ϕ_g es una biyección. Para la continuidad, notemos que ϕ_g puede entenderse como una restricción de la función continua ϕ de 1.3.5. Entonces, ϕ_g es continua. Análogamente, ϕ_g^{-1} es continua pues $\phi_g^{-1}=\phi_{g^{-1}}$. $\square$

En el siguiente corolario mostramos que la topología τ de un grupo topológico es $*$-invariante. Por esto nos referimos a los espacios con topologías $*$-invariantes como una versión débil de los grupos topológicos.

Corolario 1.3.10. *Sea $(G,*)$ con τ un grupo topológico, entonces τ es $*$-invariante.*

Demostración. Sean $g\in G$ y $U\in\tau$. Como ϕ_g es un homeomorfismo, $\phi_g(U)=gU\in\tau$. $\square$

Por último, presentamos una caracterización para determinar cuándo un espacio (X,τ) no admite ninguna operación de grupo $*$ que haga a τ $*$-invariante. Naturalmente, esto implica que no admite una estructura de grupo topológico.

Teorema 1.3.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico con $|X| > 1$. Si todo homeomorfismo $h : X \to X$ tiene algún punto fijo, entonces X no admite ninguna operación de grupo $*$ que haga a τ $*$-invariante.*

Demostración. Supongamos $*$ una operación de grupo sobre X tal que τ es $*$-invariante. Sean $g \neq 1 \in X$ y ϕ_g el homeomorfismo que definimos en 1.3.9. Como ϕ_g tiene algún punto fijo, existe $x \in X$ tal que $\phi_g(x) = gx = x$. De esto, $g = 1$, una contradicción. Por tanto, τ no puede ser $*$-invariante. $\square$

Ejemplo 1.3.12. En el cubo de Hilbert, $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, todo autohomeomorfismo tiene algún punto fijo. Así, este espacio no admite una operación de grupo $*$ que haga a su topología $*$-invariante, y por tanto, no admite una estructura de grupo topológico.

En adelante, denotaremos a un grupo $(G, *)$ con una topología τ como $(G, \tau, *)$.

2. Espacios homogéneos numerables

Intuitivamente hablando, un espacio X es homogéneo si cualquiera dos puntos $x, y \in X$ son indistinguibles topológicamente. Por ejemplo, si en un espacio homogéneo un conjunto unipuntual es abierto, inmediatamente todos los conjuntos unipuntuales lo son y la topología es entonces discreta.

En este capítulo probaremos que si un espacio X es D_2 numerable homogéneo, entonces para cualquier grupo numerable $(G, *)$ existe una topología $*$-invariante ρ sobre G tal que $(G, \rho) \approx X$. Estudiaremos el caso de $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ en una sección aparte y mostraremos las topologías $+$-invariantes ρ que hacen a $(\mathbb{Z}, \rho)$ homeomorfo a $\mathbb{Q}$ y S_ω, respectivamente.

2.1. Espacios homogéneos

Aquí definiremos formalmente los espacios homogéneos y mostraremos su relación con los conceptos del capítulo 1.

Probamos que un espacio X puede verse como (G, ρ), en donde $(G, *)$ es un grupo y ρ es una topología $*$-invariante sobre G siempre y cuando G sea isomorfo a algún subgrupo efectivo transitivo de $\mathcal{H}(X)$.

Además, mostramos un implicación muy útil para espacios D_2 numerables homogéneos sin puntos aislados.

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico. X es **homogéneo** si, para cualesquiera $x, y \in X$, existe un autohomeomorfismo h de X con $h(x) = y$.

Ejemplo 2.1.2. Todo espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es homogéneo.

Ejemplo 2.1.3. $[0, 1]$ no es homogéneo.

Ejemplo 2.1.4. Sea X un espacio y $A \subseteq X$. Diremos que A es nunca denso si el interior de su cerradura es vacío. $\mathbb{Q}$ con la topología

$$\tau = \{U \setminus A : U \text{ es abierto y } A \text{ es nunca denso (ambos bajo la topología usual de } \mathbb{Q})\},$$

es un ejemplo de un espacio D_2 numerable homogéneo y no regular.

En el siguiente resultado mostramos que todo espacio cuya topología es $*$-invariante para alguna operación de grupo $*$ es homogéneo. En particular, esto muestra que todo grupo topológico es un espacio homogéneo.

Teorema 2.1.5. *Todo espacio $(X, \tau, *)$ con τ $*$-invariante es homogéneo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Existe $g \in X$ tal que $gx = y$. Consideremos la función ϕ_g definida en 1.3.9. Esta es un autohomeomorfismo de X con $\phi_g(x) = y$. Así, X es homogéneo. $\square$

No es cierto que si un espacio es homogéneo entonces es un grupo topológico. El cubo de Hilbert, $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, es homogéneo pero no admite una estructura de grupo topológico.

El siguiente resultado es fundamental para los objetivos de la tesis. En él probamos que la existencia de una topología $*$-invariante ρ en G es equivalente a que G sea isomorfo a algún subgrupo efectivo transitivo de $\mathcal{H}(X)$. Además, mostramos que si $G = \mathbb{Z}$, es suficiente con que dicho subgrupo sea transitivo.

Teorema 2.1.6. *Sea X un espacio topológico y $(G, *)$ un grupo. Entonces*

I) *$\mathcal{H}(X)$ es transitivo si, y solo si, tiene un subgrupo transitivo;*

II) *Existe una topología $*$-invariante ρ en G tal que $(G, \rho) \approx X$ si, y solo si, $\mathcal{H}(X)$ tiene un subgrupo efectivo transitivo isomorfo a $(G, *)$;*

III) *Cualquier subgrupo transitivo de $\mathcal{H}(X)$ que sea isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$, es efectivo.*

Demostración. Supongamos X un espacio topológico y G un grupo. Probaremos cada inciso.

I) Si $\mathcal{H}(X)$ es transitivo, entonces la implicación es directa. Probemos la recíproca. Supongamos que $\mathcal{H}(X)$ tiene un subgrupo transitivo J. Sean $x, y \in X$. Como J es transitivo, existe $h \in J$ tal que $h(x) = y$. Así, como $J \subseteq \mathcal{H}(X)$, entonces $h \in \mathcal{H}(X)$. De esto, $\mathcal{H}(X)$ es transitivo.

II) Para la primer implicación, supongamos ρ una topología $*$-invariante sobre G tal que $(G, \rho) \approx X$. De esto, tomemos $f : G \to X$ un homeomorfismo.

Construiremos un isomorfismo $\phi : G \to J$ tal que J sea un subgrupo efectivo transitivo de $\mathcal{H}(X)$. Para esto, dado $g \in G$, definamos

$$\begin{aligned} \phi_g \colon X &\to X \\ x &\mapsto f(g * f^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Claramente ϕ_g es biyectiva, pues su inversa es $\phi_{g^{-1}}$. Veamos que ϕ_g es abierta. Sea U un abierto de X. Como $f^{-1}(U) \in \rho$ y ρ es $*$-invariante, $g * f^{-1}(U) \in \rho$. Así, $f(g * f^{-1}(U)) = \phi_g(U)$ es un abierto de X. Análogamente, $\phi_{g^{-1}}$ es también abierta. De lo anterior, ϕ_g es un homeomorfismo.

Definamos ahora

$$\begin{aligned} \phi \colon G &\to \mathcal{H}(X) \\ g &\mapsto \phi_g. \end{aligned}$$

Sean $g, h \in G$. Tenemos que

$$\phi(g * h) = f\left(g * h * f^{-1}(x)\right) = f\left(g * f^{-1}\left(f\left(h * f^{-1}(x)\right)\right)\right) = \phi(g) \circ \phi(h).$$

Así, ϕ es un homomorfismo y $\phi(G)$ es un subgrupo de $\mathcal{H}(X)$.

Probemos que $\phi(G)$ es transitivo. Sean $x, y \in X$. Tomemos $g = f^{-1}(y) * (f^{-1}(x))^{-1} \in G$. Sigue que,

$$\phi_g(x) = f(f^{-1}(y) * (f^{-1}(x))^{-1} * f^{-1}(x)) = y.$$

Ahora probemos que $\phi(G)$ es efectivo. Supongamos que para algunos $g \in G$ y $x \in X$, $\phi_g(x) = x$, esto es, $f(g * f^{-1}(x)) = x$. Así, $g * f^{-1}(x) = f^{-1}(x)$. En consecuencia, $g = 1$ y ϕ_g es la identidad.

Para acabar, debemos verificar que ϕ es inyectiva. Supongamos que para $g, h \in G$, $\phi_g = \phi_h$. Esto es, $\phi(g) \circ \phi^{-1}(h) = \phi(g) \circ \phi(h^{-1})$ es la función identidad. Tenemos que

$$\phi(g) \circ \phi(h^{-1}) = f\left(g * h^{-1} * f^{-1}(x)\right) = x.$$

De aquí, como f es una biyección, entonces $g * h^{-1} * f^{-1}(x) = f^{-1}(x)$. Por lo tanto, $g * h^{-1} = 1$ y $g = h$.

Probemos la recíproca. Supongamos que $\mathcal{H}(X)$ tiene un subgrupo J efectivo transitivo isomorfo a G. Así, tomemos $\phi : G \to J \subseteq \mathcal{H}(X)$ un isomorfismo.

Construiremos una biyección entre G y X para dotar de una topología $*$-invariante a G. Para esto, fijemos $z \in X$ y consideremos

$$\begin{aligned}\psi\colon G &\to X\\ g &\mapsto (\phi\,(g))\,(z).\end{aligned}$$

Veamos que ψ es biyectiva. Supongamos que $\psi(g) = \psi(h)$, con $g, h \in G$. De esto, $\phi(g)(z) = \phi(h)(z)$. Es claro que $\phi(g * h^{-1})(z) = z$. Como $\phi(G)$ es efectivo y ϕ inyectiva, entonces $g * h^{-1} = 1$, esto es, $g = h$. Así, ψ es inyectiva. Veamos que ψ es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Como $\phi(G)$ es transitivo, existe $\phi(g) \in \phi(G)$ tal que $\psi(g) = \phi(g)(z) = x$.

Definamos

$$\rho = \{\psi^{-1}(U) : U \text{ es abierto de } X\}.$$

Claramente ρ es una topología sobre G y $\psi : G \to X$ es un homeomorfismo. Probemos que ρ es $*$-invariante. Sean $g \in G$ y $U \in \tau$. Veamos que $\psi(g * U)$ es un abierto de X. Sigue de la definición de ψ y de que ϕ es un homomorfismo que

$$\psi(g * U) = \phi(g * U)(z) = (\phi(g) \circ \phi(U))(z) = \phi\,(g)\,(\phi\,(U)\,(z)) = \phi(g)(\psi(U)).$$

Como $\phi(g)$ es un autohomeomorfismo de X y $\psi(U)$ es un abierto de X, entonces $\phi(g)(\psi(U)) = \psi(g * U)$ es un abierto de X. De esto, $g * U \in \rho$.

III) Sean J un subgrupo transitivo de $\mathcal{H}(X)$ isomorfo a $\mathbb{Z}$ y $\phi : J \to \mathbb{Z}$ un isomorfismo. Supongamos que J no es efectivo, esto es, existe $h \in J$ con h diferente de la identidad tal que $h(x) = x$, para algún $x \in X$. Supongamos que $\phi(h) = n$ es positivo, pues si $\phi(h)$ es negativo, entonces $\phi(h^{-1})$ es positivo y $h^{-1}(x) = x$.

Consideremos $g = \phi^{-1}(1) \in J$. Como

$$\phi(\underbrace{g \circ ... \circ g}_{n\ veces}) = \underbrace{1 + ... + 1}_{n\ veces} = n = \phi(h),$$

entonces, denotando $\underbrace{g \circ ... \circ g}_{n\ veces}$ como g^n, tenemos que $g^n = h$.

Sea m un número entero. Por el algoritmo de la división, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < n$ tales que $m = nq + r$. De esto,

$$g^m(x) = ((g^n)^q \circ g^r)(x) = (g^r \circ (h)^q)(x) = g^r(x).$$

Entonces,

$$\{g^m(x) : m \in \mathbb{Z}\} = \{x, g(x), g^2(x), ..., g^{n-1}(x)\}.$$

Mostremos que J no es transitivo. En efecto, sea $f \in J$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(f) = m$, esto es, $f = g^m$. Así,

$$f(x) = g^m(x) \in \{x, g(x), g^2(x), ..., g^{n-1}(x)\}.$$

Con lo anterior, como X es infinito, existe $y \in X$ tal que $y \notin \{x, g(x), g^2(x), ..., g^{n-1}(x)\}$. Así, para toda función $f \in J$, $f(x) \neq y$. $\square$

Sean X y Y espacios con $x \in X$ y $y \in Y$, escribiremos $(X, x) \approx (Y, y)$ si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ con $h(x) = y$.

En el siguiente teorema probamos una serie de equivalencias. La más importante es que si un espacio X es D_2 numerable homogéneo sin puntos aislados, entonces cualesquiera dos abiertos-cerrados U y V de X son homeomorfos. De hecho, $(U, x) \approx (V, y)$, para cualesquiera $x \in U$ y $y \in V$.

Teorema 2.1.7. *Sea X un espacio que es D_2 numerable sin puntos aislados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I) *X es homogéneo;*

II) *para cualesquiera $x, y \in X$, existen vecindades abiertas-cerradas U de x y V de y tales que $(U, x) \approx (V, y)$;*

III) *para cualesquiera $x, y \in X$ y vecindades abiertas-cerradas U de x y V de y, existen vecindades abiertas-cerradas $A \subseteq U$ de x y $B \subseteq V$ de y tales que $(A, x) \approx (B, y)$;*

IV) *$(U, x) \approx (V, y)$, para cualesquiera abiertos-cerrados $U, V \subseteq X$ y cualesquiera $x \in U$ y $y \in V$.*

Más aún, si X es regular, entonces la siguiente afirmación es equivalente a 1:

V) *$(U, x) \approx (V, y)$, para cualesquiera abiertos $U, V \subseteq X$ y cualesquiera $x \in U$ y $y \in V$.*

Demostración. Probaremos las primeras implicaciones en el orden *1* $\Rightarrow$ *2* $\Rightarrow$ *3* $\Rightarrow$ *4* $\Rightarrow$ *1*.

1 $\Rightarrow$ *2*. Sean $x, y \in X$. Como X es homogéneo por *1*, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Claramente X es una vecindad abierta-cerrada de x y y.

2 $\Rightarrow$ *3*. Sean $x, y \in X$ y U y V vecindades abiertas-cerradas de x y y, respectivamente. Por *2*, existen vecindades abiertas-cerradas U_1 de x, V_1 de y y $h : U_1 \to V_1$ un homeomorfismo con $h(x) = y$. Tomemos $A = U \cap h^{-1}(V_1 \cap V) \subseteq U$ y $B = V \cap h(U_1 \cap U) \subseteq V$. Como A y B son la intersección de abiertos-cerrados, entonces son abiertos-cerrados.

Definamos $f = h|_A$. Claramente, $f : A \to f(A)$ es un homeomorfismo por ser una restricción de h. Hallemos $f(A)$.

$$f(A) = h(A) = h\left(U \cap h^{-1}(V_1 \cap V)\right) = h(U) \cap (V_1 \cap V).$$

Como $V_1 = h(U_1)$, tenemos que

$$f(A) = (h(U) \cap h(U_1)) \cap V = V \cap h(U_1 \cap U) = B.$$

De esto, ran$(f) = B$. Dado que $f(x) = y$, concluimos que $(A, x) \approx (B, y)$.

3 $\Rightarrow$ *4*. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos-cerrados, $x \in U$ y $y \in V$.

Construiremos un homeomorfismo $g : U \to V$ tal que $g(x) = y$. Consideremos $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los homeomorfismos h tales que:

I) dom(h) es una vecindad abierta-cerrada de x y dom$(h) \subseteq U$;

II) ran(h) es una vecindad abierta-cerrada de y y ran$(h) \subseteq V$;

III) $h(x) = y$;

IV) dom$(h) = U$ si, y solo si, ran$(h) = V$.

Ordenemos $\mathbb{P}$ parcialmente por inclusión inversa. Verifiquemos que $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Como X es D_2 y sin puntos aislados, existen abiertos-cerrados $U_1 \subsetneq U$ y $V_1 \subsetneq V$ tales que $x \in U_1$ y $y \in V_1$. Por *3*, existen vecindades abiertas-cerradas $A \subseteq U_1$ de x y $B \subseteq V_1$ de y para las que $(A, x) \approx (B, y)$. Sea $h : A \to B$ dicho homeomorfismo, entonces $h \in \mathbb{P}$.

Sean $u \in U$ y $v \in V$. Los conjuntos

$$A_u = \{h \in \mathbb{P} : u \in \text{dom}(h)\} \text{ y}$$

$$B_v = \{h \in \mathbb{P} : v \in \text{ran}(h)\}$$

son densos en $\mathbb{P}$. Como las pruebas son análogas, solo mostramos la densidad de A_u.

Probemos que A_u es denso en $\mathbb{P}$. Para esto, dado $f \in \mathbb{P}$, construiremos $h \in A_u$ tal que $h \leq f$, esto es, $h \supseteq f$. Si $u \in$ dom(f), tomemos $h = f$. Si $u \notin$ dom(f), entonces existe $w \in V \backslash$ran(f). Tenemos que $u \in U \backslash$dom(f) y $w \in V \backslash$ran(f), con dichos conjuntos abiertos-cerrados.

Como X no tiene puntos aislados, existen $u_1 \neq u$ y $w_1 \neq w$ en $U \setminus$ dom(f) y $V \setminus$ ran(f), respectivamente. Como X es D_2 y por *3*, existen vecindades abiertas-cerradas U_1 de u y V_1 de w tales que $U_1 \subseteq U \setminus$ dom(f), $V_1 \subseteq V \setminus$ ran(f), existe un homeomorfismo $l : U_1 \to V_1$ con $l(u) = w$, $u_1 \notin U_1$ y $w_1 \notin V_1$. Esto se ilustra en 2.1.
Definamos

$$h = f \cup l.$$

Es claro que h es un homeomorfismo y $h \supseteq f$ con $h \in A_u$, por lo cual, A_u es denso en $\mathbb{P}$. Análogamente se prueba que B_v es denso en $\mathbb{P}$.

Sea

$$\mathcal{D} = \{A_u : u \in U\} \cup \{B_v : v \in V\}.$$

Como $\mathcal{D}$ es una colección numerable, por 1.2.3 existe g un homemorfismo tal que para

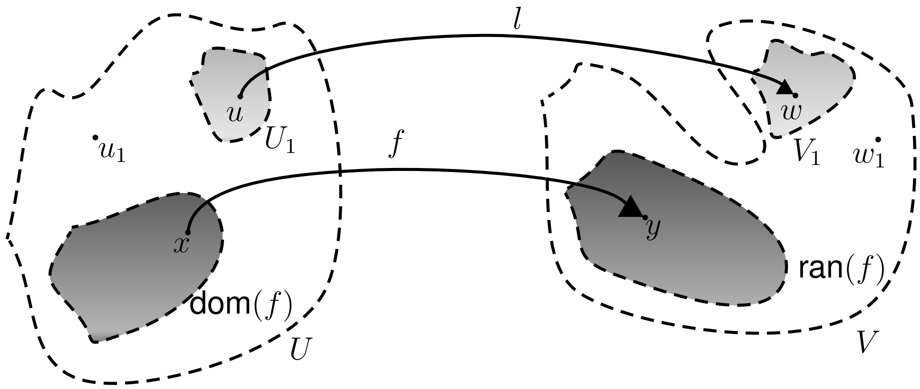

Figura 2.1: funciones f y l.

cualesquiera $u \in U$ y $v \in V$, existen $h \in A_u$ y $f \in B_v$ con $h, f \subseteq g$. De lo anterior, $g(x) = y$. Además, dom$(g) = U$ y ran$(g) = V$. Por lo tanto, $(U, x) \approx (V, y)$.

4 $\Rightarrow$ *1*. Sean $x, y \in X$. Tomemos $U = V = X$, que es una vecindad abierta-cerrada de x y y. Por *4*, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ con $h(x) = y$. Esto es que X es homogéneo.

Supongamos ahora que X es también regular. Es evidente que *5* $\Rightarrow$ *4*. Veamos la recíproca.

4 $\Rightarrow$ *5*. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos, $x \in U$ y $y \in V$. Por 1.1.18, tenemos las particiones

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ y } V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n,$$

donde U_n y V_n son abiertos-cerrados no vacíos, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in U_m$ y $y \in V_m$, para algún natural m. Por *4*, existe un homeomorfismo $h_n : U_n \to V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, podemos tomar $h_m(x) = y$. De esto, consideremos

$$h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n.$$

Claramente h es una función con $h(x) = y$, pues los U_n son disyuntos dos a dos al igual que los V_n. La función h es además un homeomorfismo con dom$(h) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = U$ y ran$(h) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = V$. De esto, $(U, x) \approx (V, y)$. $\square$

2.2. Topologías $+$-invariantes sobre $\mathbb{Z}$

Aquí probaremos que todo espacio D_2 numerable homogéneo es topológicamente equivalente a $(\mathbb{Z}, \rho)$, donde ρ es alguna topología $+$-invariante. En la siguiente sección, probamos dicho resultado para cualquier grupo numerable G, pero dicha prueba es más compleja, por lo que separamos el caso de $G = \mathbb{Z}$.

Iniciamos esta sección con uno de los teoremas más importantes que estudiamos. Para su prueba, recurrimos a una equivalencia porque no es práctico construir directamente una topología $+$-invariante sobre $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio D_2 numerable homogéneo, entonces existe una topología $+$-invariante ρ sobre $\mathbb{Z}$ tal que $(\mathbb{Z}, \rho)$ es homeomorfo a X.*

Para demostrar el teorema anterior recurriremos a la siguiente equivalencia.

Teorema 2.2.2. *Sea X un espacio D_2 numerable homogéneo. Existe una topología ρ sobre $\mathbb{Z}$ $+$-invariante tal que $(\mathbb{Z}, \rho) \approx X$ si, y solo si, existe un autohomeomorfismo ϕ de X tal que $\{\phi^n(z) : n \in \mathbb{Z}\} = X$, para todo $z \in X$.*

Demostración. Veamos la primer implicación. Supongamos que existe una topología ρ sobre $\mathbb{Z}$ $+$-invariante tal que $(\mathbb{Z}, \rho) \approx X$. Por 2.1.6, existe un homomorfismo $\psi : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}(X)$ inyectivo tal que $\psi(\mathbb{Z})$ es un subgrupo efectivo transitivo isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Claramente, $\psi(1)$ es un autohomeomorfismo de X. Como ψ es un homomorfismo, entonces $\psi(n) = \psi^n(1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Fijemos $z \in X$. Como $\psi(\mathbb{Z})$ es transitivo, sigue que para todo $x \in X$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\psi(n)(z) = x$, esto es, $\psi^n(1)(z) = x$. De esto, definamos

$$\phi = \psi(1).$$

Es claro que

$$\{\phi^n(z) : n \in \mathbb{Z}\} = X.$$

Como z fue tomado arbitrariamente, entonces esto se vale para todo $z \in X$.

Probemos la recíproca. Supongamos que existe $\phi : X \to X$ un homeomorfismo tal que

$\{\phi^n(z) : n \in \mathbb{Z}\} = X$, para todo $z \in X$. Consideremos

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathbb{Z} &\to \mathcal{H}(X) \\ n &\mapsto \phi^n. \end{aligned}$$

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\psi(m+n) = \phi^{m+n} = \phi^n \circ \phi^n = \psi(m) \circ \psi(n).$$

De esto, ψ es un homomorfismo. De hecho, ψ es inyectivo porque $\{\phi^n(z) : n \in \mathbb{Z}\} = X$, para todo $z \in X$ (caso contrario, dicho conjunto sería finito). Así, $\psi(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de $\mathcal{H}(X)$ isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Veamos que $\psi(\mathbb{Z})$ es transitivo. Sean $z, x \in X$. Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi^n(z) = \psi(n)(z) = x$. Con esto, $\psi(\mathbb{Z})$ es transitivo y por 2.1.6, es también efectivo. Así, $\mathcal{H}(X)$ tiene un subgrupo efectivo transitivo isomorfo a $\mathbb{Z}$, por lo que existe una topología $+$-invariante ρ en $\mathbb{Z}$ con $(\mathbb{Z}, \rho) \approx X$. $\square$

En 2.2.1, es claro que cuando X es además discreto la conclusión es trivial, pues podemos definir ρ sobre $\mathbb{Z}$ como la topología discreta. Así, cualquier biyección entre X y $(\mathbb{Z}, \rho)$ es un homeomorfismo. Resta analizar cuando X es no discreto, esto es, sin puntos aislados, pues es un espacio homogéneo. Para ello, usaremos 2.2.2.

Teorema 2.2.3. *Sea X un espacio D_2 numerable homogéneo sin puntos aislados. Existe un autohomeomorfismo ϕ de X tal que $\{\phi^n(z) : n \in \mathbb{Z}\} = X$, para todo $z \in X$.*

Demostración. Usaremos 1.2.3 para construir ϕ. Además, todos los intervalos serán en $\mathbb{Z}$.

Fijemos $z \in X$. Consideremos $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los homeomorfismos h tales que

I) dom$(h) \cup$ ran$(h) \subsetneq X$;

II) Existe una familia $\{U_n : n \in [0, m]\}$ de abiertos-cerrados no vacíos disyuntos dos a dos;

III) $z \in$ dom$(h) = \bigcup_{n \in [0,m)} U_n$;

IV) Para $n \in [0, m)$, $h(U_n) = U_{n+1}$;

De 3 y 4 sigue que

5. ran$(h) = \bigcup_{n \in (0,m]} U_n$.

Ordenemos $\mathbb{P}$ parcialmente por inclusión inversa. Veamos que $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Como X es D_2, existen U_0 y U_1 abiertos-cerrados no vacíos de X con $z \in U_0$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ y $U_0 \cup U_1 \subsetneq X$. Por 2.1.7, existe un homeomorfismo $h : U_0 \to U_1$. Claramente, $h \in \mathbb{P}$.

Para cada $y \in X$ y $t \in \mathbb{Z}$, consideremos los conjuntos

$$D_y = \{h \in \mathbb{P} : h^k(z) = y, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\} \text{ y}$$

$$E_t = \{h \in \mathbb{P} : z \in \text{dom}(h^t)\}.$$

Probemos que D_y y E_t son densos en $\mathbb{P}$. Para esto, sea $h \in \mathbb{P}$, debemos encontrar $g \in D_y$ y $f \in E_t$ tales que $g, f \supseteq h$. Para dicho h, existe la respectiva familia $\{U_n : n \in [0,m]\}$ de abiertos-cerrados. Llamemos p al entero tal que $z \in U_p$. Como $z \in \text{dom}(h)$, $p \neq m$. Todo esto se ilustra en 2.2.

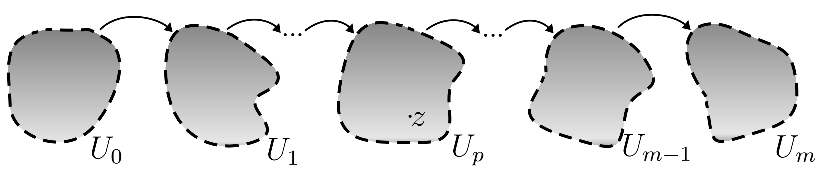

Figura 2.2: Abiertos-cerrados U_n para h.

Veamos primero que D_y es denso en $\mathbb{P}$. Supongamos que $h \notin D_y$. Por lo tanto, $h^k(z) \neq y$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ donde $h^k(z)$ está definida. De esto, se desprenden dos casos.

Caso 1: $y \notin \bigcup_{n \in [0,m]} U_n$. De esto, por ser X un espacio D_2, existe un abierto-cerrado U_{m+1} con $y \in U_{m+1}$ tal que

$$\bigcup_{n \in [0,m]} U_n \cap U_{m+1} = \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcup_{n \in [0,m+1]} U_n \subsetneq X.$$

Como $h^{m-p}(z) \in U_m$, entonces por 2.1.7 existe un homeomofismo $l : U_m \to U_{m+1}$ con $l(h^{m-p}(z)) = y$. Tomemos

$$g = h \cup l.$$

Claramente, $g \in \mathbb{P}$ y $g^{m-p+1}(z) = y$. De esto, $g \in D_y$ y $g \supseteq h$.

Caso 2: $y \in \bigcup_{n\in[0,m]} U_n$. Esto es, existen $q \in [0,m]$ y $x \in U_0$ tales que $y \in U_q$ y $h^q(x) = y$. Tenemos que $x \neq h^{-p}(z)$, pues si $x = h^{-p}(z)$, como $h^q(x) = y$, entonces $h^{q-p}(z) = y$.

Para encontrar g contruyamos primero una familia de abiertos-cerrados. Existe $V_0 \subseteq U_0$ abierto-cerrado tal que $h^{-p}(z) \in V_0$ y $x \notin V_0$. Definamos ahora V_n y V_{n+m+1} así:

I) Si $n \in (0,m]$, entonces $V_n = h(V_{n-1})$;

II) Si $n \in [0,m]$, entonces $V_{n+m+1} = U_n \setminus V_n$.

De esto, la familia $\{V_n : n \in [0, 2m+1]\}$ es de abiertos-cerrados no vacíos disyuntos dos a dos.

En particular, los conjuntos V_m y V_{m+1} son abiertos-cerrados tales que $h^{m-p}(z) \in V_m$ y $x \in V_{m+1}$. Por 2.1.7, existe un homeomorfismo $l : V_m \to V_{m+1}$ con $l(h^{m-p}(z)) = x$. Tomemos

$$g = h \cup l.$$

Es claro que $g \in \mathbb{P}$ y $g \supseteq h$. Además, $g^{m-p+1}(z) = x$, esto es, $g^{m-p+q+1}(z) = y$, por lo que $g \in D_y$. En 2.3 se encuentran los conjuntos V_n para g.

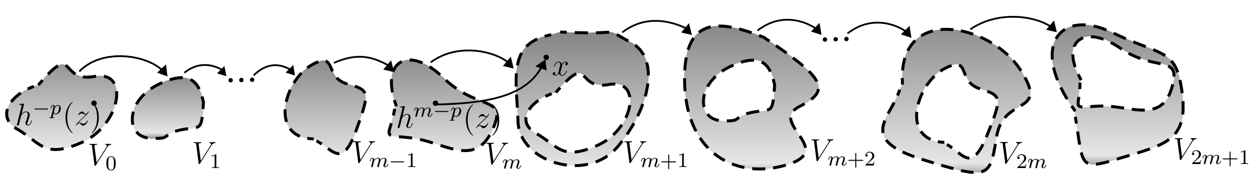

Figura 2.3: Familia $\{V_n : n \in [0, 2m+1]\}$ de g.

Veamos ahora que E_t es denso en $\mathbb{P}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que t es positivo. Si $m - p \geq t$, claramente $h^t(z)$ está definido. Asumamos entonces que $m - p < t$. De esto, nuestra intención es extender la familia $\{U_n : n \in [0,m]\}$ de modo que $h^t(z)$ esté definido. Para esto, como X es D_2, existen

$$U_{m+1}, U_{m+2}, ..., U_{t-m+p}$$

abiertos-cerrados no vacíos tales que

$$\bigcup_{n\in[0,t-m+p]} U_n \subsetneq X$$

y para todos $i, j \in [0, t-m+p]$ con $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Por 2.1.7, para cada $n \in [m, k-m+p)$ existe un homeomorfismo $h_n : U_n \to U_{n+1}$. Tomemos

$$f = h \cup \bigcup_{n\in[n,t-m+p)} h_n.$$

Naturalmente, $f \supseteq h$ y $f \in E_t$.

Consideremos

$$\mathcal{D} = \{D_y : y \in X\} \cup \{E_t : t \in \mathbb{Z}\}.$$

Por 1.2.3, existe un homeomorfismo ϕ tal que para todo $y \in X$ y $t \in \mathbb{Z}$, $\phi^t(z)$ está definida y existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi^q(z) = y$. De esto, es inmediato que

$$\{\phi^n(z) : n \in \mathbb{Z}\} = X.$$

Veamos que dom(ϕ) = ran$(\phi) = X$. Sea $y \in X$. Existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi^q(z) = y$. Así, $\phi^{q+1}(z) = \phi(y)$ está definida, por lo que $y \in$ dom(ϕ). Como $\phi(\phi^{q-1}(z)) = y$, entonces $y \in$ ran(ϕ). Por lo tanto, dom(ϕ) = ran$(\phi) = X$. $\square$

Por 2.2.1, existe una topología $+$-invariante ρ sobre $\mathbb{Z}$ tal que $(\mathbb{Z}, \rho) \approx \mathbb{Q}$. Terminamos esta sección mostrando dos ejemplos de tales topologías.

Ejemplo 2.2.4. Definiremos un métrica d^* sobre $\mathbb{Z}$ tal que $(\mathbb{Z}, \rho_{d^*}) \approx \mathbb{Q}$. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ y $m \neq n$, entonces

$$d^*(m,n) = \frac{1}{2^t},$$

donde $m - n = 2^t k$, con $t, k \in \mathbb{Z}$ y k impar. Caso contrario $(m = n)$, $d^*(m,n) = 0$.

Tenemos que d^* es efectivamente una métrica sobre $\mathbb{Z}$ y ρ_{d^*} es $+$-invariante. Como $(\mathbb{Z}, \rho_{d^*})$ no tiene puntos aislados, por 1.1.19 sigue que $(\mathbb{Z}, \rho_{d^*}) \approx \mathbb{Q}$.

La topología que veremos a continuación fue definida por Furstenberg y la usó para dar otra demostración de que existen infinitos números primos [4].

Ejemplo 2.2.5. Definamos

$$\rho = \{U \subseteq Z : \text{para todo } a \in U, \text{ existe } m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } mn + a \in U, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esto es, $U \in \rho$ si, y solo si, U es unión de progresiones aritméticas.

Tenemos que ρ es una topología sobre $\mathbb{Z}$. De hecho, ρ es $+$-invariante. El conjunto de todas las progresiones aritméticas forma una base numerable. De aquí, como $(\mathbb{Z}, \rho)$ es T_1 y regular, por 1.1.20 es metrizable. Así, por 1.1.19, $(\mathbb{Z}, \rho) \approx \mathbb{Q}$ pues no tiene puntos aislados.

Los espacios de 2.2.4 y 2.2.5 son de hecho grupos topológicos con la suma. Terminamos entonces esta sección con la siguiente pregunta: ¿Existe alguna topología $+$-invariante ρ sobre $\mathbb{Z}$ tal que $(\mathbb{Z}, \rho) \approx \mathbb{Q}$ y $(\mathbb{Z}, \rho)$ no sea un grupo topológico con la suma?

2.3. Topologías $*$-invariantes sobre grupos numerables

En esta sección probaremos el resultado principal de la tesis. Este dice que si X es un espacio D_2 numerable homogéneo, entonces para todo grupo numerable $(G, *)$ existe una topología $*$-invariante ρ sobre G tal que X es homeomorfo a (G, ρ).

Del teorema principal se deduce que un espacio D_2 numerable es homogéneo si, y solo si, admite una operación de grupo $*$ que haga a su topología $*$-invariante. De hecho, probaremos que apróximadamente cualquier operación de grupo $*$ hace a su topología $*$-invariante.

Empezamos con el siguiente lema, que será de utilidad para la demostración de 2.3.2. En este construiremos una familia de homeomorfismos entre abiertos-cerrados de X.

Lema 2.3.1. *Sean X un espacio D_2 numerable homogéneo, $z \in X$, G un grupo y $A \subseteq G$ finito tales que*

a) Existe una familia $\{U_a : a \in A\}$ de abiertos-cerrados de X disyuntos dos a dos;

---

[4] Idris MERCER. "On Furstenberg's Proof of the Infinitude of Primes". En: *American Mathematical Monthly* 116 (abr. de 2009), págs. 355-356. DOI: 10.4169/193009709X470218.

b) $1 \in A$ *y* $z \in U_1$*;*

c) Existe una familia $\{u_a : U_1 \to U_a : a \in A\}$ *de homeomorfismos, donde* u_1 *es la identidad;*

d) $\bigcup_{a \in A} U_a \subsetneq X$*.*

Consideremos

$$h_a = \bigcup \{u_{ag} \circ u_g^{-1} : g \in A \text{ y } ag \in A\}, \text{ para todo } a \in A.$$

Entonces,

I*)* h_a *es un homeomorfismo, para todo* $a \in A$*;*

II*) dom*$(h_a) = \bigcup\{U_g : g \in A$ *y* $ag \in A\}$*, para todo* $a \in A$*;*

III*) ran*$(h_a) = \bigcup\{U_{ag} : g \in A$ *y* $ag \in A\}$*, para todo* $a \in A$*;*

IV*)* h_1 *es la identidad sobre* $\bigcup_{a \in A} U_a$*;*

V*)* $h_a(U_1) = U_a$*, para todo* $a \in A$*;*

VI*)* $h_a\big|_{U_g} = (h_{ag}\big|_{U_1}) \circ (h_g\big|_{U_1})^{-1}$*, para cualesquiera* $a, g \in A$ *tales que* $ag \in A$*;*

VII*)* $\bigcup_{a \in A} ($*dom*$(h_a) \cup$ *ran*$(h_a)) \subsetneq X$*.*

Demostración. Claramente, *2*, *3*, *4* y *7* se deducen fácilmente de la definición de h_a. Para *5* y *6*, notemos que $h_a\big|_{U_1} = u_a$. Resta entonces probar *1*.

Sea $a \in A$, probemos que h_a es un homeomorfismo. Supongamos $g \in A$ tal que $ag \in A$. Es claro que $h_a\big|_{U_g} = u_{ag} \circ u_g^{-1} : U_g \to U_{ag}$ es un homeomorfismo. Veamos que h_a es la unión de homeomorfismos cuyos dominios y rangos son disyuntos dos a dos. Sea $j \in A$ tal que $g \neq j$ y $aj \in A$, entonces $U_j \neq U_g$ y $U_{aj} \neq U_{gj}$. Así, h_a es un homeomorfismo. $\square$

Como comentario adicional, en *3* tenemos

$$\text{ran}(h_a) = \bigcup\{U_g : g \in A \text{ y } a^{-1}g \in A\},$$

pues $\{g : g \in A$ y $a^{-1}g \in A\} = \{ag : g \in A$ y $ag \in A\}$.

Ahora mostraremos el teorema principal. Naturalmente, este es una generalización de 2.2.1 para cualquier grupo numerable.

Teorema 2.3.2. *Sean X un espacio D_2 numerable homogéneo y G un grupo numerable, entonces existe una topología $*$-invariante ρ en G tal que (G, ρ) es homeomorfo a X.*

Demostración. Supondremos que X no tiene puntos aislados, porque en este caso la conclusión es trivial.

Por 2.1.6, la existencia de ρ es equivalente a la existencia de un homomorfismo inyectivo $\phi : G \to \mathcal{H}(X)$ tal que $\phi(G)$ sea efectivo transitivo. Dado $z \in X$, entonces la transitividad de $\phi(G)$ es equivalente a que $X = \{\phi(g)(z) : g \in G\}$. Lo que haremos entonces es construir un subgrupo efectivo transitivo de $\mathcal{H}(X)$ que sea isomorfo a G.

Fijemos $z \in X$. Consideremos $\mathbb{P}$ el conjunto de todas las colecciones de homeomorfismos $\{h_a : a \in A\}$ con $A \subseteq G$ finito, tales que

I) Existe una familia $\{U_a : a \in A\}$ de abiertos-cerrados de X disyuntos dos a dos;

II) $1 \in A$ y $z \in U_1$;

III) Existe una familia $\{u_a : U_1 \to U_a : a \in A\}$ de homeomorfismos con u_1 la identidad;

IV) $\bigcup\limits_{a \in A} U_a \subsetneq X$;

V) $h_a = \bigcup\{u_{ag} \circ u_g^{-1} : g \in A$ y $ag \in A\},$ para todo $a \in A$.

Claramente, $h_a\big|_{U_1} = u_a$, por lo que lo escribiremos según nos convenga.

Veamos que $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Tomemos $A = \{1\}$. Como X es D_2, existe $U_1 \subsetneq X$ abierto-cerrado tal que $z \in U_1$. Consideremos $h_1 : U_1 \to U_1$ la función identidad. Así, $\{h_1\} \in \mathbb{P}$.

Ordenemos $\mathbb{P}$ parcialmente. Como lo esperaríamos, sean $\{f_b : b \in B\}, \{h_a : a \in A\} \in \mathbb{P}$, entonces

$$\{f_b : b \in B\} \leq \{h_a : a \in A\} \text{ si } B \supseteq A \text{ y } f_a \supseteq h_a, \text{ para todo } a \in A.$$

Para construir el homomorfismo ϕ, usaremos 1.2.2. Para esto, sean $d \in G$ y $x \in X$, probaremos que los conjuntos

$$D_d = \{\{h_a : a \in A\} \in \mathbb{P} : d \in A\} \text{ y}$$

$$R_x = \{\{h_a : a \in A\} \in \mathbb{P} : h_a(z) = x, \text{ para algún } a \in A\}$$

son densos en $\mathbb{P}$. Para esto, fijemos $\{h_a : a \in A\} \in \mathbb{P}$ y sea $\{U_a : a \in A\}$ la colección de abiertos-cerrados asociada a $\{h_a : a \in A\}$.

Veamos primero que D_d es denso en $\mathbb{P}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $d \notin A$. Construiremos $\{f_b : b \in B\} \in \mathbb{P}$ tal que $d \in B$ y $\{f_b : b \in B\} \leq \{h_a : a \in A\}$.

Consideremos $B = A \cup \{d\}$. Como X es D_2, existe U_d abierto-cerrado tal que

$$U_d \cap \bigcup_{a \in A} U_a = \emptyset \text{ y } \bigcup_{b \in B} U_b \subsetneq X.$$

Por 2.1.7, existe un homeomorfismo $u_d : U_1 \to U_d$.

Sea $b \in B$. Definamos

$$f_b = \bigcup \{u_{bg} \circ u_g^{-1} : g \in B \text{ y } bg \in B\}.$$

Veamos que si $b \in A$, entonces $f_b \supseteq h_b$. Supongamos que $b = a$ para algún $a \in A$ y sea $g \in A$ tal que $ag \in A$. Entonces,

$$f_a\big|_{U_g} = u_{ag} \circ u_g^{-1} = h_a\big|_{U_g},$$

Así, $f_a \supseteq h_a$, para todo $a \in A$. Sigue de la definición de los f_b que $\{f_b : b \in B\} \in \mathbb{P}$ y $\{f_b : b \in B\} \in D_d$. De esto, D_d es denso en $\mathbb{P}$.

Probemos ahora que R_x es denso en $\mathbb{P}$. Para esto, supongamos que $h_a(z) \neq x$, para todo $a \in A$. Tenemos así dos casos.

Caso 1: $x \notin \bigcup_{a \in A} U_a$. Tomemos $c \in G \setminus A$ y definamos $B = A \cup \{c\}$. Como X es D_2, existe U_c abierto-cerrado de X con $x \in U_c$ tal que

$$U_c \cap \bigcup_{a\in A} U_a = \emptyset \text{ y } \bigcup_{b\in B} U_b \subsetneq X.$$

Por 2.1.7, existe un homeomorfismo $u_c : U_1 \to U_c$ tal que $u_c(z) = x$.

Para cada $b \in B$, definamos f_b como se hizo en la prueba de la densidad de D_d. Así, $\{f_b : b \in B\} \in \mathbb{P}$, $\{f_b : b \in B\} \in R_x$ y $\{f_b : b \in B\} \supseteq \{h_a : a \in A\}$.

Caso 2: $x \in \bigcup_{a\in A} U_a$. Supongamos que $x \in U_{a_p}$, para algún $a_p \in A$. Sea $A = \{a_1, ..., a_m\}$ con $a_1 = 1$ y $z \in U_1$. En 2.4 mostramos $\{h_a : a \in A\}$ con $\{U_a : a \in A\}$ cuando $x \in U_{a_p}$, para algún $a_p \in \{a_1, ..., a_m\}$.

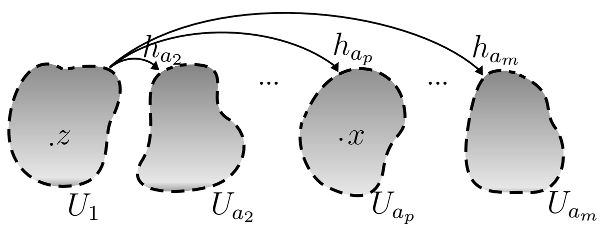

Figura 2.4: Colecciones $\{h_a : a \in A\}$ y $\{U_a : a \in A\}$ con $x \in U_{a_p}$.

Construyamos B. Claramente, $A^{-1}A = \{a^{-1}a' : a, a' \in A\}$ es finito. De esto, tomemos $c \in G \setminus (A^{-1}A)$. Si $a' = ac$ para algunos $a, a' \in A$, entonces $c = a^{-1}a' \in A^{-1}A$, una contradicción. De esto, $A \cap Ac = \emptyset$. Tomemos así $B = A \cup Ac$.

Construiremos familias $\{W_b : b \in B\}$ de abiertos-cerrados de X disyuntos dos a dos y $\{w_b : W_1 \to W_b : b \in B\}$ de homeomorfismos a partir de $\{U_a : a \in A\}$ y $\{u_a : a \in A\}$.

Construyamos $\{W_b : b \in B\}$. Sea $y = u_{a_p}^{-1}(x)$. Como $y \neq z$ y X es D_2, existen $W_1, W_c \subseteq X$ abiertos-cerrados disyuntos tales que $U_1 = W_1 \cup W_c$, $z \in W_1$ y $y \in W_c$. Para $a \in A$ con $a \neq 1$, definamos

$$W_a = u_a(W_1) \text{ y } W_{ac} = u_a(W_c).$$

Notemos que para cada $a \in A$, $U_a = W_a \cup W_{ac}$.

Ahora construyamos la familia $\{w_b : W_1 \to W_b : b \in B\}$. Por 2.1.7, existe un homeomorfismo $w_c : W_1 \to W_c$ tal que $w_c(z) = y$. Para $a \in A$, definamos

$$w_a = u_a\big|_{W_1},$$

y para $a \neq 1$,

$$w_{ac} = u_a\big|_{W_c} \circ w_c.$$

Es claro que las familias $\{W_b : b \in B\}$ y $\{w_b : b \in B\}$ son de abiertos-cerrados disyuntos dos a dos y de homeomorfismos con w_1 la identidad, respectivamente.

Para $b \in B$, definamos

$$f_b = \bigcup \{w_{bg} \circ w_g^{-1} : g \in B \text{ y } bg \in B\}.$$

Sigue de la construcción de $\{W_b : b \in B\}$ y $\{w_b : W_1 \to W_b : b \in B\}$ que $\{f_b : b \in B\} \in \mathbb{P}$. Veamos que $\{f_b : b \in B\} \in R_x$. Esto sigue de que $a_p c \in B$ y como $z \in W_1$, entonces

$$f_{a_p c}(z) = w_{a_p c}(z) = u_{a_p}(w_c(z)) = u_{a_p}(y) = x.$$

Probemos que $\{f_b : b \in B\} \leq \{h_a : a \in A\}$. Sean $a, g \in A$ tales que $U_g \subseteq \text{dom}(h_a)$. Como $g, ag \in A \subseteq B$, entonces $W_g \subseteq \text{dom}(f_a)$. Veamos que $W_{gc} \subseteq \text{dom}(f_a)$. Tenemos que $gc, a(gc) = (ag)c \in Ac \subseteq B$. De aquí, $W_{gc} \subseteq \text{dom}(f_a)$. Sabemos que

$$f_a\big|_{W_g} = w_{ag} \circ w_g^{-1} = u_{ag}\big|_{W_1} \circ (u_g\big|_{W_1})^{-1} = h_a\big|_{W_g} \text{ y}$$

$$f_a\big|_{W_{gc}} = w_{(ag)c} \circ w_{gc}^{-1} = (u_{ag}\big|_{W_c} \circ w_c) \circ (u_g\big|_{W_c} \circ w_c)^{-1} = u_{ag}\big|_{W_c} \circ (u_g\big|_{W_c})^{-1} = h_a\big|_{W_{gc}}.$$

Así,

$$f_a\big|_{W_g} \cup f_a\big|_{W_{gc}} = h_a\big|_{W_g} \cup h_a\big|_{W_{gc}} = h_a\big|_{U_g}.$$

De esto, $f_a \supseteq h_a$, para todo $a \in A$. Entonces, $\{f_b : b \in B\} \leq \{h_a : a \in A\}$ y R_x es denso en $\mathbb{P}$.

Sea

$$\mathcal{D} = \{D_d : d \in G\} \cup \{R_x : x \in X\}.$$

Probada la densidad de los conjuntos, construyamos ϕ. Por 1.2.2, existe una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\mathcal{C} \cap D_d \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \cap R_x \neq \emptyset$, para cualesquiera $d \in G$ y $x \in X$.

Para $g \in G$, consideremos

$$\phi_g = \bigcup \{h_g : \{h_a : a \in A\} \in \mathcal{C} \text{ y } g \in A\}.$$

Definamos así

$$\begin{aligned} \phi \colon G &\to \mathcal{H}(X) \\ g &\mapsto \phi_g. \end{aligned}$$

Probemos que ϕ es una función. Para esto, sea $g \in G$, verifiquemos que $\phi(g) = \phi_g \in \mathcal{H}(X)$. Es claro que $\{h_g : \{h_a : a \in A\} \in \mathcal{C}$ y $g \in A\}$ es una cadena de homeomorfismos. De esto, ϕ_g es un homeomorfismo. Resta verificar que dom$(\phi_g) =$ ran$(\phi_g) = X$. Fijemos $x \in X$. Existe $\{f_b : b \in B\} \in \mathcal{C}$ tal que

$$f_r(z) = x \text{ y } r, g, gr, g^{-1}r \in B.$$

Tenemos que $x \in U_r$. Como $r, gr \in B$, entonces $U_r \subseteq$ dom(f_g). Análogamente, como $r, g^{-1}r \in B$, $U_r \subseteq$ ran(f_g). Así, como $\phi_g \supseteq f_g$, entonces $x \in$ dom(ϕ_g), ran(ϕ_g). Sigue que $\phi_g \in \mathcal{H}(X)$.

Veamos que ϕ es un homomorfismo. Para esto, sean $f, g \in G$, probemos que $\phi_{fg} = \phi_f \circ \phi_g$. Fijemos $x \in X$. Sea $r \in G$ tal que $x = \phi_r(z)$. Consideremos $\{h_a : a \in A\} \in \mathcal{C}$ tal que

$$f, g, r, fg, gr, fgr \in A,$$

y sean $\{U_a : a \in A\}$ y $\{u_a : a \in A\}$ las colecciones asociadas a $\{h_a : a \in A\}$. Como $r, fgr \in A$, entonces $U_r \subseteq$ dom(h_{fg}) y $x \in U_r$, así,

$$\phi_{fg}(x) = h_{fg}(x) = u_{fgr} \circ u_r^{-1}(x).$$

Calculemos $\phi_f \circ \phi_g(x)$. Claramente $U_r \subseteq$ dom(h_g) y

$$\phi_g(x) = h_g(x) = u_{gr} \circ u_r^{-1}(x).$$

Sigue que $h_g(x) \in U_{gr}$. Como $U_{gr} \subseteq$ dom(h_f), entonces

$$\phi_f \circ \phi_g(x) = \phi_f(h_g(x)) = u_{fgr} \circ u_{gr}^{-1}(h_g(x)) = u_{fgr} \circ u_{gr}^{-1}(u_{gr} \circ u_r^{-1}(x)) = u_{fgr} \circ u_r^{-1}(x).$$

Así, $\phi_{fg}(x) = \phi_f \circ \phi_g(x)$ y ϕ es un homomorfismo.

Resta ver que ϕ es inyectiva. Sean $f, g \in G$ con $f \neq g$. Consideremos $\{h_a : a \in A\} \in \mathcal{C}$ tal que $f, g \in A$ y sea $\{U_a : a \in A\}$ la colección de abiertos-cerrados asociada a A. Sabemos que $h_f(U_1) = U_f$, $h_g(U_1) = U_g$ y $U_f \cap U_g = \emptyset$. De esto, como $\phi_f \supseteq h_f$ y $\phi_g \supseteq h_g$, concluimos que $\phi_f \neq \phi_g$ y ϕ es inyectiva.

Concluimos que $\phi(G)$ es un subgrupo de $\mathcal{H}(X)$ isomorfo a G. Veamos que es efectivo y transitivo. Como R_x es denso en $\mathbb{P}$, entonces

$$X = \{\phi_g(z) : g \in G\}.$$

Así, $\phi(G)$ es transitivo. Probemos que es efectivo. Supongamos que para algún $f \in G$, $\phi_f(y) = y$, para algún $y \in X$. Sea $\{h_a : a \in A\} \in \mathcal{C}$ tal que $f \in A$ y consideremos $\{U_a : a \in A\}$ y $\{u_a : a \in A\}$ las familias asociadas a $\{h_a : a \in A\}$. Sea $r \in A$ tal que $y \in U_r$, entonces $fr \in A$ pues $U_r \subseteq \text{dom}(h_f)$ y

$$h_f(y) = u_{fr} \circ u_r^{-1}(y) : U_r \to U_{fr}.$$

Así, como $h_f(y) = y \in U_{fr}, U_r$, entonces $U_{fr} = U_r$ y $f = 1$, por lo que $\phi_f = \phi_1$, que es claramente la función identidad. $\square$

Los resultados restantes de esta sección no fueron tomados de la literatura consultada. Por 2.1.5, todo espacio con una topología $*$-invariante es homogéneo. En el siguiente corolario mostramos una condición suficiente para la recíproca. Esto es, si un espacio D_2 numerable es homogéneo, entonces puede dotarse de una operación de grupo $\cdot$ que haga a su topología $\cdot$-invariante.

Corolario 2.3.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico D_2 numerable homogéneo y $*$ una operación de grupo sobre X. Existe una operación de grupo $\cdot$ sobre X tal que τ es $\cdot$-invariante y $(X, \cdot) \approx (X, *)$.*

Demostración. Por 2.3.2, existe un homeomorfismo $\phi : (X, \tau) \to (X, \rho)$ donde ρ es una topología $*$-invariante sobre X. Consideremos

$$\begin{aligned} \cdot : X \times X &\to X \\ (x, y) &\mapsto \phi^{-1}(\phi(x) * \phi(y)). \end{aligned}$$

Así, $(X, \cdot)$ es un grupo. De hecho, ϕ es un isomorfismo entre $(X, \cdot)$ y $(X, *)$. Probemos que τ es $\cdot$-invariante. Sean $g \in X$ y $U \in \tau$. Entonces,

$$\phi(g \cdot U) = \phi(g) * \phi(U) \in \rho.$$

De esto, como ϕ es continua, $\phi^{-1}(\phi(g \cdot U)) = g \cdot U \in \tau$.

$\square$

De este corolario surge la pregunta: Si (X, τ) es un espacio D_2 numerable homogéneo y $*$ una operación de grupo sobre X, ¿es τ $*$-invariante? En el siguiente teorema la respondemos.

Teorema 2.3.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable para el que existen $U, V \subseteq X$ tales que:*

I) $U \cap V = \emptyset$;

II) $U \in \tau$;

III) $V \notin \tau$.

Entonces existe una operación de grupo $*$ sobre X tal que τ no es $*$-invariante.

Demostración. Crearemos una operación de grupo $*$ sobre X tal que $x * U = V$. Para esto, construiremos una enumeración de $X = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ y definiremos $*$ como en 1.3.1. Tenemos dos casos.

Caso 1: $X \setminus (U \cup V) = W$ es infinito. Consideremos

$$U = \{u_n : n \in 3\mathbb{Z}\}; \qquad V = \{v_n : n \in 3\mathbb{Z}+1\}; \qquad W = \{w_n : n \in 3\mathbb{Z}+2\}.$$

Entonces $X = U \cup V \cup W = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una numeración de X con

$$x_n = \begin{cases} u_n, & \text{si} \quad n \in 3\mathbb{Z}; \\ \\ v_n, & \text{si} \quad n \in 3\mathbb{Z}+1; \\ \\ w_n, & \text{si} \quad n \in 3\mathbb{Z}+2. \end{cases}$$

De esto, $x_1 * U = V$ y τ no es $*$-invariante.

Caso 2: $X \setminus (U \cup V) = W$ es finito. Sea $W = \{w_1, ..., w_k\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que k es par. Consideremos

$$U = \{u_n : n \in 2\mathbb{Z} + 1 \text{ y } n \notin \{1, ..., k\}\} \quad \text{y} \quad V = \{v_n : n \in 2\mathbb{Z} \text{ y } n \notin \{1, ..., k\}\}.$$

Entonces, la numeración dada por $X = U \cup V \cup W$ vale que $x_1 * U = V$. $\square$

Notemos que si X es un espacio D_2 numerable homogéneo sin puntos aislados, se satisfacen las hipótesis del corolario anterior.

2.4. Los espacios $\mathbb{Z}_A$ y S_ω.

Aquí definiremos los espacios de van Douwen y de Arhangel'skiĭ-Franklin. Ambos son espacios numerables, cero dimensionales y homogéneos. De hecho, mostraremos que el espacio de van Douwen corresponde a $(\mathbb{Z}, \tau)$, donde τ es $+$-invariante y $(\mathbb{Z}, \tau)$ es homeomorfo al espacio de Arhangel'skiĭ-Franklin.

Para finalizar, daremos una caracterización de las sucesiones convergentes en el espacio de Arhangel'skiĭ-Franklin y mostraremos que este no admite ninguna operación de grupo que lo haga grupo topológico.

Destacamos que las demostraciones contenidas en esta sección no fueron basadas en otras pruebas de la literatura consultada. Por esto, muchos de los argumentos que usaremos emplean construcciones recursivas.

Definición 2.4.1. Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$. Diremos que A es de **intersección finita** si A es infinito, $0 \in A$ y $A \cap (A + k)$ es finito, para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \neq 0$.

Los conjuntos $A = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{F_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, con F_n el enésimo número de Fibonacci, son de intersección finita.

Definición 2.4.2. Sea A de intersección finita. Definamos

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{Z} : (\forall k \in U)((A + k) \setminus U \textit{ es finito})\}.$$

Llamaremos a $(\mathbb{Z}, \tau)$ el espacio de van Douwen y lo escribiremos como $\mathbb{Z}_A$.

Sean A y B conjuntos. Diremos que A está casi contenido en B y escribiremos $A \subseteq^* B$ cuando $A \setminus B$ sea finito. Esto significa que A está contenido en B, a excepción de una cantidad finita de puntos. Para $\mathbb{Z}_A$, $U \in \tau$ si, y solo si, para todo $k \in U$, $(A+k) \subseteq^* U$.

El siguiente es un resultado acerca de los conjuntos de intersección finita.

Lema 2.4.3. *Sean A de intersección finita, $m \in \mathbb{Z}$ y $B \subseteq \mathbb{Z}$ finito tales que $m \notin B$. Entonces*

$$(A+m) \subseteq^* (A+m) \setminus \bigcup_{n \in B} (A+n).$$

Demostración. Claramente

$$(A+m) \setminus \bigcup_{n \in B} (A+n) = A \setminus \bigcup_{n \in B} (A+n-m) + m.$$

Debemos entonces verificar que

$$A \subseteq^* A \setminus \bigcup_{n \in B} (A+n-m).$$

Esto es equivalente a probar que

$$A \cap \bigcup_{n \in B} (A+n-m)$$

es finito. Para esto, notemos que para cada $n \in B$, $A \cap (A+n-m)$ es finito. Así, como B también es finito, sigue que

$$\bigcup_{n \in B} (A \cap (A+n-m)) = A \cap \bigcup_{n \in B} (A+n-m)$$

es finito. De aquí concluimos la casi contenencia. □

Teorema 2.4.4. *Sea A de intersección finita. Entonces $\mathbb{Z}_A$ es una topología $+$-invariante sobre $\mathbb{Z}$ y además, $\mathbb{Z}_A$ es un espacio homogéneo, cero dimensional y sin puntos aislados.*

Demostración. Veamos primero que τ es una topología sobre $\mathbb{Z}$.

I) Es claro que $\mathbb{Z}, \emptyset \in \tau$.

II) Supongamos $\{U_\lambda \in \tau : \lambda \in L\}$ una familia de abiertos. Queremos ver que $U = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$ es un abierto. Para esto, tomemos $k \in U$. Existe $\lambda \in L$ para el que $k \in U_\lambda$. Así,

$$(A+k) \setminus U \subseteq (A+k) \setminus U_\lambda$$

que es finito. Concluimos que $U \in \tau$.

III) Sean ahora U y V abiertos de $\mathbb{Z}_A$. Veamos que $U \cap V$ es un abierto. Supongamos para esto que $U \cap V \neq \emptyset$ y sea $k \in U \cap V$. Tenemos que

$$(A+k) \setminus (U \cap V) = ((A+k) \setminus U) \cup ((A+k) \setminus V),$$

que es finito. De esto, $U \cap V \in \tau$.

Por lo tanto, τ es una topología.

Probemos que τ es $+$-invariante. Sean U un abierto y $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que $(n+U) \in \tau$. Para esto, tomemos $(n+k) \in (n+U)$ donde $k \in U$. Entonces

$$(A+n+k) \setminus (n+U) = ((A+k) \setminus U) + n.$$

Así, $(A+n+k) \setminus (n+U)$ es finito, por lo que $(n+U) \in \tau$. Sigue inmediatamente de 2.1.5 que $\mathbb{Z}_A$ es homogéneo.

Notemos que $\mathbb{Z}_A$ es un espacio topológico y su topología es $+$-invariante independientemente de si A es de intersección finita.

Sigue de la definición de los abiertos que $\mathbb{Z}_A$ no tiene puntos aislados, porque dado $m \in \mathbb{Z}$, $(A+m) \nsubseteq^* \{m\}$.

Probemos que $\mathbb{Z}_A$ es cero dimensional. Como $\mathbb{Z} \setminus \{m\}$ es abierto para todo $m \in \mathbb{Z}$, entonces $\{m\}$ es cerrado. De esto, $\mathbb{Z}_A$ es T_1. Veamos ahora que admite $\mathbb{Z}_A$ una base de abiertos-cerrados.

Sean U un abierto propio no vacío de $\mathbb{Z}_A$ y $m \in U$. Fijemos $\mathbb{Z} = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $z_0 = m$ y $z_1 \notin U$. Para mostrar que $\mathbb{Z}_A$ admite un base de abiertos-cerrados, construiremos dos abiertos V y W disyuntos tales que

I) $z_0 \in V \subseteq U$;

II) $z_1 \in W$;

III) $V \cup W = \mathbb{Z}$.

De esto, V será abierto-cerrado.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definamos $A_0 = A + z_0$ y

$$A_n = (A + z_n) \setminus \bigcup_{i<n} (A + z_i) .$$

Por 2.4.3, $(A + z_n) \subseteq^* A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $z_n \in U$, sabemos que $(A + z_n) \subseteq^* U$. De esto,

$$(A + z_n) \subseteq^* A_n \cap U \subseteq U.$$

Construiremos dos sucesiones $(V_n)_n$ y $(W_n)_n$ de conjuntos de modo que las respectivas uniones de sus elementos sean abiertos (ellos serán los conjuntos V y W buscados).

Definamos

$$V_0 = A_0 \cap U \text{ y } W_0 = \emptyset;$$

$$V_1 = \emptyset \text{ y } W_1 = A_1 \cup \{z_1\}.$$

Si $z_2 \in \bigcup_{i<2} V_i$, tomemos

$$V_2 = A_2 \cap U \text{ y } W_2 = \emptyset.$$

Si $z_2 \notin \bigcup_{i<2} V_i$, consideremos

$$V_2 = \emptyset \text{ y } W_2 = A_2.$$

Sigamos con la recursión. Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, hemos definido V_n y W_n tales que

I) Si $z_n \in \bigcup_{i<n} V_i$, entonces $V_n = A_n \cap U$ y $W_n = \emptyset$.

II) Si $z_n \notin \bigcup_{i<n} V_i$, $V_n = \emptyset$ y $W_n = A_n$

Si $z_{n+1} \in \bigcup_{i<n+1} V_i$, definamos

$$V_{n+1} = A_{n+1} \cap U \text{ y } W_{n+1} = \emptyset.$$

Si $z_{n+1} \notin \bigcup\limits_{i<n+1} V_i$, tomemos

$$V_{n+1} = \emptyset \ \text{ y } \ W_{n+1} = A_{n+1}.$$

Consideremos los conjuntos

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \text{ y } W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Mostremos que V y W son abiertos. Si $z_n \in V$, entonces $z_n \in \bigcup\limits_{i<n} V_i$, de aquí que $V_n = A_n \cap U$, esto es, $(A + z_n) \subseteq^* V_n \subseteq V$. Por otro lado, si $z_n \in W$, entonces $W_n = A_n$, y así, $(A + z_n) \subseteq^* W_n \subseteq W$.

Observemos que $V \cup W = \mathbb{Z}$ pues $z_n \in \bigcup_{i<n} V_i \cup W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, es claro que $V \cap W = \emptyset$, pues para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $V_n \cap W_m = \emptyset$. De esto, V y W son abiertos-cerrados y $z_0 \in V \subseteq U$. Entonces $\mathbb{Z}_A$ admite una base de abiertos-cerrados.

Concluimos que $\mathbb{Z}_A$ es cero dimensional. Por 1.1.13, es además D_2 y regular. $\square$

Para $\mathbb{Z}_A$, podríamos pensar que dependiendo del conjunto A se pueden obtener espacios diferentes, sin embargo, en 2.4.8 mostraremos que todos son homeomorfos entre sí. Sigue de la definición de τ que $B \subseteq \mathbb{Z}$ es cerrado si, para todo $k \in X \setminus B$, $(A + k) \setminus (X \setminus B) = (A + k) \cap B$ es finito.

Ahora presentaremos un espacio cuyos elementos son sucesiones finitas de naturales. Dada una sucesión finita s y $n \in \mathbb{N}$. Sea $s = \langle s_0, ..., s_{p-1}\rangle$. Entonces notaremos a la sucesión $\langle s_0, ..., s_{p-1}, n\rangle$ como $s^\frown n$. Esta notación también la usaremos para unir sucesiones, en el sentido $s^\frown t$, con t una sucesión finita.

Definición 2.4.5. El siguiente espacio es conocido como el espacio de Arhangel'skiĭ-Franklin, S_ω. Sea $\mathbb{N}^{<\omega}$ el conjunto de las sucesiones finitas de números naturales, esto es,

$$\mathbb{N}^{<\omega} = \{s : \{0, ..., n\} \to \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Definimos S_ω como $(\mathbb{N}^{<\omega}, \tau)$, donde

$$\tau = \{V \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} : (\forall s \in V)(\{n \in \mathbb{N} : s^\frown n \notin V\} \textit{ es finito})\}.$$

Obviaremos que S_ω es un espacio topológico. Escribiremos $\langle\rangle$ para referirnos a la sucesión vacía. Además, dado $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, usaremos la siguiente notación

$$s^\frown\mathbb{N} = \{s^\frown n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 2.4.6. *Sea $s \in S_\omega$. Consideremos $[s]$ el conjunto de todas las sucesiones en S_ω que extienden a s, esto es,*

$$[s] = \{s^\frown t : t \in S_\omega\}.$$

Entonces $[s]$ es un abierto-cerrado de S_ω.

Demostración. El conjunto $[s]$ es claramente abierto. Veamos que también es cerrado. Sea $t \notin [s]$, entonces

$$t^\frown\mathbb{N} \subseteq S_\omega \setminus [s] \text{ o } t^\frown\mathbb{N} \setminus \{s\} \subseteq S_\omega \setminus [s].$$

Así, $S_\omega \setminus [s]$ es abierto. □

Teorema 2.4.7. *S_ω es numerable, homogéneo y cero dimensional.*

Demostración. Veamos que S_ω es numerable. Sea $n \in \mathbb{N}$, definamos $\overline{n} = \{0, ..., n-1\}$. Naturalmente, $\overline{0} = \emptyset$. Así, notemos que

$$\mathbb{N}^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{\overline{n}}.$$

De esto, es inmediato que S_ω es numerable.

Veamos que S_ω es D_2. Sean $s, t \in S_\omega$ con $s \neq t$. Consideremos $U = [t] \setminus [s]$ y $V = [s] \setminus [t]$, entonces $t \in U$, $s \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Claramente, U y V son abiertos-cerrados. De esto, S_ω es D_2 (y por lo tanto, Hausdorff y T_1). Notemos S_ω no tiene puntos aislados por la definición de sus abiertos.

Para ver que S_ω es cero dimensional resta probar que admite una base de abiertos-cerrados. Consideremos B el conjunto de todos los $U \subseteq S_\omega$ tales que

I) Para todo $t \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n < |t|$, $t\big|_{\overline{n}} \in U$;

II) Para todo $t \in U$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n > k$, $t^\frown n \in U$.

Sea $U \in B$. Por 2, U es abierto. Consideremos $t \in S_\omega \setminus U$. Por 1, $t^\frown\mathbb{N} \subseteq S_\omega \setminus U$, entonces $S_\omega \setminus U$ es también abierto. Así, U es abierto-cerrado.

Claramente, si V es un abierto de S_ω con $\langle\rangle \in V$, entonces existe $U \in B$ tal que $U \subseteq V$. Por esto, consideremos

$$\beta = \{s^\frown U : s \in S_\omega \text{ y } U \in B\}.$$

Entonces β es una base de abiertos-cerrados de S_ω.

Por último, probemos que S_ω es homogéneo. Sean $s, t \in S_\omega$. Por 2.1.7, debemos encontrar U y V abiertos-cerrados con $s \in U$ y $t \in V$ tales que $(U, s) \approx (V, t)$. En particular, tomemos $U = [s]$ y $V = [t]$. Además, consideremos $l = |t|$, $m = |s|$, $t = \langle t_0, t_1, ..., t_{l-1}\rangle$ y $s = \langle s_0, ..., s_{m-1}\rangle$.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi\colon [t] &\to [s] \\ r &\mapsto \phi(r). \end{aligned}$$

donde si $r \in [t]$ con $r = \langle t_0, t_1, ..., t_{l-1}, r_l, ..., r_p\rangle$, entonces

$$\phi(r) = s^\frown\langle r_l, ..., r_p\rangle = \langle s_0, ..., s_{m-1}, r_l, ..., r_p\rangle.$$

Esto es, $\phi(r)$ quita los primeros l elementos de r y la extiende con s por la izquierda.

En efecto, la función ϕ cumple que $\phi(t) = s$ y es biyectiva. Su efecto geométrico es trasladar, en orden, la rama $[t]$ a la rama $[s]$.

Veamos que ϕ es continua. Dado U un abierto de $[s]$, queremos ver que $\phi^{-1}(U)$ es un abierto de $[t]$. Sea $r \in \phi^{-1}(U)$ con $r = \langle t_0, t_1, ..., t_{l-1}, r_l, ..., r_p\rangle$. Como U es abierto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n > k$,

$$\phi(r)^\frown n = \langle s_0, ..., s_{m-1}, r_l, ..., r_p, n\rangle \in U.$$

De esto, para todo $n > k$,

$$r^\frown n = \langle t_0, t_1, ...t_{l-1}, r_l, ..., r_p, n\rangle \in \phi^{-1}(U).$$

Por tanto, $\phi^{-1}(U)$ es abierto. La continuidad de ϕ^{-1} es análoga. Así, ϕ es un homeomorfismo. $\square$

Por 2.2.1, existe una topología $+$-invariante τ en $\mathbb{Z}$ tal que $S_\omega \approx (\mathbb{Z}, \tau)$. De hecho, mostraremos que tal espacio es $\mathbb{Z}_A$. Esto no es de extrañar pues los abiertos de dichos espacios tienen una caracterización similar. En el siguiente teorema mostramos que efectivamente $S_\omega \approx \mathbb{Z}_A$.

Teorema 2.4.8. *Sea A un conjunto de intersección finita. Entonces, $S_\omega \approx \mathbb{Z}_A$.*

Demostración. Sea U un abierto de $\mathbb{Z}_A$. Como $\mathbb{Z}_A$ es regular, por 2.1.7 sigue que $U \approx \mathbb{Z}_A$. De esto, si $U \approx S_\omega$, entonces $\mathbb{Z}_A \approx S_\omega$. Así, construiremos un abierto U de $\mathbb{Z}_A$ y un homeomorfismo $\phi : U \to S_\omega$.

Construiremos recursivamente conjuntos infinitos A_m y definiremos ϕ en cada A_m para tomar $U = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m \cup \{0\}$. Para esto, nuestra intención es que si $z \in A_m$ para algún m,

$$\phi(A + z) \subseteq^* \phi(z)^\frown\mathbb{N}.$$

Fijemos una enumeración de $\mathbb{Z} = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $z_0 = 0$. Definamos $A_0 = A \setminus \{0\}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ y A_m que construyamos, numeraremos $A_m = \{a_{m,n} : n \in \mathbb{N}\}$. Aclaramos que la numeración de los A_m no mantiene el orden de sus elementos como números enteros.

Empecemos a construir ϕ. Tomemos $\phi(0) = \langle\rangle$ y definamos $\phi(a_{0,n}) = \langle n\rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos

$$i_1 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : z_k \in A_0 \text{ y } \phi(z_k)^\frown n \notin \phi(A_0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tomemos

$$A_1 = (A + z_{i_1}) \setminus (A_0 \cup \{0\})$$

y definamos $\phi(a_{1,n}) = \phi(z_{i_1})^\frown n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea ahora

$$i_2 = \min\{k \in \mathbb{N} : z_k \in \bigcup_{i<2} A_i \text{ y } \phi(z_k)^\frown n \notin \phi\left(\bigcup_{i<2} A_i\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definamos

$$A_2 = (A + z_{i_2}) \setminus \left(\bigcup_{i<2} A_i \cup \{0\}\right).$$

Establezcamos así $\phi(a_{2,n}) = \phi(z_{i_2})^\frown n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sigamos con la recursión. Supongamos que para $m \in \mathbb{Z}^+$ hemos definido i_m, A_m y $\phi(a_{m,n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que

I) $i_m = \min\{k \in \mathbb{N} : z_k \in \bigcup_{i<m} A_i \text{ y } \phi(z_k)^\frown n \notin \phi\left(\bigcup_{i<m} A_i\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$;

II) $A_m = (A + z_{i_m}) \setminus \left(\bigcup_{i<m} A_i \cup \{0\}\right)$.

III) $\phi(a_{m,n}) = \phi(z_{i_m})^\frown n$.

Tomemos

$$i_{m+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : z_k \in \bigcup_{i<m+1} A_i \text{ y } \phi(z_k)^\frown n \notin \phi\left(\bigcup_{i<m+1} A_i\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

y sea

$$A_{m+1} = (A + z_{i_{m+1}}) \setminus \left(\bigcup_{i<m+1} A_i \cup \{0\}\right).$$

Definamos entonces $\phi(a_{m+1,n}) = \phi(z_{i_{m+1}})^\frown n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con esto, hemos acabado la construcción de ϕ. Resta verificar que dom(ϕ) es abierto, ran$(\phi) = S_\omega$ y ϕ es un homeomorfismo.

Consideremos

$$U = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \cup \{0\}.$$

Claramente, dom$(\phi) = U$. Veamos que U es un abierto de $\mathbb{Z}_A$. Sea $z_k \in U$ con $k \neq 0$ (el caso de $z_k = 0$ es trivial pues $A \subseteq U$). Entonces, $z_k \in A_p$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Basta entonces probar que en algún paso m, $z_k = z_{i_m}$, pues $A + z_{i_m} = A + z_k \subseteq^* A_m$ y $A_m \subseteq U$. Para esto, es claro que inmediatamente después del paso p,

$$z_k \in \bigcup_{i<p+1} A_i \text{ y } \phi(z_k)^\frown n \notin \phi\left(\bigcup_{i<p+1} A_i\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por la naturaleza de la construcción, k es el mínimo de los subíndices analizados en alguno de los posteriores k pasos, esto es, $m \in \{p+1, p+2, ..., p+k\}$.

Probaremos que ran(ϕ) $= S_\omega$ mediante inducción matemática sobre la longitud de los elementos de S_ω. El caso base es trivial. Supongamos ahora que para $n \in \mathbb{N}$, si $t \in S_\omega$ y $|t| = n$ entonces $t \in$ ran(ϕ). Sea $s \in S_\omega$ con $|s| = n+1$ y $s = \langle s_0, s_1, ..., s_n\rangle$. Tomemos $t = s\big|_{[n]}$, esto es, $t = \langle s_0, s_1, ..., s_{n-1}\rangle$. Como $|t| = n$, existe z_k tal que $\phi(z_k) = t$. En algún paso m, $k = i_m$, entonces $s \in \phi(A_m) = t^\frown\mathbb{N}$.

Veamos que ϕ es un homeomorfismo. Como la inyectividad sigue de la construcción, entonces ϕ es biyectiva. Probemos que es continua. Sean U un abierto de S_ω y $z_k \in \phi^{-1}(U)$. Como U es abierto, existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n^*$, entonces $\phi(z_k)^\frown n \in U$. Sabemos que dicho $k = i_m$ en algún paso m, con $\phi(A_m) = \phi(z_{i_m})^\frown\mathbb{N}$. De esto,

$$A_m^* = \{a_{m,n} : n > n^*\} \subseteq \phi^{-1}(U)$$

y $(A + z_{i_m}) \subseteq^* A_m^*$, pues $(A + z_{i_m}) \subseteq^* A_m$ por 2.4.3 y $A_m \subseteq^* A_m^*$. Así, $\phi^{-1}(U)$ es abierto. La continuidad de ϕ^{-1} es semejante. Por todo lo dicho, ϕ es un homeomorfismo. $\square$

Para terminar esta sección, mostraremos que S_ω no admite una estructura de grupo topológico. Para esto debemos estudiar las sucesiones convergentes $(s_n)_n$ en S_ω.

Definición 2.4.9. Sea $(k_n)_n$ una sucesión de números naturales. Diremos que $(k_n)_n$ es **casi creciente** si para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n^*$, entonces $k_n > m$.

Claramente, si $(k_n)_n$ es una sucesión creciente de naturales, entonces es casi creciente. Una sucesión casi creciente que no es creciente es $(1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, ...)$.

Proposición 2.4.10. *Sea $(s_n)_n \subset S_\omega$ una sucesión sin subsucesiones triviales. La sucesión $(s_n)_n$ es convergente si, y solo si, existe $s \in S_\omega$ tal que para todo n*

suficientemente grande,

$$s_n = s^\frown k_n,$$

donde $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$ *es una sucesión casi creciente. En particular,* $s_n \to s$.

Demostración. Veamos la primer implicación. Supongamos que $(s_n)_n \to s$. Como $[s]$ es un abierto tal que $s \in [s]$, entonces $s_n \in [s]$ para todo n suficientemente grande. De esto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$s_n = s^\frown t_n,$$

donde $t_n \in S_\omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $(s_n)_n$ no tiene subsucesiones triviales, podemos asumir que $s_n \neq s$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $[s^\frown m] \cap \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, porque $[s] \setminus [s^\frown m]$ es un abierto que tiene a s. De esto, para $m \in \mathbb{N}$ sigue que

$$V_m = ([s^\frown m] \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{s^\frown m\}$$

es un abierto. Así, tomemos

$$V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m.$$

Notemos que los únicos elementos s_n que pueden estar en V son de la forma $s^\frown m$, para m algún natural.

Existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n^*$, $s_n \in V$. Así, si $n > n^*$, entonces $s_n = s^\frown k_n$, para alguna sucesión $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$. Es claro que $(k_n)_n$ es casi creciente, porque no puede tener subsucesiones constantes.

Probemos ahora la recíproca. Supongamos que existen $s \in S_\omega$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > n_1$, entonces

$$s_n = s^\frown k_n,$$

donde $(k_n)_n$ es casi creciente. Veamos que $s_n \to s$. Sea U un abierto tal que $s \in U$. Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_2$, entonces $s^\frown n \in U$. Como $(k_n)_n$ es casi creciente, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_3$, $k_n > n_2$. Tomemos $n^* = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Así, si $n > n^*$, entonces $s_n \in U$. $\square$

En el siguiente resultado demostramos que S_ω no es un grupo topológico para ninguna operación de grupo $*$. En efecto, probamos que la función $\phi(x, y) = x * y$ no es continua.

Teorema 2.4.11. *S_ω no admite una estructura de grupo topológico.*

Demostración. Sea $*$ una operación de grupo en S_ω. Probaremos que $\phi : S_\omega \times S_\omega \to S_\omega$ con $\phi(x, y) = x * y$ no es continua. Para esto, iremos por contradicción.

Supongamos que ϕ es continua. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\langle\rangle$ es el elemento identidad del grupo.

Sea $(k_n)_n$ una sucesión casi creciente. Es claro que $\langle k_n\rangle \to \langle\rangle$. En particular, $(\langle n\rangle)_n$ es una sucesión casi creciente. Así, por la continuidad de ϕ,

$$\langle n\rangle * \langle k_n\rangle \to \langle\rangle * \langle\rangle = \langle\rangle.$$

En este sentido, lo que haremos es construir una sucesión casi creciente $(k_n)_n$ tal que

$$\langle n\rangle * \langle k_n\rangle \nrightarrow \langle\rangle.$$

Sea $r \in \mathbb{N}$. Consideremos $(s_n^r)_n$ una sucesión constante con $s_n^r = \langle r\rangle$. Tenemos que

$$\langle n\rangle * \langle s_n^r\rangle \to \langle\rangle * \langle r\rangle = \langle r\rangle.$$

Como $\langle n\rangle * s_n^r \neq s_n^r = \langle r\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(\langle n\rangle * s_n^r)_n$ no tiene subsucesiones triviales. Así, por 2.4.10, para todo n suficientemente grande

$$\langle n\rangle * s_n^r = \langle r\rangle^\frown t_n,$$

donde $(t_n)_n$ es casi creciente.

Consideremos $(s_n^0)_n = \langle 0\rangle$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle n_0\rangle * \langle 0\rangle = \langle 0\rangle^\frown l_0,$$

para algún $l_0 \in \mathbb{N}$. Definamos entonces $k_n = 0$, para $n \leq n_0$. Notemos que $|\langle n_0\rangle * \langle 0\rangle| = 2$.

Sea ahora $(s^1_n)_n = \langle 1\rangle$. Podemos tomar $n_1 \in \mathbb{N}$ con $n_1 > n_0$ tal que

$$\langle n_1\rangle * \langle 1\rangle = \langle 1\rangle^\frown l_1,$$

con $l_1 \in \mathbb{N}$. Definamos así $k_n = 1$, para $n_0 < n \leq n_1$. De igual forma, $|\langle n_1\rangle * \langle 1\rangle| = 2$.

Sigamos con la recursión. Supongamos que para $m \in \mathbb{N}$ hemos definido n_m y l_m naturales tales que

I) $\langle n_m\rangle * \langle m\rangle = \langle m\rangle^\frown l_m$;

II) $k_n = m$, para $n_{m-1} < n \leq n_m$.

Entonces, si $(s^{m+1}_n)_n = \langle m+1\rangle$, podemos tomar $n_{m+1} \in \mathbb{N}$ con $n_{m+1} > n_m$ tal que

$$\langle n_{m+1}\rangle * \langle m+1\rangle = \langle m+1\rangle^\frown l_{m+1},$$

donde $l_{m+1} \in \mathbb{N}$. Tomemos $k_n = m+1$, para $n_m < n \leq n_{m+1}$. Destacamos nuevamente que $|\langle n_{m+1}\rangle * \langle m+1\rangle| = 2$.

Claramente, la sucesión $(k_n)_n$ es casi creciente. Consideremos $\{n_m : m \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de naturales tomados en la construcción de $(k_n)_n$. Para la subsucesión

$$(\langle n_m\rangle * \langle k_{n_m}\rangle)_m \subset (\langle n\rangle * \langle k_n\rangle)_n$$

vale que $|\langle n_m\rangle * \langle k_{n_m}\rangle| = 2$, para todo $m \in \mathbb{N}$. De esto, por 2.4.10 sigue que $\langle n_m\rangle * \langle k_{n_m}\rangle \nrightarrow \langle\rangle$. Por lo tanto, $\langle n\rangle * \langle k_n\rangle \nrightarrow \langle\rangle$, una contradicción.

Sigue que ϕ no es continua. Así, S_ω no es un grupo topológico con $*$.