

**DISCOS GRUESOS COMO MODELOS NEWTONIANOS
DE GALAXIAS AXIALMENTE SIMÉTRICAS.**

ALEXANDER ARGÜELLO QUIROGA.

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2006**

**DISCOS GRUESOS COMO MODELOS NEWTONIANOS
DE GALAXIAS AXIALMENTE SIMÉTRICAS.**

ALEXANDER ARGÜELLO QUIROGA.

Trabajo de Grado presentado como
requisito para optar al título de físico

Director

DR. GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ

Físico



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2006

A la memoria de mi padre Alejandro Argüello Mora, gran padre, esposo y amigo de todos los que le rodearon y, a pesar de que partiste de nuestras vidas hace ya muchos años en la flor de tu vida, tu imagen sigue y seguirá recordada con cariño, respeto y admiración por todos los que tuvimos el privilegio de conocerte.

A mi madre Azucena Quiroga, mujer de belleza sin igual tanto físicamente como espiritualmente, quien ha estado en todas las etapas de mi vida apoyándome y aconsejándome sin juzgar, porque gracias a ella y solo a ella estoy terminando mi carrera y, a pesar de nuestra condición, nunca nos hizo falta nada a mi hermano y a mi, ella es mi ángel de la guarda y me bendice a diario con sus oraciones.

A mi hermano Ariel Argüello Quiroga.

A mi tía Valentina Argüello Mora, a mi primo Milson Gómez Argüello y al señor Angel Maria Gómez.

A mis demás familiares.

A Karin Lorena Restrepo Gómez, quien estuvo a mi lado toda la carrera.

Gracias.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas, profesor a quien admiro y respeto por su capacidad intelectual y trato cordial con todos, quien cree en mis capacidades y me recibió en su grupo de investigación para ser el orientador en este trabajo de grado y espero que en otros futuros.

Al Dr. José David Sanabria, profesor de mente abierta, dispuesto a escuchar y aconsejar, gracias a él decidí estudiar esta área de la física

Al Dr. Harold Paredes.

Al Dr. Carlos Beltrán.

Al Dr. Carlos Arturo Ramírez.

Al Dr. Julio César Carrillo.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación, (GIRG), A César A Valenzuela, Paolo A Ospina, L Framsol López, Fabio D Lora, Fredy Dubbeibe, Jorge Rueda, Leonardo A Pachón, Jerson I Reina, Javier F Cáro, Antonio C Gutierrez , Gonzalo García, Ómar Espítia, Gustavo Ramírez.

A Carlos E Estupiñan, Fernando A Quiñonez, Mery E Ochoa, Erika M Candela y María del R Pérez.

A mi Colega, Compañero, Ahijado y amigo Mao Tsetung Murrillo Acevedo.

A la Universidad Industrial de Santander.

TÍTULO: DISCOS GRUESOS COMO MODELOS NEWTONIANOS DE GALAXIAS AXIALMENTE SIMÉTRICAS. *.

AUTORES: ARGÜELLO QUIROGA, Alexander. **

PALABRAS CLAVE: Modelos de galaxias, Discos Gruesos, Gravitación Newtoniana

DESCRIPCIÓN: En éste trabajo se presenta un formalismo matemático para la construcción de Modelos Gruesos de Galaxias axialmente simétricas mediante la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Este sistema es escogido porque es el más adecuado para la construcción del modelo pues éste es axialmente simétrico. Imponiendo condiciones de contorno sobre la solución de la ecuación de Laplace se determina el potencial gravitacional apropiado para una distribución de materia en la galaxia, y además garantizan que la solución obtenida no solo sea una representación matemática, sino que también tenga validez física.

Posteriormente, gracias a una modificación del método *desplazamiento, corte y reflexión*, empleado por autores como Letelier y González, se obtiene el método de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión*. Este nuevo método permite encontrar una expresión para la densidad de masa, la cual depende del potencial gravitacional de la galaxia y adicionalmente de una función especial, denominada $h(z)$, la cual juega un papel muy importante en el desarrollo de éste trabajo pues es la encargada de darle el espesor al disco.

Finalmente, se consideran algunos casos particulares del potencial gravitacional en el sistema coordinado en mención, cada uno representando una familia de modelos caracterizados por una densidad de masa. Además se presentan algunos ejemplos simples y se analiza la correspondiente interpretación física de cada solución obtenida.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TITLE : THICK DISKS AS NEWTONIAN MODELS OF AXIALLY SYMMETRIC GALAXIES. *.

AUTORES : ARGÜELLO QUIROGA, Alexander. **.

KEY WORDS : Models of galaxies, Thick disks, Newtonian Gravitation.

DESCRIPTION : In this work a mathematical formalism for the construction of thick Models of axially symmetrical Galaxies is presented by means of the solution of Laplace's equation in spherics coordinates. This system is chosen because is the most adequate one for the construction of the model because it is axially symmetric. Imposing contour conditions on the solution of Laplace's equation the appropriate gravitational potential for a distribution of matter in the galaxy is determined, and besides they guarantee that the not only the solution obtained be a mathematical representation but also it has physical validity.

Subsequently, thanks to a modification of the method *displacement, cut and reflection*, employed by authors as Letelier and Gonzalez, the method of *displacement, cut, filled and reflection* is obtained. This new method allows to find an expression for the density of mass, which depends on the gravitational potential of the galaxy and additionally of a special function, called $h(z)$, which plays a very important role in the development of this work because it is the responsible to give the thickness to the disk.

Finally, some particular cases of the gravitational potential in the mentioned coordinate system are consider, each one representing a family of models characterized by a density of mass. Moreover, some simple examples are presented and the corresponding physical interpretation of each solution obtained is analyzed.

*Undergraduate thesis.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Advisor).

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. MODELOS GRUESOS DE GALAXIAS	4
1.1. TEORÍA DEL POTENCIAL Y CONDICIONES DE CONTORNO	5
1.2. DENSIDAD DE MASA $\rho(R, z)$	6
1.3. FUNCIÓN QUE DESCRIBE LA MATERIA EN EL INTERIOR DEL DISCO. . .	8
2. MODELOS PARTICULARES PARA LA DENSIDAD DE MASA	12
2.1. MODELO GENERAL PARA LA DENSIDAD DE MASA EN COORDENADAS ESFÉRICAS	12
2.2. DENSIDADES DE MASA PARTICULARES	16
2.2.1. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_0	17
2.2.2. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_1	17
2.2.3. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_2	18
2.2.4. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_3	20
CONCLUSIONES	30
BIBLIOGRAFÍA	32

LISTA DE FIGURAS

1.	Construcción de un disco delgado.	2
1.1.	Líneas de campo gravitacionales para un disco grueso	5
1.2.	Forma gráfica del método de <i>desplazamiento, corte, llenado y reflexión</i>	7
2.1.	Gráfica 1 de ρ_0 , con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 10$	25
2.2.	Gráfica 2 de ρ_0 , con $a = 1, b = 1,5, C_0 = 1$	25
2.3.	Gráfica 3 de ρ_0 , con $a = 0,5, b = 0,5, C_0 = 1$	25
2.4.	Gráfica 1 de ρ_1 , con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 10, C_2 = 1$	26
2.5.	Gráfica 2 de ρ_1 , con $a = 1, b = 1,2, C_0 = 1, C_2 = 1$	26
2.6.	Gráfica 3 de ρ_1 , con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 15, C_2 = 8$	26
2.7.	Gráfica 4 de ρ_1 , con $a = 0,5, b = 5, C_0 = 5, C_2 = 3$	27
2.8.	Gráfica 1 de ρ_2 , con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 10, C_2 = 10, C_4 = 8$	27
2.9.	Gráfica 2 de ρ_2 , con $a = 1, b = 1,2, C_0 = 8, C_2 = 15, C_4 = 50$	27
2.10.	Gráfica 3 de ρ_2 , con $a = 0,5, b = 3, C_0 = 8, C_2 = 15, C_4 = 25$	28
2.11.	Gráfica 4 de ρ_2 , con $a = 2, b = 1, C_0 = 1, C_2 = 1, C_4 = 1$	28
2.12.	Gráfica 1 de ρ_3 , con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 10, C_2 = 10, c_4 = 8, C_6 = 10$	28
2.13.	Gráfica 2 de ρ_3 , con $a = 2,5, b = 4, C_0 = 1, C_2 = 1, c_4 = 1, C_6 = 0,5$	29

2.14. Gráfica 3 de ρ_3 , con $a = 2,5$, $b = 3$, $C_0 = 5$, $C_2 = 3$, $c_4 = 10$, $C_6 = 8$	29
2.15. Gráfica 4 de ρ_3 , con $a = 0,5$, $b = 3$, $C_0 = 5$, $C_2 = 3$, $c_4 = 10$, $C_6 = 8$	29
2.16. Gráfica de 2.11, con un corte frontal.	30

LISTA DE TABLAS

2.1. Tabla de parámetros.	24
-----------------------------------	----

INTRODUCCIÓN

“*Las galaxias son a la astronomía como los átomos a la ciencia*”. Esta analogía es correcta en el sentido que las galaxias son sistemas que se pueden imaginar aisladas de otras galaxias, que generalmente mantienen una única identidad a lo largo de su evolución, con excepción de algunos fenómenos como colisiones y fusiones con otras galaxias. Pero las galaxias no son como el átomo, en el sentido que a pesar que en su interior ocurren muchos fenómenos químicos y dinámicos su comportamiento se puede modelar de una forma sencilla analizándola a grandes escalas [5]. El comportamiento de esos sistemas de galaxias son determinados por las leyes de movimiento y la gravitación de Newton, donde una buena aproximación para el campo gravitacional es imaginar que la masa de la galaxia está continuamente distribuida. Las soluciones analíticas obtenidas proporcionan gran precisión en los modelos para la distribución de masa de galaxias.

En teoría newtoniana, modelos para cluster globulares y galaxias esféricas son presentados por Plummer(1911)[20] y King(1966)[10]. Por otra parte, al tratar de describir la distribución de masa dentro de galaxias delgadas axialmente simétricas, Toomre (1962) [25] encontró una familia de par densidad-potencial; el primero de ellos fue primero deducido por Kuzmin(1956)[11], luego Miyamoto y Nagai (1975, 1976)[16] engrosaron la serie de modelos de disco de Toomre para producir pares de potencial-densidad tridimensionales. En forma similar, Satoh(1980)[24] obtuvo una familia tridimensional de distribución de masa axialmente simétrica, esto basado en resultados de Plummer. Una detallada descripción de otros modelos de pares densidad-potencial usados en modelos galácticos se pueden consultar en el libro Binney and Tremaine [5].

Todo el trabajo aquí presentado fue realizado partiendo de una idea relativamente sencilla, como lo es la construcción de un modelo newtoniano de disco delgado el cual se construye con el método de *desplazamiento, corte y reflexión*. Con este método se han hecho trabajos donde se ha encontrado la densidad superficial de masa y la velocidad circular para modelos planos de

galaxias, este fue el trabajo de partida para el trabajo aquí realizado, se han analizado modelos de discos delgados relativistas alrededor de un agujero negro y también se ha interpretado desde la relatividad general, resultados de modelos de discos Newtonianos; estos resultados se encuentran en [22], [12] y [27] respectivamente.

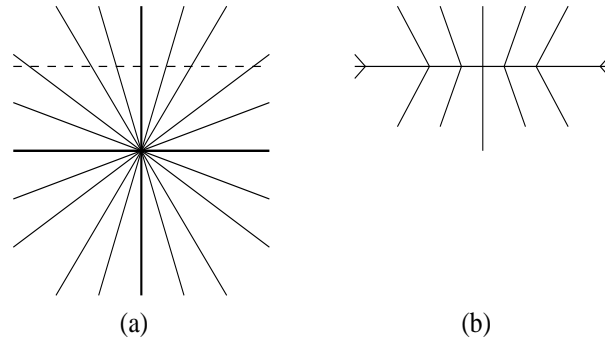


Figura 1: Construcción de un disco delgado.

La idea ahora es la de generalizar el modelo de disco delgado a un modelo newtoniano de disco grueso, donde en una primera aproximación el espesor del disco galáctico no era considerado, por ejemplo, el radio del disco de nuestra galaxia es aproximadamente 10Kpc y su espesor es de 1Kpc, en un modelo más real este espesor necesita ser considerado [5]. Esto se logra agregando un paso al método para construir discos delgados, este paso es el de *llenado*, con lo cual el nuevo método es *desplazamiento, corte, llenado y reflexión*, con éste método ya se han modelado discos gruesos relativistas; esto se puede ver en [6] y [26].

Para la construcción del disco grueso se requiere un potencial gravitacional, este potencial es hallado resolviendo la ecuación de Laplace con el método de separación de variables; este procedimiento no se expone en el desarrollo del trabajo pero puede ser consultado en cualquier libro de matemática avanzada, [2] [8]. Parte importante de cualquier modelo matemático en física son los sistemas coordenados, éstos están dados por la naturaleza geométrica de la fuente que origina el campo gravitacional, es por este motivo que existen trabajos cuyas soluciones están dadas en coordenadas oblatas y prolatas, [14] [18] [19] [21] [22], estas soluciones dependen de la fuente, si es del tipo disco o es tipo barra; para los trabajos que están expresados en las coordenadas esféricas es lógico pensar que la fuente implicada tiene forma puntual y es axialmente simétrica, el que estos sistemas requieran formas específicas de la fuente gravitacional para éste trabajo tal

concepto no es importante, porque esa fuente sea cual fuere queda totalmente cubierta por un cascarón grueso, este cascarón hará las veces de fuente gravitacional y aunque los tres sistemas coordinados son simétricos tanto axial como temporalmente presentan distintas soluciones [21].

Si bien el sistema utilizado para plantear este trabajo son las coordenadas cilíndricas para el desarrollo del mismo son utilizadas las coordenadas esféricas, pues con su simetría axial permite la imposición de las condiciones de contorno requeridas en el potencial gravitacional, las soluciones que se obtienen son de tipo exactas y están representadas por los polinomios de Legendre, los cuales son muy reconocidos en la física-matemática, de gran importancia y con unas características propias que las hacen un tipo de soluciones muy apetecido por su simplicidad y elegancia, [2], [8]. Aunque en cálculos preliminares se utilizaron las coordenadas esféricas oblatas y prolatas, los resultados de estas no fueron incluidos porque los resultados son similares a los obtenidos con las coordenadas esféricas a pesar de que sus expresiones son más complejas y extensas.

Para encontrar la densidad de masa para la familia de discos gruesos es necesario idear un nuevo proceso, pues el utilizado en los trabajos de discos delgados no sirve porque fue hecha para $z = 0$, donde la respectiva ecuación es $\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0^+}$, [22]. La ecuación de densidad de masa que se necesita parte del concepto de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión*, al entender este método como una transformación de coordenadas sobre el eje z haciendo $z \rightarrow \tilde{z} + b$, si se hace esta transformación de coordenadas sobre el Laplaciano, el resultado de esta transformación es una ecuación que depende de las derivadas de una función especial la cual se denomina $h(z)$. $h(z)$ puede ser manipulada matemáticamente de modo que la ecuación se anule con esto se obtiene la ecuación de Laplace, pero la idea es no anular la ecuación para así poder compararla con la ecuación de Poisson y de este modo hallar la ecuación para la densidad de masa para una familia de discos gruesos.

Cabe aclarar que la función $h(z)$, debe cumplir con ciertas propiedades que serán expuestas en el transcurso del trabajo y que la función encontrada en este trabajo es la forma más simple. En [26], se describe una forma más general de esta función. Por último se calcula una expresión general para la densidad de masa, se dan algunas densidades particulares, se hacen sus respectivas gráficas y se calculan las respectivas masas.

Capítulo 1

MODELOS GRUESOS DE GALAXIAS

INTRODUCCIÓN

Se presentan las herramientas matemáticas necesarias para la construcción de modelos gruesos de galaxias. Estos modelos de galaxias son caracterizados por un Potencial Gravitacional y una densidad de masa, el potencial es hallado por medio de la solución de la ecuación de Laplace la cual es sometida a ciertas condiciones físicas de contorno y la densidad de masa se encuentra gracias al método de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión*.

Las condiciones de contorno son leyes naturales que se le deben imponer al modelo, por ejemplo, debe existir una reflexión con respecto al eje $z = 0$ y que el campo gravitacional sea igual en magnitud y en sentido contrario para los límites superior e inferior del disco $z > a$ y $z < -a$, siendo a el grosor del disco; esto se estudiará en detalle en la sección 1.1.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que debe existir continuidad en el campo gravitacional en el interior del disco, en la sección 1.2 se estudia el método de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión*, se presenta este método de forma gráfica y su interpretación matemática la cual es una transformación de coordenadas. Para terminar en la sección 1.3 se encuentra la función matemática $[h(z)]$, la cual describe la materia contenida en el interior del disco.

1.1 TEORÍA DEL POTENCIAL Y CONDICIONES DE CONTORNO

Para la construcción de un modelo matemático de un disco grueso se debe hallar un potencial gravitacional $\Phi(R, z)$ y una densidad de masa $\rho(R, z)$ asociada a este potencial, donde (R, z) son las coordenadas cilíndricas usuales. Para que el potencial sea el adecuado en el modelo de disco grueso se deben imponer ciertas condiciones de contorno; si se analiza la Figura 1,1 se observa la dirección que tienen las líneas de campo, las cuales van en ese sentido porque la masa tiene la propiedad de ser atractiva. También se puede apreciar que el campo tiene una reflexión ecuatorial,

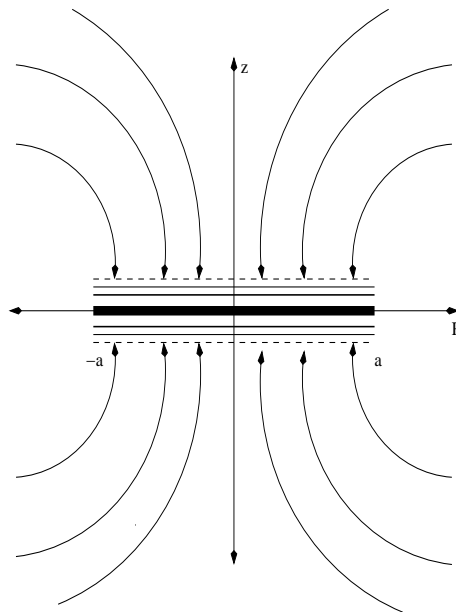


Figura 1.1: Líneas de campo gravitacionales para un disco grueso

lo cual indica que la masa está igualmente distribuida por encima del plano ecuatorial como por debajo de este, cabe aclarar que esto no indica que la masa este distribuida de forma uniforme en el disco, pues la mayor cantidad de masa está concentrada en el centro del disco y va disminuyendo a medida que se aleja de este. Teniendo en cuenta lo anterior se establece las siguientes condiciones sobre el potencial gravitacional $\Phi(R, z)$:

1. Reflexión ecuatorial:

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z), \tag{1.1}$$

donde (R, z) son las coordenadas cilíndricas usuales, con esta condición se esta asegurando

que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=a^-} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-a^+}, \quad (1.2)$$

lo cual indica que la componente normal a la línea del campo gravitacional tienen el mismo valor para $z > a$ y $z < -a$.

2. Continuidad,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=a^+} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=a^-}, \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-a^+} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-a^-}, \quad (1.3b)$$

con (1.3) se garantiza que el potencial Φ y el campo gravitacional $-\nabla\Phi$ existen en el volumen y son continuas en todo el espacio.

1.2 DENSIDAD DE MASA $\rho(R, z)$

En esta sección se encuentra la densidad de masa con un método geométrico sencillo, el cual es el de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión*, [6] éste se divide en los siguientes pasos:

1. Se escoge la superficie que divide el espacio en dos partes.
 - a) Uno con singularidades o fuentes.
 - b) Uno sin ellas.
2. Se omite el espacio con singularidades.
3. Se reemplaza el espacio sin singularidades por un cascarón grueso, de tal forma que la materia contenida dentro del cascarón se describa por funciones continuas con primeras derivadas continuas.
4. Luego se utiliza la parte inferior del cascarón para realizar la inversión.

Matemáticamente el anterior procedimiento es análogo a realizar una transformación de coordenadas $z \rightarrow \tilde{z} = h(z) + b$. Como se sabe en gravedad newtoniana el potencial es solución de la ecuación de Laplace, escribiendo esto en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{,RR} + \frac{\Phi_{,R}}{R} + \Phi_{,zz} = 0. \quad (1.4)$$

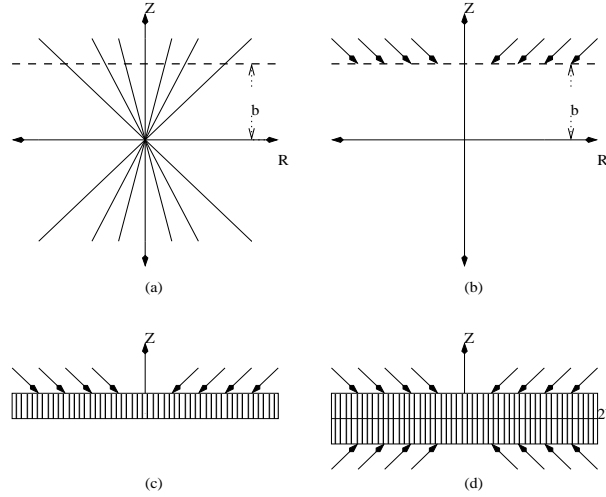


Figura 1.2: Forma gráfica del método: (a) Se desplaza una distancia a , (b) Se omite el espacio con singularidad, (c) Se reemplaza el espacio por un cascarón grueso, (d) Se realiza la inversión de la parte inferior del cascarón.

Como se menciono anteriormente se debe realizar una transformación de coordenadas $z \rightarrow \tilde{z}$ sobre el Laplaciano, esto se hace con la siguiente transformación:

$$R = \tilde{R}, \quad (1.5)$$

$$z \longrightarrow \tilde{z} = h(z) + b, \quad (1.6)$$

se puede ver que la ecuación de transformación para R (1.5) es la idéntica, por lo tanto solo se utiliza la ecuación de transformación (1.6), aplicando la transformación (1.6) en la ecuación (1.4) se obtiene la transformación $\Phi_{,zz} \longrightarrow \Phi_{,\tilde{z}\tilde{z}}$, para esto se hace lo siguiente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}, \quad (1.7)$$

según (1.6), (1.7) se reduce a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial z} \right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \quad (1.10)$$

de la ecuación (1.10) se obtiene:

$$\Phi_{,zz} = (h')^2 \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h}, \quad (1.11)$$

por lo tanto la ecuación (1.4) se transforma en:

$$\nabla^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) = \Phi_{,\tilde{R}\tilde{R}} + \frac{\Phi_{,\tilde{R}}}{\tilde{R}} + (h')^2 \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} \neq 0. \quad (1.12)$$

Ahora bien, si se toma la ecuación (1.4) y la se manipula adecuadamente se obtiene lo siguiente:

$$\nabla^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) = \Phi_{,\tilde{R}\tilde{R}} + \frac{\Phi_{,\tilde{R}}}{\tilde{R}} + \Phi_{,hh} - \Phi_{,hh} + (h')^2 \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} \neq 0, \quad (1.13)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = 0, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\nabla}^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) = 0, \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) \neq 0, \quad (1.16)$$

se obtiene:

$$\nabla^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) = \tilde{\nabla}^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) + [(h')^2 - 1] \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} \neq 0, \quad (1.17)$$

de (1.15) en (1.17) se obtiene:

$$\nabla^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) = [(h')^2 - 1] \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} \neq 0, \quad (1.18)$$

esta es la ecuación de Laplace para el nuevo sistema coordenado (\tilde{R}, \tilde{z}) , pero por conveniencia se escoge que tanto $[(h')^2 - 1]$ como h'' sean distintas de cero, de esta forma se puede comparar con la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) = 4\pi G \rho, \quad (1.19)$$

y despejando ρ , se llega a la forma para la densidad de masa la cual es:

$$\rho(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{1}{4\pi G} \{ [(h')^2 - 1] \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} \}, \quad (1.20)$$

donde se observa que ésta es una forma generalizada de la densidad de masa, está expresada en las coordenadas (\tilde{R}, \tilde{z}) y depende del potencial gravitacional y de la función $h(z)$, la forma de tratar esto se da en la siguiente sección.

1.3 FUNCIÓN QUE DESCRIBE LA MATERIA EN EL INTERIOR DEL DISCO.

Para hallar una función que describa de forma adecuada la materia en el interior del disco, $h(z)$ se tiene que someter a ciertas condiciones de contorno, las cuales son:

1. La materia contenida dentro del disco, debe ser descrita por funciones continuas con primeras derivadas continuas.
2. La densidad de masa fuera del disco, debe ser nula.
3. La función $h(z)$, debe hacer que la distribución y cantidad de masa para $0 < z < a$ y $0 > z > -a$ sean iguales, en otras palabras que $\rho(R, z) = \rho(R, -z)$.
4. La mayor cantidad de materia que constituye al disco debe estar concentrada en el plano $z = 0$,

teniendo en cuenta estas condiciones se llega a la conclusión que la función $h(z)$ debe ser una función compuesta, una para el interior y otra para el exterior del disco.

Para el exterior del disco $\rho = 0$, y de la ecuación (1.20) se obtiene:

$$[(h')^2 - 1]\Phi_{,hh} + h''\Phi_{,h} = 0, \quad (1.21)$$

de esta ecuación se puede ver que $[(h')^2 - 1]$ y h'' deben ser cero. Si $h'' = 0$, entonces

$$h'(z) = \alpha, \quad (1.22)$$

$$h(z) = \alpha z + \beta. \quad (1.23)$$

Ahora bien, si $[(h')^2 - 1]$, se ve que

$$[h(z)']^2 - 1 = 0, \quad (1.24a)$$

$$[h(z)']^2 = 1, \quad (1.24b)$$

$$h(z)' = \pm 1, \quad (1.24c)$$

$$h(z) = \pm \alpha' z + \beta'. \quad (1.24d)$$

Para el interior del disco $\rho \neq 0$, la forma más simple para la función $h(z)$ es:

$$h(z) = \mu z^2 + \beta z + \gamma, \quad (1.25)$$

a la ecuación (1.25) se le deben aplicar dos grandes propiedades:

1. De la propiedad 3 para $h(z)$, se concluye que esta función debe ser descrita por funciones pares dentro del disco por lo tanto $\beta z = 0$,
2. De la propiedad 4, se ve que $\gamma = 0$,

teniendo esto en cuenta, la ecuación (1.25) queda reducida a:

$$h(z) = \mu z^2, \quad (1.26)$$

ahora, de la propiedad 1 se ve que estas dos funciones (1.24d) y (1.26) deben ser continuas en el límite del disco, $h(z) |_{a^+} = h(z) |_{a^-}$ entonces:

1. para $z = a$,

$$\alpha' a + \beta' = \mu a^2, \quad (1.27)$$

2. para $z = -a$,

$$-\alpha'(-a) + \beta' = \mu a^2, \quad (1.28)$$

resolviendo estas dos ecuaciones (1.27) y (1.28) se obtiene:

$$\alpha' a + \beta' = \mu a^2, \quad (1.29)$$

ahora de la misma propiedad 1, se sabe que la función $h(z)$ debe ser continua en su primera derivada, $h'(z) |_{a^+} = h'(z) |_{a^-}$ por lo tanto:

1. para $z = a$,

$$\alpha' = 2\mu a \quad (1.30)$$

2. para $z = -a$,

$$-\alpha' = -2\mu a, \quad (1.31)$$

si se reemplaza (1.30) ó (1.31) en (1.29) y con $\alpha' = 1$

$$a + \beta' = \frac{a}{2}, \quad (1.32a)$$

$$\beta' = -\frac{a}{2}, \quad (1.32b)$$

con estas constantes ya determinadas se puede expresar la función $h(z)$ de la siguiente forma:

$$h(z) = \begin{cases} z - a/2 & z \geq a, \\ z^2/2a & -a \leq z \leq a, \\ -z - a/2 & z \leq -a, \end{cases} \quad (1.33)$$

tomando la función $h(z)$ definida arriba se puede generar un disco de poco grosor $2a$, el cual estará localizado en la región $-a \leq z \leq a$, de aquí se puede ver que la función $h(z)$ en $|z| > a$ es una función lineal de z de tal modo que $h'(z) = 1$ y por lo tanto sus segundas derivadas son cero.

Ya con la función $h(z)$ bien definida se encuentra la densidad de masa para esta función en particular, si se reemplaza (1.33) con la función para el interior del disco con el intervalo $-a \leq z \leq a$ en (1.20) se obtiene que la densidad de masa es:

$$\rho(R, z) = \frac{1}{4a^2 G \pi} [a \Phi_{,h} + (z^2 - a^2) \Phi_{,hh}], \quad (1.34)$$

donde $\Phi_{,h}$ indica la derivada del potencial gravitacional con respecto a la función h y por supuesto $\Phi_{,hh}$ es la doble derivada del potencial. La ecuación (1.34) representa la forma general de la densidad de masa de una galaxia gruesa axialmente simétrica, se ve que depende de las derivadas del potencial gravitacional con respecto a $h(z)$ y del parámetro a el cual debe ser siempre mayor que cero $a > 0$.

Capítulo 2

MODELOS PARTICULARES PARA LA DENSIDAD DE MASA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla una ecuación general para la densidad de masa en coordenadas esféricas, este desarrollo es posible gracias a las fórmulas de recurrencia que poseen los polinomios de Legendre, cabe aclarar que las fórmulas de recurrencia fueron manipuladas a nuestra conveniencia porque las ecuaciones que nos ofrecían los libros consultados [1], [2], [3] no eran del todo buenas para los resultados queridos, por ejemplo, las relaciones de recurrencia dependen del término $P_{n-1}(x)$, esto ocasionaría que los polinomios de Legendre para $n = 0$ no tengan un valor físico aceptable, por lo tanto esta será la parte cambiada además de la deducción completa de $P_{2n}''(x)$. Para terminar este capítulo, se calculan las densidades de masa particulares ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 , se incluyen las masas y sus respectivas gráficas.

2.1 MODELO GENERAL PARA LA DENSIDAD DE MASA EN COORDENADAS ESFÉRICAS

La ecuación general para el calculo de la densidad de masa esta dada por la ecuación (1.34):

$$\rho(R, z) = \frac{1}{4a^2G\pi} [a\Phi_{,h} + (z^2 - a^2)\Phi_{,hh}], \quad (2.1)$$

donde se necesita el potencial gravitacional de la galaxia en coordenadas esféricas, este potencial gravitacional esta dado por [8]:

$$\Phi(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}P_{2n}(\cos \theta)}{r^{(2n+1)}}, \quad (2.2)$$

donde P_{2n} es el polinomio de Legendre en coordenadas esféricas usuales, (r, θ) .

De (1.34), se ve que se necesita la primera y segunda derivada del potencial con respecto a h , estas derivadas son respectivamente:

$$\Phi_{,h} = \Phi_{,rr,\tilde{z}\tilde{z},h} + \Phi_{,\theta\theta,\tilde{z}\tilde{z},h}, \quad (2.3)$$

pero

$$h = \tilde{z} + b \longrightarrow \tilde{z}_{,h} = 1, \quad (2.4)$$

$$\Phi_{,hh} = \Phi_{,rr}(r,\tilde{z})^2 + \Phi_{,rr,\tilde{z}\tilde{z}} + \Phi_{,\theta\theta}(\theta,\tilde{z})^2 + \Phi_{,\theta\theta,\tilde{z}\tilde{z}}, \quad (2.5)$$

de las ecuaciones (2.3) y (2.5), se ve que se necesitan las derivadas de $r_{,\tilde{z}}$, $r_{,\tilde{z}\tilde{z}}$, $\theta_{,\tilde{z}}$ y $\theta_{,\tilde{z}\tilde{z}}$, estas derivadas son:

$$r_{,\tilde{z}} = \frac{\tilde{z}}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.6a)$$

$$r_{,\tilde{z}} = \cos \theta, \quad (2.6b)$$

$$r_{,\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{1}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tilde{z}^2}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.6c)$$

$$r_{,\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{1}{r} - \frac{\cos^2 \theta}{r}, \quad (2.6d)$$

donde las ecuaciones (2.6a) y (2.6c) están dadas en coordenadas cilíndricas y las ecuaciones (2.6b) y (2.6d) están dadas en coordenadas esféricas.

$$\theta_{,\tilde{z}} = -\frac{R}{R^2 + \tilde{z}^2}, \quad (2.7a)$$

$$\theta_{,\tilde{z}} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad (2.7b)$$

$$\theta_{,\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{2R\tilde{z}}{(R^2 + \tilde{z}^2)^2}, \quad (2.7c)$$

$$\theta_{,\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}. \quad (2.7d)$$

donde las ecuaciones (2.7a) y (2.7c) están dadas en coordenadas cilíndricas y las ecuaciones (2.7b) y (2.7d) están dadas en coordenadas esféricas. Para encontrar la ecuación general de la densidad de masa además de las anteriores ecuaciones, se necesitan las derivadas del potencial gravitacional,

como lo muestra la ecuación (1.34), estas derivadas son:

$$\Phi_{,r} = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C_{2n} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{r^{(2n+2)}}, \quad (2.8a)$$

$$\Phi_{,rr} = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(2n+2) C_{2n} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{r^{(2n+3)}}, \quad (2.8b)$$

$$\Phi_{,\theta} = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \frac{P'_{2n}(\cos \theta)}{r^{(2n+1)}}, \quad (2.8c)$$

$$\Phi_{,\theta\theta} = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \frac{P''_{2n}(\cos \theta)}{r^{(2n+1)}}, \quad (2.8d)$$

donde $P'(\cos \theta)$ indica derivada con respecto a θ .

Según [1], [2], la fórmula de recurrencia para la primera derivada del polinomio de Legendre es:

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad (2.9)$$

pero el último término de la ecuación (2.9) se puede reemplazar por:

$$nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x), \quad (2.10)$$

reemplazando, (2.10) en (2.9) se obtiene:

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - (n+1)xP_n(x). \quad (2.11)$$

También se necesita la segunda derivada del potencial gravitacional $\Phi_{,\theta\theta}$, para hallarla se tomará como base la derivada de la ecuación (2.11), esto se ve en la siguiente ecuación:

$$[(x^2 - 1)P'_n(x)]' = [(n+1)P_{n+1}(x) - (n+1)xP_n(x)]', \quad (2.12)$$

abriendo esta derivada se obtiene:

$$2xP'_n(x) + (x^2 - 1)P''_n(x) = (n+1)P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) - (n+1)xP'_n(x), \quad (2.13)$$

organizando un poco los términos de la ecuación, se llega a la siguiente expresión:

$$(x^2 - 1)P''_n(x) = (n+1)[P'_{n+1}(x) - P_n(x)] - (n+3)xP'_n(x) \quad (2.14)$$

donde $P'_n(x)$ es (2.11) y $P'_{n+1}(x)$ es:

$$(x^2 - 1)P'_{n+1}(x) = (n+2)[P_{n+2}(x) - xP_{n+1}(x)], \quad (2.15)$$

reemplazando (2.11) y (2.15) en (2.14), se obtiene:

$$(x^2 - 1)P_n''(x) = (n + 1) \left[\frac{(n + 2)(P_{n+2}(x) - xP_{n+1}(x))}{x^2 - 1} - P_n(x) \right] - \frac{(n + 3)(n + 1)x(P_{n+1}(x) - xP_n(x))}{x^2 - 1}, \quad (2.16)$$

organizando un poco la ecuación:

$$P_n''(x) = \frac{(n + 1)(n + 2)P_{n+2}(x) - (2n + 5)(n + 1)xP_{n+1}(x) + (n + 1)[(n + 2)x^2 + 1]P_n(x)}{(x^2 - 1)^2}, \quad (2.17)$$

reemplazando (2.6), (2.7), (2.11) y (2.17) en la ecuación (1.34) se obtiene:

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{4\pi Ga^2} \left\{ a \left[A \cos \theta + B \left(\frac{-\sin \theta}{r} \right) \right] + (z^2 - a^2) \left[D(\cos \theta)^2 + A \left(\frac{\sin^2 \theta}{r} \right) + E \left(\frac{-\sin \theta}{r} \right)^2 + B \left(\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) \right] \right\} \quad (2.18)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + 1)C_{2n}P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+2}}, \\ B &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}(2n + 1)[P_{2n+1}(\cos \theta) - \cos \theta P_{2n}(\cos \theta)]}{(\cos^2 \theta - 1)r^{2n+1}}, \\ D &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}(2n + 2)(2n + 1)P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+3}}, \\ E &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_{2n}(2n + 2)(2n + 1)P_{2n+2}(\cos \theta) - (4n + 5)(2n + 1) \cos \theta P_{2n+1}(\cos \theta)}{(\cos^2 \theta - 1)r^{2n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2n + 1)[(2n + 2) \cos^2 \theta + 1] P_{2n}}{(\cos^2 \theta - 1)r^{2n+1}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

organizando un poco los términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \rho(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi Ga^2} \left\{ a \cos \theta (1 + \sin \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)C_{2n}P_{2n}(\cos \theta)}{\sin \theta r^{2n+2}} \right. \\
 & - a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)C_{2n}P_{2n+1}(\cos \theta)}{\sin \theta r^{2n+2}} \\
 & + (z^2 - a^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) [\sin^2 \theta - (2n+2) \cos^2 \theta - 1] C_{2n}P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+3}} \\
 & - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+4)C_{2n}P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+3}} \\
 & + (z^2 - a^2) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(4n+7)C_{2n}P_{2n+1}(\cos \theta)}{r^{2n+3}} \\
 & \left. - (z^2 - a^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)C_{2n}P_{2n+2}(\cos \theta)}{r^{2n+3}} \right\}, \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

esta ecuación es la forma general para encontrar la densidad de masa está expresada en coordenadas esféricas, se puede apreciar que tiene una constante C_{2n} la cual aparecerá en cada uno de los términos particulares para la densidad de masa de cada disco, esta constante le aporta peso a la ecuación; para hacer la respectiva gráfica de los valores particulares de la densidad se debe pasar a coordenadas cilíndricas, esto es $\rho(r, \theta) \longrightarrow \rho(R, \tilde{z})$, y $\tilde{z} \longrightarrow z^2/2a + b$.

Para el cálculo de la masa de cada disco es necesario integrar la anterior ecuación (2.20) de la siguiente forma:

$$\tilde{M} = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a \int_0^{\infty} \tilde{\rho} R dR dz d\varphi, \tag{2.21}$$

donde $\tilde{\rho}$ es:

$$\tilde{\rho} = 4\pi Ga^2 \rho, \tag{2.22}$$

y \tilde{M} es:

$$\tilde{M} = 4\pi Ga^2 M \tag{2.23}$$

2.2 DENSIDADES DE MASA PARTICULARES

En la sección anterior se determinó la forma general de la densidad de masa para un disco galáctico grueso, esto es posible gracias a las relaciones de recurrencia que tienen los polinomios

de Legendre. En esta sección se verá como son las densidades de masa particulares y su respectivo comportamiento de forma gráfica todo esto basados en la ecuación (2.20).

2.2.1. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_0

Se toma la ecuación (2.20) y se reemplaza el valor de $n = 0$, con esto se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_0(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{a \cos \theta [1 + \sin \theta] C_0 P_0(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} - a \frac{C_0 P_1(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} + \right. \\ & (z^2 - a^2) \frac{[\sin^2 \theta - (2) \cos^2 \theta - 1] C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} - (z^2 - a^2) \frac{(2) C_0 P_2(\cos \theta)}{r^3} + \\ & \left. (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(7) C_0 P_1(\cos \theta)}{r^3} - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(4) C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

reemplazando los valores del polinomio de Legendre [8], [2], se obtiene una ecuación que se puede manipular matemáticamente cancelando términos similares, con esto se obtiene una ecuación simplificada la cual es:

$$\rho_0(r, \theta) = \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{a C_0 \cos(\theta)}{r^2} + \frac{(z^2 - a^2) C_0 [\sin^2(\theta) - 2 \cos^2(\theta)]}{r^3} \right\}, \quad (2.25)$$

pasando la ecuación (2.25) de coordenadas esféricas a las coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\rho_0(R, \tilde{z}) = \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{[3z^2 + 2a(b - a)] C_0}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} + \frac{3(a^2 - z^2) C_0 (z^2 + 2ab)^2}{4a^2 (R^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \right\}, \quad (2.26)$$

donde $\tilde{z} = z^2/2a + b$, a es el espesor del disco y b es el parámetro matemático que se utilizo para omitir la parte del espacio con singularidades, los dos parámetros son positivos. Cuando $b \geq a$, la densidad de masa es siempre positiva. La función $h(z)$ presentada en (1.33) es la función mas simple que cumple con las condiciones impuestas. La parte en el dominio de la función $|z| \leq a$ puede ser cambiada por la superposición de cada función de z , en el límite del disco $|z| = a$ esta nueva función necesita coincidir continuamente con funciones lineales de z , de tal forma que $h'(z) = 1$.

2.2.2. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_1

El cálculo de la siguiente expresión para la densidad de masa se realiza de igual manera a como se calculó la expresión (2.26), esto es: se corta la serie de la expresión (2.20) en $n = 1$, de

este modo se tiene la contribución de $n = 0$ en $\rho_0(r, \theta)$.

$$\begin{aligned} \rho_1(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi Ga^2} \left\{ \frac{a \cos \theta [1 + \sin \theta] C_0 P_0(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} + \frac{a \cos \theta [1 + \sin \theta] (3) C_2 P_2(\cos \theta)}{\sin \theta r^4} \right. \\ & - a \frac{(3) C_2 P_3(\cos \theta)}{\sin \theta r^4} + (z^2 - a^2) \frac{[\sin^2 \theta - (2) \cos^2 \theta - 1] C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} \\ & - a \frac{(1) C_2 P_1(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} + (z^2 - a^2) \frac{(3) [\sin^2 \theta - (4) \cos^2 \theta - 1] C_2 P_2(\cos \theta)}{r^5} \\ & - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(4) C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(3)(6) C_2 P_2(\cos \theta)}{r^5} \\ & + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(7) C_0 P_1(\cos \theta)}{r^3} + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(3)(11) C_2 P_3(\cos \theta)}{r^5} \\ & \left. - (z^2 - a^2) \frac{(2) C_0 P_2(\cos \theta)}{r^3} - (z^2 - a^2) \frac{(3)(6) C_2 P_4(\cos \theta)}{r^5} \right\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

reemplazando el valor de los polinomios de Legendre en la ecuación (2.27) y manipulando matemáticamente para reducir la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_1(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi Ga^2} \left\{ \frac{a C_0 \cos \theta}{r^2} + \frac{C_0 (z^2 - a^2) (1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3} \right. \\ & + \frac{3a C_2 \cos \theta (3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - 1)}{2r^4} \\ & \left. + \frac{3C_2 (z^2 - a^2) [(3 \cos^2 \theta - 1)(1 - 5 \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]}{2r^5} \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

pasando la ecuación (2.28) de coordenadas esféricas a las coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_1(R, \tilde{z}) = & \frac{1}{4\pi Ga^2} \left\{ \frac{a C_0 \tilde{z}}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} + \frac{C_0 (z^2 - a^2) (R^2 - 2\tilde{z}^2)}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} + \frac{3a C_2 \tilde{z} (2\tilde{z}^2 - R^2)}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{7/2}} \right. \\ & \left. + \frac{3C_2 (z^2 - a^2) [(2\tilde{z}^2 - R^2)(R^2 - 4\tilde{z}^2) + 2R^2(3\tilde{z}^2 - R^2)]}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{9/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

se ve en esta ecuación que la mayor parte de la densidad se encuentra concentrada en el centro del disco, esto se ve al hacer $z = 0$ y $R = 0$, los parámetros a como b son positivos, se ve también, que el denominador de las expresiones están siendo cada vez más grandes, es de esperar que entre más términos se escojan en la serie los términos del denominador serán mayores haciendo que la fracción sea mas pequeña, esto indica que la densidad de masa va disminuyendo y que la masa es finita cuando $R \rightarrow \infty$.

2.2.3. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_2

Se corta ahora la serie en $n = 2$ con esto se tiene las contribuciones de los anteriores términos, ó sea de $n = 0$, $n = 1$, se toma la ecuación general para la densidad de masa calculada en la

sección anterior (2.20), y se reemplaza el valor de $n = 2$.

$$\begin{aligned}
 \rho_2(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{C_0 P_0(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} + a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{(3)C_2 P_2(\cos \theta)}{\sin \theta r^4} \right. \\
 & + a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{(5)C_4 P_4(\cos \theta)}{\sin \theta r^6} - (z^2 - a^2) \frac{(2)C_0 P_2(\cos \theta)}{r^3} \\
 & - a \frac{(5)C_4 P_5(\cos \theta)}{\sin \theta r^6} + (z^2 - a^2) \frac{[\sin^2 \theta - (2) \cos^2 \theta - 1] C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(5) [\sin^2 \theta - (6) \cos^2 \theta - 1] C_4 P_4(\cos \theta)}{r^7} - a \frac{(3)C_2 P_3(\cos \theta)}{\sin \theta r^4} \\
 & - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(3)(6)C_2 P_2(\cos \theta)}{r^5} - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(5)(8)C_4 P_4(\cos \theta)}{r^7} \\
 & + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(7)C_0 P_1(\cos \theta)}{r^3} + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(3)(11)C_2 P_3(\cos \theta)}{r^5} \\
 & + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(5)(15)C_4 P_5(\cos \theta)}{r^7} - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(4)C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} \\
 & - (z^2 - a^2) \frac{(3)(4)C_2 P_4(\cos \theta)}{r^5} - (z^2 - a^2) \frac{(5)(5)C_4 P_6(\cos \theta)}{r^7} \\
 & \left. + (z^2 - a^2) \frac{(3) [\sin^2 \theta - (4) \cos^2 \theta - 1] C_2 P_2(\cos \theta)}{r^5} - a \frac{C_0 P_1(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} \right\}, \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

se reemplazan los respectivos valores de los polinomios de Legendre y manipulando algebraicamente en la ecuación (2.30), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \rho_2(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{a C_0 \cos \theta}{r^2} + \frac{3a C_2 \cos \theta (3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - 1)}{2r^4} \right. \\
 & + \frac{5a C_4 \cos \theta (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8r^6} + \frac{(z^2 - a^2) C_0 (1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3} \\
 & - \frac{3C_2 [(3 \cos^2 \theta - 1)(1 - 5 \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]}{2r^5} \\
 & - \frac{5C_4 (z^2 - a^2) (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) (1 - 7 \cos^2 \theta)}{8r^7} \\
 & - \frac{75a C_4 (z^2 - a^2) \sin^2 \theta \cos \theta (1 - 7 \cos^2 \theta)}{r^8} \\
 & \left. + \frac{75C_4 (z^2 - a^2) \sin^2 \theta [7 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta) + 2 \cos^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 3)]}{r^9} \right\}, \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

si se pasa la ecuación (2.31), de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \rho_2(R, \tilde{z}) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{aC_0 \tilde{z}}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} + \frac{3aC_2 \tilde{z}(2\tilde{z}^2 - 3R^2)}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{7/2}} \right. \\
 & + \frac{5aC_4 \tilde{z}(8\tilde{z}^4 - 24\tilde{z}^2 R^2 + 3R^4)}{8(R^2 + \tilde{z}^2)^{11/2}} + \frac{(z^2 - a^2)C_0(R^2 - 2\tilde{z})}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \\
 & + \frac{3C_2(z^2 - a^2) [(2\tilde{z}^2 - R^2)(R^2 - 4\tilde{z}^2) + 2R^2(3\tilde{z}^2 - R^2)]}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{9/2}} \\
 & + \frac{5C_4(z^2 - a^2)(8\tilde{z}^4 - 24\tilde{z}^2 R^2 + 3R^4)(R^2 - 6\tilde{z}^2)}{8(R^2 + \tilde{z}^2)^{13/2}} \\
 & - \frac{75aC_4(z^2 - a^2)R^2 \tilde{z}(4\tilde{z}^2 - 3R^2)}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{13/2}} \\
 & \left. + \frac{75C_4(z^2 - a^2)R^2(7\tilde{z}^4 - 21R^2 \tilde{z}^3 + 8\tilde{z}^2 - 6\tilde{z}^2 R^2)}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{15/2}} \right\}. \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

En esta expresión se puede apreciar lo concluido en la expresión (2.29), que a medida que se tienen en cuenta más términos en la serie inicial para la densidad de masa, ecuación (2.20), el denominador crece, haciendo de este modo que la fracción sea más pequeña, o en otras palabras la contribución hecha por el término $n = 2$ a la expresión (2.29) es mínima, esto es otra forma de decir que la densidad de masa está concentrada en el centro del disco y esto es un objetivo implícito en éste trabajo, también se ve que la densidad tiene una simetría con el eje z y que es axialmente simétrica pues en ningún resultado hasta el momento aparece una dependencia del ángulo.

2.2.4. CÁLCULO DE LA DENSIDAD DE MASA ρ_3

Esta es la última expresión que se tendrá en cuenta en este trabajo, si desean reproducir un término más o cualquier término se puede hacer con la expresión general para la densidad de masa (2.20), solo se debe expandir la serie hasta el término deseado y manipular los términos de la mejor manera. Al igual que en los anteriores términos, se reemplaza el valor de n donde se desea

cortar la serie, esto es:

$$\begin{aligned}
 \rho_3(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{C_0 P_0(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} + a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{(3)C_2 P_2(\cos \theta)}{\sin \theta r^4} \right. \\
 & + a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{(5)C_4 P_4(\cos \theta)}{\sin \theta r^6} + a \cos \theta (1 + \sin \theta) \frac{(7)C_6 P_6(\cos \theta)}{\sin \theta r^8} \\
 & - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(5)(8)C_4 P_4(\cos \theta)}{r^7} - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(7)(10)C_6 P_6(\cos \theta)}{r^9} \\
 & + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(5)(15)C_4 P_5(\cos \theta)}{r^7} + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(7)(19)C_6 P_7(\cos \theta)}{r^9} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{[\sin^2 \theta - (2) \cos^2 \theta - 1] C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} - a \frac{C_0 P_1(\cos \theta)}{\sin \theta r^2} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(3) [\sin^2 \theta - (4) \cos^2 \theta - 1] C_2 P_2(\cos \theta)}{r^5} - a \frac{(3)C_2 P_3(\cos \theta)}{\sin \theta r^4} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(5) [\sin^2 \theta - (6) \cos^2 \theta - 1] C_4 P_4(\cos \theta)}{r^7} - a \frac{(5)C_4 P_5(\cos \theta)}{\sin \theta r^6} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(7) [\sin^2 \theta - (8) \cos^2 \theta - 1] C_6 P_6(\cos \theta)}{r^9} - a \frac{(7)C_6 P_7(\cos \theta)}{\sin \theta r^8} \\
 & - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(4)C_0 P_0(\cos \theta)}{r^3} - (z^2 - a^2) \cos^2 \theta \frac{(3)(6)C_2 P_2(\cos \theta)}{r^5} \\
 & + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(7)C_0 P_1(\cos \theta)}{r^3} + (z^2 - a^2) \cos \theta \frac{(3)(11)C_2 P_3(\cos \theta)}{r^5} \\
 & - (z^2 - a^2) \frac{(5)(6)C_4 P_6(\cos \theta)}{r^7} - (z^2 - a^2) \frac{(7)(8)C_6 P_8(\cos \theta)}{r^9} \\
 & \left. - (z^2 - a^2) \frac{(2)C_0 P_2(\cos \theta)}{r^3} - (z^2 - a^2) \frac{(3)(4)C_2 P_4(\cos \theta)}{r^5} \right\}, \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

una vez expandida y cortada la serie, se reemplazan los polinomios de Legendre en la expresión anterior (2.33), luego se manipula algebraicamente para simplificar la ecuación, con esto se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \rho_3(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{aC_0 \cos \theta}{r^2} + \frac{(3)aC_2 \cos \theta (3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - 1)}{2r^4} \right. \\
 & + \frac{(5)aC_4 \cos \theta (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8r^6} + \frac{(z^2 - a^2)C_0(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3} \\
 & - \frac{(3)C_2 [(3 \cos^2 \theta - 1)(1 - 5 \cos^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]}{2r^5} \\
 & - a \frac{C_6 \cos \theta \frac{7}{16} (231 \cos^6 \theta - 315 \cos^4 \theta + 105 \cos^2 \theta - 5)}{r^8} \\
 & + a \frac{C_6 \cos \theta \sin^2 \theta \frac{1}{16} (1386 \cos^4 \theta - 1260 \cos^2 \theta + 210)}{r^8} \\
 & + \frac{(5)C_4(z^2 - a^2)(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)(1 - 7 \cos^2 \theta)}{8r^7} \\
 & - \frac{75aC_4(z^2 - a^2) \sin^2 \theta \cos \theta (1 - 7 \cos^2 \theta)}{r^8} \\
 & + \frac{75C_4(z^2 - a^2) \sin^2 \theta [7 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta) + 2 \cos^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 3)]}{r^9} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(7)C_6 \frac{1}{16} (231 \cos^6 \theta - 315 \cos^4 \theta + 105 \cos^2 \theta - 5)(1 - 9 \cos^2 \theta)}{r^9} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(2)C_6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{1}{16} (-1386 \cos^4 \theta + 1260 \cos^2 \theta - 210)}{r^9} \\
 & - (z^2 - a^2) \frac{(2)C_6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{1386}{16} (5 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{r^9} \\
 & + (z^2 - a^2) \frac{(2)C_6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{14}{16} (90 \cos^2 \theta - 277 \sin^2 \theta)}{r^9} \\
 & \left. + (z^2 - a^2) \frac{(2)(210)C_6 \sin^2 \theta \frac{1}{16} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{r^9} \right\}, \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

si se pasa la ecuación (2.34), de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \rho_3(R, \tilde{z}) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \left\{ \frac{a C_0 \tilde{z}}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} + \frac{(3) a C_2 \tilde{z} (2\tilde{z}^2 - 3R^2)}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{7/2}} \right. \\
 & + \frac{(5) a C_4 \tilde{z} (8\tilde{z}^4 - 24\tilde{z}^2 R^2 + 3R^4)}{8(R^2 + \tilde{z}^2)^{11/2}} + \frac{(z^2 - a^2) C_0 (R^2 - 2\tilde{z})}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{5/2}} \\
 & + \frac{(3) C_2 (z^2 - a^2) [(2\tilde{z}^2 - R^2)(R^2 - 4\tilde{z}^2) + 2R^2(3\tilde{z}^2 - R^2)]}{2(R^2 + \tilde{z}^2)^{9/2}} \\
 & + \frac{(5) C_4 (z^2 - a^2) (8\tilde{z}^4 - 24\tilde{z}^2 R^2 + 3R^4) (R^2 - 6\tilde{z}^2)}{8(R^2 + \tilde{z}^2)^{13/2}} \\
 & - \frac{75 a C_4 (z^2 - a^2) R^2 \tilde{z} (4\tilde{z}^2 - 3R^2)}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{13/2}} + \frac{231(7)(z^2 - a^2) C_6 \tilde{z}^6 (R^2 - 8\tilde{z}^2)}{16(R^2 + \tilde{z}^2)^{17/2}} \\
 & + \frac{75 a C_4 (z^2 - a^2) R^2 (7\tilde{z}^4 - 21R^2 \tilde{z}^3 + 8\tilde{z}^2 - 6\tilde{z}^2 R^2)}{(R^2 + \tilde{z}^2)^{15/2}} \\
 & + \frac{(7) a C_6 \tilde{z} [231\tilde{z}^6 - 315\tilde{z}^4 (R^2 + \tilde{z}^2) + 105\tilde{z}^2 (R^2 + \tilde{z}^2)^2 - 5(R^2 + \tilde{z}^2)^3]}{16(R^2 + \tilde{z}^2)^{15/2}} \\
 & + \frac{a C_6 \tilde{z} R^2 [1386\tilde{z}^4 - 1260\tilde{z}^2 (R^2 + \tilde{z}^2) + 210(R^2 + \tilde{z}^2)^2]}{16(R^2 + \tilde{z}^2)^{15/2}} \\
 & + \frac{(7)(z^2 - a^2) C_6 [-315\tilde{z}^4 (R^2 + \tilde{z}^2) + 105\tilde{z}^2 (R^2 + \tilde{z}^2)^2 - 5(R^2 + \tilde{z}^2)^3] (R^2 - 8\tilde{z}^2)}{16(R^2 + \tilde{z}^2)^{17/2}} \\
 & + \frac{(2)(z^2 - a^2) \tilde{z}^2 R^2 C_6 [-1386\tilde{z}^4 + 1260\tilde{z}^2 (R^2 + \tilde{z}^2) - 210(R^2 + \tilde{z}^2)^2]}{16(R^2 + \tilde{z}^2)^{17/2}} \\
 & \left. - \frac{(z^2 - a^2) R^2 C_6 [1386\tilde{z}^2 (5R^2 - \tilde{z}^2) + 14\tilde{z}^2 (90\tilde{z}^2 - 277R^2) + 210(R^2 - \tilde{z}^2)] (R^2 + \tilde{z}^2)}{16(R^2 + \tilde{z}^2)^{17/2}} \right\}. \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

En esta ecuación se puede afirmar todo lo que se ha venido concluyendo en las anteriores ecuaciones para las densidades de masa, pues aquí se ve claramente que el disco grueso que se está modelando tiene la mayor cantidad de masa concentrada en el centro, si se hace $R = 0$ la mayor cantidad de densidad de masa queda concentrada en el plano $z = 0$, y si se hace $z = 0$ se ve claramente que la densidad de masa en el infinito tiende a cero, esto indica que la masa de éste disco es finita, como se había dicho tiene una reflexión con respecto al eje z pues la función que define la masa en el interior del disco es par, hay que tener en cuenta los parámetros a y b son enteros positivos.

ρ	$a[Kpc]$	$b[Kpc]$	C_0	C_2	C_4	C_6	$\tilde{M} * 10^{37}$	$M[Kg] * 10^{48}$
Masa para ρ_0								
0	1	2.5	10				1337.2	31,897
0	1	1.5	1				104.68	2,497
0	0.5	0.5	1				490.86	11,709
Masa para ρ_1								
1	1	2.5	10	1			499.16	11,907
1	1	1.2	1	1			1.8	0,0429
1	1	2.5	15	8			748.74	17,851
1	0.5	5	10	8			24.46	0,583
Masa para ρ_2								
2	1	2.5	10	10	8		499.16	11,907
2	1	1.2	8	15	50		1956.472	46,669
2	0.5	3	8	15	25		38.52	0,918
2	2	1	1	1	1		409.523	9,768
Masa para ρ_3								
3	1	2.5	10	10	8	10	499.16	11,907
3	2.5	4	1	1	1	0.5	107.98	2,57
3	2.5	3	5	3	10	8	512.2	12,218
3	0.5	3	5	3	10	8	24.079	0,574

Tabla 2.1: Valores de los parámetros con los cuales se construyeron las gráficas y se calcularon las respectivas masas, $1Kpc = 3,086x10^{19}m$ y $G = 6,672x10^{-11}m^3Kg^{-1}s^{-2}$.

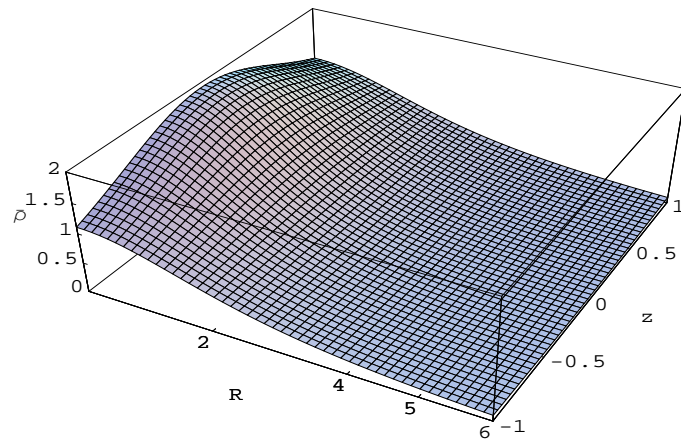


Figura 2.1: Gráfica de la densidad de masa para ρ_0 con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 10$.

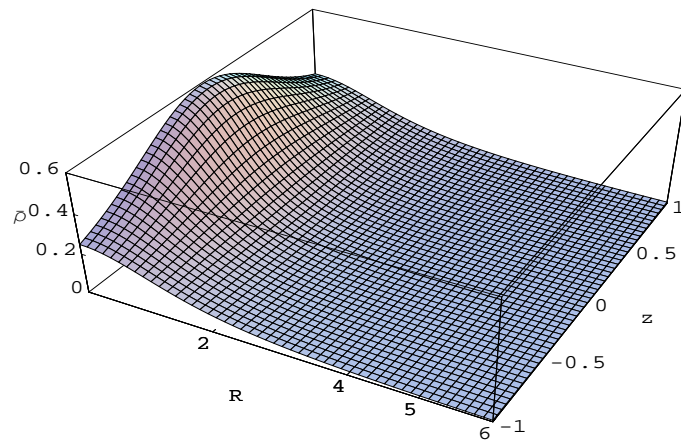


Figura 2.2: Gráfica de la densidad de masa para ρ_0 con $a = 1, b = 1,5, C_0 = 1$.

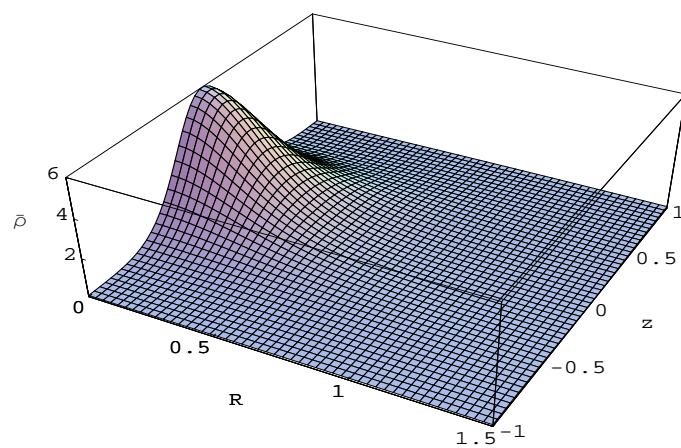


Figura 2.3: Gráfica de la densidad de masa para ρ_0 con $a = 0,5, b = 0,5, C_0 = 1$.

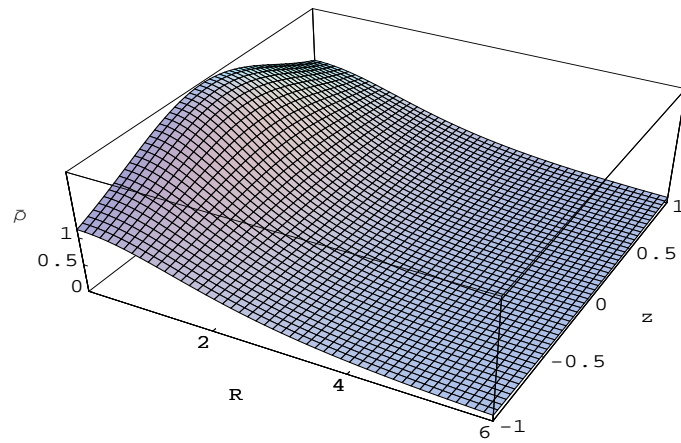


Figura 2.4: Gráfica de la densidad de masa para ρ_1 con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 10, C_2 = 1$.

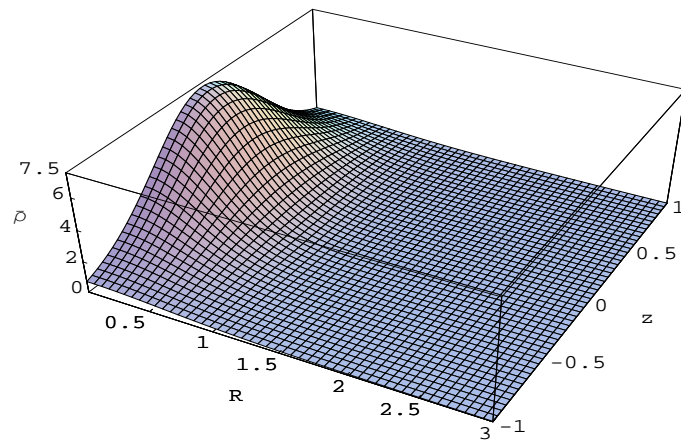


Figura 2.5: Gráfica de la densidad de masa para ρ_1 con $a = 1, b = 1,2, C_0 = 1, C_2 = 1$.

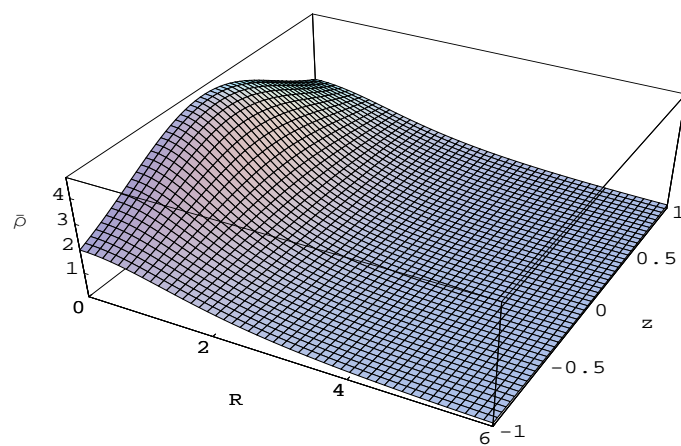


Figura 2.6: Gráfica de la densidad de masa para ρ_1 con $a = 1, b = 2,5, C_0 = 15, C_2 = 8$.

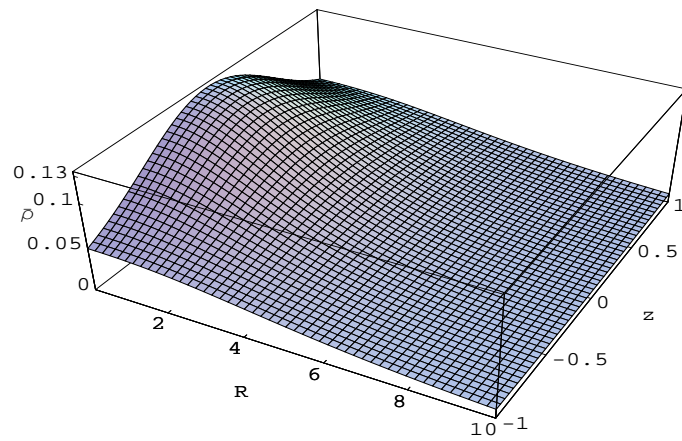


Figura 2.7: Gráfica de la densidad de masa para ρ_1 con $a = 0,5$, $b = 5$, $C_0 = 5$, $C_2 = 3$.

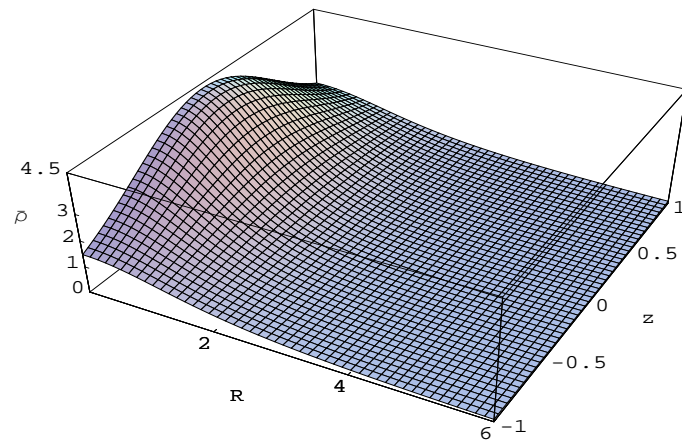


Figura 2.8: Gráfica de la densidad de masa para ρ_2 con $a = 1$, $b = 2,5$, $C_0 = 10$, $C_2 = 10$, $C_4 = 8$.

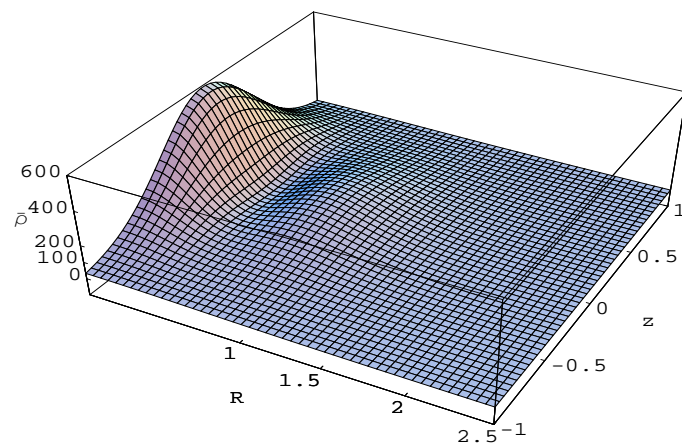


Figura 2.9: Gráfica de la densidad de masa para ρ_2 con $a = 1$, $b = 1,2$, $C_0 = 8$, $C_2 = 15$, $C_4 = 50$.

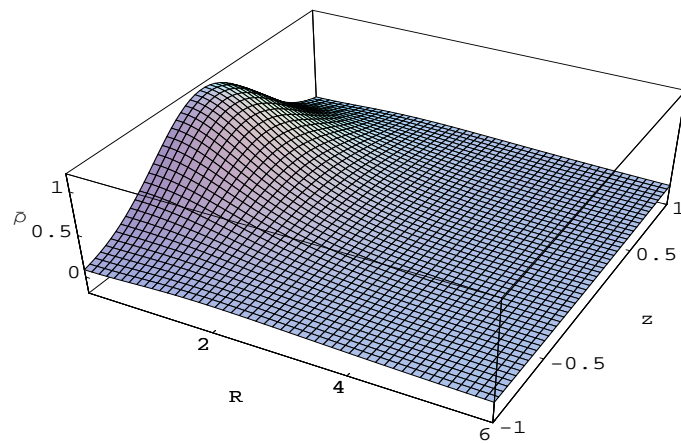


Figura 2.10: Gráfica de la densidad de masa para ρ_2 con $a = 0,5$, $b = 3$, $C_0 = 8$, $C_2 = 15$, $C_4 = 25$.

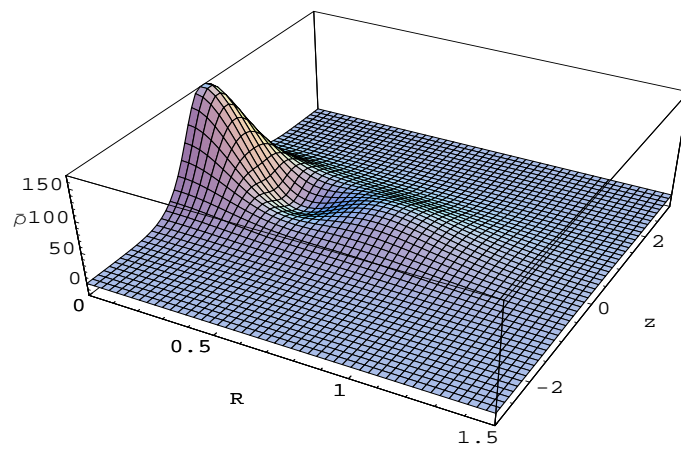


Figura 2.11: Gráfica de la densidad de masa para ρ_2 con $a = 2$, $b = 1$, $C_0 = 1$, $C_2 = 1$, $C_4 = 1$.

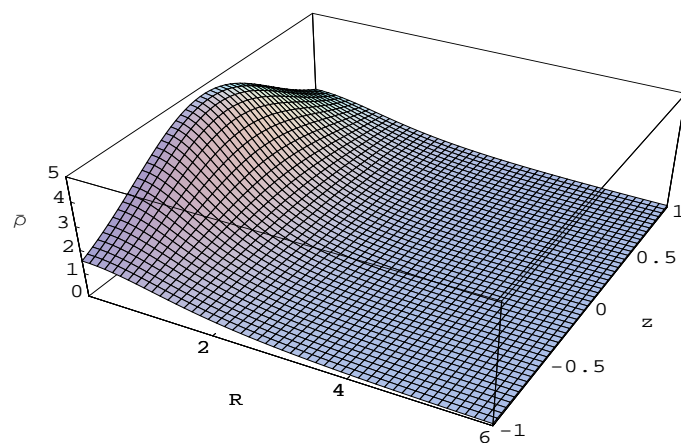


Figura 2.12: Gráfica de la densidad de masa para ρ_3 con $a = 1$, $b = 2,5$, $C_0 = 10$, $C_2 = 10$, $c_4 = 8$, $C_6 = 10$.

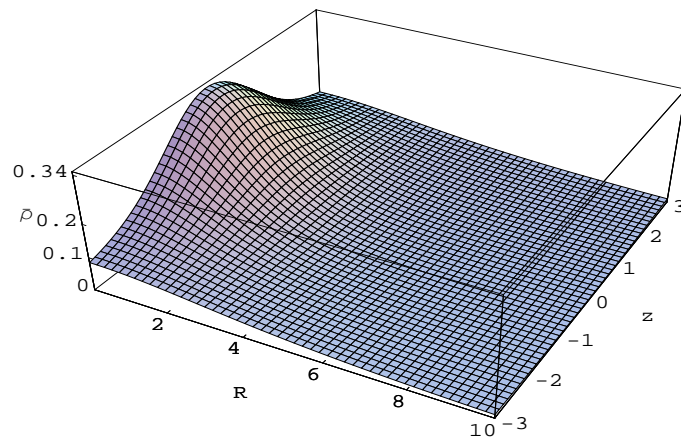


Figura 2.13: Gráfica de la densidad de masa para ρ_3 con $a = 2,5$, $b = 4$, $C_0 = 1$, $C_2 = 1$, $c_4 = 1$, $C_6 = 0,5$.

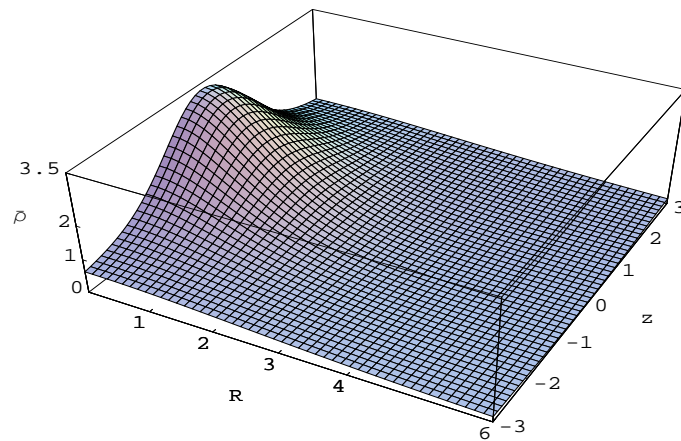


Figura 2.14: Gráfica de la densidad de masa para ρ_3 con $a = 2,5$, $b = 3$, $C_0 = 5$, $C_2 = 3$, $c_4 = 10$, $C_6 = 8$.

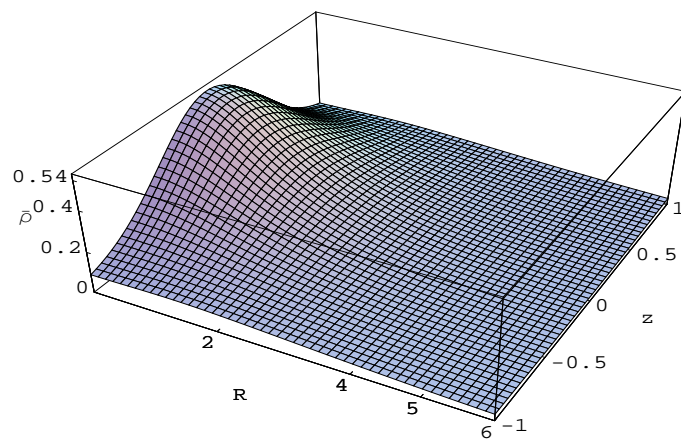


Figura 2.15: Gráfica de la densidad de masa para ρ_3 con $a = 0,5$, $b = 3$, $C_0 = 5$, $C_2 = 3$, $c_4 = 10$, $C_6 = 8$.

CONCLUSIONES

Para ver que resultados arroja este trabajo hay que analizar las ecuaciones de densidad de masa, cada una de ellas 2.26, 2.29, 2.32, 2.35 dejan ver que son axialmente simétricas, son funciones pares en z y tienen la mayor parte de la densidad de masa en el centro del disco, con un punto máximo en $(R = 0, z = 0)$ el cual disminuye a medida que R y z aumentan.

Al ver las gráficas de cada densidad calculada se ven comportamientos esperados, por ejemplo, que la densidad de masa para ρ_0 decaiga suavemente figura 2.1, aunque este comportamiento se puede alterar manipulando los parámetros que conforman la ecuación, como se puede ver en la figura 2.2, donde C_0 es cambiada, así mismo la gráfica cambia decayendo ahora de forma más precipitada que antes. Al ver el comportamiento de esta ecuación en el infinito se ve que la densidad de masa tiende a cero, esto indica que la masa del disco es finita, hipótesis cierta, la cual se comprueba al realizar los cálculos para determinar la masa de los discos construidos, ver tabla (2.1), para este disco con $b \geq a$ se garantiza que la densidad de masa siempre será positiva, en la figura 2.4 se hizo $a = 0,5$ y $b = 0,5$.

Si se analiza la densidad de masa de los demás discos calculados se observa un comportamiento similar al visto en ρ_0 , donde el primer término de cada ecuación es el que contribuye con el mayor porcentaje de densidad de masa, por ende contiene la mayor cantidad de masa. Como también es de esperarse la forma de sus respectivas gráficas decaen bruscamente, aunque al igual que para ρ_0 los parámetros se pueden ajustar para hacer que decaigan más suavemente, en estos discos, ρ_1, ρ_2, ρ_3 , la restricción de $b \geq a$ no se cumple, esto se ve en la figura 2.11 donde $a = 2$ y $b = 1$, la figura no presenta partes con densidad de masa negativas, esto se vé más claramente haciendo una ampliación a esta figura. Esto

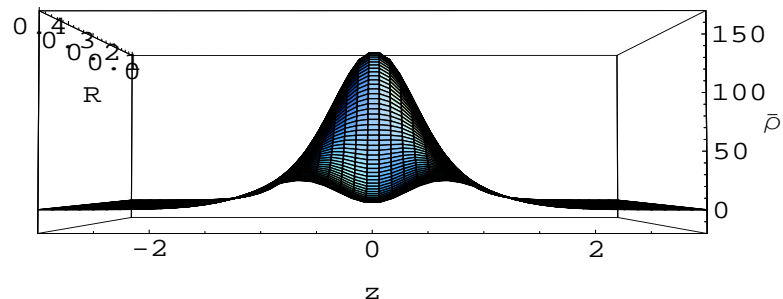


Figura 2.16: Vista de frente de la Fig 2.11 con un corte en $R = 0,4$

se debe a que estos discos contienen más términos que el disco para ρ_0 , estos términos adicionales hacen que la densidad de masa negativa de anule. Cabe aclarar que estos discos son de masa finita, ver Tabla 2.1.

En la figura 2.9 se ve un comportamiento interesante, en la cual existen ahora dos máximos para la densidad de masa, uno global en cual está situado en $R = 0, z = 0$ y uno local el cual surge en $R \neq 0, z = 0$, al generar todo el disco se puede entender ésta figura como una galaxia que contiene toda su masa en el centro y va decayendo cuando R y z aumentan, pero para un $z = 0$ y un R determinado, se encuentra una cantidad de masa significativa envolviendo la parte central de la galaxia como una especie de anillo. La figura 2.11 presenta también el mismo comportamiento con la diferencia que esta vez genera una galaxia con la parte central envuelta en tres anillos uno grande y dos más pequeños.

Es importante para este trabajo aclarar que de un concepto geométrico relativamente sencillo, como lo es el método de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión* y con la teoría newtoniana se pueden obtener modelos de galaxias delgadas o gruesas, donde si bien el radio de la galaxia no ha sido acotado de una manera rigurosa, el comportamiento de la misma galaxia indica que para un radio relativamente pequeño en comparación con su espesor, la densidad de masa es nula, dando como resultado una serie de galaxias que cumplen con todas las condiciones y propiedades que se le impusieron, además que el radio de las galaxias no es acotado de una forma netamente matemática si no de un concepto netamente físico, esto claro esta apoyado en las gráficas de densidad que se obtuvieron.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ABRAMOVITZ, M. and STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series. 55 (AMS-55), National Bureau of Standards, U. S. Department of Commerce (1978).
- [2] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press. Third edition (1985).
- [3] BATEMAN, H. *Partial Differential Equations*. Dever (1944).
- [4] BATEMAN, H. *Tables of Integrals, Vol II, Mc Graw Hill*.(1954).
- [5] BINNEY, J. and TREMAINE, S. *Galactic Dynamics*. Princeton, New Jersey (1987).
- [6] GONZALEZ, G. and LETELIER, P. *Exact general relativistic thick disks*. Physical review D 69, 044013 (2004).
- [7] GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. M. *Table of integrals, Series, and Products*. Academic Press New York and London. Fourth edition. (1965)
- [8] JACKSON J, D. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons Inc.(1962).
- [9] KELLOG, O.D. *Foundations of Potential Theory, Dover*.(1953).
- [10] KING I, R. *Astron. J., vol 71 pp 64* (1966).
- [11] KUZMIN, G. *Astron. Zh., vol 33 pp 27* (1956).
- [12] LEMOS, J, P. and LETELIER, P. *Exact general relativistic thick disks around black holes*. Physical review D Volume 49, Number 10(1994).
- [13] LETELIER, P. *Stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures*. Physical review V 183, number 5(1969).
- [14] LETELIER, P. and OLIVEIRA, R, S. *Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach*. Physical review D 71, 084030 (2005).
- [15] MARION, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Editorial Reverté. Segunda Edición (1995)
- [16] MIYAMOTO, M.S. and Nagai R. *Publ.Astron.Soc.Japan, vol 27, pp 533* (1975).

- [17] MOON, P. and SPENCER, D. *Field theory for Engineers. D. Van Nostrand Company.*(1961).
- [18] MORGAN, T. and MORGAN L. *The gravitational field of a disk.*(1986).
- [19] OSPINA, P, A.*Potencial gravitacional y densidad superficial para modelos planos de galaxias no axialmente simétricas.* Universidad Industrial de Santander(2006).
- [20] PLUMMER, H.C. *MNRAS, vol 28, pp 460-471* (1911).
- [21] RAMOS, J. *Solución General Estática Axialmente Simétrica de las Ecuaciones de Einstein en el Vacío en coordenadas Esferoidales Generalizadas.* Universidad Industrial de Santander. Trabajo de Grado en Física (2000).
- [22] REINA, J, I.*Potencial gravitacional, densidad superficial y velocidad circular para modelos planos de galaxias.* Universidad Industrial de Santander(2004).
- [23] ROBIN, C., HAYWOOD, M. CRÉZÉ, M., OJHIA, D. and BIENAYMÉ, O. *The thick disc of the Galaxy: Sequel of a merging event.* Astronomy and Astrophysics(1995) 9504090 v1.
- [24] SATOH, G. *Publ Astron. Soc Japan., vol 32 pp 41* (1980).
- [25] TOOMRE, A. *Astrophys. J, vol 138 pp 385* (1962).
- [26] VOGT, D. and LETELIER, P. *New models of general relativistic static thick disks.* Physical review D 71, 084030 (2005).
- [27] VOGT, D. and LETELIER, P. *Relativistic models of galaxies.* Astrom Soc, 0507406 v1,(2005).