

**REFINAMIENTO ADAPTATIVO PARA MALLAS ARBITRARIAS POLIGONALES
DE ELEMENTOS FINITOS**

OSCAR MAURICIO LEÓN URIBE

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA**

2016

**REFINAMIENTO ADAPTATIVO PARA MALLAS ARBITRARIAS POLIGONALES
DE ELEMENTOS FINITOS.**

OSCAR MAURICIO LEÓN URIBE

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Ingeniero
Mecánico**

**Director
ANDRÉS GONZÁLEZ ESTRADA
Ingeniero Mecánico, PhD.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA INGENIERIA MECÁNICA
BUCARAMANGA**

2016

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	13
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	14
1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	14
1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	14
1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN.....	14
2. OBJETIVOS.....	16
2.1 OBJETIVO GENERAL	16
2.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	16
3. MARCO TEÓRICO	17
3.1 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	17
3.2. MALLAS POLIGONALES	17
3.3 TESELACIÓN DE VORONOI	17
3.4 REFINAMIENTO ADAPTATIVO	18
3.5. VELOCIDAD DE CONVERGENCIA	19
4. PROBLEMA LINEAL ELÁSTICO POR MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS..	20
4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	20
4.2. DISCRETIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS.....	21
5. ERROR ESTIMADO EN NORMA ENERGÉTICA.....	25
5.1 ESTIMACIÓN DE ZIENKIEWICZ-ZHU	25
5.2 MLS RECOVERY	26
5.3 SATISFACCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA FRONTERA....	29
5.4 SATISFACCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO INTERNO.....	34

5.5 VISIBILIDAD	37
6. REFINAMIENTO.....	40
6.1 <i>H</i> - ADAPTATIVO	40
.2 CONVERGENCIA EN EL PROCESO ADAPTATIVO	40
7. ESTRATEGIAS DE REMALLADO	42
7.1. EQUIDISTRIBUCIÓN DEL ERROR EN ELEMENTOS DE LA NUEVA MALLA	42
7.2 ESTRATEGIA DE LI Y BETTES	42
7.3. ESTRATEGIA DE ZIENKIEWICZ AND ZHU	43
8. ALGORITMO DE REFINAMIENTO DE LA MALLA	44
9. RESULTADOS NUMERICOS.....	47
9.1. PLACA CUADRADA	47
9.1.1 Uniforme	49
9.1.2. Estrategia de Equidistribución.....	51
9.1.2 Estrategia de Li y Bettes	53
9.1.3. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu	55
9.2 CILINDRO DE PARED GRUESA BAJO PRESIÓN INTERNA	58
9.2.1 Uniforme	59
9.2.2 Estrategia de Equidistribución.....	62
9.2.3 Estrategia de Li y Bettes	64
9.2.4 Estrategia de Zienkiewicz y Zhu	66
9.3. DOMINIO EN FORMA DE L BAJO CARGAS TIPO I.....	69
9.3.1 Uniforme	71
9.3.2 Estrategia de Equidistribución.....	73
9.3.3. Estrategia de Li y Bettes	75
9.3.4. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu	77
10. CONCLUSIONES	82
BIBLIOGRAFIA.....	88

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1	Representación del diagrama de Voronoi entre dos puntos.....	18
Figura 2	Diagrama Voronoi de un punto P.	24
Figura 3	Soporte MLS con condiciones de frontera aplicada a los puntos más cercanos de frontera.	30
Figura 4	Cumplimiento del equilibrio en la frontera	33
Figura 5	Esquema básico de refinamiento	44
Figura 6	Selección de h_e antes y después de realizado el refinamiento.	45
Figura 7	Diagrama de flujo del proceso de refinamiento.	46
Figura 8	Placa cuadrada de 2x2.....	48
Figura 9	Placa cuadrada. Efectividad en cada elemento. Refinamiento Uniforme.	49
Figura 10	Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento Uniforme.	50
Figura 11	Placa cuadrada Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.	51
Figura 12	Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo Estrategia Equidistribución.	52
Figura 13	Placa cuadrada. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettles.	53
Figura 14	Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettles.....	54
Figura 15	Placa cuadrada. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo Estrategia de Zienkiewicz y Zhu.	55
Figura 16	Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu.	56
Figura 17	Placa cuadrada. Esfuerzos σ^* representados sobre los puntos de integración.	56

Figura 18	Placa cuadrada. Error estimado global vs el número de grados de libertad para la placa con diferentes técnicas.	57
Figura 19	muestra las curvas de velocidad de convergencia, para este problema en particular.	57
Figura 20	Cilindro de pared gruesa bajo presión interna en deformación plana.	58
Figura 21	Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento Uniforme.	60
Figura 22	Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento Uniforme.	61
Figura 23	Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.	62
Figura 24	Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.	63
Figura 25	Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.	64
Figura 26	Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.	65
Figura 27.	Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu.	66
Figura 28	Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.	67
Figura 29	Cilindro. Esfuerzos σ^* representados sobre los puntos de integración.	67
Figura 30	Cilindro. Error global vs el número de grados de libertad en escala logarítmica para diferentes estrategias de refinamiento.	68
Figura 31	podemos ver las curvas que representan la velocidad de convergencia de cada estrategia, las tres de refinamiento adaptativo presentan una pendiente más pronunciada que la de refinamiento uniforme. Datos tomados de	68
Figura 32	Esquema dominio en forma de L.....	70

Figura 33	Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento Uniforme.	71
Figura 34	Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento Uniforme.	72
Figura 35	Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.	73
Figura 36	Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.	74
Figura 37	Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.	75
Figura 38	Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.	76
Figura 39	Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz.	77
Figura 40	Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz.	78
Figura 41	Integración.	79
Figura 42	Dominio en L. Velocidad de convergencia de cada estrategia.	79

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Placa cuadrada. Error global estimado ees y número de grados de libertad (DOF).	49
Tabla 2. Placa cuadrada. Pendientes promedios para las diferentes estrategias.	57
Tabla 3. Cilindro. Error global estimado y número de grados de libertad.	59
Tabla 4. Pendientes promedios para las diferentes estrategias.....	68
Tabla 5. Dominio en L. Error global estimado y número de grados de libertad.	70
Tabla 6. Dominio en L. Pendientes de curvas de velocidad de convergencia. .	80

RESUMEN

TÍTULO: REFINAMIENTO ADAPTATIVO PARA MALLAS ARBITRARIAS POLIGONALES DE ELEMENTOS FINITOS*

AUTORES: OSCAR MAURICIO LEÓN URIBE**

PALABRAS CLAVE: Elementos finitos, mallas poligonales, voronoi, refinamiento h -adaptativo, error.

DESCRIPCIÓN:

En el documento se presenta un estimador de error en norma energética para elementos finitos poligonales, basado en celdas Voronoi, junto con una técnica de reconstrucción del campo de esfuerzos basada en una formulación ponderada de mínimos cuadrados y una técnica para la reconstrucción del campo singular que se utilizará en problemas con singularidades. Se utilizan tres estrategias de refinamiento h -adaptativo que buscan obtener una distribución uniforme del error estimado en norma energética por toda la malla.

Se presentan tres ejemplos en dos dimensiones con solución exacta los cuales se analizan con elementos finitos poligonales. Posteriormente se aplica el refinamiento adaptativo en busca de la malla óptima y se compara con el refinamiento uniforme. Se presentan los resultados, se hace la evaluación de la velocidad de convergencia para los tres ejemplos y para cada estrategia de refinamiento, para esto se realizan tablas y graficas del número de grados de libertad y el error estimado global en norma energética y se presentan graficas del índice de efectividad local y el error estimado en norma energética a nivel de elemento para visualizar la distribución de este en el dominio y observar en que zonas el refinamiento adaptativo se concentra y por ende el número de elementos.

* Trabajo de grado

** Facultad De Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela Ingeniería Mecánica. Director: Andrés González Estrada

ABSTRACT

TITLE: ADAPTIVE MESH REFINEMENT FOR ARBITRARY POLYGONAL MESH OF FINITE ELEMENTS.

AUTHOR: OSCAR MAURICIO LEÓN URIBE

KEY WORDS: FINITE ELEMENTS, POLYGONAL MESH, VORONOI, *H*-ADAPTIVE REFINEMENT, ERROR.

Description

In this document we present an error estimator in the energy norm for polygonal finite elements, based on Voronoi cells, considering a moving least squares recovery-based procedure and a stress splitting technique for singular problems. We use three strategies of mesh subdivision for *h*-adaptive refinement with error equidistribution criteria.

Three benchmark problems are shown, which are analyzed with polygonal finite elements. The adaptive refinement is applied looking for the optimal mesh and, then, compared with uniform refinement. The convergence rate is evaluated for the three problems and for each *h*-adaptive refinement strategy, for these examples we make tables and graphics presenting the number of degrees of freedom vs the global error in the energy norm and graphics with the local effectivity index and the local error in the energy norm in order to visualize the error distribution and element distribution over the mesh.

For the thick-walled cylinder subject to an internal pressure and for the I-shaped domain under mode I loading the polygonal finite elements present an improvement over the uniform refinement that can be visualized in the different graphics and tables for each example, the convergence rate is twice in *h*-adaptive refinement than uniform refinement which proves that the method works.

** Work degree

** Faculty of Physical-Mechanical Engineering. Mechanical Engineering School. Director: Andrés González Estrada

INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos es muy utilizado por la comunidad ingenieril hoy en día, ya que permite la solución de problemas físicos mediante la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Pero como toda aproximación lleva con ella asociada un error, la cuantificación de este y la validación del método numérico se hace de vital importancia, para esto se han desarrollado estimadores de error cada vez más confiables y precisos, y mejores técnicas para el control de este.

En la búsqueda de constantes mejoras del método se ha abierto una nueva rama de este, que es llamada elementos finitos poligonales, donde se implementan elementos de n -lados [1],[2],[3], [4] que proveen mayor flexibilidad en el mallado y una mejora en la precisión de la solución [5].

En el siguiente documento se presentan tres ejemplos en dos dimensiones utilizando elementos finitos poligonales, junto con tres estrategias de refinamiento h -adaptativo [6], [7], [8], en busca de obtener una malla óptima para el problema en particular [6],[9]. Para la estimación y cuantificación del error se utiliza el método presentado por González y Natarajan [10]. Una vez realizada la explicación del proceso se presentaran los resultados para mostrar la validación numérica de la formulación desarrollada.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En los últimos años se han desarrollado nuevos métodos numéricos que permiten mallas de elementos finitos definidas mediante elementos poligonales con un número arbitrario de lados. El propósito fundamental es aliviar las restricciones de los algoritmos de mallado, a la vez que mejorar la precisión del método numérico. En general, los métodos numéricos llevan asociado un error de aproximación que es necesario cuantificar y controlar para validar los resultados de la simulación.

1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Cuantificar y controlar el error es un aspecto muy importante dentro del análisis numérico de cualquier problema ya que de esta manera podemos estimar que tan exactos fueron los resultados obtenidos por lo que este proyecto representaría un gran avance para el desarrollo de métodos basados en elementos finitos poligonales.

Por otra parte, se pretende aumentar y fomentar la investigación en la mecánica computacional dentro de la Escuela.

1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

El análisis del error en mallas de elementos finitos convencionales nos hace pensar que un refinamiento adaptativo en mallas poligonales puede ser de gran ayuda para lograr una mayor exactitud con este método. En la Escuela se tiene

experiencia en el desarrollo de estimadores de error de tipo recovery, por lo cual se escogen como punto de partida para la creación de un algoritmo adaptativo. Por otro lado, los proyectos de investigación enfocados al desarrollo de software para ingeniería puede motivar a la comunidad estudiantil a vincularse más en este tipo de actividades, con un posible impacto en la región al estimular otros sectores productivos.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Contribuir con la misión de la Universidad Industrial de Santander de formar profesionales con capacidad de innovación e investigación, alta calidad ética, política y profesional, mediante la investigación y el desarrollo de una herramienta de refinamiento adaptativo para controlar el error y mejorar la precisión de aproximaciones basadas en elementos finitos con formas poligonales arbitrarias.

2.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Desarrollar una técnica de refinamiento adaptativo para mallas poligonales de elementos finitos basada en la reconstrucción de la solución en tensiones.
- Reducir el error en el análisis de elementos finitos con elementos poligonales para validar la precisión de los cálculos numéricos, con el valor del error final definido por el usuario como función objetivo.
- Obtener el valor de la velocidad de convergencia para mallas poligonales con refinamiento h-adaptativo y refinamiento uniforme.
- Evaluar el desempeño de la técnica propuesta utilizando tres problemas con solución analítica: placa cuadrada sometida a cargas externas, cilindro con presión interna y dominio en forma de L bajo cargas tipo I.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física. El MEF está pensado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. Este se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos.

3.2. MALLAS POLIGONALES

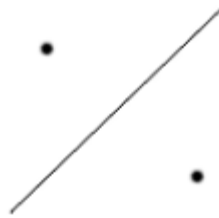
Son mallas que están compuestas por elementos de diferente número de lados, pueden ser hexágonos, pentágonos, etc. Se encuentran conectados por sus vértices comunes y dan forma a una superficie. La generación de estas mallas se puede realizar, por ejemplo, con la teselación de Voronoi.

3.3 TESELACIÓN DE VORONOI

Dado un conjunto de puntos p_1, p_2, \dots, p_n pertenecientes al plano S , un diagrama de Voronoi divide el plano en n regiones de Voronoi.

Los puntos p_1, p_2, \dots, p_n son llamados regiones de Voronoi. El diagrama de Voronoi para dos puntos es construido fácilmente, dibujando una perpendicular a la línea que une los puntos.

Figura 1 Representación del diagrama de Voronoi entre dos puntos.



Tal que este diagrama de dos regiones de Voronoi es denotado como $V(p_i)$ y $V(p_j)$. En general una región de Voronoi $V(p_i)$ es definida como la intersección de $n - 1$ planos medios, formados tomando la perpendicular al segmento $p_i p_j$ para $p_j \in S$ donde $i \neq j$.

3.4 REFINAMIENTO ADAPTATIVO

El refinamiento adaptativo hace referencia a una serie de métodos utilizados para la disminución de los errores estimados globales y a nivel de elemento de la malla, una vez la solución de elementos finitos ha sido obtenida. Estos métodos fueron introducidos inicialmente por Babuska y Rheinboldt [11]. Su objetivo es obtener errores bajos con el mínimo esfuerzo computacional generando cambios a una malla de forma continua. Se han desarrollado procedimientos fundamentados básicamente en generar mallas óptimas, aplicando criterios de distribución uniforme del error de discretización, o mediante técnicas que buscan minimizar el número de grados de libertad en la nueva malla.

Existen principalmente dos métodos para el refinamiento:

- El refinamiento tipo p en el cual utilizamos el mismo tamaño de elemento pero cambiamos el orden polinomial de este.
- El refinamiento tipo h en el cual se utiliza el mismo tipo de elemento, pero su tamaño es cambiado para obtener el resultado de error esperado, esta técnica es la que va a ser utilizada en este trabajo, por lo que más adelante se explicará con más profundidad.

3.5. VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

La velocidad de convergencia es la relación que dice cómo va a cambiar el error en los elementos o en la malla en función del tamaño de estos, ya que tenemos que si el tamaño de los elementos tiende a cero el error también tenderá a este valor. Esta velocidad de convergencia se verá representada como la pendiente de la gráfica de error global vs número de grados de libertad en la parte final de este documento en la sección de resultados numéricos, el valor de esta es una señal de que tan efectivo es el método de refinamiento utilizado.

4. PROBLEMA LINEAL ELÁSTICO POR MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección introducimos el problema bidimensional lineal elástico al cual el procedimiento propuesto es aplicado. Usando notación de Voigt, denotamos los esfuerzos de Cauchy $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T$, el desplazamiento por \mathbf{u} y la deformación por $\boldsymbol{\varepsilon}$. Todos estos campos están definidos por un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, el cual tiene una frontera denotada por $\partial\Omega$. Las tracciones dadas denotadas como \mathbf{t} , son impuestas sobre límites de Neumann, Γ_N , mientras que los desplazamientos, denotados por $\bar{\mathbf{u}}$, son prescritos sobre una parte complementaria del límite Γ_D y la carga volumétrica es denotada como \mathbf{b} . El problema elástico toma la siguiente forma:

- Admisibilidad estática

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{En } \Omega \quad (1)$$

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \quad \text{En } \Gamma_N \quad (2)$$

Donde \mathbf{L} es el operador diferencial para la elasticidad lineal y \mathbf{G} es el operador de proyección. Este proyecta el campo de esfuerzo dentro del de tracciones sobre los límites considerando el unitario normal \mathbf{n} respecto a Γ_N de tal manera que

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

- Admisibilidad Cinética

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{En } \Gamma_D \quad (3)$$

- Relación constitutiva

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad \text{En } \Omega \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{En } \Omega \quad (5)$$

Donde el operador \mathbf{D} contiene los coeficientes de elasticidad de la ley constitutiva lineal isotrópica, relacionando esfuerzos y deformaciones, $\boldsymbol{\sigma}_0$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ son esfuerzos y deformaciones iniciales respectivamente.

Usando la notación introducida en [12] el problema de arriba toma la forma variacional primordial:

Encontrar $\mathbf{u} \in (V + \{\mathbf{w}\})$ de forma que $\forall \mathbf{v} \in V$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

Donde $V = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}$ y \mathbf{w} son un campo de desplazamiento particular cumpliendo las condiciones de frontera de Dirichlet.

4.2. DISCRETIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

Vamos a introducir una forma clásica de discretización del elemento finito para el problema elástico. El campo de desplazamiento aproximado \mathbf{u}^h es buscado en un espacio de dimensiones finitas $(V^h + \{\mathbf{w}\}) \subset (V + \{\mathbf{w}\})$ tal que V^h es abarcado por funciones de forma del elemento finito localmente soportadas.

Usando el esquema de Galerkin, la formulación variacional (6) es reescrita de la forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h) d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{t} dT + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega
\end{aligned} \tag{7}$$

El cual puede ser resuelto usando formulación clásica de elementos finitos [13]. El uso de elementos poligonales necesita el procesamiento de funciones de forma que satisfagan todas las siguientes propiedades: no negativas, interpolables, partición de la unidad y completitud.

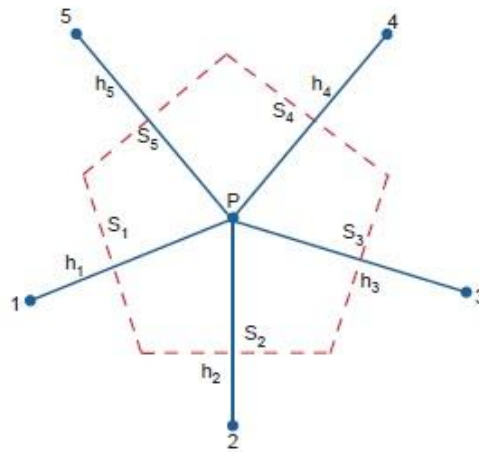
Aproximaciones sobre polígonos arbitrarios: Wachspress [14] introdujo el concepto de definir las funciones básicas en cualquier, el cual también produce interpoladores en polígonos de forma cóncava o convexa. Las funciones de forma de Wachspress son poco convencionales comparadas con las polinomiales usadas en elementos finitos. Los interpoladores que son basados en diagramas Voronoi fueron primero propuestos por Sibson [15]. Los interpoladores de Voronoi han sido adoptados en una vasta área de la mecánica [16], [17], [18], [19]. Chris et al [20] fueron los primeros en proponer el término de frontera a distancia ponderada durante sus estudios en latitudes aleatorias. A finales de los 90s, el interpolador fue redescubierto independientemente por Belikov et al [21] (interpolador de Sibson) y Hiyoshi et al [22] (interpoladores de Laplace). La interpolación de Laplace es también una interpolación basada en elementos cercanos. En este estudio solo consideramos interpoladores de Laplace con asignación isoparametrica. Los interpoladores de Laplace son también llamados interpoladores vecinos [15], [18], [5]. Esto provee una función natural para la distribución de nodos espaciados irregularmente. Para un punto P con n vecinos, las funciones de forma de Laplace para el nodo P_i pueden ser escritas como en [9]:

$$\phi_I(x) = \frac{\alpha_I(\mathbf{x})}{\sum_{I=1}^n \alpha_I(\mathbf{x})}, \alpha_I(\mathbf{x}) = \frac{s_I(\mathbf{x})}{h_I(\mathbf{x})}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (8)$$

Donde $\alpha_I(\mathbf{x})$ es la función de ponderación de Laplace, $s_I(\mathbf{x})$ es la longitud del borde de la celda Voronoi P_I y $h_I(\mathbf{x})$ es la distancia Euclidiana entre P y P_I (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Integración Numérica Las funciones de forma sobre polígonos arbitrarios son polinomios racionales, por lo tanto la formulación de reglas de integración eficientes presenta un desafío particular. Este problema ha recibido mucha atención en los años recientes [5], [23], [24], [25]. Como lo evidencia la creciente literatura. Una solución potencial es dividir el elemento en triángulos y usar las reconocidas reglas de cuadratura para la integración sobre triángulos [5]. La subdivisión es introducida solamente para facilitar la integración numérica y no introduce variables desconocidas adicionales. Aunque directamente, este proceso involucra una asignación isoparamétrica de dos niveles y depende que la matriz del Jacobiano envuelta en la transformación sea positiva. Lyness y Monegato [26] presentaron reglas de cuadratura para regiones hexagonales simétricas. Natarajan et al [23] proponen una técnica de integración numérica sobre polígonos arbitrarios basados en asignación compleja. Este procedimiento elimina la necesidad de una asignación isoparamétrica de dos niveles mientras se garantiza que el jacobiano sea positivo.

Figura 2 Diagrama Voronoi de un punto P.



Pero es restringido a solamente dos dimensiones. Sommariva y Vianello [27] presento a una curvatura como la de Gauss sobre polígonos arbitrarios. Mousavi et al. [24] presento un algoritmo numérico basado teoría grupal y optimización para procesar las reglas de cuadratura sobre polígonos arbitrarios, y recientemente Thiagarajan y Shapiro [28] presentaron un esquema para la integración numérica adaptativa ponderada sobre dominios arbitrarios. Para el presente estudio, empleamos sub triangulación del dominio poligonal, a menos que sea indicado de otra manera.

5. ERROR ESTIMADO EN NORMA ENERGÉTICA

5.1 ESTIMACIÓN DE ZIENKIEWICZ-ZHU

Ante la ausencia de otro tipo de errores, el error de discretización de elementos finitos es definido como $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$. Para cuantificar la calidad de \mathbf{u}^h uno de los estándares utilizados es el de evaluar la norma energética de \mathbf{e} , la cual es definida como:

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}) d\Omega \quad (9)$$

Si introducimos el error en el campo de esfuerzos $\mathbf{e}_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h$, donde el campo de esfuerzos de elemento finito esta dado por $\boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$, y hacer uso de la relación constitutiva, la expresión previa puede ser escrita como

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{e}_{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_{\sigma} d\Omega \quad (10)$$

Por medio de Zienkiewicz y Zhu [36], una estimación, ε , del error exacto medido, $\|\mathbf{e}\|$, puede ser obtenido introduciendo la aproximación.

$$\|\mathbf{e}\|^2 \approx (\varepsilon)^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{e}_{\sigma}^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{e}_{\sigma}^*) d\Omega \quad (11)$$

Donde el error de esfuerzo aproximado \mathbf{e}_{σ}^* esta definido como $\mathbf{e}_{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ siendo el campo de esfuerzo reconstruido. Si $\boldsymbol{\sigma}^*$ converge a la solución exacta con un grado más alto (súper convergencia) más que la solución de esfuerzos en FE, entonces, el ZZ estimado es asintóticamente exacto, queriendo decir que el error aproximado tiende hacia un error exacto realizando el refinamiento de la malla.

Esta estimación no garantiza propiedades de contorno a menos que el campo reconstruido sea estáticamente admisible, en ese caso este coincide (formalmente) con la relación constitutiva del error [29], [30] y el enfoque residual equilibrado [31], ambos considerados difíciles de implementar. La característica más llamativa del enfoque ZZ en la estimación de error es que técnicas bastante sencillas de reconstrucción, basadas en suavizado de esfuerzos llevan a buenas efectividades, lo cual explica la popularidad de este método en la comunidad ingenieril. Sin embargo, las técnicas básicas de reconstrucción basadas en suavizado, tales como el SPR original, el cual solo usa los resultados del FE para la reconstrucción, provee buena efectividad global pero presenta una baja precisión local. Por ejemplo el SPR no usa información sobre el contorno, donde las tracciones impuestas son conocidas y los patches pueden tener un número reducido de elementos, por lo tanto lleva a una conocida pérdida en la precisión de las tensiones reconstruidas sobre los contornos de Neumann. Esta falta de precisión a nivel local es un gran problema en aplicaciones de ingeniería donde los límites de esfuerzo son de interés, y hace esas estimaciones tan sencillas, difíciles de utilizar para manejar adaptatividad.

5.2 MLS RECOVERY

La técnica MLS está basada en una formulación parcial ponderada de mínimos cuadrados con el fin de evaluar puntos donde el valor de la función es pedido. La técnica utiliza una expansión polinomial para cada uno de los componentes obtenidos del campo de esfuerzos de la siguiente forma:

$$\sigma_i^*(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{a}_i(x) \quad i = xx, yy, xy \quad (12)$$

Donde \mathbf{p} representa una base polinomial y \mathbf{a}_i son coeficientes desconocidos.

$$\mathbf{p}(x) = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \dots\} \quad (13)$$

$$\mathbf{a}_i(x) = \{a_{0_i}(x) a_{1_i}(x) a_{2_i}(x) a_{3_i}(x) a_{4_i}(x) a_{5_i}(x) \dots\}^T \quad (14)$$

Para dos dimensiones, la expresión para evaluar el campo de esfuerzos recuperado se escribe como:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^*(x) \\ \sigma_{yy}^*(x) \\ \sigma_{xy}^*(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{xx}(x) \\ \mathbf{a}_{yy}(x) \\ \mathbf{a}_{xy}(x) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

El formato de (15) considerando los tres componentes del vector de esfuerzos en una sola ecuación, resultará para útil colocar las restricciones necesarias para satisfacer las ecuaciones de equilibrio.

Suponga que $\boldsymbol{\chi}$ es un punto dentro de Ω_x , siendo Ω_x el soporte correspondiente al punto x definido por la distancia (radio) R_{Ω_x} . La aproximación MLS para cada componente del esfuerzo en $\boldsymbol{\chi}$ está dado por

$$\sigma_i^*(x, \boldsymbol{\chi}) = \mathbf{p}(\boldsymbol{\chi})\mathbf{a}_i(x) \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Omega_x, \quad i = xx, yy, xy \quad (16)$$

Para obtener los coeficientes \mathbf{A} hemos tenido que adoptar una *Aproximación Continua de Mínimos Cuadrados en Movimiento* descrita en [32]. La siguiente fórmula es minimizada:

$$J(x) = \int_{\Omega_x} W(x - \boldsymbol{\chi}) [\sigma^*(x, \boldsymbol{\chi}) - \sigma^h(\boldsymbol{\chi})]^2 d\boldsymbol{\chi} \quad (17)$$

Evaluando $\partial J / \partial \mathbf{A} = 0$ resulta en el sistema lineal $\mathbf{M}(x)\mathbf{A}(x) = \mathbf{G}(x)$ usado para

evaluar \mathbf{A} , donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(x) &= \int_{\Omega_x} W(x - \boldsymbol{\chi}) \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\chi}) \mathbf{P}(\boldsymbol{\chi}) d\boldsymbol{\chi} \\ \mathbf{G}(x) &= \int_{\Omega_x} W(x - \boldsymbol{\chi}) \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\chi}) \boldsymbol{\sigma}^h(\boldsymbol{\chi}) d\boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (18)$$

Asumiendo que hay n puntos de muestra de las coordenadas $\chi_l (l = 1 \dots n)$ dentro del soporte x , con peso H_l y siendo $|\mathbf{J}(\chi_l)|$ el determinante jacobiano, las expresiones en (17),(18) pueden ser numéricamente evaluadas como

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) [\boldsymbol{\sigma}^*(x, \chi_l) - \boldsymbol{\sigma}^h(\chi_l)]^2 |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l \\
 \mathbf{M}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{P}(\chi_l) |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l \\
 \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}^h(\chi_l) |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l
 \end{aligned} \tag{19}$$

Los puntos de integración para la evaluación numérica de las integrales en las ecuaciones anteriores corresponden a los puntos de integración dentro de Ω_x usados en el análisis de FE, para los cuales el campo de esfuerzos ya está disponible. En (18) W es la función ponderada de MLS, la cual en este documento ha sido tomada como una curva de cuarto orden, comúnmente usado en la literatura relacionada con MLS:

$$W(x - \boldsymbol{\chi}) = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \tag{20}$$

Donde s determina la función de distancia normalizada dada por:

$$s = \frac{\|x - \boldsymbol{\chi}\|}{R_{\Omega_x}} \tag{21}$$

En el uso más común de MLS es de forma discreta [32], el funcional $J(\mathbf{x})$ se define como:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) [\boldsymbol{\sigma}^*(x, \chi_l) - \boldsymbol{\sigma}^h(\chi_l)]^2 \tag{22}$$

Esta forma entonces producirá expresiones similares a la de las ecuaciones mostradas en (19) con la diferencia que, cada uno de los puntos de muestra χ_l son ponderados por su área asociada $|J(\chi_l)|H_l$. Nuestra experiencia numérica ha indicado que la aproximación MLS continua usada en este documento es más precisa que la aproximación discreta, especialmente cuando la distribución de los puntos de prueba no es uniforme dentro del soporte.

La continuidad en σ^* es directamente dada por el procedimiento MLS previamente descrito porque la función ponderada W asegura que los puntos de muestra del esfuerzo salgan o entren al dominio base de forma gradual y suave cuando x se mueve [32].

Las siguientes secciones son dedicadas al cumplimiento del equilibrio en las ecuaciones.

5.3 SATISFACCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA FRONTERA

La ecuación de equilibrio en la frontera debe ser cumplida en cada punto sobre el dominio. En [33], [34], [35] donde una técnica basada en SPR fue usada, los autores forzaron el cumplimiento de las condiciones de frontera en partes a lo largo del límite usando Multiplicadores de Lagrange para imponer las restricciones apropiadas entre los coeficientes desconocidos a ser evaluados. Pero este acercamiento produce discontinuidades en una formulación MLS, mientras nos movemos desde el soporte en el interior del dominio a un soporte intersectando el límite.

Para evitar la introducción de discontinuidades en el campo recuperado, hemos utilizado un método de *puntos más cercanos* que introduce el cumplimiento exacto de la ecuación de equilibrio en el dominio de un modo suave y continuo. Así como las restricciones son suavemente introducidas no hay ningún salto cuando el soporte ya no intersecta Γ . Para un punto $x \in \Omega$ cuyo soporte Ω_x intersecta el

dominio Γ , las restricciones de equilibrio son consideradas solo en los puntos más cercanos $\chi_j \in \Gamma$ en los límites dentro de la base de x , mostrados en la Figura 3. Nótese que podemos tener más de un *punto más cercano* para un soporte dado, como es el caso para el punto x acercándonos a una esquina donde tomamos un punto para cada lado de la esquina (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). En este caso, dos puntos diferentes son considerados en el límite para evitar saltos inducidos por una condición de frontera diferente cuando crucemos la diagonal que divide la esquina.

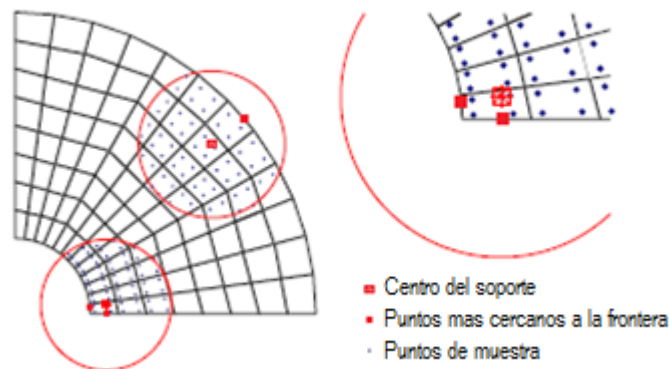
Expresamos el vector de esfuerzo $\sigma^*(x, \chi)$ en un sistema coordenado $\tilde{x}\tilde{y}$ alineado con el contorno en χ_j tal que \tilde{x} es el vector normal de salida, rotado un ángulo α con respecto a x :

$$\tilde{\sigma}^*(x, \chi) = \mathbf{R}(\alpha)\sigma^*(x, \chi) \quad (23)$$

Donde \mathbf{R} es la matriz rotacional de esfuerzos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\tilde{x}\tilde{x}} \\ \mathbf{r}_{\tilde{y}\tilde{y}} \\ \mathbf{r}_{\tilde{x}\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha)/2 & \sin(2\alpha)/2 & \cos(2\alpha) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Figura 3 Soporte MLS con condiciones de frontera aplicada a los puntos más cercanos de frontera.



La función MLS expresada en su versión continua, e incorporando las restricciones de frontera produce:

$$\begin{aligned}
J(x) &= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) [\sigma^*(x_l, \chi_l) - \sigma^h(\chi_l)]^2 |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l + \\
&\quad \sum_{j=1}^{nbc} \tilde{W}(x - \chi_j) [\sigma_i^*(x, \chi_j) - \sigma_i^{ex}(\chi_j)]^2 \\
&= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) [\mathbf{P}(\chi_l) \mathbf{A}(x) - \sigma^h(\chi_l)]^2 |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l + \\
&\quad \sum_{j=1}^{nbc} \tilde{W}(x - \chi_j) [\mathbf{r}_i(\alpha) \mathbf{P}(\chi_j) \mathbf{A}(x) - \sigma_i^{ex}(\chi_j)]^2 \quad \tilde{i} = \tilde{x}\tilde{x}, \tilde{x}\tilde{y}
\end{aligned} \tag{25}$$

Donde nbc es el número de puntos χ_j en la frontera, donde las restricciones de frontera σ_i^{ex} (en general, aquellos serán esfuerzos normales $\sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}$ y tangenciales $\sigma_{\tilde{x}\tilde{y}}$) son consideradas. Evaluando $\partial J / \partial A = 0$ resulta en el sistema lineal

$\mathbf{M}(x) \mathbf{A}(x) = \mathbf{G}(x)$ usado para evaluar \mathbf{A} , donde en este caso

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{P}(\chi_l) |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l + \\
&\quad \sum_{j=1}^{nbc} \tilde{W}(x - \chi_j) \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \mathbf{P}(\chi_j)
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \sum_{l=1}^n W(x - \chi_l) \mathbf{P}^T(\chi_l) \sigma^h(\chi_l) |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l + \\
&\quad \sum_{j=1}^{nbc} \tilde{W}(x - \chi_j) \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{r}_i^T \sigma_i^{ex}(\chi_j)
\end{aligned} \tag{27}$$

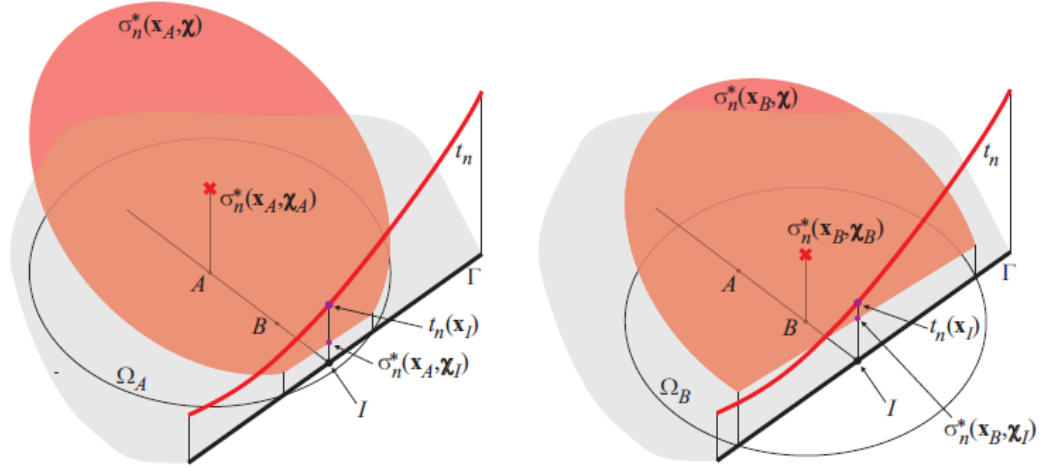
En la ecuación previa \tilde{W} es una función ponderada definida como:

$$\tilde{W}(x - \chi_j) = \frac{W(x - \chi_j)}{s} = \begin{cases} 1/s - 6s + 8s^2 - 3s^3 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (28)$$

Esta función tiene dos características principales:

1. \tilde{W} incluye la función de ponderación W tal que los términos para las restricciones de frontera son introducidos suavemente dentro de la función $J(x)$. Como resultado, el campo recuperado será continuo en Ω
2. \tilde{W} también incluye s^{-1} tal que el valor de la restricción frontera en $J(x)$ aumenta a medida que nos acercamos a la frontera (cuando $x \rightarrow \chi_j$ $s \rightarrow 0$), por lo tanto σ^* tenderá a satisfacer exactamente el equilibrio en la frontera $x \rightarrow \chi_j$ (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). ótese que el error estimado usando integración numérica, el valor de σ^* nunca será evaluado en el límite (donde $s = 0$) porque los puntos de integración considerados están siempre dentro de los elementos. Si los esfuerzos recuperados son evaluados en el límite donde $s = 0$, eliminamos los términos de frontera en la función y usamos multiplicadores de Lagrange para forzar el cumplimiento del equilibrio en la frontera y así evitar el término $1/s$ en (25). El campo de esfuerzo resultante aun será continuo si el método de puntos más cercano es usado en los puntos, no en la frontera.

Figura 4 Cumplimiento del equilibrio en la frontera



En la

Figura 4 Cumplimiento del equilibrio en la frontera $\sigma_n^*(x_A, \chi)$ y $\sigma_n^*(X_B, \chi)$ son valores de $\sigma^*(x, \chi)$, proyectados a lo largo de la dirección normal a la frontera T en I , en la base Ω_A y Ω_B de los puntos A y B, cuyo punto más cercano en T es I . t_n $\sigma_n^*(x_B, \chi_I)$ Es más preciso que $\sigma_n^*(x_A, \chi_I)$. Por lo tanto, como $x \rightarrow x_I$, $\sigma^*(x, \chi_I) \rightarrow t_n(x_I)$ y, similarmente el valor de los esfuerzos evaluados en el centro de la base $\sigma^*(x, x) \rightarrow t_n(x_I)$.

5.4 SATISFACCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO INTERNO

En adición al forzamiento del equilibrio en la frontera, también consideraremos el cumplimiento de la ecuación de equilibrio interno, usando el método de multiplicadores de Lagrange. Por lo que intentaremos forzar el campo de esfuerzos recuperados σ^* para satisfacer la ecuación de equilibrio interno

$$\nabla \cdot \sigma^* + \mathbf{b} = 0 \quad (29)$$

Las derivaciones espaciales de σ^* , considerando (15), son expresadas como

$$\nabla \cdot \sigma^* = (\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{A} + \mathbf{P}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (30)$$

Los primeros términos en (30) pueden ser directamente evaluados diferenciando las bases polinómicas. Trabajos anteriores [36], [37], [38] solo han considerado el primer término en el cumplimiento de la ecuaciones apropiadas, de este modo solo provee una pseudosatisfacción de estas ecuaciones [38]. Por lo tanto el segundo término en (30) debe también ser obtenido. Para evaluarlo, diferenciamos el sistema lineal $\mathbf{MA} = \mathbf{G}$:

$$(\nabla \cdot \mathbf{M})\mathbf{A} + \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (31)$$

Evaluando $\nabla \cdot \mathbf{A}$ de (31), reemplazando en (30) y expandiendo nos lleva a:

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} - \mathbf{PM}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \mathbf{A} + \mathbf{PM}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = \mathbf{E}_{,x} \mathbf{A} + \mathbf{f}_{,x} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial y} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} - \mathbf{PM}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right) \mathbf{A} + \mathbf{PM}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{E}_{,y} \mathbf{A} + \mathbf{f}_{,y} \quad (33)$$

Donde las derivadas parciales de \mathbf{M} y \mathbf{G} con respecto por ejemplo a x son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} = & \sum_{l=1}^n \frac{\partial W(x - \chi_l)}{\partial x} \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{P}(\chi_l) |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l + \\ & \sum_{j=1}^{nbc} \frac{\partial \tilde{W}(x - \chi_j)}{\partial x} \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \mathbf{P}(\chi_j) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = & \sum_{l=1}^n \frac{\partial W(x - \chi_l)}{\partial x} \mathbf{P}^T(\chi_l) \boldsymbol{\sigma}^h(\chi_l) |\mathbf{J}(\chi_l)| H_l + \\ & \sum_{j=1}^{nbc} \frac{\partial \tilde{W}(x - \chi_j)}{\partial x} \mathbf{P}^T(\chi_l) \mathbf{r}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i^{\text{ex}}(\chi_j) \end{aligned} \quad (35)$$

Donde, diferenciando ((20), (28)),

$$\frac{\partial W(x - \chi)}{\partial x} = \frac{\partial W(x - \chi)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (36)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}(x - \chi_j)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{W}(x - \chi_j)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (37)$$

En estas ecuaciones $\partial s / \partial x$ pueden ser obtenidas de (21) o alternativamente de (32) para el caso mostrado en la siguiente sección. Ecuaciones (32),(33) son expresadas como una función de \mathbf{A} , entonces podemos escribir los dos términos de la ecuación de equilibrio interno (29) como una función del vector de incógnitas \mathbf{A} :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + b_x = (\mathbf{E}_{xx,x} + \mathbf{E}_{xy,y}) \mathbf{A} + (f_{xx,x} + f_{xy,y}) + b_x = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + b_y = (\mathbf{E}_{xx,y} + \mathbf{E}_{yy,y}) \mathbf{A} + (f_{xy,x} + f_{yy,y}) + b_y = 0 \quad (39)$$

Los multiplicadores de Lagrange son usados para imponer restricciones en las ecuaciones.

El uso del método de multiplicadores de Lagrange para imponer restricciones de equilibrio ((38),(39)) en (25) lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Donde \mathbf{C} y \mathbf{D} son los términos usados para imponer ecuaciones de restricción y $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de los multiplicadores de Lagrange.

Sin embargo, en (31) fue asumido que \mathbf{A} es evaluado resolviendo $\mathbf{MA} = \mathbf{G}$, aunque operando por bloques en (40) el siguiente sistema de ecuaciones es obtenido:

$$\mathbf{MA} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G} \quad (41)$$

Por lo tanto, en la formulación propuesta en este documento hemos olvidado el término $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}$ cuando evaluamos las derivadas parciales de \mathbf{A} . Evidentemente, esto implica que la ecuación de equilibrio interno no es totalmente satisfecha, llevando a una solución exacta cercana de la ecuación de equilibrio interno. Como fue descrito en los ejemplos numéricos, esta aproximación representa un mejoramiento con respecto a la pseudosatisfacción de equilibrio [38].

Referencias [33], [39] muestran que el estimador de error producirá un límite superior de error si $\boldsymbol{\sigma}^*$ es estáticamente admisible. La técnica de recuperación MLSCX produce un campo de esfuerzos continuo donde la ecuación de equilibrio interno no es completamente satisfecha. Por lo tanto $\boldsymbol{\sigma}^*$ es continua y casi equilibrada y, de este modo, casi estáticamente admisible. Aunque de esta manera el error estimado dado por la técnica de recuperación propuesta es muy exacto, no garantiza el límite superior de error.

5.5 VISIBILIDAD

Para problemas con esquinas internas, un criterio de visibilidad es usado para modificar la distancia s en (21). La función de ponderación depende en la distancia entre el punto central de la base y los puntos de muestra, disminuyendo a medida que los puntos de muestra se alejan del centro [40].

Consideremos un dominio con una esquina entrante como la mostrada en la
¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.. El valor de la función de ponderación para un punto de muestra χ_l , considerando un punto central x cuya base contiene la singularidad en χ_λ , disminuye con la visibilidad de χ_l desde x , tal que, para puntos que no pueden ser directamente vistos desde x , en vez de (21), la siguiente ecuación es usada.

$$s = \frac{\|x - \chi_\lambda\| + \|\chi_l - \chi_\lambda\|}{R_{\Omega_x}} \quad (42)$$

5.6 DESCOMPOSICIÓN DE ESFUERZOS PARA PROBLEMAS SINGULARES

Es bien conocido que las técnicas de suavizado se desenvuelven mal cuando la solución contiene una singularidad. En [41],[34] un método que descompone el campo de esfuerzos en partes suaves y singulares en función de mejorar la precisión de los estimadores de error basados en SPR fueron propuestos. Los autores indicaron que el campo de esfuerzos exacto σ correspondiente a un problema singular puede ser expresado como una contribución de un campo suavizado de esfuerzos, σ_{smo} , y un campo de esfuerzos singular, σ_{sing}

$$\sigma = \sigma_{smo} + \sigma_{sing} \quad (43)$$

Por lo tanto, el campo de esfuerzos recuperado para esta clase problemas puede ser expresado como la contribución de un campo de esfuerzos singular y suave.

$$\sigma^* = \sigma^*_{smo} + \sigma^*_{sing} \quad (44)$$

Para obtener una aproximación acertada de la parte singular usamos la interacción integral mostrado en [42], para realizar una buena estimación del GSIFs K_I y K_{II} . Después utilizando valores estimados de K^*_I y K^*_{II} podemos evaluar un campo singular recuperado.

Asumiendo que σ^*_{sing} es una buena aproximación de la parte singular σ_{sing} , una representación de tipo FE para la parte suave σ^h_{smo} esta dado por

$$\sigma^h_{smo} = \sigma^h - \sigma^*_{sing} \quad (45)$$

En [41] una técnica de recuperación basada en SPR fue usada para suavizar el campo de esfuerzos discontinuo σ^h_{smo} . En este documento, usamos la técnica de mínimos cuadrados en movimiento anteriormente descrita para recuperar la parte

suave de la solución σ_{smo}^* . En [41] el procedimiento de división de esfuerzos fue solamente usado en una pequeña área alrededor de la punta de grieta.

En el procedimiento aquí propuesto la división de esfuerzos es usado en todo el dominio del problema para evitar discontinuidades a lo largo de la zona de mezclado. Así las tracciones de frontera a ser consideradas para el cumplimiento de la ecuación de equilibrio de frontera en el problema suavizado son:

$$t_{smo} = t - t_{sing}^* \quad (46)$$

Donde t_{sing}^* son la proyección de σ_{sing}^* . Debe ser tenido en cuenta que las caras de la esquina entrante son tratadas como cualquier otra frontera de Neumann donde el cumplimiento de la ecuación de equilibrio de frontera será impuesto. Nótese que σ_{sing}^* es equilibrada y continua, por lo tanto en campo de esfuerzos recuperados $\sigma^* = \sigma_{sing}^* + \sigma_{smo}^*$ solo carece de una pequeña parte de equilibrio interno en σ_{smo}^* inducido por el proceso de recuperación.

6. REFINAMIENTO

6.1 H - ADAPTATIVO

En [43] definen la técnica de refinamiento h-adaptativa. Como una técnica que permite a través de la subdivisión de elementos, la disminución del error a nivel local y global. Este procedimiento debe indicar que elementos van a ser refinados, el número de elementos nuevos y que tamaño van a tener estos.

Este es un proceso iterativo, donde se parte con una malla inicial que es computada, su error a nivel global y de elemento es calculado. En zonas donde este error es más alto que el permitido la malla será refinada.

Existe un factor muy importante que es el criterio de aceptabilidad, este es usado como criterio de parada del proceso iterativo. En [44], [8],[45] los autores utilizan el error el error global estimado en la malla que es definido por el usuario al inicio del proceso.

6.2 CONVERGENCIA EN EL PROCESO ADAPTATIVO

Para el refinamiento h llevado a cabo con una secuencia de mallas, en [45] acotan el error teniendo en cuenta la ley de convergencia de MEF:

$$\|\mathbf{e}\| \leq C(N)^{-\frac{1}{2}\min(p,\infty)} \approx C(h)^{\min(p,\infty)} \quad (47)$$

Donde $\|\mathbf{e}\|$ es el error estimado en norma energética descrito anteriormente por (11), C es una constante positiva, N es el número de grados de libertad, h es el

tamaño del elemento, p es el grado del polinomio de la función de forma usada y λ representa la intensidad de las singularidades.

Como C es una constante independiente de h , N y p , en [8] establecen una relación aproximada entre los errores globales y el tamaño de los elementos, para mallas en secuencia, dada por la ley de convergencia:

$$\frac{\|\mathbf{e}_{es}\|_p}{\|\mathbf{e}_{es}\|_n} \approx \left[\frac{h_p}{h_n} \right]^c \quad (48)$$

Donde $\|\mathbf{e}_{es}\|_p$ es el error estimado global de la malla previa, $\|\mathbf{e}_{es}\|_n$ el error estimado global de la malla nueva, h_p es el tamaño de elemento en la malla previa, h_n es el tamaño de elemento para la nueva malla y $c = \min(p, \lambda)$. Si no existen singularidades c es igual a p y si llegan a existir singularidades el refinamiento se tiene que realizar de forma adaptativa para que se siga manteniendo p como exponente.

Aplicando la ley de convergencia a nivel de elementos tenemos:

$$\frac{\|\mathbf{e}_{es}^e\|_p}{\|\mathbf{e}_{es}^e\|_n} \approx \left[\frac{h_p^e}{h_n^e} \right]^c \quad (49)$$

Donde $\|\mathbf{e}_{es}^e\|_p$ es el error estimado para un elemento de la malla previa y $\|\mathbf{e}_{es}^e\|_n$ el error estimado del nuevo elemento, h_p^e es el tamaño de este elemento en la malla previa y h_n^e es el tamaño del nuevo elemento.

De esta relación se derivan diferentes estrategias de remallado con el fin de alcanzar una velocidad de convergencia óptima y lograr los límites de error deseados.

7. ESTRATEGIAS DE REMALLADO

7.1. EQUIDISTRIBUCIÓN DEL ERROR EN ELEMENTOS DE LA NUEVA MALLA

Esta estrategia nos permite obtener una distribución uniforme del error en toda la malla. Logra que todos los elementos de la malla tengan el error en un mismo rango.

En [8] los autores presentan este criterio y realizan una serie de relaciones con la ley de convergencia a nivel de elemento y número de elementos. Obteniendo la siguiente ecuación con la que podremos hallar el nuevo tamaño de elemento.

$$h_n^e = h_p^e \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|_n}{\|\mathbf{e}_{es}\|_p} \cdot \left(\frac{1}{N_p}\right)^{\frac{1}{2(c+1)}} \cdot \left(\frac{\|\mathbf{e}_{es}\|_n}{\|\mathbf{e}_{es}\|_p}\right)^{\frac{1}{c(c+1)}} \quad (50)$$

Siendo N_p el número de elementos de la malla previa.

7.2 ESTRATEGIA DE LI Y BETTES

Li y Bettles en [7] presentan la siguiente ecuación para calcular el número de elementos nuevos en la malla haciendo uso de la ley de convergencia y relaciones matemáticas para llegar a una distribución óptima del error en norma energética.

$$h_n^e = \left[\sum_{i=1}^{N_p} h_p^e \left(\frac{\mathbf{n}_i^e}{n_{per}} \right) \sqrt{N_p} \right]^{\frac{1}{c-m+1}} \quad (51)$$

Donde n_i^e es el error relativo en el elemento, n_{per} es el error relativo permisible global y m es igual al grado de los polinomios de interpolación. Los valores de estos errores están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$n_i^e = \left(\frac{\|\mathbf{e}_{es}^e\|_p}{\|\mathbf{u}^h\|} \right) \quad (52)$$

$$n_{per} = \left(\frac{\|\mathbf{e}_{es}\|_n}{\|\mathbf{u}^h\|} \right) \quad (53)$$

7.3. ESTRATEGIA DE ZIENKIEWICZ AND ZHU

Esta estrategia presentada en [45] igual que las anteriores tiene como objetivo lograr una distribución óptima del error sobre toda la malla, donde:

$$\|\mathbf{e}_{es}^e\|_n = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|_n}{\sqrt{N_p}} \quad (54)$$

Con la ecuación anterior y la ley de convergencia comentada anteriormente llegamos al siguiente criterio:

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{e}_{es}^e\|_p}{\|\mathbf{e}_{es}\|_n} \quad (55)$$

$$h_n^e = \frac{h_p^e}{\epsilon^{1/\lambda}} \quad (56)$$

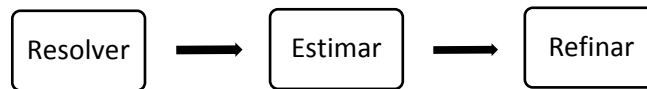
Donde $0 < \lambda < 1.0$ es la tasa de convergencia a priori para la solución de elementos finitos para el problema con singularidades. Generalmente para singularidades con esquinas se encuentra entre

$$0.5 < \lambda < 1.0$$

8. ALGORITMO DE REFINAMIENTO DE LA MALLA

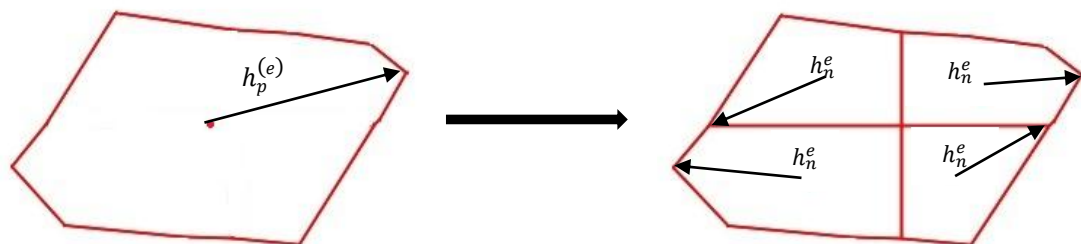
Para explicar cómo se realizó nuestro proceso de refinamiento partiremos del esquema más elemental de este, mostrado en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

Figura 5 Esquema básico de refinamiento



Se obtuvo la solución en elementos finitos con una malla inicial. Se realizó la estimación de los errores globales y locales en norma energética. Posteriormente, se refinaron las zonas marcadas con alto nivel de error.

Para realizar un refinamiento tipo h los principales factores que se deben tener en cuenta son el error estimado a nivel global y de elemento, y el tamaño característico de la malla o de elemento. Para nuestro caso usaremos h^e , este tamaño definido a criterio del desarrollador. Para nuestro caso utilizamos la distancia desde el centroide del elemento hasta el nodo más alejado de este, criterio mostrado en la



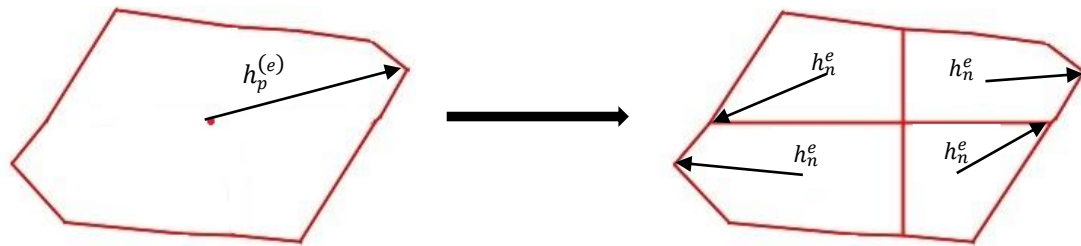
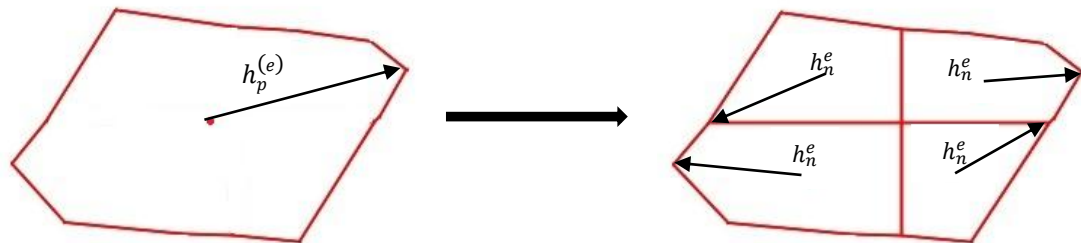


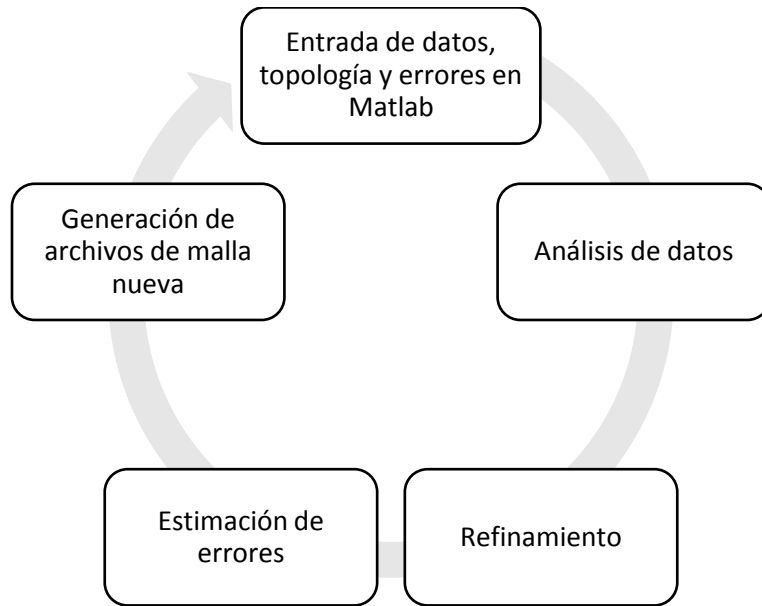
Figura 6 Selección de h^e antes y después de realizado el refinamiento.



Después de tener estos valores, las estrategias de remallado dirán donde refinar y cuantos elementos agregar. Cada una de estas estrategias puede presentar una velocidad de convergencia y un número de elementos nuevos diferentes para cada caso.

De la nueva malla refinada utilizamos la información topológica para hacer la reconstrucción de esta y obtener los nuevos datos tales como h_n^e , $\|\mathbf{e}_{es}^e\|_n$ y $\|\mathbf{e}_{es}\|_n$ para un siguiente nivel de refinamiento, proceso mostrado en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..** Anteriormente se había mencionado el criterio de aceptabilidad o de parada, que es el encargado de detener el proceso iterativo. En nuestro trabajo utilizamos $\|\mathbf{e}_{es}\|_n$ que va a ser definido por el usuario dependiendo de qué tan fina quiera la malla y de la capacidad de procesamiento.

Figura 7 Diagrama de flujo del proceso de refinamiento.



9. RESULTADOS NUMERICOS

Se realizarán tres ejemplos, con soluciones exactas para evaluar la técnica de reconstrucción propuesta, también se presentarán los resultados de refinamiento uniforme y de las tres estrategias de refinamiento adaptativo. En estos resultados se mostrarán las gráficas de efectividad local y error estimado en norma energética a nivel de elemento para las diferentes estrategias. De estas se recopilarán los datos de error global y número de grados de libertad, con los que se va a elaborar tablas y gráficas en escala logarítmica que representarán la velocidad de convergencia de cada estrategia.

La efectividad del estimador de error es calculada como:

$$\theta = \frac{\varepsilon^{MLSCX}}{\|e\|} \quad (57)$$

Introducimos un elemento de indexación D, definido como

$$D = \begin{cases} \theta^e - 1, & \text{si } \theta^e \geq 1 \\ 1 - \frac{1}{\theta^e}, & \text{si } \theta^e < 1 \end{cases} \quad (58)$$

Donde θ^e es la efectividad en el elemento. Para calcular θ^e , ecuación (11) es usada, pero con con el dominio de integración ahora siendo el elemento en vez que el dominio físico.

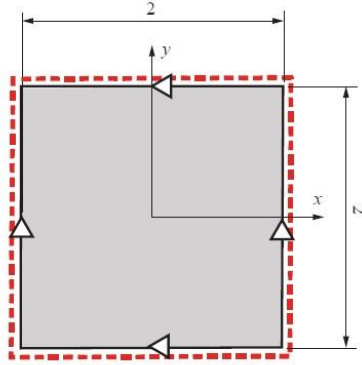
9.1. PLACA CUADRADA

El primer problema de comparación es un modelo de una placa cuadrada de 2x2 mostrada en la figura 8 con parámetros del material $E= 1000$ para el módulo de Young y $\nu = 0.3$ para el coeficiente de Poisson. Las condiciones de frontera de Dirichlet son indicadas en la figura. El problema es definido de manera que la solución exacta de desplazamientos está dada por:

$$u(x, y) = x + x^2 - 2xy + x^3 - 3xy^2 + x^2y \quad (59)$$

$$v(x, y) = -y - 2xy + y^2 - 3x^2y + y^3 - xy^2 \quad (60)$$

Figura 8 Placa cuadrada de 2x2



Los valores exactos de las componentes del esfuerzo son aplicados a lo largo de la frontera de Neumann denotados por la línea punteada en Figura 8. Estos esfuerzos pueden ser derivados del campo de desplazamiento exacto, bajo condiciones de deformación plana, y son dados por:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 + \nu} (1 + 2x - 2y + 3x^2 - 3y^2 + 2xy) \quad (61)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 + \nu} (-1 - 2x + 2y - 3x^2 + 3y^2 - 2xy) \quad (62)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} \left(-x - y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 6xy\right) \quad (63)$$

Las siguientes fuerzas volumétricas deben ser aplicadas para satisfacer el equilibrio:

$$b_x(x, y) = \frac{E}{1 + \nu} (1 + y) \quad (64)$$

$$b_y(x, y) = -\frac{E}{1 + \nu} (1 - x) \quad (65)$$

Tabla 1 Placa cuadrada. Error global estimado $\|e_{es}\|$ y número de grados de libertad (DOF).

Uniforme		Equidistribución		Li y Bettles		Zienkiewicz	
DOF	Error	DOF	Error	DOF	Error	DOF	Error
148	33.35	148	33.35	148	33.35	148	33.35
260	29.42	614	17.62	388	28.88	520	22.82
580	17.7	1192	13.37	868	16.61	804	14.68
7060	5.21	6180	4.95	1880	11.25	934	11.82

9.1.1 Uniforme

Figura 9 Placa cuadrada. Efectividad en cada elemento. Refinamiento Uniforme.

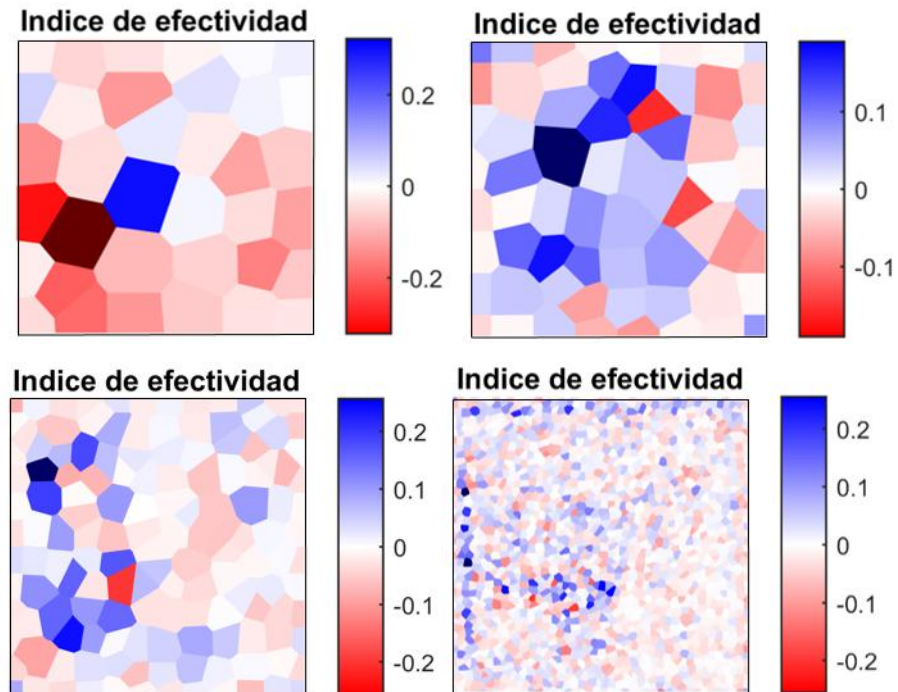
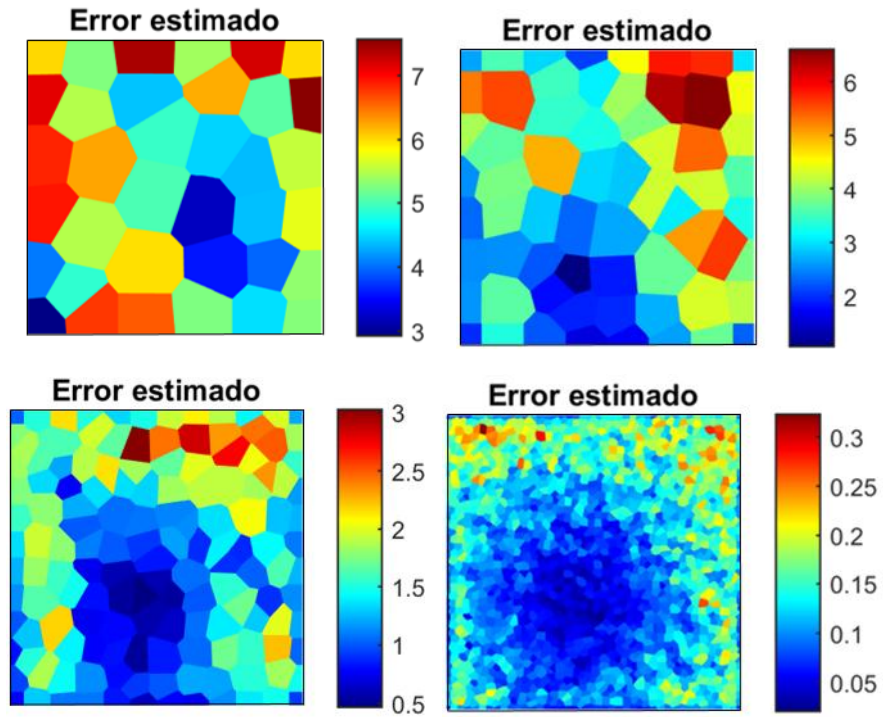


Figura 10 Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento Uniforme.



9.1.2. Estrategia de Equidistribución

Figura 11 Placa cuadrada Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.

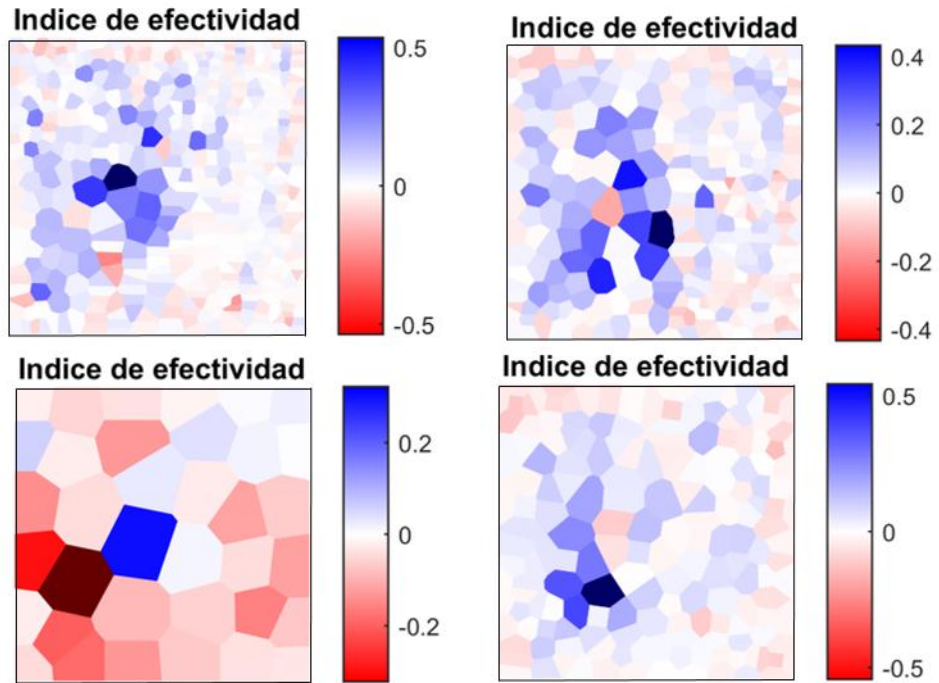
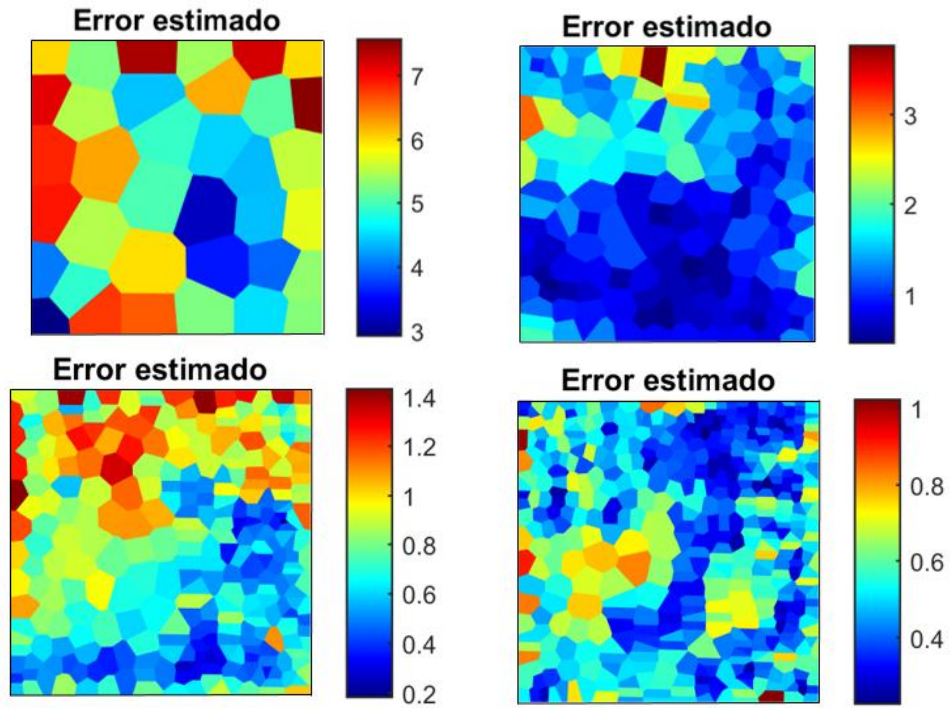


Figura 12 Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo Estrategia Equidistribución.



9.1.2 Estrategia de Li y Bettes

Figura 13 Placa cuadrada. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.

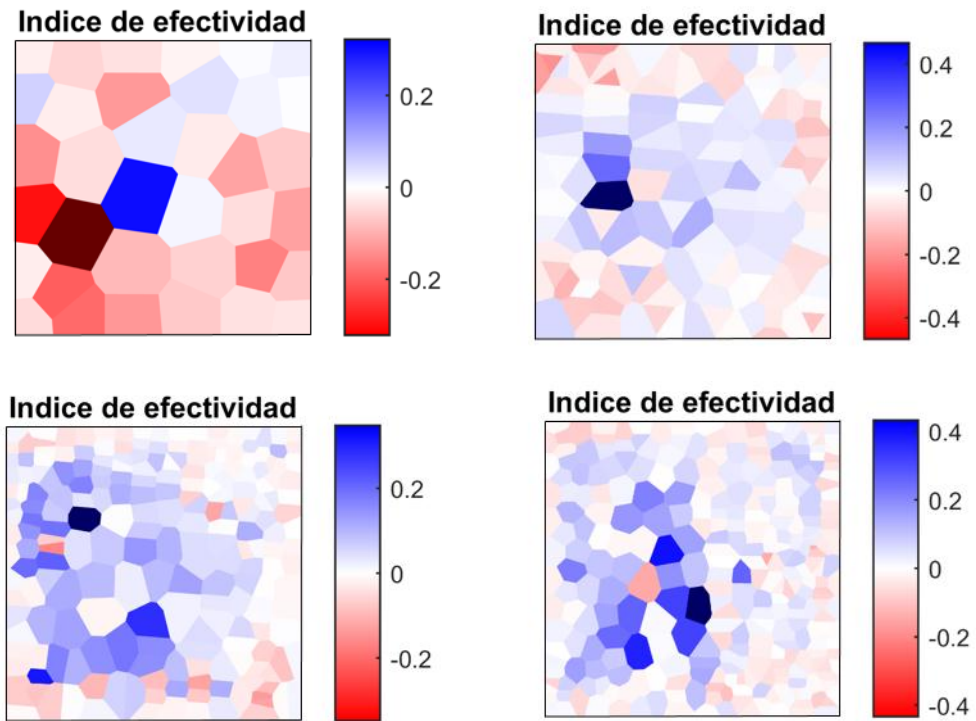
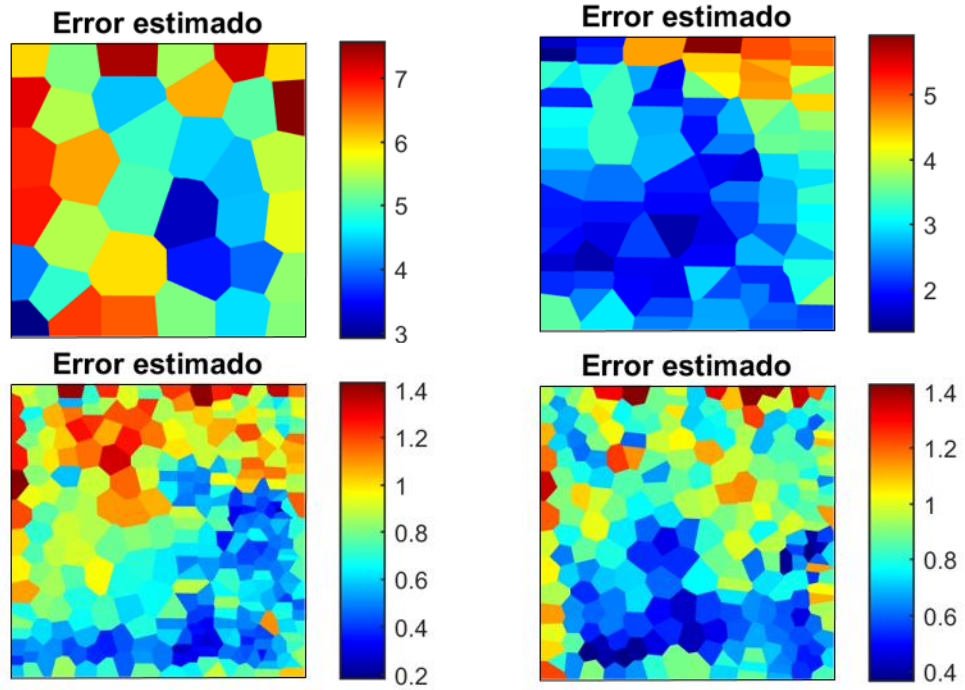


Figura 14 Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.



9.1.3. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu

Figura 15 Placa cuadrada. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo Estrategia de Zienkiewicz y Zhu. .

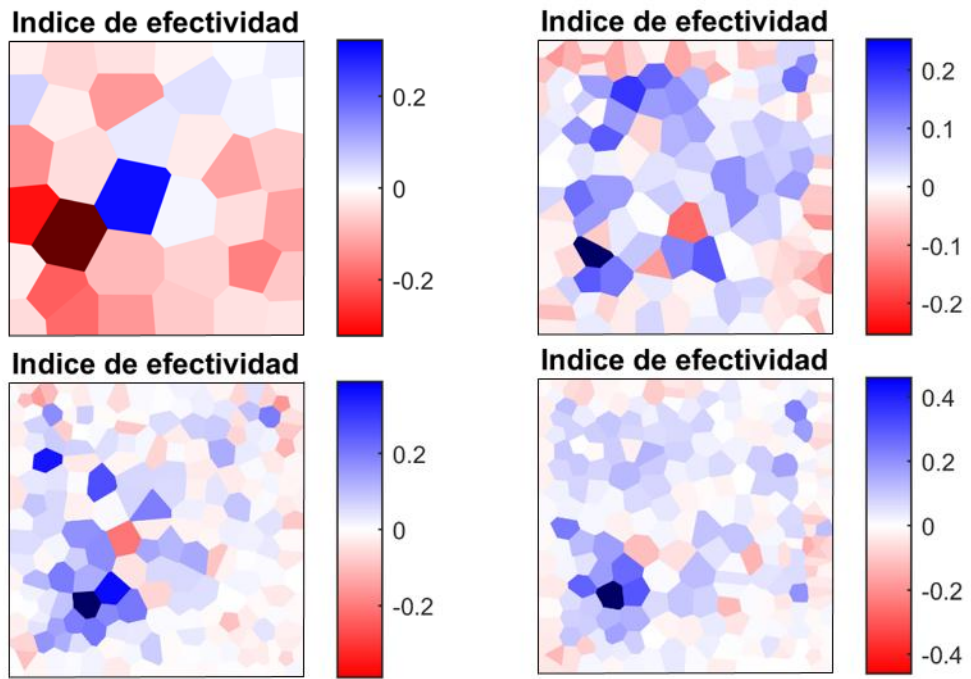


Figura 16 Placa cuadrada. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu.

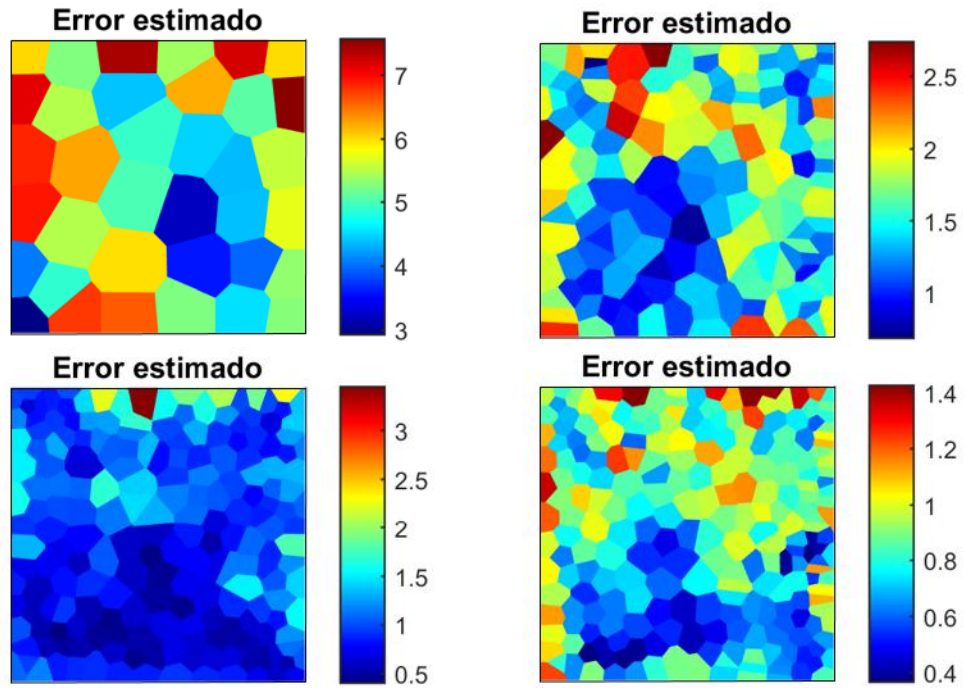


Figura 17 Placa cuadrada. Esfuerzos σ^* representados sobre los puntos de integración.

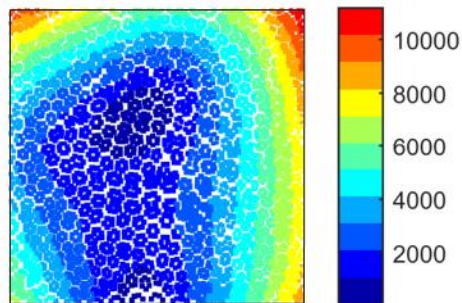


Figura 18 Placa cuadrada. Error estimado global vs el número de grados de libertad para la placa con diferentes técnicas.

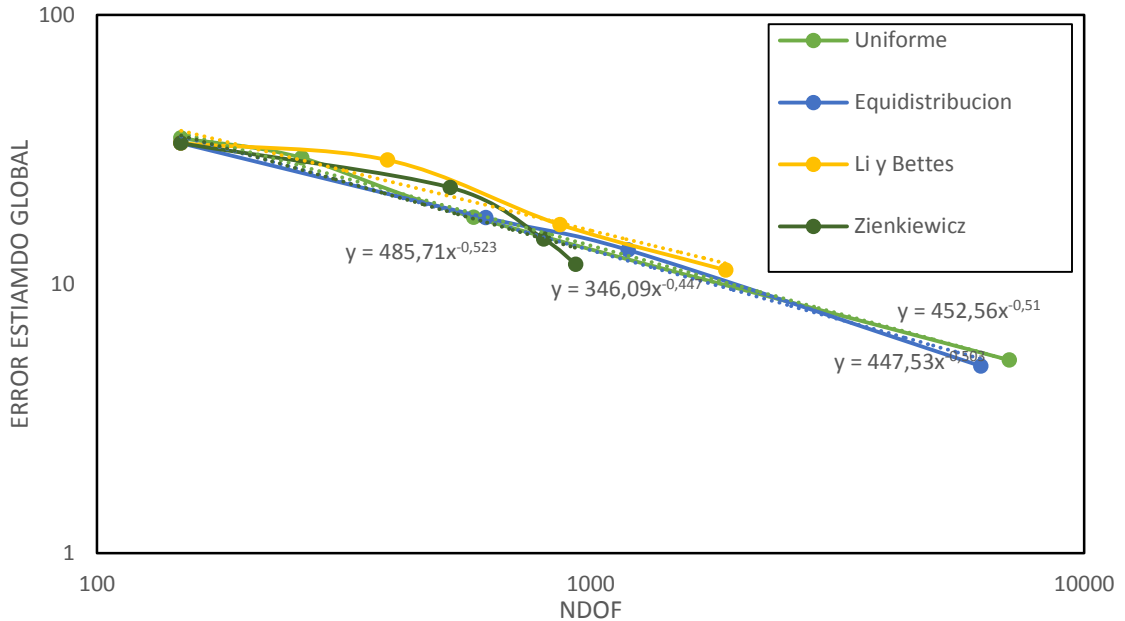


Figura 19 muestra las curvas de velocidad de convergencia, para este problema en particular.

Uniforme	Equidistribución	Li y Bettles	Zienkiewicz
0.51	0.50	0.45	0.52

Tabla 2 Placa cuadrada. Pendientes promedios para las diferentes estrategias.

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran las endientes promedios para cada estrategia. Como se puede ver la pendiente de todas las curvas dan valores similares Al ver las gráficas de los errores estimados **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, **¡Error! No se encuentra el igen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, no

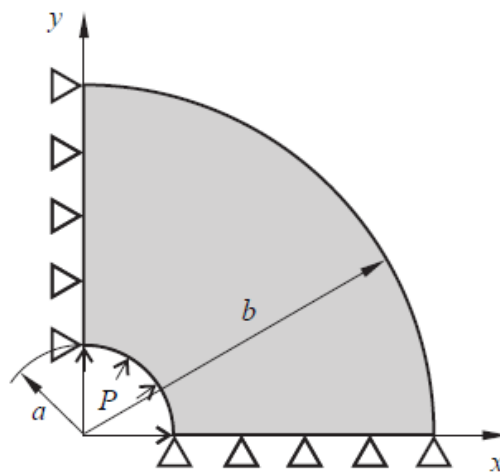
se evidencia una concentración de elementos con errores altos. Esto se debe al tipo de problema en específico. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se ve que no hay ningún gradiente elevado de esfuerzos y que tiende a ser un valor de esfuerzo uniforme sobre toda la placa.

En las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se ven los índices de efectividad local que se encuentran dentro de un rango de valores bueno lo que nos indica que la solución encontrada es una muy buena aproximación a la solución exacta.

9.2 CILINDRO DE PARED GRUESA BAJO PRESIÓN INTERNA

El modelo geométrico para el cilindro de pared gruesa es mostrado en la **¡Error! o se encuentra el origen de la referencia..** Debido a la simetría, solo un cuarto del cilindro es modelado.

Figura 20 Cilindro de pared gruesa bajo presión interna en deformación plana.



La solución exacta para este problema está dada, para un punto (x, y) , $c = b/a$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el desplazamiento radial está dado por

$$u_r = \frac{P(1 + \nu)}{E(c^2 - 1)} (r(1 - 2\nu) + \frac{b^2}{r}) \quad (66)$$

Los esfuerzos en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{c^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t &= \frac{P}{c^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_z &= 2\nu \frac{P}{c^2 - 1} \end{aligned} \quad (67)$$

Uniforme		Equidistribución		Li y Bettes		Zienkiewicz	
DOF	Error	DOF	Error	DOF	Error	DOF	Error
404	0.030	404	0.030	404	0.030	404	0.030
1576	0.0137	606	0.0181	648	0.01827	502	0.0208
3170	0.0106	1370	0.0102	852	0.01737	966	0.0116
6362	0.0069	1478	0.00833	1738	0.00828		

Tabla 3 Cilindro. Error global estimado y número de grados de libertad.

9.2.1 Uniforme

Figura 21 Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento Uniforme.

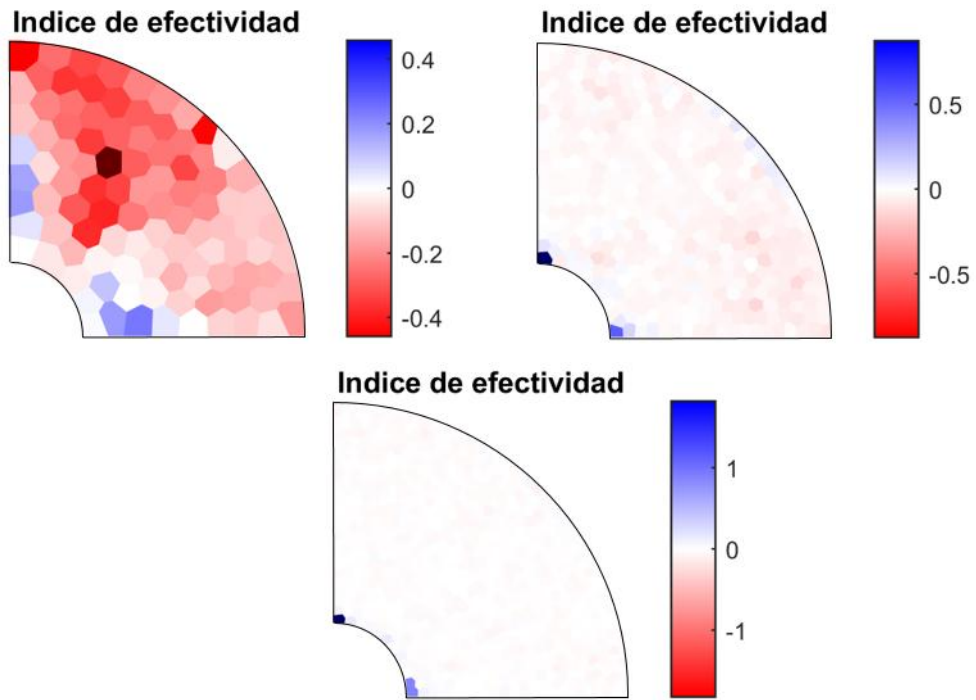
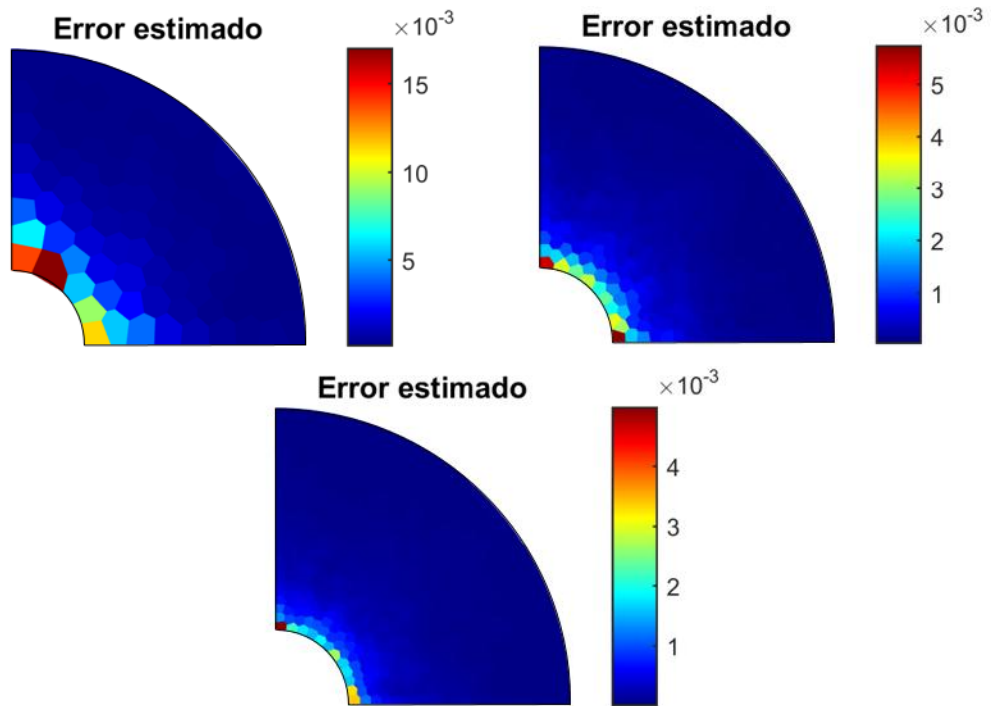


Figura 22 Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento.
Refinamiento Uniforme.



9.2.2 Estrategia de Equidistribución

Figura 23 Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.

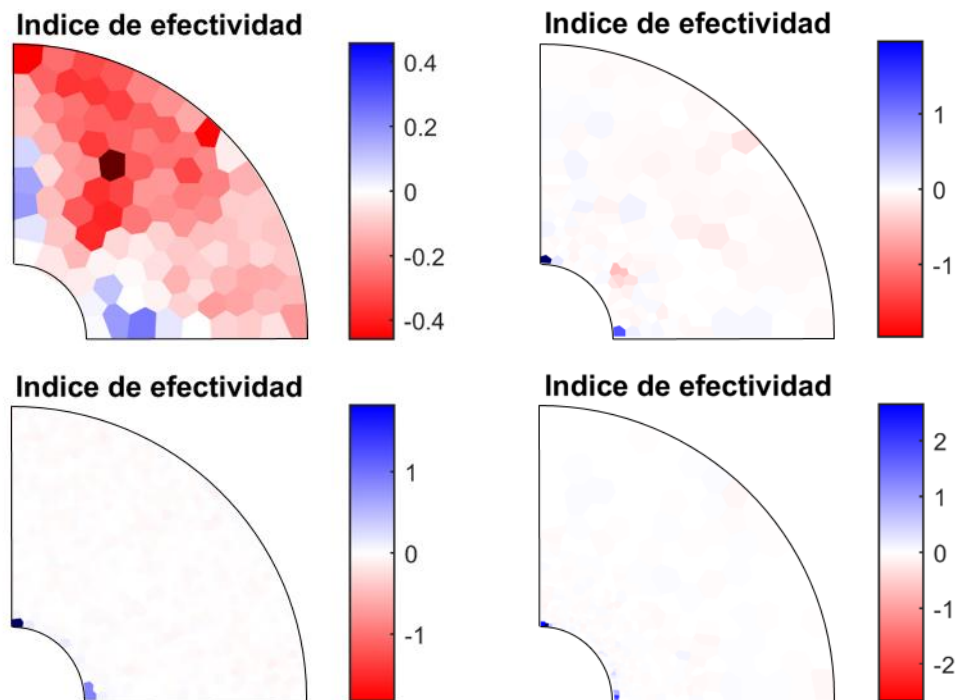
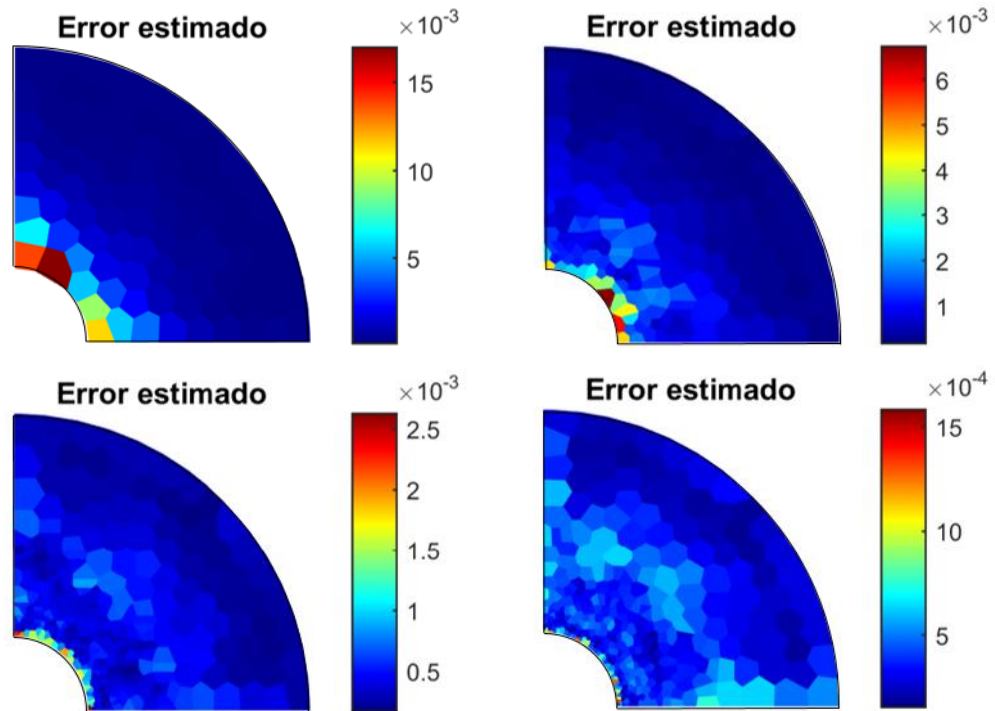


Figura 24 Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.



9.2.3 Estrategia de Li y Bettes

Figura 25 Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.

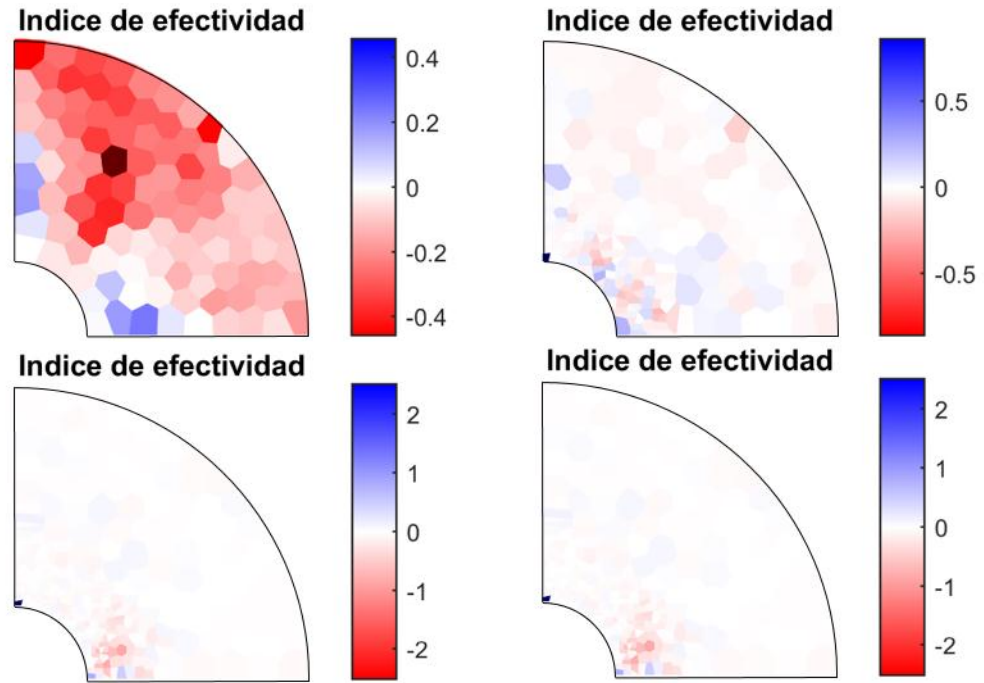
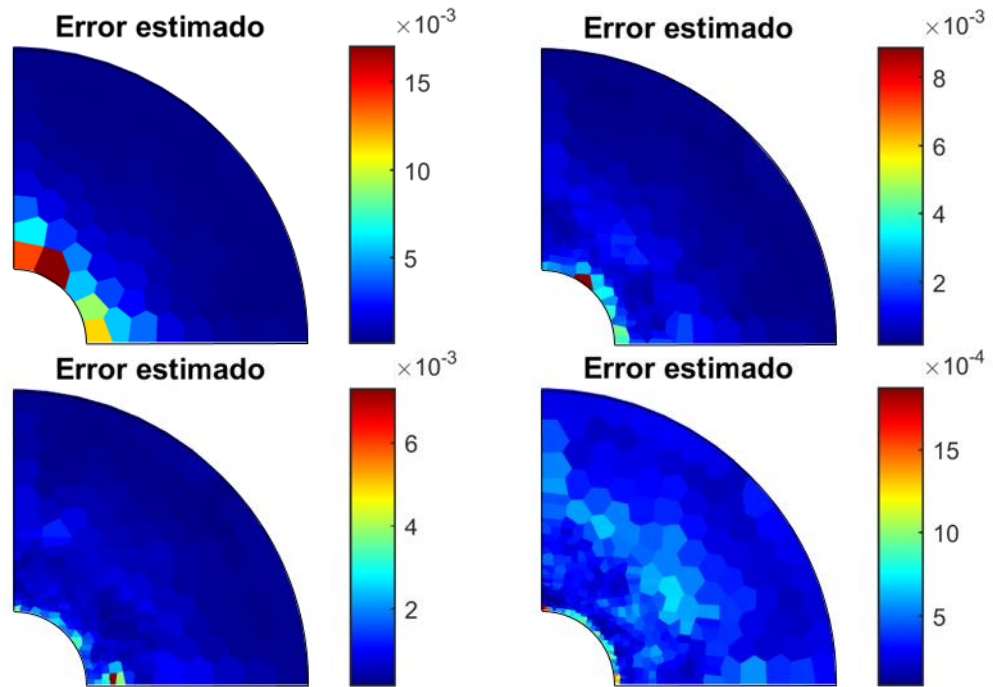


Figura 26 Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.



9.2.4 Estrategia de Zienkiewicz y Zhu

Figura 27. Cilindro. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu.

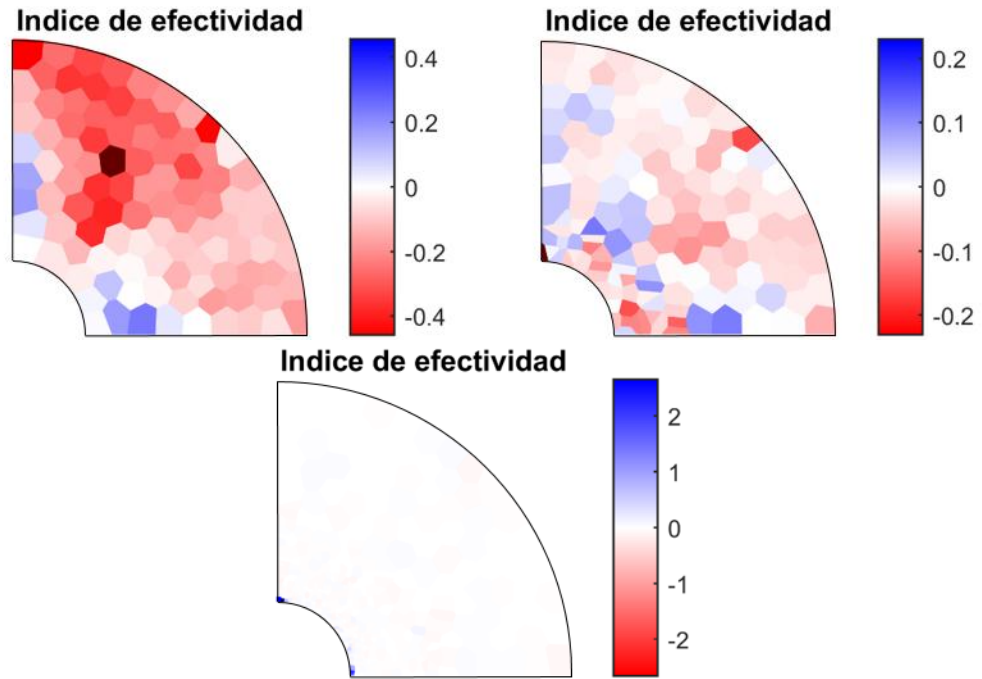


Figura 28 Cilindro. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.

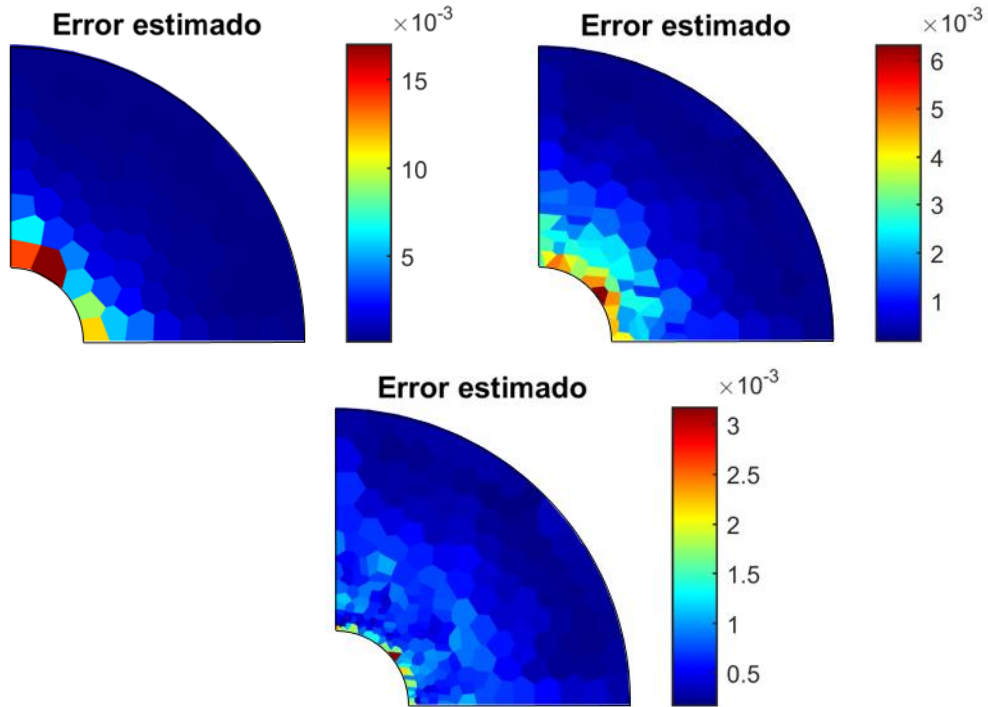
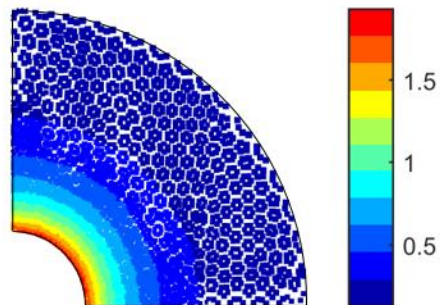


Figura 29 Cilindro. Esfuerzos σ^* representados sobre los puntos de integración.



En la Figura podemos ver la distribución de esfuerzos sobre el dominio, se observa que en una sección de la parte interior de este se presenta el mayor gradiente de esfuerzos, y el esfuerzo máximo se localiza sobre el radio interior, por lo que el refinamiento adaptativo toma lugar en esa área del dominio.

Figura 30 Cilindro. Error global vs el número de grados de libertad en escala logarítmica para diferentes estrategias de refinamiento.

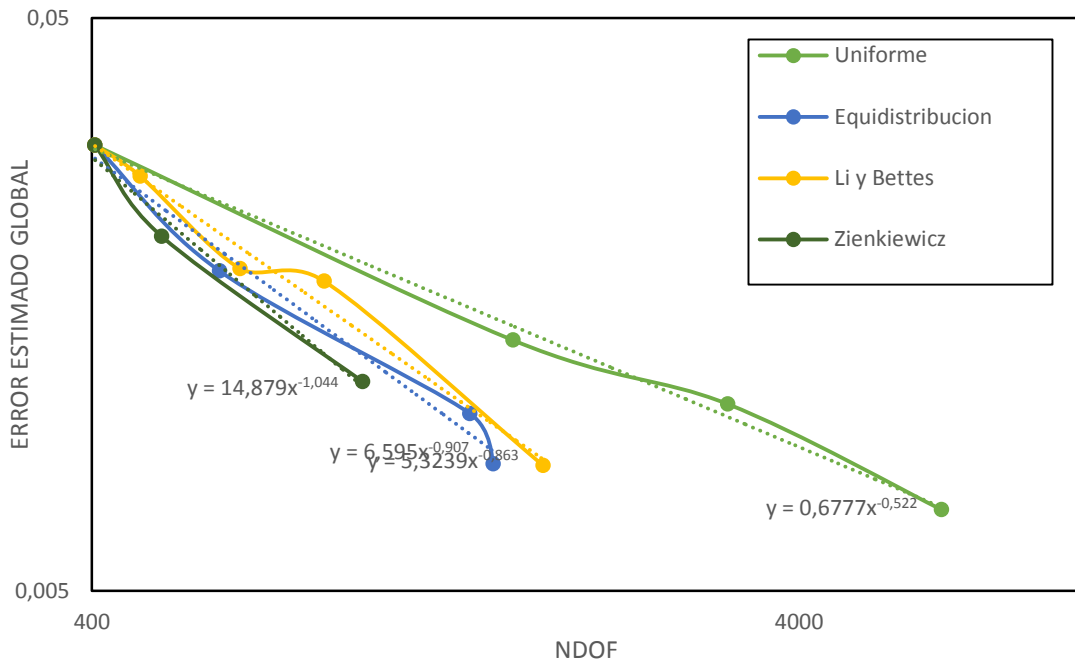


Figura 31 podemos ver las curvas que representan la velocidad de convergencia de cada estrategia, las tres de refinamiento adaptativo presentan una pendiente más pronunciada que la de refinamiento uniforme. Datos tomados de

Uniforme	Equidistribución	Li y Bettes	Zienkiewicz
0.5	0.9	0.89	1

Tabla 4 Pendientes promedio para las diferentes estrategias.

Los valores de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** permiten observar que tan eficiente es cada método, ya que los valores de estas pendientes me permiten cuantificar la velocidad de convergencia para su comparación.

En [45] el autor da una velocidad teórica de convergencia igual a 1 para problemas con singularidades fuertes y para este problema que no presenta ninguna singularidad obtenemos esa velocidad de convergencia lo que nos indica que el

método adaptativo para mallas poligonales en este ejemplo en particular es mucho más efectivo que las técnicas tradicionales.

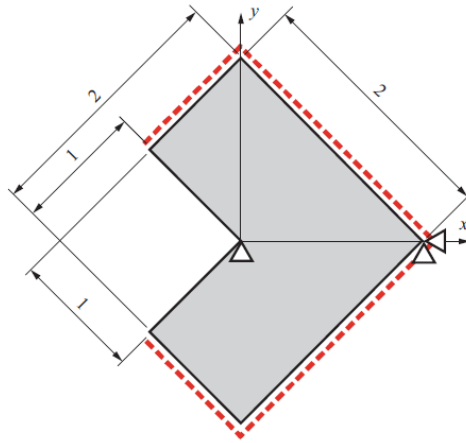
En las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los errores estimados $\|e_{es}^e\|$ para las estrategias de refinamiento adaptativo. Los elementos con mayor valor de error estimado se concentran en las zonas donde se presenta mayor valor de esfuerzo por lo que la reducción de tamaño de los elementos va a ocurrir principalmente en esa zona, la del radio interior.

En las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los índices de efectividad local que para los dos tipos de refinamiento con sus diferentes estrategias muestran valores aceptables lo que nos indica que la solución obtenida es una muy buena aproximación con respecto a la solución exacta.

9.3. DOMINIO EN FORMA DE L BAJO CARGAS TIPO I

Consideremos el problema singular de una porción finita de un dominio infinito con una esquina interna. El modelo es cargado en una parte de la frontera, la cual es indicada por las líneas punteadas en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** Las tracciones corresponden a los primeros términos de la expansión asintótica que describe la solución exacta bajo condiciones de carga mixta alrededor de un vértice singular.

Figura 32 Esquema dominio en forma de L



El desplazamiento exacto y los campos de esfuerzos para este problema singular elástico pueden ser encontrados en [46]. Valores exactos de los factores de intensidad del esfuerzo generalizado (GSIF) [46] bajo cargas tipo I fueron tomados como $K_I = 1$ y $K_{II} = 0$. Los parámetros del material son modulo de Young $E = 1000$, y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Como la solución analítica de este problema es singular en la esquina interna del disco, para la recuperación aplicamos la descomposición singular y suave de los esfuerzos.

Tabla 5 Dominio en L. Error global estimado y número de grados de libertad.

Uniforme		Equidistribución		Li y Bettes		Zienkiewicz	
DOF	Error	DOF	Error	DOF	Error	DOF	Error
110	0.0173	110	0.0173	110	0.0173	110	0.0173
222	0.0144	220	0.0123	162	0.0162	176	0.0131
322	0.0124	340	0.0106	250	0.0086	236	0.0114
1212	0.0075	422	0.0077	718	0.0059	540	0.0070

9.3.1 Uniforme

Figura 33 Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento Uniforme.

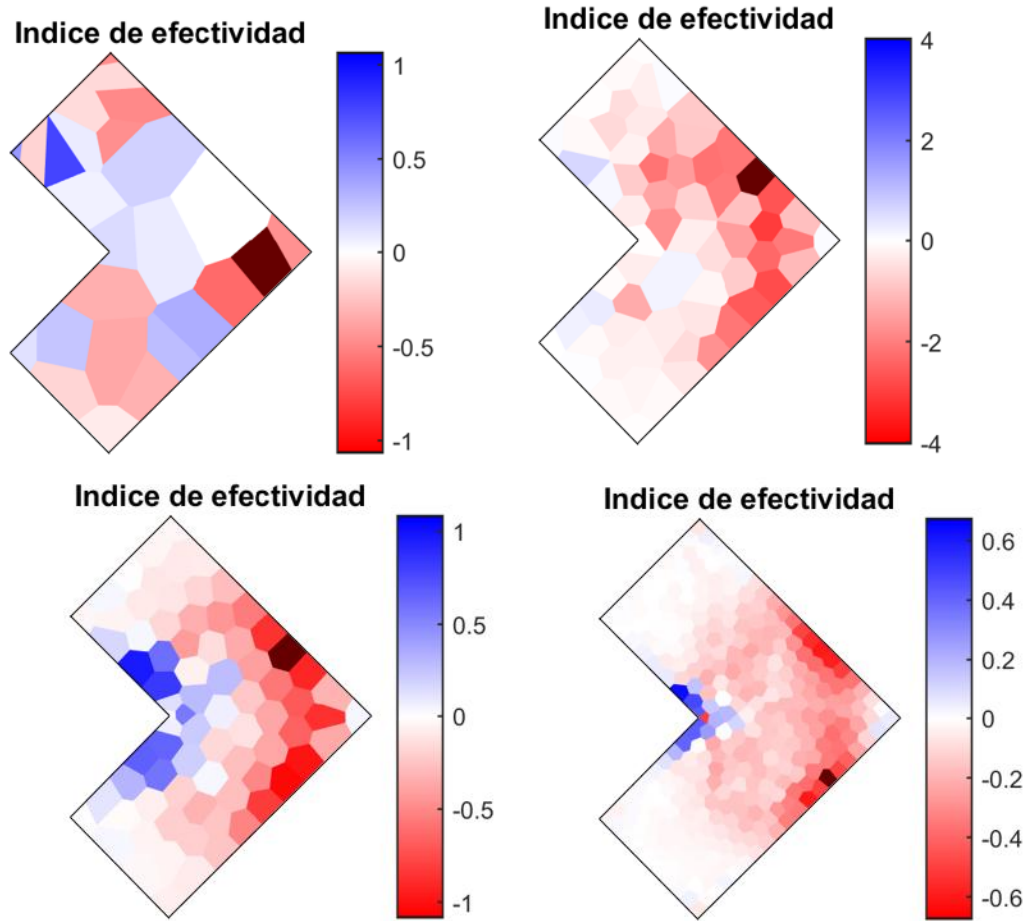
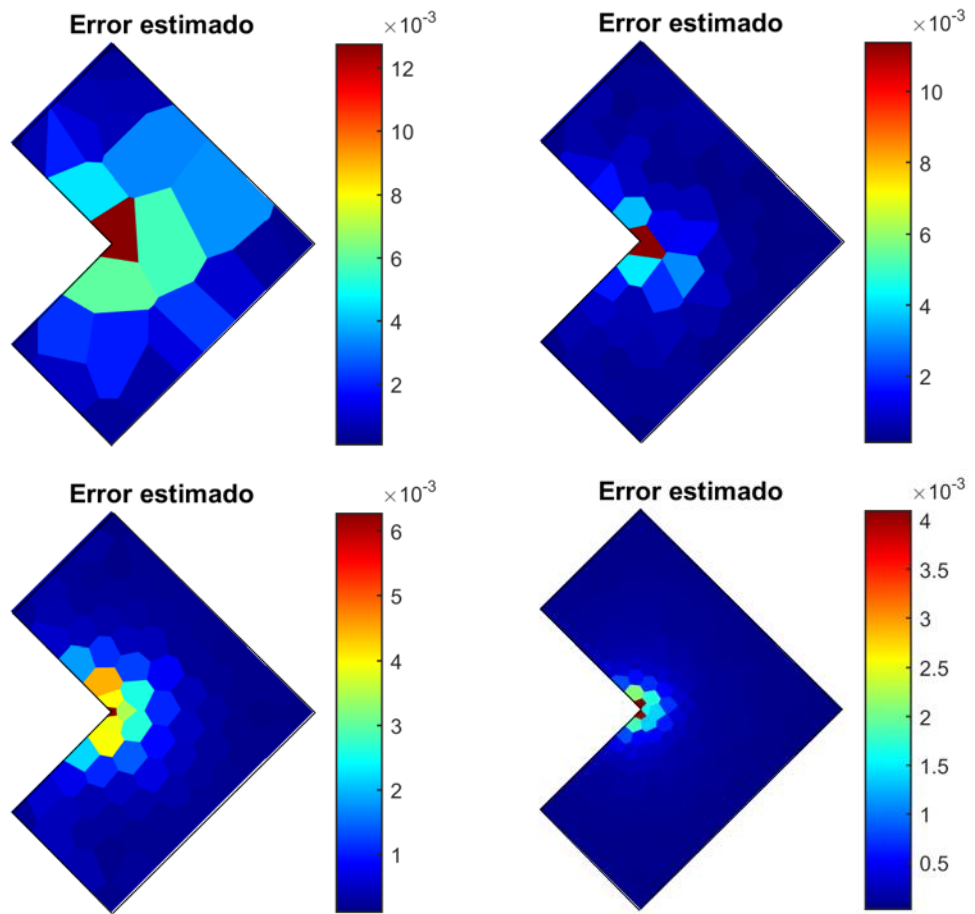


Figura 34 Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento Uniforme.



9.3.2 Estrategia de Equidistribución.

Figura 35 Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.

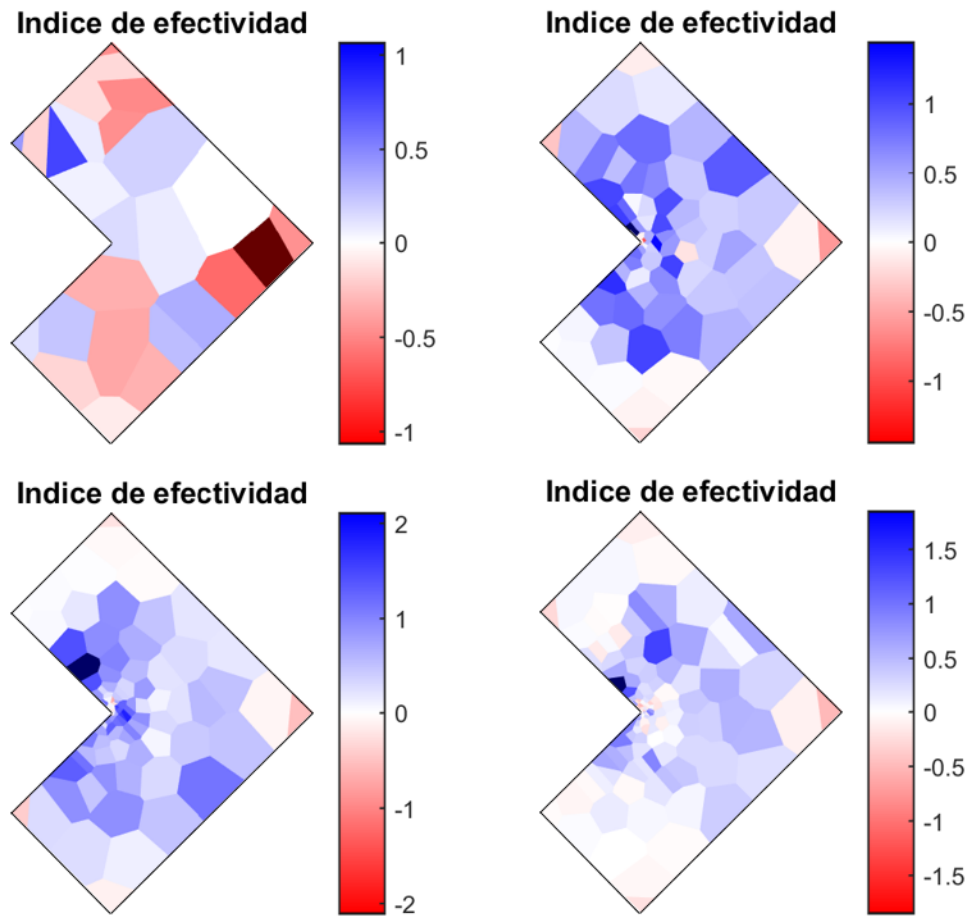
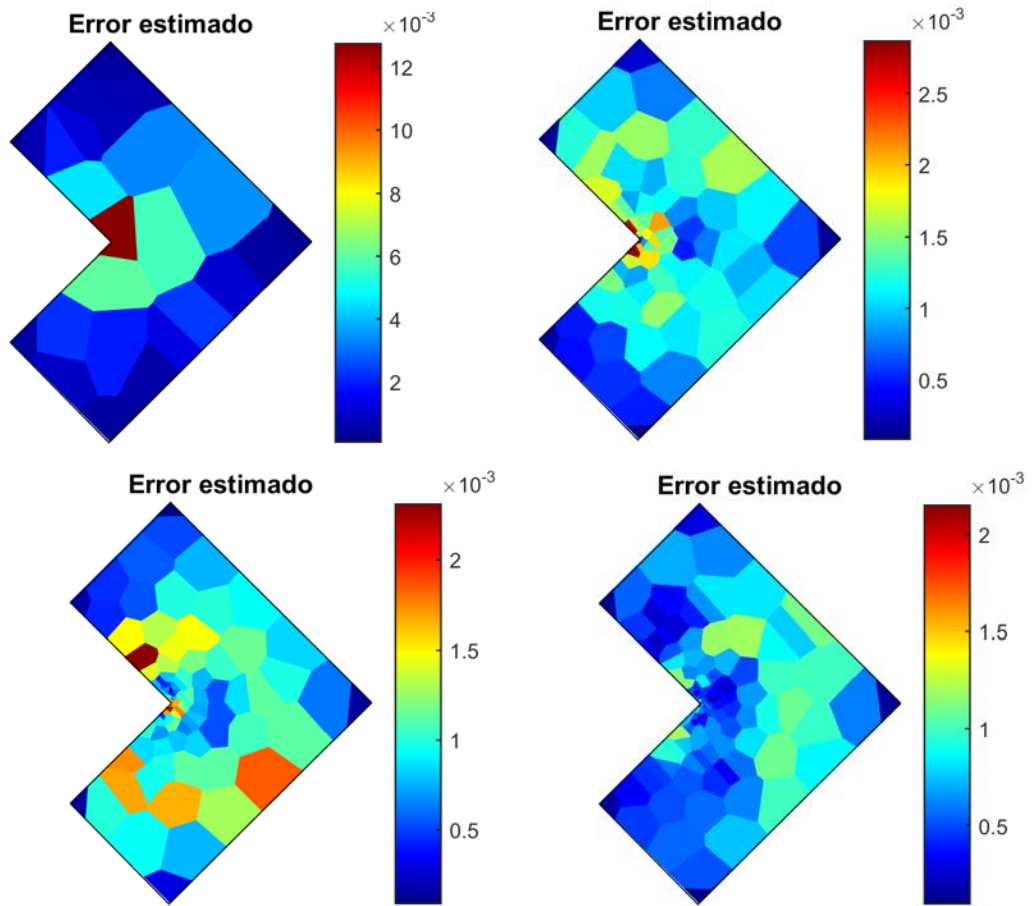


Figura 36 Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Equidistribución.



9.3.3. Estrategia de Li y Bettes

Figura 37 Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.

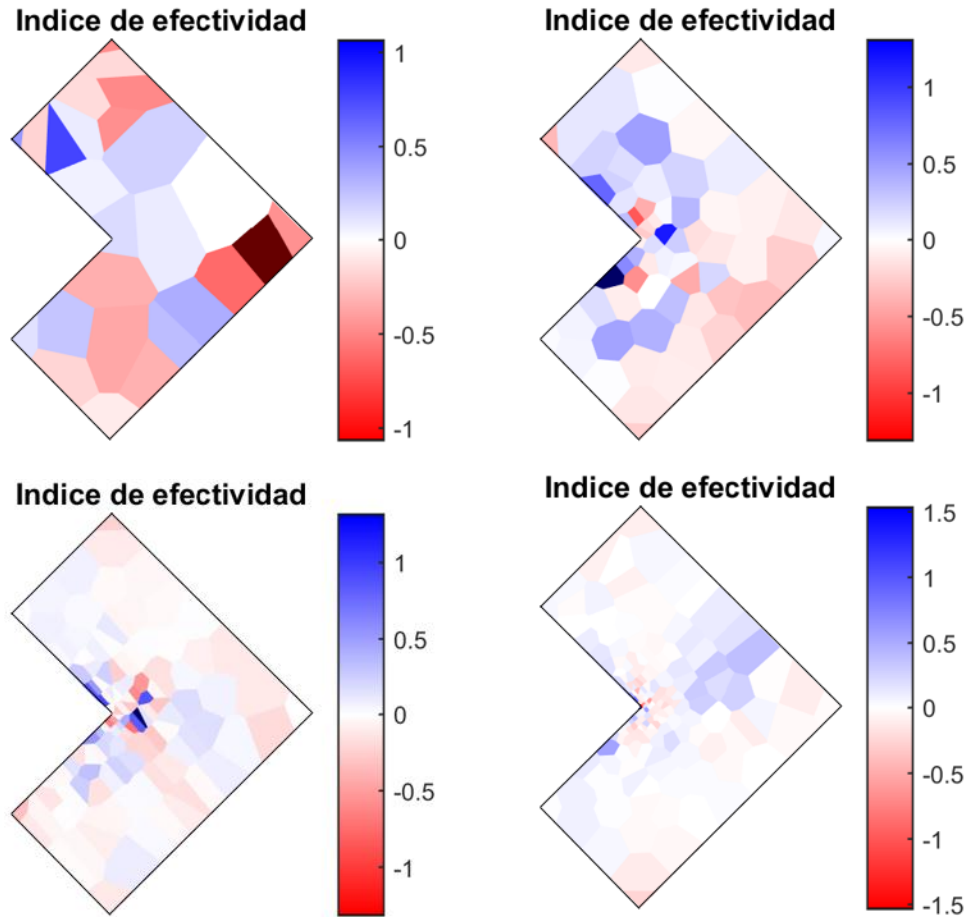
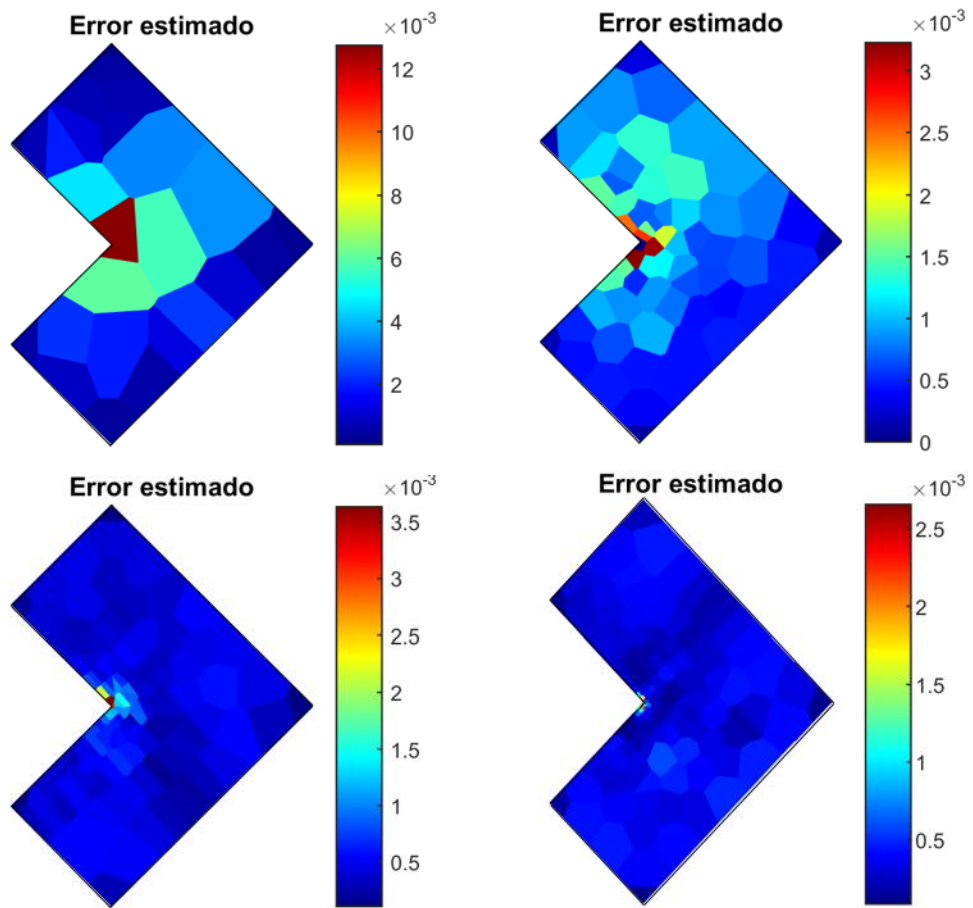


Figura 38 Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Li y Bettes.



9.3.4. Estrategia de Zienkiewicz y Zhu

Figura 39 Dominio en L. Efectividad en cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz

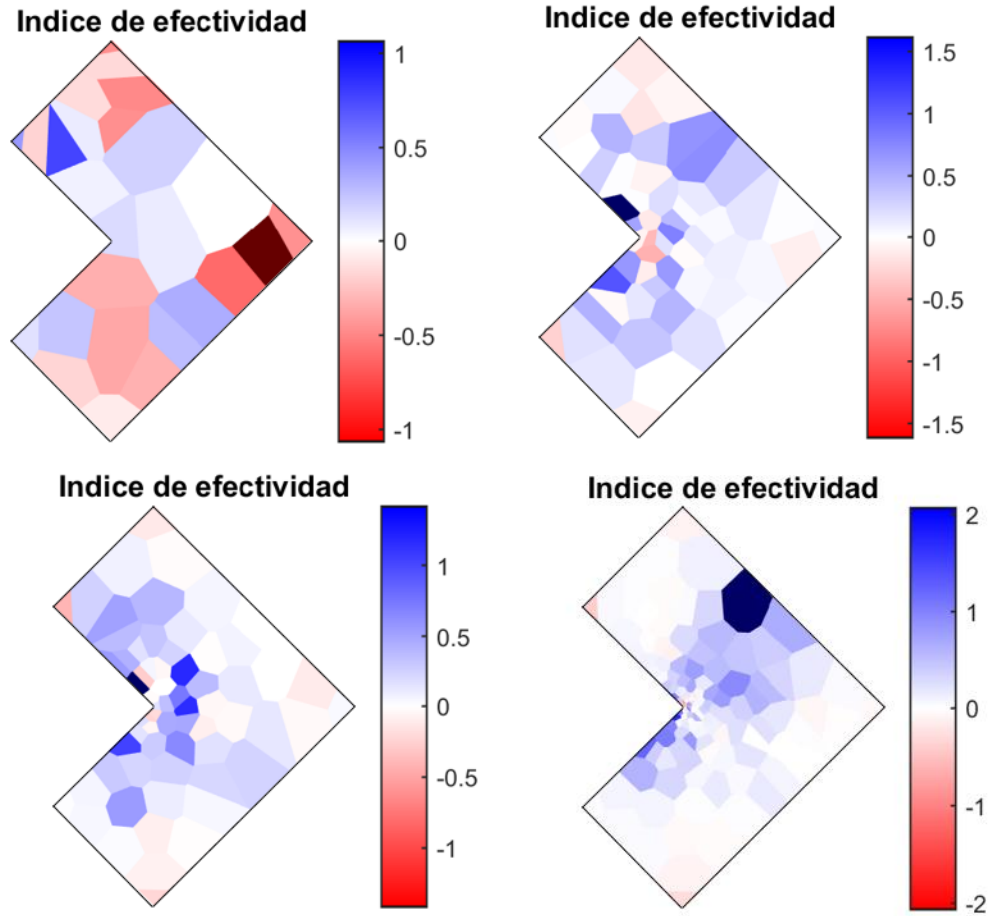


Figura 40 Dominio en L. Error estimado en norma energética para cada elemento. Refinamiento adaptativo. Estrategia de Zienkiewicz.

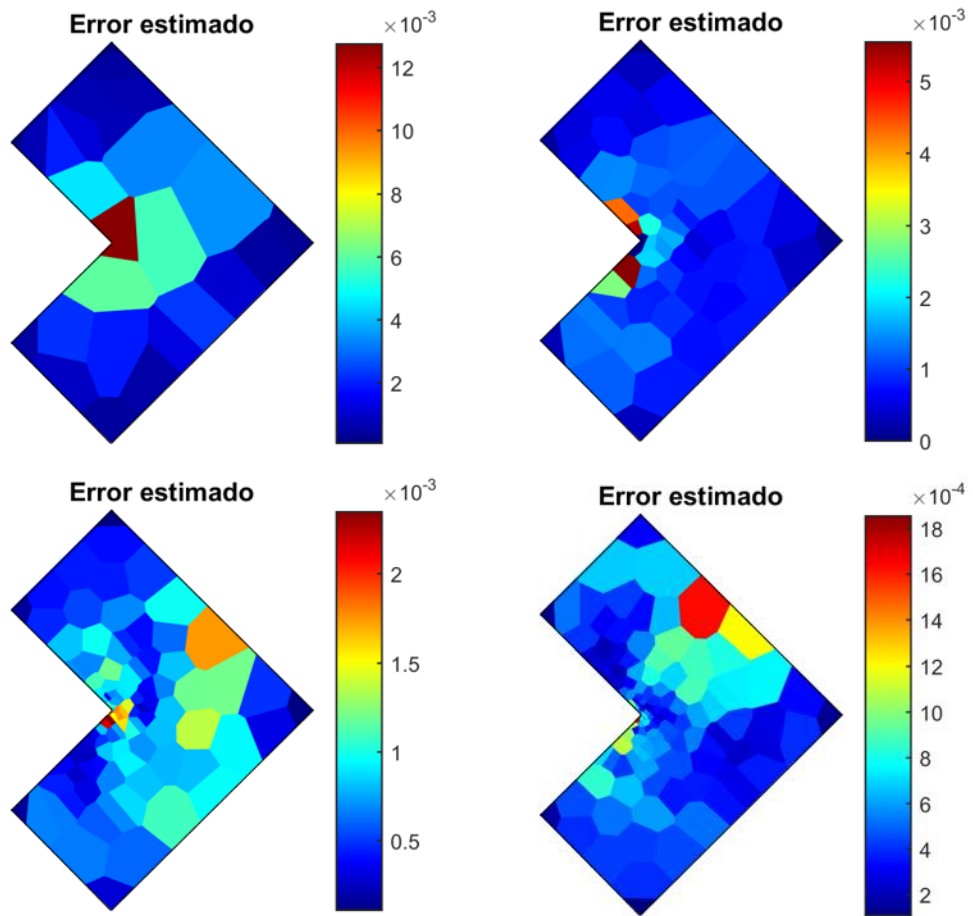
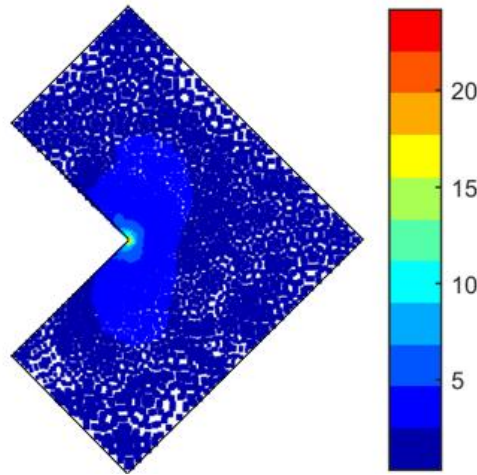


Figura 41 Integración.



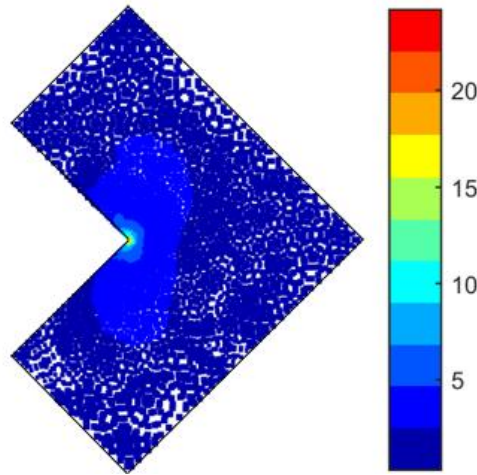
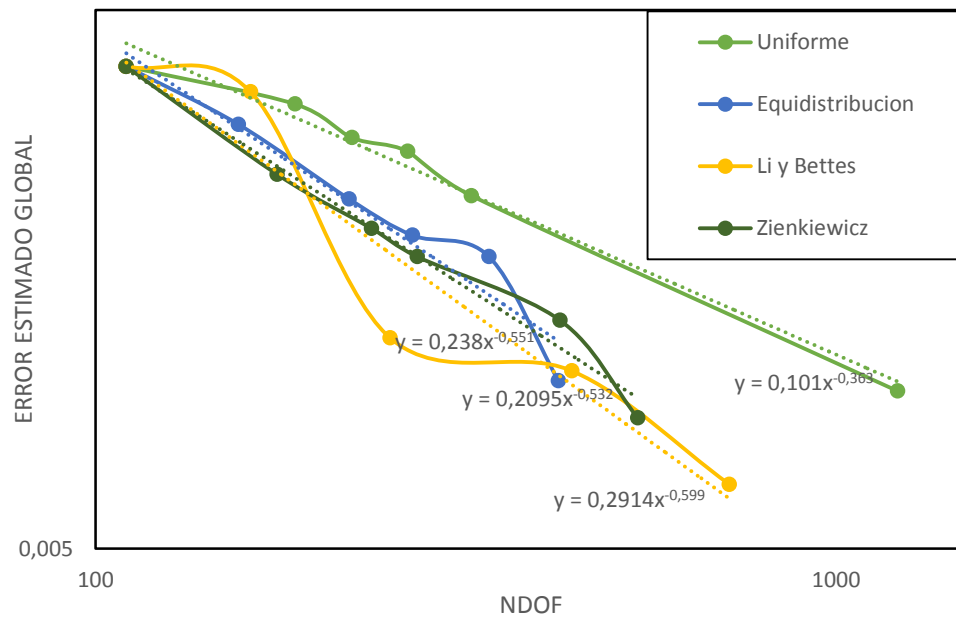
En la  podemos ver la distribución de esfuerzos sobre el dominio, observando esta gráfica se ve que el esfuerzo máximo se localiza sobre la esquina, que es tratada como una singularidad, y es donde se presenta el gradiente más alto de esfuerzos.

Figura 42 Dominio en L. Velocidad de convergencia de cada estrategia.



Uniforme	Equidistribución	Li y Bettles	Zienkiewicz
0.36	0.55	0.6	0.53

Tabla 6 Dominio en L. Pendientes de curvas de velocidad de convergencia. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** vemos las pendientes que representan las velocidades de convergencia, para las tres estrategias de refinamiento adaptativo presentan unos valores similares, prácticamente doblando al refinamiento uniforme.

En [47] tomando la ley de convergencia, para una singularidad geométrica como la de este ejemplo, la pendiente de la curva de velocidad de convergencia para refinamiento uniforme debe ser igual a 0.25 y para el refinamiento uniforme en teoría debe ser igual a 0.5 lo que indica que tanto en refinamiento uniforme como en refinamiento adaptativo nuestros valores están por encima de los teóricos.

En las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

, **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los errores estimados $\|e_{es}^e\|$ para las estrategias de refinamiento adaptativo, los elementos con mayor valor de error estimado $\|e_{es}^e\|$ se encuentran en los alrededores de la esquina entrante, por lo que el refinamiento se va a llevar a cabo en esa sección, lo que implicará una reducción del tamaño de esos elementos mucho más acelerada que los del resto del dominio. Mientras que en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los errores estimados $\|e_{es}^e\|$ para el refinamiento uniforme donde no hay una reducción de tamaño concentrada en ninguna sección en específico.

En las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los índices de efectividad local que para los dos tipos de refinamiento con sus

diferentes estrategias muestran valores aceptables lo que nos indica que la solución obtenida es una muy buena aproximación con respecto a la solución exacta.

10. CONCLUSIONES

Se presentaron tres estrategias de refinamiento h -adaptativo bajo un criterio de malla óptima, en el que la distribución del error estimado en norma energética debe ser igual para todos los elementos de esta y se compararon los resultados con la técnica de refinamiento uniforme, para los ejemplos de dominio en forma de L y cilindro con presión interna, se visualizó una mejoría en los valores de velocidad de convergencia.

Se integró el estimador de error para mallas poligonales con un proceso de refinamiento h -adaptativo para tres tipos de problemas.

En especial para el problema del cilindro con presión interna los elementos poligonales presentan una notoria mejoría en la velocidad de convergencia con respecto a los elementos cuadrados y triangulares.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] S. Moorthy and S. Ghosh, "Adaptivity and convergence in the Voronoi cell finite element model for analyzing heterogeneous materials," *Methods*, vol. 185, pp. 37–74, 2000.
- [2] G. Dasgupta, "Interpolants within Convex Polygons: Wachspress' Shape Functions," *J. Aerosp. Eng.*, vol. 16, no. 1, pp. 1–8, Jan. 2003.
- [3] P. Pavankumar, K. Jayabal, and A. Arockiarajan, "A Comparative Study Between Finite Element and Polygonal Finite Element Approaches for Electromechanical Coupled Linear Problems," *Integr. Ferroelectr.*, vol. 120, no. 1, pp. 90–101, Nov. 2010.
- [4] K. Jayabal, A. Menzel, A. Arockiarajan, and S. M. Srinivasan, "Micromechanical modelling of switching phenomena in polycrystalline piezoceramics: application of a polygonal finite element approach," *Comput. Mech.*, vol. 48, no. 4, pp. 421–435, Apr. 2011.
- [5] N. Sukumar and A. Tabarraei, "Conforming polygonal finite elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 61, no. 12, pp. 2045–2066, Nov. 2004.
- [6] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, Feb. 1987.
- [7] L. ~Y. Li, P. Bettles, J. ~W. Bull, T. Bond, and I. Applegarth, "Theoretical formulations for adaptive finite element computations," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 11, no. February, pp. 857–868, 1995.
- [8] F. J. Fuenmayor, "Definición de malla óptima en refinamiento h-adaptativo para múltiples casos de carga," vol. 9.
- [9] P. Coorevits and E. Bellenger, "Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 40, no. 9–10, pp. 1195–1215, Jun. 2004.
- [10] O. González-Estrada and S. Natarajan, "Recovery-Based Error Estimation

for the Polygonal Finite Element Method for Smooth and Singular Linear Elasticity,” *Wccm-Eccm-Ecfd2014.Org*, pp. 1–27, 2014.

- [11] I. Babuška and W. C. Rheinboldt, “Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 34, no. 1–3, pp. 895–937, Sep. 1982.
- [12] R. Verfürth, “A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 50, no. 1–3, pp. 67–83, May 1994.
- [13] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [14] E. L. Wachspress, “A Rational Basis for Function Approximation,” *IMA J. Appl. Math.*, vol. 11, no. 1, pp. 83–104, Feb. 1973.
- [15] R. Sibson, “A vector identity for the Dirichlet tessellation,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 87, no. 01, p. 151, 1980.
- [16] E. Cueto, N. Sukumar, B. Calvo, M. A. Martínez, J. Cegoñino, and M. Doblaré, “Overview and recent advances in natural neighbour galerkin methods,” *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 10, no. 4, pp. 307–384, Dec. 2003.
- [17] J. W. Yoo, B. Moran, and J.-S. Chen, “Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 60, no. 5, pp. 861–890, Jun. 2004.
- [18] N. Sukumar and T. Belytschko, “The natural element method in solid mechanics,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 43, no. 5, pp. 839–887, 1998.
- [19] N. Sukumar, “The Natural Element Method in Solid Mechanics. PhD Thesis,” 1998. [Online]. Available: <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/thesis/Thesis.pdf>. [Accessed: 24-Jan-2016].
- [20] N. H. Christ, R. Friedberg, and T. D. Lee, “Weights of links and plaquettes in a random lattice,” *Nucl. Phys. B*, vol. 210, no. 3, pp. 337–346, Oct. 1982.
- [21] V. V. Belikov, V. D. Ivanov, V. K. Kontorovich, S. A. Korytnik, and A. Y. Semenov, “The non-Sibsonian interpolation : A new method of interpolation

- of the values of a function on an arbitrary set of points,” *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 37, no. 1, pp. 9–15.
- [22] H. HIYOSHI and K. SUGIHARA, “Two generalizations of an interpolant based on voronoi diagrams,” *Int. J. Shape Model.*, vol. 05, no. 02, pp. 219–231, Dec. 1999.
- [23] S. Natarajan, S. Bordas, and D. Roy Mahapatra, “Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz-Christoffel conformal mapping,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 80, no. 1, pp. 103–134, Oct. 2009.
- [24] S. E. Mousavi, H. Xiao, and N. Sukumar, “Generalized Gaussian quadrature rules on arbitrary polygons,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, p. n/a–n/a, 2009.
- [25] T. Nguyen-Thoi, G. R. Liu, and H. Nguyen-Xuan, “An n-sided polygonal edge-based smoothed finite element method (nES-FEM) for solid mechanics,” *Int. j. numer. method. biomed. eng.*, p. n/a–n/a, Mar. 2010.
- [26] J. N. Lyness and G. Monegato, “Quadrature Rules for Regions Having Regular Hexagonal Symmetry,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 283–295, Apr. 1977.
- [27] A. Sommariva and M. Vianello, “Gauss–Green cubature and moment computation over arbitrary geometries,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 231, no. 2, pp. 886–896, Sep. 2009.
- [28] V. Thiagarajan and V. Shapiro, “Adaptively weighted numerical integration over arbitrary domains,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 67, no. 9, pp. 1682–1702, May 2014.
- [29] P. Ladeveze and D. Leguillon, “Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 20, no. 3, pp. 485–509, Jun. 1983.
- [30] F. Pled, L. Chamoin, and P. Ladevèze, “An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses,” *Comput. Mech.*, vol. 49, no. 3, pp. 357–378, Sep. 2011.

- [31] M. Ainsworth and J. T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [32] G. R. Liu, *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, Second Edition*. 2009.
- [33] P. Díez, J. José Ródenas, and O. C. Zienkiewicz, “Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 69, no. 10, pp. 2075–2098, Mar. 2007.
- [34] J. J. Ródenas, M. Tur, F. J. Fuenmayor, and A. Vercher, “Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: the SPR-C technique,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 70, no. 6, pp. 705–727, May 2007.
- [35] J. J. Ródenas, O. A. González-Estrada, P. Díez, and F. J. Fuenmayor, “Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 37–40, pp. 2607–2621, Aug. 2010.
- [36] Q. Z. Xiao and B. L. Karihaloo, “Statically admissible stress recovery using the moving least squares technique,” in *Progress in Computational Structures Technology*, 2004, pp. 111–138.
- [37] Q. Z. Xiao and B. L. Karihaloo, “Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 66, no. December 2005, pp. 1378–1410, 2006.
- [38] A. Huerta, Y. Vidal, and P. Villon, “Pseudo-divergence-free element free Galerkin method for incompressible fluid flow,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, no. 12–14, pp. 1119–1136, Mar. 2004.
- [39] P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard, and J. P. Moreau, “Local error estimators for finite element linear analysis,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 176, no. 1–4, pp. 231–246, Jul. 1999.
- [40] S. Bordas and M. Duflot, “Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196,

- no. 35–36, pp. 3381–3399, Jul. 2007.
- [41] J. J. Ródenas, O. A. González-Estrada, J. E. Tarancón, and F. J. Fuenmayor, “A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular + smooth stress field splitting,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 76, no. 4, pp. 545–571, Oct. 2008.
- [42] C. F. Shih and R. J. Asaro, “Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding,” *J. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 2, p. 299, Jun. 1988.
- [43] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, “Errors, Recovery Processes, and Error Estimates,” *Finite Elem. Method its Basis Fundam.*, pp. 493–543, 2013.
- [44] L.-Y. Li and P. Bettess, “Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations,” *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 11, no. 11, pp. 911–915, 1995.
- [45] O. C. Zienkiewicz, “Adaptive techniques in the finite element method.” Department of Civil Engineering, University of Swansea, SA2,8PP. U.K, Swansea, 1988.
- [46] B. A. Szabo and I. Babuška, *Finite Element Analysis*. 1991.
- [47] W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*, vol. 2013. 2013.

BIBLIOGRAFIA

A. Szabo and I. Babuška, *Finite Element Analysis*. 1991.

Babuška and W. C. Rheinboldt, "Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 34, no. 1–3, pp. 895–937, Sep. 1982.

E. Cueto, N. Sukumar, B. Calvo, M. A. Martínez, J. Cegoñino, and M. Doblaré, "Overview and recent advances in natural neighbour galerkin methods," *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 10, no. 4, pp. 307–384, Dec. 2003.

E. L. Wachspress, "A Rational Basis for Function Approximation," *IMA J. Appl. Math.*, vol. 11, no. 1, pp. 83–104, Feb. 1973.

F. J. Fuenmayor, "Definición de malla óptima en refinamiento h-adaptativo para múltiples casos de carga," vol. 9.

F. Pled, L. Chamoin, and P. Ladevèze, "An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses," *Comput. Mech.*, vol. 49, no. 3, pp. 357–378, Sep. 2011.

F. Shih and R. J. Asaro, "Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding," *J. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 2, p. 299, Jun. 1988.

G. Dasgupta, "Interpolants within Convex Polygons: Wachspress' Shape Functions," *J. Aerosp. Eng.*, vol. 16, no. 1, pp. 1–8, Jan. 2003.

G. R. Liu, *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, Second Edition. 2009.

H. HIYOSHI and K. SUGIHARA, "Two generalizations of an interpolant based on voronoi diagrams," *Int. J. Shape Model.*, vol. 05, no. 02, pp. 219–231, Dec. 1999.

Huerta, Y. Vidal, and P. Villon, "Pseudo-divergence-free element free Galerkin method for incompressible fluid flow," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, no. 12–14, pp. 1119–1136, Mar. 2004.

J. J. Ródenas, M. Tur, F. J. Fuenmayor, and A. Vercher, "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: the SPR-C technique," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 70, no. 6, pp. 705–727, May 2007.

J. J. Ródenas, O. A. González-Estrada, J. E. Tarancón, and F. J. Fuenmayor, "A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular + smooth stress field splitting," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 76, no. 4, pp. 545–571, Oct. 2008.

J. J. Ródenas, O. A. González-Estrada, P. Díez, and F. J. Fuenmayor, "Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 37–40, pp. 2607–2621, Aug. 2010.

J. N. Lyness and G. Monegato, "Quadrature Rules for Regions Having Regular Hexagonal Symmetry," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 283–295, Apr. 1977.

J. W. Yoo, B. Moran, and J.-S. Chen, "Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 60, no. 5, pp. 861–890, Jun. 2004.

K. Jayabal, A. Menzel, A. Arockiarajan, and S. M. Srinivasan, "Micromechanical modelling of switching phenomena in polycrystalline piezoceramics: application of a polygonal finite element approach," *Comput. Mech.*, vol. 48, no. 4, pp. 421–435, Apr. 2011.

L. -Y. Li, P. Bettess, J. -W. Bull, T. Bond, and I. Applegarth, "Theoretical formulations for adaptive finite element computations," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 11, no. February, pp. 857–868, 1995.

L.-Y. Li and P. Bettess, "Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations," *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 11, no. 11, pp. 911–915, 1995.

M. Ainsworth and J. T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2000.

N. H. Christ, R. Friedberg, and T. D. Lee, "Weights of links and plaquettes in a random lattice," *Nucl. Phys. B*, vol. 210, no. 3, pp. 337–346, Oct. 1982.

N. Sukumar and A. Tabarraei, "Conforming polygonal finite elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 61, no. 12, pp. 2045–2066, Nov. 2004.

N. Sukumar and T. Belytschko, "The natural element method in solid mechanics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 43, no. 5, pp. 839–887, 1998.

N. Sukumar, "The Natural Element Method in Solid Mechanics. PhD Thesis," 1998. [Online]. Available: <http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/thesis/Thesis.pdf>. [Accessed: 24-Jan-2016].

O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, Feb. 1987.

O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000.

O. C. Zienkiewicz, "Adaptive techniques in the finite element method." Department of Civil Engineering, University of Swansea, SA2,8PP. U.K, Swansea, 1988.

O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, "Errors, Recovery Processes, and Error Estimates," *Finite Elem. Method its Basis Fundam.*, pp. 493–543, 2013.

O. González-Estrada and S. Natarajan, "Recovery-Based Error Estimation for the Polygonal Finite Element Method for Smooth and Singular Linear Elasticity," *Wccm-Eccm-Ecfd2014.Org*, pp. 1–27, 2014.

P. Coorevits and E. Bellenger, "Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 40, no. 9–10, pp. 1195–1215, Jun. 2004.

P. Díez, J. José Ródenas, and O. C. Zienkiewicz, "Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 69, no. 10, pp. 2075–2098, Mar. 2007.

P. Ladeveze and D. Leguillon, "Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 20, no. 3, pp. 485–509, Jun. 1983.

P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard, and J. P. Moreau, "Local error estimators for finite element linear analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 176, no. 1–4, pp. 231–246, Jul. 1999.

P. Pavankumar, K. Jayabal, and A. Arockiarajan, "A Comparative Study Between Finite Element and Polygonal Finite Element Approaches for Electromechanical Coupled Linear Problems," *Integr. Ferroelectr.*, vol. 120, no. 1, pp. 90–101, Nov. 2010.

Q. Z. Xiao and B. L. Karihaloo, "Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 66, no. December 2005, pp. 1378–1410, 2006.

Q. Z. Xiao and B. L. Karihaloo, "Statically admissible stress recovery using the moving least squares technique," in *Progress in Computational Structures Technology*, 2004, pp. 111–138.

R. Sibson, "A vector identity for the Dirichlet tessellation," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 87, no. 01, p. 151, 1980.

R. Verfürth, "A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 50, no. 1–3, pp. 67–83, May 1994.

S. Bordas and M. Duflo, "Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 35–36, pp. 3381–3399, Jul. 2007.

S. E. Mousavi, H. Xiao, and N. Sukumar, "Generalized Gaussian quadrature rules on arbitrary polygons," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, p. n/a–n/a, 2009.

S. Moorthy and S. Ghosh, "Adaptivity and convergence in the Voronoi cell finite element model for analyzing heterogeneous materials," *Methods*, vol. 185, pp. 37–74, 2000.

S. Natarajan, S. Bordas, and D. Roy Mahapatra, "Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz-Christoffel conformal mapping," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 80, no. 1, pp. 103–134, Oct. 2009.

Sommariva and M. Vianello, "Gauss–Green cubature and moment computation over arbitrary geometries," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 231, no. 2, pp. 886–896, Sep. 2009.

T. Nguyen-Thoi, G. R. Liu, and H. Nguyen-Xuan, "An n-sided polygonal edge-based smoothed finite element method (nES-FEM) for solid mechanics," *Int. j. numer. method. biomed. eng.*, p. n/a–n/a, Mar. 2010.

V. Thiagarajan and V. Shapiro, "Adaptively weighted numerical integration over arbitrary domains," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 67, no. 9, pp. 1682–1702, May 2014.

V. V. Belikov, V. D. Ivanov, V. K. Kontorovich, S. A. Korytnik, and A. Y. Semenov, "The non-Sibsonian interpolation : A new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points," *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 37, no. 1, pp. 9–15.

W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*, vol. 2013. 2013.