

**IMPLEMENTACIÓN Y VERIFICACIÓN DE UN MODELO FRACTAL, PARA LA
PREDICCIÓN DE PERMEABILIDAD, APLICADO A UN YACIMIENTO
COLOMBIANO.**

ONEY ADEL ARGEL PEREIRA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA
2005**

**IMPLEMENTACIÓN Y VERIFICACIÓN DE UN MODELO FRACTAL, PARA LA
PREDICCIÓN DE PERMEABILIDAD, APLICADO A UN YACIMIENTO
COLOMBIANO.**

ONEY ADEL ARGEL PEREIRA

**Trabajo de Investigación como requisito para obtener el título de Ingeniero de
Petróleos.**

DIRECTOR

**ZULY HIMELDA CALDERÓN CARRILLO, Ph.D.
Directora de Escuela de Ingeniería de Petróleos.
Docente UIS.**

CODIRECTORES

**GLORIA ESPERANZA COBALEDA, Ms.C.
Laboratorio de Microscopía Electrónica, ICP.**

**CARLOS CESAR PIEDRAHITA ESCOBAR, Ph.D.
Grupo de Geofísica, UNI, ICP.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA
2005**

DEDICATORIA

A **DIOS**, porque siempre ha estado a mi lado, respaldándome en todo momento y en todo lugar, me ha extendido su brazo para levantarme en mis caídas, me ha proporcionado la luz cuando he quedado a oscuras, me ha brindado apoyo en los momentos difíciles, ha sido mi guía en los triunfos sobre las grandes pruebas que me ha puesto la vida y ha celebrado con mis triunfos...Él me ha brindado todo cuanto tengo y cuanto soy.

A **ANA y OSWALDO**, porque me dieron la vida y la forma correcta de afrontarla, sus enseñanzas me han ayudado a alcanzar las metas que he coronado hasta este momento. Todo su amor, voluntad y sacrificio para sacar adelante este proyecto de vida los hace merecedores no sólo de este pequeño reconocimiento sino de otros muchos más grande.

A **OLGA**, porque antes que una hermana, ha sido la fuerza invisible que me impulsa a seguir trabajando para retribuir en ella, aunque sea un poco, de lo mucho que **DIOS** me ha ayudado alcanzar.

A **MARIANELLA**, porque me ha dado absolutamente todo su puro y desinteresado amor, ha estado junto a mi en cada alegría y en cada tristeza, he encontrado en ella una voz de aliento y una sonrisa cada vez que he decaído, ha disfrutado conmigo los logros obtenidos, me ha brindado su apoyo en todo momento y en cualquier circunstancia, ella es otra razón muy poderosa que me impulsa a seguir adelante y llegar a objetivos mucho mas grandes.

A la **familia De La Rosa Camargo**, quienes se han convertido en mi familia adoptiva, porque todo lo que me han brindado sólo se le brinda a un hijo o a un hermano y es la prueba más fiel de que el amor, el cariño y la amistad no tiene distingo de nada.

A mis amigos y todas esas personas que han aportado un grano de arena con su cariño, comprensión y ayuda para que este objetivo se llevara a cabo.

ONEY.

AGRADECIMIENTOS

A la UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, por ser el ente que me ha formado como profesional y la cual siempre tuvo sus puertas abiertas para que obtuviera todo el conocimiento y experiencia que en ella están guardados.

A ECOPETROL-ICP, por todo el apoyo que se recibió para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los Doctores Zuly H. Calderón, Carlos Piedrahita, Gloria Cobaleda, Zarith Pachón y Héctor H. Pérez, quienes estuvieron siempre dispuestos a brindar su ayuda y consejos y que antes de cualquier rango o grado de estudio se dispusieron como seres humanos.

Al Grupo GEOFRACATALES UIS, antes de ser un grupo de trabajo, es una hermandad y que estuvieron siempre dispuestos a dar lo mejor de cada uno para llegar a los diferentes objetivos que se trazaron para todos los trabajos que se realizaron.

A todas esas personas que un día estuvieron ahí, para brindar su ayuda, guía y colaboración dentro y fuera de la universidad.

TABLA DE CONTENIDO.

	Págs.
INTRODUCCIÓN.....	12
1. CAMPO APIAY	14
1.1 Generalidades.	14
1.2 Localización	15
1.3 Geología.	15
1.3.1 Geología Estructural.	15
1.3.2 Geología Estratigráfica.	16
2. PROPIEDADES PETROFÍSICAS DE LAS ROCAS DE LOS YACIMIENTOS. ..	21
2.1. Porosidad.	21
2.1.1 Clasificación de la Porosidad.....	22
2.2 Permeabilidad.	23
2.2.1 Clasificación de la Permeabilidad.	23
2.2.2 Relación de la Permeabilidad con otros Parámetros Petrofísicos.	24
2.3 Presión Capilar.	27
2.3.1 Algunas consecuencias prácticas de estas expresiones.....	30
2.3.2 Curvas de Presión Capilar (Tiab y Donaldson, 1996; Purcell, 1950; Plata, 1987).....	32
2.4. Interpretación de las Curvas de Presión Capilar	33
3. FRACTALES.....	35
3.1 Teoría del Caos.	35
3.1.1 Efecto mariposa.....	36
3.1.2 El caos en el uso común de la palabra.	37
3.2 Historia de los fractales.	37
3.3 Surgimiento de los Fractales.....	39
3.4 ¿Qué es un Fractal?	41
3.4.1 Autosimilitud.	43
3.4.2 Dimensión Fractal.....	45
3.5 Tipos de Fractales.	46
3.6 Cálculo de Dimensión Fractal.	49

4. MODELO FRACTAL DEL ESPACIO POROSO.....	52
4.1 Modelo del Palomar.....	52
4.2 Método de Intrusión de Mercurio y su Relación con la Geometría Fractal	56
4.3 Superficie Específica y su Relación con la Geometría Fractal.	57
4.4. Volumen Residual proveniente de Porosimetría de Mercurio.....	58
4.5 Relación de la Porosidad con la Dimensión Fractal.	60
4.6 Relación Fractal de la tortuosidad	62
5. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE PERMEABILIDAD.....	64
5.1. Procedimiento.....	64
5.1.1 Recolección de la información.....	64
5.1.2 Análisis y clasificación de la información.....	65
5.1.3. Familias de Rocas (tipos de roca) de Apiay	67
5.2 Cálculo de la Dimensión Fractal para construcción del Modelo.....	72
5.3 Comportamiento Fractal del Medio Poroso	76
5.3.1 Tortuosidad fractal	77
5.3.2 Porosidad fractal.....	80
5.3.3. Validación del uso de la Ecuación modificada de Kozeny–Carman	81
CONCLUSIONES	89
RECOMENDACIONES	91
NOMENCLATURA.....	92
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Localización de los campos pertenecientes a Gerencia Llanos	17
Figura 2. Esquema del corte transversal de la Cuenca de los Llanos Orientales	17
Figura 3. Columna estratigráfica de los Llanos Orientales	20
Figura 4. Ascenso Capilar de la interfase agua-petróleo.....	28
Figura 5. Presión en diferentes puntos de la zona de ascenso capilar.....	28
Figura 6. Presión en diferentes puntos de la zona de ascenso capilar.....	32
Figura 7. Triángulo de Sierpinski	38
Figura 8. Conjunto de Cantor	38
Figura 9. Curva de Von Koch.....	39
Figura 10. Representación de fractales asociados con elementos naturales .	43
Figura 11. Conjunto de Mandelbrot generada por el software gratuito Fractint	44
Figura 12. Fractales lineales.....	46
Figura 10. Modelo que se repite en la Curva de Koch	47
Figura 12. Sección transversal de una roca sedimentaria de acuerdo al modelo autosimilar del Palomar compuesto de subestructuras de granos y poros	54
Figura 13. Gráfica de Winland	67
Figura 14. Gráficas de Winland, para las muestras del yacimiento estudiado.	70
Figura 15. Distribución de tamaño de garganta por Método inyección de Mercurio. Pozo Apiay 12	74
Figura 16. Gráfica de volumen residual contra radio de Garganta del pozo Apiay 12, unidad K-1, para varias profundidades.....	75
Figura 17. Gráfica de volumen residual contra radio de Garganta del pozo Apiay 9, unidad K-2 para varias profundidades.....	75
Figura 18. Relación entre la Tortuosidad y la relación de radios de grano y efectivo	79
Figura 19. Relación de la porosidad con la relación de radios.	81

Figura 20. Permeabilidad medida y calculada por el modelo contra Porosidad.	
.....	83
Figura 21. Permeabilidad Medida en laboratorio y Calculada por el modelo	
contra porosidad.....	85
Figura 22. Permeabilidad Calculada contra Permeabilidad Medida	88

LISTA DE TABLAS.

Tabla No 1. Clasificación de las diferentes unidades de Apiay para cada pozo.	68
Tabla 2. Familias de Winland para unidad K-1 de la formación Guadalupe.	71
Tabla 3. Dimensión fractal por pozo.	76
Tabla 4. Valores de C1 para Algunos pozos.	78
Tabla 5. Valores de Porosidad, Permeabilidad Medida y Permeabilidad Predicha por el Modelo.	87

TITULO: IMPLEMENTACIÓN Y VERIFICACIÓN DE UN MODELO FRACTAL, PARA LA PREDICCIÓN DE PERMEABILIDAD, APLICADO A UN YACIMIENTO COLOMBIANO *.

AUTOR: ARGEL PEREIRA, Oney Adel[†]

PALABRAS CLAVES: Permeabilidad, Porosidad, Dimensión Fractal, Radios de poro, Radios de granos, Presión capilar, Tortuosidad, Factor de Formación.

DESCRIPCIÓN.

Diferentes aproximaciones empíricas se han utilizado para describir la dependencia de la permeabilidad (k) y la porosidad (ϕ) a través de relaciones exponenciales, sin embargo, estas son estrictamente particulares, y por esto, hasta el momento no se ha encontrado una función que proporcione una relación directa entre ellas. Muchos modelos teóricos se basan en la ecuación de Kozeny-Carman que considera el sistema de poro como un simple arreglo de esferas y tubos, haciendo inadecuada y poco precisa su predicción, esto debido a que la superficie interior del medio poroso consta de subestructuras en las paredes que varían de tamaño en varios ordenes de magnitud que no fueron consideradas.

Por lo anterior, en este trabajo se propone el uso de la Teoría Fractal combinada con las relaciones petrofísicas como alternativa para aproximar la permeabilidad. En relación a esto, un modelo particularmente cercano a la apariencia natural de un espacio de poro de rocas sedimentarias ha sido propuesto anteriormente, el cual ha sido llamado modelo del Palomar (Pape, 1987), y que al igual que otros modelos fractales asume que la superficie interior de los poros sigue la regla de autosimilitud, por este hecho la teoría Fractal pueda ser aplicada. El parámetro clave en esta teoría es la Dimensión Fractal D .

En este trabajo se implementaron modelos para cálculo de la dimensión fractal con el fin de caracterizar el medio poroso y luego integrar estos datos con la información existente de los parámetros petrofísicos y así desarrollar e implementar el modelo propuesto por Pape, modelo que brinda una predicción teóricamente más aproximada de la permeabilidad. Los modelos se implementaron para la formación Guadalupe del Campo Apiay en Colombia. El ajuste lineal de la Permeabilidad calculada por medio de este modelo se ajusta al valor medido con un coeficiente de correlación de 0.75.

* Trabajo de investigación.

[†] Facultad de Ingenierías Físicoquímicas, Escuela de Ingeniería de Petróleos, Zuly H. Calderón Carrillo.

TITLE: IMPLEMENTATION AND VERIFICATION OF A FRACTAL MODEL, FOR PERMEABILITY PREDICTION, APPLIED TO A COLOMBIAN RESERVOIR*

AUTHOR: ARGEL PEREIRA, Oney Adel[†]

KEYWORDS: Permeability, Porosity, Fractal Dimension, Capillary Pressure, Grain Radius, Pore Radius, Tortuosity, Formation Factor.

DESCRIPTION.

Different empirical approaches have been used to describe the dependency of permeability (k) and porosity (Φ) through exponential relations, nevertheless these are strictly particular, and by this, until the moment has not been a function that provides a direct relation among them. Many theoretical models are based on the equation of Kozeny-Carman, which considers the pore system like a simple adjustment of spheres and tubes, predicting inadequate and inaccurate values because the models have not considered that the inner surface of porous media consists of substructures in the walls of the pore that vary on size in several order of magnitude.

This work applies the Fractal Theory combined with the petrophysical relations as alternative method to approximate the permeability. A pigeon hole model particularly near the natural appearance of a sedimentary rock pore space has been proposed (Pape, 1987), this model like others fractal models assume that the inner surface of pores follows the self-similarity rule, that is a fundamental principle of Fractal theory. The key parameter in this theory is the Fractal Dimension D .

In this work, it was implemented the fractal model for porosity characterization with the purpose of generate the data to be integrated with the petrophysical information available in other to implement the Pape's Model. This model provides an approach more theoretically supported. The models were done for the Guadalupe formation - Apiay basin Colombia. The linear adjustment of calculated Permeability by means of this model adjusts to the measured Permeability values with a correlation coefficient of 0.75.

* Investigation Work.

[†] Faculty of Physical-chemical Engineering, Petroleum Engineering School, Zuly H. Calderón Carrillo.

INTRODUCCIÓN

En la pasada década se demostró que un gran número de materiales de origen natural y manufacturado exhiben micro estructuras con características fractales. Y fue Mandelbrot con sus ensayos pioneros sobre geometría fractal en 1975 y 1982 (www.fractaltec.org), quien permitió el desarrollo de una nueva ciencia, rama de las matemáticas, llamada geometría fractal. Esta nueva geometría se basa en algoritmos y el uso de dimensiones fraccionarias a diferencia de la tradicional geometría Euclidiana que utiliza modelos matemáticos y dimensiones enteras. La geometría de los fractales permite describir la morfología de la naturaleza, las cuales no son adecuadamente descritas por las formas euclidianas.

Es por esto que sistemas como las rocas han entrado en la mira y se ha estudiado su naturaleza desde el punto de vista de la geometría fractal, así como los medios porosos, en lo que ha transcurrido las dos últimas décadas.

Para la valoración de rocas de yacimiento, la porosidad y la permeabilidad son los datos petrofísicos más importantes bajo condiciones de fase simples y es por eso que en el pasado, se han utilizado diferentes aproximaciones empíricas para describir la dependencia de la permeabilidad (k) y la porosidad (ϕ) a través de relaciones exponenciales o leyes de potencias. Sin embargo, estas aproximaciones carecen de sustentación petrofísica, y además son estrictamente particulares, existiendo una gran dificultad para explicar la verdadera relación entre ϕ - k solo a través de simples expresiones empíricas.

En Colombia, la aplicación de la Teoría Fractal en la ingeniería de petróleos, ha tenido desarrollo en la descripción del comportamiento de las fracturas en el proceso de fracturamiento hidráulico (Suárez y Villamizar, 1998), descripciones generales del comportamiento de las estructuras y propiedades del material rocoso de los yacimientos (Villamizar y Remolina, 1993) y el análisis de registros de pozos

para realizar predicción de recobro mediante la inyección de fluidos (Restrepo, 2000), al igual que otros trabajos realizados por la línea geológica.

Por otro lado, muchos modelos teóricos se basan en la ecuación de Kozeny-Carman (Tiab y Donaldson, 1996), la cual considera el sistema de poro como un simple arreglo de esferas y tubos, lo cual no es concordante con la elevada complejidad del mundo real, haciendo inadecuada y poco precisa su predicción.

Por lo anterior, en este trabajo se propone el uso de la Teoría Fractal combinada con las relaciones petrofísicas como alternativa para aproximar la permeabilidad. En relación a esto, un modelo particularmente cercano a la apariencia natural de un espacio de poro de rocas sedimentarias es el llamado modelo del Palomar (Pape, 1987), el cual al igual que otros modelos fractales inicia con el hecho de que la superficie interior de los poros sigue la regla de autosimilitud, hecho por el cual esta teoría Fractal pueda ser aplicada. El parámetro clave en esta teoría es la Dimensión Fractal D .

Es así, que este trabajo, pretende integrar la información existente de la Geometría Fractal, y de los parámetros petrofísicos involucrados para desarrollar e implementar un modelo que brinde una predicción aproximada de la permeabilidad de un yacimiento Colombiano (Campo APIAY).

El desarrollo de este trabajo consta de cinco capítulos, en el primero se brinda una descripción general del campo Apiay y la formación estudiada, en el segundo se consigna la teoría Petrofísica Básica necesaria para la implementación del modelo, en el tercer capítulo se brinda una teoría sobre la Geometría Fractal, en el cuarto capítulo se hace el desarrollo de la teoría fractal del espacio poroso y los fundamentos importantes para la implementación del modelo y en el quinto capítulo se describe la implementación y verificación del modelo propuesto, cuyo punto de referencia son datos de porosidad y permeabilidad provenientes de mediciones hechas a corazones de las unidades K-1 y K-2 de la formación Guadalupe del Campo estudiado.

1. CAMPO APIAY

1.1 Generalidades.

El campo Apiay fue descubierto por ECOPETROL en el año de 1981, cuando la compañía Anson perforó el pozo Apiay 1, el cual se desarrolló como productor de aceite (24° API) de la unidad K-2 (cretáceo), formación Guadalupe; después que Chevron obtuviera descubrimientos de exploración comercial en esta zona en 1969 (campo Castilla y Chichimene), (Rueda y Velandia, 2000).

Posteriormente, se perforaron los pozos Apiay 2 y Apiay 3, de los cuales, Apiay 2, resultó seco, y el Apiay 3 inició producción en diciembre de 1982 (Salamanca, 1991). En marzo de 1983, después de comprobar la producción comercial por medio de pruebas efectuadas en los pozos Apiay 1 y Apiay 3, se inició oficialmente la explotación de hidrocarburos del campo Apiay.

Actualmente, se han perforado 16 pozos, y la mayor parte de la producción de este campo proviene de la unidad (cretaceo superior) que pertenece a la formación Guadalupe, además de la unidad K-2, se han descubierto otras acumulaciones de aceite en la unidad K-1 y de gas en la unidad T-1.

Entre 1981 y 1988 se perforaron 47 pozos en desarrollo pertenecientes a los campos Apiay, Apiay Este, Guaitiquía, Suria, Suria sur, Pompeya, Austral, Guayariba, Tanaré, Libertad Norte y Reforma.

Entre 1981 y 1988 se construyeron las facilidades de producción, así como la estación de bombeo Apiay y las plantas de gas y asfalto. Entre 1981 y 1989 el crudo producido en el área se transporto por carro tanques, llegándose a manejar un volumen de 16000 BOPD. A partir del 8 de agosto de 1989 se inició el bombeo por el oleoducto de los llanos.

1.2 Localización.

El campo Apiay se encuentra ubicado en el Departamento del Meta, a cien kilómetros al Sur-Este de la ciudad de Bogotá, se encuentra operado directamente por la Gerencia Llanos de la Empresa Colombiana de Petróleos ECOPETROL. (Figura 1). Está ubicado dentro de la sub-cuenca Apiay-Ariari, perteneciente esta a la Cuenca de los Llanos Orientales, la cual se encuentra limitada al oeste con el piedemonte llanero y con el sistema de fallas Upia - Guaicáramo, al norte con el palaoalto de Cumaral y al sur con la Serranía de la Macarena; definiendo un área aproximada de 30.000 Km² (Amaya, et. al., 1998).

1.3 Geología.

El campo Apiay se encuentra ubicado en la subcuenca Apiay-Ariari, cuya geología general de la zona se describe a continuación.

1.3.1 Geología Estructural.

El campo Apiay presenta estructuras anticlinales asociadas a un fallamiento inverso y normal (Figura 2), (Niño y Rincón, 2000). La estructura que forma la cuenca de los llanos es el resultado de los procesos tectónicos que han afectado el Noroccidente Suramericano. En la interpretación estructural de la zona se propone un estilo tectónico dominado por fallas con desplazamiento de rumbo, con sus elementos principales, zona de cizallamiento, fallas normales, fallas inversas y pliegues bien definidos. Las zonas de falla en el área, presentan una tendencia N50°E. Generalmente, se componen de numerosas fracturas de poco desplazamiento vertical y por lo tanto de muy baja resolución sísmica. Los ejes principales de los pliegues son paralelos a la dirección de las fallas inversas y están alineados en dirección N30°E aproximadamente. Estas fallas inversas limitan los

campos Apiay y Suria. La estructura de Apiay corresponde a un anticlinal asimétrico de dirección N30°E con cabeceo hacia el NE. Presenta seis Km de longitud y 1.6 Km de ancho. Existe una ligera depresión entre las áreas de Apiay y Guatiquía aunque son estructuralmente continuas. El límite de la estructura al este, lo determina la Falla Inversa de Apiay, presenta un solo plano de alto ángulo inclinado al NW, que corta desde el Terciario hasta el basamento. La estructura que forma la cuenca de los llanos es el resultado de los procesos tectónicos que han afectado el noroccidente suramericano. En la interpretación estructural de la zona se propone un estilo tectónico dominado por fallas con desplazamiento de rumbo, con sus elementos principales, zona de cizallamiento, fallas normales, fallas inversas y pliegues bien definidos.

Las zonas de falla en el área, presentan una tendencia N50°E. Generalmente se componen de numerosas fracturas de poco desplazamiento vertical y por lo tanto de muy baja resolución sísmica. Los ejes principales de los pliegues son paralelos a la dirección de las fallas inversas y están alineados en dirección N30°E aproximadamente. Estas fallas inversas limitan los campos Apiay y Suria. La estructura de Apiay corresponde a un anticlinal asimétrico de dirección N30°E con cabeceo hacia el NE. Presenta seis Km de longitud y 1.6 Km de ancho. Existe una ligera depresión entre las áreas de Apiay y Guatiquía aunque son estructuralmente continuas.

1.3.2 Geología Estratigráfica.

Las formaciones de interés petrolífero que se encuentran en la subcuenca Apiay-Ariari, son: Guadalupe, a la que pertenecen las unidades operacionales K-2 y K-1, Formación Mirador, a la que pertenece la unidad operacional T-2 y Formación Carbonera, a la que pertenece la unidad operacional T-1 (ECOPETROL-ICP, 1999). En la Figura 3 se observa la columna estratigráfica de la cuenca llanos, donde se muestra las formaciones de la subcuenca Apiay-Ariari. Para el presente trabajo se hará énfasis en las unidades K-1 y K-2.

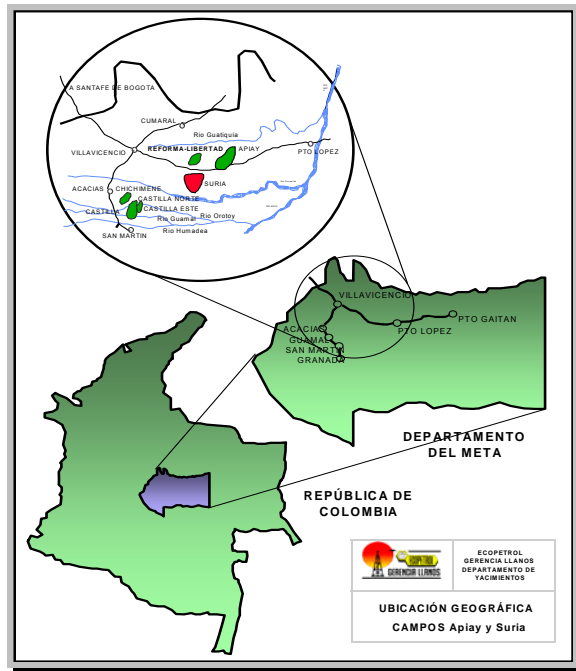


Figura 1. Localización de los campos pertenecientes a Gerencia Llanos (Tomado de Niño y Rincón, 2000)

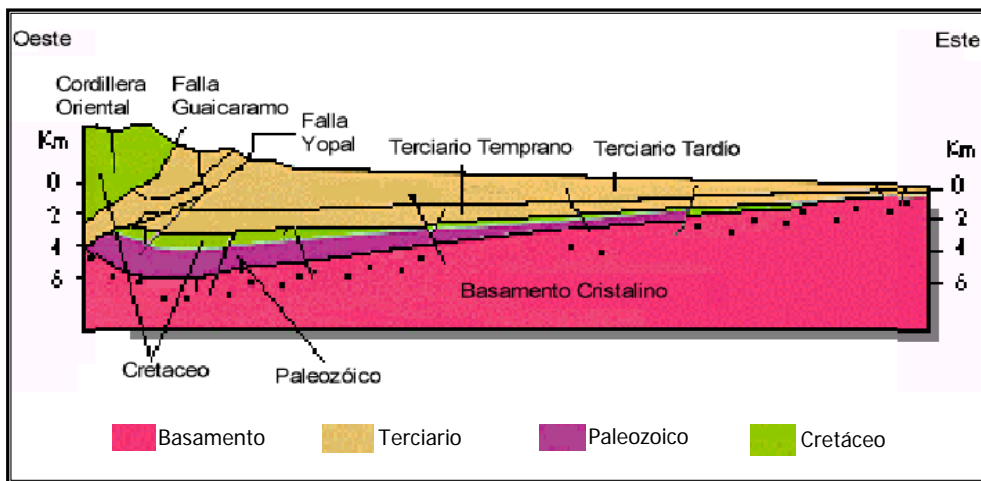


Figura 2. Esquema del corte transversal de la Cuenca de los Llanos Orientales (Tomado de: ECOPELROL, 2000)

- **Pre Cretáceo.** Consiste en metasedimentos y phyllitas de edad paleozoica (Cambro-Ordovícico), sólo ha sido alcanzado por los pozos Quenane-1, Suria-1, Apiay-4 y Apiay Este-1. El pozo Quenane-1 fue el único que penetró 200 pies de metasedimentos y alcanzó el basamento cristalino.

- **Formación Carbonera.** El shale E-4 marca la separación entre las areniscas del T-2 y las del T-1, es producto del depósito en ambiente marino somero. La arenisca T-1 posee intercalaciones de lodolitas y limolitas grises a verdes, alcanzando un espesor de 250 pies. Fue depositada en un sistema fluvial de baja energía; su edad es Oligoceno (40 a 42 millones años).
- **Areniscas de Carbonera.** Representan la unidad superior de la formación carbonera, está conformada por una serie de capas de areniscas separadas por capas de arcillolitas. Fueron depositadas en un ambiente fluvial de baja energía.
- **Formación Guadalupe.** La unidad K-2 de edad Cenomaniano - Coniaciano Inferior reposa sobre metasedimentos paleozoicos y su contacto superior transicional con K-1. Está constituida por areniscas en general de grano medio, con selección variable y sutiles variaciones que permiten identificar ciclos granodecrecientes al tope, con ciclos que varían en espesor de 10 a 15 centímetros en la base y parte media de la secuencia del K-2 hasta ciclos de más o menos uno a tres centímetros en el tope de la secuencia. El contenido arcilloso es escaso a nulo, pero en sección delgada, se observan los poros rellenos por caolinita predominantemente y en menor cantidad illita y clorita. El principal mineral cementante es el sílice en forma de sobrecrecimientos alrededor de los granos de cuarzo, aunque en la parte inferior se reconocieron pequeños fragmentos de carbonatos, que al parecer fueron removidos en gran parte y de ellos solo quedan trazas. La composición de las areniscas es cuarzo-arenitas en un 85% y de sublitoarenitas en un 15%.

Formación Chipaque. Se encuentra encima de la unidad K-2 y corresponde a la unidad K-1. Las rocas de la unidad operacional K-1 en la subcuenca Apiay-Ariari, conforman una secuencia retrogradacional constituida por depósitos fluvio-deltáicos a la base, que gradan a depósitos de canales y planicies de marea, y son cubiertos por sedimentos arcillosos de plataforma externa. El incremento de las condiciones marinas a medida que se asciende en la columna estratigráfica termina cuando se origina la superficie máxima de inundación, y se inicia un nuevo ciclo de pulsos

progradacionales del continente. Como resultado se generan cuatro tipos de superficies cuyas características varían de acuerdo a su deposición.

Unidades Importantes.

Unidad K-1. Esta es una unidad Volumétrica, cuya porosidad promedio es de 13 %, con una permeabilidad horizontal promedio de 75 mD y vertical de 37.5 mD, cuyo empuje es del tipo de gas en solución, esta es una trampa combinada estructural/estratigráfica. Los fluidos que se extraen de esta unidad son gas y petróleo el cual tiene una gravedad API entre los 33 y 37, la relación de gas/aceite es 850 PCS/STB. Además posee una presión promedio de 4400 Psia. La unidad K-1, ha sido clasificada en 33 unidades depositacionales, y las cuales dividen el K-1 en tres partes, K-1 inferior (Unidades 1 a 16), K-1 medio (Unidades 17 a 21) y K-1 superior (Unidades 22 a 33).

Unidad T-1. De la formación carbonera es atractiva para explotación de hidrocarburos en el campo Apiay, donde tiene espesores netos areniscos cercanos a los 100 pies (pozos Apiay 1, 8, y 10) y ha sido probada como productora de gas y condensados.

Unidad K-2. Esta es una unidad Volumétrica, cuya porosidad promedio se de 17%, con una permeabilidad horizontal promedio de 100 a 200 mD, cuyo empuje es del tipo de acuífero activo, este es un anticlinal fallado, con un espesor neto de 388 pies. Los fluidos que se extraen de esta unidad son gas y petróleo el cual tiene una gravedad API entre los 19 y 24, la relación de gas/aceite es 100-200 PCS/STB. Posee una presión promedio de 940 Psia.

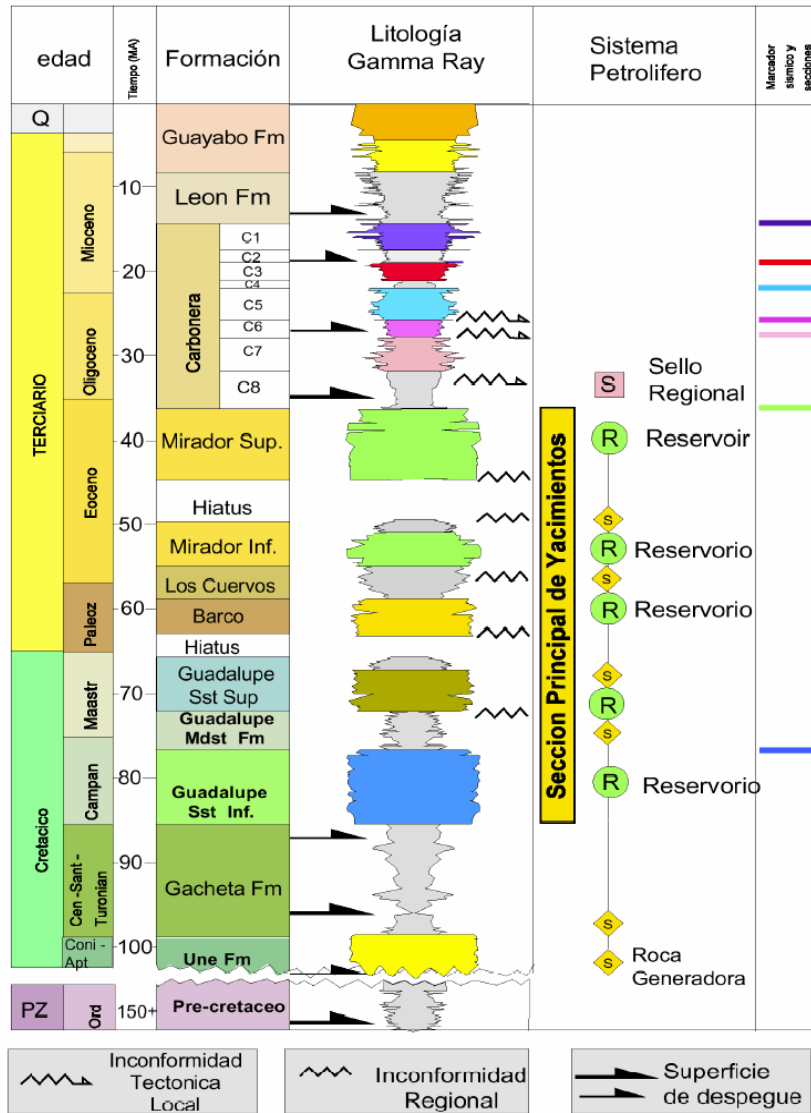


Figura 3. Columna estratigráfica de los Llanos Orientales (Tomado de: Martínez, 2003)

2. PROPIEDADES PETROFÍSICAS DE LAS ROCAS DE LOS YACIMIENTOS.

Dentro de los parámetros petrofísicos más importantes en la ingeniería de yacimientos, se encuentran la Porosidad y la Permeabilidad. Los cuales son fundamentales para describir el comportamiento del yacimiento, en cuanto flujo de fluidos se refiere, a través de él. Por tal motivo, ha sido objeto de muchas investigaciones buscando estudiar no solo el comportamiento de estas dos propiedades por separado, sino que también analizando la forma en que los dos se relacionan. El manejo de estas dos propiedades es fundamental para responder inquietudes acerca de los fluidos del yacimiento, cantidad de estos, la tasa de flujo de fluidos y estimativo del recobro de los fluidos.

La permeabilidad es una medida inherente de la roca, la cual brinda una concepción de la habilidad que tiene la roca para dejar fluir un fluido a través de los canales que constituyen el volumen poroso interconectado, mientras que la porosidad es una medida de los espacios vacíos que posee la roca. Muchos son los métodos que existen en la literatura para hallar el valor de estas propiedades. Otras propiedades de yacimiento son igualmente importantes como las propiedades eléctricas de la roca, presión capilar, tortuosidad de los intersticios o canales de los poros.

2.1. Porosidad.

La porosidad de un material se define como la fracción del volumen total de la roca no ocupada por el material sólido de la misma (Plata, 1987). Generalmente se designa con la letra ϕ , y puede expresarse como porcentaje o fracción.

$$\phi = \frac{V_P}{V_T} = \frac{V_T - V_S}{V_T} \quad (1)$$

Donde:

V_p = volumen poroso

V_T = volumen total

V_s = volumen de granos.

2.1.1 Clasificación de la Porosidad.

La porosidad puede clasificarse de acuerdo a dos criterios: de acuerdo a su origen y desde el punto de vista del grado de intercomunicación de los poros. Teniendo en cuenta esto se puede hablar de porosidad primaria y secundaria, por un lado y de porosidad total y efectiva por el otro (Plata, 1987).

La **Porosidad Primaria** es la que se desarrolla durante los procesos de depositación del material., la cual se puede ver en las porosidades intergranulares de las areniscas, la intercrystalina y oolítica de varias calizas.

La **Porosidad Secundarias** el resultado de procesos geológicos (diagénesis y catagénesis) que ocurren después de la depositación. Esta porosidad puede estar representada por vario grupos de acuerdo a los procesos geológicas que imperen, dentro de los cuales se encuentran fracturas productos de actividades tectónicas de la tierra, canales y cavernas productos del flujo de soluciones calientes, y otras aperturas debido a la Dolomitización.

La **Porosidad Total** es la relación entre el espacio vacío total que hay en la roca y el volumen total de la misma, donde no se tiene en cuenta si existe o no intercomunicación entre los poros.

La **Porosidad Efectiva** es la relación entre en espacio posos intercomunicado y el volumen total de la roca. Este es el valor que mas importancia tiene desde el punto

de vista ingeniería de Yacimientos, ya que en esta porción del yacimiento donde se encuentran los fluidos que pueden ser recuperados.

2.2 Permeabilidad.

Además de ser poroso, un yacimiento debe tener la habilidad para permitir que los fluidos fluyan a través de los poros intercomunicados. Esta propiedad es la que se denomina Permeabilidad

2.2.1 Clasificación de la Permeabilidad.

Se puede clasificar de acuerdo al proceso de formación en permeabilidad Primaria y Secundaria, o de acuerdo a los fluidos presentes y a las saturaciones dentro del espacio poroso.

2.2.1.1 De acuerdo al Proceso de Formación.

La permeabilidad puede ser Primaria o Secundaria, la primera es denominada también de Matriz y es originada al tiempo de la depositación y litificación de las rocas sedimentarias. La segunda resulta de la alteración de de la matriz de la roca debido a compactación, solución cementación fracturamiento o cualquier otro proceso o fenómeno que se de después del proceso litológico de la roca.

2.2.1.2 De acuerdo a los Fluidos Presentes.

Permeabilidad Absoluta. Es la permeabilidad medida cuando hay un solo fluido presente, por ejemplo aire, agua o crudo. Esta permeabilidad es una propiedad del medio poroso y el valor es constante e independiente del fluido usado en su medida,

sin embargo, cuando hay una reducción de la permeabilidad por el tipo de fluido se debe hacer referencia al medio y al tipo de fluido.

Permeabilidad Efectiva. Es la medida de la conducción de un medio poroso a la fase de un fluido en un sistema multifásico que existe en el medio. El medio puede tener una permeabilidad efectiva distinta para cada fluido presente en el medio. La permeabilidad efectiva, además de ser función del medio poroso es función de la saturación y distribución de los fluidos presentes.

Permeabilidad Relativa (K_{ro} , K_{rw} , K_{rg}). La permeabilidad relativa de un medio poroso a un fluido de un sistema multifásico se define como la relación de la permeabilidad efectiva con la permeabilidad absoluta.

$$K_{rg} = \frac{K_g}{K} \quad (2a)$$

$$K_{rw} = \frac{K_w}{K} \quad (2b)$$

$$K_{ro} = \frac{K_o}{K} \quad (2c)$$

2.2.2 Relación de la Permeabilidad con otros Parámetros Petrofísicos.

La porosidad y la permeabilidad son dos propiedades que, aunque son de la roca, no se ha encontrado una relación general que describa el comportamiento de una en función de la otra, ya que una roca puede que tenga espacios vacíos disponibles para almacenar fluidos, pero al mismo tiempo puede ocurrir que estos espacios no tengan la suficiente comunicación como para dejar fluir los fluidos por lo cual se está al frente de un caso donde hay porosidad pero la permeabilidad es muy baja o nula. Pero, a través de la investigaciones se ha venido buscando descubrir alguna relación entre la porosidad y la permeabilidad, por lo que se han desarrollado algunas correlaciones que no sólo definen estos dos parámetros uno en función del otros, sino que también se tiene en cuenta otros que hacen parte de la misma

configuraron de la roca como superficies específicas, radios de grano, radios de poro, propiedades eléctricas de la roca, entre otros (Babadagli, 2002).

Kozeny dedujo una de las correlaciones más populares y fundamentales que expresan la permeabilidad en función de la porosidad (Tiab y Donaldson, 1996).

Considerando un medio poroso de área transversal A , conformado de un número n de tubos capilares en paralelo, longitud L y radio r , el flujo a través de este sistema de a cuerdo a la ley de Poiseuille será:

$$q = \left(\frac{n \pi r^4}{8 \mu} \right) \frac{\Delta P}{L} \quad (3)$$

Donde:

q = tasa de flujo en (cm^3 / s)

r = radio de los capilares (cm.)

L = longitud (cm.)

ΔP = caída de presión en la longitud L (dinas/cm^2)

El flujo de fluidos a través de los n capilares pueden ser aproximados por la ley de Darcy así:

$$q = \left(\frac{K A_c}{\mu} \right) \frac{\Delta P}{L} \quad (4)$$

Donde A_c es el área total de la sección transversal.

Teniendo en cuenta las definiciones de porosidad y la ecuación de Darcy, Kozeny obtuvo la siguiente relación:

(5)

$$K = \frac{\phi r_{ef}^2}{8}$$

Donde:

r_{ef} = radio efectivo de flujo, cm.

ϕ = porosidad (fracción).

De aquí, puede observarse que la permeabilidad de un medio poroso, depende de la distribución de tamaño de los poros y de la porosidad. Ahora, el factor de formación (F) (Archie, 1942) ha sido definido como:

$$F = T / \phi \quad (6)$$

Los valores de F y ϕ pueden obtenerse del análisis de núcleos, de registros eléctricos o de otras correlaciones.

La tortuosidad (T), es una corrección que debe aplicarse a la longitud de la trayectoria (Plata, 1987), debido a que la distancia promedio atravesada por el fluido es mayor que la distancia L entre las dos caras transversales perpendiculares al flujo:

$$T = (La / L) \quad (7)$$

Donde:

La = longitud promedio atravesada por el fluido, cm.

L = longitud que recorrería el línea recta el fluido, cm.

Al tener en cuenta lo anterior, la ecuación de Kozeny queda expresada de la siguiente forma:

$$K = \frac{r_{ef}^2}{8F} \quad (8)$$

Donde:

K = permeabilidad en cm^2 .

r_{ef} = radio hidráulico efectivo de flujo en cm.

Esta expresión se denomina ecuación de Kozeny- Carman.

2.3 Presión Capilar.

Cuando dos fluidos coexisten dentro de un medio poroso se ponen de manifiesto algunos fenómenos derivados de la existencia de tensiones interfaciales y ángulos de contacto entre la interfase de estos fluidos y el medio poroso (Tiab y Donaldson, 1996). Este fenómeno se puede estudiar y cuantificar por completo en sistemas muy simples tales como tubos capilares de diámetro uniforme.

Cuando un capilar se sumerge en la interfase de dos fluidos puede producirse un ascenso o un descenso de la interfase. En el primer caso se produce el denominado "ascenso capilar", y en el segundo caso se habla de "descenso capilar". Estos movimientos ocurren como consecuencia de los fenómenos de superficie que dan lugar a que la fase mojante invada en forma preferencial el medio poroso. En términos generales, el ascenso o descenso capilar se detiene cuando la gravedad contrarresta (en función de la altura y de la diferente Densidad de los fluidos) la fuerza capilar desarrollada en el sistema. La combinación de estas fuerzas superficiales activas determina entre otras propiedades de la roca la presión capilar, P_c .

La presión capilar puede ser definida como el diferencial de presión que se presenta en la interfase de dos fluidos inmiscibles cuando coexisten en un mismo medio y en equilibrio (Tiab, 1996; Purcell, 1950). Este diferencial se manifiesta como una superficie curva en la interfase (figura 4) y su magnitud depende de: tamaño, distribución y mineralogía de los granos que componen la roca, humectabilidad del medio, tensión interfacial entre los fluidos, distribución de los fluidos, saturación.

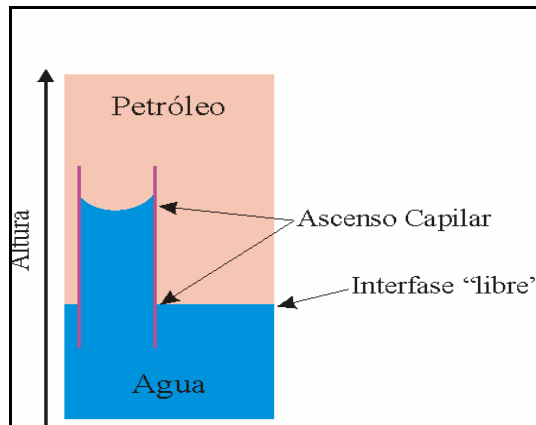


Figura 4. Ascenso Capilar de la interfase agua-petróleo (tomado de: Core Laboratories, 1977)

Una expresión matemática para calcular la presión capilar, P_c , puede ser obtenida a partir de la figura 5, la cual muestra el fenómeno de introducción de un capilar en una interfase agua-petróleo, donde se genera el denominado ascenso capilar.

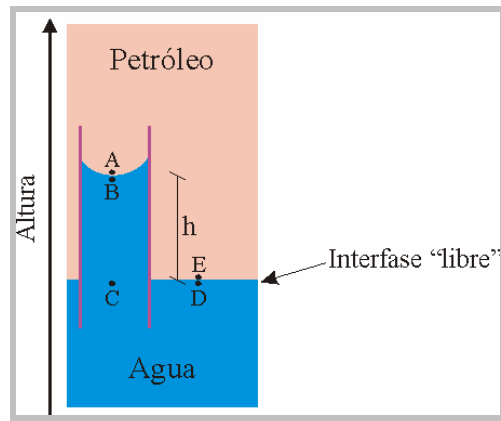


Figura 5. Presión en diferentes puntos de la zona de ascenso capilar (tomado de: Core Laboratories, 1977)

La fuerza que origine el ascenso capilar esta expresada por (Plata, 1987; Core Laboratories, 1977):

$$Fuerza = \sigma_{wo} \cos(\theta) \frac{2}{r} \quad (9)$$

Donde:

σ_{wo} = Tensión interfacial (Dinas/cm.)

q_{wo} = Ángulo de contacto de la interfase líquida con la superficie del sólido.

r = Radio del capilar (cm.)

Por otra parte, el peso adicional de la columna, debido al cambio de petróleo por agua durante el proceso se expresa como:

$$Peso = Pr^2 hg \Delta d \quad (10)$$

Donde:

P = presión (dinas/cm²)

h = Ascenso Capilar (cm).

g = aceleración de la gravedad (cm / seg²).

Δd = Diferencia de densidad entre los fluidos (g / cm³).

Y, en el equilibrio, ambas fuerzas se compensan exactamente, de modo que igualando las ecuaciones (9) y (10) y despejando la altura "h", se obtiene:

$$h = 2\sigma_{wo} \cos(q_{wo}) \frac{1}{rg \Delta d} \quad (11)$$

La ecuación (11) muestra la dependencia de los efectos capilares con el diámetro del tubo, con la tensión interfacial y el ángulo de contacto (mojabilidad del sistema) y la diferencia de densidad entre fluidos.

2.3.1 Algunas consecuencias prácticas de estas expresiones.

Basado en un desarrollo simple se hará una comparación de presiones en los puntos A y B de la Figura 5. Cada uno de estos puntos se encuentra en un lado C diferente de la interfase agua-petróleo y, aunque un análisis particular sugeriría que ambos puntos, debido a su cercanía, deben tener presiones casi idénticas, se puede ver que en realidad es muy diferente.

Al comparar los puntos E y D: Ambos puntos están muy cercanos (uno a cada lado de la interfase) y no hay fenómenos capilares involucrados, por lo que puede suponerse que se encuentran prácticamente a la misma presión (la columna de fluidos entre E y D es casi despreciable). Por otro lado, en el equilibrio, los puntos C y D se encuentran exactamente a la misma presión dado que están a la misma altura dentro de un mismo fluido ($P_C = P_D$). Como la diferencia de presión entre B y C está fijada por la columna de agua que separa ambos puntos, la presión en B adopta la siguientes expresiones:

$$P_B = P_C - d_w gh \quad (12)$$

$$P_A = P_E - d_o gh \quad (13)$$

Por lo que, restando las ecuaciones (12) y (13) (y teniendo en cuenta que $P_C = P_E$), resulta:

$$P_A - P_B = \Delta d_{wo} gh \quad (14)$$

La ecuación (14) muestra que la diferencia de presión entre los puntos de interés (A y B) es exactamente la diferencia de presión correspondiente al cambio de un fluido por otro en el capilar.

En resumen, la ecuación (14) indica que a uno y otro lado de la interfase curva existe una marcada diferencia de presión (tanto mayor, cuanto mayor es el ascenso capilar). A esta diferencia de presión se le conoce como presión capilar del sistema y su forma es la siguiente:

$$P_C = P_{nm} - P_m \quad (15)$$

Donde,

P_c = Presión Capilar. Psia

P_{nm} = Presión de la fase no mojante. Psia.

P_m = Presión de la fase mojante. Psia.

En este caso, la fase mojante es el agua, y la fase no mojante es el petróleo, sin embargo la ecuación (15) es de validez general y se aplica tanto a sistema de capilares cilíndricos como a sistemas de geometría no definida o altamente variable como es el caso de los medios porosos naturales.

Otra expresión útil para analizar los fenómenos capilares es la que se obtiene reemplazando la ecuación (14) en la ecuación (11). En este caso se obtiene:

$$P_c = 2\sigma_{wo} \cos(\theta_{wo}) / r \quad (16)$$

La ecuación (16) muestra que, una vez elegidos, tanto el material del medio poroso como los fluidos a estudiar, la presión capilar es inversamente proporcional al radio del capilar involucrado.

Este mismo fenómeno descrito por un solo capilar se repite en cada uno de los capilares interconectados de varios tamaños que existen en un medio poroso. Young – Laplace desarrollaron una expresión general para calcular la presión capilar en función de la tensión interfacial de los fluidos (Core Laboratories, 1977) y

la curvatura de la interfase, que permiten explicar mejor el fenómeno de la presión capilar y su efecto sobre el comportamiento del yacimiento. La expresión que desarrollaron quedó de la siguiente forma:

$$P_c = \sigma_{wo} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (17)$$

Donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura de las superficies curvas y se consideran constantes.

2.3.2 Curvas de Presión Capilar (Tiab y Donaldson, 1996; Purcell, 1950; Plata, 1987)

La Figura 6 muestra un caso menos idealizado. En este caso, la curva de trazo grueso y color rojo muestra el cambio de la saturación de agua con la altura, correspondiente a un sistema poroso heterogéneo, pero uniforme.

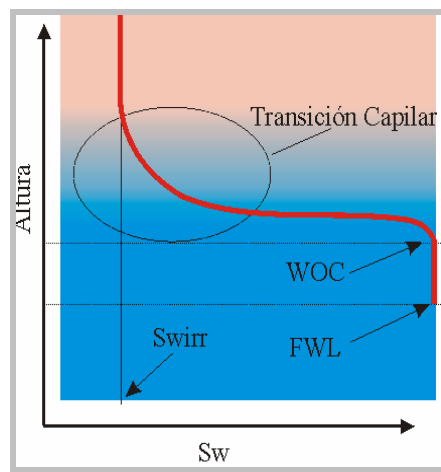


Figura 6. Presión en diferentes puntos de la zona de ascenso capilar (Tomado de: Tiab y Donaldson, 1996).

En dicha figura se identifican algunos puntos y zonas típicas de las curvas de presión capilar. Donde:

FWL = Nivel de agua libre. Es el nivel en el que se presentaría la interfase agua petróleo en ausencia de medio poroso.

WOC = Contacto Agua-Petróleo. Es el nivel más bajo en que se puede detectar petróleo. La diferencia entre el *WOC* y el *FWL* corresponde al ascenso capilar generado por los poros de mayor diámetro de la red porosa.

$S_{w_{irr}}$ = Saturación de agua irreducible. Es la mínima saturación de agua obtenida por desplazamiento capilar. En los capilares cilíndricos la $S_{w_{irr}}$ es nula (no hay fases residuales), pero en los medios porosos naturales toma valores, en general superiores al 10 ó 15 %, siendo frecuentes $S_{w_{irr}}$ superiores al 25%.

Zona de Transición Capilar. Es la zona que incluye todos los niveles en que la S_w varía entre el 100 % y la $S_{w_{irr}}$.

2.4. Interpretación de las Curvas de Presión Capilar (Tiab, 1996; Core Laboratories 1977)

Hay mucha información que se puede obtener de la interpretación de una curva de presión capilar, pero, la más importante, para el propósito de este trabajo que se está adelantando, es la de tamaño de granos.

$$r = \frac{2c\sigma_{lab}\text{COS}(\sigma_{lab})}{Pc} \quad (18)$$

Donde:

r = radio promedio, micras

Pc = Presión capilar de yacimiento, psi

σ_{lab} = tensión interfacial, dinas/cm.

$$C = 145 \cdot 10^{-3}$$

La pendiente de la curva durante el drenaje da una idea de la distribución del tamaño de granos, mientras mas horizontal sea la curva más homogénea será el tamaño de los granos. A partir de estas curvas se puede determinar el valor de radio promedio de los poros en los cuales la fase humectante ya ha sido desplazada por la fase no humectante, para un determinado valor de presión capilar.

3. FRACTALES.

“La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.” (Barnsley, 1993).

Los fractales son la representación geométrica de la teoría del caos. Pero, ¿en que consiste esta teoría?

3.1 Teoría del Caos.

La **teoría del caos** es la denominación popular de la rama de las matemáticas y la física que trata ciertos tipos de comportamientos aleatorios ("caóticos") de los sistemas dinámicos (<http://es.wikipedia.org>). Un **sistema dinámico**, matemáticamente hablando, es un proceso determinista, en el cual el valor de una función cambia de acuerdo a una regla, definida en términos del valor actual de la función. A su vez, un **sistema determinista** es un sistema en el cual no está involucrado el azar en los futuros estados del sistema. Es decir, si se conoce el estado actual del sistema, las variables del entorno y el comportamiento del sistema ante los cambios en el ambiente, entonces, se puede predecir el estado siguiente del sistema sin ningún riesgo de error.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de forma muy general en:

- Estable
- Inestable
- Caótico

Un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión (atractor). Un sistema inestable se escapa de los atractores. Y un sistema caótico manifiesta los dos comportamientos. Por un lado, existe un atractor por el que el sistema se ve atraído, pero a la vez, hay "fuerzas" que lo alejan de éste. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo.

Una de las mayores características de un sistema inestable es que tiene una gran dependencia de las condiciones iniciales. De un sistema del que conocemos sus ecuaciones características, y con unas condiciones iniciales fijas, se puede conocer exactamente su evolución en el tiempo. Pero en el caso de los sistemas caóticos, una mínima diferencia en esas condiciones hace que el sistema evolucione de manera totalmente distinta.

Por ejemplo, el tiempo atmosférico, según describió Edward Lorenz (<http://es.wikipedia.org>), se describe con ecuaciones diferenciales bien definidas. Siendo así, conociendo las condiciones iniciales, podríamos conocer la predicción del tiempo en el futuro. Pero, al ser éste un sistema caótico, y no poder conocer nunca con exactitud los parámetros que fijan las condiciones iniciales (en cualquier sistema de medición, por definición, siempre se comete un error, por pequeño que éste sea) hace que aunque conozcamos el modelo, éste diverja de la realidad pasado un cierto tiempo.

3.1.1 Efecto mariposa.

El "**efecto mariposa**" es una frase que incluye la más técnica noción de **dependencia sensible en condiciones iniciales** en la teoría del caos. La idea es que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un sistema pueden producir grandes variaciones en el comportamiento del sistema a largo plazo.

Edward Lorenz fue el primero en analizar este efecto en un trabajo de 1963 para la Academia de Ciencias de Nueva York (<http://es.wikipedia.org>). De acuerdo a este

trabajo, por muy precisos que se hicieran los cálculos para predecir el tiempo, el simple aleteo de una mariposa podría provocar drásticos cambios a largo plazo y hacer inválidos los cálculos.

La consecuencia práctica del efecto mariposa es que en sistemas complejos tales como el estado del tiempo o la bolsa de valores es muy difícil predecir con seguridad en un mediano rango de tiempo. Los modelos finitos que tratan de simular estos sistemas necesariamente descartan información acerca del sistema y los eventos asociados a él. Estos errores son magnificados en cada unidad de tiempo simulada hasta que el error resultante llega a exceder el ciento por ciento.

3.1.2 El caos en el uso común de la palabra.

El caos designa todo aquello que es o parece desorganizado, desordenado, confuso y a veces incoherente u oscuro. Según esta definición, se aplica al espíritu o al comportamiento humano (desorden social, político o económico, estado de agitación y de anarquía) o bien, a las producciones o creaciones del espíritu y las obras de arte.

3.2 Historia de los fractales.

Los Fractales son los objetos matemáticos que constituyen la Geometría de la Teoría del Caos (<http://es.wikipedia.org>). Se pueden encontrar y reconocer figuras con características fractales como la del triángulo de Sierpinski (figura 7) en grabados de tela de hace varias décadas atrás, hasta en los años de 1400 se hallaron grabados japoneses con estas estructuras.

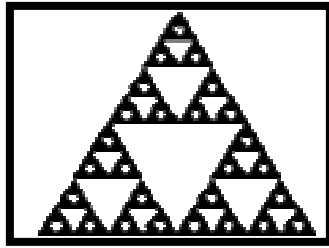


Figura 7. Triángulo de Sierpinski (Tomado de: Barnsley, 1993)

Un grupo de matemáticos comenzó a darse cuenta que en la naturaleza se daba muy seguido el fenómeno de irregularidades y que no eran excepciones como se suponía. Los primeros que comenzaron a demostrar teóricamente esta problemática fueron Cantor con su famoso conjunto de Cantor (Figura 8) y Peano. Hasta llegar al año de 1880 con Poincaré al que se le conoce como el padre de la Teoría del Caos (<http://es.wikipedia.org>)

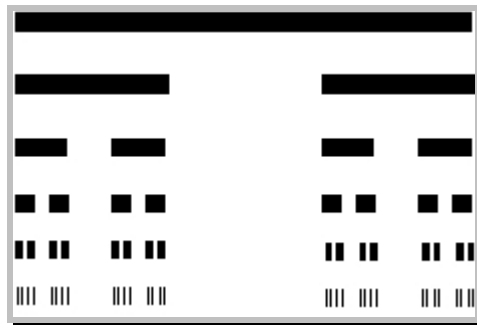


Figura 8. Conjunto de Cantor (Tomado de: Barnsley, 1993)

Otra estructura matemática, ya conocida en esa época y que más tarde pasó a formar parte de uno de los fractales más reconocidos, es la conocida como la isla de Koch elaborado por Helge Von Koch (Peitgen, et. al., 1992), (figura 9).

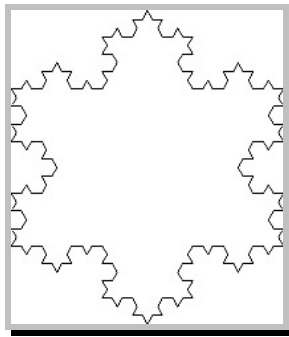


Figura 9. Curva de Von Koch (Tomado de Peitgen, et. al., 1992)

De manera general, se ha visto como los sistemas dinámicos y caóticos se fueron introduciendo en el pensamiento de la comunidad científica y como fueron surgiendo nuevas necesidades para reformular teorías y crear nuevas herramientas que pudieran describir sistemas que, hasta ese entonces, eran considerados excepciones y a los cuales se les realizaban diferentes aproximaciones y se les aplicaban diversas herramientas matemáticas para ajustarlos a las herramientas disponibles en esos tiempos. Se ha visto también, que objetos con estructuras que hoy se reconoce como fractales han existido durante muchos años.

3.3 Surgimiento de los Fractales

No fue hasta el año 1958, cuando Benoit Mandelbrot ingresa a trabajar en los laboratorios de IBM para hacer un análisis del ruido y perturbaciones eléctricas. Mientras realizaba dichos estudios encontró un patrón en su comportamiento y por lo tanto comenzó a descifrar una estructura escondida. Algo así como jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas. Esas fluctuaciones no podían ser descritas por la matemática estadística que existía. Mientras seguía adelante con sus tareas empezó a imaginar en que otros sistemas podrían encontrar patrones similares que no puedan ser descritos con exactitud por la matemática existente y que se comportaran de igual manera. Su visión lo llevó a hacerse una pregunta que podría resultar obvia para algunos y hasta para muchos otros, ser tonta o en el mejor de los

casos sin sentido. Su famosa pregunta fue: ¿Cuánto mide realmente la costa de Inglaterra?

Cualquier persona puede contestar esto sin ningún tipo de problema. No se tiene un valor exacto para este trabajo, suponiendo que este dato es de 3000 Km. Pero, la pregunta sería ¿de dónde proviene ese dato? ¿Cómo se hizo esa medida? Para hallar la respuesta a estas preguntas se tiene en cuenta las siguientes situaciones:

1) Si se mide las costas de Inglaterra desde un satélite, se puede ver que sus bordes suaves, armónicos, con líneas casi rectas y ángulos prácticamente redondeados.

2) La misma distancia puede ser medida, pero, desde un avión que vuela mucho más bajo que el satélite. Ahora, que se ven las cosas con más detalle por estar más próximos, se puede mirar que los bordes no eran en realidad tan suaves como se había observado anteriormente, sino que se notan muchas más rugosidades.

3) Por último, un tercer punto de partida, algo extremista, pero válido. Esta vez se está parado sobre la misma costa de Inglaterra con una regla común y corriente, y se mide roca por roca, rugosidad por rugosidad, detalle por detalle.

¿Cuál se cree que será el resultado de las distintas mediciones? Será, que ¿se habrán encontrado el mismo resultado? Definitivamente, fueron diferentes en los tres casos, ahora se puede mirar cual respuesta fue la mayor: la geometría tradicional muestra que una figura con bordes rectos o redondeados tiene una longitud menor que otra equivalente pero llena de rugosidades. Al comparar, por ejemplo, un círculo perfecto con la figura de Von Koch, (figura 9). La segunda tiene una longitud mucho más grande en sus bordes que la circunferencia; al tener en cuenta esto para el caso de la costa de Inglaterra, entonces se puede afirmar que los resultados de las 3 mediciones serán en todos los casos diferentes, y el de mayor extensión será el tercer caso, ya que en este se encuentran más detalles, a los cuales hubo que medir uno por uno. En realidad el resultado de este último caso se acercaría a infinito en el marco teórico.

Los resultados dependen de la escala que se utilice para medirlas, y no es para nada una casualidad que estas deducciones se desprendan de los mismos patrones que encontró Mandelbrot en sus estudios sobre flujo electrónico. Esas escalas como Mandelbrot reconoció poseían un patrón, y ese patrón las relacionaba diciendo que si bien no eran iguales a diferentes escalas, si lo eran de manera *estadísticamente similar*, y ésta es una de las características principales de los fractales.

3.4 ¿Qué es un Fractal?

En la literatura, cuando se consulta la parte de geometría fractal, se puede ver que se encuentran varias definiciones acerca de lo que es un fractal. Esto podría ser debido a que se necesita un nivel de abstracción tal, para comprender el concepto de Fractal que los puntos de vista varían drásticamente por más que se esté hablando de lo mismo. Otro motivo puede ser que la Geometría Fractal se ha transformado en una herramienta multidisciplinaria utilizada por científicos, artistas, psicólogos, sociólogos, etc. Entonces, un matemático no va a dar una definición de la misma forma que la dará un médico o un artista. Por lo tanto, para poder llegar a una definición generalizada se toman en cuenta un conjunto de definiciones y pensamientos y que al final ayudarán a formular una definición lo más clara posible.

- 1) Los Fractales son los objetos matemáticos que conforman la Geometría de la Teoría del Caos.
- 2) La Geometría Fractal es también conocida como la “Geometría de la Naturaleza.
- 3) La palabra Fractal, enunciada por Mandelbrot proviene del latín y significa roto, quebrado.
- 4) La Geometría Fractal es un nuevo lenguaje; ya que los puntos, rectas, esferas, elipses y demás objetos de la geometría tradicional son reemplazados por

algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos.

5) Los Fractales son objetos cuya dimensión es no entera o fraccionaria.

6) Un objeto fractal es aquél que su dimensión fractal de Hausdorff -Besicovich supera a su dimensión topológica.

7) Un objeto fractal es aquél que posee las siguientes dos características: a) Autosimilitud, b) Dimensión Fractal

8) Un fractal es un objeto en el cual sus partes tienen alguna relación con el todo. (Esto está íntimamente ligado con la Autosimilitud)

Cualquiera de estas definiciones es correcta. Algunas son más completas, otras más técnicas y otras aportan tan sólo datos someros, pero, no llegan a ser definiciones con todas las de la ley.

Cada teoría o ley matemática posee sus propias herramientas que la soportan y la describen. Las más comunes son la geometría euclidiana, el álgebra, o el mismo cálculo, este último en especial se da en la Física. La teoría del Caos no es la excepción a la regla, y se sustenta, entre otras cosas, sobre la Geometría Fractal.

La segunda dice, que a la Geometría Fractal se la conoce como la "Geometría de la Naturaleza" (figura 10), y este caso se tiene las siguientes imágenes:

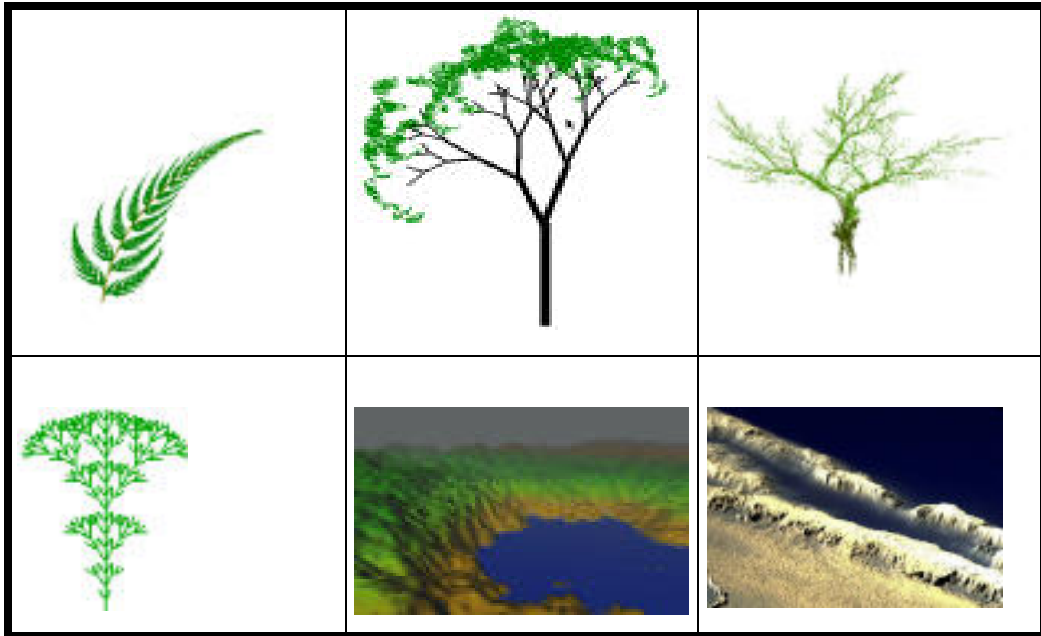


Figura 10. Representación de fractales asociados con elementos naturales (Tomado de www.fractaltec.org)

El tema de dimensión fractal y de Autosimilitud es una de las características fundamentales para caracterizar a los fractales.

3.4.1 Autosimilitud.

Cada porción de un objeto tiene las mismas características del objeto completo. También se puede decir que cada área de un fractal conserva de manera estadísticamente similar, sus características globales (Barnsley, 1993).

La figura (11) representa el conjunto de Mandelbrot, uno de los fractales más conocido. La primera de estas cuatro imágenes es el conjunto de Mandelbrot en su estado original, o sea, sin ninguna iteración, o para que se entienda mejor, sin haber hecho ninguna ampliación dentro de la imagen. Las siguientes figuras se generan ampliando un sector del fractal y viendo que se encuentra dentro. Por ejemplo, a la segunda se le hizo una ampliación, a la tercera cinco ampliaciones consecutivas y

por último a la cuarta se le aplicaron 10 ampliaciones. Nótese que, se está hablando de una ampliación inicial en un área determinada, si hubiese elegido otro lugar de fractal donde comenzar a interactuar, se hubiese generado imágenes distintas, pero, al mismo tiempo estadísticamente similares, sin importar la porción del fractal designado.

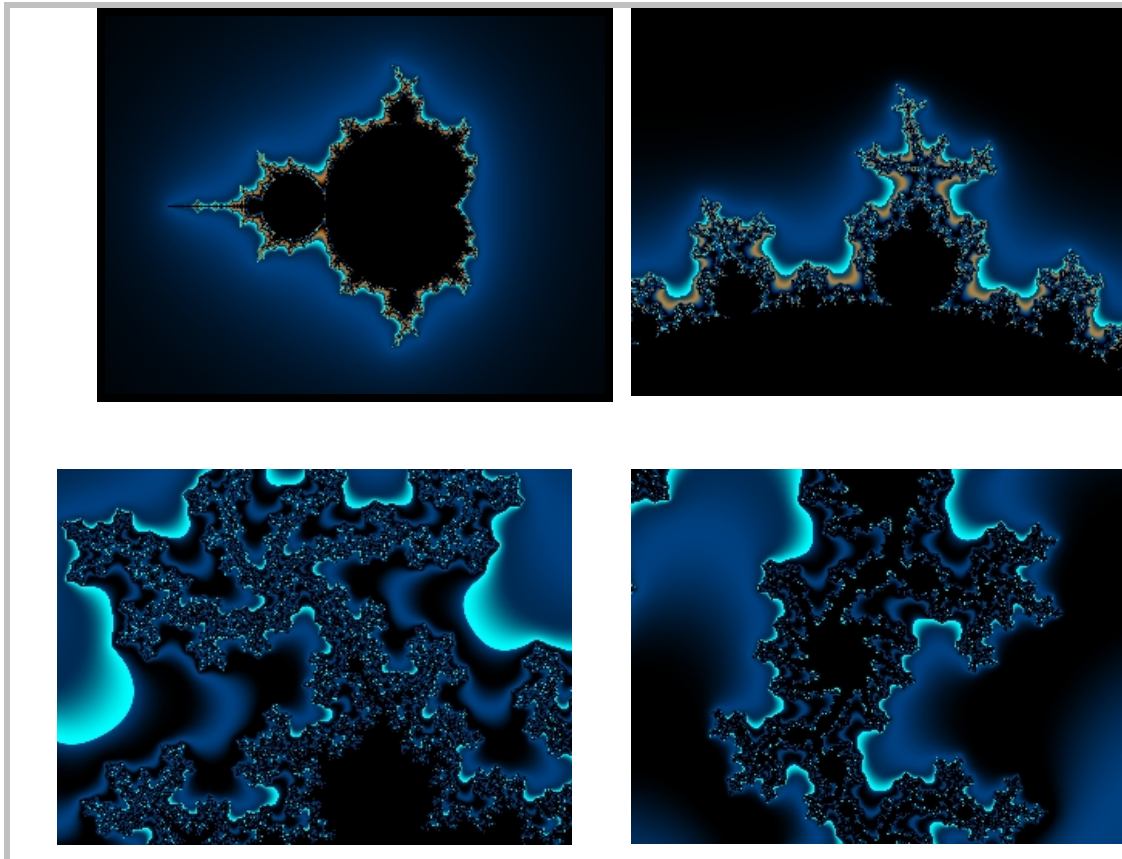


Figura 11. Conjunto de Mandelbrot generada por el software gratuito Fractint.

Nótese que no se usa la palabra ampliación con el significado como tal, para la imagen, sino es sólo para dar una idea figurativa; lo que realmente se hace con un software para generar fractales son iteraciones.

3.4.2 Dimensión Fractal.

En matemáticas, se está acostumbrado a trabajar con cuatro dimensiones, que son las siguientes:

- Dimensión 0 → Un punto
- Dimensión 1 → Una línea recta
- Dimensión 2 → Un plano
- Dimensión 3 → El espacio

Existen también, otros conceptos distintos de dimensión como los que se mencionaban en una de las definiciones anteriores de fractales, y una de ellas es la dimensión de Hausdorff–Besicovich y se basa en la autosemejanza de objetos. Basados en la dimensión de Hausdorff–Besicovich se puede decir que la ya conocida, Curva de Von Koch, tiene una dimensión de 1.2619 (Barnsley, 1993) y supera su dimensión topológica de 1 por generarse a partir de una recta. Sólo para dar una idea de lo que es una dimensión fractal, fraccionaria o no entera, segunda característica que poseen todos los fractales.

Para dar una idea general de lo que es la geometría fractal y los fractales en si se tiene:

La Geometría Fractal, llamada también "Geometría de la Naturaleza", es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional. Estos objetos tienen como características fundamental las propiedades de Autosimilitud y la de convivir en extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias dimensión (Peitgen, et. al., 1992; Barnsley, 1993).

Algunos sistemas naturales reconocidos como caóticos y descritos a través de los Fractales pueden ser: todo lo relacionado con turbulencias, ya sea en el aire o agua;

todo lo referido a ramificaciones, como ser redes neuronales, ríos; propagaciones de poblaciones y enfermedades; estructuras montañosas y vegetales, entre otros muchos ejemplos.

3.5 Tipos de Fractales.

Anteriormente se había definido *Autosimilitud* como la característica que presentan determinados objetos en los cuales los detalles más pequeños que lo componen tienen alguna relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de una manera infinita.

Ahora, se analizan otras características que se encuentran detrás de esta definición:

Existen dos tipos bien definidos de fractales. Los Lineales y los NO Lineales.

Los **fractales lineales** son aquellos que se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas. Esto implica algo muy importante, los fractales lineales son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito (figura 12).

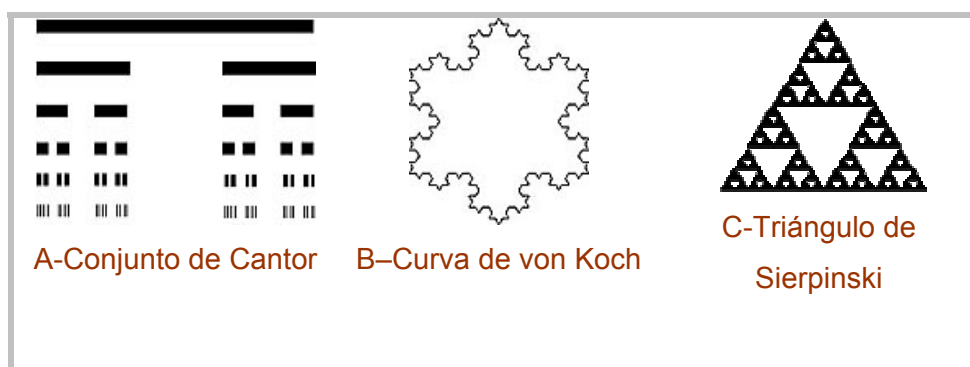


Figura 12. Fractales lineales. (Tomado de: Peitgen, et. al., 1992; Barnsley, 1993)

En cualquiera de las tres imágenes anteriores, cuando se comienza a detallar muy bien su estructura, se puede ver que dentro de esos objetos siempre se va a

encontrar exactamente la misma estructura, sin distorsiones, solo cambiará su escala. En la primera, por ejemplo, siempre se encuentra una línea recta, en el tercero siempre un triángulo a diferentes escalas, y en la segunda una estructura como muestra una imagen como la que se muestra en la figura 10.

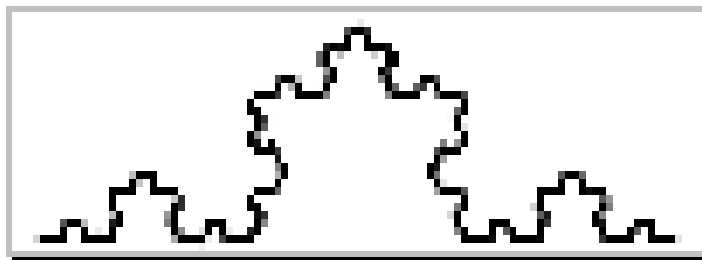


Figura 10. Modelo que se repite en la Curva de Koch (Tomado de Peitgen, et. al, 1992; Barnsley, 1993).

Los **fractales no lineales**, en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, y usando un término proveniente de la matemática Caótica, distorsiones no lineales. La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales. Ejemplos de ellos son: El Conjunto de Mandelbrot (figura 11-A) ó el Conjunto de Julia (figura 11-B).

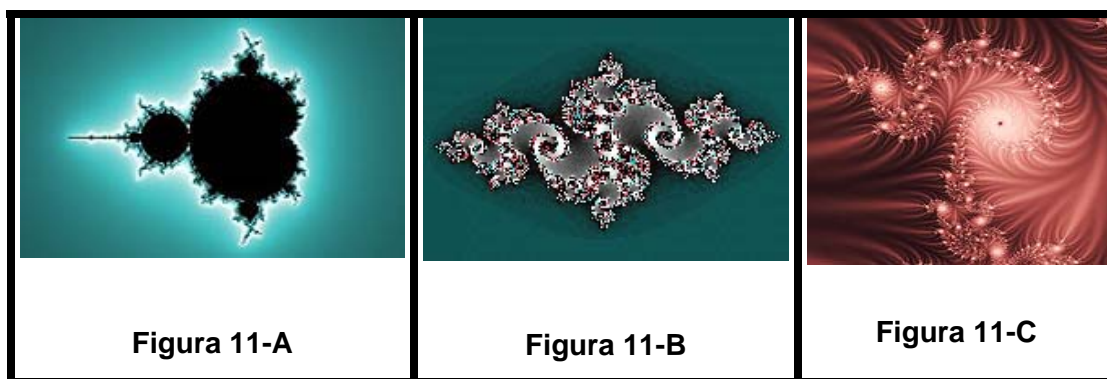


Figura 11. Fractales no lineales (Tomado de: www.geocities.com)

Los Fractales pueden ser generados a partir de elementos de la matemática tradicional (fractales lineales), o a través de *números*

complejos. De hecho, el conjunto de Mandelbrot se genera a través de iterar una cierta cantidad de veces la ecuación compleja:

$$Z \rightarrow Z^2 + C \quad (19)$$

Al analizar, ahora, la ecuación de Mandelbrot se tiene:

Dados dos números complejos Z y C (los mismos que están en la ecuación) y donde:

$$Z = X + Yi \quad (20)$$

$$C = a + bi \quad (21)$$

Al hacer el reemplazo en la ecuación (19), se tiene:

$$Z^2 = (X + Yi)^2 = X^2 + 2YXi + (Yi)^2 \quad (22)$$

Por potencias sucesivas de los números complejos se sabe que $i^2 = -1$, por lo tanto, la ecuación anterior queda:

$$Z^2 = (X + Yi)^2 = X^2 + 2YXi - (Y)^2 \quad (23)$$

Ya se tiene la primera parte, Z^2 , ahora toca sumarle el complejo C :

$$X^2 + 2YXi - (Y)^2 + a + bi \quad (24)$$

Ahora, se realiza la operación compleja, con lo cual se tiene que agrupar la parte real y la parte imaginaria:

$$(X^2 - (Y)^2 + a) + (2XY + b)i \quad (25)$$

Ahora, se tiene la expresión final de la ecuación que genera el Conjunto de Mandelbrot, lo que se debe hacer ahora es iterarla, para ello, hay que elegir

justamente, el número de iteraciones. Los fractales matemáticos perfectos y teóricos tienen un número infinito de iteraciones y detalles.

Iterar es repetir y volver sobre sí mismo una cierta cantidad de veces. En el caso de los fractales, lo que se itera son fórmulas o ecuaciones como la que se emplea para generar el Conjunto de Mandelbrot. Lo cual se hace por medio de algoritmos.

3.6 Cálculo de Dimensión Fractal.

Como se ha podido ver, los fractales poseen una dimensión fractal. La cual tiene dos características importantes:

- Es una dimensión no entera.
- Su dimensión de Hausdorff-Besicovich debe superar su dimensión topológica.

Como los fractales están compuestos por elementos cada vez más pequeños de sí mismo (Autosimilitud), el concepto de longitud pasa a ser algo muy complejo y hasta casi sin sentido, de esta manera el concepto de *dimensión* comienza a jugar un papel fundamental. Por lo que no se puede dar tanta importancia a la medida de los fractales como a su dimensión.

Calcular la dimensión fractal de un objeto puede ser algo complicado, de hecho hay muchos fractales a los que aún no se les ha podido calcular su dimensión con precisión. La dimensión está directamente ligada con los grados de libertad. Cuando la dimensión es 0, solo podría existir ahí un punto inmóvil, y sin límites. Si en cambio la dimensión es 1 ya se tiene una recta y existe un grado de libertad, que es el de moverse de izquierda a derecha, por ejemplo. Ahora, si la dimensión es 2 se tiene un plano, con 2 grados de libertad, puede moverse de izquierda a derecha nuevamente y de arriba hacia abajo. Por último, si la misma es 3, es una situación

como la anterior, sólo que se le agrega un tercer grado de libertad que es la profundidad.

La dimensión fractal no es fácil de comprender y según lo que se ha venido diciendo, puede haber varios puntos de vistas para su definición por lo que pueden haber varias definiciones de acuerdo a las mismas, lo que se puede hacer es dar la expresión matemática para calcular una dimensión (Peitgen, et al, 1992; Barnsley, 1993). La misma es:

$$D = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } 1/s} \quad (26)$$

Donde:

D = dimensión fractal

1/s = factor de reducción.

a = número de piezas que se repiten.

Un fractal se genera en tres etapas. En la primera de ellas se elige una figura generadora. Después se aplica un algoritmo, y por último se comienza a iterar la figura resultante. Entonces, las etapas se resumen (por ejemplo, la Curva de Koch), así:

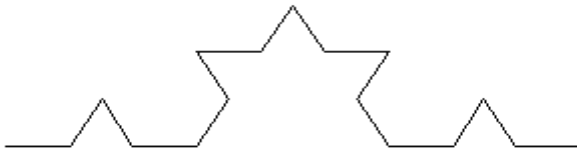
1. Figura generadora



2. Aplicación del algoritmo



3. Generación del fractal



Para calcular la dimensión se tiene que $1/s$ es igual a 3, ya que el algoritmo divide la imagen generadora en 3 segmentos iguales y ese mismo algoritmo toma esos segmentos los transforman en dos, por lo tanto a es igual a 4.

$$D = \frac{\text{Log}(4)}{\text{Log}(3)} = 1.2618595$$

Con lo cual se obtiene una dimensión no entera y además supera la dimensión topológica de la imagen generadora que es 1, donde se demuestra el carácter fractal que tiene la curva de Von Koch. Para el Conjunto de Cantor, se hace un procedimiento similar y se obtiene la figura 8. (Peitgen, et. al., 1992; Barnsley, 1993). Este objeto tiene una propiedad que es interesante y muy especial para mirar si se lo puede considerar como fractal o no, ya que como se puede ver a continuación, su dimensión es menor a su dimensión topológica, pero expertos en este tema mantiene la posición de considerar este objeto como fractal. Se tiene una línea recta como la imagen generadora (de arriba para abajo), donde se puede llegar a ver que $1/s$ es igual a 2 y a es 3. El algoritmo divide la recta en 3 segmentos iguales, pero elimina a uno de ellos y no agrega nada como sucedía en el anterior Fractal, al igual se puede ver el carácter fraccionario de la dimensión de este fractal. Por lo tanto:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630929$$

4. MODELO FRACTAL DEL ESPACIO POROSO.

Los modelos utilizados para estimar permeabilidad a partir de otras propiedades de las rocas se pueden clasificar como: 1) a Nivel poroso y 2) Nivel de campo. Ambas técnicas buscan relacionar, principalmente, la permeabilidad con la porosidad. Los pioneros de este tipo de análisis fueron Kozeny y Carman.

En cuanto a la utilización de la teoría Fractal para el análisis de este tipo de relación se usa frecuentemente propiedades microscópicas de las rocas como superficie específica, tamaño de grano, de garganta y tortuosidad para relacionar la permeabilidad con la Dimensión fractal de estas propiedades (Babadagli, et. al., 2002; Ozgen and Halleck, 2002). Estos estudios usaron diferentes tipos de areniscas o medios porosos sintéticos para desarrollar o verificar las correlaciones fractales de permeabilidad. De estos estudios han surgido diferentes modelos que buscan definir la relación porosidad-permeabilidad a través de un análisis fractal previo (Babadagli, et. al., 2002; Ozgen and Halleck, 2002).

4.1 Modelo del Palomar.

Para el estudio de flujo de fluidos en el medio poroso del yacimiento, la porosidad y la permeabilidad son los datos petrofísicos más importantes bajo condiciones de fases simples y es por eso que en el pasado, se han utilizado diferentes aproximaciones empíricas para describir la dependencia de la permeabilidad (k) y la porosidad (ϕ) a través de relaciones exponenciales o leyes de potencias (Plata, G., 1987). Sin embargo, estas aproximaciones muchas veces carecen de sustentación petrofísica, y además son estrictamente particulares, existiendo una gran dificultad para explicar la verdadera relación entre ϕ - k sólo a través de simples expresiones empíricas.

Por otro lado, muchos modelos teóricos se basan en la ecuación de Kozeny-Carman (ecuación 8), la cual busca modelar el medio poroso como un simple arreglo de esferas y tubos, para tratar de dar explicaciones a fenómenos que se llevan a cabo dentro de este (Babadagli, et. al., 2002).

Pero, como se ha dicho anteriormente, todos estos modelos son particulares y están basados en análisis de teorías físicas y matemáticas tradicionales, que hasta el momento, no han proporcionado como resultado una relación lo que se le pueda llamar "General". Por lo anterior, se propone el uso de la Teoría Fractal, combinada con las relaciones petrofísicas como alternativa para buscar establecer una relación entre la Permeabilidad y la porosidad. En relación a esto, un modelo particularmente cercano a la apariencia natural de un espacio de poro de rocas sedimentarias es el llamado *modelo del Palomar* (Pape, et. al., 1987,1999), igual como ocurre con otros modelos fractales, inicia con el hecho de que la superficie interior de los poros y la superficie exterior de los granos sigue la regla de autosimilitud, hecho por el cual esta teoría Fractal pueda ser aplicada.

Este modelo está basado en una cascada autosimilar de estructuras y subestructuras (Figura 12) que se presenta en el medio poroso. La estructura básica de este modelo consta de esferas, que representan los granos primarios. Cada grano está rodeado por protuberancias hemisféricas más pequeñas, las cuales soportan por si mismas sub-estructuras similares las cuales modelan las irregularidades de los granos. Dentro de este modelo se pueden distinguir tres parámetros lineales de tamaño: el radio de grano (r_{grano}), el cual es el radio de la esfera básica, que representa un grano sólido, sin sub-estructuras. Los radios de poro (r_{poro}), son los radios de los mayores intersticios de poros entre los granos, mientras que los radios de los canales capilares que conectan los poros son cercanos a los radios capilares hidráulicos efectivos (r_{ef}) de las medidas de permeabilidad.

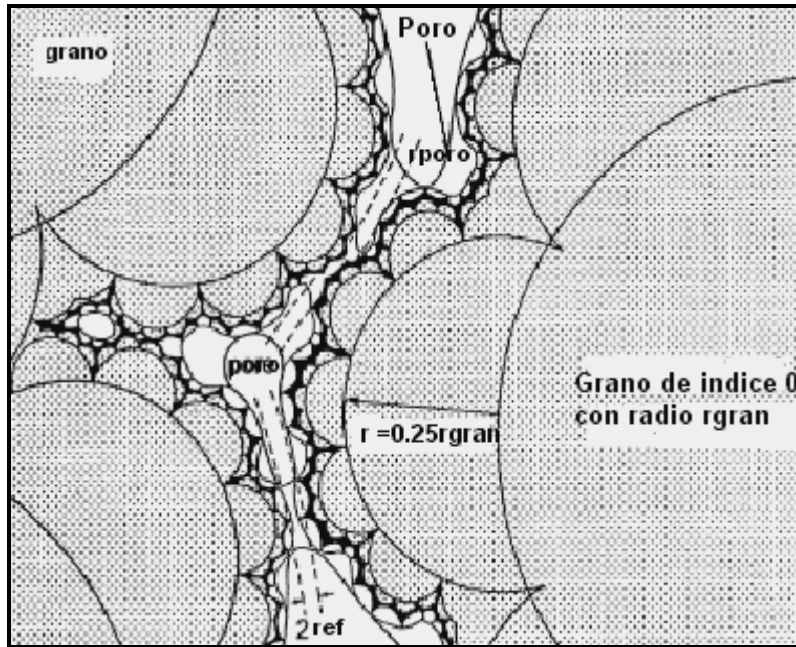


Figura 12. Sección transversal de una roca sedimentaria de acuerdo al modelo autosimilar del Palomar compuesto de subestructuras de granos y poros (Tomado de Pape, et. al., 1987, 1988,1999).

Los granos, como también los poros forman una cascada de subestructuras hemisféricas. Este modelo presenta la forma de las estructuras como si se hiciera viaje por el interior del espacio poroso.

Los poros están conectados por canales capilares hidráulicos de radio (radio efectivo = r_{ef}). Los radios r_{grano} , r_{poro} y r_{ef} están relacionados por una relación empírica (Pape, et. al., 1984).

$$\frac{r_{gran}}{r_{poro}} = \left(\frac{r_{gran}}{r_{ef}} \right)^{C_1} \quad (27)$$

Donde:

r_{gran} = radio de grano, cm.

r_{poro} = radio promedio de poro, cm.

r_{ef} = radio hidráulico efectivo de flujo, cm.

Donde la constante C_1 debe ser calculada para el sistema que se analice, en un trabajo realizado por Pape (1984), dejó como valor de esta constante 0.39, pero, para el yacimiento que se analizó en este trabajo se llegó a un valor de 0.41. El parámetro clave en este modelo es la Dimensión Fractal D .

Una característica importante de un objeto fractal natural es la autoafinidad con una dimensión que es fraccionaria en lugar de entera. Según Mandelbrot (1977) esta característica puede ser representada matemáticamente por una función de ley de potencia:

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (28)$$

Donde, r es una longitud característica (en este caso, para el análisis de el espacio poroso se toma el parámetro de radio de grano y poro) de una unidad escogida para llenar el objeto fractal, $N(r)$ es el número de unidades (con radio r) requerida para llenar el objeto fractal entero, y D la llamada dimensión fractal. La cual representa la heterogeneidad del objeto fractal. Entre más grande la dimensión fractal mayor la heterogeneidad del objeto fractal (Li, 2004). Esta proporcionalidad se puede extender a una igualdad insertando una constante, que para este caso, se convierte en el parámetro que relaciona la geometría de la unidad analizada para llenar el objeto fractal (Hardy, 1992):

$$N(r) = b r^{-D} \quad (29)$$

Donde:

b es una constante de proporcionalidad geométrica.

r es la unidad representativa.

D es la dimensión fractal.

4.2 Método de Intrusión de Mercurio y su Relación con la Geometría Fractal.

Las curvas de presión capilar medida por una técnica de intrusión de mercurio son frecuentemente usadas para inferir la distribución de tamaño de poro de muestras de rocas. Haciendo esta inferencia, la roca con esqueleto sólido y poros se representa por medio del modelo de tubos capilares. $N(r)$ puede ser calculado fácilmente una vez las curvas de presión capilar estén disponibles (Angulo, et. al., 1992). La unidad escogida fue un tubo capilar cilíndrico con radio (r) y longitud (l). Entonces, el volumen de la unidad es igual a $(\pi r^2 l)$ y $N(r)$ para un radio r dado se puede calcular fácilmente.

Una vez se conozca el valor de $N(r)$, el valor de la dimensión fractal, D se puede calcular de la relación entre $N(r)$ y r (Ecuación 28).

De acuerdo al modelo capilar de tubo y a la descripción previa, $N(r)$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$N(r) = \frac{V_{Hg}}{\pi r^2 l} \quad (30)$$

Donde:

l : es la longitud del tubo capilar, cm.

V_{Hg} = Volumen acumulado de mercurio introducido en la muestra de la roca donde la presión capilar es medida relaciona el volumen poroso.

$N(r)$: Número de poros con radio (r).

Combinando las Ecuaciones 29 y 30, se tiene:

$$N(r) = \frac{V_{Hg}}{\pi r^2 l} = br^{-D} \quad (31)$$

Reordenando la ecuación anterior, se tiene:

$$V_{Hg} = Br^{2-D} \quad (32)$$

Donde:

B : constante de proporcionalidad geométrica.

Si el sistema poroso se puede caracterizar usando la teoría fractal, la curva $N(r)$ contra radio presenta una tendencia lineal al graficarse en una escala log-log.

Este mismo análisis se puede realizar para otros parámetros medibles del espacio poroso, tal como la superficie específica normalizada (S_{por}), el volumen residual de poros proveniente de los datos de porosimetría de mercurio, la porosidad entre otros.

4.3 Superficie Específica y su Relación con la Geometría Fractal.

Según Pape (1999), el número de poros con la longitud característica λ , que cubre el rango del medio fractal está dado, también por:

$$N(\lambda) = \frac{S_{por}}{a_s \lambda^2} = b_s \lambda^{-D} \quad (33)$$

Donde:

$N(\lambda)$: Número de poros con longitud característica λ .

λ : Longitud característica de los poros indicada como la mínima longitud que puede ser determinada por un método de medida de S_{por} .

S_{por} : superficie específica normalizada del medio poroso.

a_s = Superficie de un poro con longitud característica.

a_s, b_s : constantes geométricas relacionadas con superficie.

Si se realiza este procedimiento para dos métodos de medida de superficie específica normalizada (S_{por}) uno de alta resolución y uno de baja resolución la Ecuación (33) se convierte en:

$$N(\lambda_1) = \frac{S_{por}(\lambda_1)}{a_s \lambda_1^2} = b_s \lambda_1^{-D} \quad (34)$$

y

$$N(\lambda_2) = \frac{S_{por}(\lambda_2)}{a_s \lambda_2^2} = b_s \lambda_2^{-D} \quad (35)$$

donde los subíndices 1 y 2 significan que fueron determinados por el método de alta resolución y baja resolución respectivamente.

Combinando(34) y (35), se obtiene:

$$\frac{S_{por}(\lambda_1)}{S_{por}(\lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2-D} \quad (36)$$

Si el medio poroso se comporta como un fractal al graficar $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ vs. $\frac{S_{por}(\lambda_1)}{S_{por}(\lambda_2)}$ en ejes logarítmicos, ésta presenta un tendencia lineal cuya pendiente es 2-D. (Pape 1987).

4.4. Volumen Residual proveniente de Porosimetría de Mercurio.

Una propiedad adicional que involucra el modelo fractal propuesto en otros trabajos (Pape, et. al., 1999) es la distribución de tamaños. En los medios porosos se pueden distinguir diferentes tipos de cavernas esféricas, las cuales se pueden medir

por la intrusión de mercurio como pseudo capilares. Las distribuciones típicas de los radios de poro de areniscas exhiben un extremo largo hacia los poros más pequeños. En una gráfica logarítmica, esta parte de la curva tiene una asíntota lineal con una pendiente igual a $(D_t - D)$, donde D_t es igual a tres y a su vez es la dimensión topológica de un volumen.

Al hacer un análisis del proceso de inyección de mercurio, se tiene que el volumen introducido llenará hasta un radio de garganta (r), de lo cual, para deducir el número de poros que se necesitaría para llenar el volumen residual (el cual no ha sido llenado con mercurio), se tiene la siguiente relación:

$$N_{pr}(r) = \frac{1 - V(r)}{a_v r^3} = b_v r^{-D} \quad (37)$$

Donde:

$N_{pr}(r)$: Número de poros (capilares) residuales con radio r .

r = radio de garganta de poro determinado por el método de porosimetría de Mercurio.

$1 - V(r)$: Volumen de poros residuales, entendido como el volumen que no ha sido ocupado por el volumen relativo de mercurio $V(r)$ que se ha introducido en la muestra de roca y que ocupa hasta los poros de radio r .

$a_v r^3$: Volumen residual en función del radio r .

a_v, b_v : constantes geométricas relacionadas con volumen.

Si se realiza este procedimiento para dos volúmenes relativos de mercurio, medidos a dos tiempos diferentes de prueba, $V(r_1)$ y $V(r_2)$, con sus respectivos radios r_1 y r_2 calculados a ese tiempo, la ecuación (37) se convierte en:

$$N_{pr}(r_1) = \frac{1 - V(r_1)}{a_v r_1^3} = b_v r_1^{-D} \quad (38)$$

$$N_{pr}(r_2) = \frac{I-V(r_2)}{a_v r_2^3} = b_v r_2^{-D} \quad (39)$$

Combinando (38) y (39) se obtiene:

$$\frac{I-V(r_1)}{I-V(r_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3-D} \quad (40)$$

Si el medio poroso se comporta como un fractal al graficar $\frac{r_1}{r_2}$ vs. $\frac{I-V(r_1)}{I-V(r_2)}$ en ejes logarítmicos, ésta, presenta una tendencia lineal cuya pendiente es igual a constante*(3-D) (Pape, et. al., 1999).

4.5 Relación de la Porosidad con la Dimensión Fractal.

Como se expresó anteriormente, la porosidad es la relación entre el espacio vacío que hay en la roca y el volumen total de misma, se tiene que la porosidad (ϕ), es:

$$\phi = \frac{V_{pT}}{V_{roca}} \quad (1)$$

Donde,

V_{pT} : Volumen total poroso.

V_{roca} : Volumen total de roca.

Utilizando el mismo análisis que se utilizó en la inyección de Mercurio anterior para el medio poroso como para la matriz rocosa, se tienen las ecuaciones (41) y (42) respectivamente:

$$N_p(r_{poro}) = \frac{V_{pT}}{a_{vp} r_{poro}^3} = b_{vp} r_{poro}^{-D} \quad (41)$$

Donde:

$N_p (r_{poro})$: Número de poros con radio r_{poro} .

r_p = radio de poro.

a_{vp}, r_{poro}^3 : Volumen de un poro de radio r_{poro} .

a_{vp}, b_{vp} : constantes geométricas relacionadas con volumen.

Teniendo en cuenta, ahora, la parte sólida de la roca (matriz), se tiene que el número de granos con un radio (r_g) que cubrirá el volumen total de la matriz está dada por:

$$N_g (r_{grano}) = \frac{V_{Matriz}}{a_{vg} r_{grano}^3} = b_{vg} r_{grano}^{-D} \quad (42)$$

Donde:

$N_g (r_{grano})$: Número de granos con radio r_{grano} .

r_{grano} = radio de grano.

V_{Matriz} : Volumen de la fase sólida de la roca = $V_{roca} - V_{pT}$.

$a_{vg} r_{grano}^3$: Volumen de un grano de radio r_{grano} .

a_{vg}, b_{vg} : constantes geométricas relacionadas con volumen.

Asumiendo que $V_{roca} \gg V_{pT}$ y Combinando (41) y (42) adecuadamente e insertándolas en (1) se obtiene:

$$\phi = B \left(\frac{r_{poro}}{r_{grano}} \right)^{3-D} \quad (43)$$

Donde:

B: constante geométrica.

Si el medio poroso se comporta como un fractal al graficar ϕ vs. $\frac{r_{grano}}{r_{poro}}$, en ejes logarítmicos, ésta relación presenta un tendencia lineal cuya pendiente es igual a constante*(3-D). (Pape, et. al., 1988).

4.6 Relación Fractal de la tortuosidad

En relaciones de transporte en medios porosos, el factor de Formacion (F) generalmente describe la influencia geométrica y como se ha visto en la ecuación (6),

$$F = \frac{T}{\phi} \quad (6)$$

Esta propiedad eléctrica de la roca también depende de la dimensión fractal de la superficie de las paredes de los poros. Si la dimensión fractal es pequeña, la siguiente relación puede hallarse (Pape, et. al., 1999):

$$T = cte \cdot 1 \left(\frac{r_{grano}}{r_{ef}} \right)^{cte (D - 2)} \quad (44)$$

Donde:

T = tortuosidad

r_{grano} = radio de grano

r_{ef} = radio efectivo de flujo.

Cte y cte1 = constantes.

Esta ecuación indica que existe una relación directa entre la relación de radios, la Dimensión fractal y la Tortuosidad, la cual llevada a una gráfica log-log puede obtenerse una tendencia lineal cuya pendiente está dada por (constante*(D -2)). La razón por la cual este análisis se hace utilizando una dimensión topológica de 2 es

porque, como se dijo anteriormente, se hace un análisis desde el punto de vista de las paredes que están bordeando a los poros, por tanto es un parámetro superficial, lo que se está teniendo en cuenta, por lo que la dimensión topológica es precisamente ese valor.

5. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE PERMEABILIDAD.

5.1. Procedimiento.

Para la implementación del modelo de permeabilidad, fue necesario utilizar una gran cantidad de datos, para obtener una relación representativa entre las diferentes propiedades y parámetros que se evaluaron como porosidad, permeabilidad, radios de grano y poro, entre otros, a continuación se hace una descripción del desarrollo del modelo.

5.1.1 Recolección de la información.

En esta parte se recolectó toda la información petrofísica disponible, para el campo elegido para desarrollar la investigación, dentro de los cuales se puede citar valores de permeabilidad absoluta, porosidad, curvas de Presión Capilar, Análisis Petrofísicos Básicos (Permeabilidad, porosidad, distribuciones de tamaño de garganta, propiedades eléctricas).

Para este trabajo fueron analizadas 350 muestras de corazones del Campo Apiay a las cuales se le había hecho algún tipo de prueba en los laboratorios del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP), de las cuales se tomaron en cuenta 180 de ellas debido a que estas pertenecían a la formación que se estaba estudiando y además poseían mediciones de permeabilidad horizontal y particularmente del tipo klinkenberg, las cuales fueron las que se tomaron para hacer el desarrollo de este trabajo, las razones de esto, es porque se analizó que los valores de esta propiedad son fundamentales tanto en esta dirección como la vertical, pero la dirección

preferencial de flujo de los fluido más común es la horizontal, y la segunda decisión de tomar como la permeabilidad Klinkenberg es porque los gracias a que los equipos de medición de esta propiedad hacen las respectivas correcciones a las mediciones hechas con aire, no es necesario hacer correcciones por efecto klinkenberg.

5.1.2 Análisis y clasificación de la información.

Con el fin de clasificar la información del campo seleccionado, se realizaron los siguientes pasos.

Revisión, por pozo, de los datos proporcionados: Donde se hizo la recolección de datos, se clasificaron y se cuantificaron, para los pozos Apiay 1, 2, 3, 4, 9 10, 11, 12, 13, y 14.

Revisión por profundidades pozo a pozo de los datos proporcionados: Donde se determinó los tipos y cantidad de datos por profundidad en cada unidad.

Teniendo en cuenta la cantidad reducida de datos para algunas propiedades, tanto por pozo como por profundidad, se puso en práctica el Método de Winland (Gunter, 1997), el cual es un método gráfico que proporciona una clasificación por tipo de roca presente en una formación, por ello, para entender mejor este método es necesario tener claros algunos conceptos, que son usados para el desarrollo del mismo.

Tipo de Roca: los tipos de rocas son unidades de rocas depositadas bajo condiciones similares, las cuales experimentaron condiciones diagenéticas similares, lo cual resulta en una relación de Porosidad-Permeabilidad, perfiles de presiones capilares y saturaciones de agua únicas (Gunter,1997) para profundidades por encima del agua libre del yacimiento.

La gráfica de Winland, es una gráfica semi-logarítmica de Permeabilidad (mD) contra Porosidad (%) con líneas de isogargantas de poros (medidas de percentiles R35). Los percentiles R35 corresponden a los radios de garganta de poros (en micrones) al 35 % de la saturación de mercurio de una prueba de presión capilar por inyección de mercurio. Estos pueden ser calculados directamente, a partir de la ecuación de Winland, donde la permeabilidad está expresada en mD.

$$\text{Log}(R35) = 0.732 + 0.588\text{Log}(K) - 0.864\text{Log}(\phi) \quad (45)$$

Unidades de Flujo: es un intervalo, estratigráficamente continuo, donde las velocidades de los procesos, que ocurren en el yacimiento, son similares y los cuales caracterizan a los procesos geológicos y mantienen características de Tipo de Roca.

Este método brinda la posibilidad de clasificar las rocas en familias con características similares de porosidad, permeabilidad, al igual que de perfiles de presión capilar, lo cual permite la aplicación de datos representativos de una familia disponibles en algún pozo o formación en el análisis de los datos de la misma formación en otro conjunto de pozos con las mismas características geológicas de sus respectivas formaciones o tipos de rocas, esto a su vez, suple la necesidad de contar con gran cantidad de datos de propiedades petrofísicas en todos los pozos, para hacer una caracterización rápida del yacimiento. La figura 13 es una representación de la gráfica de Winland, donde se encuentra un conjunto de líneas continuas que representan iguales radios de garganta de poro medidos a una saturación de 35 % de mercurio (R35). Sobre esta gráfica se superponen los valores medidos de permeabilidad y porosidad que se encuentren en este rango y que estén disponibles en los pozos y formaciones a diferentes profundidades. Cuando estos datos adquieren cierta tendencia que coincide con alguna de estas líneas, se

clasifican como pertenecientes a una familia que se denomina de acuerdo el radio de garganta (R35) a la cual se ajuste.

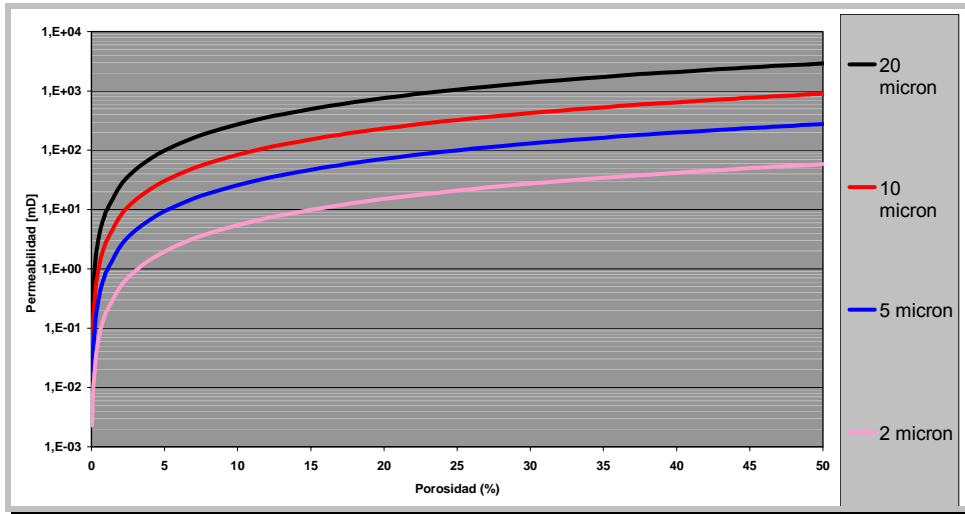


Figura 13. Gráfica de Winland (Tomado de Gunter et. al., SPE 38679).

5.1.3. Familias de Rocas (tipos de roca) de Apiay.

Para el desarrollo de este trabajo se hizo necesario la clasificación de la formación a través de los distintos pozos por familias, debido a la falta de una base de datos completa de todas las propiedades que se necesitaban para el estudio, ya que los datos que fueron recolectados no cubrían todo la extensión del campo, es así, que algunos pozos presentaban estudios completos sobre algún parámetro o propiedad de las rocas, pero, no ocurría así con el resto de ellos; en otros casos se encontraron datos de formaciones que no eran de interés para el trabajo. Por esta razón, se hizo la clasificación teniendo en cuenta el concepto de Tipo de Roca mediante la utilización de la gráfica de Winland. Pero, antes de la utilización de esta técnica gráfica, buscando tener la mayor objetividad posible en la determinación de las diferentes familias de rocas, se hizo una pre-clasificación de los datos teniendo en cuenta los valores promedios de los R35 de radio de garganta obtenidos por las pruebas de inyección de mercurio para cada una de las unidades litológicas en cada pozo, esto está fundamentado en el hecho que las rocas de una misma familia

pueden tener valores de R35 similares y por tanto pueden ser consideradas que pueden poseer propiedades petrofísicas similares. Esta clasificación brindó el establecimiento de varios grupos de rocas con valores de R35 similares, los cuales podrían ser colocados en la gráfica de Winland y así ayudar a la mejor clasificación de las familias, ya que uno de los puntos críticos de este tipo de clasificación es que depende del punto de vista de la persona que lo haga, lo cual con cantidades de datos grandes y con comportamientos muy heterogeneos puede llevar a cometer errores grandes, esto se disminuye con un tipo de clasificación como el que se planteó en este trabajo, el cual, aunque es más dispendioso, le brinda a la persona más confianza al momento del análisis de la gráfica de Winland.

La tabla 1 resume esta clasificación aplicada a la unidad K-1, donde se muestra para cada pozo el R35 donde se pueden clasificar los diferentes datos disponibles de porosidad y permeabilidad. Los colores representan a cada familia y los números el valor promedio del R35. Los colores iguales identifican a cada de las familia, es decir, en el caso que para uno de los miembros de esa familia no hubiese datos de alguna propiedad, pueden ser tenido en cuenta el valor representativo del resto de sus miembros.

Tabla No 1. Clasificación de las diferentes unidades de Apiay para cada pozo.

POZOS							
APIAY1	APIAY2	APIAY3	APIAY4	APIAY11	APIAY12	APIAY13	APIAY14
R35	R35	R35	R35	R35	R35	R35	R35
23	17	7	6	7	14	22	5
	15	11		6	12,5	17,7	1,5
	11			5	7,55	12,5	
	8,25			4	5,5	4,7	
	6,5			2,7	3,5	3	
	4			2	2,5	0,4	
	1,75			1,5	1,5	0,15	
				1	0,7		
				0,5	0,3		
					0,1		

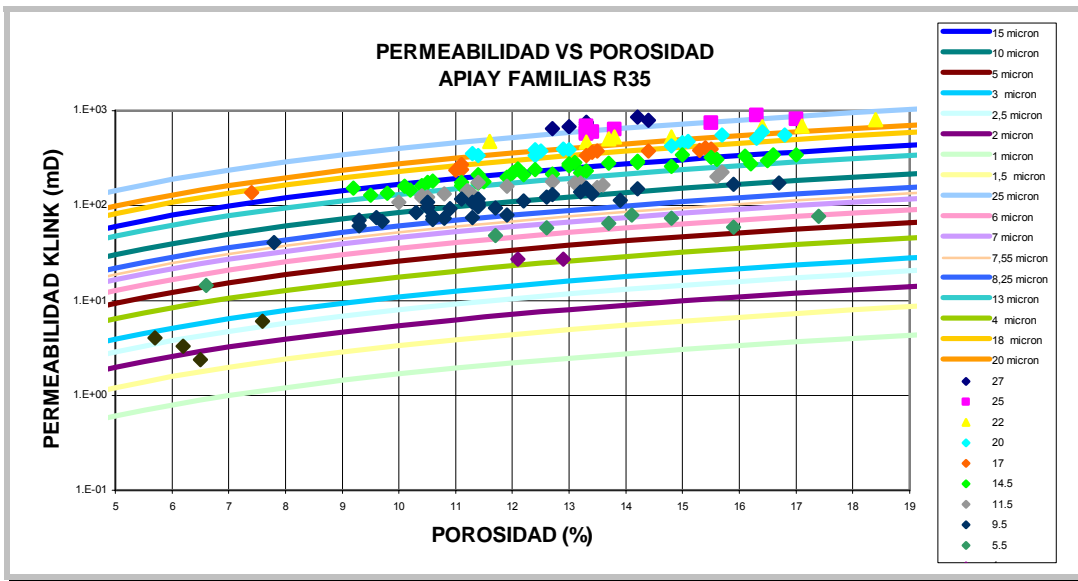
Luego, de hacer la clasificación de estas familias teniendo en cuenta el comportamiento de los radios de garganta, se tomó la ecuación (45) y se generó la gráfica Winland, y se obtuvo las diferentes familias que como ya se había explicado,

son un conjunto de líneas continuas que representan unidades de flujo de similares propiedades. Sobre este gráfico se superpuso los valores de porosidad-permeabilidad para los diferentes pozos y profundidades, para luego finalizar en una clasificación general integrando las dos unidades. Hay que destacar que la verdadera clasificación por familias de Tipos de Roca, se lleva a cabo con la gráfica de Winland y no en el proceso de clasificación anterior a este, el resultado de esto se puede ver en la figura 14, donde se están consignados los diferentes comportamientos de las familias, tanto para la unidad K-1 como para K-2.

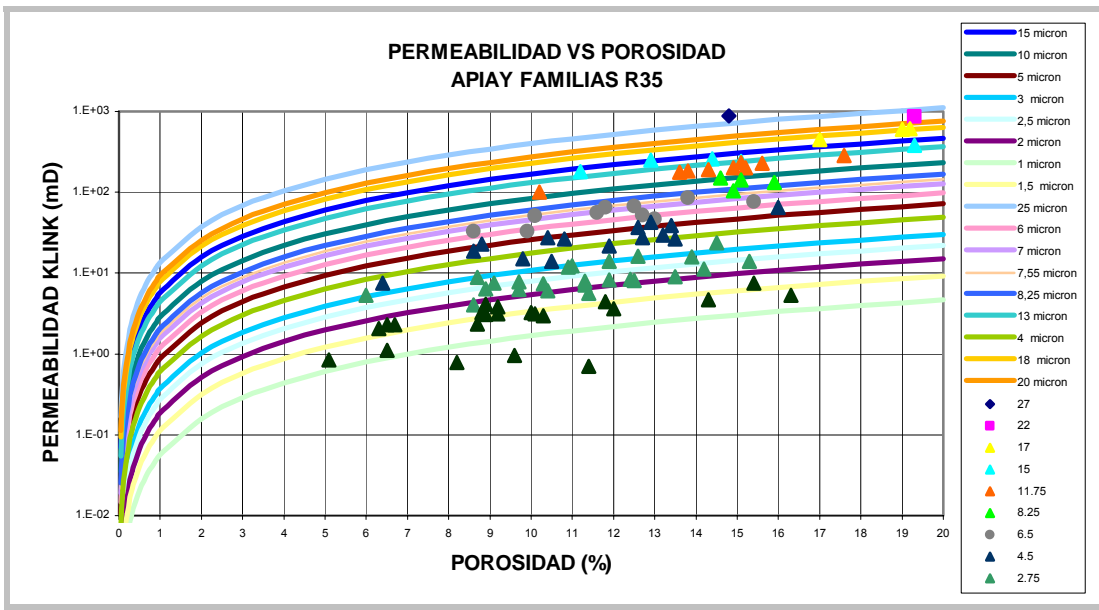
Este método arrojó como resultado que las muestras analizadas podrían clasificarse en diez familias litológicas (1.5, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 15, 20 y 25) para las dos unidades litológicas analizadas, las cuales fueron organizadas teniendo en cuenta el R35 característico donde estaban referenciados los pozos, la unidad litológica y profundidades que compartían ese mismo valor, en la tabla 2 se muestran tres de esas familias para la unidad K-1, donde los R35 característico son 1.5, 3 y 4 y los pozos son representados por la letra A y el número respectivo (A2 = Apiay 2).

Pero ¿cómo se utilizó el método de Winland en este trabajo? El método de Porosimetría con Mercurio se tomó como la prueba base para el desarrollo de este análisis. El procedimiento seguido fue el siguiente:

- 1) Para cada pozo se tomaba una determinada muestra, de las referenciadas en la prueba de Porosimetría con Mercurio, y se observaba la profundidad a la cual pertenecía.
- 2) Se analizaron las propiedades reportadas en esta prueba para cada muestra, en este caso los valores de R25, R35, R50, R75 y los reportes de todo el proceso de inyección de mercurio para obtener los valores de los volúmenes residuales los cuales eran los muy importantes para este estudio.



A. Gráfica de Winland para Unidad K-2.



B. Gráfica de Winland para Unidad K-1

Figura 14. Gráficas de Winland, para las muestras del yacimiento estudiado. A) Unidad K-2, B) Unidad K-1

Tabla 2. Familias de Winland para unidad K-1 de la formación Guadalupe.

Familia 1.5				Familia 3				Familia 4			
K-1				K-1				K-1			
POZO	PROF.	ϕ	k	POZO	PROF.	ϕ	k	POZO	PROF.	ϕ	k
A2	10810	15.4	7.46	A12	10507	14.5	23.887	A11	10587	4.9	0.19
	10811	16.3	5.35	A13	10580.4	12.6	16.058	A12	10469	11	0.701
	10813	14.3	4.72		10576.3	11.9	14.017		10554	9.6	0.953
	10819	12	3.61	A11	10551.5	10.9	11.872		10619	5.5	0.424
	10824	9.2	3.83		10557.1	9.1	7.563	A13	10450.5	5.5	0.157
	10824.5	8.9	4.10		10558.2	11	12.373		10451.6	1.5	0.014
A11	10545.5	10.3	2.99		A11	10482.3	11.9	8.267	A12	10479	2.2
	10547.7	8.9	3.06	10483.4		11.3	7.1	10480		5.2	0.066
	10555	9.2	3.14	10546		10.4	6.072	A12	10511	1.9	0.004
	10556	10.1	3.12	10550		11.4	5.651	A13	10583	6.3	0.003
	10556.1	10	3.28	10552		12.4	8.368		10573.5	3.6	0.011
	10556.5	8.7	2.35	10552.3		11.3	7.908		10523.4	0.7	0.001
	10557.8	8.8	3.24	10554.5		9.7	6.298				
	10588.9	6.7	2.30	10585		8.6	4.042				
A12	10552	11.8	4.43	10549	15.3	14.001					
A14	10618	6.3	2.04	10475	10.3	7.396					
	10296	6.5	2.28	10477	8.7	8.832					
A11	10297	5.1	0.84	10478	9.7	7.737					
	10545	8.2	0.78	10546	14.2	11.328					
A12	10560.7	6.5	1.10	10547	12.5	8.156					
	10469	11.4	0.70	10548	13.9	15.988					
	10554	9.6	0.95	10551	13.5	9.049					
	10619	5.5	0.42	10609	8.9	6.394					
				10621	6	5.339					

3) Luego, se miraron las pruebas de Granulometría, Análisis Petrofísicos Básicos, Microscopia Electrónica y de Análisis Especiales buscando reportes de esa misma muestra o de la misma profundidad con datos de radios de grano, Permeabilidad, Porosidad, radio de poro, propiedades eléctricas, etc. Los datos obtenidos eran tenidos en cuenta y a la vez consignados en una tabla de datos, pero, si alguna muestra no contaba con alguno de esos valores se miraba la clasificación por familias de Winland, donde primero que todo se localizaba la familia a la cual

pertenecía la muestra para luego asignar el valor representativo tal familia para la propiedad que se estaba buscando, algunos de los cuales fueron valores promediados de los del resto de muestras de la familia.

4) Algunas otras muestras fueron consideradas, ya que existían pruebas que fueron realizadas particularmente para efectos de analizar propiedades eléctricas o distribuciones de tamaño de grano y poro, que no habían sido tenidas en cuenta dentro de las familias de Winland, simplemente porque no poseían reportes de permeabilidad.

Aunque el grupo muestras analizadas era relativamente alto, la cantidad de estas que contaban con todos los valores necesarios para el estudio era pequeña, por lo cual la utilización del método de winland representó la adquisición de otra cantidad de datos para muestras donde se carecía de estos y con ello se realizarán los diferentes análisis que se describen a continuación.

5.2 Cálculo de la Dimensión Fractal para construcción del Modelo.

Anteriormente se manejó toda la organización de la información que se había recolectado, por lo tanto, después de tener la clasificación por tipo de roca, es decir tener organizada la información de las propiedades de las formaciones, se pasó a hacer el cálculo de la dimensión fractal de las mismas. El cálculo de la Dimensión fractal se realizó teniendo en cuenta los grupos o familias derivadas de la clasificación por el método de Winland (Gunter, 1997).

Como se dijo anteriormente, las curvas de presión capilar, son un indicativo de las distribuciones de los radios de garganta de una roca, por tal motivo, el análisis de éstas tomaron mucha importancia dentro de este trabajo, al no contar con otra fuente ni datos experimentales que proporcionaran este tipo de información para el campo estudiado. Cuando se hace un análisis de los datos que arrojan las curvas de presiones capilares, se tiene como referencia los cuartiles (R25, R50, R75,), los

cuales son medidas de localización que dividen a una muestra o población en cuatro partes iguales, donde el R25, R50 y R75, representan los valores de la variable que dejan a la izquierda el 25%, 50% y 75% de la distribución respectivamente.

Teniendo en cuenta los trabajos realizados por medio de otros autores (Pape, 1987, 1999), los datos más razonables para usar son los de los cuartiles R50 y R75 que son obtenidos de la Distribución de Tamaño de Garganta y presiones Capilares derivados del método de inyección de Mercurio (Figura 15). Al tenerse en cuenta la ecuación (40):

$$\frac{I-V(r_1)}{I-V(r_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3-D}$$

Y mirando que, los radios r_1 y r_2 son los radios mínimos de los pseudocapilares que están llenos completamente, cuando el espacio poroso está invadido por mercurio hasta un volúmenes relativos $V(r_1)$ y $V(r_2)$ respectivamente, para dos radios representados por los R50 y R75, esta ecuación queda de la siguiente forma:

$$0.5 = 0.25 \left(\frac{R50}{R75} \right)^{(3-D)} \quad (40 \text{ a})$$

A partir de estas dos relaciones se evaluó la dimensión fractal para cada profundidad de las unidades K-1 y K-2 de cada pozo, de la cual se tenía información. La relación (40) se aplicó a los datos de volúmenes inyectados de mercurio y su respectivo radio de garganta predicho para las profundidades estudiadas y con esto se generaron varias gráficas representadas por las figuras 16 y 17, las cuales muestran los diferentes comportamientos de las tendencias para cada profundidad y la respectiva tendencia de con la cual se calculó una dimensión fractal promedio por cada pozo. Además, se hizo el cálculo de la Dimensión fractal de cada profundidad utilizando la relación (40 a), La tabla 3 resume las dimensión fractal promedio por pozo que fueron obtenida por estos dos métodos.

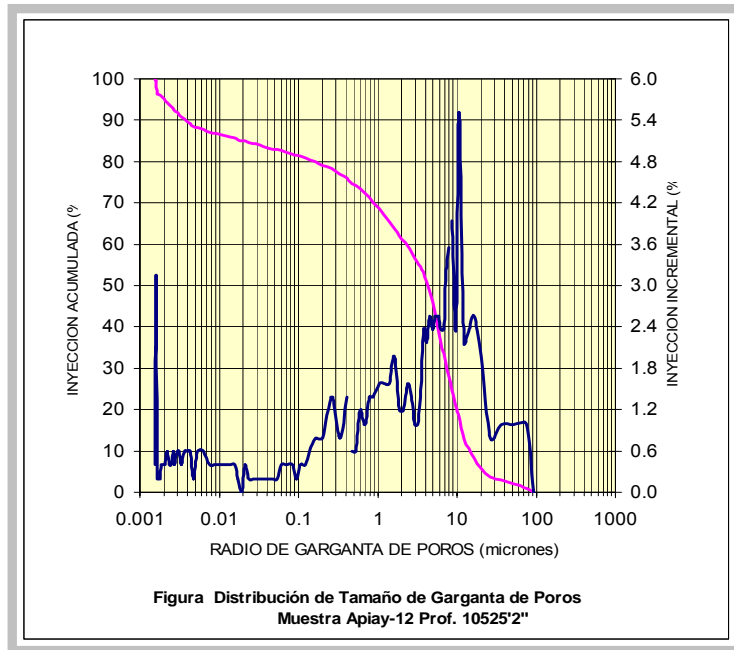


Figura 15. Distribución de tamaño de garganta por Método inyección de Mercurio. Pozo Apiay 12 (Tomado de: Laboratorio de Análisis Petrófísicos Especiales ICP).

Las curvas logarítmicas de $\frac{r_1}{r_2}$ vs. $\frac{1-V(r_1)}{1-V(r_2)}$, poseen una tendencia lineal, cuya pendiente es igual a (constante*($D_t - D$)), representada por la línea D promedio que se encuentra en cada gráfica.

Donde:

$V(r_1)$, $V(r_2)$: Volúmenes relativos o Saturación de Mercurio para cubrir un radio r_1 y r_2 respectivamente.

r_1, r_2 : Radios más pequeños de los pseudo capilares que están completamente llenos cuando el espacio de poro está invadido por mercurio hasta volúmenes $V(r_1)$, y $V(r_2)$.

D_t : Dimensión topológica del volumen = 3

Estos dos métodos arrojaron como resultado una dimensión fractal promedio de 2.45 para la unidad K-1 y 2,35 para la unidad K-2 para el Campo Apiay.

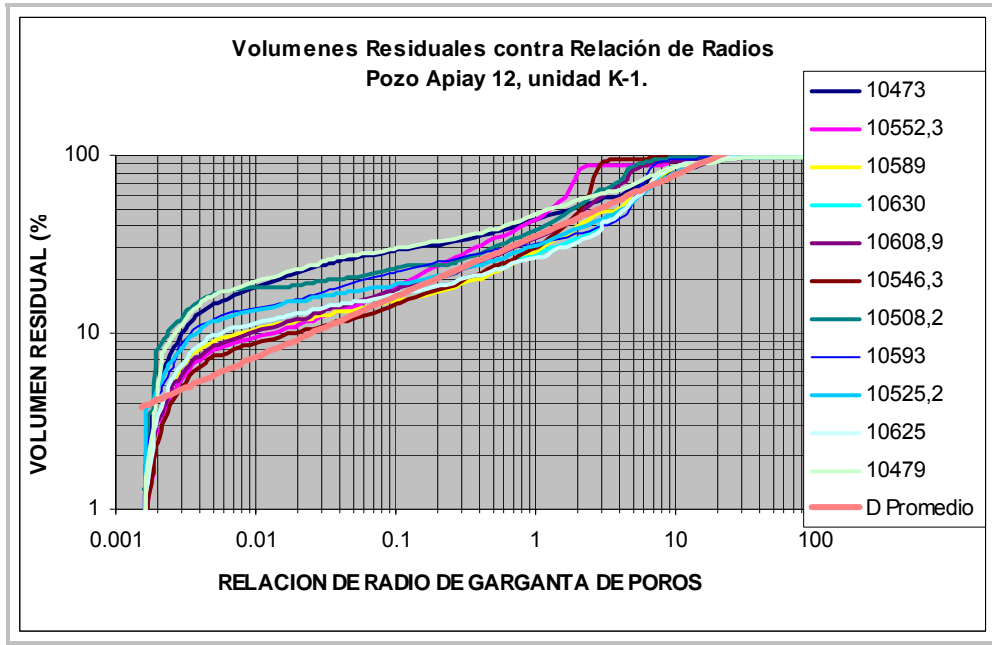


Figura 16. Gráfica de volumen residual contra radio de Garganta del pozo Apiay 12, unidad K-1, para varias profundidades.

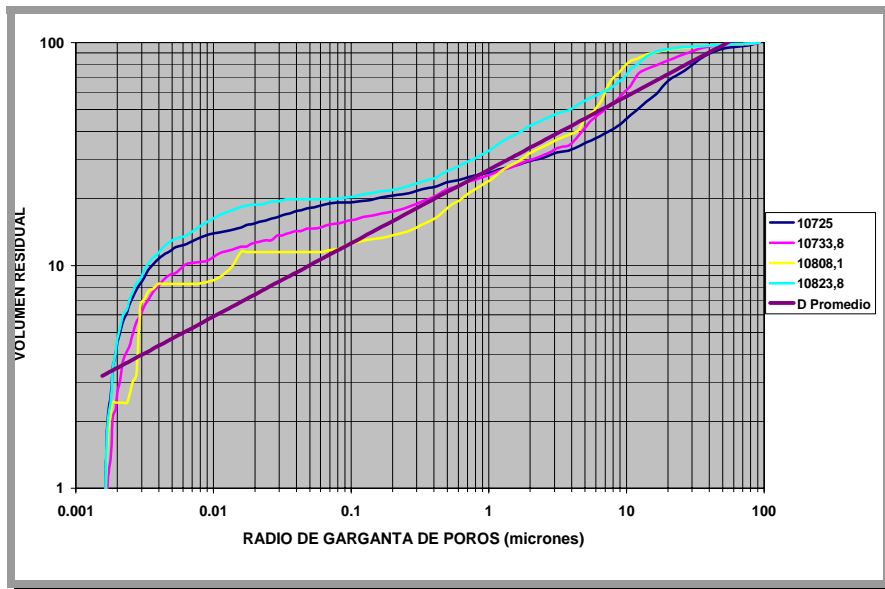


Figura 17. Gráfica de volumen residual contra radio de Garganta del pozo Apiay 9, unidad K-2 para varias profundidades.

Tabla 3. Dimensión fractal por pozo.

POZO	D Promedio	
	K-1	K-2
Apiay 1	2.07	ND
Apiay 9	2.40	2.32
Apiay 10	2.50	2.10
Apiay 11	2.37	2.35
Apiay 11	2.58	2.40
Apiay 12	2.56	2.50
Apiay 13	2.65	2.45
D	2.45	2.35

*ND no hay datos suficientes para el cálculo.

5.3 Comportamiento Fractal del Medio Poroso.

Como se ha podido observar algunas de las ecuaciones que se han citado y propuesto en este trabajo, especialmente la ecuación de Kozeny-Carman, se han trabajado con el concepto de radio hidráulico efectivo de flujo (r_{ef}), pero, debido a la dificultad de contar con algún modelo distinto a estas ecuaciones y con el ánimo de no caer en trivialidades al momento de hacer cualquier estudio similar, ya que al usar un modelo como el de Kozeny se tendría que contar con datos de permeabilidad, que es el parámetro por el cual se está trabajando y que precisamente se va a buscar la forma de calcular se tienen que usar datos experimentales con los cuales se cuentan, para suplir esta necesidad. Es así, que se analizó el comportamiento de los R50 que son obtenidos a partir de la pruebas de inyección de mercurio y los radios efectivos obtenidos a partir del modelo de Kozeny-Carman (debido a que se cuenta con los datos de permeabilidad) y se encontró que tenían una relación directa y por tal motivo, los R50 podían usarse en lugar de los radios efectivos, este análisis se convirtió en fundamental para el desarrollo de las demás reacciones petrofísicas y fractales encaminadas a desarrollar el modelo fractal para el espacio poroso. Además, los valores de la distribución de radios de grano, se obtuvo de datos proporcionado por los

laboratorios del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP). Al tener los valores de los radios efectivos y de grano para las diferentes profundidades analizadas, se prosiguió a obtener el valor de la constante C_1 de la ecuación 27, cuyo valor promedio fue 0.4. La tabla 4 muestra los valores de C_1 para algunos pozos.

5.3.1 Tortuosidad fractal

Después de haber hallado los valores de Dimensión fractal para las dos formaciones, el siguiente paso fue analizar el comportamiento de la Tortuosidad y su relación con la dimensión fractal, es así, que teniendo en cuenta la ecuación 44, se necesitaba contar con algunos parámetros claves para hallar esta relación dentro de los cuales se encontraban: Factor de Formación (F), Porosidad (ϕ), Cuartil 50 de la distribución del tamaño de grano (r_{grano}), los cuales fueron obtenidos de mediciones de granulometría realizadas por Ecopetrol ICP, a algunos pozos evaluados en este trabajo, y $R50$ de la distribución del radio de garganta. Como ya se ha visto, el factor de formación tiene una relación íntima con la porosidad y la tortuosidad (Archie, 1942), con base en esto, se hizo el cálculo de los valores de esta propiedad para las diferentes profundidades que se podían evaluar, para luego realizar la

curva log-log de T vs. $\frac{r_{grano}}{R50}$ (figura 18), para la formación Guadalupe, donde el

comportamiento lineal de esta curva corrobora la teoría fractal aplicada hasta ahora para esta propiedad, cuya pendiente está dada influenciada por la dimensión fractal y la dimensión topológica superficial, como ya se ha visto, el valor de ésta última es 2.

Tabla 4. Valores de C1 para Algunos pozos.

Pozo	Profundidad (pies)	$r_{\text{grano}}/r_{\text{poro}}$	$r_{\text{grano}}/r_{\text{ef}}$	C_1
Apiay 11	10550	10.83	151.08	0.47
	10551.5	11.75	141.24	0.50
	10552	11.64	144.54	0.49
	10556	10.89	142.74	0.48
	10557	8.51	144.54	0.43
	10557.8	9.56	144.54	0.45
	10558	10.04	143.14	0.46
Apiay 12	10475	3.36	97.16	0.26
	10478	15.07	142.82	0.55
	10480	12.49	94.46	0.56
	10524	12.67	147.37	0.51
	10547	6.98	99.97	0.42
	10548	8.10	89.33	0.47
	10549	5.38	119.49	0.35
	10552	2.90	119.49	0.22
	10554	3.67	31.64	0.38
	10621	8.53	46.47	0.56
	Apiay 13	105574.9	2.49	34.31
10576		5.16	19.44	0.55
10578		3.77	19.44	0.45
10579		7.48	84.23	0.45
10580		3.77	84.23	0.30
10580.5		5.34	45.97	0.44

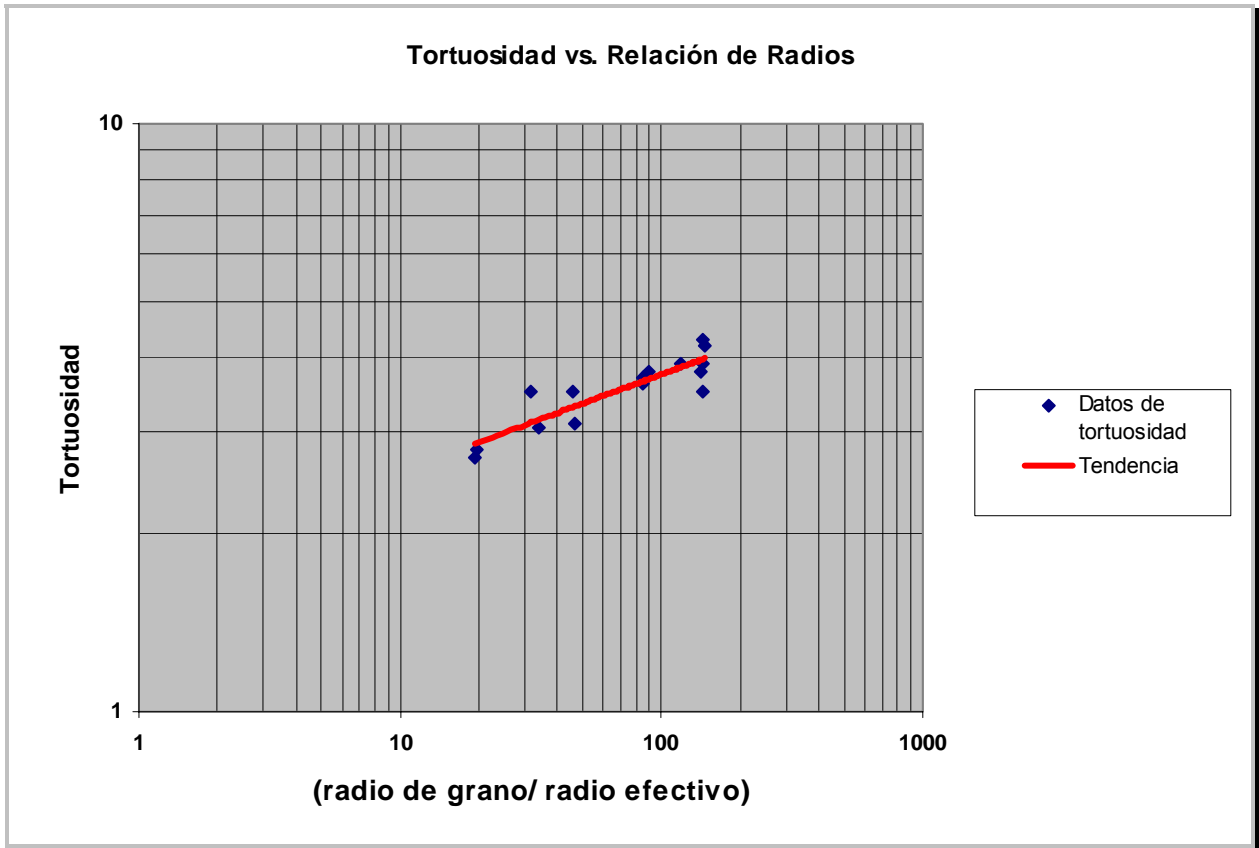


Figura 18. Relación entre la Tortuosidad y la relación de radios de grano y efectivo.

De esta relación, se tiene que la tortuosidad en función de la relación de radios queda expresada así:

$$T = 1.44 \left(\frac{r_{grano}}{r_{ef}} \right)^{0.21} \quad (46)$$

Donde, los parámetros que aquí se tienen ya han sido manejados anteriormente.

5.3.2 Porosidad fractal.

Luego de hallar la relación fractal de Tortuosidad, se siguió con el parámetro petrofísico, que para este trabajo, era uno de los más importantes, ya que era el que a la final marcaría el buen o mal comportamiento del modelo para predecir la permeabilidad. De la ecuación:

$$\phi = B \left[\frac{r_{\text{poro}}}{r_{\text{grano}}} \right]^{3 - D} \quad (43)$$

Se puede ver que la porosidad esta íntimamente ligada con la dimensión fractal y la relación de radios de grano y de poro. Pero, se sabe que:

$$\left(\frac{r_{\text{grano}}}{r_{\text{poro}}} \right) = \left(\frac{r_{\text{grano}}}{r_{\text{ef}}} \right)^{C_1}$$

Entonces, al reemplazar esta relación en la ecuación 43, se llega a:

$$\phi = B \left[\frac{r_{\text{grano}}}{r_{\text{ef}}} \right]^{C_1 (D - 3)} \quad (47)$$

Con anterioridad, ya se habían calculados los valores de dimensión fractal y el factor C_1 , los cuales eran iguales a 2.4 y 0.4, respectivamente, para corroborar el comportamiento fractal del medio poroso por medio de los datos de radios de garganta, radios de grano y porosidad se realizó una gráfica de porosidad contra relaciones de radios, con la cual se encontró que, efectivamente, la relación entre los parámetros que contiene la ecuación (47), se cumplía para las unidades que se estaban estudiando, como evidencia de esto se presenta la figura (19). Para el sistema poroso, la relación de porosidad que prima con la relación de radio es:

$$\phi = 0.32 \left(\frac{r_{grano}}{r_{ef}} \right)^{-0.2} \quad (48)$$

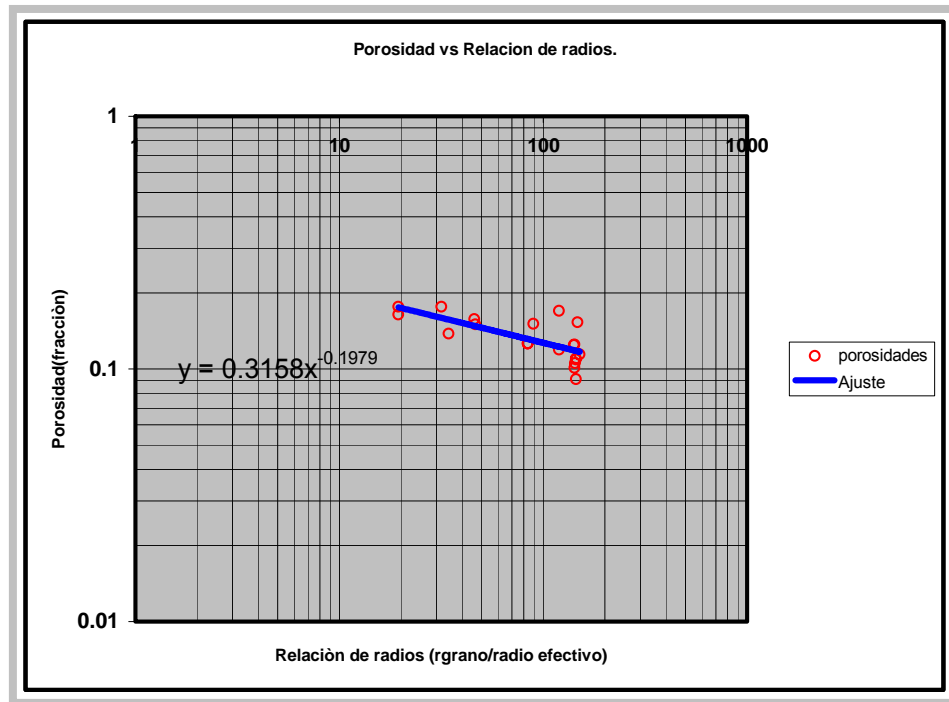


Figura 19. Relación de la porosidad con la relación de radios.

5.3.3. Validación del uso de la Ecuación modificada de Kozeny–Carman.

Teniendo en cuenta el comportamiento fractal que tienen la porosidad y la Tortuosidad, al relacionar las ecuaciones (46) y (48) y observando la proximidad numérica que tenían los exponentes de estas ecuaciones, se llegó a:

$$T = \frac{0.46}{\phi} \quad (49)$$

luego, al igualar las ecuaciones (49) y (46) se llegó a:

$$r_{ef}^2 = (3.2\phi)^9 r_{gran} \quad (50)$$

Tomando las ecuaciones de Kozeny-Carman y de factor de formación, descritas anteriormente como:

$$K = \frac{r_{ef}^2}{8F} \quad \text{y} \quad F = \frac{T}{\phi}$$

Al relacionar este grupo de ecuaciones con la ecuación (49) se pudo ver que la permeabilidad estaba relacionada con la porosidad y el tamaño de grano de la siguiente manera:

$$K = r_{gran}^2 (9560.9)\phi^{11} \quad (51)$$

Donde:

K = Permeabilidad está expresada en cm^2

r_{grano} = radio de grano promedio, expresado en cm

Φ = porosidad expresada en fracción.

Para estas las dos unidades litológicas, se tomó el radio promedio de grano de 0.0207 cm. Para mejor utilización de esta relación, se hizo la respectiva manipulación matemática, de tal forma, para que la permeabilidad quedara expresada en milidarcies (mD), esto se logró teniendo en cuenta que 1 Darcy equivale a $9.869 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2$. El resultado de este proceso está consignado en la siguiente relación de Permeabilidad y Porosidad:

$$K = 3.82 \phi^{11} \quad (52)$$

Para la validación de este modelo de permeabilidad era necesario compararlo con datos de permeabilidad obtenidas por algún método de medición de Permeabilidad, es así, que se comparó con los datos derivados de pruebas laboratorio realizadas a corazones de estas unidades. La figura 20 muestra la permeabilidad calculada por este modelo comparada con los datos de permeabilidad medida en laboratorio.

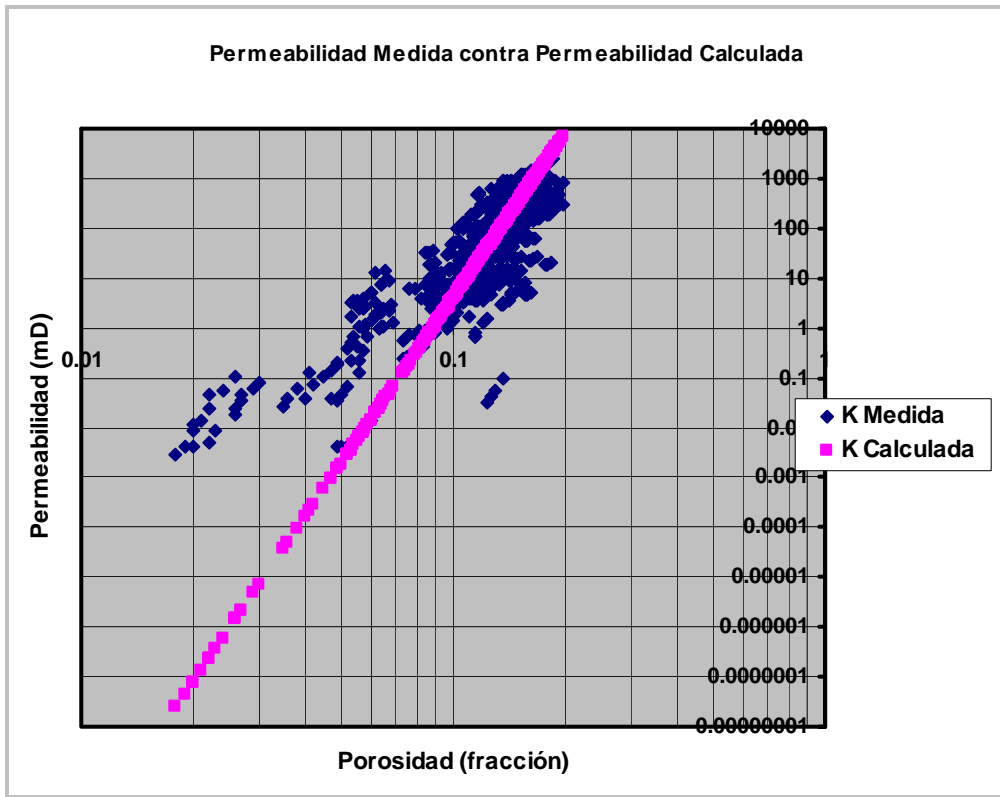


Figura 20. Permeabilidad medida y calculada por el modelo contra Porosidad.

Las Permeabilidades calculadas por el modelo propuesto eran menores a las medidas para porosidades muy pequeñas (figura 20), en este caso, porosidades menores del 8%, por ende, se debía buscar la explicación lógica para el fenómeno que estaba ocurriendo y de esta forma hacerle las respectivas correcciones a la relación que se había obtenido con la ecuación (52).

La explicación a este fenómeno estaba representada en los valores de los radios hidráulicos de flujo efectivos derivados de la ecuación (50), los cuales no disminuían tan drásticamente con la disminución de la porosidad como lo hacía ver esta relación. Por lo tanto, se asumió un valor fijo para el radio efectivo, tomado del promedio de éstos calculados por la relación de Kozeny-Carman y los valores de permeabilidad que provenían de laboratorio, para porosidades menores del 8%, el cual fue calculado y el valor era de 0.018 cm. Luego, al relacionar las ecuaciones (6), (8) y (50), se llegó a:

$$K = \phi^2 r_{ef}^2 / (8 * 0.46) \quad (53)$$

Al reemplazar el valor del radio efectivo promedio en la ecuación (53), se obtuvo una relación de permeabilidad porosidad que describía el comportamiento de estas propiedades para porosidades menores de 8%.

$$K = 8.92 \phi^2 \quad (54)$$

Donde la permeabilidad está expresada en milidarcies (mD).

Luego, la permeabilidad promedio del modelo fue implementada como la suma de las ecuaciones (52) y (54), y expresada por la ecuación (55) cuyo comportamiento esta consignado en la figura 21.

$$K = 8.92 \phi^2 + 3.82 \phi^{11} \quad (55)$$

Como ya se ha dicho, la permeabilidad esta expresada en milidarcies (mD). Luego, se puede decir acerca de estos dos términos que conforman esta ecuación que, uno de ellos representa el comportamiento fractal del medio poroso de las areniscas analizadas y el otro es un factor de corrección para describir el comportamiento de la permeabilidad cuando las porosidades son menores al 8%; éste último término sólo tiene un papel preponderante en ese rango de porosidades porque para

mayores de estas, debido a la potencia que lo acompaña obtiene una participación y una incidencia muy baja en los resultados. En cuanto a la potencia en la porosidad que se obtuvo para el miembro que representa el comportamiento fractal de las formaciones analizadas, se pudo analizar que estaba dentro los rangos que se habían planteado en otros estudios de formaciones areniscas (Pape, 1999), donde para valores de Dimensiones fractales mayores de 2.36, esta potencia debe ser mayor de 10, como efectivamente fue el caso de este trabajo. Por ello, la tendencia que se puede ver en la figura 21, asegura la confiabilidad del modelo desarrollado, con base en la teoría fractal, para las unidades K-1 y K-2 de la Formación Guadalupe del campo Apiay.

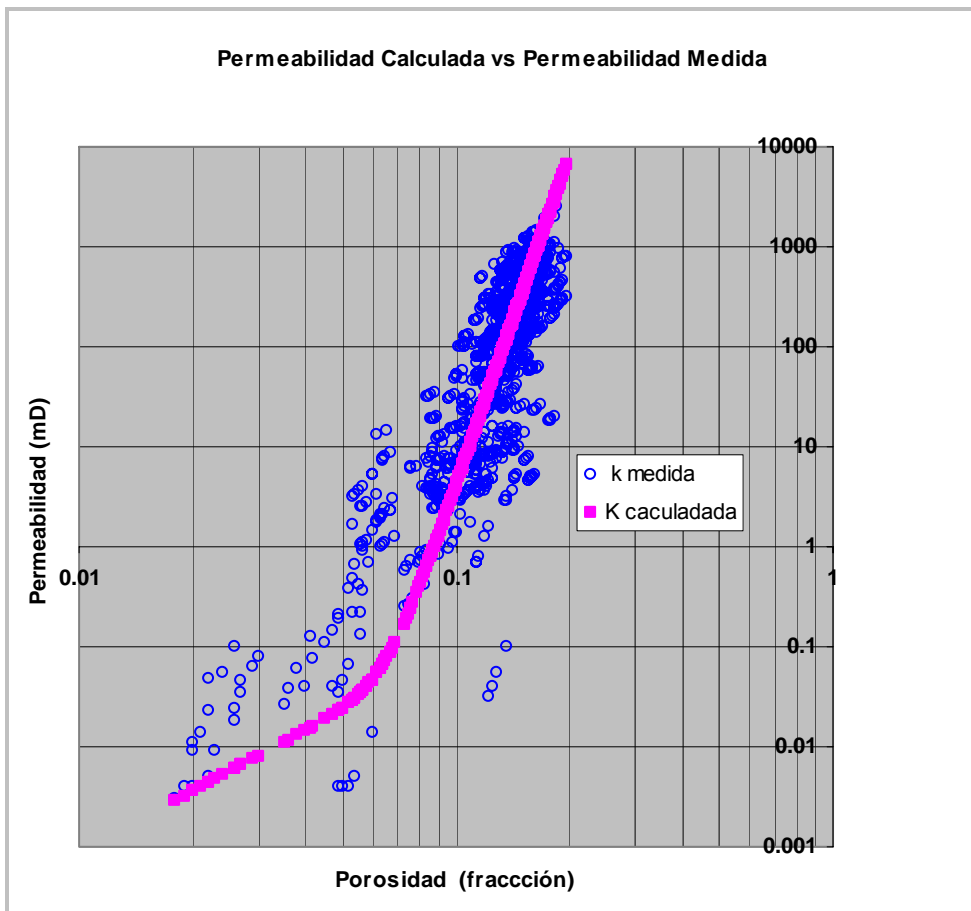


Figura 21. Permeabilidad Medida en laboratorio y Calculada por el modelo contra porosidad

La figura 21, muestra la tendencia de los datos calculados por el modelo propuesto y, además, se encuentran consignados los datos de permeabilidad reportados por los laboratorios de Análisis Petrofísicos básicos del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP). La tabla 5 presenta algunos de los valores de las permeabilidades medidas en laboratorio y las obtenidas por el modelo derivado de la teoría fractal. Como se puede ver en esta tabla y en la figura 21, el modelo empieza a sobreestimar los valores de permeabilidad mayores al 18%, esto debido a que el modelo se implementó a partir de datos de porosidad menores de 18%, los cuales eran los reportados por los laboratorios, y para los cuales se hicieron los diferentes cálculos como radios de poro, radios efectivos, tortuosidad, entre otros.

Haciendo el análisis del comportamiento del modelo hallado y los datos arrojados por los métodos de laboratorio se encontró que se presentaba una relación lineal entre los datos calculados y los medidos como se puede ver en la figura 22 y en el cálculo del factor de correlación entre los valores antes citados, se encontró que este, era igual a 0.75. Por consiguiente, el comportamiento de la predicción que realiza este modelo está bastante ajustado a la tendencia de los datos medidos a partir de corazonces en laboratorio.

Tabla 5. Valores de Porosidad, Permeabilidad Medida y Permeabilidad Predicha por el Modelo.

POROSIDAD	Permeabilidad Calculada	Permeabilidad Medida
0,049	0,023	0,004
0,052	0,027	0,066
0,053	0,029	0,485
0,054	0,030	0,005
0,090	1,287	3,163
0,097	2,853	2,888
0,101	4,409	9,217
0,103	5,453	5,932
0,104	6,055	5,817
0,105	6,719	6,652
0,106	7,448	14,954
0,108	9,129	11,361
0,107	8,249	127,126
0,111	12,309	12,814
0,120	28,888	3,607
0,125	45,200	66,968
0,126	49,330	237,017
0,130	69,520	275,854
0,131	75,623	80,868
0,136	114,116	176,734
0,138	133,971	204,000
0,150	335,007	388,000
0,157	553,171	145,797
0,160	681,170	184,578
0,168	1164,893	963,000
0,174	1713,564	1937,160
0,175	1825,046	1094,715
0,176	1943,083	283,034
0,181	2644,250	2388,066
0,182	2809,449	2034,670
0,182	2809,449	1074,000
0,183	2983,978	20,000
0,184	3168,310	375,000

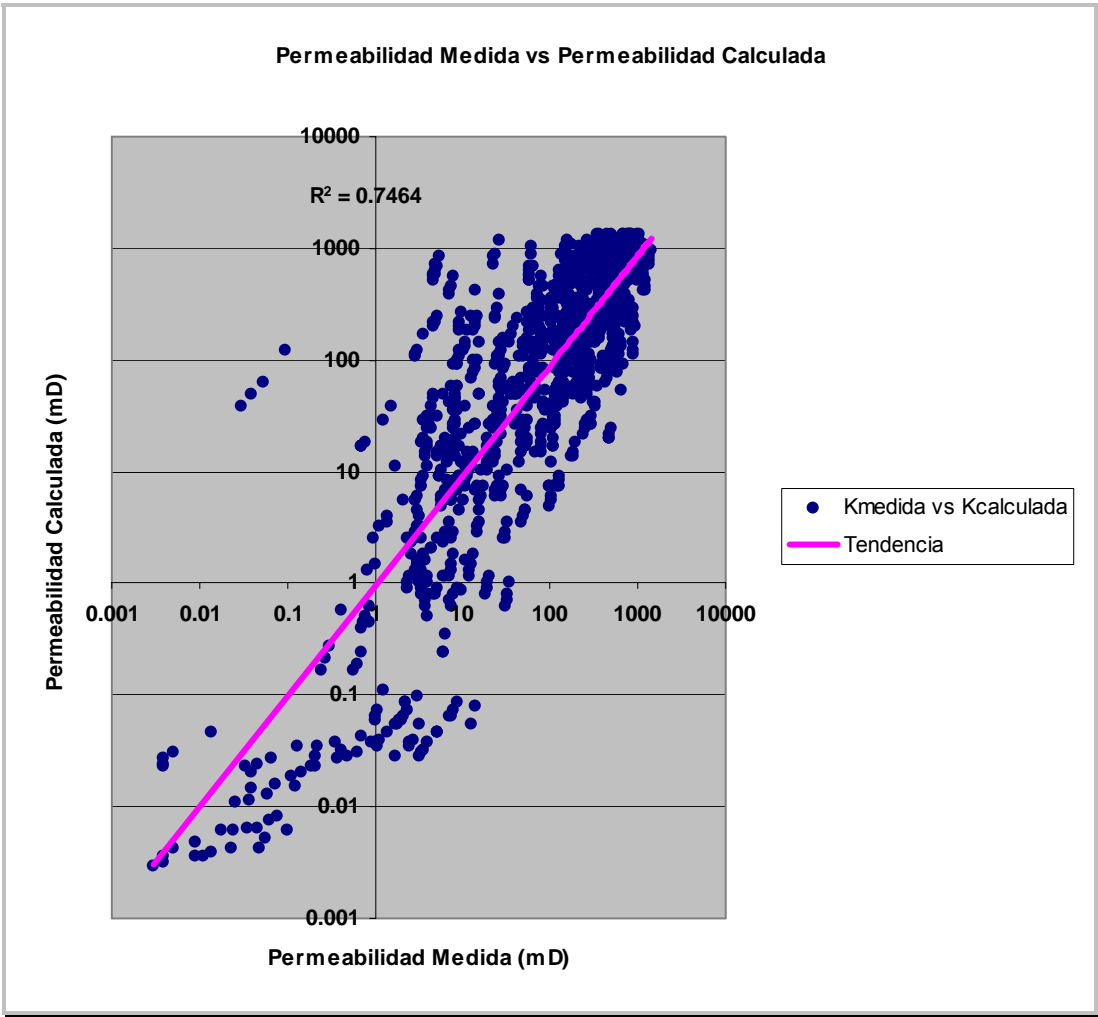


Figura 22. Permeabilidad Calculada contra Permeabilidad Medida.

CONCLUSIONES.

- Fundamentado en la teoría de la geometría fractal, aplicada al medio poroso de las rocas y el comportamiento de propiedades petrofísicas como porosidad, tortuosidad, radio de grano y de poro, se implementó una función de carácter potencial que describe la relación directa entre la Permeabilidad y la Porosidad de la forma $K = A\phi^2 + P\phi^{1.1}$ para la formación Guadalupe del Campo Apiay, donde el miembro 2 corresponde a la descripción del comportamiento fractal del medio poroso y el miembro 1 corresponde a la corrección realizada al modelo para incluir la predicción de permeabilidad para porosidades muy pequeñas (porosidades <8%) y las constantes A, P dependen de las propiedades del yacimiento o formación que se esté estudiando y se determinan a partir de los datos de corazones o método utilizado para la medición de permeabilidad que se tome como referentes.
- La verificación de este modelo se hizo comparando sus resultados con los obtenidos en laboratorio de muestras de corazones de la formación estudiada, para los mismos valores de porosidad. Aunque el factor de correlación es de 0.75 (menor a 1), se pudo ver que la ecuación se ajustaba a la tendencia general de los datos de laboratorio, lo que le brinda gran confiabilidad del modelo hallado.
- En la implementación de este modelo se pudo corroborar el comportamiento fractal que posee el medio poroso para las rocas sedimentarias de la formación estudiada, es así, que se pudo obtener la relación entre varios parámetros petrofísicos, mediante la utilización de la Dimensión fractal, cuyo valor promedio fue de 2.4, y el otro factor de relación fue C_1 cuyo valor obtenido fue de 0.4, para la formación Guadalupe del Campo Apiay.

- La utilización de este modelo puede servir para analizar la relación de la permeabilidad con la porosidad en cualquier lugar de la formación Guadalupe, perteneciente a este yacimiento, tan sólo, teniendo datos de porosidad en esos puntos.

- La realización de una pre-clasificación por familias utilizando los datos de R35 derivados de la prueba de Porosimetría con Mercurio, además de ayudar a tener un mejor análisis de la gráfica de Winland, permitió validar el método de winland, ya que las familias obtenidas por los dos métodos fueron muy similares como lo puede mostrar la figura 14, por lo tanto, este método puede ser usado para este tipo de análisis esperando una buena aproximación.

- Como se puede analizar, la cantidad y calidad de datos para cada propiedad petrofísica utilizada en un estudio de este tipo es determinante para llegar a obtener un modelo adecuado, teniendo en cuenta la amplitud de acción que posee la teoría que se manejó; por lo tanto, una cantidad reducida o nula de datos puede influir ampliamente en la obtención de algún tipo de resultado que se ajuste a las expectativas planteadas por ese estudio.

RECOMENDACIONES

- La recomendación principal es que se siga con esta línea de investigación, ya sea llevando esta práctica a una escala macroscópica y/o hacer análisis parecidos a yacimientos más heterogéneos y/o Yacimientos Naturalmente Fracturados.
- Al momento de realizar un proceso investigativo de esta índole, donde se aplique la Teoría Fractal, es indispensable contar con un conjunto de datos suficientemente amplio y completo del yacimiento que se elija, para garantizar la confiabilidad del estudio.
- Hacer transferencias técnicas en esta línea con otros centros de investigación del país y/o del mundo, para ampliar el rango de acción y de conceptos.

NOMENCLATURA.

σ_{wo}	Tensión interfacial (Dinas/cm)
Φ	Porosidad (fracción)
λ	Longitud característica de los poros (cm)
Δd	Diferencia de densidad entre los fluidos (g / cm ³)
ΔP	Caída de presión en la longitud L (dinas/cm ²)
α_s	Superficie de un poro con longitud característica
1/s	Factor de reducción.
1-V(r)	Volumen de poros residuales (cm ³)
a	Número de piezas que se repiten
a_s, b_s	Constantes geométricas relacionadas con superficie.

a_v, b_v	Constantes geométricas relacionadas con volumen.
$a_{vg} r_{grano}^3$	Volumen de un grano de radio r_{grano} .
a_{vg}, b_{vg}	Constantes geométricas relacionadas con volumen.
a_{vp}, b_{vp}	Constantes geométricas relacionadas con volumen.
a_{vp}, r_{poro}^3	Volumen de un poro de radio r_{poro} .
$a_v r^3$	Volumen residual en función del radio r .
Cte, cte1	Constantes.
D	Dimensión fractal
D_t	Dimensión topológica (1, 2 o 3, para línea, superficie y volumen)
F	Factor de formación.
<i>FWL</i>	Nivel de agua libre
g	Aceleración de la gravedad (cm / seg ²)
h	Ascenso Capilar (cm)
K	Permeabilidad absoluta (milidarcies)
K_g	Permeabilidad efectiva al gas (milidarcies)
K_o	Permeabilidad efectiva al aceite (milidarcies)
K_{rg}	Permeabilidad relativa al gas (fracción)
K_{ro}	Permeabilidad relativa al aceite (fracción)
K_{rw}	Permeabilidad relativa al agua (fracción)
K_w	Permeabilidad efectiva al agua (milidarcies)
L	Longitud (cm)
$N(\lambda)$	Número de poros con longitud característica λ
$N(r)$	Número de unidades (con radio r) requerida para llenar el fractal
$N_g(r_{grano})$	Número de granos con radio r_{grano}

$N_p (r_{\text{poro}})$	Número de poros con radio r_{poro}
$N_{pr}(r)$	Número de poros (capilares) residuales con radio r
P_A, P_B, P_C, P_D, P_E	Presiones en los puntos A, B, C, D y E (Psia)
P_c	Presión Capilar (Psia)
P_m	Presión de la fase mojante (Psia)
P_{nm}	Presión de la fase no mojante (Psia)
q	Tasa de flujo en (cm^3 / s)
q_{wo}	Ángulo de contacto de la interfase líquida con la superficie del sólido (Radianes)
r	Radio (cm)
R_{50}, R_{75}	Medidas de localización llamadas percentiles
r_{ef}	Radio hidráulico efectivo de flujo (cm)
r_{grano}	Radio de grano (cm).
r_{poro}	Radio promedio de poro (cm)
S_{por}	Superficie específica normalizada del medio poroso
S_{wirr}	Saturación de agua irreducible (fracción)
T	Tortuosidad.
V_{Hg}	Volumen de mercurio introducido a la muestra a una presión (cm^3)
V_{Matriz}	Volumen de Matriz (cm^3)
V_{pT}	Volumen total poroso (cm^3)
V_{roca}	Volumen total de roca.
V_s	Volumen de granos (cm^3)
V_T	Volumen total de la roca (cm^3)

WOC	Contacto Agua-Petróleo
Z, C	Números Complejos ($a + bi$)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Angulo, R. F., Alvarado, V. y González, H. Fractal Dimensions from Mercury Intrusion Capillary Tests. Paper SPE 23695, Intevep, S.A. 255-263. 1992

Amaya, C., Muñoz. M., Rojas N., y Cáliz, A. Potencialidad del yacimiento k-1 en los campos Apiay, Suria y Libertad Cuenca Llanos Gya - Gerencia Llanos, Santa té de Bogota. 1998.

Archie, G. E. The Electrical Resistivity Log as an Aid in Determining some Reservoir Characteristics: Trans. AIME, 146, 54-61. 1942.

Babadagli, T and Al-Salmi, S. Improvement of Permeability Prediction for Carbonate Reservoirs Using Well Log Data. Paper SPE 77889. 2002.

Barnsley, M. F. Fractals Everywhere. Academic Press Professional, 532 pags. 1993.

C. Ozgen, K. C. and Halleck, P. Correlating Particle Size Distribution in a Crushed Zone to Perforating Permeability Damage and Modeling Using Fragmentation Fractal Theory The Pennsylvania State University. Paper SPE 77365.2002

Civan, F. Fractal Formulation of the Porosity and Permeability Relationship Resulting in a Power-Law Flow Units Equation - A Leaky-Tube Model. The University of Oklahoma. Paper SPE 73785.

Core Laboratories, Inc. Special Core Analysis Course, 1977.

ECOPETROL – I.C.P. Evaluación regional del Meta. Bucaramanga, 1999. 20 p.

ECOPETROL. Superintendencia de Operaciones Apiay. File de Pozos, Archivo Técnico. Departamento de Operaciones Apiay. Apiay, Meta, ECOPETROL. 2002.

Gunter, G. W. Early Determination of Reservoir Flow Units using an Integrated Petrophysical Method. Society of Petroleum Engineers. SPE 38679. 1997.

Hardy, H. H. Fractals in reservoir engineering. World Scientific.1978

<http://es.wikipedia.org>.

<http://www.fractaltec.org>.

<http://www.geocities.com>

ECOPETROL –ICP. Laboratorio de Análisis Petrofísicos Básicos, División de Exploración y Producción. Análisis de Corazones, Daños a la Formación, Piedecuesta, 1992.

Li, K. Characterization of Rock Heterogeneity using Fractal Geometry. Society of Petroleum Engineers. SPE 86975. March of 2004.

Mandelbrot, B. B. Fractals-Form, Change and Dimensions: W. H. Freeman & Co. 1977.

Martínez, J. A. "Modelamiento Estructural 3D y aplicaciones en la Exploración y Explotación de Hidrocarburos en el Cinturón de Cabalgamiento del Piedemonte Llanero, Cordillera Oriental, Colombia". VIII Simposio Bolivariano – Exploración Petrolera en las Cuencas Subandinas. BP Exploration Colombia. Cartagena 2003.

Niño, J. R. y Rincón, A. Simulación Analítica y Numérica del Fenómeno de Conificación en los Pozos Vertical Apiay y Horizontal Guatiquia 3H. Tesis de Grado. Universidad Industrial de Santander. 2000.

Pape, H. and Schopper, J. R. Particle Characterization 1. Pags 66-73. 1984.

Pape, H., Clauser, C. and Iffland, J. Permeability Prediction Based on Fractal Pore-Space Geometry: Geophysics, vol. 64. 1999.

Pape, H., Riepe, L. and Schopper, J. R. Interlayer Conductivity of Rocks-A fractal Model of Interface Irregularities for Calculating Interlayer Conductivity of Natural Porous Mineral System: Elsevier Science Publishers, 27, 97-122. 1987.

Pape, H., and Schopper, J. R. Relation between Physical Relevant Geometrical Properties of a Multifractal Porous System: Elsevier Science Publishers, 473-482. 1988.

Peitgen, H. O., Jurgens, H. and Saupe, D. Chaos and Fractals: New Frontier of Science. Springer-Verlag New York, Inc. 984 Págs. 1992.

Plata, G. Propiedades de las Rocas de los Yacimientos de Petróleo. Tesis de Grado. Universidad Industrial de Santander. 1987.

Purcell, W. Interpretation of Capillary Pressure. Trans AIME, 189.

Restrepo, R. D. Análisis de Registros Verticales de Porosidad y su Aplicación al Modelamiento Fractal de un Yacimiento. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.

Rueda, S. J. y Velandia, L. A. Ajuste de Correlaciones Utilizando Unidades Hidráulicas en Yacimientos Anisotrópicos Integrando Datos de Registros, Corazones e Imágenes BSE en Pozos del Área Apiay-Colombia. Tesis de Grado. Universidad Industrial de Santander. 2000.

Salamanca, M. L., Meza, N. S. y Vásquez, C., estudio de simulación yacimiento K-2 Campo Apiay. 1991

Suárez, A. D., y Villamizar, G. R. Aplicación del Modelo Fractal para la Descripción del Fracturamiento Hidráulico de un Yacimiento. Tesis de Grado. Universidad Industrial de Santander. 1998.

Tiab, D. and Donaldson, E. C: Petrophysics, Theory and Practice of measuring Reservoir Rock and Fluid Transport Properties. Gulf Publishing Company. Huston Texas. First print. 1996.

Villamizar, B. D. y Remolina, B. O., Relación Sistematizada sobre la Aplicación de los Fractales a los Yacimientos Petrolíferos. Tesis de Grado. Universidad Industrial de Santander. 1993.