

SIMULACIÓN DE FLUJO MONOFÁSICO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS
MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA LEY DE DARCY Y EL MÉTODO DE
VOLÚMENES FINITOS.

JUAN CARLOS MADIEDO DEVIA

CARLOS DANIEL BARRERA DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

BUCARAMANGA

2018

SIMULACIÓN DE FLUJO MONOFÁSICO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS
MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA LEY DE DARCY Y EL MÉTODO DE
VOLÚMENES FINITOS.

JUAN CARLOS MADIEDO DEVIA

CARLOS DANIEL BARRERA DÍAZ

Proyecto de grado para optar al título de ingeniero mecánico

Director: Dr. David Alfredo Fuentes Díaz.

Codirector: Dr. Manuel del Jesús Martínez.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2018

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	19
1. OBJETIVOS	21
1.1 OBJETIVO GENERAL	21
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	21
2. IDENTIFICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	22
2.1 PARÁMETROS CARCTERÍSTICOS DEL FLUJO EN MEDIO POROSO.....	22
2.1.1 Porosidad.....	24
2.1.2 Permeabilidad	26
2.1.3 Ley de Darcy.....	27
2.2 ECUACIÓN GENERAL.....	29
2.2.1 Modelo incompresible	32
2.2.2 Modelo de compresibilidad constante.....	32
2.2.3 Modelo ligeramente compresible	33
3. DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO	34
3.1. PROCESO DE MALLADO	34
3.2. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN	36

3.3. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO INCOMPRESIBLE:.....	37
3.4. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO DE COMPRESIBILIDAD CONSTANTE ..	39
3.5. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO LIGERAMENTE COMPRESIBLE	41
3.6. CONDICIONES DE FRONTERA	42
3.6.1 Condición Dirichlet	43
3.6.2 Condición Newmann:.....	43
3.7. SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	43
4. PROGRAMACIÓN	46
4.1. DESARROLLO DE LA INTERFAZ GRÁFICA DEL PROGRAMA	46
4.2. GENERACIÓN DEL ARCHIVO DE PROPIEDADES.....	48
4.3. ADAPTACIÓN DE RUTINAS DE CÁLCULO	49
4.3.1. Clase CPoroso para flujo incompresible	50
4.3.2. Clase CPorosoComp para flujo con compresibilidad constante o ligeramente compresible	55
5. SIMULACIÓN DE <i>BENCHMARKS</i>	57
5.1 ADAPTACION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA	57
5.1.1 Dirichlet.....	57
5.1.2 Newmann:.....	58
5.2. DESARROLLO DEL TERMINO FUENTE (q).....	59

5.3 MODELO PARA POZOS PRODUCTORES	60
5.4 <i>THE QUARTER-FIVE SPOT PROBLEM (BENCHMARK 1)</i>	62
5.5 <i>LINEAR PRESSURE DROP (BENCHMARK 2)</i>	66
5.6 <i>HYDROSTATIC BOUNDARY CONDITIONS (BENCHMARK 3)</i>	71
5.7. <i>FIRST WELL EXAMPLE (BENCHMARK 4)</i>	76
5.8 <i>CONSTANT COMPRESSIBILITY (BENCHMARK 5)</i>	82
5.9 CONSIDERACIONES.....	89
6. CASO DE ESTUDIO	90
7. CONCLUSIONES.....	104
7.1 RECOMENDACIONES.....	105
8. BIBLIOGRAFIA	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Volumen de control	30
Figura 2. Volumen de control bidimensional	35
Figura 3. Volumen de control tridimensional	35
Figura 4. Volumen de control unidimensional	37
Figura 5. Enumeración de los lados para 2D(a) y de las caras para 3D(b)	47
Figura 6. Cálculo de presión a partir del potencial hidráulico(ϕ).....	52
Figura 7. Volumen de control unidimensional	53
Figura 8. Volumen de control supuesto para el cálculo del flujo volumétrico.....	54
Figura 9. <i>Benchmark 1</i> : Distribución de presiones y líneas de flujo para la simulación en el MRST.....	64
Figura 10. <i>Benchmark 1</i> : Distribución de presiones y líneas de flujo calculadas en el software desarrollado.....	65
Figura 11. Planteamiento <i>Benchmark 2</i>	67
Figura 12. <i>Benchmark 2</i> : Distribución de presiones para la simulación en el MRST.	69
Figura 13. <i>Benchmark 2</i> : Distribución de presiones calculados en el software desarrollado.	69
Figura 14. <i>Benchmark 2</i> . Líneas de flujo a lo largo del eje x volumen de control.	70

Figura 15. <i>Benchmark 2</i> . Distribución de presiones a lo largo de una línea de flujo.	70
Figura 16. <i>Benchmark 3</i> : Condiciones iniciales del problema.....	72
Figura 17. <i>Benchmark 3</i> : Distribución de presiones para la simulación en el MRST.	73
Figura 18. <i>Benchmark 3</i> . Distribución de presiones calculados en el software desarrollado.	74
Figura 19. <i>Benchmark 3</i> . Isocontornos de presión obtenidos en la simulación.	75
Figura 20. <i>Benchmark 4</i> : Ubicación del pozo inyector y productor.	76
Figura 21. <i>Benchmark 4</i> : Distribución de presiones para la simulación en el MRST.	78
Figura 22. <i>Benchmark 4</i> : Distribución de presiones calculados en el software desarrollado.	79
Figura 23. <i>Benchmark 4</i> : Resultados de los flujos en el pozo productor para la simulación original	80
Figura 24. <i>Benchmark 4</i> : Resultados de los flujos en el pozo productor para la simulación original.	81
Figura 25. <i>Benchmark 5</i> : Estado inicial del volumen de control.....	83
Figura 26. <i>Benchmark 5</i> : Distribución de presiones para la simulación en el MRST para distintos pasos de tiempo.	85
Figura 27. <i>Benchmark 5</i> : Distribución de presiones calculadas en el software desarrollado para distintos pasos de tiempo.....	86

Figura 28. <i>Benchmark</i> 5: Flujos de salida en el pozo productor para todos los pasos de tiempo	87
Figura 29: Caso de estudio en la vida real.....	90
Figura 30: Diagrama del caso de estudio	91
Figura 31: Volumen de control simulado.....	92
Figura 32: Simulación de referencia	96
Figura 33: Simulación desprecianado los efectos gravitatorios	96
Figura 34: Simulación con $\Delta h = 50 \text{ m}$	97
Figura 35: Simulación con $\Delta h = 100 \text{ m}$	97
Figura 36: Flujo Volumétrico[$m^3/día$] vs Distancia [m] para $\Delta h=50 [m]$ y $\Delta h=100 [m]$	98
Figura 37: Simulación con mayor permeabilidad en X.....	99
Figura 38: Simulación con mayor permeabilidad en Y.....	99
Figura 39. Simulación ligeramente compresible con porosidad $\phi = 0.2$	101
Figura 40. Simulación ligeramente compresible con porosidad $\phi = 0.5$	102
Figura 41. Estado estacionario del caso de estudio para las dos situaciones.	103
Figura 42. Comparativa flujo de caso de estudio para porosidad $\phi = 0.2$ y $\phi = 0.5$	103

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Datos de entrada <i>Benchmark 1</i>	63
Tabla 2. <i>Benchmark 1</i> : Medición de error en los resultados para los valores de presión.....	65
Tabla 3. <i>Benchmark 1</i> : Medición de error en los resultados para los valores de presión excluyendo el elemento 1 del cálculo.....	66
Tabla 4. Datos de entrada <i>Benchmark 2</i>	66
Tabla 5. <i>Benchmark 2</i> : Medición de error en los resultados para los valores de presión.....	71
Tabla 6. <i>Benchmark 3</i> : Medición de error en los resultados para los valores de presión.....	75
Tabla 7. Datos de entrada <i>Benchmark 4</i>	77
Tabla 8. Comparación entre los flujos dados por el MRST y los flujos calculados.	81
Tabla 9. <i>Benchmark 4</i> : Medición de error en los resultados para los valores de flujo.	82
Tabla 10. Datos de entrada <i>Benchmark 5</i>	83
Tabla 11. Parámetros de tiempo para el <i>Benchmark 5</i>	84
Tabla 12. <i>Benchmark 5</i> : Medición de error en los resultados para los valores de presión.....	87
Tabla 13. <i>Benchmark 5</i> : Comparación entre los flujos dados por el MRST y los flujos calculados.....	88

Tabla 14. *Benchmark* 5. Promedio del error y desviación estándar para el flujo. ..89

Tabla 15. Valores de K para distintos tipos de suelo en [*cm/seg*].....93

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Interfaz gráfica del programa desarrollado en Matlab	109
Anexo B. Archivo “.ent” para el <i>Benchmark 4</i>	110
Anexo C. Archivo “.geom” para el <i>Benchmark 4</i>	112
Anexo D. Archivo “.parts” para el <i>Benchmark 4</i>	113
Anexo E. Archivo “.boco” para el <i>Benchmark 4</i>	114
Anexo F. Archivo “.solver” para el <i>Benchmark 4</i>	115
Anexo G. Archivo con arreglo matricial de propiedades para 3D en una malla 3x3x3.	116
Anexo H. Diagrama de flujo del proceso de cálculo.....	119
Anexo I. Cálculo del índice productor de pozo para el <i>Benchmark 4</i> mediante EES.	121
Anexo J. Cálculo del índice productor de pozo para el <i>Benchmark 5</i> mediante EES.	123

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO DEFINICIÓN

h_{in}	Altura hidráulica a la entrada del tanque para la ley de Darcy
h_{out}	Altura hidráulica a la salida del tanque para la ley de Darcy
A	Área
\dot{Q}	Caudal
a	Coefficiente que acompaña al potencial de flujo en la ecuación discretizada
Γ	Coefficiente variable de la ecuación general de flujo en medio poroso
C_r	Compresibilidad de la roca
C_f	Compresibilidad del fluido
k	Conductividad hidráulica
ρ	Densidad
ρ_0	Densidad de referencia
δ_{Nn}	Distancia perpendicular entre el elemento N y la frontera n
v	Flujo volumétrico
$\Psi(\Phi)$	Función de la ecuación general de flujo en medio poroso
g	Gravedad
PI	Índice productor del pozo
L	Longitud del tanque
$\ V\ $	Norma del vector V
K	Permeabilidad
ϕ	Porosidad
ϕ_0	Porosidad de referencia
Φ	Potencial de flujo
P	Presión
P_0	Presión de referencia

Z	Profundidad ligada a la presión hidrostática
T	Temperatura
S	Término fuente de la ecuación discretizada
μ	Viscosidad
V	Volumen
V_v	Volumen de espacios vacíos en el medio poroso
V_{ms}	Volumen de la matriz sólida
V_t	Volumen total

RESUMEN

TITULO: SIMULACIÓN DE FLUJO MONOFÁSICO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA LEY DE DARCY Y EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS.

AUTORES: JUAN CARLOS MADIEDO DEVIA, CARLOS DANIEL BARRERA DÍAZ*

PALABRAS CLAVES: Medio poroso, Ley de Darcy, Volúmenes finitos, Ecuaciones diferenciales parciales, MRST.

DESCRIPCIÓN:

El flujo en medio poroso juega un papel importante en el panorama ingenieril debido a que existe un elevado número de materiales, en la naturaleza y elaborados por el hombre, que presentan estas propiedades. Por consiguiente, entender el comportamiento que describe a los fluidos al pasar a través de dichos medios es valioso para diversas aplicaciones industriales.

Este trabajo expone el desarrollo de software para la resolución de problemas usando la ley de Darcy para modelar flujo de fluidos a través de medios porosos. Asimismo, está basado en la adaptación de unas rutinas de cálculo elaboradas por el profesor Dr. David Alfredo Fuentes cuyo objetivo es resolver problemas de naturaleza difusiva en regímenes tanto estacionarios como transitorios.

En este documento, se explican las propiedades y las ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo de fluidos en medios porosos, así como el procedimiento necesario para adaptar las rutinas de cálculo a este caso específico.

En este orden de ideas, para validar los resultados arrojados por las simulaciones del software desarrollado, se utilizó el *Matlab Reservoir Simulation Toolbox* (MRST) y los resultados de algunos ejercicios ejemplo desarrollados en su libro guía.

Finalmente, se extienden las simulaciones a un caso de estudio de migración de aguas contaminadas a través de un medio poroso y se analiza la influencia de parámetros que intervienen en el flujo en medio poroso.

* Trabajo de grado para optar el título de Ingeniero Mecánico

* Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Dr. Alfredo David Fuentes Díaz, Ingeniero Mecánico. Codirector: Dr. Manuel del Jesús Martínez.

ABSTRACT

TITLE: SIMULATION OF ONE-PHASE FLOW THROUGH POROUS MEDIA APPLYING DARCY'S LAW AND FINITE VOLUME METHODS.

AUTHORS: CARLOS DANIEL BARRERA DÍAZ, JUAN CARLOS MADIEDO DEVIA*

KEY WORDS: Porous Media, Darcy's Law, Finite volume methods (FVM), Partial differential equations (PDE), MRST.

DESCRIPTION:

Porous media plays a role in everyday life as we find a handful of materials with these properties not only in nature, but man-made. Therefore, the understanding of the phenomena that occurs with fluid flowing through them is valuable for numerous industrial applications.

This research exposes the development of a software to solve problems that involve the flow of fluids through porous media modeled by the Darcy's law. Additionally, this work is based in the adaptation of some solving routines, made by Dr. David Alfredo Fuentes, which purpose is to solve problems of diffusive nature in steady and transient regimes.

Along this document, there are explained the properties and equations that rules the behavior of fluid flow through porous media in addition to the procedure of adaptation of the solving routines, to this specific case.

Correspondingly, to make the validation of the results thrown by the developed software, it is used the Matlab Reservoir Simulation Toolbox (MRST) and the results of some example exercises made in its guide book.

Finally, the simulations are extended to a study case in which occurs the migration of contaminated water through porous media and it's analyzed the influence of several properties that interfere in porous media flow.

* Bachelor Thesis

* Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Dr. Alfredo David Fuentes Díaz, Ingeniero Mecánico. Codirector: Dr. Manuel del Jesús Martínez.

INTRODUCCIÓN

El flujo en medio poroso juega un papel importante en el panorama ingenieril debido a que existe un elevado número de materiales en la naturaleza y elaborados por el hombre, que presentan las características del medio poroso; es el caso de suelos, cerámicas, tejidos biológicos y algunos materiales de construcción como el concreto y la arena, entre otros. Por consiguiente, entender el comportamiento que describe a los fluidos al pasar a través de dichos medios es valioso para diversas aplicaciones industriales.

Este trabajo expone el desarrollo de un software para la resolución de problemas usando la ley de Darcy como fundamento para modelar el flujo de fluidos a través de medios porosos. Asimismo, está basado en la adaptación de unas rutinas de cálculo desarrolladas en el lenguaje de programación C++, cuyo objetivo es resolver problemas de naturaleza difusiva en regímenes tanto estacionarios como transitorios. Dichas rutinas fueron elaboradas por el profesor PhD. David Alfredo Fuentes.

A lo largo de las siguientes páginas, se explican las propiedades y las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que rigen el comportamiento del flujo de fluidos en medios porosos y cómo estas difieren de las ecuaciones de conducción de calor. Con base en esto, se procede a realizar las adaptaciones a las rutinas de cálculo para ajustarlas a este caso específico.

Sin embargo, se deben hacer las salvedades de que este estudio se enfoca en la resolución de dichos problemas a través del modelado de ecuaciones diferenciales parciales que, en su mayoría, son lineales. Adicionalmente, las simulaciones se realizan en volúmenes con geometrías sencillas (rectángulos en 2D y prismas rectangulares en 3D) mediante mallado estructurado para el método de volúmenes finitos (elementos cuadriláteros para 2D y hexaédricos para 3D).

Si bien, para obtener mejores resultados, se tienen en cuenta algunos conceptos como los modelos de producción en pozos, no se ahonda en la explicación de los mismos, dado que no es de interés para este documento. En este orden de ideas, el análisis de los resultados se limita a la interpretación del campo de presiones y los valores de flujo a través de las caras.

Asimismo, para validar los resultados arrojados por las simulaciones del software desarrollado, se utilizó el *Matlab Reservoir Simulation Toolbox* (MRST) y los resultados de algunos ejercicios resueltos que se desarrollan en el libro del MRST. A partir de estos ejercicios, se realizan las simulaciones y se evalúa la precisión y la exactitud de los resultados por medio del cálculo del error promedio de todos los puntos y de la desviación estándar de los errores calculados.

Finalmente, se extienden las simulaciones a situaciones que podrían presentarse en la realidad ejemplificadas en un caso de estudio de migración de aguas contaminadas, mediante el análisis de la influencia de parámetros del flujo en medio poroso como la preponderancia de los efectos gravitatorios, la diferencia de presiones que mueven el fluido, el tensor de permeabilidad y la porosidad.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

- Simular el flujo de fluidos en medios porosos mediante la implementación de la ley de Darcy y el método de volúmenes finitos.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar el modelo matemático que describa el comportamiento de los fluidos al ser expuestos a un medio poroso.
- Construir mediante el método de volúmenes finitos el modelo numérico que permita realizar el cálculo de la porosidad y las compresibilidades necesarias para solucionar el campo de potencial, de presiones y las velocidades macroscópicas de flujo.
- Simular escenarios de flujo en medio poroso resolviendo modelos de fluidos ligeramente compresibles, incompresibles y de compresibilidad constante.
- Analizar la influencia de la variación de las propiedades tales como porosidad y permeabilidad en el estudio de un caso de migración de aguas contaminadas hacia una fuente hídrica.

2. IDENTIFICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

2.1 PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DEL FLUJO EN MEDIO POROSO

Al hablar de flujo en medio poroso se debe entender que este tipo de flujo se presenta en materiales cuya estructura consta de una matriz sólida que contiene espacios vacíos dentro de su disposición. Estas cavidades pueden o no estar interconectadas, por lo que cuando se considera el flujo de sustancias a través de este tipo de medios se debe tener en cuenta cómo se verá afectado el fluido por la configuración del entorno.

Diversos procesos industriales y naturales presentan elementos en donde intervienen materiales porosos. Es el caso de aplicaciones industriales como: la construcción, pues diversos materiales como el cemento, la arena y algunas cerámicas, poseen este tipo de configuración interna; algunos intercambiadores de calor funcionan bajo el principio de intercambio de fluidos en medios porosos. Además, se pueden encontrar ciertos fenómenos naturales que se rigen bajo este tipo de comportamiento como la migración de aguas subterráneas.

Del mismo modo, entre las principales aplicaciones del estudio de flujo a través de medios porosos se encuentra la extracción de crudo en yacimientos petroleros. Para este caso específico, el medio poroso está contenido en las rocas sedimentarias.

Estas rocas, son formadas en el transcurso de mucho tiempo por un proceso llamado sedimentación, en el que, por fenómenos climáticos y erosión, partículas minerales se desprenden de material sólido y se depositan en lo que posteriormente se convertirá en la roca sedimentaria. Asimismo, por un proceso similar, en estas

rocas quedan atrapadas partículas orgánicas que son remanentes de plantas, animales, algas y pequeños organismos que viven en el agua como el plancton.¹

Con el pasar del tiempo, se forman numerosas capas, que, por la aleatoriedad de este proceso varían mucho en su estructura, en el tamaño del grano de la roca y en el tipo de minerales contenidos en la misma. Este proceso se extiende a lo largo de periodos muy extensos de tiempo, pues los sedimentos crecen algunos centímetros cada cien años. De esta manera, después de un prolongado proceso, estas rocas quedan enterradas cada vez más profundo y las condiciones ambientales como la presión y la temperatura aumentan considerablemente, convirtiendo, el material orgánico contenido en la roca, en hidrocarburos tales como petróleo crudo y gas natural².

A la par con la formación de las diversas capas que constituyen la roca, la actividad volcánica y el movimiento de las placas tectónicas, afectan la estructura de los sedimentos, dejando atrás las características relativamente homogéneas y escalonadas para formar una configuración mucho más compleja que la inicial, introduciendo fracturas, deslizamientos dentro de la roca y creando pequeños espacios sin material sólido por medio de los cuáles fluirán los hidrocarburos posteriormente.³

¹ ANDREAS, Knut-lie. An introduction to reservoir simulation using matlab. [En línea]. SINTEF ICT. Oslo, Norway: Departement of Applied Mathematics. 2014. (Recuperado en 15 enero 2018.) Disponible en <https://www.sintef.no/contentassets/8af8db2e42614f7fb94fb0c68f5bc256/mrst-book-2014.pdf>

² *Íbid.*, p. 26

³ GONZÁLES POSSO, Camilos y RAMÍREZ ARANGO, Paula. Petróleo. [Base de datos en línea]. Abril 2013. Revista INDEPAZ sobre generalidades de la industria petrolera en Colombia. (Recuperado en 25 febrero 2018). Disponible en http://ediciones.indepaz.org.co/wp-content/uploads/2013/06/Petroleo-Generalidades_de_la_industria_petrolera_en_Colobia-Revista_Indepaz_2013.pdf

Por esto, todas las rocas sedimentarias adoptan dicha estructura de matriz sólida llena de espacios vacíos que pueden o no, estar interconectados entre sí. De ahí que estas rocas tengan propiedades que modifican la manera en la que se modela la extracción de los hidrocarburos y se deban considerar ciertos parámetros en el cálculo del flujo a través de éstas, tales como:

- La porosidad de la roca o capacidad para almacenar fluidos, que está dada por la razón entre el espacio vacío y el volumen total de la roca
- La permeabilidad o la capacidad para transmitir fluidos, que está regida por la interconexión de los poros.

2.1.1 Porosidad: La porosidad está definida como la razón entre el volumen de los espacios vacíos y el volumen total ocupado por el material poroso, es decir:

$$\phi = \frac{v_v}{v_t} = \frac{v_v}{v_v + v_{ms}} \quad (1)$$

Donde, v_v es el volumen que ocupan los espacios vacíos dentro del material poroso; v_{ms} es el volumen de la matriz sólida y v_t es el volumen total del medio.

Al ser esta magnitud una fracción del volumen tiene una naturaleza escalar adimensional y es una magnitud que varía entre cero y la unidad ($0 < \phi < 1$) y generalmente está regida por la distribución tanto de los poros como del tamaño del grano dentro del material poroso. Para efectos prácticos, los datos que se encuentran de porosidad para las rocas que se forman de manera natural varían, en la mayoría de los casos, entre 0,1 y 0,4⁴.

⁴ . AARNES, Jorg E; GIMSE, Tore y ANDREAS, Knut-lie. An introduction to the numerics of flow in porous media using matlab. [En línea]. SINTEF ICT. Oslo, Norway: Departement of Applied

Ahora bien, existen casos en que los materiales porosos como las rocas, no son rígidos y poseen, al igual que los fluidos, una compresibilidad (C_r) que en ocasiones puede ser significativa para el cálculo.

Ésta se define de la siguiente manera⁵:

$$c_r = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (2)$$

Que expresada en función de la porosidad resulta:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dP} = \frac{d}{dP} \ln(\phi) \quad (3)$$

Donde P es la presión del yacimiento y ϕ es la porosidad del medio. Sin embargo, considerando la compresibilidad de la roca como constante a través de todo el yacimiento, se puede integrar la ecuación (3) y obtener:

$$\phi(P) = \phi_0 e^{c_r(P-P_0)} \quad (4)$$

donde ϕ_0 es la porosidad de referencia a una presión de referencia P_0 . No obstante, para simplificar el modelo, es común usar una linealización de tal manera que:

$$\phi(P) = \phi_0 [1 + c_r(P - P_0)] \quad (5)$$

Mathematics. (Recuperado en 10 enero 2018.) Disponible en <http://folk.ntnu.no/andreas/papers/ResSimMatlab.pdf>

⁵ ESCOBAR MACUALO, Freddy Humberto. Fundamentos de ingeniería de yacimientos. [En línea]. Neiva, Huila, Colombia: Editorial Universidad Surcolombiana. 2012. (Recuperado en 16 enero 2018.) Disponible en <http://oilproduction.net/files/Libro%20Fundamentos%20de%20Ing%20de%20Yacimientos%20-%20Freddy%20Escobar.pdf>

Debido a que la dimensión de los poros generalmente es muy pequeña en comparación con el tamaño de los yacimientos, se considera que la porosidad es una función continua a lo largo del dominio.⁶

2.1.2 Permeabilidad: La permeabilidad es una propiedad básica del medio poroso asociada al flujo particular de una sustancia a través de un medio específico y representa la habilidad de transmitir un sólo fluido cuando el material está saturado de éste.

Entonces, de manera concreta, la permeabilidad se puede definir como una constante de proporcionalidad que relaciona el flujo volumétrico de fluido (v) con el potencial de flujo ($\nabla\Phi$).

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla\Phi \quad (6)$$

Esta es la conocida ley enunciada por el matemático Henry Darcy, la cual se abordará con mayor profundidad posteriormente. La unidad para referirse a la permeabilidad en el Sistema Internacional es m^2 , sin embargo, por el orden de magnitud de estas cantidades, se introdujo una nueva unidad conocida como Darcy⁷:

$$1 D(Darcy) \approx 0,987 * 10^{-12} [m^2]$$

⁶ ANDREAS, Knut-lie. An introduction to reservoir simulation using matlab. [En línea]. SINTEF ICT. Oslo, Norway: Departement of Applied Mathematics. 2014. (Recuperado en 15 enero 2018.) Disponible en <https://www.sintef.no/contentassets/8af8db2e42614f7fb94fb0c68f5bc256/mrst-book-2014.pdf>

⁷ Society of petroleum Engineers. The SI metric system of units and SPE metric estándar. [En línea]. U.S.A: Society of petroleum Engineers of AIME. 1982. (Recuperado en 1 febrero 2018.) Disponible en https://www.spe.org/authors/docs/metric_standard.pdf

Se ha observado que, para los yacimientos petroleros convencionales, los valores de permeabilidad suelen oscilar entre 0,1 mD y 1000 mD⁸.

Dada la naturaleza anisotrópica en estos medios, la permeabilidad tiene un comportamiento tensorial, debido a que esta propiedad puede variar de gran manera dependiendo de la dirección del flujo. No obstante, se ha observado que para las simulaciones, es una aproximación suficientemente acertada sólo considerar las permeabilidades en la dirección de cada una de las dimensiones del espacio.

2.1.3 Ley de Darcy: A mediados del siglo XIX, Henry Darcy, con la intención de mejorar los alcantarillados de su ciudad natal Dijón, diseñó un experimento con el fin de describir el comportamiento que regía al agua en los filtros de arena que se usaban para limpiar el suplemento de agua⁹. De esta manera, posicionó un tanque verticalmente, lo relleno de arena e inyectó un flujo constante por el extremo superior. Una vez los espacios dentro del tanque estaban llenos de agua y el flujo de entrada y de salida se igualaban, se medían las presiones a la entrada y salida.

Los resultados del experimento arrojaron que, para cada paquete individual de arena, el flujo volumétrico de salida es proporcional al área transversal, a la conductividad hidráulica y a la diferencia de alturas hidráulicas e inversamente

⁸ LAKE, Larry, W. Oilfield Review. [Base de datos en línea]. Invierno de 2001 a 2002. Schlumberger. (Recuperado en 25 enero 2018.) Disponible en https://www.slb.com/~media/Files/resources/oilfield_review/spanish01/win01/composite.pdf

⁹ SIMMONS, Craig T. Henry Darcy (1803–1858): Immortalised by his scientific legacy. [En línea]. Australia: Flinders University, Hydrogeology Journal. 2008. (Recuperado en 3 febrero 2018.) Disponible en <https://engineering.jhu.edu/ei/wp-content/uploads/sites/29/2014/02/Darcy-Achievements.pdf>

proporcional a la longitud del tanque. Sin embargo, una magnitud más interesante para el flujo en medio poroso es el gasto específico (v), calculado como sigue¹⁰:

$$v = \frac{Q}{A} = -k \frac{h_{out} - h_{in}}{L} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (7)$$

donde:

- Q = Flujo volumétrico de salida. $[m^3/s]$.
 A = Área transversal al flujo. $[m^2]$.
 h_{in} = Altura hidráulica a la entrada del tanque. $[m]$.
 h_{out} = Altura hidráulica a la salida del tanque. $[m]$.
 L = Longitud del tanque $[m]$.

Y finalmente $k [m/s]$ es la conductividad hidráulica, de la cual, a través de un análisis dimensional, se obtiene la relación $k = K\rho g/\mu$, en donde $K[m^2]$ es la permeabilidad intrínseca de cada paquete de arena y que será diferente para cada medio, $\rho [kg/m^3]$ es la densidad del fluido, $g[m/s^2]$ es la aceleración gravitacional y $\mu [kg/(m * s)]$ es la viscosidad dinámica.

Ahora bien, se debe tener en cuenta la siguiente apreciación al analizar esta ecuación, el gasto específico o velocidad de Darcy (v) es una representación macroscópica de la velocidad y no debe interpretarse como una velocidad en su definición más rigurosa. Es decir, ésta representa el volumen de fluido por unidad de área por unidad de tiempo y está determinada por el promedio de las velocidades

¹⁰ SÁNCHEZ, Javier. Ley de Darcy. Conductividad hidráulica. [En línea]. España: Universidad de Salamanca, departamento de geología. (Recuperado en 23 enero 2018.) Disponible en http://hidrologia.usal.es/temas/Ley_Darcy.pdf

microscópicas presentes en los espacios por los que el fluido circula libremente en el medio poroso (cabe resaltar que es una pequeña parte de todo el volumen).

De la misma manera, recordando la definición de la altura hidráulica:

$$h = \frac{P}{\rho g} + Z \quad [m] \quad (8)$$

Donde:

P = Presión del fluido.

Z = Altura con respecto al marco de referencia.

Y reemplazando la ecuación (7) en la (6), escribiéndola en forma diferencial y generalizando para cada una de las dimensiones del espacio, se obtiene:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (9.1)$$

$$v_y = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \quad (9.2)$$

$$v_z = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad (9.3)$$

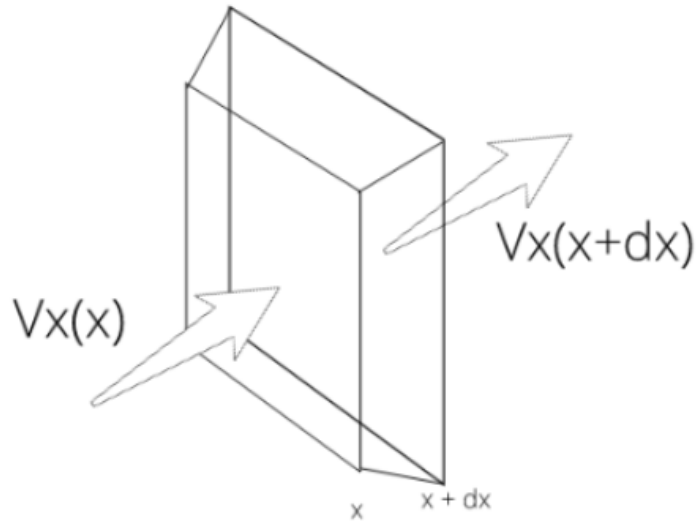
Finalmente, utilizando el operador diferencial ∇ se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla Z) \quad (10)$$

2.2 ECUACIÓN GENERAL

Para la obtención de la ecuación general que rige el flujo de fluidos en medios porosos se toma como punto de partida un balance de masa con flujo en una sola dimensión a través un diferencial de volumen como el mostrado en la figura 1:

Figura 1. Volumen de control



Ahora, dada la conservación de la masa se tiene que para el volumen de control:

$$\begin{aligned}
 & [\text{flujo de entrada}] - [\text{flujo de salida}] + [\text{flujo inyectado}] \\
 & = [\text{Variación de la masa en el VC}]
 \end{aligned}$$

Esto es:

$$(A\rho v_x)_x - (A\rho v_x)_{x+dx} + \bar{q}\bar{A}dx = \bar{A} \frac{\partial(\bar{\phi}\bar{\rho})}{\partial t} dx \quad (11)$$

Después del tratamiento matemático adecuado, se deriva la ecuación general:

$$-\frac{\partial(A\rho v_x)}{\partial x} + Aq = A \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (12)$$

Al realizar una operación similar, pero en tres dimensiones, se utiliza un volumen de control con medidas $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (13)$$

Que se puede reescribir utilizando el operador diferencial ∇ , como sigue:

$$-\nabla(\rho\vec{v}) + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (14)$$

Ahora, sustituyendo (8) en (14):

$$\nabla \left[\frac{\rho K}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla Z) \right] + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (15)$$

Finalmente, introduciendo el concepto de compresibilidad del fluido:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (16)$$

Y desarrollando el lado derecho de la ecuación como la derivada de un producto, la ecuación queda:

$$\nabla \left[\frac{\rho K}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla Z) \right] + q = c_f \phi \rho \frac{\partial P}{\partial t} \quad (17)$$

Esta es la ecuación general que rige el comportamiento de los fluidos en el medio poroso. Sin embargo, esta ecuación a menudo tiene un comportamiento no lineal, debido a que la densidad ρ y la compresibilidad del fluido c_f suelen depender de la presión P y por ende se van a analizar ciertos casos especiales en los que la compresibilidad tiene una naturaleza que hace que esta ecuación tenga un comportamiento lineal.¹¹

¹¹ PEACEMAN, Donald W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. [En línea]. Houston, Texas, U.S.A: Elsevier. 1977. (Recuperado en 4 febrero 2018.) Disponible en <https://www.pdf-archive.com/2011/11/12/fundamentals-of-numerical-reservoir-simulation/>

2.2.1 Modelo incompresible: Para el caso en que se desprecia la compresibilidad, la densidad ρ y la porosidad ϕ son independientes de la presión. Por lo tanto, $c_f = 0$ y la ecuación queda organizada de la siguiente manera:

$$\nabla \left[\frac{\rho K}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla Z) \right] = q \quad (18)$$

2.2.2 Modelo de compresibilidad constante: Cuando se tiene la compresibilidad como un valor constante, dicha magnitud se puede integrar de la ecuación (16), desde una densidad conocida ρ_0 a una presión de referencia P_0 para obtener la siguiente ecuación:

$$\rho(P) = \rho_0 e^{c_f(P-P_0)} \quad (19)$$

Esta ecuación asemeja el comportamiento de la mayoría de fluidos que no contienen grandes cantidades de gas disuelto en ellos. Así, asumiendo que la porosidad y la viscosidad del fluido no dependen de la presión, se usa de nuevo la ecuación (16) para reemplazar ∇P de la ley Darcy y dejar la ecuación con $\nabla \rho$ como la incógnita. Finalmente, la ecuación para este modelo queda:

$$\frac{1}{\mu \phi c_f} \nabla \cdot (K \nabla \rho - c g \rho^2 K \nabla Z) + q = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (20)$$

Esta ecuación en ausencia de gravedad y de términos fuente es una ecuación lineal para la densidad del fluido muy similar a la ecuación de conducción de calor con coeficientes variables:

$$\frac{1}{\mu \phi c_f} \nabla \cdot (K \nabla \rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21)$$

2.2.3 Modelo ligeramente compresible: En el caso en que la compresibilidad del fluido es pequeña, es suficiente con usar una relación lineal para la densidad, entonces:

$$\rho = \rho_0[1 + c_f(P - P_0)] \quad (22)$$

Asimismo, se asume que la porosidad es una función únicamente de la coordenada x y que la viscosidad μ es constante. De la misma manera, se asume que el ΔZ es lo suficientemente pequeño como para poder despreciar los efectos de la gravedad y que no existen términos fuente, lo que dará una mayor simplicidad a la ecuación.

Finalmente, esta queda como sigue:

$$\frac{c_f \rho}{\mu} \nabla P \cdot K \nabla P + \frac{\rho}{\mu} \nabla \cdot (K \nabla P) = c_f \phi \rho \frac{\partial P}{\partial t} \quad (23)$$

Si la compresibilidad del fluido es lo suficientemente pequeña en el sentido que $c_f \nabla P \cdot K \nabla P \ll \nabla \cdot (K \nabla P)$ se puede despreciar el primer término del lado derecho de la ecuación para tener una ecuación lineal similar a la ecuación (21), pero para la presión del fluido:

$$\frac{1}{\mu \phi c_f} \nabla \cdot (K \nabla P) = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (24)$$

3. DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO

3.1. PROCESO DE MALLADO

El primer paso en el desarrollo del modelo numérico es el establecimiento del tipo de malla que se pretende utilizar. Debido a esto, se deben tener en cuenta algunas consideraciones. En primer lugar, tanto para los *Benchmarks* como para el caso de estudio que se desarrollarán más adelante, se utilizará un mallado estructurado. Es decir, todas las mallas que se van a manejar constan de elementos cuadriláteros para los problemas bidimensionales y hexaédricos para los problemas tridimensionales.

A continuación, en las figuras 2 y 3, se muestran los volúmenes de control en un caso general para problemas bidimensionales y tridimensionales. El elemento que se está analizando denominado P, consta con un vecino en cada una de las fronteras que lo delimitan. Así, para dos dimensiones se tiene E, N, W y S que representan respectivamente East, North, West y South dependiendo del punto cardinal donde este ubicado el elemento vecino. De igual manera, se hace la apreciación que el valor de las propiedades y variables de cada elemento se calculará en el centroide geométrico del elemento de la malla.

Para mallas tridimensionales varía la nomenclatura, pues los elementos vecinos se enumeran de 1 a 6 como se ve en la figura 3 bajo la siguiente lógica:

- Elemento vecino 1 en la dirección del eje x^+
- Elemento vecino 2 en la dirección del eje y^+
- Elemento vecino 3 en la dirección del eje z^+
- Elemento vecino 4 en la dirección del eje x^-
- Elemento vecino 5 en la dirección del eje y^-
- Elemento vecino 6 en la dirección del eje z^-

Figura 2. Volumen de control bidimensional

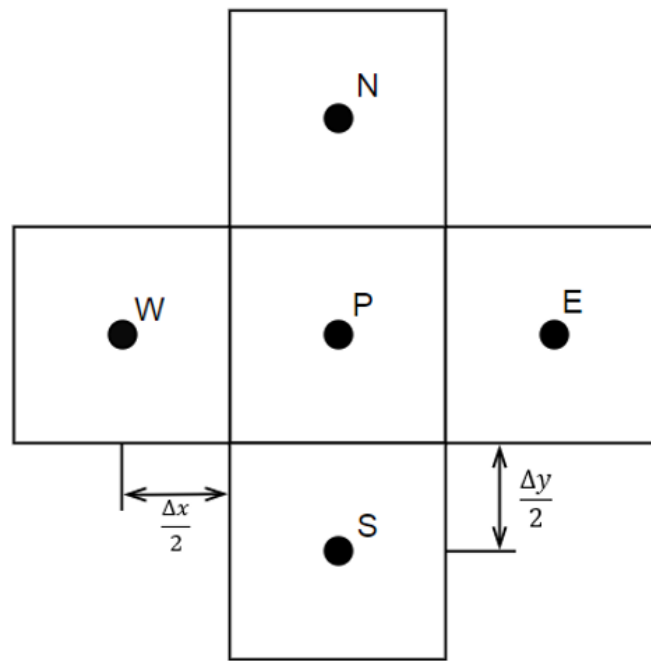
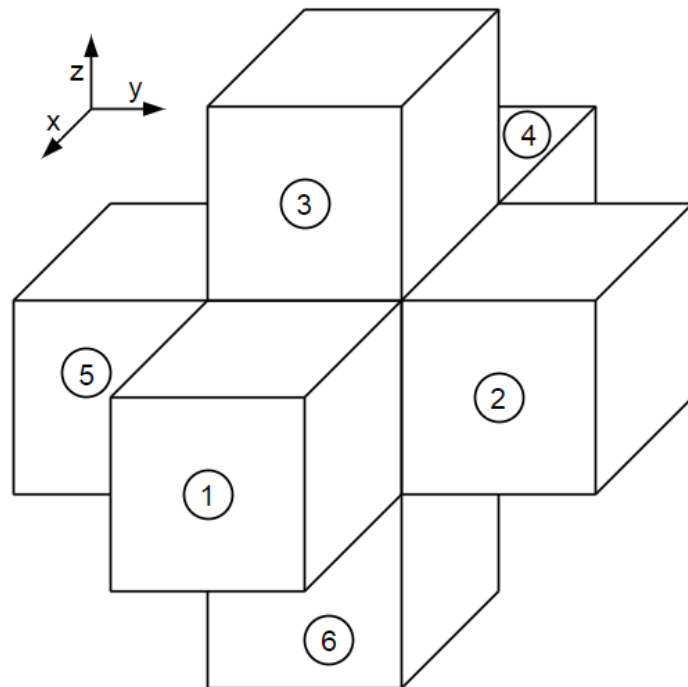


Figura 3. Volumen de control tridimensional



donde el origen de coordenadas está ubicado en el centroide del elemento P. Asimismo, se referirá a las caras del elemento en cuestión con el mismo número que el vecino adyacente a ella. Por ejemplo, la cara 1 será la cara perpendicular al eje x que está adyacente al elemento 1.

3.2. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN

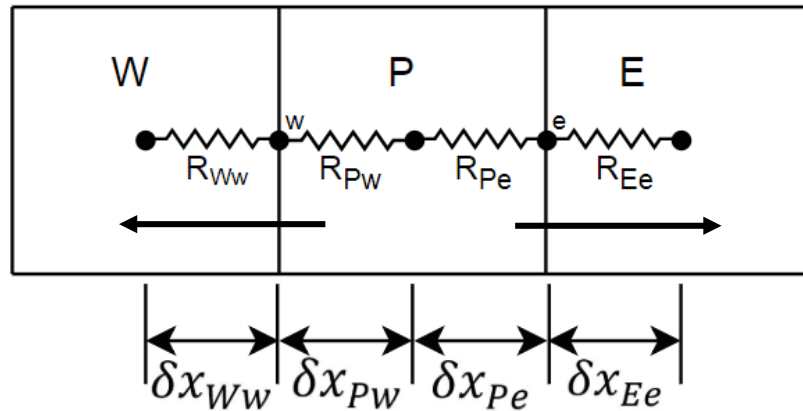
Luego de establecer la malla para el caso particular, se procede con la discretización de la ecuación correspondiente. Cabe señalar, que la forma de la ecuación general es la siguiente:

$$\nabla(\Gamma (\nabla\Phi)) + S = \Psi(\Phi) \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (25)$$

Donde Γ es un término proporcional que puede ser diferente para cada elemento dependiendo de sus propiedades, puesto que para este caso $\Gamma = \rho K/\mu$, $\Psi(\Phi) = c_f \phi \rho$ es una función que se asume constante, pero se itera para encontrar el valor exacto. Además, Φ varía dependiendo del caso de compresibilidad: para el primer y tercer caso es el término que representa el potencial de flujo $\Phi = P - \rho g z$; para el segundo caso $\Phi = \rho$ y, finalmente, S es el término fuente. Sin embargo, la ecuación varía pues la naturaleza de cada modelo cambia los términos de la ecuación.

Para facilidad de comprensión, la discretización de cada uno de los modelos se realizará en un volumen de control unidimensional y se extenderá a dos y tres dimensiones posteriormente. Entonces, se tiene un volumen de control como el presentado a continuación:

Figura 4. Volumen de control unidimensional



en donde se pueden apreciar la nomenclatura que se maneja para las distancias entre los elementos y las fronteras, así como la ubicación de las resistencias hidráulicas y la dirección en que se asume el flujo (saliendo del elemento).

3.3. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO INCOMPRESIBLE:

En primer lugar, se tiene el modelo incompresible. En éste, el término dependiente del tiempo no está presente, por lo que la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\nabla(\Gamma(\nabla\Phi)) = S \quad (26)$$

luego, utilizando la aproximación de volúmenes finitos para derivadas de segundo orden¹², se tiene que en general la discretización de la ecuación para el elemento P mostrado en la figura 4 es:

¹² JARAMILLO, Julian. Numerical solution of diffusion equation. [Material de clase].

$$\frac{(\Phi_P - \Phi_E)}{R_{Pe} + R_{Ee}} + \frac{(\Phi_P - \Phi_W)}{R_{Pw} + R_{Ww}} = S\Delta x \quad (27)$$

donde:

$$R_{Pe} = \frac{\delta x_{Pe}}{\Gamma_P A_{PE}} \quad (28.1) \quad R_{Ee} = \frac{\delta x_{Ee}}{\Gamma_E A_{PE}} \quad (28.2)$$

$$R_{Pw} = \frac{\delta x_{Pw}}{\Gamma_P A_{PW}} \quad (28.3) \quad R_{Ww} = \frac{\delta x_{Ww}}{\Gamma_W A_{PW}} \quad (28.4)$$

$$\Delta x = \delta x_{Pe} + \delta x_{Pw} \quad (29)$$

A_{PE} es el área de la cara entre el elemento P y la frontera E. De manera análoga, se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$a_E(\Phi_P - \Phi_E) + a_W(\Phi_P - \Phi_W) = S\Delta x \quad (30)$$

$$a_E = \frac{1}{R_{Pe} + R_{Ee}} \quad (31.1) \quad a_W = \frac{1}{R_{Pw} + R_{Ww}} \quad (31.2)$$

y reorganizando:

$$a_P \Phi_P - a_E \Phi_E - a_W \Phi_W = S\Delta x \quad (32)$$

con:
$$a_P = a_E + a_W \quad (33)$$

Asimismo, se puede extender esta discretización a un volumen de control Ω en 2D, como sigue:

$$a_P \Phi_P - a_E \Phi_E - a_N \Phi_N - a_W \Phi_W - a_S \Phi_S = S * A_\Omega \quad (34)$$

o en general para un volumen de control Ω :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_n \right) \Phi_p - \sum_{i=1}^n a_n \Phi_n = S * \alpha \quad (35)$$

$$\text{con:} \quad \alpha = \begin{cases} \Delta x_{\Omega} & \text{para 1D} \\ A_{\Omega} & \text{para 2D} \\ V_{\Omega} & \text{para 3D} \end{cases} \quad (36)$$

donde n es el número de fronteras que delimitan al elemento (2 para 1D, 4 para 2D y 6 para 3D), ϕ_n es el valor de ϕ en el elemento n y α es el factor geométrico que depende del número de dimensiones en el espacio en las que se analiza el volumen de control.

3.4. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO DE COMPRESIBILIDAD CONSTANTE

Para este modelo se puede apreciar un cambio notable con respecto al modelo anterior debido a la aparición del término dependiente del tiempo y a que en este caso la variable ϕ de la ecuación (25) es ρ y no ϕ . En consecuencia, se va a solucionar una ecuación para la densidad y no para la presión, por lo que se deben utilizar las otras ecuaciones mencionadas anteriormente para llegar al valor de la presión.

En este modelo se debe hacer la salvedad que el término que multiplica al laplaciano de la densidad es una función que depende de esta variable. Puesto que la porosidad ($\phi(P)$) depende de la presión, como se aprecia en la ecuación (4) y a su vez, la presión $P(\rho)$ depende de la densidad como se muestra en la ecuación (19).

Por esto, para este caso la forma general de la ecuación, despreciando los efectos gravitatorios, es la siguiente:

$$\Psi(\phi)\nabla(\Gamma(\nabla\phi)) + S * \alpha = \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (37)$$

Entonces, para hacer este cálculo se debe realizar un proceso iterativo donde, primero, se solucione el campo de densidad (ϕ) para unos valores iniciales de

presión y porosidad. Posteriormente, se debe calcular nuevamente el valor de $\Psi(\phi)$ y recalculer el campo de densidades hasta que el error (en el que se hará un mayor énfasis más adelante) esté en un margen predeterminado. Para hallar el valor de $\Psi(\phi)$, una vez calculada la densidad de cada elemento, se debe seguir este proceso que se deriva de despejar las variables P y ϕ de las ecuaciones (19) y (4), respectivamente:

$$P = P_0 + \frac{1}{c_f} \text{Ln} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad \rightarrow \quad \phi(P) = \phi_0 e^{c_r(P-P_0)}$$

Finalmente, para hacer el cálculo del campo de densidades nuevamente, se obtiene el valor de la función $\Psi(\phi)$ de la siguiente manera:

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{\mu \phi c_f} \quad (38)$$

Debido a esto, la discretización de la ecuación esta vez varía de la anterior debido a la aparición del término dependiente del tiempo y del coeficiente de la función $\Psi(\phi)$. Entonces, la discretización para un volumen de control unidimensional como el mostrado en la figura 4, toma la siguiente forma:

$$\frac{(\Phi_P - \Phi_E)}{R_{Pe} + R_{Ee}} + \frac{(\Phi_P - \Phi_W)}{R_{Pw} + R_{Ww}} + S * \Delta x = (\Phi_P^{t-1} - \Phi_P^t) * \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (39)$$

donde:

$$R_{Pe} = \frac{\delta x_{Pe}}{\Psi_P \Gamma_P A_{PE}} \quad (40.1)$$

$$R_{Ee} = \frac{\delta x_{Ee}}{\Psi_e \Gamma_e A_{PE}} \quad (40.2)$$

$$R_{Pw} = \frac{\delta x_{Pw}}{\Psi_P \Gamma_P A_{PW}} \quad (40.3)$$

$$R_{Ww} = \frac{\delta x_{Ww}}{\Psi_W \Gamma_W A_{PW}} \quad (40.4)$$

$$\Delta x = \delta x_{Pe} + \delta x_{Pw} \quad (29)$$

Aquí se debe notar que, por la aparición del término del lado derecho de la ecuación, el planteamiento del problema varía, en consecuencia, aparece en las ecuaciones el valor de la variable Φ en el elemento P para el tiempo anterior de la solución Φ_P^{t-1} .

Existen diferentes métodos para calcular este tipo de modelos, sin embargo, se usará el esquema implícito. En éste, el valor de Φ_P^{t-1} es un valor conocido del cálculo del tiempo anterior. Por esto, este término se pone del lado derecho de la ecuación discretizada.

En primer lugar, se reescribe la ecuación para el elemento P de la siguiente manera:

$$a_P \Phi_P + a_E \Phi_E + a_W \Phi_W = b \quad (41)$$

Donde se tiene que a_E y a_W se calculan de igual manera que en la ecuación (29):

$$a_P = a_E + a_W + a_P^{t-1} \quad (42)$$

$$b = a_P^{t-1} \Phi_P^{t-1} - q * \Delta x \quad (43)$$

$$a_P^{t-1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (44)$$

Posteriormente, se resuelve el sistema de ecuaciones mediante inversión matricial y se itera con los valores obtenidos de Ψ , hasta obtener una solución que al compararla con la iteración anterior, tenga un error que esté dentro de los márgenes predefinidos.

3.5. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO LIGERAMENTE COMPRESIBLE

Para el último modelo, donde se tiene una compresibilidad lo suficientemente pequeña, se tiene una ecuación lineal cuya forma es igual a la del modelo anterior, sin embargo, la variable a resolver es la presión en lugar de la densidad. Así, nuevamente se tiene:

$$\Psi(\phi)\nabla(\Gamma(\nabla\phi)) = \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (37)$$

donde ϕ es la presión en el centroide del elemento. Nuevamente, $\Psi(\phi)$ es una función que depende de la variable ϕ , pues cómo se detalló anteriormente:

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{\mu\phi c_f} \quad (38) \quad \phi = \phi_0[1 + c_r(P - P_0)] \quad (5)$$

de igual manera, la discretización queda muy similar al caso anterior. Sin embargo, la variable a resolver es la presión y no la densidad:

$$a_P\phi_P + a_E\phi_E + a_W\phi_W = b \quad (41)$$

donde los coeficientes de la variable ϕ se calculan de igual manera que en el modelo anterior con las ecuaciones (29), (42), (43) y (44). Nuevamente, se debe solucionar el sistema de ecuaciones lineales e iterar los valores de $\Psi(\phi)$ para hallar la solución aproximada.

3.6. CONDICIONES DE FRONTERA

En caso que el elemento que se esté analizando haga parte del contorno del volumen de control, se debe establecer una condición de frontera en la cara que limita con el exterior. A pesar que en la naturaleza sea posible distinguir tres tipos de comportamientos en la frontera, para este tipo de problemas sólo aplican dos, dado que no existen situaciones físicas en las que se considere un término convectivo para problemas de esta clase. Por consiguiente, el comportamiento en el borde del elemento que se pueden diferenciar son¹³:

¹³ MÖNKEBERG, Fabian. Finite volume methods for fluid flow in porous media. [En línea]. Zürich, Switzerland: Federal polytechnic school of Zürich 2012. (Recuperado en 12 febrero 2018.)
 Disponible en: <http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/StudentProjects/Moenkeberg/BScThesis.pdf>

3.6.1 Condición Dirichlet: En este tipo de condición de frontera, se conoce el valor de Φ o de la presión en la cara. En este caso, el término de la ecuación discretizada en la dirección donde está la frontera quedaría:

$$\frac{A_{PF}\Gamma_P}{\delta x_{PF}}(\Phi_P - \Phi_F) = \frac{(\Phi_P - \Phi_F)}{R_{PF}} \quad (42)$$

donde A_{PF} es el área de la cara donde está la condición de frontera, Γ_P es la constante de proporcionalidad perteneciente al elemento P, Φ_F es el valor conocido de Φ en la frontera, δx_{PF} es la distancia perpendicular entre el centroide del elemento P y la frontera cuyo valor es conocido.

3.6.2 Condición Neumann: Se tiene que en general el flujo es igual al producto de la velocidad por el área. En este tipo de problemas, se maneja la velocidad de Darcy. Luego, el término de la ecuación del elemento límite en la dirección del contorno, es:

$$\dot{Q} = \vec{v} \cdot \vec{A} = \left(-\Gamma_P \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \cdot \vec{A} \quad (43)$$

Sin embargo, para ambos casos este término es un valor conocido que se adiciona al término b en la ecuación discretizada.

3.7. SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Finalmente, se deben enumerar los elementos y reemplazar los coeficientes E,W,N y S por el número correspondiente a cada elemento en cada una de las ecuaciones discretizadas. Posteriormente, deben ser ordenadas desde el primer elemento hasta el último. Así, cada ecuación queda de la siguiente manera:

$$a_1^m \Phi_1 + a_2^m \Phi_2 + \dots + a_{n-1}^m \Phi_{n-1} + a_n^m \Phi_n = S_m \quad (44)$$

de manera que, a_n^m es una constante que representa al coeficiente que acompaña al elemento n para la ecuación m y S_m es el término fuente para la ecuación m , donde $a_n^m \wedge S_m \in \mathbb{R}$. Estos coeficientes se organizan en una matriz denominada matriz de coeficientes $[M]$, tal que:

$$[M] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_{n-1}^{m-1} & a_n^{m-1} \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{n-1}^m & a_n^m \end{bmatrix}$$

de igual manera se debe definir un vector de variables $[V]$ que este compuesto por el valor de Φ para cada uno de los elementos y un vector de términos independientes $[S]$ que contiene el valor del término independiente para cada una de las ecuaciones. Así:

$$[V] = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{n-1} \\ \Phi_n \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix}$$

luego, para resolver de forma genérica este sistema de ecuaciones lineales por el método de inversión de matrices, se plantea la siguiente operación de matrices:

$$[M] * [V] = [S] \tag{45}$$

de modo que:

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_{n-1}^{m-1} & a_n^{m-1} \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{n-1}^m & a_n^m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{n-1} \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix}$$

Por último, dada la matriz inversa de $[M]$, $[M]^{-1}$, se resuelve el vector solución realizando la siguiente operación matricial:

$$[V] = [S] * [M]^{-1} \quad (46)$$

Los valores obtenidos en el vector $[V]$, son la magnitud de la propiedad Φ en cada uno de los elementos.

4. PROGRAMACIÓN

4.1. DESARROLLO DE LA INTERFAZ GRÁFICA DEL PROGRAMA

Para facilitar el tratamiento de los datos y la ejecución de las simulaciones de los *Benchmarks* se decidió desarrollar una interfaz gráfica por medio del entorno GUIDE de Matlab. Ésta se puede apreciar en su totalidad en el anexo A de este documento.

Del mismo modo, se deben programar algunas funciones que produzcan 5 archivos de entrada que son necesarios para que las rutinas de cálculo desarrolladas en el lenguaje de programación C++ funcionen. Estos son:

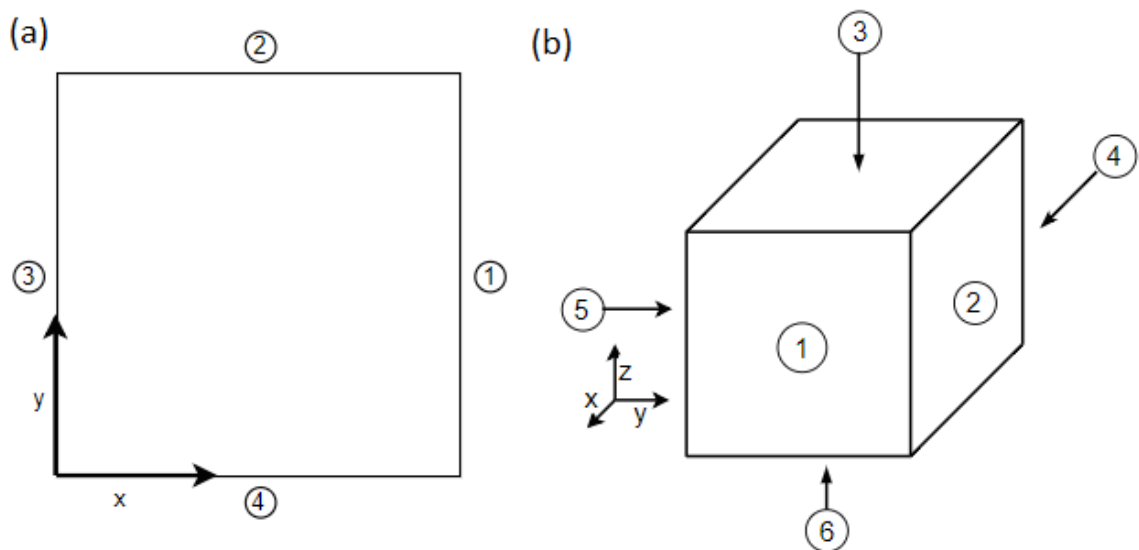
- **Archivo.ent:** Este archivo es la entrada al programa, donde se determina: el nombre de los otros archivos de entrada, el valor de la gravedad(9.81 ó 0 si se desprecia), el régimen (estacionario o transitorio) y algunos parámetros para la visualización de los resultados. (Anexo B)
- **Archivo.geom:** Contiene los parámetros geométricos del volumen de control. (Anexo C)
- **Archivo.parts:** Se introducen los parámetros específicos de la malla. (Anexo D)
- **Archivo.boco:** En este archivo se ingresan tanto el tipo de condición de frontera como el valor de la misma para cada uno de los contornos del volumen de control. (Anexo E)
- **Archivo.solver:** Se escriben los parámetros del solucionador de ecuaciones lineales, del preconditionador y del monitor de convergencia.(Anexo F)

De igual manera, se debe escribir un archivo que contenga las propiedades de cada elemento individualmente e incluir dentro de esta interfaz una función que permita editar las propiedades de los elementos basados en su posición.

En concordancia con lo anterior, la interfaz del programa cuenta con distintos campos en los que se deben ingresar las dimensiones del volumen de control, las particiones de la malla, las propiedades petroquímicas del medio, las propiedades del fluido, algunos parámetros de la simulación y las condiciones de frontera.

Además, la interfaz cuenta con 7 “push buttons”. En primer lugar, existen dos botones llamados “Lados 2D” y “caras 3D” que despliegan en pantalla las figuras 5(a) y 5(b) respectivamente. Dichas imágenes muestran, para cada caso, el número correspondiente a cada lado o cara para asignar la condición de frontera.

Figura 5. Enumeración de los lados para 2D(a) y de las caras para 3D(b)



Adicionalmente, en la parte inferior derecha de la interfaz, se encuentran los botones para: generar el archivo que contiene las propiedades individuales de cada elemento (“Generar Propiedades”); generar los 5 archivos de entrada para el programa de C++ (“Archivos de Entrada”); y para ejecutar el programa de cálculo con los archivos previamente generados (“Calcular”).

Por último, se encuentran los botones “Modificar Props” que ejecutan la programación diseñada para:

- Leer el archivo de propiedades.
- Cambiar en los elementos indicados, ya sea por coordenadas geométricas o por número de elementos, el parámetro deseado.
- Sobrescribir el archivo con las propiedades modificadas.

4.2. GENERACIÓN DEL ARCHIVO DE PROPIEDADES

Posteriormente, se debe programar la elaboración y posterior lectura de un archivo donde se almacenen individualmente las propiedades y parámetros de cada elemento. Esto debido a que, en estas simulaciones, para el caso más general, dichas propiedades pueden ser diferentes para cada elemento.

En este sentido, se programó que dicho archivo tenga la forma de un arreglo matricial de tamaño $[nne \times (nsd + 11)]$; donde nne es el número total de elementos en los que se divide el dominio y nsd , es el número de dimensiones del espacio en las cuales se va a analizar el problema. De esta manera, este archivo es diferente para un problema bidimensional y para uno tridimensional. Asimismo, se debe hacer la salvedad de que las propiedades 10, 11 y 12 sólo se utilizan en problemas que presentan una compresibilidad diferente de cero.

Las propiedades y parámetros listados en el archivo son, en este mismo orden:

1. Número del elemento: Se realiza una numeración de todos los elementos para así poder referenciar a cada uno de ellos.
2. Coordenada en el eje x del centroide del elemento.
3. Coordenada en el eje y del centroide del elemento.
4. Coordenada en el eje z del centroide del elemento. (Sólo aplica para problemas tridimensionales)

5. Densidad del fluido.
6. Viscosidad del fluido.
7. Permeabilidad entre el fluido y la roca en la dirección x.
8. Permeabilidad entre el fluido y la roca en la dirección y.
9. Permeabilidad entre el fluido y la roca en la dirección z.
10. Porosidad de la roca.
11. Compresibilidad del fluido.
12. Compresibilidad de la roca.
13. Flujo de entrada o salida para una fuente o sumidero.
14. En caso de ser diferente de cero, se le asigna el valor de Φ a dicho elemento.

Como se mencionó anteriormente, la permeabilidad es un tensor de $(nsd \times nsd)$, donde nsd es el número de dimensiones del espacio del problema. Sin embargo, la aproximación que se hace usando sólo el cambio en cada una de las dimensiones del espacio es suficientemente acertada. Por esto, esta propiedad ocupa tres casillas en este archivo.

En el anexo G se puede observar un ejemplo de este tipo de archivo para un volumen de control en 3 dimensiones con una malla de $[3 \times 3 \times 3]$.

4.3. ADAPTACIÓN DE RUTINAS DE CÁLCULO

La siguiente etapa consiste en adaptar las rutinas de cálculo para que solucionen las ecuaciones propuestas para cada uno de los modelos que se pretenden simular. Para esto, se parte del caso más sencillo y se avanza progresivamente hasta el caso más complejo.

No obstante, antes que nada, se debe realizar la comunicación entre el archivo de propiedades que genera la interfase de Matlab y las rutinas de cálculo de C++. Para esto, se desarrolló una función que se encarga de leer el arreglo matricial que

contiene las propiedades de cada uno de los elementos y los almacene para su posterior uso.

Aludiendo al hecho de que el comportamiento de las rutinas de cálculo se diferencia bastante cuando existe una dependencia del tiempo en la ecuación diferencial, se determinó la programación de dos clases en C++ para la resolución de dichos problemas. La primera se encargará de solucionar los problemas incompresibles y la segunda de tratar los problemas transitorios presentes en los modelos de compresibilidad constante y ligeramente compresible.

4.3.1. Clase CPoroso para flujo incompresible: En este orden de ideas, para la primera clase se debe analizar el modelo incompresible, cuya ecuación es la más sencilla. Para esto, se trae de nuevo a colación la ecuación (26) mencionada anteriormente y hacemos notar que esta relación tiene la forma:

$$\nabla(\Gamma (\nabla\Phi)) = S \quad (26)$$

Recordando que este proyecto se basa en la adaptación de un programa ya elaborado que soluciona problemas de difusividad, regidos por la ecuación de Poisson para la transferencia de calor por difusión:

$$\nabla(k(\nabla T)) = q \quad (47)$$

Se puede observar la similitud entre las dos ecuaciones y aún más en el proceso de discretización, pues la forma de la ecuación de Poisson, para un volumen de control como el mostrado en la figura 4, es igual a la del modelo incompresible (ecuación 27), sin embargo la variable Φ debe reemplazarse por la temperatura (T) y la variable de proporcionalidad Γ es la conductividad térmica (k).

En este orden de ideas, se aprecia que la diferencia entre estas dos ecuaciones es el cálculo del término difusivo que acompaña a la variable de la ecuación, debido a

que para la ecuación de calor es la conductividad térmica k y para la ecuación de flujo incompresible en medio poroso es $\Gamma = \rho K / \mu$.

No obstante, la naturaleza de las propiedades es diferente, debido a que la conductividad térmica (k) es una variable escalar y la conductividad hidráulica (Γ) es un tensor definido por la aproximación utilizada para la permeabilidad, como sigue:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\rho K_x}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho K_y}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho K_z}{\mu} \end{pmatrix}$$

De ahí que se necesite realizar una rutina, que modifique el cálculo de los coeficientes de la matriz y asigne el valor de Γ correcto, dependiendo de la dirección en la que se esté calculando dicho coeficiente.

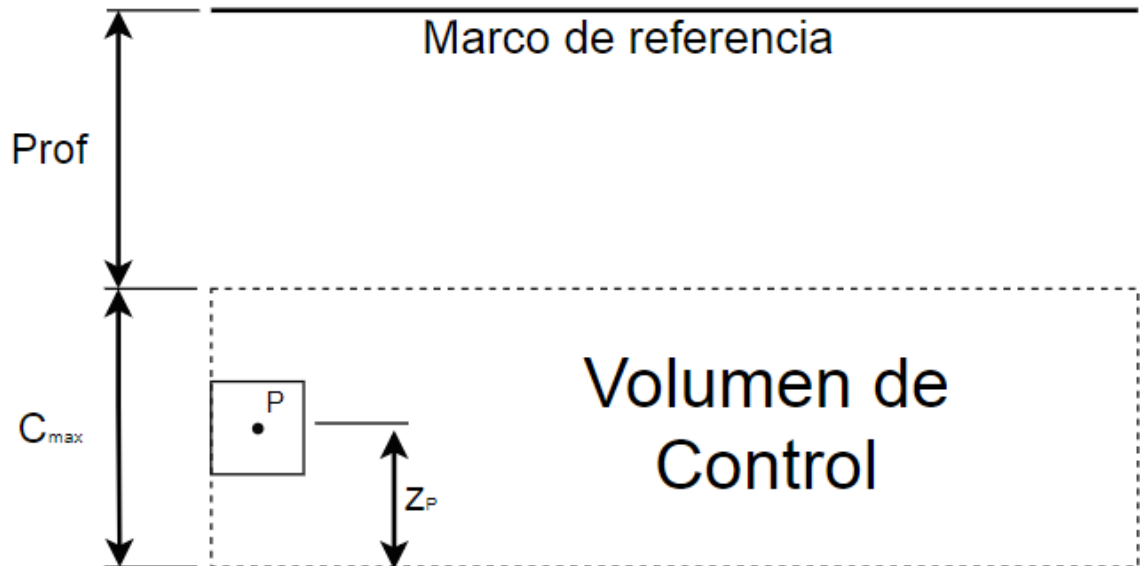
Por otro lado, dado que se cambió la forma en la que se asigna el término fuente al vector de términos independientes, se debe programar una función que se encargue de extraer del arreglo matricial de propiedades, este valor y lo introduzca al vector $[V]$.

Posteriormente, una vez se haya solucionado el sistema de ecuaciones, se tienen los valores del campo escalar (ϕ) que representa el potencial de flujo. No obstante, es una magnitud más interesante para la interpretación de los resultados el campo de presiones. Por esto, debe programarse una rutina que se encargue de calcular la presión para cada uno de los elementos.

Debe tenerse en cuenta, que se hace una programación genérica para resolver cualquier tipo de problema y es necesario contemplar que existe la posibilidad de

que el volumen de control se encuentre a cierta profundidad como se observa en la figura 6.

Figura 6. Cálculo de presión a partir del potencial hidráulico(ϕ)



debido a esto, la relación que se utiliza para calcular la presión para el elemento P, se obtiene de la definición del potencial hidráulico y es la siguiente:

$$P = \Phi + \rho g z \quad (48)$$

donde Φ es el potencial hidráulico, ρ es la densidad, g es la gravedad y z es la profundidad a la cual se encuentra enterrado el elemento. No obstante, esta distancia no es un dato almacenado, entonces a partir de las distancias que se conocen, mostradas en la figura 6, la profundidad para el elemento P, se calcula de la siguiente manera:

$$z = Prof + C_{max} - Z_p \quad (49)$$

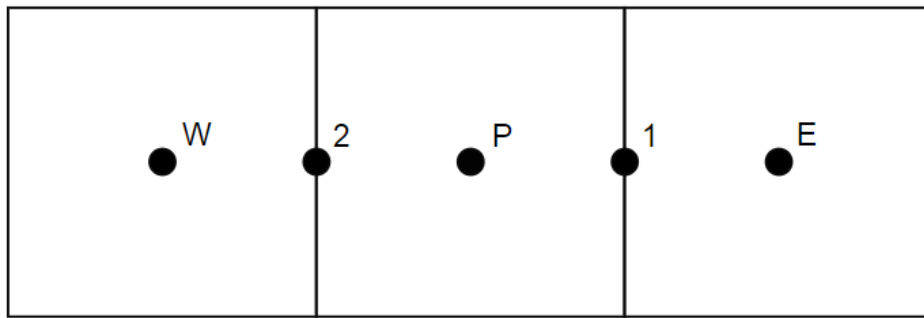
Donde *Prof* es la profundidad a la cual está enterrado el volumen de control, C_{max} es el valor de la altura del volumen de control y Z_p es el valor de la coordenada en

z para el elemento P. Finalmente, reemplazando la ecuación (49) en la (48) la expresión para la presión queda:

$$P = \Phi + \rho g(Prof + C_{max} - Z_P) \quad (50)$$

De la misma manera, para complementar el análisis del comportamiento del campo de presión, se programo el cálculo del gradiente de dicha propiedad (∇P) siguiendo la misma lógica que se usa para calcular el gradiente de Φ . Para esto, se promedia la presión del elemento en cuestión y el vecino para obtener los valores de presión en las fronteras y a partir de ahí se calcula el gradiente de la presión.

Figura 7. Volumen de control unidimensional



Considérese un volumen de control como el de la figura 7, para calcular el gradiente de presión del elemento P, es necesario conocer las presiones en las fronteras del elemento:

$$P_1 = \frac{P_E + P_P}{2} \quad (51.1)$$

$$P_2 = \frac{P_W + P_P}{2} \quad (51.2)$$

Luego, el gradiente se calcula como sigue:

$$\nabla P_P = (P_1 - P_2) * \frac{V_{elem}}{A_{cara}} \quad (52)$$

donde V_{elem} es el volumen del elemento P y A_{cara} es el área de la cara del elemento en la dirección en la que se está calculando el gradiente.

Finalmente, se programó el cálculo del flujo volumétrico, sin embargo el flujo está determinado a través de una superficie, entonces para poder encontrar el valor de los flujos se debe realizar a través de las caras. Se parte de la definición de flujo a través de una superficie y de la ley de Darcy para encontrar la expresión del flujo:

$$\dot{Q} = \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (53)$$

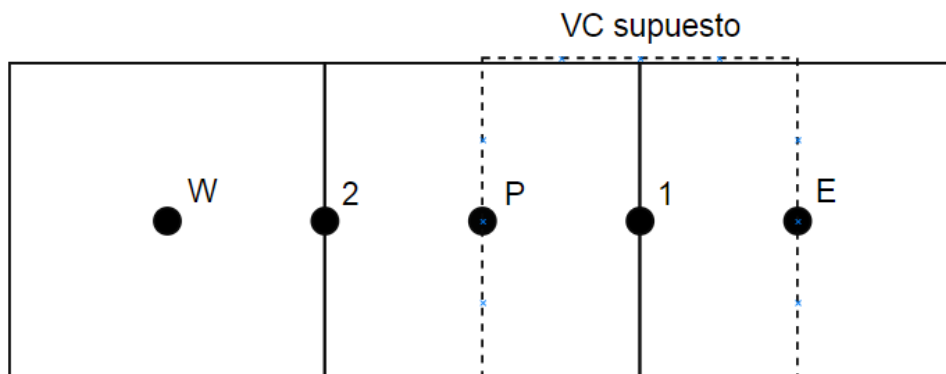
$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\nabla\Phi) \quad (54)$$

Cómo se tratan solamente flujos perpendiculares a la superficie, se tiene que:

$$\dot{Q} = \pm \frac{K}{\mu} (\nabla\Phi) * A \quad (55)$$

Por consiguiente, es necesario encontrar el gradiente de Φ en la cara de los elementos. Para esto se supone un volumen de control centrado en el centroide de la cara, como el mostrado en la figura 8, y se calcula el gradiente de Φ como se vio anteriormente para el gradiente de la presión.

Figura 8. Volumen de control supuesto para el cálculo del flujo volumétrico



En concreto, para el flujo a través de la cara 1, partiendo de la ecuación (55):

$$\dot{Q} = \pm \frac{K}{\mu} \left((\Phi_E - \Phi_P) * \frac{V_{VCS}}{A_1} \right) * A_1 \quad (56)$$

Y tomando, en general, permeabilidades diferentes para los elementos:

$$K = \frac{1}{\frac{e_P}{K_P * A_1} + \frac{e_E}{K_E * A_1}} \quad (57)$$

donde μ es la viscosidad cinemática del fluido; Φ_E y Φ_P son las presiones en los elementos E y P; V_{VCS} es el volumen del VC supuesto; A_1 es el área de la frontera 1; e_P y e_E son las distancias perpendiculares entre el centroide de la frontera 1 y el centroide de P y de E, respectivamente y K_P y K_E son las permeabilidades de los elementos P y E.

4.3.2. Clase CPorosoComp para flujo con compresibilidad constante o ligeramente compresible: el paso a seguir es la para la programación de la otra clase, se compara las ecuaciones del modelo de compresibilidad constante (Ec. 37) con el modelo de conducción de calor en estado transitorio sin generación.

$$\Psi(\Phi) \nabla(\Gamma(\nabla\Phi)) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (58)$$

$$\nabla(k(\nabla T)) = \omega \frac{\partial T}{\partial t} \quad (59)$$

Para este caso, son apreciables dos diferencias fundamentales. En primer lugar, la función $\Psi(\Phi)$ que aparece multiplicando al laplaciano de Φ y, en segundo lugar, el hecho de que el término proporcional Γ es variable dado que depende de la presión. Entonces, las adaptaciones a la rutina de cálculo de este tipo de problema se basan en el proceso iterativo para el cálculo de estos dos parámetros, así como las adaptaciones ya hechas para la primera clase.

Refiriéndose a lo que se explicó anteriormente, se programó el siguiente proceso:

1. Usar unos valores iniciales de porosidad y presión para determinar el coeficiente Γ de cada elemento.
2. Hacer la primera iteración para solucionar el campo de densidad.
3. Con estos valores de densidad, recalculamos la presión y la porosidad y el coeficiente Γ necesarios para solucionar el campo de densidad en la siguiente operación.
4. Mediante un ciclo iterativo “ *while*”, hacer que el programa haga tantas iteraciones como sean necesarias para que el error sea menor a 10^{-6} .

Este error es calculado como el valor absoluto de la diferencia entre la norma del vector solución de la presente iteración y la norma del vector solución de la iteración anterior. A su vez, la norma del vector solución $[V]$ de la iteración k se define de la siguiente manera:

$$\|V\|_k = \sqrt{((\Phi_1)_k)^2 + ((\Phi_2)_k)^2 + \dots + ((\Phi_{n-1})_k)^2 + ((\Phi_n)_k)^2} \quad (60)$$

donde $(\Phi_n)_k$ representa el valor de la propiedad Φ en el elemento n para la iteración k . Entonces, el cálculo del error se da de la siguiente manera:

$$error = \frac{|\|V\|_k - \|V\|_{k-1}|}{\|V\|_k} \quad (61)$$

Después, para el caso ligeramente compresible, se debe hacer la misma adecuación que en el caso anterior, pero esta vez no se recalcula la presión y la porosidad a partir de la densidad, sino solamente la porosidad a partir de la presión cuyos valores se obtienen al solucionar el sistema de ecuaciones.

Por último, en el anexo H se aprecia el diagrama de flujo que sigue el proceso de cálculo de las rutinas, una vez adaptadas.

5. SIMULACIÓN DE *BENCHMARKS*

Con el fin de validar los resultados que arroja el software desarrollado, se procede a realizar simulaciones de ejemplos resueltos del libro guía de la herramienta de Matlab MRST (*Matlab Reservoir Simulation Toolbox*). Con el fin de comparar los resultados numéricamente, se obtuvieron los resultados numéricos de la serie de ejemplos con los que cuenta esta herramienta y una vez desarrollados dichos ejercicios en el programa elaborado, se calculó el promedio del error en los resultados y la desviación estándar de dichos errores para obtener una medida de qué tan acertados son las soluciones arrojadas por el software.

5.1 ADAPTACION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera son parámetros especiales, mediante los cuales se pueden establecer condiciones puntuales a un problema acerca de lo que está sucediendo a su alrededor.

En primera instancia, se debe tener en cuenta que el algoritmo desarrollado, resuelve el sistema de ecuaciones para encontrar el valor de la variable Φ ($\Phi = P - \rho gz$). Sin embargo, las condiciones de frontera de los problemas dadas en el libro, son valores de presión en bares [*Bares*] o pascales [*Pa*], y flujos volumétricos [m^3/dia]. Por lo tanto, se deben utilizar las fórmulas descritas a continuación para realizar las conversiones necesarias y tener coherencia en las unidades.

5.1.1 Dirichlet: Se implementa cuando se conoce el valor de la variable a resolver, en la frontera:

$$\Phi = Valor\ Conocido$$

Para los problemas tratados, las condiciones de frontera de tipo Dirichlet son valores de presión, por lo tanto, se debe calcular el valor de ϕ .

Caso 1: Problemas donde se desprecian los efectos gravitatorios, ϕ es igual al valor dado de presión.

$$\phi = P \quad (62)$$

Caso 2: Problemas donde actúa la gravedad, ϕ es igual al valor dado de presión menos la presión hidrostática, donde ésta se aproxima como una columna de agua sobre el elemento.

$$\phi = P - \rho gz \quad (63)$$

5.1.2 Neumann: Se implementa cuando se conoce el valor del gradiente en dirección normal a la cara o lado de la frontera.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \text{Gradiente Conocido}$$

En los problemas propuestos, las condiciones de frontera de tipo Neumann son representadas por flujos de entrada o salida (\dot{Q}), dados en unidades de [$m^3/día$] por lo cual, se debe calcular el valor de $\frac{\partial \phi}{\partial n}$.

Caso 1: Condición de no flujo. No hay entrada o salida de flujo en la frontera, lo que significa que el gradiente es igual a cero.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

Caso 2: Flujo de entrada o salida. Se tiene un flujo constante expresado en [$m^3/día$], luego:

$$\dot{Q} = \vec{v} \cdot \vec{A} = v * A * \cos \theta \quad (64)$$

Para este caso los vectores van en la misma dirección, por ende $\theta = 0^\circ$ cuando el flujo va saliendo y $\theta = 180^\circ$ cuando el flujo va entrando, entonces $\dot{Q} = \pm v * A$.

Despejando el $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ de la ley de Darcy (ecuación 12):

$$v = \left(-\frac{K}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\mu}{K} * v \quad (65)$$

Despejando la velocidad de la ecuación (64), y luego reemplazando en la ecuación (65), queda:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mp \frac{\mu \dot{Q}}{AK} \quad (66)$$

Donde:

μ es la viscosidad [$Pa * s$].

\dot{Q} es la flujo volumétrico [m^3/s].

K es la Permeabilidad [m^2].

\vec{A} es el área [m^2].

5.2. DESARROLLO DEL TERMINO FUENTE (q)

El término fuente (q), representa, físicamente, un flujo de entrada o salida en uno o varios elementos del volumen de control. Sin embargo, nuevamente, este flujo está dado en [m^3/s] y se debe adaptar, puesto que de un análisis dimensional (mostrado a continuación) arroja que el término (q) debe tener unidades de [$kg/(m^3 \cdot s)$].

$$\nabla \cdot \left(\frac{k\rho}{\mu} \nabla(\Phi) \right) = q \quad (67)$$

$$\left[\frac{1}{m} \right] \cdot \left(\frac{[m^2] \left[\frac{Kg}{m^3} \right]}{[Pa \cdot s]} \left[\frac{1}{m} \right] [Pa] \right) = q$$

$$\left[\frac{Kg * m^2 * Pa}{Pa * m^5 * s} \right] = \left[\frac{Kg}{m^3 * s} \right] \Rightarrow q \left[\frac{Kg}{m^3 * s} \right]$$

entonces, se concluye que el flujo volumétrico para cada elemento en el cual se quiera especificar una entrada (+) o salida (-) de flujo, debe ser multiplicada por el valor de la densidad y dividido por el volumen que ocupa el elemento.

$$q = \pm \frac{\dot{Q}\rho}{V_e} \quad (68)$$

donde:

\dot{Q} es la flujo volumétrico especificado [m^3/s].

ρ es la densidad [Kg/m^3].

V_e es el volumen del elemento [m^3].

5.3 MODELO PARA POZOS PRODUCTORES

Al simular pozos productores en yacimientos, se deben tener en cuenta varios parámetros para su correcta simulación, por lo tanto, se emplea la siguiente expresión, la cual describe el comportamiento del flujo en los pozos¹⁴:

$$\dot{Q} = PI * (Pc - Pbh) \quad (69)$$

donde:

\dot{Q} es el caudal en [m^2/s].

¹⁴ KHALMANOVA, Dinara. A mathematical model of the productivity index of a well. [En línea]. Texas, U.S.A: A&M University. 2004. (Recuperado en 15 mayo 2018.) Disponible en <https://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/301/etd-tamu-2004A-MATH-Khalmanova-1.pdf?sequence=1>

PI es el índice productor del pozo [$m^3/(Pa * s)$].

Pc es la presión del elemento [Pa].

Pbh es la presión de fondo de pozo [Pa].

A su vez PI está definida por las siguientes expresiones:

$$PI = (2\pi * Ke * l_{Edp}) / (\mu * \ln(Re/Rp)) \quad (70)$$

$$Ke = \sqrt{(K_{Ed1} * K_{Ed2})} \quad (71)$$

$$Re = 0,28 * \frac{\left(l_{Ed2}^2 \sqrt{\frac{K_{Ed1}}{K_{Ed2}}} + l_{Ed1}^2 \sqrt{\frac{K_{Ed2}}{K_{Ed1}}} \right)^{1/2}}{\sqrt[4]{(K_{Ed1}/K_{Ed2})} + \sqrt[4]{(K_{Ed2}/K_{Ed1})}} \quad (72)$$

donde:

PI es el índice productor del pozo [$m^3/(Pa * s)$].

Ke es la Permeabilidad efectiva [m^2].

K_{Ed1} y K_{Ed2} son las permeabilidades de los elementos que conforman el pozo, propiedad tomada del tensor permeabilidad en la dirección distinta a la que esta orientada el pozo [m^2].

l_{Edp} es la longitud del elemento en la dirección del pozo [m].

l_{Ed1} y l_{Ed2} son las longitudes de los elementos que conforman el pozo en la dirección distinta a la que esta orientada el pozo [m].

μ es la viscosidad dinámica [$Pa * s$].

Re Es el radio efectivo del pozo [m].

Rp es el radio del pozo [m].

Para proseguir con la adaptación del modelo de pozo productor, se agrega una rutina de iteración en donde se compara el resultado de la suma del flujo actual de cada uno de los elementos que conforman el pozo, con el valor obtenido en la iteración anterior.

En este orden de ideas, se programó la siguiente rutina:

1. Aproximar los valores iniciales de Φ para los elementos del pozo, a partir de la presión de fondo de pozo y la presión inicial del sistema.
2. Realizar la primera iteración para solucionar el campo de Φ .
3. Con estos valores de Φ , recalcular, para cada elemento, la presión (P_e) y el flujo volumetrico (Q_e).
4. Calcular el caudal total de salida del pozo (\dot{Q}_t).
5. Para todos los elementos del pozo, usar la ecuación (69) para hallar la presión (P_c) a partir del caudal de salida de cada elemento.

$$P_c = \frac{\dot{Q}_e}{PI} + Pbh \quad (73)$$

6. Usar un factor de relajación (α) para calcular una nueva presión (P_n), necesaria para iterar los resultados y lograr la convergencia de los mismos, a partir de la siguiente ecuación:

$$P_n = \alpha * P_e + (1 - \alpha) * P_c \quad \text{con } 0.6 < \alpha < 1.0. \quad (74)$$

7. A partir de (P_n) recalcular los valores de Φ y asignarlos a los elementos del pozo para la siguiente iteración.
8. Mediante un ciclo iterativo “*while*”, hacer que el programa haga tantas iteraciones cómo sean necesarias para que, en cada tiempo, el error en el cálculo del flujo volumétrico (\dot{Q}_t) sea menor a un valor (10^{-6}).

5.4 THE QUARTER-FIVE SPOT PROBLEM (BENCHMARK 1)

El primero de los *Benchmarks* consta principalmente de un volumen de control bidimensional cuadrado con un flujo de entrada y uno de salida de igual magnitud ubicados en la esquina inferior izquierda y la esquina superior derecha respectivamente. Este problema se analiza mediante el modelo incompresible.

Se extraen del libro los datos del problema como las propiedades del fluido (propiedades típicas para el agua), las propiedades petroquímicas del medio (porosidad y permeabilidad), las condiciones geométricas de la malla y las condiciones de frontera.

Tabla 1. Datos de entrada *Benchmark 1*.

Propiedades Geométricas	Propiedades del medio	Propiedades del fluido
Dimensiones: 500x500 m²	Permeabilidad: 100 <i>mD</i> $= 0,987 * 10^{-13} m^2$	Viscosidad: 1 <i>centipoise</i> $= 1 \times 10^{-3} Pa \cdot s$
Tamaño de la malla: 36x36	Porosidad(ϕ): 0,2	Densidad: 1014 <i>kg/m³</i>

No obstante, se debe hacer la apreciación que en este y en los siguientes ejemplos se debe hacer una adecuación a la malla ya que el visualizador que se va a usar, llamado Paraview, arroja mejores resultados para mallas cuyo número total de elementos es múltiplo de 6. Por este motivo, esta simulación se hizo con una malla de 36x36, para ambas simulaciones.

Visto que es un plano horizontal, los efectos de la gravedad no se consideran para este problema. De igual modo, para cada una de las caras se tienen condiciones de frontera de no flujo. Es decir, se establece una condición Neumann de flujo igual a cero ($\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$).

Para el cálculo de los flujos de entrada y salida en unidades de [*m³/s*], el valor que se usa corresponde al volumen total ocupado por los poros en el medio, que se obtiene al multiplicar el volumen total por la porosidad:

$$\dot{Q} = V \cdot \phi$$

$$V = 500 \times 500 \times 1 = 250000 [m^3]$$

$$\phi = 0.2$$

$$\dot{Q} = 250000 \times 0.2 = 50000 [m^3/s]$$

Aplicando la ecuación (68) se obtiene el valor de los flujos de entrada y salida en los respectivos elementos.

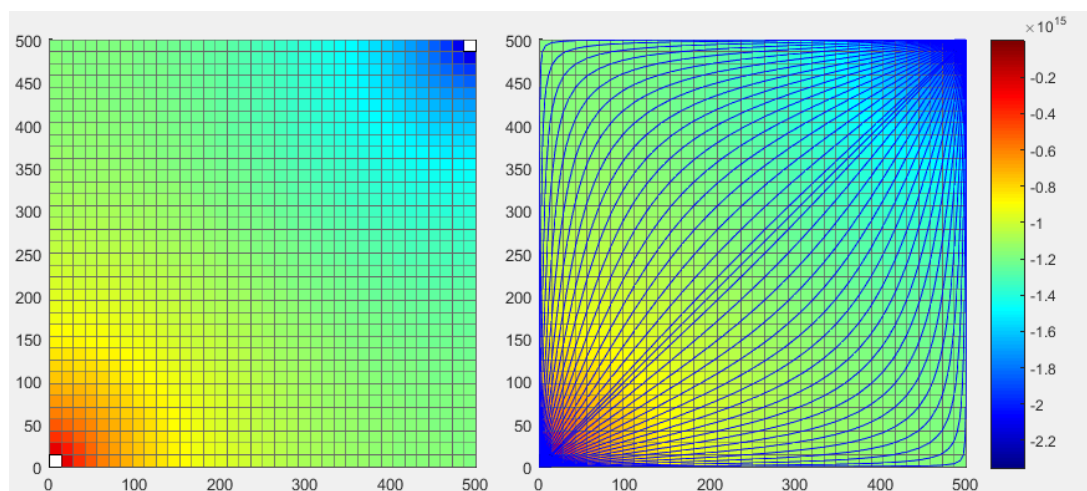
$$q = \frac{\dot{Q} \cdot \rho}{V_e} = \frac{50000 \cdot 1014}{\left(\frac{250000}{36 * 36 * 1}\right)} = 262828.8 \left[\frac{Kg}{m^3 \cdot s}\right]$$

Esta magnitud se le asigna al elemento 1 (positivo, ya que es un flujo de entrada) y al 1296 (negativo, debido a que es un flujo de salida), estos son los elementos situados en las respectivas esquinas para la malla utilizada de 36x36.

Finalmente, al igual que en el problema propuesto, se fija en el primer elemento una presión de referencia igual a 0 [Pa]. Dado que en este elemento se presenta el flujo de entrada, los demás valores de presión estarán por debajo de cero.

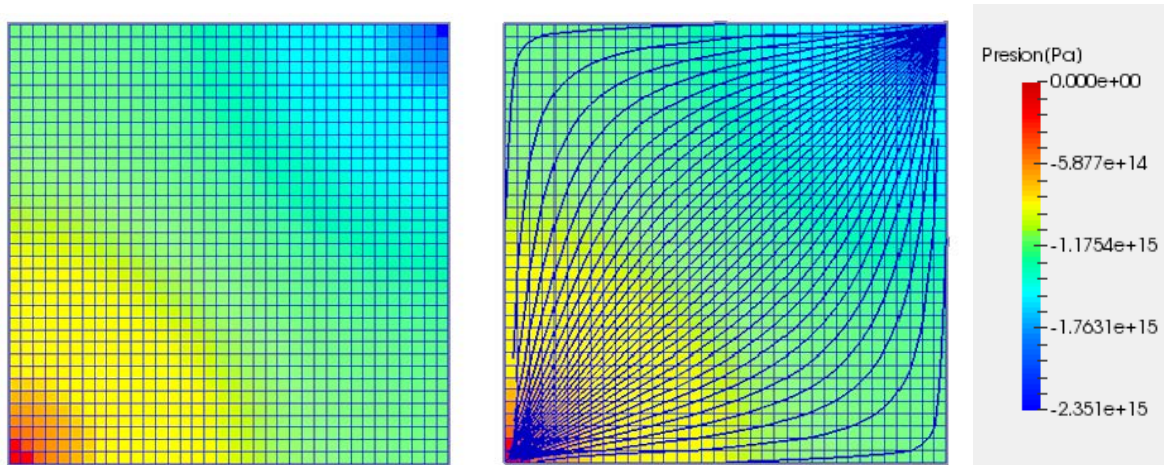
En la figura 9, se observa que las mayores presiones se dan en el área del elemento en el cual está el influjo. Asimismo, las presiones más bajas se presentan en la zona donde se da una extracción de flujo. Este comportamiento es el esperado y se puede observar en la figura 10, que los resultados de la simulación con el software desarrollado son notoriamente similares.

Figura 9. *Benchmark 1*: Distribución de presiones y líneas de flujo para la simulación en el MRST.



Fuente: MRST.

Figura 10. *Benchmark 1*: Distribución de presiones y líneas de flujo calculadas en el software desarrollado.



De igual manera, se puede observar que, en la solución del MRST, el campo de presiones oscila desde un valor de $-2.35e^{15} [Pa]$ hasta $-84.357 [Pa]$. Este rango de valores es muy semejante a los resultados obtenidos en la simulación cuyas presiones varían desde $-2.351e^{15} [Pa]$ Pascales hasta $0 [Pa]$.

Asimismo, se distingue que la trayectoria de las líneas de flujo para ambas graficas, es la misma, además, se puede distinguir una simetría con respecto a la diagonal principal, esto se debe a que el fluido presenta la misma densidad y viscosidad en todo el volumen de control y la permeabilidad del medio es la misma tanto para x como y .

Finalmente se comparan las presiones para cada uno de los elementos, calculando así el promedio de los errores y la desviación estándar de los errores, arrojando los siguientes resultados:

Tabla 2. *Benchmark 1*: Medición de error en los resultados para los valores de presión.

Promedio de los errores	$7,7 \times 10^{-2} \%$
-------------------------	-------------------------

Desviación Estándar de los Errores	2,778 %
------------------------------------	---------

Se debe resaltar, que la asignación del elemento de referencia es distinta para cada software, dando como resultado en la simulación del MRST un valor de $-84.357[Pa]$ y en el código desarrollado un valor de $0[Pa]$. Por esto, se obtiene un error del 100% para esta celda, lo que aumenta considerablemente la medida de la desviación estándar en la solución. Repitiendo el cálculo de esta medida sin tener en cuenta, se contempla una disminución en los valores de la tabla 2.

Tabla 3. *Benchmark* 1: Medición de error en los resultados para los valores de presión excluyendo el elemento 1 del cálculo.

Promedio de los errores	$2,89 \times 10^{-4} \%$
Desviación Estándar de los Errores	$2,08 \times 10^{-4} \%$

5.5 LINEAR PRESSURE DROP (*BENCHMARK* 2)

Para el segundo *Benchmark*, se tiene un volumen de control tridimensional semejante a una placa, ya que el espesor es muy pequeño comparado con el largo y el ancho de la misma, sin embargo se modifica la escala en el eje z para asemejarla a la grafica dada por el MRST. Las propiedades extraídas del libro son mostradas a continuación en la tabla 4:

Tabla 4. Datos de entrada *Benchmark* 2

Propiedades Geométricas	Propiedades del medio	Propiedades del fluido
Dimensiones: $1000 \times 1000 \times 50 \text{ m}^3$	Permeabilidad(x): 1000 mD Permeabilidad(y): 300 mD Permeabilidad(z): 10 mD	Viscosidad: 1 centipoise $= 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Tamaño de la malla: $30 \times 30 \times 6$	Porosidad(ϕ): $0,2$	Densidad: 1014 kg/m^3

Para este ejemplo se considera la anisotropía del medio, por lo tanto la permeabilidad se define como el tensor mostrado a continuación en unidades de mD.

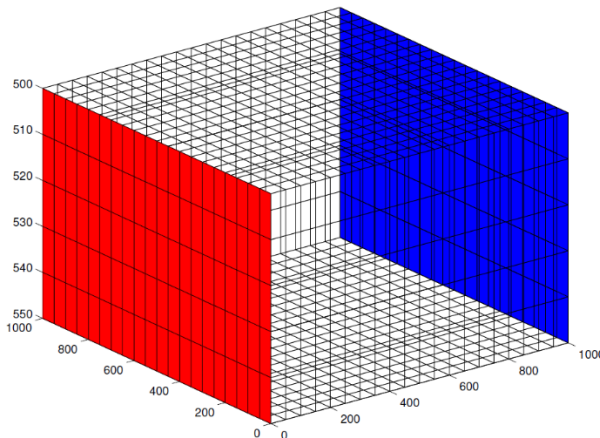
$$K = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Se tiene que para este ejercicio, el volumen de control se encuentra enterrado a una profundidad de 500 [m]. Sin embargo, los efectos gravitatorios tampoco van a ser tenidos en cuenta para este problema.

En cuanto a las condiciones de frontera, se pueden observar diferencias con el anterior ejemplo debido a que ahora se tienen varios tipos. Para empezar, hay una condición Dirichlet de presión constante ($P = 50 \text{ [bar]} = 5000000 \text{ [Pa]}$) en una cara y una condición de flujo de entrada constante de $5000 \text{ [m}^3/\text{día]}$.

En la figura 11 se ilustra el volumen de control con sus condiciones de frontera, donde el lado de color azul representa la cara 1, cuya condición de frontera es el influjo y la superficie roja donde la condición de frontera es un valor de presión conocido.

Figura 11. Planteamiento *Benchmark 2*



Fuente: An introduction to reservoir simulation using matlab. (2014). Pp. 148

Se deben realizar la adaptaciones de las condiciones de frontera para introducirlas a las rutinas de cálculo, de la siguiente manera:

1. Condición de frontera Neumann que representa un flujo de entrada de magnitud igual a 5000 [m³/día] (se debe tener en cuenta que el flujo volumétrico debe estar en [m³/s]) por la cara 1 del volumen de control, por lo tanto se utiliza la ecuación (66).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\mu \dot{Q}}{A_x K_x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{0.001 * 5000}{(1000 * 50) * 1000} * \frac{1}{3600 * 24} * \frac{1000}{9.8692 * 10^{-13}} = 1172.74 \left[\frac{Pa}{m} \right]$$

donde se obtiene $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = 1172.74 [Pa/m]$, este es un valor positivo debido a que es un flujo de entrada.

2. Condición de frontera Dirichlet para una presión fija de 50 bares en la cara 4. Dado que en el ejercicio se desprecia la gravedad, se le asigna directamente a ϕ el valor de la presión.

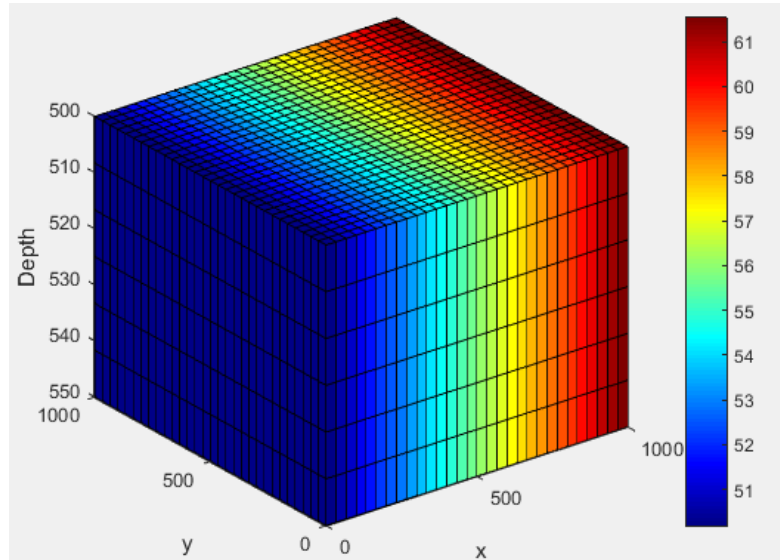
$$\phi = P = 5000000 [Pa], \text{ en ausencia de gravedad.}$$

3. Condición de no flujo para cada una de las caras restantes, es decir, que no presentan flujos de entrada o salida, por lo tanto, es de tipo Neumann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

Después de adaptar los datos de entrada para introducirlos en el software de cálculo se realiza la simulación obteniendo los resultados mostrados en la figura 13.

Figura 12. *Benchmark 2*: Distribución de presiones para la simulación en el MRST.



Fuente: MRST

En la figura 12 se puede observar cómo se da la distribución de presiones calculada en el MRST en el volumen de control. Se observa que la presión permanece constante en los planos $y - z$ y varía a lo largo del eje x desde $x = 0[m]$ hasta $x = 1000[m]$ con unos valores de presión entre $P = 50 [Bares]$ y $P = 62 [Bares]$.

Figura 13. *Benchmark 2*: Distribución de presiones calculados en el software desarrollado.

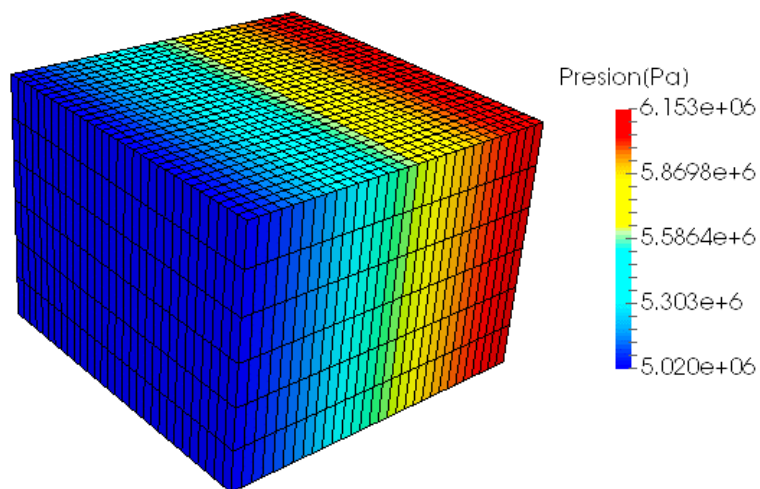
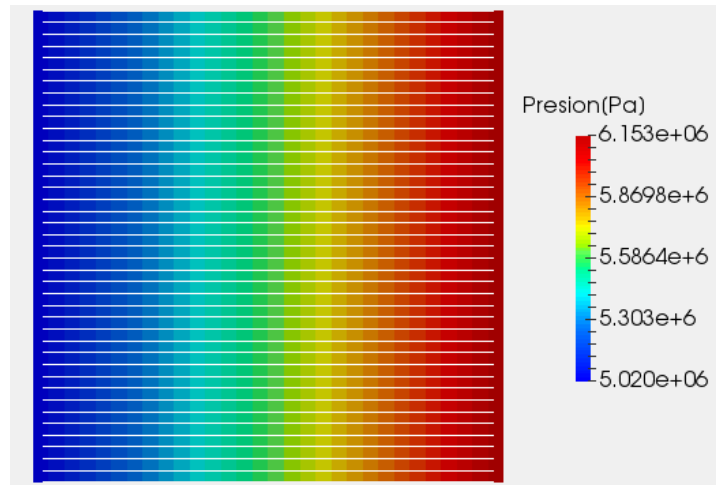
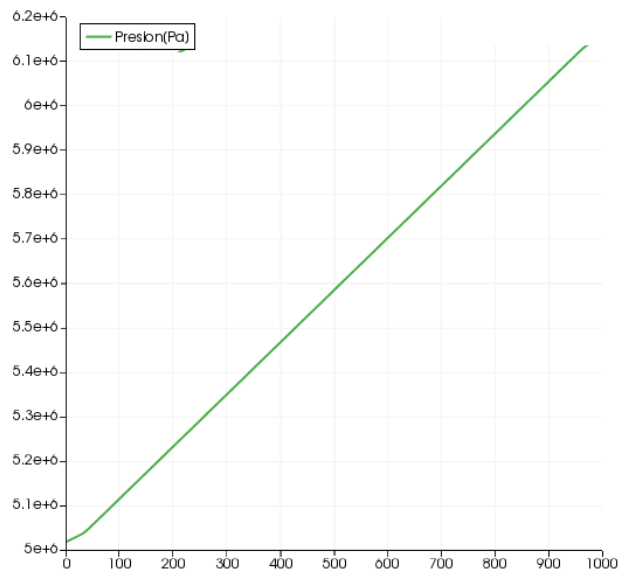


Figura 14. *Benchmark 2*. Líneas de flujo a lo largo del eje x volumen de control.



En la figura 13 y 14 se aprecia la distribución de presiones que arroja la simulación y las líneas de flujo a través del volumen de control respectivamente. Se comprueba la validez del programa al obtener valores de presión muy similares comprendidos entre 5.02×10^6 y 6.153×10^6 [Pa], equivalentes al intervalo de presiones de los resultados originales comprendido $P = 50$ [Bares] y $P = 62$ [Bares].

Figura 15. *Benchmark 2*. Distribución de presiones a lo largo de una línea de flujo.



De igual manera, en la figura 15 se observa que esta simulación arroja un comportamiento esperado, debido a que la presión varía linealmente a lo largo del eje x entre los valores extremos del intervalo.

Finalmente se comparan las presiones para cada uno de los elementos, calculando así el promedio de los errores y la desviación estándar de los errores. Los resultados de los errores calculados se muestran en la tabla 5.

Tabla 5. *Benchmark 2*: Medición de error en los resultados para los valores de presión.

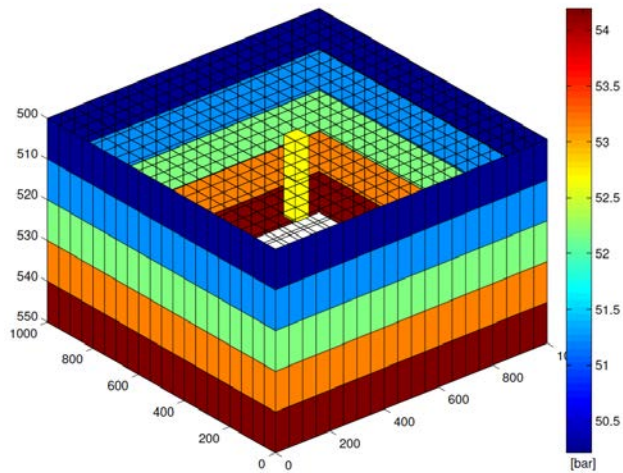
Promedio de los errores	$3,2 \times 10^{-5} \%$
Desviación Estándar de los Errores	$5,7 \times 10^{-5} \%$

5.6 HYDROSTATIC BOUNDARY CONDITIONS (*BENCHMARK 3*)

Para el *Benchmark 3* se tiene el mismo sistema geométrico que en el anterior problema, además se mantienen las propiedades del medio (la porosidad y el tensor de permeabilidad) y del fluido (densidad y viscosidad). Sin embargo, en este caso se tienen en cuenta los efectos de la gravedad y se consideran las condiciones de frontera de equilibrio hidrostático en las afueras del volumen de control, recordando que se encuentra a una profundidad de 500 m.

Asimismo, se ubica un sumidero en el centro del volumen de control en las dos capas superiores de elementos. En la figura 14 se puede observar una ilustración tomada del libro en la que se aprecia con mayor claridad las condiciones iniciales del problema y donde los elementos de color amarillo representan el sumidero que extrae 1000 [m^3/dia].

Figura 16. *Benchmark 3*: Condiciones iniciales del problema



Fuente: An introduction to reservoir simulation using matlab. (2014). Pp. 149

Al igual que el anterior ejercicio, se mantiene la malla con particiones de $30 \times 30 \times 6$. Para su correcta visualización.

En cuanto a las condiciones de frontera, se presentan las siguientes:

1. Condición de no flujo para las caras 3 y 6, es decir, que las caras superior e inferior no presentan flujos de entrada o salida, por lo tanto, es una condición de tipo Neumann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

2. Condición de equilibrio hidrostático en las caras restantes, es decir que la presión en cada elemento en la frontera será igual a la densidad por la profundidad por la gravedad, por lo tanto se debe calcular el valor de ϕ de la siguiente manera:

$$\Phi = P - \rho g z$$

Sin embargo, se tiene que el valor de P es el valor de presión hidrostática $P = \rho g z$.
Entonces:

$$\Phi = \rho g z - \rho g z = 0$$

3. Condición de flujo de salida en el elemento central de las dos capas superiores de $1000m^3/dia$, es decir en los volúmenes acotados por:

$$500[m] > x > 533[m]$$

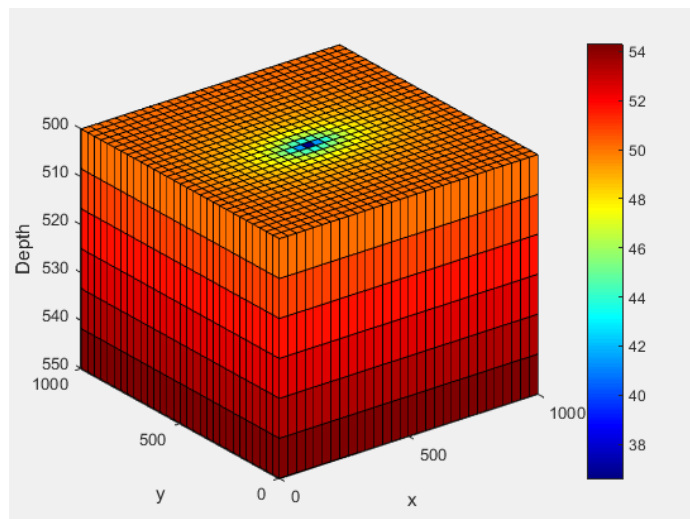
$$500[m] > y > 533[m]$$

$$34[m] > z > 50[m]$$

Aplicando la ecuación (68) se obtiene el valor de los flujos de salida (valores negativos) para cada elemento.

$$q = -\frac{\dot{Q} \cdot P}{V_e} = -\frac{1000 \cdot 1014}{\left(\frac{1000 * 1000 * 50}{30 * 30 * 6}\right)} * \frac{1}{3600 * 24} = -1.2675e^{-3} \left[\frac{Kg}{m^3 \cdot s} \right]$$

Figura 17. *Benchmark 3*: Distribución de presiones para la simulación en el MRST.



Fuente: MRST

En la figura 17 se puede observar que el rango de presiones oscila entre 36[Bares] y 54[Bares]. Estos valores de presión tienen una gran influencia de la presión hidrostática, excepto en los elementos cercanos al sumidero, donde se da una disminución sustancial de presión, debido a los flujos de salida presentes en los elementos. Adicionalmente, es de notar el comportamiento elíptico que se aprecia en la parte superior del volumen de control, esto es debido al carácter tensorial de la permeabilidad, en el que la permeabilidad a lo largo del eje x es mayor a aquella a lo largo del eje y.

En la figura 18, se presenta el mismo comportamiento anteriormente descrito, se demarcan las elipses que muestran las diferentes permeabilidades. Además, el rangos de presión es muy similar, debido a que la variación se da entre 36.63[Bares] y 54.29[Bares].

Figura 18. *Benchmark 3*. Distribución de presiones calculados en el software desarrollado.

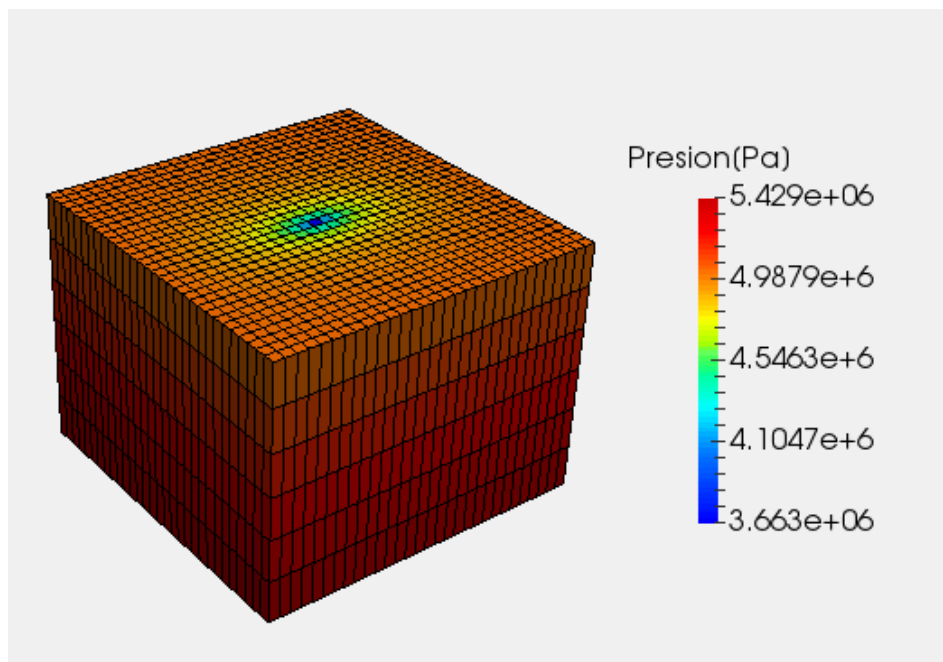
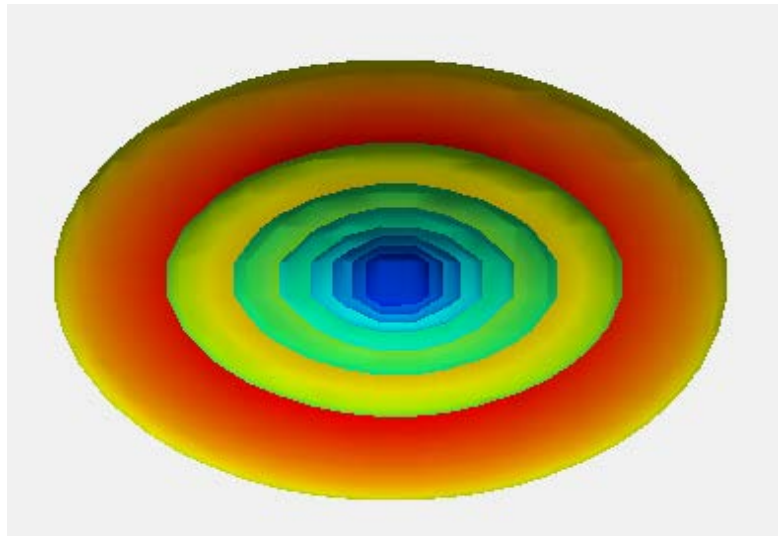


Figura 19. *Benchmark 3*. Isocontornos de presión obtenidos en la simulación.



En la figura 19 se puede distinguir con mayor claridad que los isocontornos tienen una mayor amplitud en el eje X , debido a que el tensor de permeabilidad presenta un valor más alto en esta coordenada, permitiendo que el fluido se desplace con una facilidad superior a la de las otras dimensiones, lo que ocasiona que haya una mayor variación de presiones en esta dirección con respecto de las otras.

Al igual que los ejercicios anteriores, se presenta el valor promedio de los errores y la desviación estándar de estos:

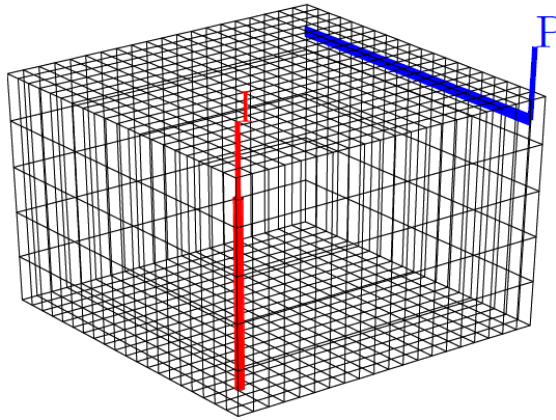
Tabla 6. *Benchmark 3*: Medición de error en los resultados para los valores de presión

Promedio de los errores	$-3,45 \times 10^{-2} \%$
Desviación Estándar de los Errores	$5,37 \times 10^{-4} \%$

5.7. FIRST WELL EXAMPLE (*BENCHMARK 4*)

En este *Benchmark*, se simula el comportamiento de un yacimiento hexaédrico, el cual está sometido a dos pozos, uno productor y otro inyector cuyas ubicaciones en el volumen de control, se muestran en la siguiente figura:

Figura 20. *Benchmark 4*: Ubicación del pozo inyector y productor.



Fuente: An introduction to reservoir simulation using matlab. 2014

donde el pozo inyector, presenta un flujo de entrada de $5000[m^3/día]$ y el productor presenta una presión de fondo de pozo de $100000[Pa]$ y un radio de pozo de $0.12[m]$. Adicionalmente, se presenta una condición de frontera de no flujo para todas las caras.

Seguidamente, se extraen del libro los datos del problema como las propiedades del fluido (propiedades típicas para el agua), las propiedades petroquímicas del medio (porosidad y permeabilidad), las condiciones geométricas de la malla y las condiciones de frontera, además se debe tener en cuenta el efecto de la gravedad.

Tabla 7. Datos de entrada *Benchmark 4*

Propiedades Geométricas	Propiedades del medio	Propiedades del fluido
Dimensiones: 500x500x25 m³	Permeabilidad(x):100 mD Permeabilidad(y):100 mD Permeabilidad(z):100 mD	Viscosidad:1 centipoise = $1 \times 10^{-3} Pa \cdot s$
Tamaño de la malla: 30x30x6	Porosidad(ϕ):0,2	Densidad: 1014 kg/m ³

A continuación, se presentan las condiciones del problema con sus respectivas interpretaciones:

1. Pozo con una inyección de $3000m^3/día$: esta condición debe ser tratada como un flujo de entrada, se debe tener en cuenta que el flujo debe repartirse entre los elementos que conforman el pozo, en este caso 6, cuya ubicación está acotada por las siguientes coordenadas:

$$483[m] > x > 500[m]$$

$$0[m] > y > 17[m]$$

$$0[m] > z > 25[m]$$

Aplicando la ecuación (68) se obtiene el valor de los flujos de entrada (valores positivos) para cada elemento.

$$q = \frac{\dot{Q} \cdot P}{V_e} = \frac{3000 \cdot 1014}{\left(\frac{500 \cdot 500 \cdot 25}{30 \cdot 30 \cdot 6}\right) \cdot 6} \cdot \frac{1}{3600 \cdot 24} = 5.07e^{-3} \left[\frac{Kg}{m^3 \cdot s}\right]$$

2. Para la condición de pozo productor, con una presión de fondo de pozo de $100000[Pa]$ y un radio de pozo de $0.12[m]$, orientado en dirección del eje x, en los elementos acotados por:

$$0[m] > x > 500[m]$$

$$483[m] > y > 500[m]$$

$$21[m] > z > 25[m]$$

se aplican las ecuaciones 70, 71 y 72, para obtener el índice productor del pozo (anexo I):

$$PI = 3.4475e^{-9} [m^3/(Pa \cdot s)]$$

Una vez determinado el valor del índice productor del pozo, aplicando la ecuación (69), se procede a calcular la presión en los elementos que conforman el pozo, teniendo en cuenta el principio de conservación de la masa, es decir, los $3000 m^3/dia$ se reparten entre los volúmenes de control del pozo productor, asumiendo que en cada elemento se da el mismo flujo de salida:

$$\dot{Q} = PI * (P_c - P_{bh})$$

$$P_c = \frac{\dot{Q}}{PI} + P_{bh} = \frac{3000}{3600 * 24 * 30} * \frac{1}{3.4475e^{-9}} + 100000$$

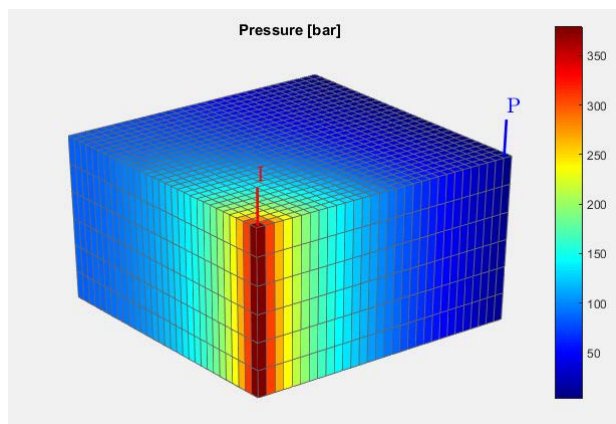
$$P_c = 435723.686 [Pa]$$

Dado a que es una condición de presión, se debe hallar el valor de ϕ .

$$\phi = P_c - \rho g z = 435723.686 - 1014 * 9.81 * \frac{25}{6 * 2}$$

$$\phi = 414936.686 [Pa].$$

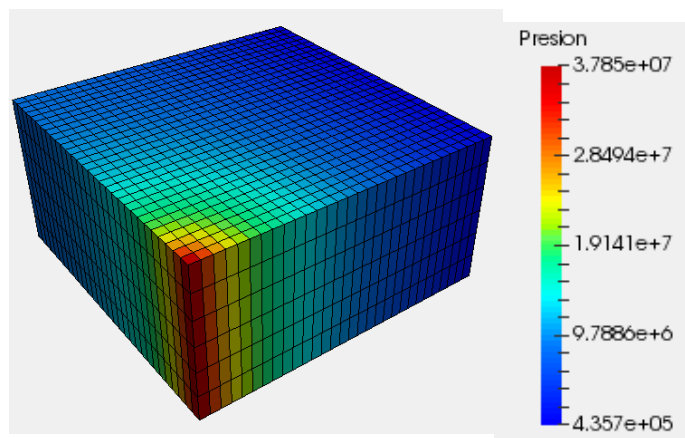
Figura 21. *Benchmark 4*: Distribución de presiones para la simulación en el MRST.



Fuente: MRST

En la figura 21 se muestra la distribución de presiones calculada en el MRST para el volumen de control. Se observa que las mayores presiones, alrededor de 380[Bares], se presentan en el pozo inyector, debido a que en estos elementos tiene una condición de flujo de entrada. Del mismo modo, se presentan las presiones más bajas en la cara donde se encuentra el pozo productor, ya que en estos elementos, existe un flujo de salida y además son los más lejanos al pozo inyector. El rango de presiones varía desde los 4 [Bares] hasta 380 [Bares].

Figura 22. *Benchmark 4*: Distribución de presiones calculados en el software desarrollado.



En la figura 22 se aprecia la distribución de presiones que arroja la simulación. Se observa un comportamiento en la presión similar al descrito anteriormente. Asimismo, se corroboran los resultados mediante el rango de valores presión, que para este caso están comprendidos entre 4.357[Bares] hasta 378.5[Bares], lo que concuerda con el resultado dado por la simulación en el MRST.

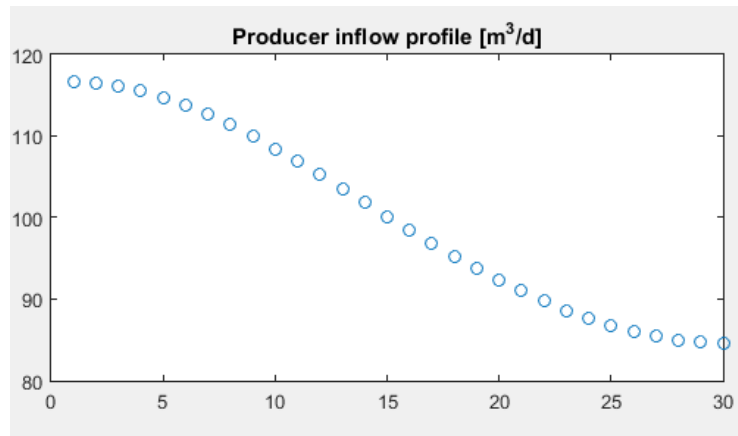
En concordancia con lo anterior, se calcula el error en el valor de presión para cada uno de los elementos, y se presentan en la tabla 9 el promedio de estos valores y la desviación estándar de los mismos.

Tabla 9. *Benchmark 4*: Medición de error en los resultados para los valores de presión.

Promedio de los errores	0,614 %
Desviación Estándar de los Errores	1,203 %

Adicionalmente, se analizaron los valores y el comportamiento del flujo de la solución arrojada por el software desarrollado, comparándolos con los valores que da el MRST. En la figura 23 se pueden ver los valores de flujo expresados en m^3/dia para la solución del MRST, se percibe que los elementos que presentan mayores flujos de producción son los más cercanos al pozo inyector. De igual manera, se observa en la tabla 8 que la sumatoria de estos valores es $3000 m^3/dia$, lo cual es un valor esperado por el principio de conservación de la masa.

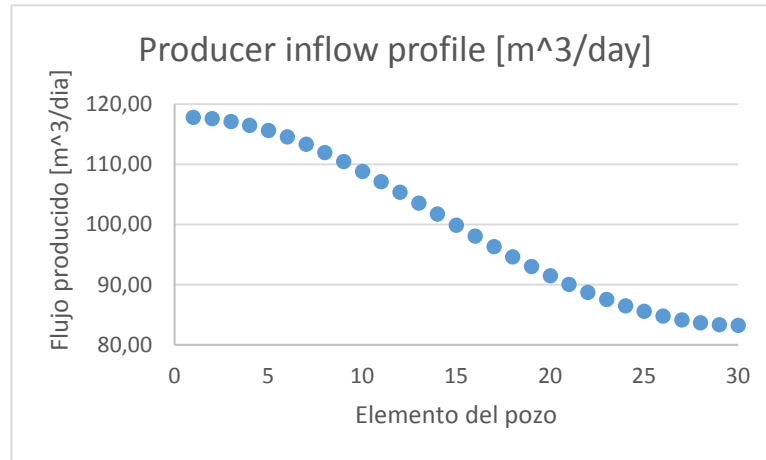
Figura 23. *Benchmark 4*: Resultados de los flujos en el pozo productor para la simulación original



Fuente: MRST

Una vez solucionado el problema con el software desarrollado, se observa que la tendencia en el flujo de salida sigue el mismo comportamiento que en el MRST y que los valores son muy cercanos. Estos se aprecian en detalle en la tabla 8, así como el error en cada uno de los elementos del pozo cuyos valores varían entre 0 y 1,5%, lo cual muestra que el cálculo es bastante cercano a la respuesta.

Figura 24. *Benchmark 4*: Resultados de los flujos en el pozo productor para la simulación original.



Adicionalmente, se realizó la sumatoria de los flujos se salida para ambas simulaciones, para la simulación hecha da un valor de 2993.335 [m³/dia] muy cercano al valor dado para la simulacion de 3000 [m³/dia]. Esto es debido a que al trabajar con modelos de pozos, se deben plantear ecuaciones adicionales para cada pozo, lo que conlleva a una modificación de la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes y el vector de variables, por lo tanto, para solucionar el problema, se realizó una aproximación en la que se asigna la misma presión a cada uno de los elementos que conforma el pozo, lo cual no se ajusta a la realidad, pero como se observa en los resultados, es una acertada.

Tabla 8. Comparación entre los flujos dados por el MRST y los flujos calculados.

Elemento del pozo	MRST Flujo [m ³ /día]	Flujo Calculado [m ³ /día]	Error [%]	Elemento del pozo	MRST Flujo (m ³ /día)	Flujo Calculado (m ³ /día)	Error [%]
1	-116,76	-117,83	-0,921%	16	-98,50	-98,13	0,385%
2	-116,55	-117,61	-0,912%	17	-96,87	-96,37	0,516%
3	-116,14	-117,16	-0,882%	18	-95,28	-94,67	0,645%

4	-115,53	-116,50	-0,843%	19	-93,77	-93,05	0,768%
5	-114,73	-115,63	-0,786%	20	-92,33	-91,51	0,892%
6	-113,76	-114,58	-0,723%	21	-90,99	-90,08	1,010%
7	-112,63	-113,35	-0,642%	22	-89,76	-88,77	1,106%
8	-111,36	-111,98	-0,561%	23	-88,64	-87,58	1,197%
9	-109,96	-110,47	-0,463%	24	-87,65	-86,52	1,288%
10	-108,46	-108,85	-0,355%	25	-86,78	-85,60	1,363%
11	-106,89	-107,15	-0,247%	26	-86,05	-84,82	1,425%
12	-105,25	-105,38	-0,125%	27	-85,46	-84,18	1,492%
13	-103,57	-103,57	0,001%	28	-85,01	-83,70	1,551%
14	-101,87	-101,75	0,123%	29	-84,72	-83,39	1,565%
15	-100,18	-99,92	0,255%	30	-84,57	-83,25	1,551%
				Total	-3000	-2993,33	

Del mismo modo, se calcula el promedio de los errores en el flujo de estos elementos y la desviación estándar y se muestran, a continuación, en la tabla 9.

Tabla 9. *Benchmark* 4: Medición de error en los resultados para los valores de flujo.

Promedio de los errores	0,32 %
Desviación Estándar de los Errores	0,90 %

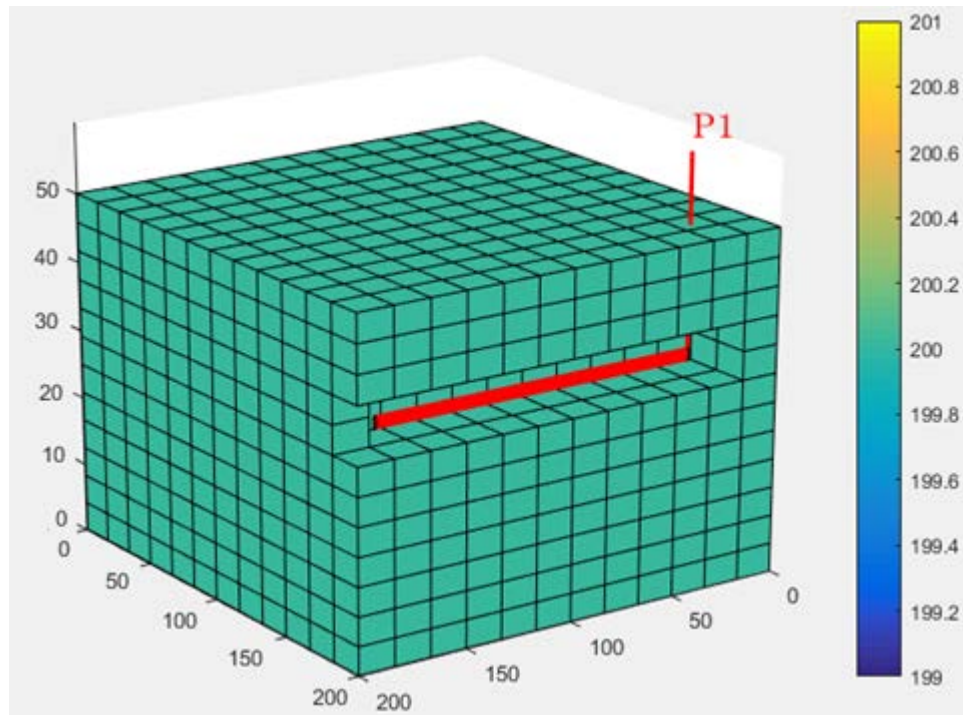
5.8 CONSTANT COMPRESSIBILITY (*BENCHMARK* 5)

En este *Benchmark*, se comprueba la funcionalidad de la clase CPorosoComp, la cual resuelve problemas de flujo en medio poroso, para los casos de compresibilidad constante, y ligeramente compresible, en las cuales se presenta un término transitorio.

Durante este problema, se simula el comportamiento de un yacimiento tridimensional, el cual está inicialmente a una presión de 200 [Bares], además presenta un pozo productor en dirección y , con una presión de fondo de pozo de 100[Bares] y un radio de pozo de 0.12[m] como se muestra en la figura 25, además

se tiene una condición de densidad de superficie de pozo de $750 [Kg/m^3]$, parámetro utilizado para calcular el flujo volumetrico de salida.

Figura 25. *Benchmark 5*: Estado inicial del volumen de control.



A continuación se presentan los datos del problema como las propiedades del fluido, las propiedades del medio, la geometría del yacimiento, además de las condiciones iniciales y valores de referencia, ya que se trata de un ejercicio en régimen transitorio. Además, no se tienen en cuenta los efectos gravitatorios.

Tabla 10. Datos de entrada *Benchmark 5*

Propiedades Geométricas	Propiedades del medio	Propiedades del fluido
Dimensiones: $200 \times 200 \times 50 [m^3]$	Permeabilidad(x):30 [mD] Permeabilidad(y):30 [mD] Permeabilidad(z):30 [mD]	Viscosidad:5 [centipoise] $= 5 \times 10^{-3} [Pa \cdot s]$
Tamaño de la malla: $12 \times 12 \times 12$.	Porosidad de referencia (ϕ): 0,3.	Densidad de referencia : $850 [kg/m^3]$

	Compresibilidad de la Roca: $1 \times 10^{-11} [Pa^{-1}]$.	Compresibilidad del fluido: $1 \times 10^{-8} [Pa^{-1}]$
	Presión inicial del yacimiento: 200 [Bares]	

Para finalizar la descripción del ejercicio, se definen los parámetros de tiempo de la simulación, la cual tendrá una duración de 365[días] y 50 pasos de tiempo.

Tabla 11. Parámetros de tiempo para el *Benchmark 5*

Parámetros de tiempo	
Tiempo de simulación	365 [días] = 31536000 [s]
Pasos de tiempo	50 Pasos
Delta de tiempo	630720 [s]

A continuación, se interpreta la condición de pozo productor del problema:

Para la condición de pozo productor, con una presión de fondo de pozo de 100[Bares] y un radio de pozo de 0.1[m], orientado en dirección y, en los elementos acotados por:

$$167[m] > x > 184[m]$$

$$16[m] > y > 184[m]$$

$$29[m] > z > 33[m]$$

Se aplican las ecuaciones 70, 71 y 72 para obtener el índice productor del pozo (anexo J):

$$PI = 1.95 \times 10^{-10} [m^3 / (Pa \cdot s)]$$

Este valor, se utilizará durante el proceso iterativo, para determinar las presiones y los flujos de salida de los elementos que conforman el pozo.

Una vez determinado el índice productor, se procede a calcular la densidad de los elementos del pozo para el primer paso de tiempo, la cual está dada por el valor de

la densidad calculado a partir de una presión media, entre la presión inicial y la presión de fondo de pozo:

$$P_m = 0.5P_i + 0.5P_{bh} = 0.5(200 \times 10^5) + 0.5(100 \times 10^5)$$

$$P_m = 150 \times 10^5 [Pa]$$

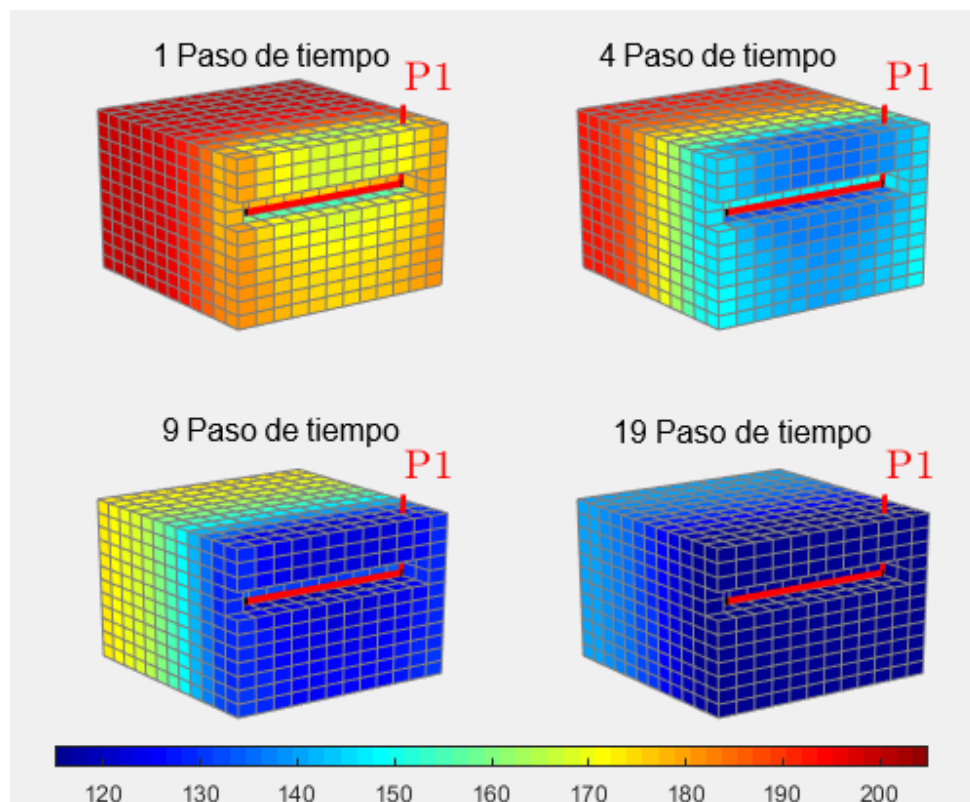
Una vez hallada la presión media, mediante la ecuación (19) se calcula la densidad:

$$\rho = \rho_r * e^{C_f(P_m - P_r)} = 850 * e^{1 \times 10^{-8}(150 \times 10^5 - 200 \times 10^5)}$$

$$\rho = 808.5 [Kg/m^3]$$

Este valor será introducido como la propiedad de Φ por elemento, mediante la posición 14 del arreglo matricial de propiedades, debido a que para el caso de compresibilidad constante, la variable Φ , es igual a la densidad.

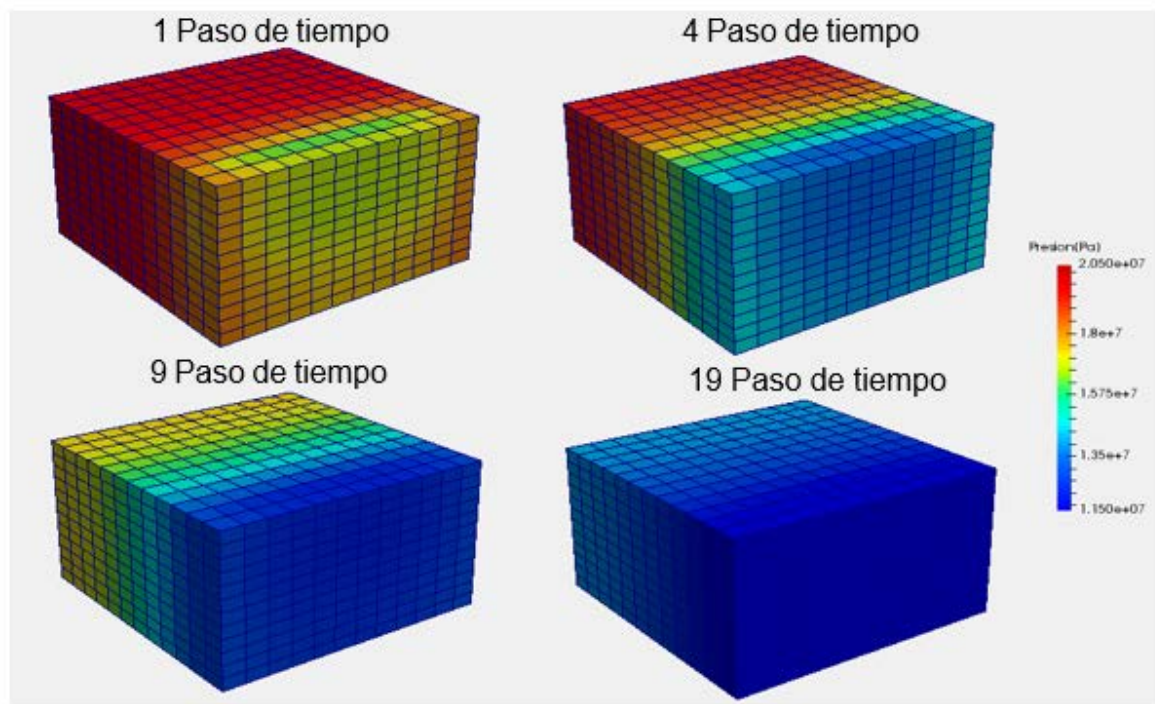
Figura 26. *Benchmark 5*: Distribución de presiones para la simulación en el MRST para distintos pasos de tiempo.



Fuente: MRST

Como se observa en la figura 26, para los primeros pasos de tiempo, los elementos que hacen parte del pozo productor, son los que presentan las presiones mas bajas, debido a que en estos elementos se presenta un flujo de salida, a medida que se alejan los elementos del pozo se aprecia un aumento en la presión, este comportamiento se mantiene durante toda la simulación, pero a medida que se avanza en la simulación, la diferencia entre la presión de los elementos que conforman el pozo y los mas alejados a este, se hace cada vez menor, esto se debe a que el sistema cada vez mas se acerca al régimen estacionario, donde todos los elementos tendrán la misma presión y no se presentará un flujo de salida, dado que el gradiente de presión será igual a cero.

Figura 27. *Benchmark 5*: Distribución de presiones calculadas en el software desarrollado para distintos pasos de tiempo.



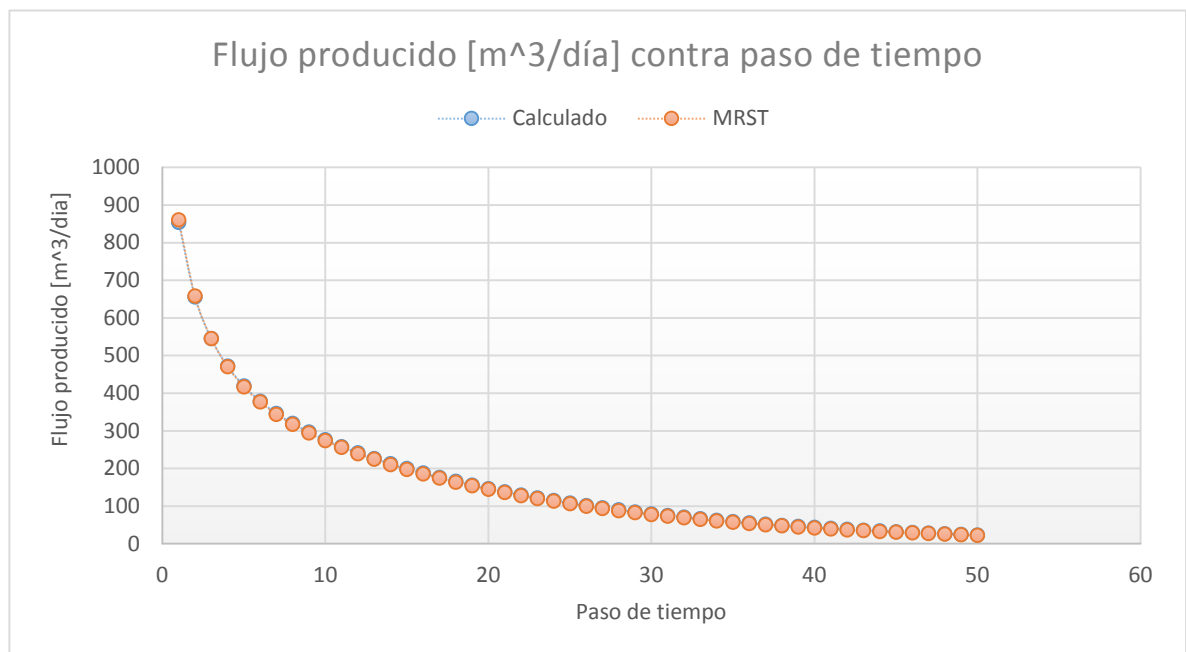
En la figura 27, se muestran los resultados para los mismos pasos de tiempo de la simulación con el MRST, en esta se puede observar que a medida que avanza el

tiempo, la diferencia de presiones, entre los elementos que conforman el pozo (los cuales presentan las presiones más bajas) y los más alejados a este, es cada vez menor debido a que se tiende al régimen estacionario, es decir, se da el mismo comportamiento anteriormente descrito. En la tabla 12 se puede apreciar el promedio de los errores y la desviación estándar de los errores para los valores de presión en los pasos de tiempo mostrados en las gráficas 26 y 27.

Tabla 12. *Benchmark 5*: Medición de error en los resultados para los valores de presión.

Paso de tiempo	Promedio de los errores	Desviación estándar de los errores
1	0,57%	0,34%
4	0,44%	0,28%
9	0,48%	0,12%
19	0,45%	0,02%

Figura 28. *Benchmark 5*: Flujos de salida en el pozo productor para todos los pasos de tiempo



En la gráfica 28, se observa que el flujo producido en el pozo durante los distintos pasos de la simulación tanto para el modelo en el MRST como el calculado, presentan la misma tendencia y los valores coinciden al punto en el que las gráficas están superpuestas. En la tabla 13, se puede apreciar con mayor detalle los valores de flujo y el cálculo del error para cada paso de tiempo, el cual varía de -0.8% hasta 3.2% con un valor promedio apreciado en la tabla 14, junto con la esviación estándar.

Tabla 13. *Benchmark 5*: Comparación entre los flujos dados por el MRST y los flujos calculados.

Paso de tiempo	MRST Flujo [m ³ /día]	Flujo Calculado [m ³ /día]	Error [%]	Paso de tiempo	MRST Flujo (m ³ /día)	Flujo Calculado (m ³ /día)	Error [%]
1	-853,921	-861,128	-0,84%	26	-101,812	-99,938	1,84%
2	-655,516	-658,528	-0,46%	27	-95,7824	-93,9626	1,90%
3	-545,331	-545,143	0,03%	28	-90,111	-88,3457	1,96%
4	-472,036	-470,506	0,32%	29	-84,776	-83,0663	2,02%
5	-419,228	-417,162	0,49%	30	-79,7575	-78,1029	2,07%
6	-378,897	-376,629	0,60%	31	-75,0365	-73,4369	2,13%
7	-346,612	-344,279	0,67%	32	-70,5953	-69,0504	2,19%
8	-319,761	-317,413	0,73%	33	-66,4172	-64,9264	2,25%
9	-296,73	-294,385	0,79%	34	-62,4866	-61,0493	2,30%
10	-276,494	-274,154	0,85%	35	-58,789	-57,4042	2,36%
11	-258,38	-256,046	0,90%	36	-55,3102	-53,9769	2,41%
12	-241,939	-239,611	0,96%	37	-52,0374	-50,7547	2,47%
13	-226,863	-224,542	1,02%	38	-48,9585	-47,7252	2,52%
14	-212,936	-210,624	1,09%	39	-46,0618	-44,8767	2,57%
15	-200,002	-197,703	1,15%	40	-43,3366	-42,1985	2,63%
16	-187,944	-185,663	1,21%	41	-40,7728	-39,6802	2,68%
17	-176,672	-174,415	1,28%	42	-38,3606	-37,3124	2,73%
18	-166,116	-163,887	1,34%	43	-36,0913	-35,0861	2,79%
19	-156,217	-154,02	1,41%	44	-33,9562	-32,9928	2,84%
20	-146,925	-144,766	1,47%	45	-31,9475	-31,0244	2,89%
21	-138,198	-136,079	1,53%	46	-30,0577	-29,1736	2,94%

22	-129,996	-127,922	1,60%	47	-28,2798	-27,4332	2,99%
23	-122,287	-120,26	1,66%	48	-26,607	-25,7968	3,05%
24	-115,039	-113,06	1,72%	49	-25,0332	-24,2581	3,10%
25	-108,222	-106,296	1,78%	50	-23,5525	-22,8112	3,15%
				Total	-8498,19	-8428,6	0,82%

Tabla 14. *Benchmark* 5. Promedio del error y desviación estándar para el flujo.

Promedio de los errores	1,722 %
Desviación Estándar de los Errores	0,962 %

5.9 CONSIDERACIONES

Finalmente, culminada la simulación de los *Benchmarks* se puede concluir que tanto las clases desarrolladas como las aproximaciones de los modelos de pozo productor, arrojan resultados con soluciones muy cercanas a las del software establecido para comparación.

Es posible corroborar esto, debido a los resultados obtenidos en cada uno de los *Benchmarks*, dado que el cálculo del promedio de los errores, para las presiones, no supera el 1% y en la desviación estándar, el valor máximo para estas simulaciones es menor al 2%.

Por otro lado, para los valores de flujo arrojados por las aproximaciones hechas para el modelo de producción e inyección en pozos, se obtuvieron promedios de error de máximo 2% y valores puntuales de error que no superan el 3,2%. Por lo tanto, es posible afirmar que de las aproximaciones hechas se obtienen soluciones que se ajustan bastante a los valores reales.

Asimismo, se demuestra que este software tiene validez para extender el cálculo a otras situaciones y obtener resultados aproximados bastante cercanos.

6. CASO DE ESTUDIO

Para englobar el trabajo realizado en este proyecto, se quiere extender este estudio a situaciones que puedan presentarse en la vida real y que por medio del desarrollo de este tipo de tecnologías sea posible facilitar su análisis para poder prever de una mejor manera, los resultados de las medidas o soluciones que se pretendan aplicar.

Como se estableció anteriormente, se analizará el caso de una migración de aguas subterráneas. Para este caso específico, el flujo se da desde una ciénaga de agua contaminada hacia un lago que sirve como fuente hídrica de agua potable para una comunidad. Se puede apreciar, en la figura 29, una situación en donde se pueden presentar dos cuerpos de agua, aparentemente separados por una montaña, que pueden tener intercambio de masa por medio del flujo subterráneo a través de un medio poroso.

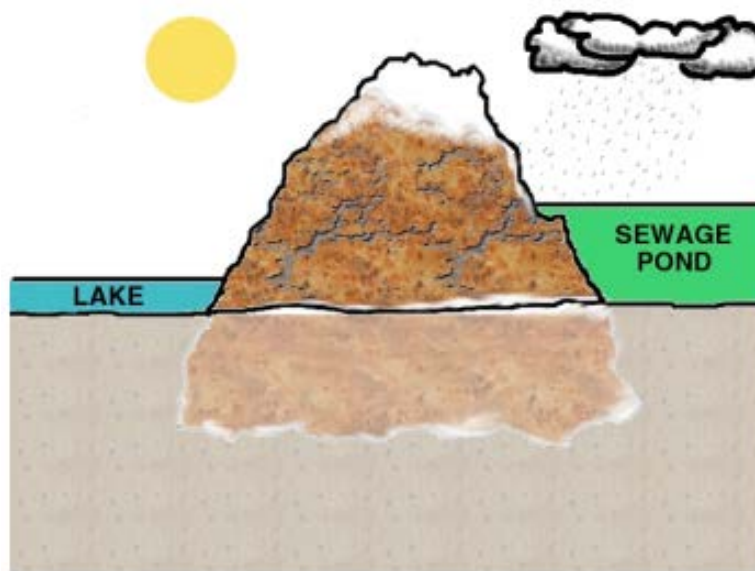
Figura 29: Caso de estudio en la vida real



Fuente: <http://geomechanics.civil.northwestern.edu/Education_files/Water%20Flow%20Through%20Porous%20Media%20Experience.pdf>

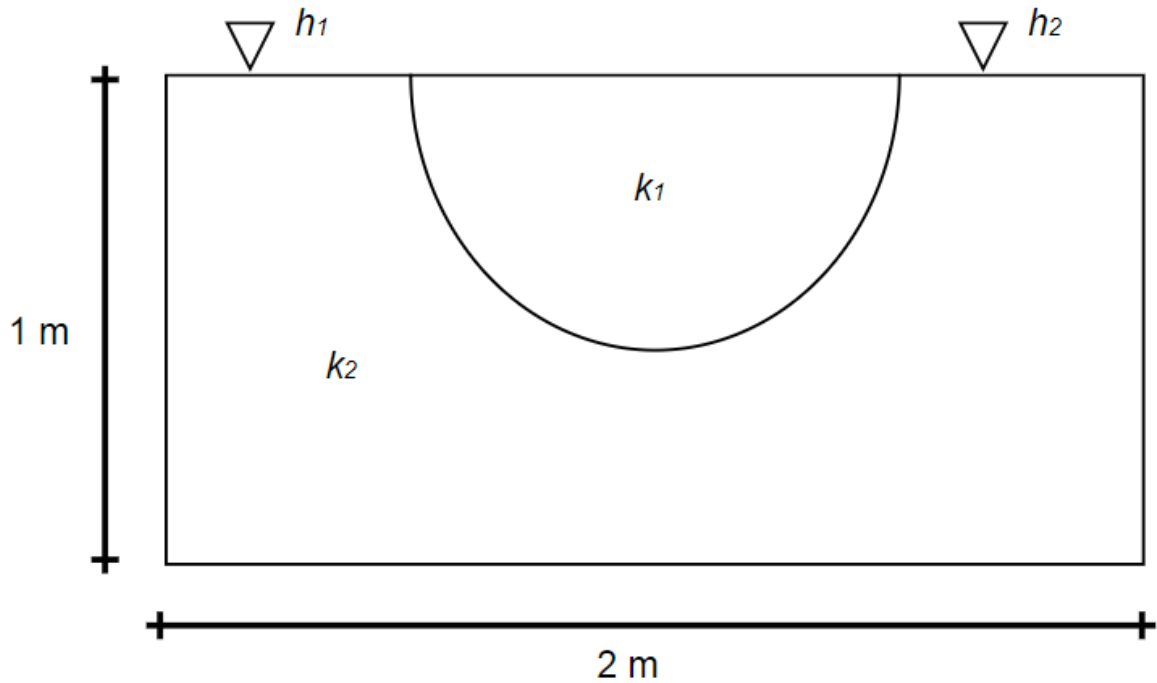
Conforme a esto, la situación que se procura simular se puede observar con mayor claridad en la figura 30. Esta situación se pretende modelar como un problema bidimensional donde se tienen dos cuerpos de agua a cada lado de una montaña y donde existe una roca (material poco permeable) separando dichos cuerpos. Con base en la situación modelada, se espera un comportamiento en el cual el fluido se desplace en contra del gradiente de presión, rodeando el cuerpo poco permeable. Con el objetivo de observar la influencia de algunas de las propiedades que intervienen en la simulación, se realizarán diferentes simulaciones cambiando parámetros como: la diferencia de presiones en las condiciones de frontera, el tensor de permeabilidad y la permeabilidad del medio.

Figura 30: Diagrama del caso de estudio



Fuente:http://geomechanics.civil.northwestern.edu/Education_files/Water%20Flow%20Through%20Porous%20Media%20Experience.pdf

Figura 31: Volumen de control simulado



En concordancia con lo anterior, la figura 31 representa cómo se modeló la situación descrita anteriormente en donde el origen de coordenadas (0,0) está ubicado en la esquina inferior izquierda del volumen de control. Con el fin de utilizar valores reales para la simulación, se simuló el volumen de control a una profundidad de 40 m, dado que la profundidad promedio de los lagos a nivel mundial es de 41.8 m¹⁵. De la misma manera, se consultaron valores de permeabilidad para los medios involucrados en la simulación, obtenidos de la tabla 15. Para simular la roca se escogió una medida “prácticamente impermeable” del orden de 10^{-8} cm/seg y para el suelo por donde va a circular el agua se seleccionó una permeabilidad

¹⁵ CAEL, B.; HEATHCOTE A. Y Heathcote, and SEEKELL D. A. The volume and mean depth of Earth's lakes. [En línea]. *Agu Publications: Geophysical research letters*. 2017. (Recuperado en 22 marzo 2018.) Disponible en <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/2016GL071378>

ligeramente “buena” del orden de 10^{-3} cm/seg. Sin embargo, debe observarse que estos valores de permeabilidad están dados en cm/seg y por tanto, representan la conductividad hidráulica que se obtiene de la ley de Darcy en la ecuación 7 y hay que manipularlos como se muestra más adelante para obtener los valores de permeabilidad intrínseca del material.

Tabla 15. Valores de K para distintos tipos de suelo en [cm/seg]

	100	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
Drenaje	Bueno						Pobre			Prácticamente impermeable		
Tipo de suelo	Grava limpia	Arenas limpias y mezclas limpias de arena y grava			Arenas muy finas, limos orgánicos e inorgánicos, mezclas de arena, limo y arcilla, morenas glaciares, depósitos de arcilla estratificada				Suelos “impermeables”, es decir, arcillas homogéneas situadas por debajo de la zona de descomposición			
					Suelos “impermeables”, modificados por la vegetación o la descomposición. ^d							

Fuente: Permeabilidad en suelos¹⁶

Inicialmente, se debe hacer mención de que la permeabilidad es una medida que está asociada al flujo de un fluido a través de un medio, por lo tanto debe considerarse la interacción entre el fluido y el medio para poder establecer los valores de la misma. De esta manera, se va a considerar el fluido como agua saturada a 20 °C con sus respectivas propiedades¹⁷:

¹⁶ ANGELONE, Silvia; GARIBAY, María Teresa y CASAUX, Marina. Permeabilidad de suelos. [En línea]. Argentina: Universidad Nacional del Rosario, Facultad de ciencias exactas, ingeniería y agrimensura. 2006. (Recuperado en 28 marzo 2018.) Disponible en <https://www.fceia.unr.edu.ar/geologiaygeotecnia/Permeabilidad%20en%20Suelos.pdf>

¹⁷ CENGEL, Yunus. GHAJAR, Ashfin. Transferencia de Calor y Masa. Ed 4. Mc Graw Hill. 2011. p.878. ISBN 978-607-15-0540-8

Densidad: $\rho_{@20^{\circ}\text{C}} = 998.0 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$

Viscosidad: $\mu_{@20^{\circ}\text{C}} = 1.002 * 10^{-3} \text{ [Kg/m} \cdot \text{s]}$

Adicionalmente se debe hacer la salvedad de que los valores de conductividad hidráulica expresados anteriormente en cm/seg, se deben ajustar al sistema internacional de unidades y que los valores de permeabilidad son, para efectos prácticos, expresados en miliDarcys. Entonces, se procede a calcular los valores de permeabilidad intrínseca de la siguiente manera:

Roca:

$$K_r = \frac{k_r \mu}{\rho g} = \frac{10^{-10} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] * 1.002 * 10^{-3} \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right]}{998 \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right] * 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]} = 1.021 * 10^{-17} [\text{m}^2] = [0.0103 \text{ mD}]$$

Suelo:

$$K_s = \frac{k_s \mu}{\rho g} = \frac{10^{-5} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] * 1.002 * 10^{-3} \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right]}{998 \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right] * 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]} = 1.021 * 10^{-12} [\text{m}^2] = [1034.86 \text{ mD}]$$

Para facilidad en los cálculos se usarán los valores de 0.01 y 1000 mD, respectivamente. Hay que mencionar además que la roca a la que se le asigna menor permeabilidad y que está ilustrada en la figura 31 fue modelada mediante una elipse con centro en (1,1) y satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{(x - 1)^2}{0,5^2} + \frac{(y - 1)^2}{0,6^2} = 1$$

En relación a las condiciones de frontera, se establecieron condiciones de no flujo a través de la frontera en las caras 1, 3 y 4, así como en la cara 2, por encima de la roca. Por otro lado, en la frontera superior izquierda que corresponde al lago hacia

donde va a migrar el fluido se estableció una presión hidrostática hecha por una columna de agua igual a la profundidad del volumen de control (40 m). De igual manera, en la ciénaga se fijó una presión hidrostática hecha por una columna de agua de 70 m, introduciendo así una diferencia de presiones para el caso de referencia de $2.93 * 10^5 [Pa]$ como se calcula a continuación:

$$P_1 = \rho g h_1 = 998 \left[\frac{kg}{m^3} \right] * 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right] * 40 [m] = 3.91 * 10^5 [Pa]$$

$$P_2 = \rho g h_2 = 998 \left[\frac{kg}{m^3} \right] * 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right] * 70 [m] = 6.85 * 10^5 [Pa]$$

$$P_2 - P_1 = 2.93 * 10^5 [Pa]$$

Finalmente se procede a hacer la simulación que arroja la distribución de presiones y las líneas de flujo mostradas en la figura 32. Allí, es posible apreciar el comportamiento esperado, el flujo se da rodeando al elemento poco permeable, sin embargo las líneas de flujo tienden a alejarse del obstáculo una vez lo rodean. Este comportamiento tiene su explicación en los efectos gravitatorios, ya que el peso de la columna vertical de agua hace que el flujo adopte esa trayectoria. Para corroborar lo anterior, en la figura 33 se muestra una simulación en donde no se tuvo en cuenta la gravedad y se observa que el comportamiento mencionado no ocurre y las líneas de flujo se distribuyen alrededor del obstáculo casi simétricamente.

Asimismo, al desprestigiar los efectos gravitatorios, el intervalo de presiones se ve modificado, ya que para la primer escenario varía entre las presiones causadas por las columnas de agua. Sin embargo, cuando se desprestigia la gravedad, esta se iguala a 0 y la presión hidrostática causada por la columna de agua (calculada como $P_H = \rho g z = 0$) también se anula, entonces las presiones dentro del elemento poco permeable (roca) son ínfimas con respecto al resto del volumen de control. Por lo tanto, el intervalo varía desde casi 0 [Pa] hasta el valor presión de la mayor columna de agua ($6.85 * 10^5 [Pa]$).

Figura 32: Simulación de referencia

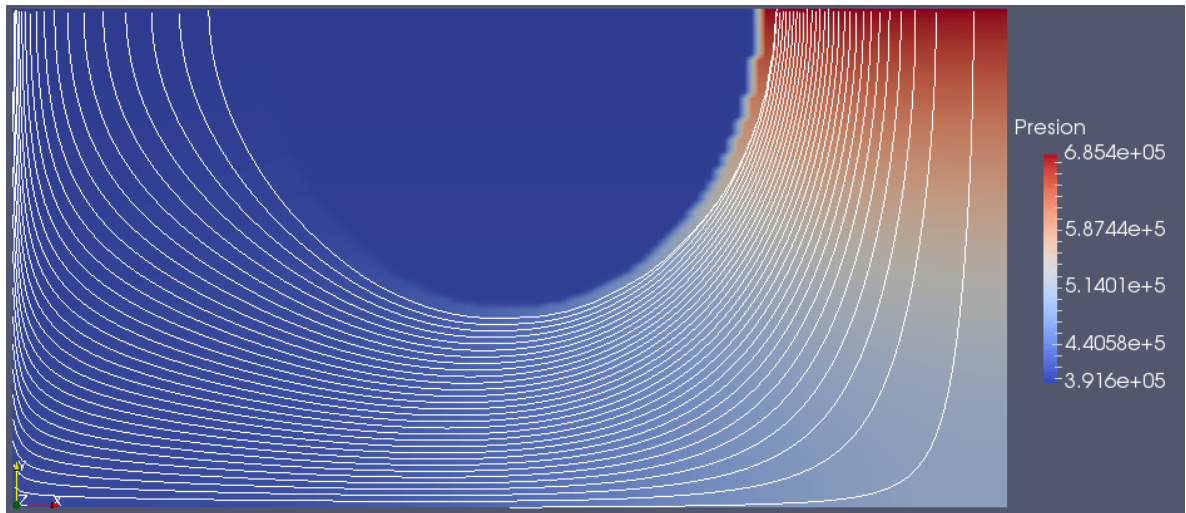
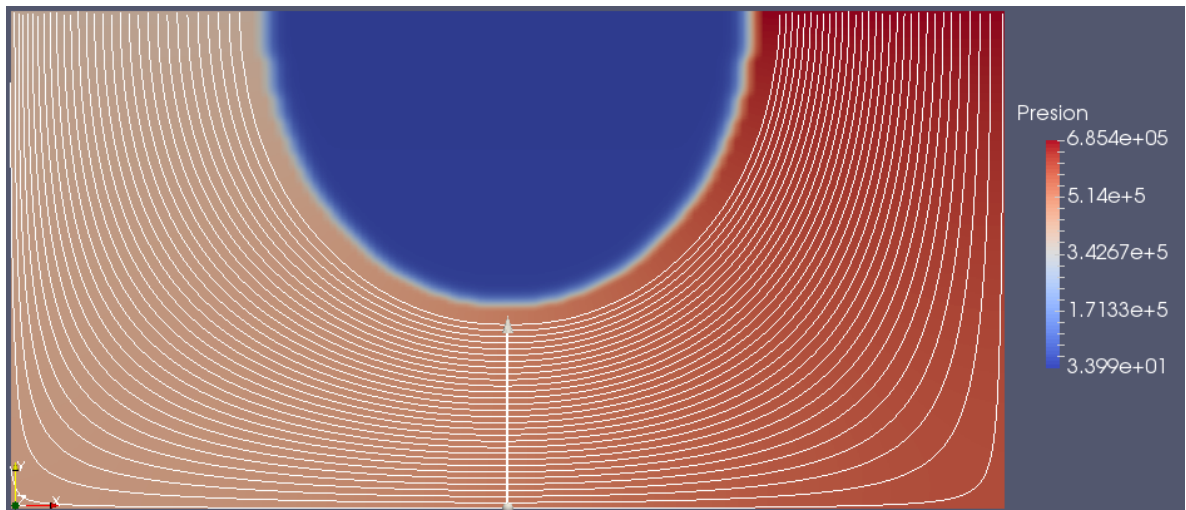


Figura 33: Simulación despreciando los efectos gravitatorios



A continuación, se muestra cómo se ven afectadas las líneas de corriente cuando la diferencia de presiones aumenta. Para esto, se realizaron dos simulaciones donde se aumenta la presión por medio de una diferencia de alturas de 50 y 100 m, respectivamente. Dichas presiones se calculan igual que las anteriores y se

obtienen unos valores de $8.81 \cdot 10^5$ y $13.71 \cdot 10^5$ [Pa] para las condiciones de frontera. Las simulaciones realizadas se observan en las figuras 34 y 35, respectivamente.

Figura 34: Simulación con $\Delta h = 50$ m

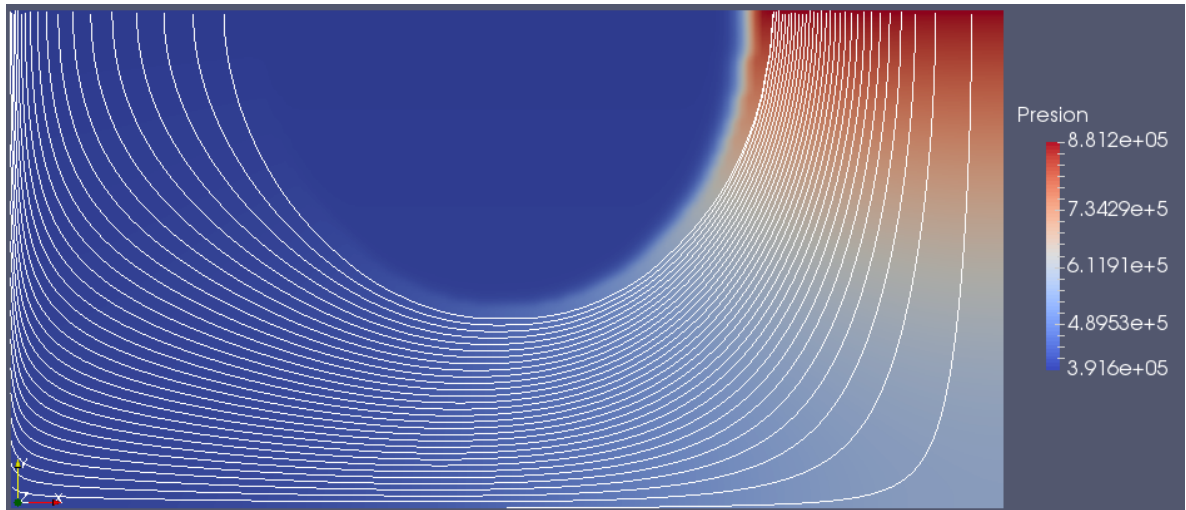
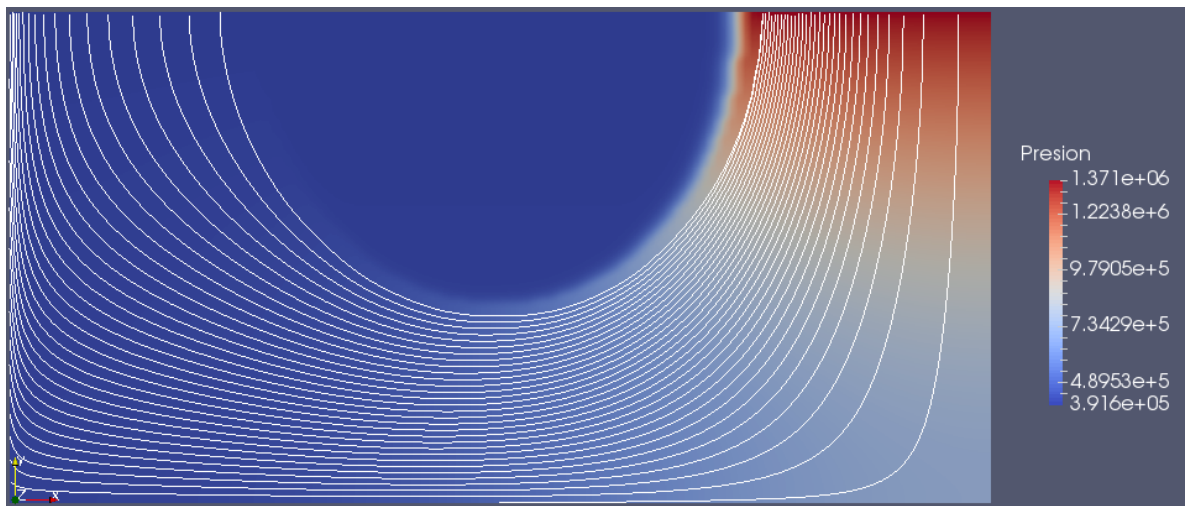


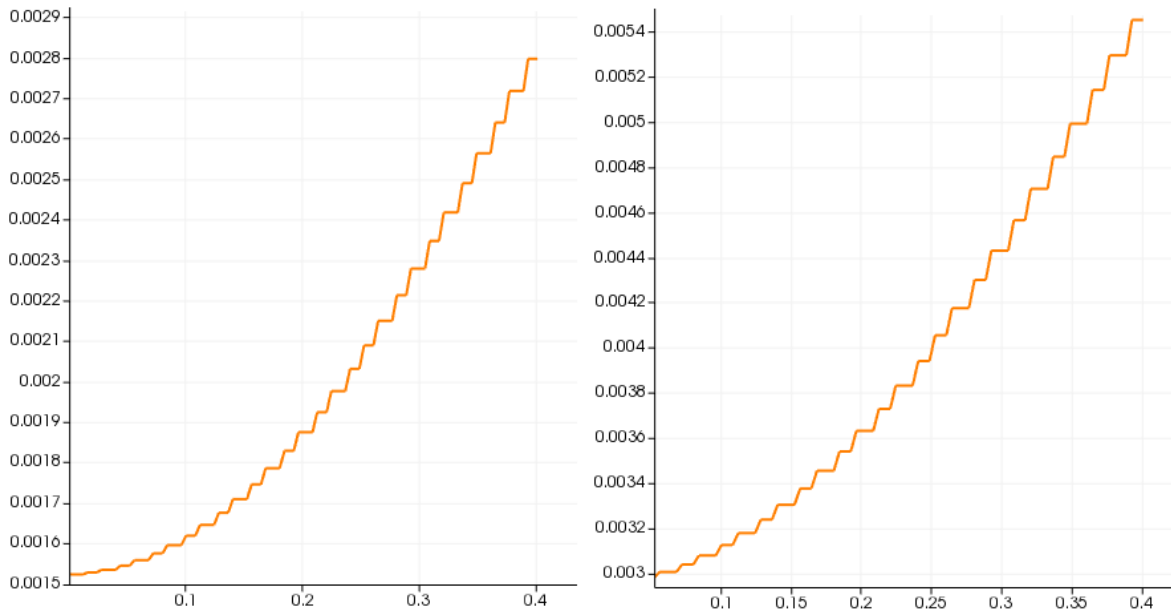
Figura 35: Simulación con $\Delta h = 100$ m



Es notorio que la magnitud en la diferencia de presiones que mueven el fluido a través del volumen de control no ejerce mayor influencia sobre el comportamiento

del flujo, pues la trayectoria de las líneas de flujo no se ve afectada. Sin embargo, la figura 36, se muestra para las dos simulaciones anteriores, una comparativa de los flujos de salida expresados en $[m^3/día]$ a través de la frontera superior izquierda, donde se logra ver que la tendencia en el flujo se mantiene, sin embargo los valores del caudal de salida prácticamente se duplican cuando se duplica la presión.

Figura 36: Flujo Volumétrico $[m^3/día]$ vs Distancia $[m]$ para $\Delta h=50 [m]$ y $\Delta h=100 [m]$



Por otro lado, para analizar la influencia del tensor de permeabilidad en las líneas de corriente, se dispone a realizar dos simulaciones, tomando los datos de entrada de la simulación de referencia (figura 36), pero variando el tensor y haciendo, primero, mucho mayor la permeabilidad en x que en y . Se ajustó una permeabilidad del orden de $5000 [mD]$ para el eje x , mientras que para y , se mantiene la permeabilidad calculada de $1000 [mD]$ (figura 37). Finalmente, se invirtió el tensor y se volvió a hacer la simulación (figura 38).

Figura 37: Simulación con mayor permeabilidad en X

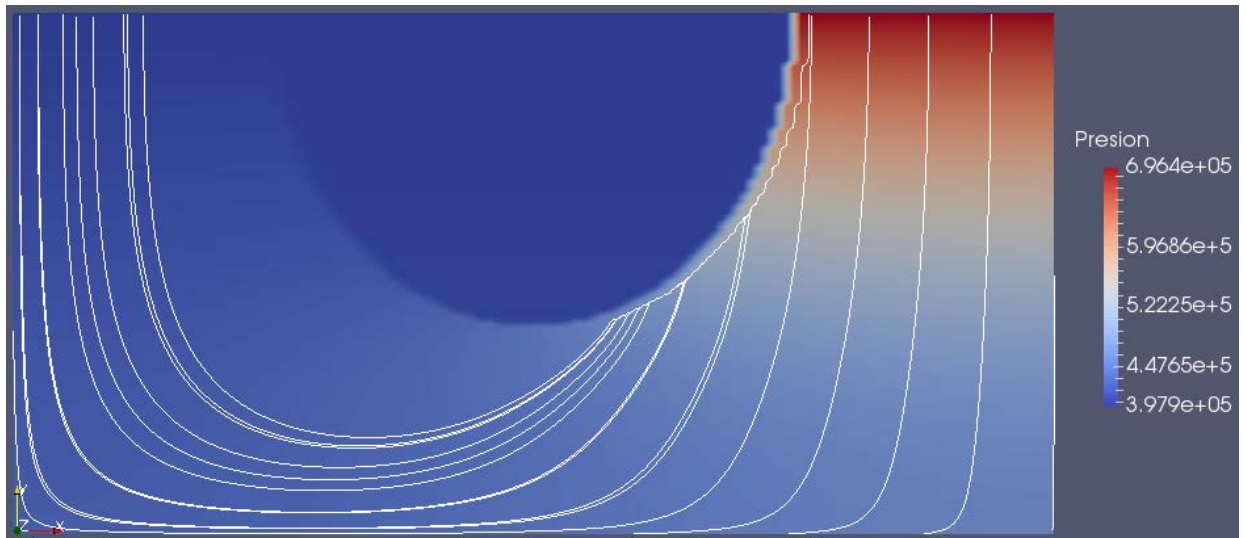
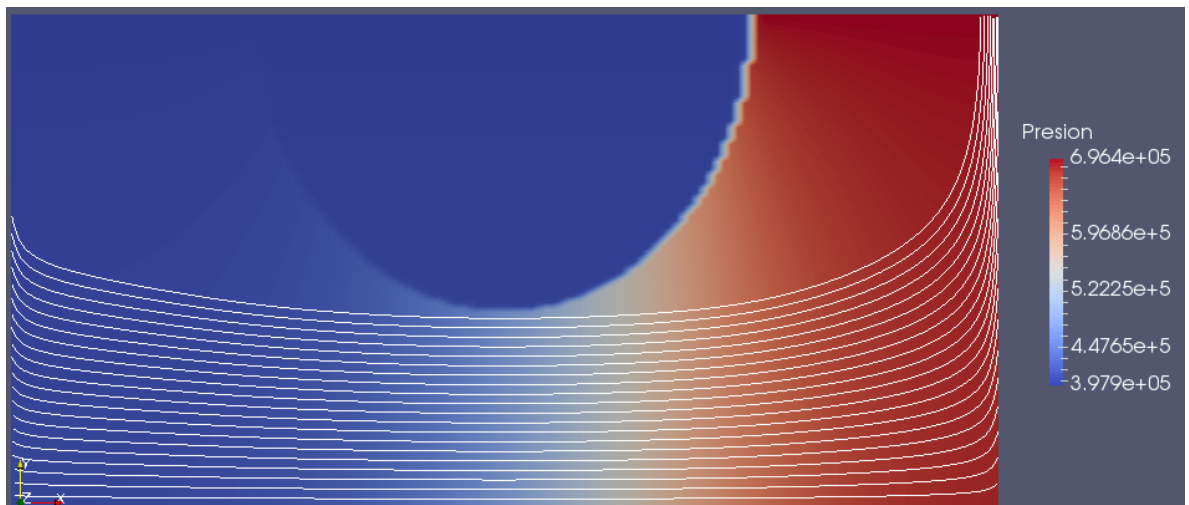


Figura 38: Simulación con mayor permeabilidad en Y



Se observa para ambos casos, el cambio de las líneas de flujo debido a la influencia del tensor de permeabilidad. En el primer caso, se observa que las líneas de flujo aumentan su pendiente y se vuelven casi verticales, mientras que para el segundo las líneas se achatan y tienden a ser más horizontales.

Este comportamiento se explica en el hecho de que al aumentar la permeabilidad en uno de los ejes coordenados, el fluido viaja más fácilmente en esta dirección y el gradiente de presión decae. Por esta circunstancia, el fluido busca la dirección en la que el gradiente de presión sea mayor, pues el flujo en este sentido, también es superior, dado que son magnitudes proporcionales.

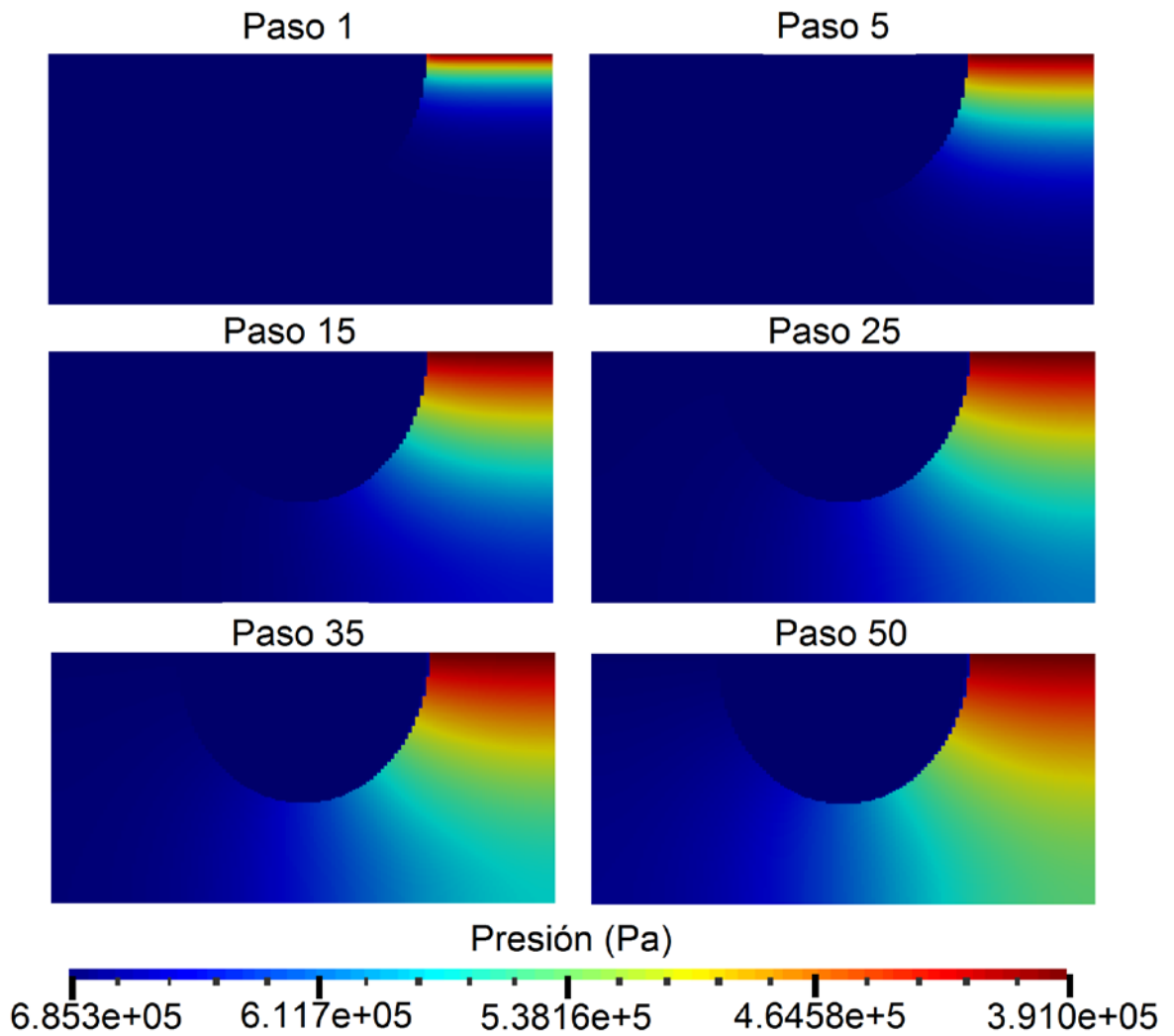
Por último, para analizar la influencia de la porosidad en la distribución de presiones y en las líneas de flujo se realizaron dos simulaciones con el modelo ligeramente compresible y se varían los valores de porosidad. Para la primera simulación se utiliza una porosidad inicial de 0.2 que es un valor típico de porosidad (como se mencionó anteriormente) y para la siguiente se utiliza un valor inicial de 0.5, que se considera elevado, pues representa que la mitad del volumen total sean poros.

Además, para estas simulaciones se usa una diferencia de presión igual que para la simulación de referencia de $2.93 * 10^5 [Pa]$. Se utilizan las mismas condiciones de frontera que en ese caso y el valor inicial de presión para todo el volumen de control es el de la condición de frontera menor ($3.91 * 10^5 [Pa]$). Adicionalmente, para estas simulaciones se usaron 50 pasos de tiempo de 1 segundo, tiempo suficiente para que las presiones desarrollen un perfil estable y el flujo a través de las fronteras se estabilice.

Consecuentemente, se realizaron las dos simulaciones de las cuales se muestran los pasos de tiempo 1, 5, 15, 25, 35 y 50 en las figuras 39 y 40. En éstas se puede ver cómo se va desarrollando la distribución de presiones en el volumen de control a medida que pasa el tiempo acercándose cada vez más al estado estacionario hacia el final de la simulación.

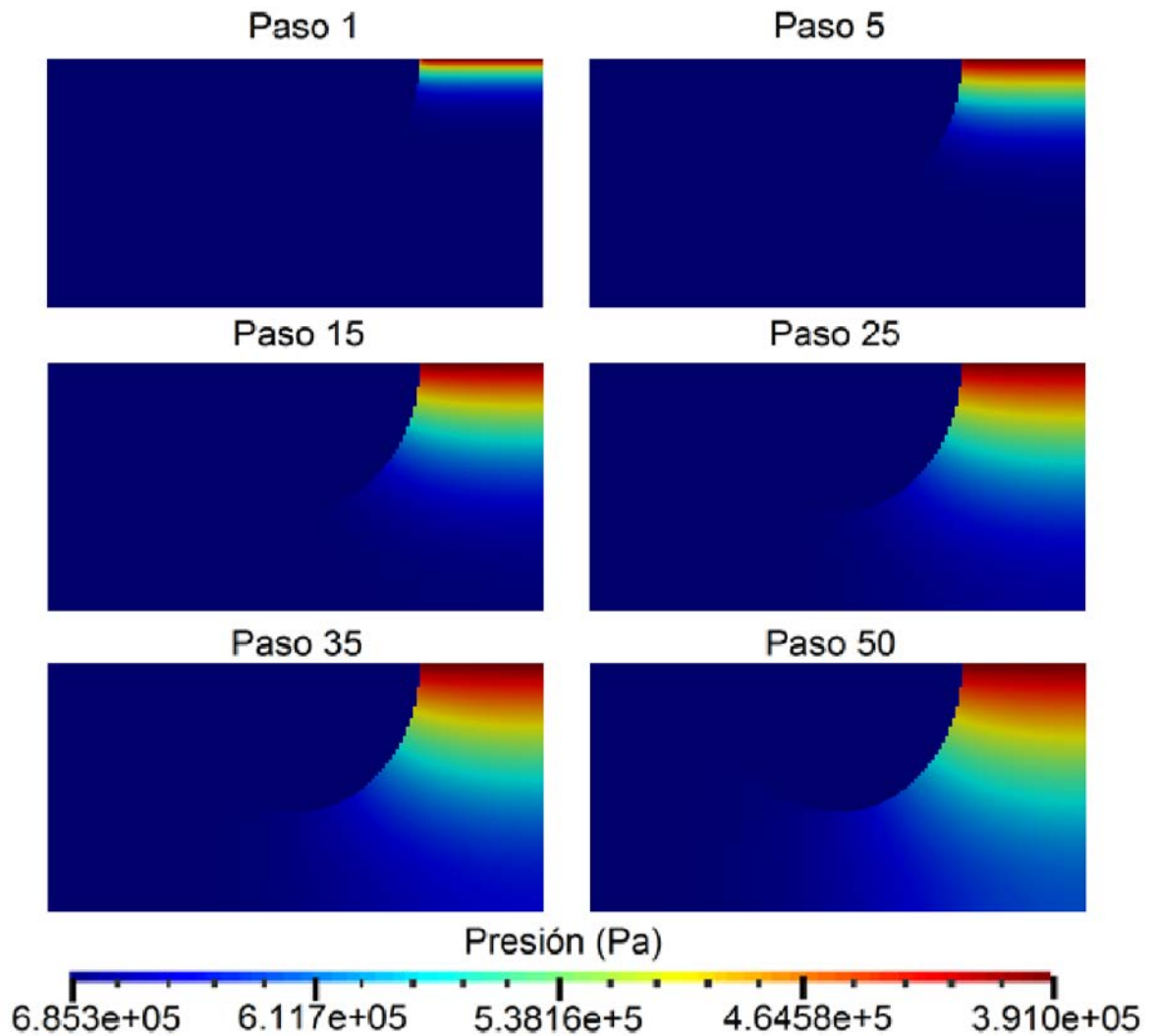
El comportamiento esperado es el que finalmente se ve en la simulación donde, al estar todo el volumen de control a una presión inicial igual a la de la frontera con menor valor, la presión se comienza a distribuir a lo largo de las líneas de corriente desde la frontera con la presión producida por la columna de 70 [m].

Figura 39. Simulación ligeramente compresible con porosidad $\phi = 0.2$



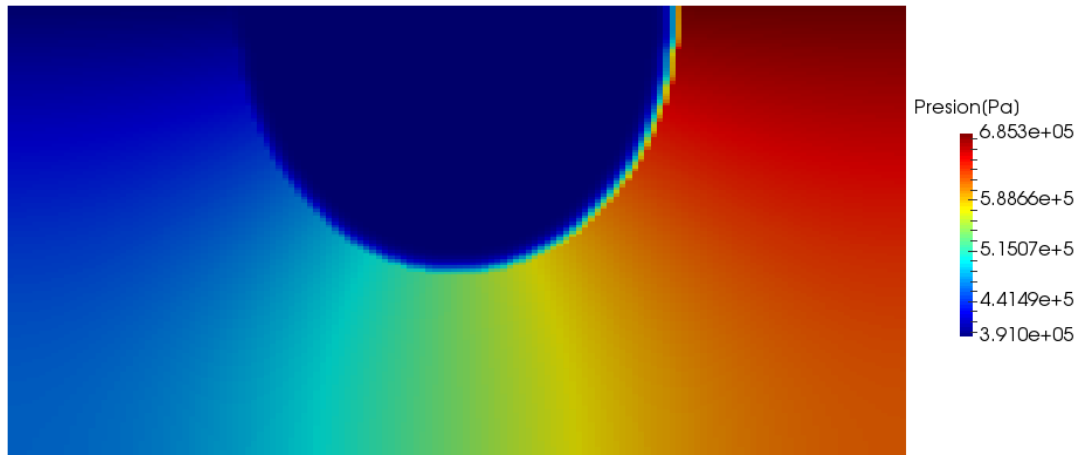
Sin embargo, es de esperarse que al tener las mismas condiciones de presión en sus fronteras, las distribuciones de presiones sean iguales para ambos casos y no cómo se muestra en la figura donde parece desarrollarse más para la simulación con una porosidad menor. No obstante, al hacerse la simulación por un tiempo más prolongado se observa que, finalmente, las dos simulaciones alcanzan un estado estacionario como el mostrado en la figura 41, sólo que en el caso de la mayor porosidad el tiempo que requiere alcanzar este estado estacionario es superior.

Figura 40. Simulación ligeramente compresible con porosidad $\phi = 0.5$



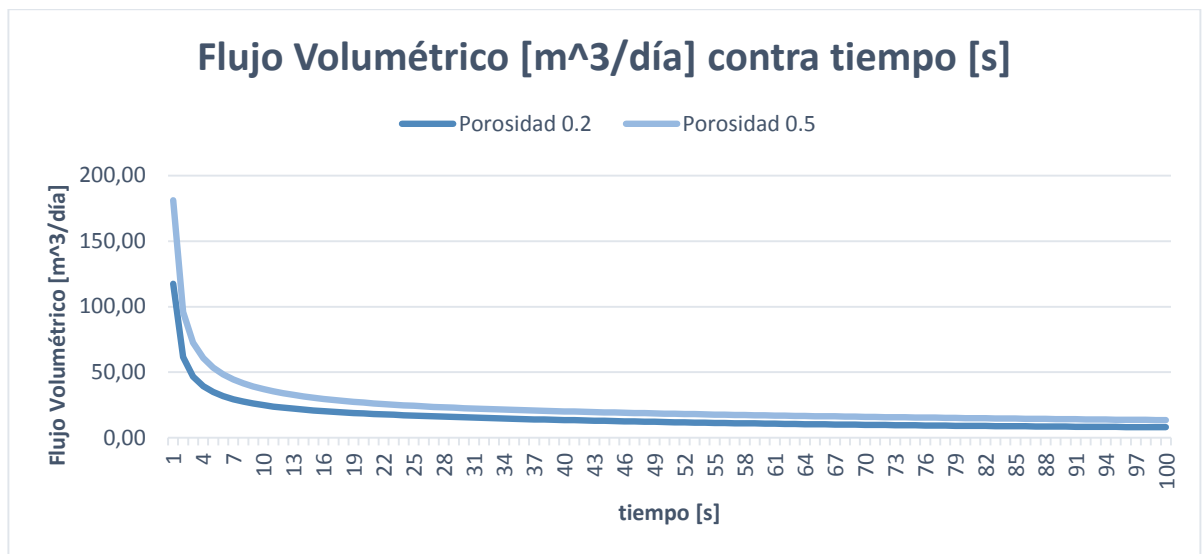
Este hecho se explica dado que, la ecuación que relaciona las variables tiene del otro lado del igual, el mismo valor, debido a que las condiciones de frontera en ambos casos son iguales. Al ser la porosidad un término que divide (y que varía entre 0 y 1), cuando ésta es mayor, el gradiente de presión debe ser menor para conservar la igualdad. Causando así, que el perfil de presiones se desarrolle de una manera más lenta.

Figura 41. Estado estacionario del caso de estudio para las dos situaciones.



Adicional a esta diferencia en el perfil de presiones, para los valores de flujo se ve una disimilitud. Para el segundo caso, debería esperarse que el flujo aumente, debido a que con una porosidad mayor, este medio contiene más espacios vacíos haciendo que el flujo a través del mismo sea mucho más fácil y por ende, mayor. El comportamiento esperado se logra distinguir en la comparativa de la figura 42, donde además, se observa que los flujos van disminuyendo a medida que pasa el tiempo y que este cambio es cada vez menos significativo hasta llegar al punto en que se estabilizan cuando alcanzan el régimen estacionario.

Figura 42. Comparativa flujo de caso de estudio para porosidad $\phi = 0.2$ y $\phi = 0.5$



7. CONCLUSIONES

El presente trabajo investigativo se ha dedicado al estudio del comportamiento del flujo a través de medios porosos mediante el uso del modelo matemático de la ley de Darcy y la ecuación general deducida anteriormente como base matemática para el análisis de dicho fenómeno. Se ha propuesto la utilización del método de volúmenes finitos y de herramientas computacionales para la consecución de simulaciones al respecto de este.

En este orden de ideas se lograron los objetivos propuestos inicialmente en la medida en que:

- Se logró la plena identificación del modelo matemático que rige el comportamiento de los fluidos a través de este tipo de medios, ya que se observó que la ecuación gobernante de este fenómeno es muy similar a la ecuación de Poisson con coeficientes variables en estado estacionario para fluidos incompresibles y en régimen transitorio para modelos ligeramente compresibles y de compresibilidad constante.
- Mediante el uso de la ley de Darcy y la aproximación para las derivadas de segundo orden del método de volúmenes finitos se pudo establecer un modelo de cálculo óptimo para los escenarios propuestos. Para esto, fue necesario usar herramientas como el análisis dimensional para la deducción de las ecuaciones necesarias para adaptar el término fuente y las condiciones de frontera. Además, para el código, fue preciso realizar la conversión de la aplicación de los coeficientes para adaptarlos a su naturaleza tensorial y utilizar procesos iterativos explícitos para solucionar los coeficientes variables de la ecuación.
- Gracias a las simulaciones de los *Benchmarks* se validó el trabajo realizado, ya que éstos arrojaron resultados muy cercanos a los referentes de comparación. Esto, debido a que se obtuvo, para el campo de presiones, errores de máximo 2% y

desviaciones de máximo 3% en los *Benchmark* 4 y 5, dado que se tuvo que realizar aproximaciones para las presiones de los elementos que conforman el pozo productor, lo que aumentó el error con relación a los demás *Benchmarks*, para los cuales, se obtuvo errores del orden de $10^{-2}\%$. No obstante, estas aproximaciones en el pozo productor fueron bastante acertadas, porque para el flujo se comprobó el cumplimiento de la ley de conservación de la masa y los errores en el flujo calculado no ascendían por encima del 3%.

- Se analizó la influencia de la porosidad y la permeabilidad en simulaciones de flujo en medio poroso. De modo que, se evidenció que el cambio de la permeabilidad en alguna coordenada está estrechamente ligado al desarrollo de las líneas de flujo, dado que éstas tienen una tendencia a extenderse en la dirección cuya permeabilidad es menor. De igual manera, se observó que, para una porosidad mayor, se presenta una caída de presión superior con respecto a porosidades más bajas. Por este motivo, el flujo se da en mayor medida para valores más altos de porosidad.

7.1 RECOMENDACIONES

Por otro lado, habiendo culminado este estudio resulta interesante analizar cómo extender el alcance de este proyecto y proponer trabajos futuros en la profundización de este tema:

- Sentando este precedente es posible realizar trabajos en los cuales se incorporen los modelos exactos de pozos productores e inyectores para disminuir los factores de error de las simulaciones.
- Se considera provechoso ampliar esta experiencia a la resolución mediante simulaciones de escenarios, más realistas, donde intervengan dos o tres fases de fluido como se da en algunos pozos petroleros.

- Extender la influencia del proyecto al incorporar diferentes tipos de malla para realizar problemas más diversos.

8. BIBLIOGRAFIA

1. ANDREAS, Knut-lie. An introduction to reservoir simulation using matlab. [En línea]. SINTEF ICT. Oslo, Norway: Departement of Applied Mathematics. 2014. (Recuperado en 15 enero 2018.) Disponible en <https://www.sintef.no/contentassets/8af8db2e42614f7fb94fb0c68f5bc256/mrst-book-2014.pdf>
2. Ibid., p. 26
3. GONZÁLES POSSO, Camilos y RAMÍREZ ARANGO, Paula. Petróleo. [Base de datos en línea]. Abril 2013. Revista INDEPAZ sobre generalidades de la industria petrolera en Colombia. (Recuperado en 25 febrero 2018). Disponible en http://ediciones.indepaz.org.co/wp-content/uploads/2013/06/Petroleo-Generalidades_de_la_industria_petrolera_en_Colobia-Revista_Indepaz_2013.pdf
4. ANDREAS, Knut-lie. An introduction to reservoir simulation using matlab. [En línea]. SINTEF ICT. Oslo, Norway: Departement of Applied Mathematics. 2014. (Recuperado en 15 enero 2018.) Disponible en <https://www.sintef.no/contentassets/8af8db2e42614f7fb94fb0c68f5bc256/mrst-book-2014.pdf>
5. AARNES, Jorg E; GIMSE, Tore y ANDREAS, Knut-lie. An introduction to the numerics of flow in porous media using matlab. [En línea]. SINTEF ICT. Oslo, Norway: Departement of Applied Mathematics. (Recuperado en 10 enero 2018.) Disponible en <http://folk.ntnu.no/andreas/papers/ResSimMatlab.pdf>
6. ESCOBAR MACUALO, Freddy Humberto. Fundamentos de ingeniería de yacimientos. [En línea]. Neiva, Huila, Colombia: Editorial Universidad

Surcolombiana. 2012. (Recuperado en 16 enero 2018.) Disponible en <http://oilproduction.net/files/Libro%20Fundamentos%20de%20Ing%20de%20Yacimientoos%20-%20Fredy%20Escobar.pdf>

7. Society of petroleum Engineers. The SI metric system of units and SPE metric estándar. [En línea]. U.S.A: Society of petroleum Engineers of AIME. 1982. (Recuperado en 1 febrero 2018.) Disponible en https://www.spe.org/authors/docs/metric_standard.pdf

8. LAKE, Larry, W. Oilfield Review. [Base de datos en línea]. Invierno de 2001 a 2002. Schlumberger. (Recuperado en 25 enero 2018.) Disponible en https://www.slb.com/~media/Files/resources/oilfield_review/spanish01/win01/composite.pdf

9. SIMMONS, Craig T. Henry Darcy (1803–1858): Immortalised by his scientific legacy. [En línea]. Australia: Flinders University, Hydrogeology Journal. 2008. (Recuperado en 3 febrero 2018.) Disponible en <https://engineering.jhu.edu/ei/wp-content/uploads/sites/29/2014/02/Darcy-Achievements.pdf>

10. SÁNCHEZ, Javier. Ley de Darcy. Conductividad hidráulica. [En línea]. España: Universidad de Salamanca, departamento de geología. (Recuperado en 23 enero 2018.) Disponible en http://hidrologia.usal.es/temas/Ley_Darcy.pdf

11. PEACEMAN, Donald W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. [En línea]. Houston, Texas, U.S.A: Elsevier. 1977. (Recuperado en 4 febrero 2018.) Disponible en <https://www.pdf-archive.com/2011/11/12/fundamentals-of-numerical-reservoir-simulation/>

12. JARAMILLO, Julian. Numerical solution of diffusion equation. [Material de clase].

13. MÖNKEBERG, Fabian. Finite volume methods for fluid flow in porous media. [En línea]. Zürich, Switzerland: Federal polytechnic school of Zürich 2012.

(Recuperado en 12 febrero 2018.) Disponible en

<http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/StudentProjects/Moenkeberg/BScThesis.pdf>

14. KHALMANOVA, Dinara. A mathematical model of the productivity index of a well. [En línea]. Texas, U.S.A: A&M University. 2004. (Recuperado en 15 mayo 2018.) Disponible en <https://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/301/etd-tamu-2004A-MATH-Khalmanova-1.pdf?sequence=1>

15. CAEL, B.; HEATHCOTE A. Y Heathcote, and SEEKELL D. A. The volume and mean depth of Earth's lakes. [En línea]. Agu Publications: Geophysical research letters. 2017. (Recuperado en 22 marzo 2018.) Disponible en <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/2016GL071378>

16. ANGELONE. Silvia; GARIBAY, María Teresa y CASAUX, Marina. Permeabilidad de suelos. [En línea]. Argentina: Universidad Nacional del Rosario, Facultad de ciencias exactas, ingeniería y agrimensura. 2006. (Recuperado en 28 marzo 2018.) Disponible en <https://www.fceia.unr.edu.ar/geologiaygeotecnia/Permeabilidad%20en%20Suelos.pdf>

17. CENGEL, Yunus. GHAJAR, Afshin. Transferencia de Calor y Masa. Ed 4. Mc Graw Hill. 2011. p.878. ISBN 978-607-15-0540-8

Anexo A. Interfaz gráfica del programa desarrollado en Matlab

FLUJO EN MEDIO POROSO

Nombre del archivo de trabajo		Benchmark_	
Propiedades de la malla			
Número de dimensiones en el espacio (nsd)		3	
	Longitud [m]	Particiones	Dispersión
X			1
Y			1
Z			1
Propiedades de los elementos			
Densidad [Kg/m ³]	1014		
Viscosidad [Pa*s]	1e-3		
Permeabilidad X [milIDarcy]	1		
Permeabilidad Y [milIDarcy]	1		
Permeabilidad Z [milIDarcy]	1		
Porosidad []	0.2		
Compresibilidad del fluido []	45.810e-11		
Compresibilidad de la Roca []	1e-8		
Generacion []	0		
Presion por elemento [Pa]	0		
Parametros de entrada			
Gravedad [m/s ²]	9.81	<input type="checkbox"/> Transitorio	
Theta	0	Paso de tiempo [s]	0.05
Iteraciones	2	Tiempo de simulacion	50
Ortogonalidad	0	Paso de visualizacion	1
Wg	0	Valor inicial	
Parametros del solucionador			
Tipo de Solucionador	Profundidad [m]	0	
Orthomin	Referencia (si ; no)	no	
Condiciones de frontera			
Cara o Lado	Valor	Tipo	
1	0	NEWMANN	
2	0	NEWMANN	
3	0	NEWMANN	
4	0	NEWMANN	
5	0	NEWMANN	
6	0	NEWMANN	
Lados 2D		Caras 3D	
Condiciones del transitorio			
Tipo de problema	Compresibilidad constante		
Densidad de referencia [Kg/m ³]		Presion de referencia [Pa]	
Asignacion de propiedades (Areas y volumenes cuadrilateros)			
Propiedad	Densidad [Kg/m ³]		
X min	0	X max	
Y min	0	Y max	
Z min	0	Z max	
Valor		Modificar Props	
Asignacion de propiedades (Elemento)			
Propiedad	Densidad [Kg/m ³]		
Elemento		Modificar Props	
Valor			
Generar Propiedades		Archivos de entrada	
CALCULAR			
Autores: Carlos Barrera y Juan Carlos Madiedo.			

Anexo B. Archivo “.ent” para el *Benchmark 4*

```
ARCHIVO DE CONDICIONES DE FRONTERA:
>archivos= ARCH=Benchmark_4.boco;

ARCHIVO DE PARAMETROS DEL SOLUCIONADOR:
>archivos= ARCH=Benchmark_4.solver;

CARPETA DE TRABAJO:
>carpeta=Benchmark_4;

>campo=Phi;
>gradiente=GradPhi;

ARCHIVOS PARA LA GENERACION DE LA MALLA:
>mallador=PREPROCESSOR=ConjMalladorSupElem/ARCH=Benchmark_4.geom/
ARCH=Benchmark_4.parts;

PARAMETROS DE LA MATRIZ:
>guarda = Matriz;
>guarda_sim = FALSE;
>pivoteo = FALSE;
>umbral = 0.0;

PARAMETROS DE TIEMPO
>time_parameters = dt=0.00[0,0];

PROPIEDADES DEL PROBLEMAS(SIN MODIFICACIONES):

>grav=9.81;
>Profundidad=0.0000000000;
>Referencia=0;
Densidad [Kg/m^3] = 1014.00000
Viscosidad [Pa*s] = 1.00000e-03
Permeabilidad X [miliDarcy (m^2)] = 100.00000
Permeabilidad Y [miliDarcy (m^2)] = 100.00000
Permeabilidad Z [miliDarcy (m^2)] = 100.00000
Porosidad [] = 0.20000
Compresibilidad del fluido [] = 4.58100e-10
Compresibilidad de la roca [] = 1.00000e-08
Generacion [] = 0.00000
Presion por elemento [Pa] = 0.00000

>theta=0.00;
>tinicial=0.00;
>iteracion=2.00;
>Orto=0.00;
```

```
>wg=0.00;  
>generacion=;  
  
PARAMETROS PARA VISUALIZACION:  
>puntos_tiempo = [0:0.00000,0.00000];  
>linea1:inicio=NONE;  
>linea1:parada=NONE;  
>linea1:resolucion=31;  
>linea2:inicio=NONE;  
>linea2:parada=NONE;  
>linea2:resolucion=31;  
>linea3:inicio=NONE;  
>linea3:parada=NONE;  
>linea3:resolucion=31;  
>series_tiempo = d=2 n=0 <  
>formato_campo=ASCII;  
>formato_malla=ASCII;  
>verbose=OFF;
```

Anexo C. Archivo “.geom” para el *Benchmark 4*.

DEFINICION DE LA GEOMETRIA:

```
>nsd = 3;  
>subdominios = 1;  
>no_de_superels = 1;  
>nbind = 6  
>bname T=0 T=0 T=0 T=0 T=0 T=0
```

ELEMENTO 1:

```
>SupEl;  
>subdominio_no = 1;  
>tipoelemento = ElmB8n3D;  
>fronteras = [1(1)] [2(2)] [3(3)] [4(4)] [5(5)] [6(6)];  
>nodos = [1(0 0 0)]+[2(500.00000 0 0)]+[3(0 500.00000  
0)]+[4(500.00000 500.00000 0)]+[5(0 0 25.00000)]+[6(500.00000 0  
25.00000)]+[7(0 500.00000 25.00000)]+[8(500.00000 500.00000  
25.00000)];  
>lados = ;
```

Anexo D. Archivo “.parts” para el *Benchmark 4*.

```
PARAMETROS DE PARTICIONES:  
  
>nsd = 3;  
>no_de_superels      = 1;  
>SE;  
>d = 3;  
>e = ElmB8n3D;  
>div = [30, 30, 6];  
>grad = [ 1.00,1.00,1.00 ];
```

Anexo E. Archivo “.boco” para el *Benchmark 4*.

DEFINICION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA:

```
>BoCo = NEWMANN;  
>valor = 0.00000;  
>BoCo = NEWMANN;  
>valor = 0.00000;  
>BoCo = NEWMANN;  
>valor = 0.00000;  
>BoCo = NEWMANN;  
>valor = 0.00000;  
>BoCo = NEWMANN;  
>valor = 0.00000;  
>BoCo = NEWMANN;  
>valor = 0.00000;
```

Anexo F. Archivo “.solver” para el *Benchmark 4*.

PARAMETROS DEL SOLUCIONADOR DE ECUACIONES LINEALES:

```
>solver_classname=Orthomin;  
>metodo=R-OM(7);  
>cambiar=0.000000;  
>pivot_tp=NO_PIVOT;  
>relajacion=0.80000;  
>startvector=USER_START;  
>criterio_def=TRUE;  
>nextern_crit=1;  
>maxit=10000;  
>estimate_eigvals=FALSE;
```

PARAMETROS DEL PRECONDICIONADOR:

```
>precondicionador=PrecIdentidad;  
>left_prec=TRUE;  
>auto_iniciar=TRUE;  
>nivel_llenado=0;  
>prec_RILU=1;  
>prec_SSOR=1;  
>pasos_int=1;
```

PARAMETROS DEL MONITOR DE CONVERGENCIA:

```
>monitor_tp      = MCResidualRel;  
>residual_type  = RES_ORIGINAL;  
>maxerr         = 1.0e-9;  
>norm_type      = l2;  
>monitor        = ON;  
>graficar_ejec  = OFF;  
>criterio       = ON;  
>insertar       = ON;  
>relop          = CM_AND;  
>usar_info_vp   = OFF;  
>rel_a_rhs      = OFF;  
>chunk_size     = 100;  
>base_usua      = 1.0;
```

Anexo G. Archivo con arreglo matricial de propiedades para 3D en una malla 3x3x3.

```

[378]  $
(1,1)=1      (2,1)=0.16667      (3,1)=0.16667      (4,1)=0.16667
(5,1)=1014.00000      (6,1)=1.00000e-03      (7,1)=9.869233e-13
(8,1)=9.869233e-13      (9,1)=9.869233e-13      (10,1)=0.20000
(11,1)=4.58100e-10      (12,1)=1.00000e-08      (13,1)=0.0000000000
(14,1)=0.00000
(1,2)=2      (2,2)=0.50000      (3,2)=0.16667      (4,2)=0.16667
(5,2)=1014.00000      (6,2)=1.00000e-03      (7,2)=9.869233e-13
(8,2)=9.869233e-13      (9,2)=9.869233e-13      (10,2)=0.20000
(11,2)=4.58100e-10      (12,2)=1.00000e-08      (13,2)=0.0000000000
(14,2)=0.00000
(1,3)=3      (2,3)=0.83333      (3,3)=0.16667      (4,3)=0.16667
(5,3)=1014.00000      (6,3)=1.00000e-03      (7,3)=9.869233e-13
(8,3)=9.869233e-13      (9,3)=9.869233e-13      (10,3)=0.20000
(11,3)=4.58100e-10      (12,3)=1.00000e-08      (13,3)=0.0000000000
(14,3)=0.00000
(1,4)=4      (2,4)=0.16667      (3,4)=0.50000      (4,4)=0.16667
(5,4)=1014.00000      (6,4)=1.00000e-03      (7,4)=9.869233e-13
(8,4)=9.869233e-13      (9,4)=9.869233e-13      (10,4)=0.20000
(11,4)=4.58100e-10      (12,4)=1.00000e-08      (13,4)=0.0000000000
(14,4)=0.00000
(1,5)=5      (2,5)=0.50000      (3,5)=0.50000      (4,5)=0.16667
(5,5)=1014.00000      (6,5)=1.00000e-03      (7,5)=9.869233e-13
(8,5)=9.869233e-13      (9,5)=9.869233e-13      (10,5)=0.20000
(11,5)=4.58100e-10      (12,5)=1.00000e-08      (13,5)=0.0000000000
(14,5)=0.00000
(1,6)=6      (2,6)=0.83333      (3,6)=0.50000      (4,6)=0.16667
(5,6)=1014.00000      (6,6)=1.00000e-03      (7,6)=9.869233e-13
(8,6)=9.869233e-13      (9,6)=9.869233e-13      (10,6)=0.20000
(11,6)=4.58100e-10      (12,6)=1.00000e-08      (13,6)=0.0000000000
(14,6)=0.00000
(1,7)=7      (2,7)=0.16667      (3,7)=0.83333      (4,7)=0.16667
(5,7)=1014.00000      (6,7)=1.00000e-03      (7,7)=9.869233e-13
(8,7)=9.869233e-13      (9,7)=9.869233e-13      (10,7)=0.20000
(11,7)=4.58100e-10      (12,7)=1.00000e-08      (13,7)=0.0000000000
(14,7)=0.00000
(1,8)=8      (2,8)=0.50000      (3,8)=0.83333      (4,8)=0.16667
(5,8)=1014.00000      (6,8)=1.00000e-03      (7,8)=9.869233e-13
(8,8)=9.869233e-13      (9,8)=9.869233e-13      (10,8)=0.20000
(11,8)=4.58100e-10      (12,8)=1.00000e-08      (13,8)=0.0000000000
(14,8)=0.00000
(1,9)=9      (2,9)=0.83333      (3,9)=0.83333      (4,9)=0.16667
(5,9)=1014.00000      (6,9)=1.00000e-03      (7,9)=9.869233e-13
(8,9)=9.869233e-13      (9,9)=9.869233e-13      (10,9)=0.20000
(11,9)=4.58100e-10      (12,9)=1.00000e-08      (13,9)=0.0000000000
(14,9)=0.00000

```

```

(1,10)=10      (2,10)=0.16667      (3,10)=0.16667      (4,10)=0.50000
(5,10)=1014.00000      (6,10)=1.00000e-03      (7,10)=9.869233e-13
(8,10)=9.869233e-13      (9,10)=9.869233e-13      (10,10)=0.20000
(11,10)=4.58100e-10      (12,10)=1.00000e-08      (13,10)=0.0000000000
(14,10)=0.00000
(1,11)=11      (2,11)=0.50000      (3,11)=0.16667      (4,11)=0.50000
(5,11)=1014.00000      (6,11)=1.00000e-03      (7,11)=9.869233e-13
(8,11)=9.869233e-13      (9,11)=9.869233e-13      (10,11)=0.20000
(11,11)=4.58100e-10      (12,11)=1.00000e-08      (13,11)=0.0000000000
(14,11)=0.00000
(1,12)=12      (2,12)=0.83333      (3,12)=0.16667      (4,12)=0.50000
(5,12)=1014.00000      (6,12)=1.00000e-03      (7,12)=9.869233e-13
(8,12)=9.869233e-13      (9,12)=9.869233e-13      (10,12)=0.20000
(11,12)=4.58100e-10      (12,12)=1.00000e-08      (13,12)=0.0000000000
(14,12)=0.00000
(1,13)=13      (2,13)=0.16667      (3,13)=0.50000      (4,13)=0.50000
(5,13)=1014.00000      (6,13)=1.00000e-03      (7,13)=9.869233e-13
(8,13)=9.869233e-13      (9,13)=9.869233e-13      (10,13)=0.20000
(11,13)=4.58100e-10      (12,13)=1.00000e-08      (13,13)=0.0000000000
(14,13)=0.00000
(1,14)=14      (2,14)=0.50000      (3,14)=0.50000      (4,14)=0.50000
(5,14)=1014.00000      (6,14)=1.00000e-03      (7,14)=9.869233e-13
(8,14)=9.869233e-13      (9,14)=9.869233e-13      (10,14)=0.20000
(11,14)=4.58100e-10      (12,14)=1.00000e-08      (13,14)=0.0000000000
(14,14)=0.00000
(1,15)=15      (2,15)=0.83333      (3,15)=0.50000      (4,15)=0.50000
(5,15)=1014.00000      (6,15)=1.00000e-03      (7,15)=9.869233e-13
(8,15)=9.869233e-13      (9,15)=9.869233e-13      (10,15)=0.20000
(11,15)=4.58100e-10      (12,15)=1.00000e-08      (13,15)=0.0000000000
(14,15)=0.00000
(1,16)=16      (2,16)=0.16667      (3,16)=0.83333      (4,16)=0.50000
(5,16)=1014.00000      (6,16)=1.00000e-03      (7,16)=9.869233e-13
(8,16)=9.869233e-13      (9,16)=9.869233e-13      (10,16)=0.20000
(11,16)=4.58100e-10      (12,16)=1.00000e-08      (13,16)=0.0000000000
(14,16)=0.00000
(1,17)=17      (2,17)=0.50000      (3,17)=0.83333      (4,17)=0.50000
(5,17)=1014.00000      (6,17)=1.00000e-03      (7,17)=9.869233e-13
(8,17)=9.869233e-13      (9,17)=9.869233e-13      (10,17)=0.20000
(11,17)=4.58100e-10      (12,17)=1.00000e-08      (13,17)=0.0000000000
(14,17)=0.00000
(1,18)=18      (2,18)=0.83333      (3,18)=0.83333      (4,18)=0.50000
(5,18)=1014.00000      (6,18)=1.00000e-03      (7,18)=9.869233e-13
(8,18)=9.869233e-13      (9,18)=9.869233e-13      (10,18)=0.20000
(11,18)=4.58100e-10      (12,18)=1.00000e-08      (13,18)=0.0000000000
(14,18)=0.00000
(1,19)=19      (2,19)=0.16667      (3,19)=0.16667      (4,19)=0.83333
(5,19)=1014.00000      (6,19)=1.00000e-03      (7,19)=9.869233e-13
(8,19)=9.869233e-13      (9,19)=9.869233e-13      (10,19)=0.20000

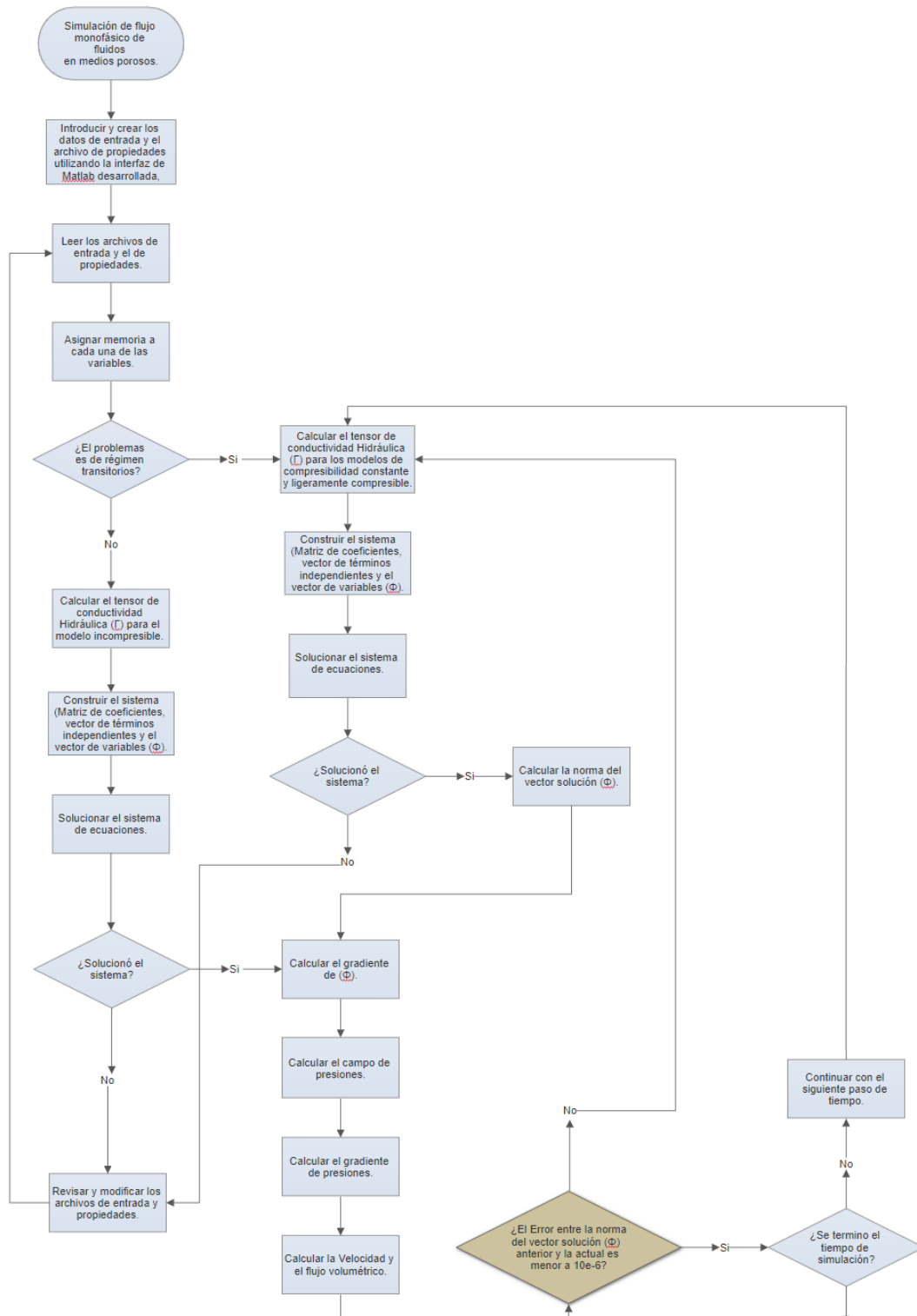
```

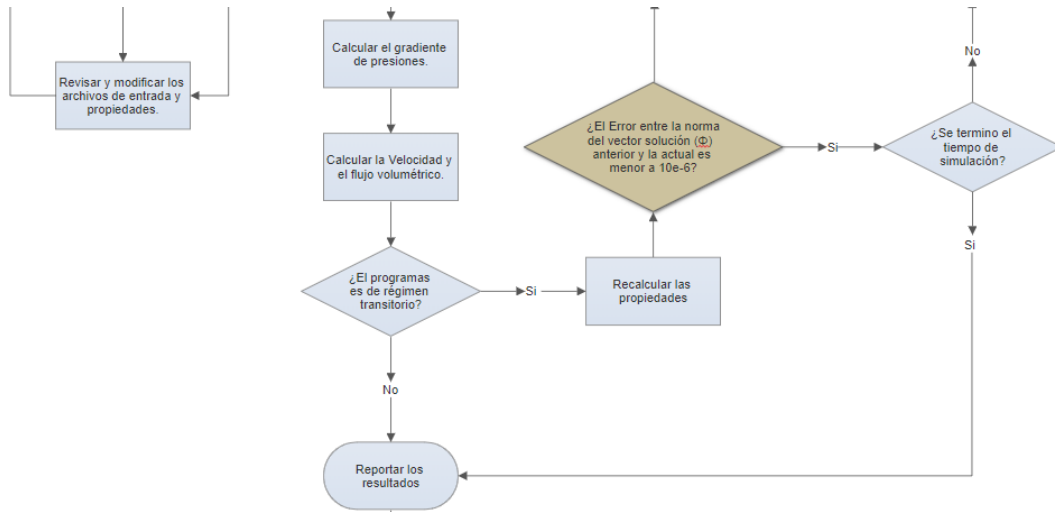
```

(11,19)=4.58100e-10 (12,19)=1.00000e-08 (13,19)=0.0000000000
(14,19)=0.00000
(1,20)=20 (2,20)=0.50000 (3,20)=0.16667 (4,20)=0.83333
(5,20)=1014.00000 (6,20)=1.00000e-03 (7,20)=9.869233e-13
(8,20)=9.869233e-13 (9,20)=9.869233e-13 (10,20)=0.20000
(11,20)=4.58100e-10 (12,20)=1.00000e-08 (13,20)=0.0000000000
(14,20)=0.00000
(1,21)=21 (2,21)=0.83333 (3,21)=0.16667 (4,21)=0.83333
(5,21)=1014.00000 (6,21)=1.00000e-03 (7,21)=9.869233e-13
(8,21)=9.869233e-13 (9,21)=9.869233e-13 (10,21)=0.20000
(11,21)=4.58100e-10 (12,21)=1.00000e-08 (13,21)=0.0000000000
(14,21)=0.00000
(1,22)=22 (2,22)=0.16667 (3,22)=0.50000 (4,22)=0.83333
(5,22)=1014.00000 (6,22)=1.00000e-03 (7,22)=9.869233e-13
(8,22)=9.869233e-13 (9,22)=9.869233e-13 (10,22)=0.20000
(11,22)=4.58100e-10 (12,22)=1.00000e-08 (13,22)=0.0000000000
(14,22)=0.00000
(1,23)=23 (2,23)=0.50000 (3,23)=0.50000 (4,23)=0.83333
(5,23)=1014.00000 (6,23)=1.00000e-03 (7,23)=9.869233e-13
(8,23)=9.869233e-13 (9,23)=9.869233e-13 (10,23)=0.20000
(11,23)=4.58100e-10 (12,23)=1.00000e-08 (13,23)=0.0000000000
(14,23)=0.00000
(1,24)=24 (2,24)=0.83333 (3,24)=0.50000 (4,24)=0.83333
(5,24)=1014.00000 (6,24)=1.00000e-03 (7,24)=9.869233e-13
(8,24)=9.869233e-13 (9,24)=9.869233e-13 (10,24)=0.20000
(11,24)=4.58100e-10 (12,24)=1.00000e-08 (13,24)=0.0000000000
(14,24)=0.00000
(1,25)=25 (2,25)=0.16667 (3,25)=0.83333 (4,25)=0.83333
(5,25)=1014.00000 (6,25)=1.00000e-03 (7,25)=9.869233e-13
(8,25)=9.869233e-13 (9,25)=9.869233e-13 (10,25)=0.20000
(11,25)=4.58100e-10 (12,25)=1.00000e-08 (13,25)=0.0000000000
(14,25)=0.00000
(1,26)=26 (2,26)=0.50000 (3,26)=0.83333 (4,26)=0.83333
(5,26)=1014.00000 (6,26)=1.00000e-03 (7,26)=9.869233e-13
(8,26)=9.869233e-13 (9,26)=9.869233e-13 (10,26)=0.20000
(11,26)=4.58100e-10 (12,26)=1.00000e-08 (13,26)=0.0000000000
(14,26)=0.00000
(1,27)=27 (2,27)=0.83333 (3,27)=0.83333 (4,27)=0.83333
(5,27)=1014.00000 (6,27)=1.00000e-03 (7,27)=9.869233e-13
(8,27)=9.869233e-13 (9,27)=9.869233e-13 (10,27)=0.20000
(11,27)=4.58100e-10 (12,27)=1.00000e-08 (13,27)=0.0000000000
(14,27)=0.00000

```

Anexo H. Diagrama de flujo del proceso de cálculo





Anexo I. Cálculo del índice productor de pozo para el *Benchmark 4* mediante EES.

Pozo Productor orientado en x

Datos

$$R_p = 0,12 \text{ [m]}$$

$$\mu = 0,001 \text{ [Pa*s]}$$

$$K_{Ed1;y} = 9,869233 \times 10^{-14} \text{ [m]}$$

$$K_{Ed2;z} = 9,869233 \times 10^{-14} \text{ [m]}$$

$$l_{Edp;x} = \frac{500}{30}$$

$$l_{Ed1;y} = \frac{500}{30}$$

$$l_{Ed2;z} = \frac{25}{6}$$

Permeabilidad Efectiva

$$K_e = (K_{Ed1;y} \cdot K_{Ed2;z})^{[1 / 2]}$$

Radio Efectiva

$$R_e = 0,28 \cdot \left[\frac{\left(l_{Ed2;z}^2 \cdot \left[\frac{K_{Ed1;y}}{K_{Ed2;z}} \right]^{[1 / 2]} + l_{Ed1;y}^2 \cdot \left[\frac{K_{Ed2;z}}{K_{Ed1;y}} \right]^{[1 / 2]} \right)^{(1 / 2)}}{\left(\frac{K_{Ed1;y}}{K_{Ed2;z}} \right)^{(1 / 4)} + \left(\frac{K_{Ed2;z}}{K_{Ed1;y}} \right)^{(1 / 4)}} \right]$$

Índice de Productividad

$$P_I = \frac{2 \cdot \pi \cdot K_e \cdot l_{Edp;x}}{\mu \cdot \ln \left[\frac{R_e}{R_p} \right]}$$

Unit Settings: [J]/[C]/[Pa]/[kg]/[degrees]

$$K_e = 9,869E-14$$

$$K_{Ed1,y} = 9,869E-14 \text{ [m]}$$

$$K_{Ed2,z} = 9,869E-14 \text{ [m]}$$

$$l_{Ed1,y} = 16,67$$

$$l_{Ed2,z} = 4,167$$

$$l_{Edp,x} = 16,67$$

$$\mu = 0,001 \text{ [Pa*s]}$$

$$P_1 = 3,447E-09$$

$$R_e = 2,405$$

$$R_p = 0,12 \text{ [m]}$$

Anexo J. Cálculo del índice productor de pozo para el *Benchmark 5* mediante EES.

Pozo Productor orientado en x

Datos

$$R_p = 0,1 \text{ [m]}$$

$$\mu = 0,005 \text{ [Pa*s]}$$

$$K_{Ed1;x} = \frac{30}{1000} \cdot 9,869233 \times 10^{-13} \text{ [m]}$$

$$K_{Ed2;z} = \frac{30}{1000} \cdot 9,869233 \times 10^{-13} \text{ [m]}$$

$$l_{Ed1;x} = \frac{200}{12}$$

$$l_{Edp;y} = \frac{200}{12}$$

$$l_{Ed2;z} = \frac{50}{12}$$

Permeabilidad Efectiva

$$K_e = (K_{Ed1;x} \cdot K_{Ed2;z})^{[1 / 2]}$$

Radio Efectivo

$$R_e = 0,28 \cdot \left[\frac{\left(l_{Ed2;z}^2 \cdot \left[\frac{K_{Ed1;x}}{K_{Ed2;z}} \right]^{[1 / 2]} + l_{Ed1;x}^2 \cdot \left[\frac{K_{Ed2;z}}{K_{Ed1;x}} \right]^{[1 / 2]} \right)^{(1 / 2)}}{\left(\frac{K_{Ed1;x}}{K_{Ed2;z}} \right)^{(1 / 4)} + \left(\frac{K_{Ed2;z}}{K_{Ed1;x}} \right)^{(1 / 4)}} \right]$$

Índice de Productividad

$$P_I = \frac{2 \cdot \pi \cdot K_e \cdot l_{Edp;y}}{\mu \cdot \ln \left[\frac{R_e}{R_p} \right]}$$

Unit Settings: [J]/[C]/[Pa]/[kg]/[degrees]

$$K_e = 2,961E-14$$

$$K_{Ed1,x} = 2,961E-14$$

$$K_{Ed2,z} = 2,961E-14 \text{ [m]}$$

$$l_{Ed1,x} = 16,67$$

$$l_{Ed2,z} = 4,167$$

$$l_{Edp,y} = 16,67$$

$$\mu = 0,005 \text{ [Pa*s]}$$

$$P_l = 1,950E-10$$

$$R_e = 2,405$$

$$R_p = 0,1 \text{ [m]}$$