

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

SOBRE ESPACIOS LIPSCHITZ-LIBRES Y ENCAJES NO LINEALES

Autor:

Daniel Fabián Suárez Navarro

Director:

Ph.D. Michael Alexander Rincón Villamizar.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2023

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Bases de Schauder	6
1.2. Espacios Lipschitz-Libres	10
1.3. Subespacios extremadamente regulares	19
2. Una base de Schauder para $\mathcal{F}(B_{\ell_1^2})$	22
2.1. Construcción de una base de Schauder para $\mathcal{F}(B_{\ell_1^2})$	25
2.1.1. Función de interpolación	28
2.1.2. Función auxiliar Φ	35
2.1.3. Ampliación de los conjuntos F_n y V_n	42
2.1.4. Refinamiento de la malla y las proyecciones	45
2.1.5. Conteo de las proyecciones para el paso de refinamiento k	50
2.1.6. Prueba de las propiedades de la sucesión de proyecciones	53
3. Encajes no Lineales de Subespacios Extremadamente Regulares	64
3.1. Demostración del teorema principal	67
Bibliografía	77

Resumen

TÍTULO: SOBRE ESPACIOS LIPSCHITZ-LIBRES*

AUTOR: Daniel Fabián Suárez Navarro**

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS LIPSCHITZ-LIBRES, FUNCIONES LIPSCHITZ.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo se demuestra la existencia de una base de Schauder para el espacio $\mathcal{F}(B_{\ell_2})$. Este resultado fue mostrado por Hájek y Pernecká en [9] para el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. El objetivo en este trabajo es detallar la prueba cuando $n = 2$.

Por otra parte, en el tercer capítulo consiste de una extensión del conocido teorema de Banach-Stone. Concretamente, se demuestra que la existencia de un encaje de un subespacio extremadamente regular A de $C(K)$ en el conjunto $C_0(S, X)$ implica que K es imagen continua de un subespacio de S ; para este caso la demostración consiste en una reescritura y unificación de las técnicas usadas en los artículos [3] y [4] en los cuales los autores trabajan por separado, la existencia de encajes para estos espacios.

*Trabajo de grado

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

Director: Ph.D. Michael Alexander Rincón Villamizar.

ABSTRACT

TITLE: ON FREE-LIPSCHITZ SPACES *

AUTHOR: Daniel Fabián Suárez Navarro **

KEYWORDS: FREE-LIPSCHITZ SPACES, LIPSCHITZ FUNCTIONS.

DESCRIPTION: In this work we prove the existence of a Schauder basis for the space $\mathcal{F}(B_{\ell_1^2})$. This result was shown by Hájek and Pernecká in [9] for the space $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Our objective in this work is to detail the test when $n = 2$.

On the other hand, the third chapter consists of an extension of the well-known Banach-Stone theorem. Specifically, it is proved that the existence of an embedding of an extremely regular subspace A of $C(K)$ in the set $C_0(S, X)$ implies that K is a continuous image of a subspace of S ; for this case the proof consists of a rewrite and unification of the techniques used in the articles [3] and [4] in which the authors work separately, the existence of sockets for these spaces.

*Bachelor Thesis

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

Director: Ph.D. Michael Alexander Rincón Villamizar.

Introducción

Sea (M, d) un espacio métrico, denotamos por $\text{Lip}(M)$ el espacio de todas las funciones Lipschitz de M en \mathbb{R} . Más aún, si $e \in M$ es fijo, el conjunto $\text{Lip}_0(M)$ denota el subespacio de $\text{Lip}(M)$ que consta de todas las funciones Lipschitz de M en \mathbb{R} tales que $f(e) = 0$.

Por otra parte, si consideramos la función de Dirac $\delta_M : M \rightarrow \text{Lip}_0(M)^*$ definida por la fórmula $\delta_M(x)(f) = f(x)$, $x \in M$, tenemos un encaje isométrico de M en un subconjunto de $\text{Lip}_0(M)^*$. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{F}(M) = \overline{\text{gen}(\delta_M(M))^{\|\cdot\|}}$ es un espacio de Banach conocido como el espacio Lipschitz-libre de M .

Es natural preguntarse aquí sobre las propiedades que tiene el espacio de Banach $\mathcal{F}(M)$. Por ejemplo, si M es separable, entonces $\mathcal{F}(M)$ es separable. Por otra parte, no se sabe en general cuando $\mathcal{F}(M)$ admite una base de Schauder. En el año 2014 en el artículo [9] los matemáticos Petr Hájek y Eva Pernecká demostraron que $\mathcal{F}(\ell_1)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ admiten una base Schauder. La demostración planteada en dicho artículo resulta bastante técnica y compleja. Por tal motivo en el presente trabajo se estudia de forma explícita el caso particular de \mathbb{R}^2 . Nuestro principal objetivo en el segundo capítulo consiste en reconstruir la demostración planteada en los artículos [11] y [9] para el caso de \mathbb{R}^2 .

En la segunda parte del trabajo, realizamos un estudio sobre la teoría de isomorfismos entre espacios de funciones continuas. Para esta parte recordemos que el conjunto $C_0(S, X)$ denota el espacio de Banach de las funciones de S en X que se anulan en el infinito, junto con la norma del supremo. Si X es el cuerpo de los escalares, entonces denotaremos el conjunto $C_0(S, X)$ por $C_0(S)$. Cuando S es compacto, escribimos $C(S)$ en lugar de $C_0(S)$. En esta parte se prueba que si existe un encaje no lineal entre un

subespacio extremadamente regular de $C(K)$ sobre $C_0(S, X)$, entonces K es imagen continua de un subconjunto de S . Este resultado extiende el trabajo presentado en [4] a subespacios extremadamente regulares de espacio $C(K)$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados conocidos de topología y análisis funcional que serán una herramienta crucial para la presentación de los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

Definición 1.1 *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo en la métrica definida por su norma.*

Definición 1.2 *Sean S un espacio localmente compacto y X un espacio de Banach. Decimos que una función $f : S \rightarrow X$ se anula en el infinito si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{s \in S : \|f(s)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto.*

Definición 1.3 *Sean S un espacio localmente compacto y X un espacio de Banach. El conjunto $C_0(S, X)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas de S en X que se anulan en el infinito, junto con la norma del supremo. Si X es \mathbb{R} o \mathbb{C} , entonces denotaremos el conjunto $C_0(S, X)$ por $C_0(S)$. Adicionalmente, si K es un conjunto compacto, usamos la notación $C(K)$ en lugar de $C_0(K)$.*

Definición 1.4 *Sea $(x_i)_{i \in I}$ una red acotada en \mathbb{R} . Definimos*

$$a = \liminf x_i = \sup_{i \in I} \inf\{x_j : j \geq i\}, \text{ y}$$

$$b = \limsup x_i = \inf_{i \in I} \sup\{x_j : j \geq i\}.$$

Diremos que a es el límite inferior y b es el límite superior de la red $(x_i)_{i \in I}$.

Sean X y Y espacios normados y, X^* y Y^* sus espacios duales respectivamente. Diremos que un operador lineal S de Y^* sobre X^* es débil* a débil* continuo, si S es continuo con la topología débil* de Y^* y X^* respectivamente. El siguiente resultado de los operadores duales será una herramienta crucial para el desarrollo del segundo capítulo de este trabajo (ver [12, pág. 287]).

Teorema 1.5 *Suponga que X y Y son espacios normados. Si $T \in B(X, Y)$, entonces T^* es débil* a débil* continuo. Recíprocamente, si S es un operador lineal débil* a débil* continuo de Y^* en X^* , entonces existe un $T \in B(X, Y)$ tal que $T^* = S$.*

Observe que este resultado nos permite garantizar que si un operador lineal entre dos espacios vectoriales normados es débil* a débil* continuo, entonces, existe un operador lineal en el conjunto de los operadores lineales acotados de los preduales de dichos espacios, de manera que el adjunto de este nuevo operador lineal es el operador lineal dado inicialmente.

SECCIÓN 1.1

Bases de Schauder

El propósito de esta sección es enunciar y demostrar algunos resultados clásicos de las bases de Schauder, los cuales serán notoria importancia para el desarrollo del segundo capítulo del presente trabajo.

Definición 1.6 *Sea E un espacio normado. Una sucesión $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ en E es llamada una base de Schauder de E si para cada $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$*

tales que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

Claramente $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es linealmente independiente (ver [5, pág. 182]).

Nota 1.7 Si E es n -dimensional, la noción de base de Schauder coincide con la noción de base algebraica.

Definición 1.8 Sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de un espacio normado X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las proyecciones $P_n : X \rightarrow X$ por

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Cada P_n es una proyección lineal de X sobre el subespacio generado por $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$.

Todas y cada una de las afirmaciones mencionadas a continuación pueden ser consultadas en [5]. No obstante, dado que una de las herramientas principales para el segundo capítulo de este trabajo depende en gran medida del siguiente Lema, nosotros presentamos una prueba detallada de éste.

Lema 1.9 Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de Schauder de un espacio normado X . Las proyecciones P_n satisfacen:

1. $\dim(P_n(X)) = n$;
2. $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{m,n\}}$;
3. $P_n(x) \rightarrow x$ en X para toda $x \in X$.

Recíprocamente, si las proyecciones lineales acotadas $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio normado X satisfacen las condiciones 1, 2 y 3, entonces los P_n son proyecciones asociadas con alguna base de Schauder de X .

Demostración:

1. Observe que $P_n(X) = \text{span}\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$. De esto se obtiene que, $\dim(P_n(X)) = \dim(\text{span}\{e_i : 1 \leq i \leq n\}) = n$.

2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$. Supongamos que $m > n$. Entonces

$$P_n P_m(x) = P_n \left(\sum_{i=1}^m a_i e_i \right) = P_n \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=n+1}^m a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i e_i = P_n(x).$$

Si $m \leq n$, entonces

$$P_n(P_m(x)) = P_n \left(\sum_{i=1}^m a_i e_i \right) = P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right), \text{ donde } a_i = 0 \text{ para todo } n \geq i \geq m.$$

Luego,

$$P_n(P_m(x)) = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \text{ donde } a_i = 0 \text{ para todo } i \geq m.$$

Esto es,

$$P_n(P_m(x)) = \sum_{i=1}^m a_i e_i = P_m(x).$$

3. Este resultado es inmediato de la definición de las proyecciones.

Recíprocamente, si las proyecciones P_n satisfacen 1.–3. podemos construir una base de Schauder cuyas proyecciones son precisamente las $\{P_n\}$. Inicialmente, por la condición 2. se sigue que $\text{Im}P_{n-1} \subseteq \text{Im}P_n$ y de 1. esta inclusión es estricta. Escojamos $x_n \in \text{Im}P_n \setminus \text{Im}P_{n-1}$ y definamos $0 \neq e_n = x_n - P_{n-1}(x_n) \in \text{Im}P_n$. Observe que

$$P_{n-1}(e_n) = P_{n-1}(x_n) - P_{n-1}(P_n(x_n)) = 0,$$

por lo que $e_n \in \ker P_{n-1}$. Luego, $e_n \in \ker P_{n-1} \cap \text{Im}P_n$. Como este último subespacio tiene dimensión 1, para todo $x \in X$ existe un $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_n e_n = P_n(x) - P_{n-1}(x) \in P_n(X) \cap \ker P_{n-1}.$$

Así, de β . se sigue que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i.$$

La unicidad de $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ se sigue del hecho de que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, entonces por la continuidad de los P_n , obtenemos que $P_n(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$. Por lo tanto $\beta_n e_n = P_n(x) - P_{n-1}(x) = \alpha_n e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\{e_i\}$ es una base de Schauder de X y los P_n son las proyecciones asociadas con $\{e_i\}$. ■

Teorema 1.10 *Sea $\{e_i\}$ una base de Schauder de un espacio de Banach X . Las proyecciones P_n asociadas con $\{e_i\}$ son uniformemente acotadas.*

Definición 1.11 *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subespacios de X de dimensión finita es llamada una descomposición finito dimensional de X , si cada $x \in X$ tiene una única representación de la forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

con $x_n \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $\dim X_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, si $X_n = \text{span}\{x_n\}$ para algún $x_n \in X_n$, entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una descomposición finito dimensional para X si, y solo si, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de X .

Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una descomposición finito dimensional para un espacio de Banach X , definimos las proyecciones P_n sobre X por

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

El siguiente resultado es la versión del Lema 1.9 para descomposiciones finito dimensionales.

Teorema 1.12 Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una descomposición finito dimensional para un espacio de Banach X , entonces $\sup \|P_n\| < \infty$. Recíprocamente si $\{P_n\}$ es una sucesión de proyecciones de rango finito sobre X tales que $P_n P_m = P_{\min\{n,m\}}$ y $\lim_n P_n(x) = x$ para cada $x \in X$, entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ determina una única descomposición finito dimensional sobre X tomando $X_1 = P_1(X)$ y $X_n = \text{Im}(P_n - P_{n-1})$ para $n > 1$.

SECCIÓN 1.2

Espacios Lipschitz-Libres

El objetivo de esta sección es estudiar los espacios Lipschitz-Libres.

Definición 1.13 Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos. Decimos que $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ es Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y), \quad (1.1)$$

para todo $x, y \in M$. El menor C tal que (1.1) se cumple es llamado la constante de Lipschitz de f y se define como sigue

$$L(f) := \sup \left\{ \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in M, x \neq y \right\}.$$

Definición 1.14 Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos. Decimos que $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ es bi-Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y),$$

para todo $x, y \in M$.

Definición 1.15 Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos. Una función $f : M \rightarrow N$ se llama un encaje isométrico si preserva distancias, esto es $d'(f(u), f(v)) = d(u, v)$ para

toda $u, v \in M$. Si existe un encaje de M en N decimos que M es isométrico a un subespacio de N . Si además, f es sobreyectiva, decimos que M y N son isométricos.

Ejemplo 1.16 Si denotamos por ℓ_p^n al espacio vectorial de \mathbb{R}^n junto con la norma dada por $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, entonces el espacio ℓ_p^n es isométrico a un subespacio lineal de ℓ_p^m si $n < m$, y a un subespacio lineal de ℓ_p .

Definición 1.17 Sea (M, d) un espacio métrico. Denotamos por $\text{Lip}(M)$ al espacio de todas las funciones Lipschitz de M en \mathbb{R} . Si M tiene punto base $e \in M$, entonces $\text{Lip}_0(M)$ es el subespacio de $\text{Lip}(M)$ que consta de todas las funciones de M en \mathbb{R} que se anulan en e .

Definimos $\|\cdot\|_{\text{Lip}} : \text{Lip}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \text{máx}\{|f(e)|, L(f)\}.$$

Nota 1.18 Observe que si $f(e) = 0$, entonces $\|f\|_{\text{Lip}} = L(f)$. Así, la norma del subespacio $\text{Lip}_0(M)$ está dada por $\|f\|_{\text{Lip}_0} = L(f)$.

Es fácil ver que $\text{Lip}(M)$ y $\text{Lip}_0(M)$ son espacios vectoriales. Más aún en [14] se demostró el siguiente resultado para estos espacios.

Teorema 1.19 Sea (M, d) un espacio métrico, entonces

- a. $(\text{Lip}(M), \|\cdot\|_{\text{Lip}})$ es un espacio de Banach.
- b. $(\text{Lip}_0(M), L(f))$ es un espacio de Banach, para cualquier espacio métrico (M, d) con punto base $e \in M$.

Recordemos que si (M, d) es un espacio métrico con punto base $e \in M$, entonces la función delta de Dirac $\delta_M : M \rightarrow \text{Lip}_0(M)^*$ está definida por la fórmula $\delta_M(x)(f) = f(x)$, para cada $x \in M$.

Definición 1.20 Sea (M, d) un espacio métrico con punto base $e \in M$. El espacio Lipschitz-libre sobre M , denotado por $\mathcal{F}(M)$, es definido como el subespacio $\overline{\text{gen}(\delta_M(M))}^{\|\cdot\|}$ de $\text{Lip}_0(M)^*$.

Esto es, $\mathcal{F}(M)$ denota la clausura bajo la norma (la norma del espacio $\text{Lip}_0(M)^*$) del subespacio generado de $\delta_M(M)$.

Ejemplo 1.21 Veamos que ℓ_1 es isométricamente isomorfo al espacio $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. En efecto, consideremos \mathbb{N} con la métrica discreta dada por $d(n, m) = 2$ siempre que $n \neq m$ y consideremos el conjunto $\{f \in \ell_\infty : f(0) = 0\}$ con la norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : n \in \mathbb{N}\}$.

Claramente $\text{Lip}_0(\mathbb{N}) \subseteq \{f \in \ell_\infty : f(0) = 0\}$ y $\|f\|_\infty \leq L(f)$. Recíprocamente, sea $f \in \{f \in \ell_\infty : f(0) = 0\}$, entonces $|f(n) - f(m)|/d(n, m) = |f(n) - f(m)|/2 \leq \|f\|_\infty$, esto es $L(f) \leq \|f\|_\infty$. Entonces $\text{Lip}_0(\mathbb{N}) = \{f \in \ell_\infty : f(0) = 0\}$.

Ahora, denotemos por $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ la base de Schauder estándar de ℓ_1 . Note que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta_{\mathbb{N}}(n) = e_n^*$, donde $e_n^* \in \text{Lip}_0(\mathbb{N})^*$ es la proyección a la n -ésima coordenada. Si $a = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, definimos $T(a) = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{\mathbb{N}}(j)$. Entonces,

$$\|T(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j \delta_{\mathbb{N}}(j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|a_j \delta_{\mathbb{N}}(j)\| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \|e_j^*\| = \sum_{j=1}^n |a_j| = \|a\|_{\ell_1}.$$

Para la otra desigualdad, recordemos que definimos sobre \mathbb{N} la métrica discreta dada por $d(m, n) = 2$ si $n \neq m$ y $d(n, m) = 0$ si $n = m$. Sean $J = \{1, \dots, n\}$ e $I = \{j \in J : a_j < 0\}$, podemos definir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(j) = \begin{cases} -1 & \text{si } j \in I, \\ 1 & \text{si } j \in J \setminus I, \\ 0 & \text{si } j \in \mathbb{N} \setminus J. \end{cases}$$

Entonces, $|f(n) - f(m)| \leq 2$, de esto que $|f(n) - f(m)| \leq d(n, m)$ para toda $n \neq m$.

Luego $L(f) \leq 1$ y

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\ell_1} &= \sum_{j=1}^n |a_j| = \sum_{j=1}^n a_j f(j) \\
&= \left| \sum_{j=1}^n a_j f(j) \right| \leq \sup_{\substack{f \in \text{Lip}_0(\mathbb{N}) \\ L(f) \leq 1}} \left| \sum_{j=1}^n a_j f(j) \right| \\
&= \sup_{\substack{f \in \text{Lip}_0(\mathbb{N}) \\ L(f) \leq 1}} \left| \sum_{j=1}^n a_j \delta_{\mathbb{N}}(j)(f) \right| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^n a_j \delta_{\mathbb{N}}(j) \right\| = \|T(a)\|.
\end{aligned}$$

De lo cual tenemos que el operador T induce una isometría lineal entre los espacios ℓ_1 y $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Ejemplo 1.22 Consideremos \mathbb{R} con la métrica usual. La correspondencia

$$\delta_{\mathbb{R}}(x) \mapsto \chi_{(0,x]}$$

se extiende a un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sobre $L_1(\mathbb{R})$.

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\|\chi_{(0,x]}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{(0,x]}| d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,x]} d\mu = \int_{(0,x]} d\mu = \mu((0, x]) = |x - 0| = |x|,$$

donde μ denota la medida de Lebesgue.

Ahora,

$$\|\delta_{\mathbb{R}}(x)\| = \sup_{\substack{f \in \text{Lip}_0(X) \\ L(f) \leq 1}} |\delta_{\mathbb{R}}(x)(f)| = \sup_{\substack{f \in \text{Lip}_0(X) \\ L(f) \leq 1}} |f(x)| \leq |x|,$$

esto es $\|\delta_{\mathbb{R}}(x)\| \leq \|\chi_{(0,x]}\|_1$. Por otra parte, si consideramos a f como la función identidad en \mathbb{R} tenemos que $L(f) = 1$ y

$$\|\chi_{(0,x]}\|_1 = |x| = |f(x)| \leq \sup_{\substack{f \in \text{Lip}_0(X) \\ L(f) \leq 1}} |f(x)| = \|\delta_{\mathbb{R}}(x)\|.$$

De lo cual obtenemos la otra desigualdad. Por lo tanto $\|\chi_{(0,x]}\|_1 = \|\delta_{\mathbb{R}}(x)\|$. ■

Una de las propiedades mas interesantes de los espacios de funciones Lipschitz es que estos en realidad son espacios duales. Para ver esto, a continuación presentamos algunas definiciones y teoremas que garantizan este hecho.

Definición 1.23 Sea (X, d) un espacio métrico. Una molécula en X es una función $m : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\text{supp}(m) = \{x \in X : m(x) \neq 0\}$ es finito

(b) $\sum_{x \in X} m(x) = 0$.

El conjunto de moléculas será denotado por $\mathcal{M}(X)$.

Dados $x, y \in X$ definimos la molécula m_{xy} por $m_{xy} = \chi_x - \chi_y$, donde χ_x y χ_y son las funciones características de los conjuntos unitarios $\{x\}$ y $\{y\}$. Para el conjunto de moléculas definimos la seminorma

$$\|m\|_{\mathcal{M}} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n |a_j| d(x_j, y_j) : m = \sum_{j=1}^n a_j m_{x_j y_j} \right\}.$$

Sea $AE(X)$ el completamiento del espacio $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$.

Teorema 1.24 Sean (X, d) un espacio métrico y $0 \in X$. Entonces $AE(M)^*$ es linealmente isométrico a $\text{Lip}_0(X)$.

Demostración: Sea $T_1 : AE(X)^* \rightarrow \text{Lip}_0(X)$ dada por $T_1(f^*)(w) = f^*(m_{w0})$, si $w \in X$.

Como $\|m_{xy}\|_{\mathcal{M}} \leq d(x, y)$, entonces para cada $x, y \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} |T_1(f^*)(x) - T_1(f^*)(y)| &= |f^*(m_{x0}) - f^*(m_{y0})| \\ &\leq \|f^*\| \|m_{x0} - m_{y0}\| \\ &\leq \|f^*\| d(x, y). \end{aligned}$$

Luego $T_1(f^*)$ es Lipschitz. Además $T_1(f^*)(0) = 0$, es decir, $T_1(f^*) \in \text{Lip}_0(X)$. Observe que T_1 es lineal y $L(T_1(f^*)) \leq \|f^*\|$.

Ahora, definamos $T_2 : \text{Lip}_0(X) \rightarrow AE(X)^*$ por $(T_2f)(m) = \sum_{x \in X} m(x)f(x)$ para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$ y $m \in \mathcal{M}(X)$. Observe que $T_2(f)$ es lineal y si $m = \sum_{j=1}^n a_j m_{x_j y_j}$, tenemos

$$\begin{aligned} |(T_2f)(m)| &= \left| (T_2f) \left(\sum_{j=1}^n a_j m_{x_j y_j} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n a_j (T_2f) m_{x_j y_j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot |f(x_j) - f(y_j)| \\ &\leq L(f) \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot d(x_j, y_j) \end{aligned}$$

De esta manera, $|T_2(f)(m)| \leq L(f) \|m\|_{\mathcal{M}}$. Luego $T_2(f)$ admite una extensión lineal al espacio $AE(X)$, denotada también por $T_2(f)$, tal que $\|T_2(f)\| \leq L(f)$ para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$. Ahora, si $m \in \mathcal{M}(X)$, entonces

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(f^*)(m) &= T_2(T_1(f^*))(m) \\ &= \sum_{x \in X} m(x) T_1(f^*)(x) \\ &= \sum_{x \in X} m(x) f^*(m_{x0}) \\ &= f^* \left(\sum_{x \in X} m(x) m_{x0} \right) = f^*(m). \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_2 \circ T_1 = \text{Id}_{AE(X)^*}$. De manera similar $T_1 \circ T_2 = \text{Id}_{\text{Lip}_0(X)}$. De lo anterior tenemos que T_1 y T_2 son isometrías. ■

Teorema 1.25 Sea (M, d) un espacio métrico y $0 \in M$. Entonces $\mathcal{F}(M)^* = \text{Lip}_0(M)$.

Demostración: Del teorema anterior tenemos que $AE(M)^* \cong \text{Lip}_0(M)$. Veamos que $AE(M)$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{F}(M)$.

Denotemos por $\mathcal{M}(M)$ el conjunto de moléculas definidas en M . Sea $T_1 : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ dada por

$$T_1(m) = \sum_{j=1}^n a_j \delta_M(x_j), \text{ si } m = \sum_{j=1}^n a_j m_{x_j 0} \in \mathcal{M}(M).$$

Por otra parte, definimos $T_2 : \text{Lip}_0(M) \rightarrow AE(M)^*$ por $T_2(f)(m) = \sum_{x \in M} m(x)f(x)$, siempre que $m \in \mathcal{M}(X)$.

Entonces las aplicaciones T_1 y T_2 son lineales. Definamos $\|\cdot\|_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\|m\|_1 = \|T_1(m)\|$. Consecuentemente $\|\cdot\|_1$ es una seminorma en $\mathcal{M}(M)$ y además,

$$\|m_{xy}\|_1 = \|\delta_X(x) - \delta_X(y)\| = d(x, y) \text{ para todo } x, y \in M.$$

Por tanto, $\|m\|_1 \leq \|m\|_{\mathcal{M}}$ para cada $m \in \mathcal{M}$, esto es, T_1 es continua.

Por otra parte, si $m = \sum_{j=1}^n a_j m_{x_j 0} \in \mathcal{M}(m)$, por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in \text{Lip}_0(M)$ con $L(f) \leq 1$ tal que $\|m\|_{\mathcal{M}} = |T_2(f)(m)|$. Luego

$$\begin{aligned} \|m\|_{\mathcal{M}} &= |T_2(f)(m)| = \left| T_2(f) \left(\sum_{j=1}^n a_j m_{x_j 0} \right) \right| \\ &= \left| \left(\sum_{j=1}^n a_j T_2(f)(m_{x_j 0}) \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) \right| \\ &= \left| \left(\sum_{j=1}^n a_j \delta_M(x_j) \right) (f) \right| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j \delta_M(x_j) \right\| = \|T_1(m)\|. \end{aligned}$$

Esto demuestra que T_1 es una isometría. Por tanto T_1 admite una extensión única a $AE(M)$, denotada aún por T_1 , tal que $\|T_1(\mu)\| = \|\mu\|$ para cada $\mu \in AE(M)$. Puesto que $\delta_M(M) \subseteq T_1(AE(M))$, se sigue que T_1 es sobreyectiva. ■

Observación 1.26 Sea M un espacio métrico con punto base e . Si consideramos $\text{Lip}_0(M)$ como el espacio dual de $\mathcal{F}(M)$ entonces $\text{Lip}_0(M) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{F}(M)} = \prod_{x \in \mathcal{F}(M)} \mathbb{R}$. Recordemos que la topología producto es la topología menos fina que hace continuas las proyecciones

$P_x : \prod_{x \in \mathcal{F}(M)} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, restringiendo la topología producto a $\text{Lip}_0(M)$, tenemos que la topología producto es la topología menos fina en $\text{Lip}_0(M)$ que hace continuas todas las proyecciones P_x . Por otra parte, como la topología débil* es la topología menos fina sobre $\text{Lip}_0(M)$ que hace continua todas las funciones $f_x : \text{Lip}_0(M) \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f_x(x^*) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \text{Lip}_0(M)^*$ y $x \in \text{Lip}_0(M)$, tenemos que necesariamente la topología débil* y la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathcal{F}(M)}$ restringida a $\text{Lip}_0(M) = \mathcal{F}(M)$ deben ser equivalentes. En particular, para subconjuntos acotados de $\text{Lip}_0(M)$ la topología débil* coincide con la topología de la convergencia puntual.

De la observación anterior tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.27 *Sea (M, d) un espacio métrico con punto base 0. El espacio $\text{Lip}_0(M)$ es un espacio dual. En subconjuntos acotados la topología débil* coincide con la topología de la convergencia puntual.*

Demostración: Del Teorema 1.24 y el Teorema 1.25 se sigue que $\text{Lip}_0(M)$ es un espacio dual. Adicionalmente, de la Observación 1.26 se tiene que en subconjuntos acotados la topología débil* coincide con la topología de la convergencia puntual. ■

El siguiente teorema que mostramos dice que toda aplicación Lipschitz entre espacios métricos induce un operador lineal entre espacios Lipschitz-Libres.

Teorema 1.28 *Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos con punto base $0_M \in M$ y $0_N \in N$. Si $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ es Lipschitz y $f(0_M) = 0_N$, entonces existe un único operador lineal continuo $\tilde{f} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$ tal que $\tilde{f} \circ \delta_M = \delta_N \circ f$ y $\|\tilde{f}\| = L(f)$.*

Demostración: Sea $C_f : \text{Lip}_0(N) \rightarrow \text{Lip}_0(M)$ definida por $C_f(g) = g \circ f$. No es difícil ver que C_f es un operador lineal. Además, como f es Lipschitz, tenemos que C_f es continuo y por lo tanto acotado. Consideremos el operador adjunto $C_f^* : \text{Lip}_0^*(M) \rightarrow \text{Lip}_0^*(N)$ el

cual es dado por $C_f^*(h) = h \circ C_f$. Sabemos que C_f^* es lineal, continuo y $\|C_f\| = \|C_f^*\|$ (Ver [12, Proposición 3.1.2]).

Note que para cada $x \in M$ y toda $g \in \text{Lip}_0(N)$ se tiene que

$$C_f^*(\delta_M(x))(g) = \delta_M(x)(C_f(g)) = \delta_M(x)(g \circ f) = g(f(x)) = \delta_N(f(x))(g).$$

Luego, $C_f^* \circ \delta_M = \delta_N \circ f$.

Ahora, veamos que $\|C_f\| = L(f)$ y por consiguiente $\|C_f^*\| = L(f)$.

En efecto, como $L(C_f(g)) = L(g \circ f) \leq L(g)L(f)$ tenemos que $\|C_f\| \leq L(f)$. Para la otra desigualdad fijemos $x, y \in M$ con $x \neq y$ y definamos $g = \tilde{d}_{f(y)} : N \rightarrow \mathbb{R}$, por $\tilde{d}_{f(y)}(p) = d'(p, f(y)) - d'(0_N, f(y))$. Entonces $L(g) \leq 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)} &= \frac{|d'(f(x), f(y)) - d'(0_N, f(y)) - d'(f(y), f(y)) + d'(0_N, f(y))|}{d(x, y)} \\ &= \frac{|C_f(g)(x) - C_f(g)(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq L(C_f(g)) \leq \|C_f\|. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\|C_f^*\| = \|C_f\| = L(f)$. Así tomando $\tilde{f} = C_f^*|_{\mathcal{F}(M)}$ tenemos el operador lineal buscado. ■

El lector puede consultar algunas variaciones del anterior resultado en [1].

Corolario 1.29 Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos con punto base $0_M \in M$ y $0_N \in N$. Si existe $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ bi-Lipschitz y $f(0_M) = 0_N$, entonces $\mathcal{F}(M)$ y $\mathcal{F}(N)$ son linealmente isomorfos.

El recíproco de la afirmación anterior no es cierto. De hecho, se tiene el siguiente resultado (ver [2, Teorema 5]).

Teorema 1.30 Si K es un espacio métrico compacto infinito, entonces $\mathcal{F}(C(K))$ es linealmente isomorfo a $\mathcal{F}(c_0)$.

Sin embargo no siempre existe una aplicación bi-Lipschitz entre $C(K)$ y c_0 (ver [10, Teorema 3.1]).

A continuación presentamos un resultado que será de utilidad para el siguiente capítulo.

Teorema 1.31 *Si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{F}(B_X)$ son isomorfos (ver [13]).*

SECCIÓN 1.3

Subespacios extremadamente regulares

En esta sección se presentan algunas definiciones, ejemplos y resultados sobre los subespacios extremadamente regulares de los espacios de funciones continuas. El objetivo principal de esta sección es presentar algunos resultados que serán una herramienta muy útil para poder abordar la segunda parte de nuestro trabajo la cual será presentado en el tercer capítulo.

Definición 1.32 *Sea K un espacio compacto Hausdorff. Decimos que un subespacio vectorial cerrado A de $C(K)$ es extremadamente regular si para cada $k \in K$, cada vecindad abierta V de k , y $\varepsilon > 0$ existe $f \in A$ tal que*

- (a) $\|f\| = f(k) = 1$;
- (b) $|f(k')| < \varepsilon$ para toda $k' \in X \setminus V$.

El estudio de los espacios extremadamente regulares juega un papel importante al hablar de las extensiones del teorema de Banach-Stone. En [6] se demostró que si T es un isomorfismo lineal entre un subespacio extremadamente regular de $C_0(K)$ y un subespacio

extremadamente regular de $C_0(S)$ con $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$, entonces K y S son homeomorfos.

En [7] pueden consultar ejemplos de subespacios extremadamente regulares.

Ejemplo 1.33 El conjunto

$$A = \text{span}\{e^{-(n(x-t))^2} : n \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha, t \in \mathbb{R}\}.$$

es un subespacio extremadamente regular de $C_0(\mathbb{R})$.

En efecto, sean $k \in \mathbb{R}$, $U = (k - r, k + r)$ con $r > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ dados. Debemos buscar una función $f \in A$ que satisfaga las condiciones de la Definición 1.32.

No es difícil ver que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n(x) = e^{-(n(x-k))^2}$ satisface que $f_n(k) = \|f_n\| = 1$. Veamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_{n_0}(k')| < \frac{1}{m}$ para todo $k' \in \mathbb{R} \setminus U = (-\infty, k - r] \cup [k + r, \infty)$.

En efecto, supongamos que $k' \in (-\infty, k - r]$ (si $k' \in [k + r, \infty)$ la demostración es análoga) y sea $n_0 > \sqrt{\frac{\ln(m)}{r^2}}$. Entonces

$$\begin{aligned} |f_{n_0}(k')| &= e^{-(n_0(k'-k))^2} \\ &= e^{-n_0^2(k'-k)^2} \\ &< e^{-\frac{\ln(m)}{r^2}(k'-k)^2} \\ &= e^{-\ln(m)\left(\frac{k'-k}{r}\right)^2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ahora, como $k' \in (-\infty, k - r]$, tenemos que $k' \leq k - r$, es decir, $k' - k \leq -r$. Luego $\left(\frac{k'-k}{r}\right)^2 \geq 1$ y

$$-\ln(m) \left(\frac{k'-k}{r}\right)^2 \leq -\ln(m).$$

Entonces

$$e^{-\ln(m)\left(\frac{k'-k}{r}\right)^2} \leq e^{-\ln(m)}. \tag{1.3}$$

Así, de (1.2) y (1.3) se sigue que

$$|f_{n_0}(k')| < e^{-\ln(m)} = e^{\ln\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m}.$$

Basta tomar entonces $f = f_{n_0}$ para garantizar lo afirmado. ■

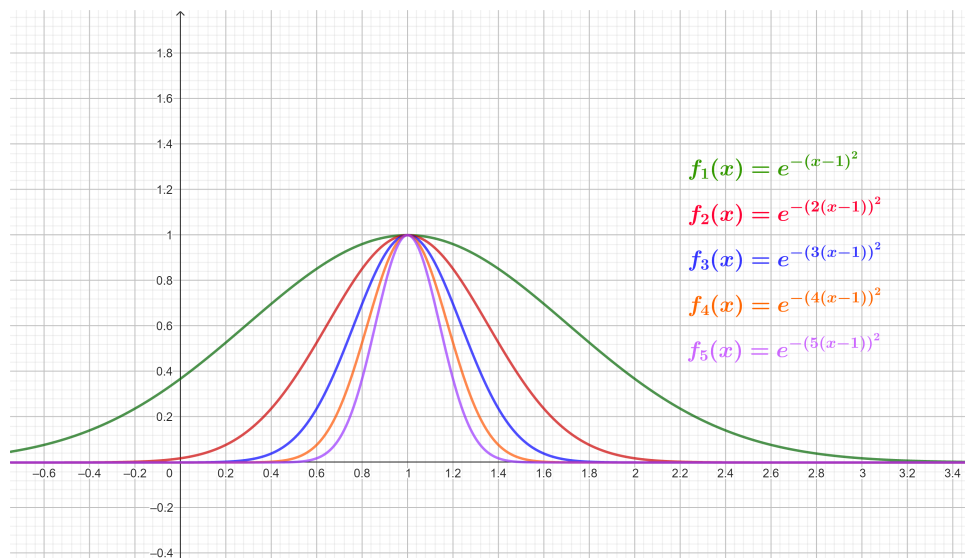


Figura 1.1: Gráficas de algunas funciones del subespacio A

Sean $k \in K$, $v \in \mathbb{K}$ y $f \in C(K)$. Denotamos por

$$\omega(k, f, v) = \max\{\|f\|, |f(k) - v|\}.$$

La siguiente proposición será de utilidad para demostrar los resultados presentados en el tercer capítulo.

Proposición 1.34 *Sean K un espacio compacto Hausdorff y A un subespacio extremadamente regular de $C(K)$. Para cualquier $k \in K$ y $v \in \mathbb{K}$, existe $f_0 \in A$ tal que $\|f_0\| = |v|/2$ y $f_0(k) = v/2$.*

Demostración: En efecto, sean $k \in K$ y $v \in \mathbb{K}$. Existe $f \in A$ tal que $\|f\| = f(k) = 1$. Como A es un subespacio vectorial $(\frac{v}{2} \cdot f) \in A$. Si $f_0 = \frac{v}{2} \cdot f$, entonces f_0 satisface las condiciones deseadas. ■

CAPÍTULO 2

Una base de Schauder para $\mathcal{F}(B_{\ell_1^2})$

La existencia de bases de Schauder para los espacios $\mathcal{F}(X)$ es un problema abierto. En [11] y [9] resolvieron este problema para los espacios $X = \ell_1^n$ y $X = \ell_1$. El objetivo de este capítulo es estudiar la demostración de [11] y [9] para el caso $X = \ell_1^2$.

Para el caso en que (M, d) es un espacio métrico finito no es difícil ver que $\mathcal{F}(M)$ admite base de Schauder, esto debido a lo mencionado en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Si M es un espacio métrico discreto finito con punto base e , entonces $\dim \mathcal{F}(M) < \infty$.*

Demostración: Consideremos $\text{Lip}_0(M)$ el conjunto de todas las funciones Lipschitz de M en \mathbb{R} tales que $f(e) = 0$. Veamos que $\text{Lip}_0(M)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ donde $\|\cdot\|$ está dada por

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, \dots, |x_i - x_j|, \dots, |x_n - x_{n-1}|\},$$

y por consiguiente $\dim(\mathcal{F}(M)) \leq \dim(\text{Lip}_0(M)^*) = n$.

En efecto, como $d(x_i, x_j) = 1$ para toda $i \neq j$. Entonces, para cada $f \in \text{Lip}_0(M)$, se tiene que

$$\|f\|_{\text{Lip}_0(M)} = \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|, |f(x_1) - f(x_2)|, \dots, |f(x_n) - f(x_{n-1})|\}.$$

Definamos $\varphi : \text{Lip}_0(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

No es difícil ver que φ es lineal y está bien definida. Ahora, sea $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y definamos $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(e) = 0$, y $f(x_i) = y_i$, entonces $f \in \text{Lip}_0(M)$ y $\varphi(f) = y$. Por lo tanto tanto φ es sobreyectiva. Por otra parte, dada $f \in \text{Lip}_0(M)$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(f)\| &= \|(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))\| \\ &= \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_n) - f(x_{n-1})|\} \\ &= L(f) = \|f\|_{\text{Lip}_0(M)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{Lip}_0(M) \simeq \mathbb{R}^n$. Así, $\dim \mathcal{F}(M) < \infty$. ■

Corolario 2.2 *Si (M, d) es un espacio métrico discreto finito con punto base e , entonces $\mathcal{F}(M)$ admite una base Schauder.*

Demostración: De la Proposición 2.1 tenemos que $\dim(\mathcal{F}(M)) < \infty$, como todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base algebraica, se sigue que $\mathcal{F}(M)$ admite una base de Schauder. ■

El siguiente resultado relaciona los espacios Lipschitz-libres de subconjuntos densos con los espacios Lipschitz-libres de todo el espacio.

Proposición 2.3 *Sea D un subconjunto denso de M , entonces $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(M)$*

Demostración: Como D es denso M y $\delta_M : x \in M \mapsto \delta_M(x) \in \delta_M(M) \subseteq \mathcal{F}(M)$ es continua, tenemos que $\delta_M(D)$ es denso en $\delta_M(M)$.

Ahora, veamos que $\text{span}(\delta_M(D))$ es denso en $\text{span}(\delta_M(M))$. Sea $r > 0$ y $x \in \text{span}(\delta_M(M))$.

Debemos probar que

$$\text{span}(\delta_M(D)) \cap B(x, r) \neq \emptyset.$$

Como $x \in \text{span}(\delta_M(M))$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ (observe que en caso de que alguno sea cero la cantidad de escales a considerar será menor) tales que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, donde $x_i \in \delta_M(M)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por la densidad de $\delta_M(D)$ en $\delta_M(M)$ se sigue que, existen $y_1, y_2, \dots, y_n \in \delta_M(D)$ tales que

$$y_i \in \delta_M(D) \cap B\left(x_i, \frac{r}{|\alpha_i|n}\right) \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Esto es, $y_i \in \delta_M(D)$ y $\|x_i - y_i\| < \frac{r}{|\alpha_i|n}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consideremos $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in \text{span}(\delta_M(D))$, entonces

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - y_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|x_i - y_i\| < \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \frac{r}{|\alpha_i|n} \\ &= \frac{r}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{r}{n} n = r \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $y \in B(x, r)$ y por tanto

$$\text{span}(\delta_M(D)) \cap B(x, r) \neq \emptyset.$$

Luego,

$$\mathcal{F}(D) \cap \text{span}(\delta_M(M)) = \overline{\text{span}(\delta_M(D))}^{\|\cdot\|} \cap \text{span}(\delta_M(M)) = \text{span}(\delta_M(M)). \quad (2.1)$$

Ahora, claramente $\mathcal{F}(D) \subseteq \mathcal{F}(M)$. Además de (2.1) se sigue que

$$\mathcal{F}(M) = \overline{\mathcal{F}(D) \cap \text{span}(\delta_M(M))} \subseteq \mathcal{F}(D) \cap \mathcal{F}(M) \subseteq \mathcal{F}(D).$$

Por lo tanto $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(M)$. ■

El anterior resultado nos garantiza que para estudiar alguna propiedad del espacio Lipschitz-libre de un espacio métrico (M, d) , basta estudiar dicha propiedad en el espacio

Lipschitz-libre de algún subconjunto denso de este espacio; o de forma contraria, si queremos estudiar alguna propiedad para el espacio Lipschitz-libre de un subconjunto denso de M , basta estudiar dicha propiedad en $\mathcal{F}(M)$.

SECCIÓN 2.1

Construcción de una base de Schauder para $\mathcal{F}(B_{\ell_1^2})$

En el año 2014 en el artículo [9], Petr Hájek y Eva Pernecká demostraron que los espacios Lipschitz-Libres $\mathcal{F}(\ell_1)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ poseen base de Schauder. La demostración usada en dicho artículo es bastante técnica. Esto motiva el trabajo presentado en esta sección, el cual consiste estudiar la técnica usada en dicho artículo para el caso particular de \mathbb{R}^2 . Esto con el fin de poder obtener una demostración más detallada para un espacio más conocido y en el cual es más sencillo trabajar.

Por facilidad de escritura para esta sección, usaremos la letra X para denotar el conjunto $[-1, 1]^2$. Inicialmente, definimos dos funciones que son elementales para la construcción de una sucesión de proyecciones (ver [11] y [9]) en el espacio $\text{Lip}_0(X)$. Seguidamente, procedemos realizando un razonamiento particular del mostrado en [9] el cual consiste hallar una sucesión de proyecciones lineales $(P_n)_{n=1}^\infty$ en el espacio dual $\text{Lip}_0(X)$ que cumplan las propiedades mencionadas en los Teorema ?? y Teorema 1.12. Si la sucesión de proyecciones satisface las condiciones mencionadas en el Teorema 1.12, tendremos que esta sucesión de proyecciones determina una descomposición de rango finito del espacio $\text{Lip}_0(X)$. Además, veremos que $\dim((P_{n+1} - P_n)(\text{Lip}_0(X))) = 1$ y por consiguiente dicha descomposición está asociada a una base de Schauder para el espacio $\text{Lip}_0(X)$. Adicionalmente, mostraremos que dichas proyecciones son débil*-débil* continuas en subconjuntos acotados de $\text{Lip}_0(X)$ y convergentes a la identidad en $\text{Lip}_0(X)$ en la topología del ope-

radador débil*. Luego, del Teorema 1.5 tenemos que tal sucesión da lugar a una sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de operadores en $\mathcal{F}(X)$ de manera que $T_n^* = P_n$.

Dicha sucesión comparte las propiedades de $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ y satisface que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(\mathcal{F}(X))^w} = \mathcal{F}(X)$. Pero gracias a la propiedad de conmutación (esto es, que $P_m P_n(X) = P_{\min\{m,n\}}(X)$) se tiene que $T_1(\mathcal{F}(X)) \subset T_2(\mathcal{F}(X)) \subset \dots$, entonces $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(\mathcal{F}(X))} = \mathcal{F}(X)$ como se quería.

Para empezar, comencemos recordando algunas definiciones básicas y aclarando la notación usada en esta sección.

Denotamos por ℓ_1^2 el espacio vectorial \mathbb{R}^2 equipado con la norma

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|.$$

Además, para $i \in \{1, 2\}$, denotamos por e_i los vectores canónicos $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$.

Sean $p_1, q_1, p_2, q_2 \in [-1, 1]$ y F el subconjunto de X dado por $F = [p_1, q_1] \times [p_2, q_2]$.

Definimos la función

$$\begin{aligned} \pi_F : \ell_1^2 &\rightarrow F \\ (x, y) &\rightarrow (a, b) \end{aligned}$$

donde $d((x, y), F) = d((x, y), (a, b)) = \inf\{\|(x, y) - (c, d)\| : (c, d) \in F\}$.

Proposición 2.4 *la función $\pi_F : \ell_1^2 \rightarrow F$ está bien definida.*

Demostración: Es claro que la función está bien definida para todos los puntos dentro del conjunto F . Ahora, sea $(x, y) \in \ell_1^2 \setminus F$. Supongamos que $\pi_F(x, y) = (a, b)$ y que $\pi_F(x, y) = (a', b')$ para (a, b) y (a', b') en F . Entonces, $d((x, y), F) = d((x, y), (a, b))$ y $d((x, y), F) = d((x, y), (a', b'))$, de esto que el punto (x, y) equidista de los puntos (a, b) y (a', b') .

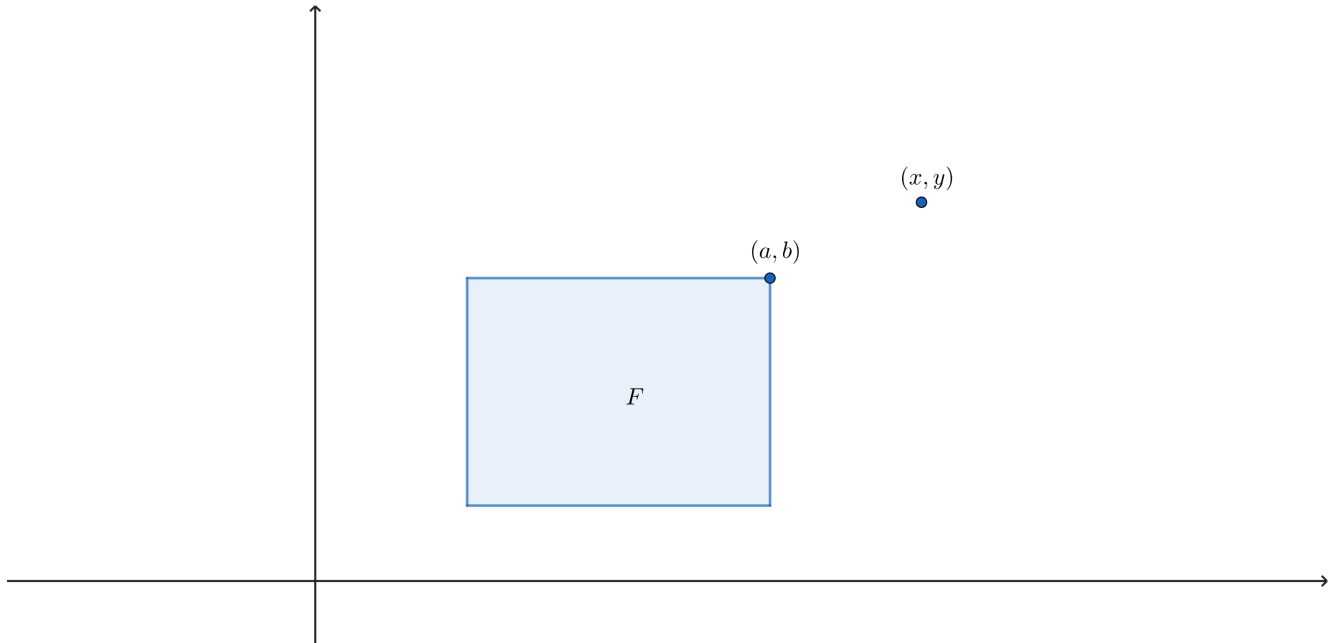


Figura 2.1: Observe que cualquier otro punto diferente de (a, b) está a una mayor distancia del punto (x, y)

Observe que, si $(a, b) \neq (a', b')$, entonces los puntos (a, b) , (x, y) y (a', b') forman un triángulo isósceles o son colineales (recordemos que en el plano tres puntos diferentes o forman un triángulo o están en una misma recta). (a, b) , (x, y) y (a', b') no pueden formar un triángulo isósceles puesto que existiría un punto sobre la mediatriz del segmento de recta que une a los puntos (a, b) y (a', b') , con una distancia más pequeña que la que hay entre los puntos (a, b) y (a', b') con el punto (x, y) , lo cual contradice la escogencia de dichos puntos. Por otra parte, si (a, b) , (x, y) y (a', b') fueran colineales, entonces el punto (x, y) estaría en el segmento de recta que une los puntos (a, b) y (a', b') , como F es convexo, esto implica que $(x, y) \in F$, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto, necesariamente (a, b) y (a', b') deben ser iguales. ■

Observación 2.5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si consideramos la función $\pi_{[a,b]} : \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ definida

por $\pi_{[a,b]}(x) = y$, donde $d(x, [a, b]) = d(x, y)$, no es difícil ver que la función $\pi_{[a,b]}(x)$ puede tomar solo tres valores; $\pi_{[a,b]}(x) = x$, si $x \in [a, b]$; $\pi_{[a,b]}(x) = a$ si $a > x$ y $\pi_{[a,b]}(x) = b$ si $x > b$.

Proposición 2.6 $\pi_F(x) = (\pi_{[p_1, q_1]}(x_1), \pi_{[p_2, q_2]}(x_2))$ para cualquier $x = (x_1, x_2)$ de ℓ_1^2 .

Demostración: Si $(x_1, x_2) \in \ell_1^2$, entonces

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), F) &= \inf\{|x_1 - a| + |x_2 - b| : (a, b) \in [p_1, q_1] \times [p_2, q_2]\} \\ &= \inf\{|x_1 - a| + |x_2 - b| : a \in [p_1, q_1] \text{ y } b \in [p_2, q_2]\} \\ &= \inf\{|x_1 - a| : a \in [p_1, q_1]\} + \inf\{|x_2 - b| : b \in [p_2, q_2]\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la observación anterior se sigue que

$$|x_i - \pi_{[p_i, q_i]}(x_i)| = \inf\{|x_i - \alpha| : \alpha \in [p_i, q_i]\}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Entonces, necesariamente $y_i = \pi_{[p_i, q_i]}(x_i)$. Por lo tanto $\pi_F(x_1, x_2) = (\pi_{[p_1, q_1]}(x_1), \pi_{[p_2, q_2]}(x_2))$.

■

Nota 2.7 La función $\pi_F : \ell_1^2 \rightarrow F$ es 1-Lipschitz.

No es difícil ver que la función $\pi_{[a,b]}(x)$ es 1-Lipschitz en \mathbb{R} . Sean (x_1, x_2) y (y_1, y_2) elementos de ℓ_1^2 , se sigue de la Proposición 2.6 que

$$\begin{aligned} \|\pi_F(x_1, x_2) - \pi_F(y_1, y_2)\| &= |\pi_{[p_1, q_1]}(x_1) - \pi_{[p_1, q_1]}(y_1)| + |\pi_{[p_2, q_2]}(x_2) - \pi_{[p_2, q_2]}(y_2)| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d(x, y). \end{aligned}$$

2.1.1. Función de interpolación

Sean $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $0 < R < \infty$. Denotamos por H al cuadrado

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq \frac{R}{2} \right\}. \quad (2.2)$$

Dado $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\delta \in \{-1, 1\}^2$, el símbolo $A_\delta(y, R)$ representa el vértice $y + \frac{R}{2}\delta$ del cuadrado H .

Denotamos por U_H al conjunto de vértices del cuadrado H , esto es

$$U_H = \{A_\delta(y, R) : \delta \in \{-1, 1\}^2\} \\ = \left\{ \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right), \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right), \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right), \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right) \right\}.$$

Procedemos ahora a describir la función de interpolación Λ , la cual será crucial para el presente trabajo.

Sean $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < R < \infty$ y $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U_H \subset \text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Definimos la función Λ como sigue:

$$\Lambda_\gamma(f)(x) = \frac{x_1 - y_1 + \frac{R}{2}}{R} f(A_{(1,\gamma)}(y, R)) + \left(1 - \frac{x_1 - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f(A_{(-1,\gamma)}(y, R)),$$

donde $\gamma \in \{-1, 1\}$ y $x = (x_1, x_2) \in \text{dom}(f)$. Sea también

$$\Lambda(f)(x) = \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \Lambda_{(1)}(f)(x) + \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \Lambda_{(-1)}(f)(x).$$

Explícitamente, para el caso de H lo anterior es:

$$\begin{aligned} \Lambda(f)(x) &= \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{x_1 - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(1 - \frac{x_1 - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \\ &+ \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{x_1 - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right) \\ &+ \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(1 - \frac{x_1 - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right). \end{aligned}$$

Definición 2.8 Sean I_1, I_2 dos intervalos cerrados de \mathbb{R} . Decimos que una función continua $\varphi : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedad (AF) en $I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ si su restricción a cualquier

segmento paralelo a uno de los ejes coordenados en $I_1 \times I_2$ es una función afín, esto es, dado L un segmento paralelo a uno de los ejes coordenados, entonces

$$\varphi|_L(x_1, x_2) = mx_i + b \quad (2.3)$$

donde m y b son constantes e $i \in \{1, 2\}$.

Proposición 2.9 Sea $H = I_1 \times I_2$ y $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U_H \subset \text{dom}(f)$. La función $\Lambda(f)$ tiene la propiedad (AF) en H .

Demostración: En efecto, supongamos que $L = \{a\} \times J$ donde $a \in I_1$ y $J \subseteq I_2$ (si consideramos $L = J \times \{b\}$ la demostración es análoga). Entonces, para cualquier $(a, x_2) \in L$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Lambda(f)(x) &= \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{a - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(1 - \frac{a - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \\ &+ \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{a - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right) \\ &+ \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(1 - \frac{a - y_1 + \frac{R}{2}}{R} \right) f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right). \end{aligned}$$

Observe que en la expresión anterior la única variable es x_2 , todos los demás elementos de la ecuación son constantes. Podemos escribir entonces la anterior expresión como $\Lambda(f)(x) = mx_2 + b$ para todo $(a, x_2) \in L$, donde m y b son constantes. ■

Definición 2.10 Decimos que una función continua φ en $I_1 \times I_2$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices de $I_1 \times I_2$ si $\text{Im } \varphi = [\varphi(v_j), \varphi(v_i)]$ donde v_i, v_j son vértices del cuadrado $I_1 \times I_2$. Esto es, una función está únicamente determinada por sus valores en los vértices de $I_1 \times I_2$ si la imagen de dicha función es el segmento de recta que une a las imágenes de dos de sus vértices.

Proposición 2.11 Sea $\varphi : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con la propiedad (AF).

Entonces φ está únicamente determinada por sus valores en los vértices de $I_1 \times I_2$.

Demostración: Sean v_1, v_2, v_3 y v_4 los vértices de $I_1 \times I_2$ (ver Figura 2.1).

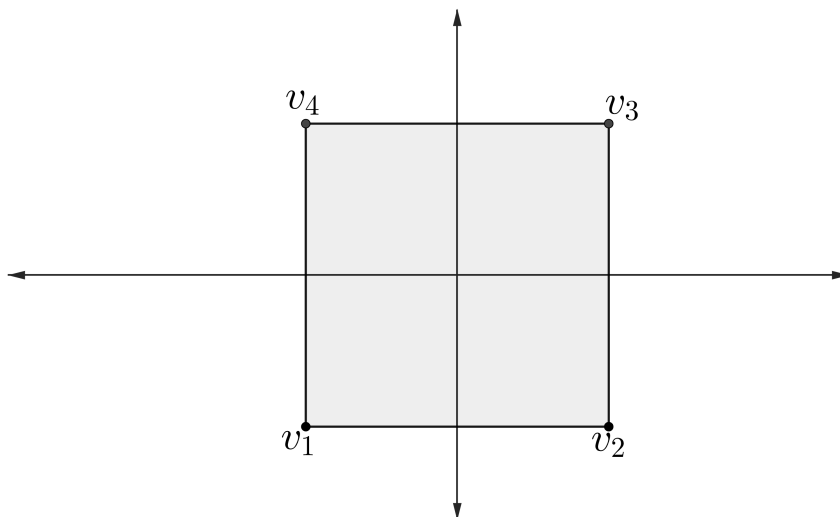


Figura 2.2: $I_1 \times I_2$

Para empezar consideremos el segmento $[v_1, v_2]$. Como φ tiene la propiedad (AF) tenemos que $\varphi|_{[v_1, v_2]}$ es afín, consecuentemente $\varphi|_{[v_1, v_2]}$ es monótona y por lo tanto alcanza su máximo y su su mínimo en los extremos del segmento $[v_1, v_2]$. Por un razonamiento análogo, si consideramos los segmento $[v_2, v_3]$, $[v_3, v_4]$ y $[v_1, v_4]$ tenemos que las respectivas restricciones alcanzan su máximo y su mínimo en los extremos de dichos segmentos. Ahora, sea $a = \min\{\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3), \varphi(v_4)\}$ y sea $b = \max\{\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3), \varphi(v_4)\}$. Entonces, para todo $x \in [v_1, v_2] \cup [v_2, v_3] \cup [v_3, v_4] \cup [v_1, v_4]$ se sigue que $\varphi(x) \in [a, b]$.

Ahora, sea $x = (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$. Observe que $x \in \{x_1\} \times I_2$ (y $x \in I_1 \times \{x_2\}$), como $\{x_1\} \times I_2$ es un segmento paralelo a uno de los ejes se sigue que $\varphi|_{\{x_1\} \times I_2}$ es afín y por lo tanto alcanza su mínimo y su máximo en los extremos del segmento $\{x_1\} \times I_2$, denotemos por c y d dichos extremos. Ahora, note que c y d están $[v_1, v_2] \cup [v_3, v_4]$, luego $\varphi(c)$ y $\varphi(d) \in [a, b]$. Por lo tanto $\varphi(x) \in [\varphi(c), \varphi(d)] \subseteq [a, b]$. La igualdad se obtiene de la

sobreyectividad de la función. ■

Proposición 2.12 Sean f y g funciones continuas en $I_1 \times I_2$ con la propiedad (AF). Si $f = g$ en los vértices del cuadrado $I_1 \times I_2$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I_1 \times I_2$.

Demostración: Denotemos por $v_i = (v_1^i, v_2^i)$ y $v_j = (v_1^j, v_2^j)$ dos vértices contiguos de $I_1 \times I_2$, y consideremos $[v_i, v_j]$ el segmento de recta que une a dichos vértices. Como f y g tienen la propiedad (AF) podemos suponer sin pérdida de generalidad que:

$$f|_{[v_i, v_j]}(x) = a_1 x_k + b_1, \quad k \in \{1, 2\}$$

y

$$g|_{[v_i, v_j]}(x) = a_2 x_k + b_2, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Como $f = g$ en v_i y v_j , tenemos que

$$f|_{[v_i, v_i]}(v_i) = g|_{[v_i, v_j]}(v_i) \Leftrightarrow a_1 v_k^i + b_1 = a_2 v_k^i + b_2, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (2.4)$$

y

$$f|_{[v_i, v_j]}(v_j) = g|_{[v_i, v_j]}(v_j) \Leftrightarrow a_1 v_k^j + b_1 = a_2 v_k^j + b_2, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (2.5)$$

Restando las ecuaciones de la de derecha de (2.4) y (2.5) se sigue que

$$a_1 v_k^i - a_1 v_k^j = a_2 v_k^i - a_2 v_k^j \Leftrightarrow a_1 (v_k^i - v_k^j) = a_2 (v_k^i - v_k^j).$$

Como $v_k^i \neq v_k^j$, tenemos que $v_k^i - v_k^j \neq 0$. Luego $a_1 = a_2$. Reemplazando $a_1 = a_2$ en (2.4), obtenemos que $b_1 = b_2$. Por lo tanto

$$f(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in [v_i, v_j].$$

Por otra parte, si tomamos $x = (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$ tenemos que $x \in L = \{x_1\} \times I_2$.

Observe que los puntos extremos de este segmento están en $[v_1, v_2]$ y $[v_3, v_4]$ (ver figura

2.1). Consecuentemente $f(x) = g(x)$ en estos puntos extremos. Más aún, $f|_L(x) = g|_L(x)$ para estos puntos extremos. Por un razonamiento similar al mostrado anteriormente, se concluye que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in L$. Como x es arbitrario, lo anterior se cumple para todo $x \in I_1 \times I_2$. ■

La proposición anterior será de utilidad en la demostración de una de las propiedades de las proyecciones. Observe que esta garantiza que para verificar la igualdad entre dos funciones con la propiedad (AF), basta mirar si las funciones son iguales en los vértices del cuadrado H .

Lema 2.13 Sean $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, H el cuadrado con centro en (y_1, y_2) dado por (2.2) para algún $0 < R < \infty$, y sea $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U_H \subset \text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Entonces

$$L(\Lambda(f)) = L(f|_{U_H}).$$

La demostración del Lema 2.13 requiere el uso del siguiente teorema clásico de análisis de \mathbb{R}^n .

Teorema 2.14 Sea $[a, b]$ un segmento de \mathbb{R}^n y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una función continua en $[a, b] \subset A^\circ$ y diferenciable en (a, b) . Si para algún $M \geq 0$ se tiene que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M, \quad \forall x \in (a, b); \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, n,$$

entonces

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq M \|b - a\|_1.$$

(ver [8, pág. 115])

Demostración del Lema 2.13: Se sigue claramente de la definición que $\Lambda(f)$ es diferenciable en el interior de H . Queremos probar que para cualquier $x = (x_1, x_2)$ en el interior

de H

$$\left| \frac{\partial \Lambda(f)}{\partial x_i}(x) \right| \leq L(f|_{U_H}) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

En efecto, realizando los respectivos cálculos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(f)}{\partial x_1}(x) &= \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{1}{R} \right) f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(-\frac{1}{R} \right) f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{1}{R} \right) f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(-\frac{1}{R} \right) f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right), \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(f)}{\partial x_1}(x) &= \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{1}{R} \right) \left[f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) - f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 + \frac{R}{2} \right) \right] \\ &\quad + \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) \left(\frac{1}{R} \right) \left[f \left(y_1 + \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right) - f \left(y_1 - \frac{R}{2}, y_2 - \frac{R}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Lambda(f)}{\partial x_1}(x) \right| &\leq \left(\frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) L(f|_V) + \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + \frac{R}{2}}{R} \right) L(f|_{U_H}) \\ &= L(f|_{U_H}). \end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos que

$$\left| \frac{\partial \Lambda(f)}{\partial x_2}(x) \right| \leq L(f|_{U_H}).$$

Por lo tanto, del Teorema 2.14, se obtiene que, para cualesquiera $u, v \in H$

$$|\Lambda(f)(u) - \Lambda(f)(v)| \leq L(f|_{U_H}) \|u - v\|.$$

De esto que

$$L(\Lambda(f)) \leq L(f|_{U_H}).$$

La otra desigualdad es inmediata del hecho que $\Lambda(f)|_{U_H} = f|_{U_H}$. Luego $L(f|_{U_H}) =$

$$L(\Lambda(f)|_{U_H}) \leq L(\Lambda(f)). \quad \blacksquare$$

2.1.2. Función auxiliar Φ

Debido a que construiremos una sucesión de proyecciones de forma inductiva, debemos ir aumentando la cantidad de proyecciones de forma gradual, para este fin iremos dividiendo cuadrados en subcuadrados más pequeños. Lo anterior aumentará la cantidad de vértices de la malla (la cual no es más que un subconjunto de $\mathbb{Q}^2 \cap [-1, 1]^2$). Seguidamente, iremos tomando estos nuevos vértices que se forman al realizar las respectivas divisiones. Para garantizar que al ir refinando la malla la constante Lipschitz no aumenta necesitamos una función auxiliar que denotaremos por Φ , la cual nos permitirá tener control sobre las constantes Lipschitz de las funciones. A continuación se mencionan las propiedades de esta función auxiliar.

Lema 2.15 *Sea $(z_1, z_2) \in \ell_1^2$ y $t \in (0, \infty)$. Definimos*

$$G^0 = \{(z_1 + t, z_2 + t), (z_1 - t, z_2 + t), (z_1 + t, z_2 - t), (z_1 - t, z_2 - t)\}$$

$$G^1 = \{(z_1, z_2 + t), (z_1, z_2 - t), (z_1 + t, z_2), (z_1 - t, z_2)\}$$

$$G^2 = \{(z_1, z_2)\},$$

y para $x \in G^j$ con $j \in \{1, 2\}$, sea

$$A_x = \{x' \in G^{j-1} : \|x' - x\| = t\}.$$

Además, sea $V \subset \bigcup_{i=0}^2 G^i$ tal que $G^0 \subset V$ y tal que si $V \cap G^j \neq \emptyset$ para algún $j \in \{1, 2\}$, entonces $\bigcup_{i=0}^{j-1} G^i \subset V$. Si f es una función de valores reales en V y si $\Phi(f) : \bigcup_{i=0}^2 G^i \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in V, \\ \sum_{x' \in A_x} \frac{\Phi(f)(x')}{\text{card}(A_x)}, & \text{si } x \in \bigcup_{i=0}^2 G^i \setminus V, \end{cases}$$

entonces

$$L(\Phi(f)) \leq 3L(f).$$

Antes de pasar a la demostración, note que para cada $x \in G^j$, $\text{card}(A_x) = 2j$, de esta forma, para $j = 0$, $\text{card}(A_x) = 0$, para $j = 1$, $\text{card}(A_x) = 2$ y finalmente si $j = 2$, $\text{card}(A_x) = 4$. Esto nos ayudará a facilitar un poco la escritura.

Demostración del Lema 2.15: Comencemos por estimar $L(\Phi(f)|_{G^k})$ para toda $k \in \{0, 1, 2\}$.

Si $k = 0$, como $G^0 \subseteq V$ se tiene que.

$$L(\Phi(f)|_{G^0}) \leq L(f).$$

Analicemos el caso $k = 1$. Sean $x, y \in G^1$ con $x \neq y$. Observe que $\|x - y\| = 2t$.

Ahora, para este caso tenemos tres situaciones.

Si $x, y \in V$, el resultado es inmediato de la definición de $\Phi(f)$.

Supongamos que $x \in V$ y $y \notin V$. Entonces

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &= \left| f(x) - \sum_{y' \in A_y} \frac{f(y')}{2} \right| \\ &= \left| \sum_{y' \in A_y} \frac{f(x)}{2} - \sum_{y' \in A_y} \frac{f(y')}{2} \right| \\ &\leq \sum_{y' \in A_y} \frac{|f(x) - f(y')|}{2} \\ &\leq \sum_{y' \in A_y} \frac{L(f)\|x - y'\|}{2} \\ &\leq \sum_{y' \in A_y} \frac{L(f)(\|x - y\| + \|y - y'\|)}{2} \\ &\leq \sum_{y' \in A_y} \frac{L(f)(\|x - y\| + t)}{2} \\ &\leq L(f)(\|x - y\| + t) \leq \frac{3}{2}L(f)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x, y \notin V$, sea i_x el elemento $i \in \{1, 2\}$ tal que $x_i = z_i$ y sea i_y el elemento $i \in \{1, 2\}$ tal que $y_i = z_i$.

Si $i_x = i_y$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &\leq \left| \frac{f(x + e_{i_x}t)}{2} + \frac{f(x - e_{i_x}t)}{2} - \frac{f(y + e_{i_y}t)}{2} - \frac{f(y - e_{i_y}t)}{2} \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x + e_{i_x}t)}{2} - \frac{f(y + e_{i_x}t)}{2} \right| + \left| \frac{f(x - e_{i_x}t)}{2} - \frac{f(y - e_{i_x}t)}{2} \right| \\
&\leq \frac{L(f)\|(x + e_{i_x}t) - (y + e_{i_x}t)\|}{2} + \frac{L(f)\|(x - e_{i_x}t) - (y - e_{i_x}t)\|}{2} \\
&\leq L(f)\|x - y\| \\
&\leq \frac{3}{2}L(f)\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Si $i_x \neq i_y$ para toda $i \in \{1, 2\}$, no es difícil ver que existen cuatro posibilidades $y + e_1t = x + e_2t$, $y - e_1t = x + e_2t$, $y + e_1t = x - e_2t$ o $y - e_1t = x - e_2t$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_2 = z_2$, $y_1 = z_1$ (lo anterior se debe a que no puede ocurrir que $i_x = i_y$, si $x_1 = z_1$, $y_2 = z_2$) y que $y + e_1t = x - e_2t$ (si tomamos $y + e_1t = x - e_2t$, podemos realizar cálculos análogos a los realizados a continuación). Tenemos

$$\begin{aligned}
|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &\leq \left| \frac{f(x + e_2t)}{2} + \frac{f(x - e_2t)}{2} - \frac{f(y + e_1t)}{2} - \frac{f(y - e_1t)}{2} \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x + e_2t)}{2} - \frac{f(y - e_1t)}{2} \right| \\
&\leq \frac{L(f) \|(x + e_2t) - (y - e_1t)\|}{2} \\
&\leq \frac{L(f)(\|x - y\| + 2t)}{2} \\
&= L(f)\|x - y\| \\
&\leq \frac{3}{2}L(f)\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, el caso $k = 2$ es directo dado que el conjunto G^2 es degenerado.

Ahora, analicemos el caso en el que $x \in G^i$ y $y \in G^j$ con $i \neq j$. Observe que si $x, y \in V$, el resultado es inmediato. Por tal motivo basta analizar los casos en los que al menos uno de los dos elementos no está en V .

Para empezar, supongamos que $x \in G^0$, $y \in G^1$ y $y \notin V$. Se tiene que

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| = \left| \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} - \frac{f(y_1)}{2} - \frac{f(y_2)}{2} \right|,$$

donde $y_1, y_2 \in A_y$. Luego

$$\frac{L(f)\|x - y_1\|}{2} + \frac{L(f)\|x - y_2\|}{2} \leq L(f)t \leq \frac{3}{2}L(f)\|x - y\|.$$

La primera desigualdad se debe a que por definición y_1 y y_2 están en G^0 y por tanto

$\|x - y_i\| \leq t$ para $i \in \{1, 2\}$; la segunda del hecho que $\|x - y\| = 2t$.

Supongamos que $x \in G^1$, $y \in G^2$.

Caso 1: Si $x \in V$ y $y \notin V$.

Por definición de A_y , se tiene que $A_y = G^1$ y por lo tanto $x \in A_y$. Sean y'_1, y'_2, y'_3 los tres elementos restantes de A_y . Entonces,

$$\begin{aligned}
 |\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &= \left| f(x) - \sum_{y' \in A_y} \frac{\Phi(f)(y')}{4} \right| \\
 &= \left| 4 \frac{f(x)}{4} - \sum_{y' \in A_y} \frac{\Phi(f)(y')}{4} \right| \\
 &= \left| 4 \frac{f(x)}{4} - \frac{f(x)}{4} - \frac{\Phi(f)(y'_1)}{4} - \frac{\Phi(f)(y'_2)}{4} - \frac{\Phi(f)(y'_3)}{4} \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^3 \frac{|f(x) - \Phi(f)(y'_i)|}{4} \\
 &\leq \sum_{i=1}^3 \frac{L(f)\|x - y'_i\|}{4}.
 \end{aligned}$$

Si $j \in \{1, 2, 3\}$ es tal que $\|x - y'_j\| = \max\{\|x - y'_i\| : i \in \{1, 2, 3\}\}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
 |\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &\leq \frac{3}{4}L(f)\|x - y'_j\| \\
 &\leq \frac{3}{4}L(f)(\|x - y\| + \|y - y'_j\|) \\
 &\leq \frac{3}{4}L(f)(\|x - y\| + \|x - y\|) = \frac{3}{2}L(f)\|x - y\|.
 \end{aligned}$$

Caso 2: Si $x, y \notin V$, considerando nuevamente x, y'_1, y'_2 y $y'_3 \in A_y$ como antes,

tenemos

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &= \left| 4 \frac{\Phi(f)(x)}{4} - \frac{\Phi(f)(x)}{4} - \frac{\Phi(f)(y'_1)}{4} - \frac{\Phi(f)(y'_2)}{4} - \frac{\Phi(f)(y'_2)}{4} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \frac{|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y'_i)|}{4}. \end{aligned}$$

Como x y $y'_i \in A_y = G_1$, tenemos que $|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y'_i)| \leq \frac{3}{2}L(f)\|x - y'_i\|$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Considerando nuevamente $\|x - y_j\|$ como el máximo de los $\|x - y_i\|$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| &\leq \frac{9}{8}L(f)\|x - y'_j\| \\ &\leq \frac{9}{8}L(f)(\|x - y\| + \|y - y'_j\|) \\ &\leq \frac{9}{4}L(f)\|x - y\| \leq 3L(f)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Finalmente, si tomamos $x \in G^0$ y $y \in G^2$ con $y \notin V$, tomando y'_1, y'_2, y'_3 y $y'_4 \in A_y = G_1$ obtenemos

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| = \left| f(x) - \sum_{i=1}^4 \frac{\Phi(f)(y'_i)}{4} \right| \leq \sum_{i=1}^4 \frac{|f(x) - \Phi(f)(y'_i)|}{4}.$$

Como $x \in G^0$ y $y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 \in A_y = G^1$, se sigue que

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(f)(y)| \leq \frac{3L(f) \max\{\|x - y'_i\| : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}}{2} \leq 3L(f)\|x - y\|.$$

Esto culmina la demostración del lema. ■

Una vez enunciadas estas dos herramientas que serán cruciales para lo que resta de este trabajo podemos abordar la siguiente proposición.

Proposición 2.16 $\mathcal{F}(B_{\ell_2^2})$ admite base de Schauder.

Demostración: Recordemos que para esta parte X denota el conjunto $[-1, 1]^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Dado que $B_{\ell_1^2}$ es isométricamente isomorfa a $(-1, 1) \times (-1, 1)$ y éste último es denso en X , basta realizar la demostración para $\mathcal{F}([-1, 1]^2)$.

Construiremos inductivamente la sucesión de proyecciones $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ mencionadas al inicio de este capítulo para el espacio dual $\text{Lip}_0(X)$.

Para empezar definimos a

$$M_1^1 = \mathbb{Z}^2 \cap [-1, 1]^2 = \{-1, 0, 1\}^2.$$

Gráficamente tenemos la siguiente situación:

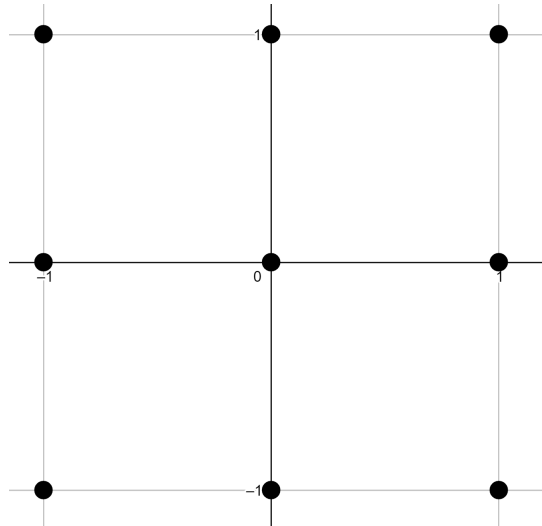


Figura 2.3: Gráfica de M_1^1

De ahora en adelante llamaremos al conjunto M_1^1 (o de forma general M_n^k) como la malla del conjunto X .

Ahora, sean $p_1^1 = -1$, $q_1^1 = 1$ y $p_1^2 = q_1^2 = 0$. Consideremos el conjunto $F_1 \subset X$ dado por

$$F_1 = \prod_{i=1}^2 [p_1^i, q_1^i] = [-1, 1] \times \{0\}.$$

Si $r_1^1 = -1$ y $s_1^1 = 1$ y $r_1^2 = s_1^2 = 0$, entonces podemos considerar el conjunto E_1 dado por

$$E_1 = \prod_{i=1}^2 [r_1^i, s_1^i] = [-1, 1] \times \{0\}.$$

Así $E_1 = F_1$ en este caso.

Para introducir la primera proyección necesitamos la función auxiliar $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. No es difícil ver que φ es 1-Lipschitz. Ahora, sea el conjunto de vértices $V_1 = M_1^1 \cap F_1$. Note que

$$W_1 = (M_1^1 \cap F_1) \setminus V_1 = \emptyset.$$

Finalmente para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$ y $x \in X$, sea

$$P_1(f)(x) = \Lambda(f \circ \varphi, H)(\pi_{F_1}(x)),$$

donde $H = [-1, 0] \times \{0\}$ o $H = [0, 1] \times \{0\}$.

2.1.3. Ampliación de los conjuntos F_n y V_n

En esta parte, la idea es ampliar el conjunto F_1 hasta que se cubra todo el conjunto X y también ampliar el conjunto de vértices V_1 hasta tomar todos los puntos del conjunto M_1^1 .

Nota 2.17 De ahora en adelante nos referiremos a los cuadrados H de F_n para indicar el conjunto de todos los cuadrados en F_n de manera que $U_H \in M_n^1 \cap F_n$ (o $M_n^k \cap F_n$ para el caso general).

Supongamos que para el paso $n - 1$, se tiene que

$$V_{n-1} \subset M_{n-1}^1. \tag{2.6}$$

Tomamos

$$M_n^1 = M_{n-1}^1.$$

Ahora partiremos el proceso de ampliar el conjunto F_n y adicionar vértices en los casos en que $W_{n-1} = \emptyset$ y $W_{n-1} \neq \emptyset$.

Si $W_{n-1} = \emptyset$, tomamos $p_n^1 = p_{n-1}^1$ y $q_n^1 = q_{n-1}^1$. Además, sea $r_n^i = p_{n-1}^i$ y $s_n^i = q_{n-1}^i$ para $i \in \{1, 2\}$. Si $p_{n-1}^2 > -1$ defina $p_n^2 = -1$ y $q_n^2 = q_{n-1}^2$. Caso contrario, es decir si $p_{n-1}^2 = -1$, tomamos $p_n^2 = p_{n-1}^2$ y $q_n^2 = q_{n-1}^2 + 1$. Tomando los puntos extremos de los intervalos continuamos definiendo

$$F_n = \prod_{i=1}^2 [p_n^i, q_n^i]$$

y

$$E_n = \prod_{i=1}^2 [r_n^i, s_n^i].$$

De esta forma definimos ahora

$$V_n = V_{n-1} \cup \{<_{\text{máx}} (M_n^1 \cap (F_n \setminus E_n))\},$$

donde $\{<_{\text{máx}} (M_n^1 \cap (F_n \setminus E_n))\}$ indica el máximo del conjunto $M_n^1 \cap (F_n \setminus E_n)$ considerando el orden lexicográfico. Sea

$$W_n = (M_n^1 \cap F_n) \setminus V_n.$$

Seguidamente, para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$, definimos $\Phi_n : (M_n^1 \cap F_n) = V_n \cup W_n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_n(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in V_n, \\ f(\pi_{E_n}(x)), & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Finalmente, P_n está dado para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$ y $x \in X$ por

$$P_n(f)(x) = \Lambda(\Phi_n(f), H)(\pi_{F_n}(x)),$$

donde H es un cuadrado de F_n tal que $\pi_{F_n}(x) \in H$.

Por otra parte, si $W_{n-1} \neq \emptyset$, entonces para cada $i \in \{1, 2\}$, tome $p_n^i = p_{n-1}^i$, $q_n^i = q_{n-1}^i$, $r_n^i = r_{n-1}^i$ y $s_n^i = s_{n-1}^i$. De este modo F_n y E_n coinciden con F_{n-1} y E_{n-1} respectivamente.

Sea

$$V_n = V_{n-1} \cup \{<_{\text{máx}} (W_{n-1})\}$$

y

$$W_n = W_{n-1} \setminus V_n = (M_n^1 \cap F_n) \setminus V_n.$$

Para $f \in \text{Lip}_0(X)$, definimos $\Phi_n : (M_n^2 \cap F_n) \cup V_n \cup W_n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_n(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in V_n, \\ f(\pi_{E_n}(x)), & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Entonces, la función P_n para $f \in \text{Lip}_0(X)$ y $x \in X$ está dada por la misma fórmula de antes, es decir

$$P_n(f)(x) = \Lambda(\Phi_n(f), H)(\pi_{F_n}(x)), \quad (2.9)$$

donde H es una sub-celda de F_n tal que $\pi_{F_n}(x) \in H$.

Observación 2.18 Es inmediato de la definición de la función Λ que la función $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado de F_n .

El procedimiento anterior finaliza cuando $V_n = M_n^1$. Se puede verificar realizando las respectivas cuentas que esto ocurre cuando $n = 7$. Además, a partir de $n = 5$ se tiene que $F_n = X$. A continuación, mostramos una tabla en la que se describen de forma explícita cada uno de los conjuntos descritos en el ejemplo anterior.

n	F_n	E_n	V_n	W_n
1	$[-1, 1] \times \{0\}$	$[-1, 1] \times \{0\}$	$\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$	\emptyset
2	$[-1, 1] \times [-1, 0]$	$[-1, 1] \times \{0\}$	$V_1 \cup \{(1, -1)\}$	$\{(-1, -1), (0, -1)\}$
3	$[-1, 1] \times [-1, 0]$	$[-1, 1] \times \{0\}$	$V_2 \cup \{(0, -1)\}$	$\{(-1, -1)\}$
4	$[-1, 1] \times [-1, 0]$	$[-1, 1] \times \{0\}$	$V_3 \cup \{(-1, -1)\}$	\emptyset
5	$[-1, 1] \times [-1, 1]$	$[-1, 1] \times [-1, 0]$	$V_4 \cup \{(1, 1)\}$	$\{(-1, 1), (0, 1)\}$
6	$[-1, 1] \times [-1, 1]$	$[-1, 1] \times [-1, 0]$	$V_5 \cup \{(0, 1)\}$	$\{(-1, 1)\}$
7	$[-1, 1] \times [-1, 1]$	$[-1, 1] \times [-1, 0]$	$V_7 \cup \{(-1, 1)\}$	\emptyset

Cuadro 2.1: Representación de los conjuntos mencionados en la construcción anterior.

A forma de universalizar la escritura se usará en ocasiones la notación F_n o $\pi_{F_n}(x)$, entiendo de esta manera que si $n \geq 5$, entonces $F_n = X$ y $\pi_{F_n}(x) = x$.

Ahora procederemos a cubrir todo el conjunto X ; esto lo haremos dividiendo la malla M_n^1 en cuadrados de aristas cada vez más pequeñas. A medida que vayamos refinando la malla, también iremos refinando las proyecciones.

2.1.4. Refinamiento de la malla y las proyecciones

El proceso de refinamiento lo realizaremos disminuyendo la longitud de la arista de los cuadrados haciéndolas cada vez más y más pequeñas.

Supongamos que hemos finalizado el proceso de ampliación del conjunto y queremos definir la siguiente familia de proyecciones. Para el paso n

$$M_{n-1}^2 \subseteq V_{n-1}$$

y

$$V_{n-1} \subseteq \left\{ \frac{1}{2}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cap X.$$

Definimos

$$M_n^2 = \left\{ \frac{1}{2}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cap X.$$

Geométicamente, el conjunto M_n^2 se puede ver en la siguiente figura. Ahora realizaremos

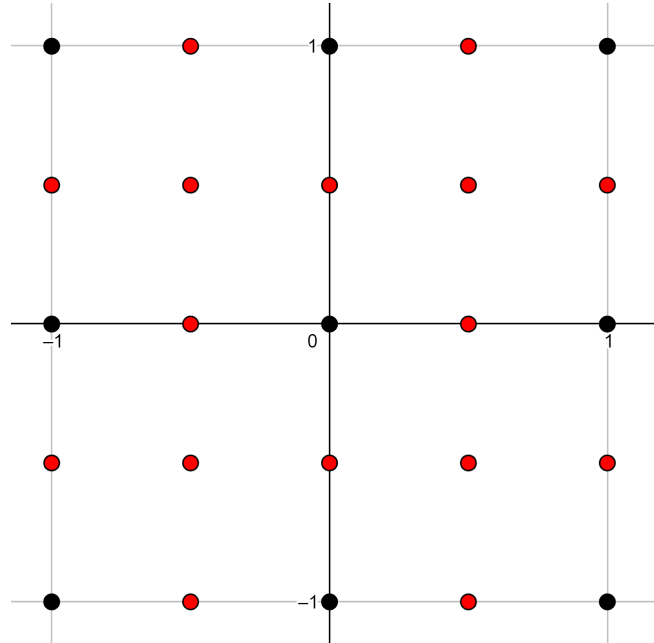


Figura 2.4: Gráfica de M_n^2

una partición del conjunto M_n^2 en una colección de subconjuntos $\{G_2^i : i \in \{0, 1, 2\}\}$ como sigue:

$$G_2^0 = \{x \in M_n^2 : \text{card}(\{i \in \{1, 2\} : 2x_i \in 2\mathbb{Z}\}) = 2\};$$

$$G_2^1 = \{x \in M_n^2 : \text{card}(\{i \in \{1, 2\} : 2x_i \in 2\mathbb{Z}\}) = 1\};$$

$$G_2^2 = \{x \in M_n^2 : \text{card}(\{i \in \{1, 2\} : 2x_i \in 2\mathbb{Z}\}) = 0\}.$$

A continuación presentamos una gráfica de dicha partición.

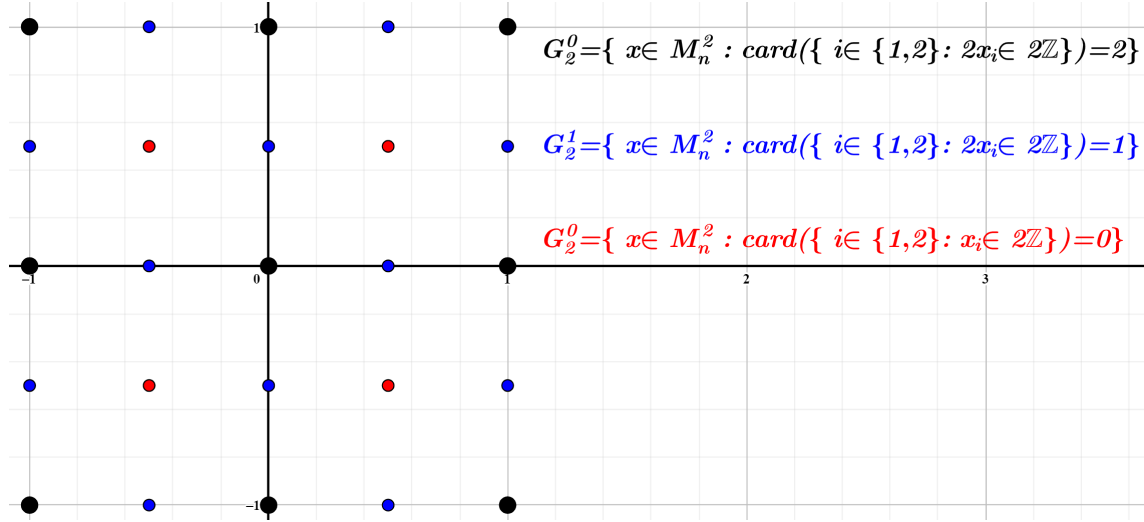


Figura 2.5: Gráfica de la partición del conjunto M_n^2

Note que $G_2^0 = M_{n-1}^1 = \mathbb{Z}^2 \cap X$. Además, tenemos que $M_n^2 = \bigcup_{i=0}^2 G_2^i$.

Dado $x \in G_2^j$ para algún $j \in \{1, 2\}$, definimos

$$A_x = \{x' \in G_2^{j-1} : \|x' - x\| = 2^{-1}\}.$$

Como

$$V_{n-1} \subsetneq \left\{ \frac{1}{2}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cap X,$$

el conjunto $\{i \in \{0, 1, 2\} : G_2^i \not\subseteq V_{n-1}\}$ es no vacío. Sea l_n su elemento mínimo. Sea entonces

$$V_n = V_{n-1} \cup \{<_{\min} (G_2^{l_n} \setminus V_{n-1})\}.$$

Para $f \in \text{Lip}_0(X)$ definimos $\Phi_n(f) : M_n^2 = \bigcup_{i=0}^2 G_2^i \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_n(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in V_n, \\ \sum_{x' \in A_x} \frac{\Phi_n(f)(x')}{\text{card}(A_x)}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

De forma similar a los casos anteriores, para $f \in \text{Lip}_0(X)$ y $x \in X$, sea

$$P_n(f)(x) = \Lambda(\Phi_n(f), H)(\pi_{F_n}(x)) = \Lambda(\Phi_n(f), H)(x),$$

donde H es un cuadrado de $F_n = X$ de manera que $U_H \in M_n^2$.

De forma general, sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Supongamos que estamos comenzando el proceso de refinamiento de una iteración o que estamos en medio de este; es decir, supongamos que para el paso n se tienen las siguientes dos condiciones:

$$\{2^{2-k}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2\} \cap X \subseteq V_{n-1} \quad (2.10)$$

y

$$V_{n-1} \subsetneq \{2^{1-k}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2\} \cap X. \quad (2.11)$$

Nota 2.19 Aquí es importante aclarar que la variable k se mantendrá fija hasta que la condición (2.11) se cumpla para el paso n . Cuando la condición (2.11) no se cumpla, aumentaremos el valor de k en 1 y repetimos todo el proceso de refinamiento nuevamente.

Si las condiciones (2.10) y (2.11) se cumplen para el paso n , entonces definimos

$$M_n^k = \{2^{1-k}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2\} \cap X. \quad (2.12)$$

Nuevamente realizamos una partición del conjunto M_n^k en una colección de subconjuntos $\{G_k^i : i \in \{0, 1, 2\}\}$ como sigue:

$$G_k^0 = \{x \in M_n^k : \text{card}(\{i \in \{1, 2\} : 2^{k-1}x_i \in 2\mathbb{Z}\}) = 2\};$$

$$G_k^1 = \{x \in M_n^k : \text{card}(\{i \in \{1, 2\} : 2^{k-1}x_i \in 2\mathbb{Z}\}) = 1\};$$

$$G_k^2 = \{x \in M_n^k : \text{card}(\{i \in \{1, 2\} : 2^{k-1}x_i \in 2\mathbb{Z}\}) = 0\};$$

No es difícil ver que para toda $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, $G_k^0 = \{2^{2-k}\xi : \xi \in \mathbb{Z}^2\} \cap X = M_n^k$.

Así tenemos que $\bigcup_{i=0}^2 G_k^i = M_n^k$. Dado $x \in G_k^j$ donde $j \in \{1, 2\}$, tomamos

$$A_x = \{x' \in G_k^{j-1} : \|x' - x\| = 2^{1-k}\}.$$

Por lo mencionado en (2.11), el conjunto $\{i \in \{0, 1, 2\} : G_k^i \not\subseteq V_{n-1}\}$ es no vacío. Sean l_n su elemento mínimo y

$$V_n = V_{n-1} \cup \{<_{\min} (G_k^{l_n} \setminus V_{n-1})\}.$$

Para $f \in \text{Lip}_0(X)$ definimos $\Phi_n(f) : M_n^k = \bigcup_{i=0}^2 G_k^i \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_n(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in V_n, \\ \sum_{x' \in A_x} \frac{\Phi_n(f)(x')}{\text{card}(A_x)}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2.13)$$

La función $\Phi_n(f)$ está bien definida puesto que se construyó inductivamente en i y $G_k^0 \subset V_n$. De forma similar a los casos anteriores, para $f \in \text{Lip}_0(X)$ y $x \in X$ definimos

$$P_n(f)(x) = \Lambda(\Phi_n(f), H)(\pi_{F_n}(x)) = \Lambda(\Phi_n(f), H)(x),$$

donde H es un cuadrado en $F_n = X$ con vértices en M_n^k .

Nota 2.20 En el procedimiento de refinamiento aunque el conjunto F_n se mantiene fijo después del paso 5 (ya que a partir de este paso $F_n = X$), la longitud de las aristas de los cuadrados en la malla se hacen cada vez más pequeños, es decir, aunque el conjunto se mantiene siendo el mismo después del paso 5 la partición que se hace de este si es diferente para cada k .

Observación 2.21 Tomemos $H = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un cuadrado de F_n y sea $L \subset H$. Supongamos que $L = \{c\} \times [a'_2, b'_2]$, donde $c \in [a_1, b_1]$ y $a_2 \leq a'_2$ y $b'_2 \leq b_2$. Entonces, para todo $x = (c, x_2) \in L$ se tiene que

$$\begin{aligned}
P_n(f)(x) &= \left(\frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \left(\frac{c - y_1 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \Phi_n(f) (y_1 + 2^{1-k}, y_2 + 2^{1-k}) \\
&+ \left(\frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \left(1 - \frac{c - y_1 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \Phi_n(f) (y_1 - 2^{1-k}, y_2 + 2^{1-k}) \\
&+ \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \left(\frac{c - y_1 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \Phi_n(f) (y_1 + 2^{1-k}, y_2 - 2^{1-k}) \\
&+ \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \left(1 - \frac{c - y_1 + 2^{1-k}}{2^{2-k}} \right) \Phi_n(f) (y_1 - 2^{1-k}, y_2 - 2^{1-k}),
\end{aligned}$$

donde (y_1, y_2) es el centro del cuadrado H .

Observe que salvo x_2 , todos los elementos de la expresión anterior son escalares, puede ocurrir que la función $\Phi_n(f)$ necesite realizar más cálculos para hallar su valor. Sin embargo, dichos cálculos no dependen del x que se tome en L , si no de los vértices de H los cuales siempre son fijos para el cuadrado H . Si consideramos $L = [a'_1, b'_1] \times \{c\}$ tendremos un resultado similar, solo que en este caso la variable sería la primera componente. De lo anterior se sigue que $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado en el mosaico de F_n .

2.1.5. Conteo de las proyecciones para el paso de refinamiento k

Antes de pasar a la demostración de las propiedades de las proyecciones, queremos abordar dos preguntas que se puede plantear el lector en esta parte; la primera es, ¿cuántas proyecciones habrá para cada k ? Y la segunda es, ¿cómo saber en que paso iniciaremos dependiendo del k que tomemos?

Para iniciar, estudiemos un poco el caso de $k = 2$ y luego pasaremos al caso general. Recordemos que para $k = 2$, el paso anterior corresponde al último n del proceso de ampliación del conjunto. Éste es, $n = 7$. Así, para $k = 2$ nuestro primer n es 8. Ahora, para determinar en qué proyección n finaliza el paso $k = 2$ de refinamiento debemos

contar la cantidad de vértices que hay en la malla M_8^2 y restar la cantidad de vértices que habían en la malla anterior y por último sumarle el resultado al último paso del proceso anterior (para este caso es el proceso de ampliación, sin embargo, si $k \geq 3$ el proceso anterior siempre será de refinamiento). Como M_8^2 posee 25 vértices en total y M_7^1 posee 9 vértices, entonces, el proceso de refinamiento para $k = 2$ finaliza en el paso $n = 25 - 9 + 7 = 23$ y para este paso se definen $25 - 9$ proyecciones debido a que éstas están determinadas por la cantidad de nuevos vértices que se adicionaron a la malla.

En este orden de ideas, para responder las dos preguntas basta contar la cantidad de vértices que habrá en cada malla para el paso de refinamiento $k \in \mathbb{N}$. Más aún, como la malla es cuadrada, basta determinar la cantidad de vértices que hay en uno de los lados de la malla. Para determinar esta cantidad de vértices tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.22 *La cantidad de vértices que hay en uno de los lados del cuadrado formado por la malla para el paso k es $1 + 2^k$.*

Demostración: Procederemos realizando inducción matemática sobre k . Para $k = 1$ tenemos que $1 + 2^k = 1 + 2^1 = 3$; como se vio en la Figura 2.2 este corresponde al número de vértices que hay en uno de los lados del cuadrado formado por la malla para $k = 1$.

Supongamos que para $k = m - 1$ se cumple que el número de vértices que hay en uno de los lados del cuadrado formado por la malla para el paso de refinamiento $k = m - 1$ es $1 + 2^{m-1}$. Ahora supongamos que aumentamos el paso de refinamiento a $k = m$. Para cada par de vértices que había en uno de los lados de la malla en el paso $k = m - 1$ debemos poner un nuevo vértice en el medio de dichos puntos. Luego, la cantidad de vértices que adicionamos corresponde a la cantidad de vértices que había en el paso anterior menos 1. De esto que la cantidad de vértices que hay en un de los lados del cuadrado formado por

la malla para el paso $k = m$ es

$$1 + 2^{m-1} + (2^{m-1}) = 1 + 2 \cdot 2^{m-1} = 1 + 2^m.$$

Esto culmina la demostración. ■

Corolario 2.23 *La cantidad de vértices que tiene la malla en el paso k es $(1 + 2^k)^2$.*

Demostración: Si la cantidad de vértices que hay en uno de los lados del cuadrado formado por los puntos de la malla para el paso de refinamiento k es $1 + 2^k$, entonces la malla posee en total $(1 + 2^k)^2$ vértices. ■

Para responder la primera pregunta, sencillamente debemos restar la cantidad de vértices que había en la malla anterior de la cantidad de vértices que hay en la nueva malla para el paso k . Esto es para cada $k \in \mathbb{N}$ la cantidad de proyecciones que hay es

$$(1 + 2^k)^2 - (1 + 2^{k-1})^2 = (1 + 2^{k+1} + 2^{2k}) - (1 + 2^k + 2^{2k-2}) = 2^k + 3 \cdot 2^{2k-2}.$$

Observación 2.24 Para saber en que paso n iniciamos al aumentar el paso de refinamiento k , sencillamente debemos ver que el paso $n - 1$ finaliza en el número de vértices de la malla menos 2. Luego, si denotamos por n_0^k el primer índice de las proyecciones para el paso de refinamiento k , entonces

$$n_0^k = (1 + 2^{k-1})^2 - 1.$$

Para finalizar esta sección estudiaremos como determinar el valor de k si inicialmente tenemos el paso n . Esta es quizá la herramienta más útil, ya que gracias al valor de k determinamos la longitud de las aristas de los cuadrados en la malla M_n^k y el conjunto de vértices de los mismos. Para este hecho tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.25 Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. El valor k del paso de refinamiento para el paso n está determinado por

$$k = \lfloor \log_2(\sqrt{n+1} - 1) + 1 \rfloor.$$

Demostración: Veamos que $k \leq \log_2(\sqrt{n+1} - 1) + 1 < k + 1$. En efecto, de la Observación 2.24 tenemos que $(1 + 2^{k-1})^2 - 1 \leq n$ y del Corolario 2.23 tenemos que $n < (1 + 2^k)^2 - 1$.

Luego

$$(1 + 2^{k-1})^2 - 1 \leq n < (1 + 2^k)^2 - 1$$

$$(1 + 2^{k-1})^2 \leq n + 1 < (1 + 2^k)^2.$$

Como $n \geq 3$ y $k \geq 1$ se tiene que

$$1 + 2^{k-1} \leq \sqrt{n+1} < 1 + 2^k$$

$$2^{k-1} \leq \sqrt{n+1} - 1 < 2^k$$

$$k - 1 \leq \log_2(\sqrt{n+1} - 1) < k$$

$$k \leq \log_2(\sqrt{n+1} - 1) + 1 < k + 1.$$

Con lo cual queda finalizada la prueba. ■

2.1.6. Prueba de las propiedades de la sucesión de proyecciones

Ahora procedemos a demostrar que la sucesión de operadores lineales definidos anteriormente satisface las condiciones mencionadas al inicio de la Sección 2.1 del presente capítulo.

Afirmación 2.26 La sucesión $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de operadores lineales de rango finito en $\text{Lip}_0(X)$.

Demostración: Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es un operador lineal acotado de $\text{Lip}_0(X)$ en $\text{Lip}_0(X)$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \text{Lip}_0(X)$. Como $(0, 0) \in V_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} P_n(f)(0, 0) &= \Lambda(\Phi_n(f))(0, 0) \\ &= \Phi_n(f)(0, 0) \\ &= f(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea H un cuadrado en F_n y sea U_H el conjunto de vértices de dicho cuadrado. Queremos probar que

$$L(P_n(f)|_{U_H}) \leq 3L(f).$$

En virtud del Lema 2.13 y de la definición de los P_n se sigue que

$$L(P_n(f)) \leq 3L(f).$$

Lo anterior lo realizaremos partiendo en casos.

Caso 1: Supongamos que para el paso n , se tiene que $V_n = M_n^k$ (recordemos que el valor de k está ligado al valor de la n). Entonces $U_H \subset V_n$ y por lo tanto

$$P_n(f)|_{U_H} = f|_{U_H}.$$

Consecuentemente

$$L(P_n(f)|_{U_H}) \leq 3L(f).$$

Caso 2: Supongamos que $V_n \subset M_n^k$ y sea $\Phi_n(f)$ la función auxiliar en $M_n^k \cap F_n = V_n \cup W_n$ definida en (2.8) (note que este caso está determinado solo para proceso de ampliación del conjunto). Sean $x, y \in U_H$, tales que $x \neq y$. Por definición de Φ_n , tenemos que

$$\Phi_n(f)(x) = f(\tilde{x}) \text{ y } \Phi_n(f)(y) = f(\tilde{y}),$$

donde

$$\tilde{x} = \begin{cases} x, & \text{si } x \in V_n; \\ \pi_{E_n}(x), & \text{si } x \in W_n. \end{cases}$$

y

$$\tilde{y} = \begin{cases} y, & \text{si } y \in V_n; \\ \pi_{E_n}(y), & \text{si } y \in W_n. \end{cases}$$

Observe que $\|\tilde{y} - y\|, \|\tilde{x} - x\| \in \{0, 1\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\Phi_n(f)(x) - \Phi_n(f)(y)| &\leq L(f)\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \\ &\leq L(f)(\|\tilde{x} - x\| + \|x - y\| + \|y - \tilde{y}\|) \\ &\leq L(f)(1 + \|x - y\| + 1) \\ &\leq 3L(f)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Así,

$$L(P_n(f)|_{U_H}) = L(\Phi_n(f)|_{U_H}) \leq 3L(f).$$

Caso 3: Supongamos ahora que para el paso n se tienen (2.10) y (2.11). De la definición de P_n y de los Lemas 2.13 y 2.15 se sigue:

$$\begin{aligned} L(P_n(f)|_{U_H}) &= L(\Lambda(\Phi_n(f)|_{U_H}, H)) \\ &\leq L(\Phi_n(f)|_{U_H}) \\ &\leq L(\Phi_n(f)) \\ &\leq 3L(f). \end{aligned}$$

Luego para toda $n \in \mathbb{N}$, P_n es una función acotada de $\text{Lip}_0(X)$ en $\text{Lip}_0(X)$. La linealidad de P_n se sigue directamente de la definición.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $f \in \text{Lip}_0(X)$, la función $P_n(f)$ está únicamente determinada por los valores de f en el conjunto finito V_n , el operador lineal P_n es de rango finito.

Más aún, la sucesión $(P_n)_{n=1}^\infty$ está uniformemente acotada porque $\|P_n\| \leq 3$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por lo mencionado anteriormente. ■

Afirmación 2.27 *Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos que $P_m P_n = P_{\min\{n, m\}}$.*

Demostración: Tomemos $m, n \in \mathbb{N}$ y $f \in \text{Lip}_0(X)$ y supongamos que $m \leq n$. Como la imagen del operador P_m está únicamente determinada por los valores de ésta en el conjunto V_m , $V_m \subseteq V_n$ y P_n coincide con f en los valores de V_n , se tiene que $P_m(P_n(f)) = P_m(f)$.

Supongamos que $m > n$ y sea $f \in \text{Lip}_0(X)$. Queremos probar que $P_m(P_n(f)) = P_n(f)$. Para este propósito basta probar que $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado de F_m y que $P_m(P_n(f)) = P_n(f)$ en los vértices de esos cuadrados. Entonces por la Proposición 2.12, obtenemos así que $P_m(P_n(f)) = P_n(f)$ en F_m .

Ahora, observe que, si para todo $x \in F_m$ se cumple que $P_m(P_n(f))(x) = (P_n(f))(x)$, entonces $P_m(P_n(f))(\pi_{F_m}(x)) = (P_n(f))(\pi_{F_m}(x))$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, por el hecho de que $\pi_{F_m} \pi_{F_n} = \pi_{F_{\min\{m, n\}}}$ tendremos que

$$\begin{aligned}
 P_m(P_n(f))(x) &= P_m(P_n(f))(\pi_{F_m}(x)) \\
 &= P_n(f)(\pi_{F_m}(x)) \\
 &= P_n(f)(\pi_{F_n}(\pi_{F_m}(x))) \\
 &= P_n(f)(\pi_{F_n}(x)) = P_n(f)(x)
 \end{aligned}$$

para toda $x \in X$.

De esta manera, procedamos a demostrar que $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) cada cuadrado de F_m y que coincide con $P_m(f)$ en los vértices de dichos cuadrados.

Iniciamos estudiando $P_1(f)$ en los cuadrados de F_m . Recordemos que definimos $P_1(f)(x) = \Lambda(f \circ \varphi, H)(\pi_{F_1}(x))$, donde la función φ estaba dada por $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ para $(x_1, x_2) \in H$. Sea H un cuadrado de F_m y sea L un subconjunto de H con un lado paralelo a uno de los ejes coordenados. La imagen de $\varphi(L)$ es un punto o es un segmento de recta contenido en $[-1, 1] \times \{0\}$. En cualquiera de los dos casos, se sigue de la definición que $P_1(f)$ es afín en $\varphi(L)$ y por tanto $P_1(f)$ tiene la propiedad (AF) en H .

Supongamos que en el paso n estamos en el proceso de refinamiento, entonces m también debe estar en el mismo proceso. Ahora, recordemos que $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado de F_n y además cada cuadrado de F_m es un cuadrado cuyas aristas son menores o iguales a algún cuadrado de F_n . De esto que cada cuadrado en F_m está contenido o es igual a un cuadrado de F_n . Por lo tanto $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado de F_m .

Finalmente, supongamos que en el paso n nos encontramos en el proceso de ampliación de los conjuntos F_n y V_n . Si $F_n = X$, el resultado es inmediato del hecho que $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado de F_n y por consiguiente en cualquier otro cuadrado contenido en F_n . Por otra parte, si $F_n = [-1, 1] \times [-1, 0]$, tomemos H un cuadrado de F_m y $L \subset H$ un segmento paralelo a alguno de los ejes coordenados. Claramente si $H \subset F_n$, $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en H por la misma razón que se mencionó anteriormente. Ahora, si $H \subset X \setminus F_n$, entonces $\pi_{F_n}(L)$ es un punto o un segmento de recta en alguno de los conjuntos $[-1, 0] \times \{0\}$ o $[0, 1] \times \{0\}$. Como ambos conjuntos son segmentos paralelos a los ejes coordenados, y ambos están contenidos en un cuadrado en el mosaico de F_n , se

tiene que $P_n(f)$ es afín en L . Es decir, $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en H , como el H es arbitrario, lo anterior se cumple para cualquier cuadrado de F_m .

Con esto hemos terminado la prueba de que $P_n(f)$ tiene la propiedad (AF) en cada cuadrado de F_m .

Ahora, veamos que $P_m(P_n)(f) = P_n(f)$ en los vértices de estos cuadrados.

Inicialmente, supongamos que para el paso m , $M_m^k \cap F_m = V_m$. Si $x \in V_m$, de la definición P_m se tiene que $P_m(P_n(f))(x) = P_n(f)(x)$.

Supongamos que en el paso m nos encontramos en el proceso de ampliación del conjunto. Si $x \in W_m$ (recordemos que en (2.7) y (2.8) se definió W_m como el complemento de V_m), entonces

$$\begin{aligned} P_m(P_n(f))(x) &= \Phi_m(P_n(f))(x) \\ &= P_n(f)(\pi_{E_m}(x)) \\ &= P_n(f)(\pi_{F_n}(\pi_{E_m}(x))). \end{aligned}$$

En esta parte tenemos dos situaciones a analizar. Primero, si $[p_n^i, q_n^i] \subseteq [r_m^i, s_m^i]$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces $\pi_{F_n} \pi_{E_m} = (\pi_{[p_n^1, q_n^1]} \pi_{[r_m^1, s_m^1]}, \pi_{[p_n^2, q_n^2]} \pi_{[r_m^2, s_m^2]}) = (\pi_{[p_n^1, q_n^1]}, \pi_{[p_n^2, q_n^2]}) = \pi_{F_n}$, y por tanto

$$P_m(P_n(f))(x) = P_n(f)(\pi_{F_n}(\pi_{E_m}(x))) = P_n(f)(\pi_{F_n}(x)) = P_n(f)(x).$$

La segunda sería que $[r_m^2, s_m^2] \subsetneq [p_n^2, q_n^2]$. Esto implica que $F_n = F_m$, $W_m \subset W_n$ y $E_n = E_m$.

Luego, nuevamente por la propiedad de conmutación de los π 's, se sigue que

$$P_m(P_n(f))(x) = P_n(f)(\pi_{F_n}(\pi_{E_n}(x))) = P_n(f)(\pi_{F_n}(x)) = P_n(f)(x).$$

Ahora, supongamos que para el paso m estamos en el proceso de refinamiento de la malla y las proyecciones. Denotamos por k_n y k_m el valor de la malla en el que nos

encontramos en el paso n y m respectivamente. Sea H un cuadrado de F_m . Queremos ver que $P_m(P_n(f)) = P_n(f)$ en el conjunto $M_m^{k_m} \cap H = \bigcup_{i=0}^2 G_{k_m}^i \cap H$. Para este propósito analizaremos cada uno de los conjuntos $G_{k_m}^i \cap H$. Por definición

$$P_m(P_n(f)) = \Phi_m(P_n(f)).$$

Recordemos que para el paso m la función Φ_m está dado por:

$$\Phi_m(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in V_m, \\ \sum_{x' \in A_x} \frac{\Phi_n(f)(x')}{\text{card}(A_x)}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

De lo cual se sigue que

$$\Phi_m(P_n(f)) = P_n(f)$$

para $G_{k_m}^0$ puesto que $G_{k_m}^0 \subset V_m$. Supongamos que $x \in (G_{k_m}^1 \cap H) \setminus V_m$. Tenemos

$$\begin{aligned} P_m(P_n(f))(x) &= \Phi_m(P_n(f))(x) \\ &= \sum_{x' \in A_x} \frac{\Phi_m(P_n(f))(x')}{\text{card}(A_x)}. \end{aligned}$$

Como $x' \in A_x \subset G_{k_m}^0$, entonces por lo mencionado anteriormente, se sigue que

$$\begin{aligned} P_m(P_n(f))(x) &= \sum_{x' \in A_x} \frac{P_n(f)(x')}{2} \\ &= \frac{1}{2} [P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_i) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_i)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

para algún $i \in \{1, 2\}$. Veamos que

$$\frac{1}{2} [P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_i) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_i)] = P_n(f)(x).$$

Para este hecho, basta mostrar que $P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_i) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_i) = 2P_n(f)(x)$

para cualquier $i \in \{1, 2\}$. Sea H' un cuadrado de F_n tal que $x \in H'$. Es inmediato que

$H \subset H'$. Denotemos por (y_1, y_2) el centro de H' en F_n y por v_1, v_2, v_3, v_4 sus vértices.

Supongamos que $i = 1$ (los cálculos para $i = 2$ son iguales).

$$\begin{aligned}
P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_1) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_1) &= P_n(f)(x_1 + 2^{1-k_m}, x_2) + P_n(f)(x_1 - 2^{1-k_m}, x_2) \\
&= \left(\frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(\frac{2x_1 + 2^{1-k_m} - 2^{1-k_m} - 2y_1 + 2 \cdot 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_1) \\
&\quad + \left(\frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(2 - \frac{2x_1 + 2^{1-k_m} - 2^{1-k_m} - 2y_1 + 2 \cdot 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_2) \\
&\quad + \left(2 - \frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(\frac{2x_1 + 2^{1-k_m} - 2^{1-k_m} - 2y_1 + 2 \cdot 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_3) \\
&\quad + \left(2 - \frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(2 - \frac{2x_1 + 2^{1-k_m} - 2^{1-k_m} - 2y_1 + 2 \cdot 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_4) \\
&= 2 \left(\frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(\frac{x_1 - y_1 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_1) \\
&\quad + 2 \left(\frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(1 - \frac{x_1 - y_1 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_2) \\
&\quad + 2 \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(\frac{x_1 - y_1 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_3) \\
&\quad + 2 \left(1 - \frac{x_2 - y_2 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \left(1 - \frac{x_1 - y_1 + 2^{1-k_n}}{2^{2-k_n}} \right) \Phi_n(f)(v_4) \\
&= 2P_n(f)(x),
\end{aligned}$$

como se deseaba.

Para finalizar si $x \in (G_{k_m}^2 \cap H) \setminus V_m$, nuevamente

$$\begin{aligned}
P_m(P_n(f))(x) &= \Phi_m(P_n(f))(x) \\
&= \sum_{x' \in A_x} \frac{\Phi_m(P_n(f))(x')}{\text{card}(A_x)}.
\end{aligned}$$

Como $x' \in A_x \subset G_{k_m}^1 \cap H$, por lo mencionado anteriormente, se sigue que

$$\begin{aligned}
P_m(P_n(f))(x) &= \sum_{x' \in A_x} \frac{P_n(f)(x')}{4} \\
&= \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^2 P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_i) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_i) \right], \quad (2.15)
\end{aligned}$$

dado que $A_x = \{x + \varepsilon 2^{1-k_m} e_i : \varepsilon \in \{-1, 1\}, i \in \{1, 2\}\}$.

Por lo visto anteriormente para cada $i \in \{1, 2\}$, $P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_i) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_i) = 2P_n(f)(x)$. Por lo tanto $\frac{1}{4} [\sum_{i=1}^2 P_n(f)(x + 2^{1-k_m} e_i) + P_n(f)(x - 2^{1-k_m} e_i)] = P_n(f)(x)$. Esto concluye la prueba de la identidad

$$P_m(P_n)(f) = P_n(f)$$

en $M_n^{k_m} \cap H$, y dado H fue seleccionado arbitrariamente lo anterior se cumple para toda $M_m^{k_m}$.

Note que la demostración anterior se cumple para cualquier paso en el que se encuentre n .

Finalmente, por la propiedad (AF) de $P_n(f)$ en cada cuadrado de F_m junto con la identidad $P_m(P_n)(f) = P_n(f)$ en los vértices de dichos cuadrados, tenemos que $P_m(P_n)(f) = P_n(f)$ para toda $m > n$ y $f \in \text{Lip}_0(X)$. ■

Afirmación 2.28 Para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$, la sucesión $(P_n(f))_{n=1}^{\infty}$ converge débil* a f .

Demostración: Si $f = 0$, es inmediato de la definición de los P_n que $P_n(f) = 0$ y por tanto $P_n(f) \rightarrow f$ puntualmente. Ahora, supongamos que $f \in \text{Lip}_0(X) \setminus \{0\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Como $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n} = X$, existe una sucesión $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ tal que $x_m \rightarrow x$, de esto que, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{6L(f)} \text{ para toda } m \geq m_0.$$

Además, como $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$, tenemos que si $x_{m'} \in V_{m'}$ para algún $m' \in \mathbb{N}$, entonces $x_{m'} \in V_m$ para toda $m \geq m'$.

Por otra parte, de la continuidad f tenemos que, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x_m) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para toda } m \geq m_1.$$

Sea $m_2 = \text{máx}\{m_0, m_1\}$. Para toda $n \geq m_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} |P_n(f)(x) - f(x)| &\leq |P_n(f)(x) - P_n(f)(x_{m_2})| + |P_n(f)(x_{m_2}) - f(x)| \\ &\leq L(P_n(f))\|x - x_{m_2}\| + |f(x_{m_2}) - f(x)| \\ &< 3L(f) \cdot \frac{\varepsilon}{6L(f)} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que la sucesión $(P_n(f))_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f para cada $f \in \text{Lip}_0(X)$. Ahora, como $\|P_n\| \leq 3$, tenemos que el conjunto $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\text{Lip}_0(X)$. Entonces, por el Teorema 1.27 se sigue que la sucesión $(P_n(f))_{n=1}^{\infty}$ converge a f en la topología débil*. ■

Afirmación 2.29 Para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador P_n es débil* a débil* continuo en subconjuntos acotados de $\text{Lip}_0(X)$.

Demostración: No es difícil ver de la definición de los P_n que si $(f_i)_{i \in I}$ es una red en $\text{Lip}_0(X)$ que converge puntualmente a f para algún $f \in \text{Lip}_0(X)$, entonces la red $(P_n(f_i))_{i \in I}$ converge puntualmente a $P_n(f)$. De lo anterior se sigue que P_n es continuo con la topología de la convergencia puntual para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la topología débil* coincide con la topología de la convergencia puntual en subconjuntos acotados, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador P_n es débil* a débil* continuo en subconjuntos acotados de $\text{Lip}_0(X)$. ■

Afirmación 2.30 Para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador $P_{n+1} - P_n$ es de rango 1.

Demostración: Gracias a la propiedad de conmutación de la sucesión $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ y la linealidad de los operadores P_n ,

$$P_{n+1}(f) - P_n(f) = P_{n+1}(f) - P_{n+1}(P_n(f)) = P_{n+1}(f - P_n(f))$$

en X para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $f \in \text{Lip}_0(X)$. Recordemos que la función $P_{n+1}(f - P_n(f))$ está determinada por los valores de la función $f - P_n(f)$ en el conjunto V_{n+1} . Pero, dado que por definición $P_n(f)$ coincide con f en el conjunto V_n estos valores son cero excepto en $V_{n+1} \setminus V_n$ que es un conjunto unitario. De esto que

$$\dim(\text{Im}(P_{n+1} - P_n)) = 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

De lo anterior tenemos que la sucesión de proyecciones $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma una descomposición de rango finito del conjunto $\text{Lip}_0(X)$. Además, como $\dim \text{Im}(P_{n+1} - P_n) = 1$, esta sucesión está asociada a una base de Schauder del espacio $\text{Lip}_0(X)$. Finalmente como como los operadores P_n son débil* a débil* continuos en subconjuntos acotados de $\text{Lip}_0(X)$, existe una sucesión de operadores lineales $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidos sobre $\mathcal{F}(X)$ tales que $T_n^* = P_n$ para cada n . Dicha sucesión comparte las mis propiedades de $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ y satisface que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(\mathcal{F}(X))^w} = \mathcal{F}(X)$. Pero, dado que $T_m T_n(X) = T_{\min\{m,n\}}(X)$, se tiene que $T_1(\mathcal{F}(X)) \subset T_2(\mathcal{F}(X)) \subset \dots$ y por lo tanto $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(\mathcal{F}(X))} = \mathcal{F}(X)$ como se quería. ■

CAPÍTULO 3

Encajes no Lineales de Subespacios

Extremadamente Regulares

En el año 1932 Banach estudió las isometrías entre los espacios $C(K)$, donde K es un espacio métrico compacto. Años después, Stone amplió este estudio a espacios K no necesariamente métricos. Uno de los resultados de estos estudios es el célebre teorema de Banach-Stone el cual establece que si $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ son isométricos, entonces X y Y son homeomorfos. Este resultado ha inspirado un gran número de generalizaciones y variaciones en diferentes espacios de funciones; por ejemplo Holsztyński (ver [15]) proporcionó una importante extensión de dicho teorema, estableciendo que si $C(X)$ es isométrico a un subespacio de $C(Y)$, entonces X es imagen continua de Y . Varios autores como Jarosz, Galego y Porto da Silva (ver [3] y [4]) estudiaron el problema de extender el teorema de Banach-Stone para isomorfismos no lineales. El objetivo de este capítulo es establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Sea K un espacio compacto Hausdorff, S un espacio localmente compacto Hausdorff y X un espacio de Banach. Supongamos que existe una función T de un*

subespacio extremadamente regular A de $C(K)$ a $C_0(S, X)$ tal que

$$\frac{1}{M}\|f - g\| \leq \|T(f) - T(g)\| \leq M\|f - g\|, \quad \forall f, g \in A, \quad (3.1)$$

con $1 \leq M^2 < S(X)$, entonces existe un subconjunto compacto S_0 de S y una función continua φ de S_0 sobre K .

Este resultado extiende el teorema principal de [4] a subespacios extremadamente regulares de $C(K)$.

Observación 3.2 Cabe aclarar al lector que el trabajo aquí expuesto consta una de una unificación de los métodos usados en [3] y [4], en los cuales se estudiaron afirmaciones similares, pero en casos separados.

Definición 3.3 Sea X un espacio de Banach. La constante de Schäffer $S(X)$ está definida por

$$S(X) := \inf\{\max\{\|x + y\|, \|x - y\|\} : x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

De lo anterior es claro que si $X = \mathbb{R}$, entonces $S(X) = 2$.

Para empezar, introduzcamos el siguiente conjunto dirigido. Sean $k \in K$ y \mathcal{V}_k el conjunto de vecindades abiertas de k . Consideremos el conjunto $I_k = \mathcal{V}_k \times (0, \infty)$ con la relación $(U, t) \leq (V, s)$ siempre que $V \subseteq U$ y $s \leq t$. Si consideramos este conjunto podemos establecer el siguiente lema.

Lema 3.4 Sean A un subespacio extremadamente regular de $C(K)$ y $k \in K$. Consideremos el conjunto dirigido (I_k, \leq) como se mencionó arriba y sea $(f_{(U,t)})_{(U,t) \in I_k}$ una red en A tal que $\text{Im}f_{(U,t)} \subset [0, 1]$, $f_{(U,t)}(k) = \|f_{(U,t)}\| = 1$ y $\|f_{(U,t)}|_{U^c}\| < t$ para todo $U \in \mathcal{V}_k$ y $t \in (0, \infty)$. Entonces, para cualquier $v \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\limsup_{(U,t) \in I_k} \|f - v f_{(U,t)}\| \leq \omega(k, f, v), \quad \forall f \in A.$$

Demostración: Observe que

$$\begin{aligned} \|f - v f_{(U,t)}\| &= \sup_{w \in K} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)| \\ &= \max \left\{ \sup_{w \in U} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)|, \sup_{w \in U^c} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)| \right\}. \end{aligned}$$

Por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{w \in U^c} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)| &\leq \sup_{w \in U^c} \{|f(w)| + |v f_{(U,t)}(w)|\} \\ &\leq \sup_{w \in U^c} |f(w)| + \sup_{w \in U^c} |v f_{(U,t)}(w)| \\ &\leq \|f\| + |v|t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ahora, por la compacidad, para cada $U \in \mathcal{V}_k$, existe $w_U \in \bar{U}$ de manera que

$$\sup_{w \in U} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)| = |f(w_U) - v f_{(U,t)}(w_U)|.$$

Note que la red $(w_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ converge a k . Luego, por la continuidad de f y de los $f_{(U,t)}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \limsup_{(U,t) \in I_k} \left(\sup_{w \in U} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)| \right) &= \limsup_{(U,t) \in I_k} |f(w_U) - v f_{(U,t)}(w_U)| \\ &= \lim_{(U,t) \in I_k} |f(w_U) - v f_{(U,t)}(w_U)| \\ &\leq |f(k) - v|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Así, de la observación inicial y las ecuaciones (3.2) y (3.3) se sigue que

$$\begin{aligned} \limsup_{(U,t) \in I_k} \|f - v f_{(U,t)}\| &= \limsup_{(U,t) \in I_k} \max \left\{ \sup_{w \in U} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)|, \sup_{w \in U^c} |f(w) - v f_{(U,t)}(w)| \right\} \\ &\leq \limsup_{(U,t) \in I_k} \max \{|f(w_U) - v f_{(U,t)}(w_U)|, \|f\| + |v|t\} \\ &\leq \max\{|f(k) - v|, \|f\|\} = \omega(k, f, v). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del resultado. ■

Demostración del teorema principal

En esta sección, presentamos la demostración del Teorema 3.1.

Definición 3.5 Para cada $k \in K$ y $v \in \mathbb{K}$, definimos $\mathcal{N}(k, v)$ como el conjunto de $s \in S$ tal que existe una red $(w_i, z_i)_{i \in I}$ en $X \times X$ de manera que se cumplan las siguientes condiciones

(a) $\|w_i - z_i\| \geq \frac{2|v|}{M}, i \in I.$

(b) Para cada $f \in A,$

$$\limsup_{i \in I} \max\{\|Tf(s) - w_i\|, \|T(-f)(s) - z_i\|\} \leq M\omega(k, f, v).$$

Con esta notación se presenta el siguiente resultado;

Teorema 3.6 Para cada $v \neq 0$ en \mathbb{K} y $k \in K$ tenemos que $\mathcal{N}(k, v) \neq \emptyset.$

Demostración: Sean $v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ fijo, $k \in K$ y sea $(f_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ una red en A asociada al vector v tal que $(f_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ satisfaga las hipótesis del Lema 3.4.

De (3.1), para cada $U \in \mathcal{V}_k$ se tiene que

$$\|T(vf_U) - T(-vf_U)\| \geq \frac{1}{M} \|vf_U - (-vf_U)\| = \frac{1}{M} \|2vf_U\| = \frac{1}{M} 2|v| \|f_U\| = \frac{2|v|}{M}.$$

Luego, existe $s_U \in S$ tal que

$$\|T(vf_U)(s_U) - T(-vf_U)(s_U)\| \geq \frac{2|v|}{M}.$$

Para cada $U \in \mathcal{V}_k$ definimos $w_U = T(vf_U)(s_U)$ y $z_U = T(-vf_U)(s_U)$, entonces, la red $(w_U, z_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ satisface la condición (a) de la Definición 3.5.

Ahora, observe que por la segunda desigualdad de (3.1) se tiene que, para cada $f \in A$ y $\delta \in \{-1, 1\}$,

$$\|T(\delta f)(s_U) - T(\delta v f_U)(s_U)\| \leq M\|f - v f_U\|.$$

Entonces por el Lema 3.4, se tiene que

$$\limsup_{U \in \mathcal{V}_k} \max\{\|Tf(s_U) - w_U\|, \|T(-f)(s_U) - z_U\|\} \leq M\omega(k, f, v). \quad (3.4)$$

Veamos que $(s_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ admite una subred convergente. Dado que A es un subespacio extremadamente regular de $C(K)$ por la Proposición 1.34 podemos fijar un $f_0 \in A$ tal que $\omega(k, f, v) = \frac{|v|}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} M|v| &\geq \limsup_{U \in \mathcal{V}_k} \|Tf_0(s_U) - w_U\| + \limsup_{U \in \mathcal{V}_k} \|T(-f_0)(s_U) - z_U\| \\ &\geq \limsup_{U \in \mathcal{V}_k} (\|Tf_0(s_U) - w_U\| + \|T(-f_0)(s_U) - z_U\|) \\ &\geq \limsup_{U \in \mathcal{V}_k} (\|w_U - z_U\| - \|Tf_0(s_U) - T(-f_0)(s_U)\|) \\ &\geq \limsup_{U \in \mathcal{V}_k} \left(\frac{2|v|}{M} - \|Tf_0(s_U) - T(-f_0)(s_U)\| \right) \\ &\geq \liminf_{U \in \mathcal{V}_k} \left(\frac{2|v|}{M} - \|Tf_0(s_U) - T(-f_0)(s_U)\| \right) \\ &= \frac{2|v|}{M} - \liminf_{U \in \mathcal{V}_k} \|Tf_0(s_U) - T(-f_0)(s_U)\|. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\liminf_{U \in \mathcal{V}_k} \|Tf_0(s_U) - T(-f_0)(s_U)\| \geq \left(\frac{2}{M} - M \right) |v|. \quad (3.5)$$

Ahora, dado que $2 \geq S(X) > M^2$, se sigue que

$$\frac{2}{M} > M,$$

esto es, $2/M - M > 0$. Así, el lado derecho de la desigualdad (3.5) es estrictamente positivo. Entonces, como $Tf_0 - T(-f_0)$ se anula en el infinito, el conjunto $\{s \in S :$

$Tf_0(s) - T(-f_0)(s) > (2/M - M)|v|$ es compacto. Ahora, recordemos que en un conjunto es compacto si y sólo si cada red admite una subred que converge a un punto del conjunto. De esto que $(s_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ admite una subred convergente.

Finalmente, pasando a una subred, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(s_U)_{U \in \mathcal{V}_k}$ converge a algún $s \in S$. Entonces, para cada $f \in A$, se sigue de la continuidad de Tf y $T(-f)$ que $Tf(s_U) \rightarrow Tf(s)$ y $T(-f)(s_U) \rightarrow T(-f)(s)$, entonces (3.4) implica que

$$\limsup_{U \in \mathcal{V}_k} \max\{\|Tf(s) - w_U\|, \|T(-f)(s) - z_U\|\} \leq M\omega(k, f, v).$$

Por tanto $s \in \mathcal{N}(k, v)$. Esto finaliza la prueba. ■

El siguiente lema es una herramienta crucial para la continuación de este trabajo. La prueba propuesta es una adaptación de la demostración de [?, Teorema 2].

Lema 3.7 *Si X un espacio de Banach y $x, y \in X$, entonces*

$$\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leq \frac{2}{S(X)} \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Demostración: Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Consideremos $w = \frac{x+y}{\|x+y\|}$ y $z = \frac{x-y}{\|x-y\|}$.

Entonces $\|w\| = \|z\| = 1$ y

$$w \pm z = \left(\frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right) x + \left(\frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right) y.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|w \pm z\| &\leq \|x\| \left| \frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right| + \|y\| \left| \frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right| \\ &\leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \left| \frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right| + \max\{\|x\|, \|y\|\} \left| \frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right| \\ &\leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \left(\left| \frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right| + \left| \frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right| \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $2 \max\{|a|, |b|\} = |a + b| + |a - b|$. Entonces

$$\left| \frac{1}{\|x + y\|} \pm \frac{1}{\|x - y\|} \right| + \left| \frac{1}{\|x + y\|} \mp \frac{1}{\|x - y\|} \right| = 2 \max\left(\frac{1}{\|x + y\|}, \frac{1}{\|x - y\|} \right).$$

De la relación (3.6) se sigue que

$$\begin{aligned} \|w \pm z\| &\leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \cdot 2 \max\left(\frac{1}{\|x + y\|}, \frac{1}{\|x - y\|} \right) \\ &= \max\{\|x\|, \|y\|\} \frac{2}{\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\}} \\ &= \frac{2 \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\}}. \end{aligned}$$

Consecuentemente $S(X) \leq \|w \pm z\| \leq \frac{2 \max\{\|x\|, \|y\|\}}{\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\}}$.

Dicho de otra forma

$$\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leq \frac{2}{S(X)} \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Esto culmina la demostración. ■

Proposición 3.8 *Sea $v \neq 0$ en \mathbb{K} y $k, k' \in K$. Si $\mathcal{N}(k, v) \cap \mathcal{N}(k', v) \neq \emptyset$, entonces $k = k'$.*

Para la demostración de esta proposición, propondremos una prueba muy similar a la mostrada en la Proposición 4.1 de [3] y la Proposición 3.2 de [4].

Demostración: Sea $s \in \mathcal{N}(k, v) \cap \mathcal{N}(k', v)$ y tomemos $\alpha > 0$ y $\varepsilon > 0$ de manera que

$$\alpha + 2M\varepsilon < S(X)|v| \left(\frac{1}{M} - \frac{M}{S(X)} \right). \quad (3.7)$$

Para los conjuntos $\mathcal{N}(k, v)$ y $\mathcal{N}(k', v)$ existen redes $(w_i, z_i)_{i \in I}$ y $(w'_j, z'_j)_{j \in J}$ respectivamente, que satisfacen las condiciones (a) y (b) de la Definición 3.5.

Supongamos que $k \neq k'$. De la definición de subespacios extremadamente regulares, podemos fijar funciones f_1 y $f_2 \in A$ tales que

$$(a) \quad \|f_1\| \leq |v|/2 + \varepsilon, |f_1(k) - v/2| \leq \varepsilon \text{ y } |f_1(k') - v/2| \leq \varepsilon;$$

$$(b) \quad \|f_2\| \leq |v|/2 + \varepsilon, |f_2(k) - v/2| \leq \varepsilon \text{ y } |f_2(k') + v/2| \leq \varepsilon.$$

Luego

$$\omega(k, f_1, v), \omega(k', f_1, v), \omega(k, f_2, v), \omega(k', -f_2, v) \leq \frac{|v|}{2} + \varepsilon.$$

Así, por el ítem (b) de la Definición 3.5, tenemos que

$$\limsup_{i \in I} \max\{\|Tf_1(s) - w_i\|, \|T(-f_1)(s) - z_i\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon,$$

$$\limsup_{j \in J} \max\{\|Tf_1(s) - w'_j\|, \|T(-f_1)(s) - z'_j\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon,$$

$$\limsup_{i \in I} \max\{\|Tf_2(s) - w_i\|, \|T(-f_2)(s) - z_i\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon,$$

$$\limsup_{j \in J} \max\{\|T(-f_2)(s) - w'_j\|, \|Tf_2(s) - z'_j\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon.$$

Por lo tanto, podemos fijar $w = w_{i_0}$, $z = z_{i_0}$, $w' = w'_{j_0}$ y $z' = z'_{j_0}$ tales que

$$\max\{\|Tf_1(s) - w\|, \|T(-f_1)(s) - z\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon + \frac{\alpha}{2}, \quad (3.8)$$

$$\max\{\|Tf_1(s) - w'\|, \|T(-f_1)(s) - z'\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon + \frac{\alpha}{2}, \quad (3.9)$$

$$\max\{\|Tf_2(s) - w\|, \|T(-f_2)(s) - z\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon + \frac{\alpha}{2}, \quad (3.10)$$

$$\max\{\|T(-f_2)(s) - w'\|, \|Tf_2(s) - z'\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M\varepsilon + \frac{\alpha}{2}. \quad (3.11)$$

Ahora, de (3.8) y (3.9) tenemos que

$$\|w - w'\| \leq \|Tf_1(s) - w\| + \|Tf_1(s) - w'\| \leq M|v| + 2M\varepsilon + \alpha.$$

De (3.8) y (3.9)

$$\|z - z'\| \leq \|T(-f_1)(s) - z\| + \|T(-f_1)(s) - z'\| \leq M|v| + 2M\varepsilon + \alpha.$$

De (3.10) y (3.11)

$$\|w - z'\| \leq \|Tf_2(s) - w\| + \|Tf_2(s) - z'\| \leq M|v| + 2M\varepsilon + \alpha,$$

y de (3.10) y (3.11) tenemos que

$$\|z - w'\| \leq \|T(-f_2)(s) - z\| + \|T(-f_2)(s) - w'\| \leq M|v| + 2M\varepsilon + \alpha.$$

Se sigue que

$$\max\{\|w - w'\|, \|z - z'\|, \|w - z'\|, \|z - w'\|\} \leq M|v| + 2M\varepsilon + \alpha.$$

Usando el Lema 3.7 con $x = w' - w$ y $y = w' - z$, obtenemos

$$\min\{\|2w' - (w + z)\|, \|w - z\|\} \leq \frac{2}{S(X)}(M|v| + 2M\varepsilon + \alpha). \quad (3.12)$$

De manera análoga, tenemos que

$$\min\{\|2z' - (w + z)\|, \|w - z\|\} \leq \frac{2}{S(X)}(M|v| + 2M\varepsilon + \alpha). \quad (3.13)$$

Recordemos que $\|w - z\| \geq 2|v|/M$. Observe que

$$\begin{aligned} \max\{\|2w' - (w + z)\|, \|2z' - (w + z)\|\} &\geq \frac{\|2w' - (w + z)\| + \|2z' - (w + z)\|}{2} \\ &\geq \|w' - z'\| \\ &\geq \frac{2|v|}{M}. \end{aligned}$$

Entonces de (3.12) y (3.13) se sigue que

$$\frac{2|v|}{M} \leq \frac{2}{S(X)}(M|v| + 2M\varepsilon + \alpha),$$

esto es,

$$\left(\frac{1}{M} - \frac{M}{S(X)}\right) |v| S(X) \leq \alpha + 2M\varepsilon.$$

Lo cual contradice nuestra suposición inicial. ■

A continuación estudiaremos el objetivo principal del presente trabajo, el cual consiste en estudiar el conjunto S_0 y la función φ de S_0 en K mencionadas en el Teorema 3.1 para subespacios extremadamente regulares de $C(K)$. Definiremos dichos objetos y demostraremos que satisfacen las propiedades del Teorema 3.1.

Ahora presentamos el subconjunto S_0 de S y la función φ mencionadas anteriormente. Sea $v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $(\frac{2}{M} - M) |v| > 2M + 2$, definimos

$$S_0 = \bigcup_{k \in K} \mathcal{N}(k, v).$$

Por la Proposición 3.8 esta unión es disyunta, así, podemos definir la función $\varphi : S_0 \rightarrow K$ tal que $\varphi(s)$ es el único $k \in K$ tal que $s \in \mathcal{N}(k, v)$. Por el Teorema 3.6 tenemos que φ es una función sobreyectiva.

Proposición 3.9 *El conjunto S_0 es compacto y la función φ es continua.*

Demostración: Como K es compacto, es suficiente mostrar que φ es una función propia, esto es, para cualquier subconjunto compacto $P \subset K$, $\varphi^{-1}(P)$ es compacto.

Sea $P \subset K$ un subconjunto compacto. Consideremos la red $(\varphi(s_i))_{i \in I} \subset P$. Podemos suponer que $\varphi(s_i) \rightarrow k$ para algún $k \in P$. Adicionalmente, como $s_i \in \mathcal{N}(\varphi(s_i), v)$, para cada $i \in I$ podemos fijar $(w_j^i, z_j^i)_{j \in J_i}$ de manera que se cumplan las propiedades de la Definición 3.5.

Esto es, para cada $f \in A$ e $i \in I$, tenemos

$$\limsup \max\{\|Tf(s_i) - w_j^i\|, \|T(-f)(s_i) - z_j^i\|\} \leq M\omega(\varphi(s_i), f, v). \quad (3.14)$$

Veamos que $(s_i)_{i \in I}$ admite una subred convergente. Fijemos $f_0 \in A$ tal que $\omega(k, f_0, v) = \frac{|v|}{2}$. Como $\varphi(s_i) \rightarrow k$ podemos fijar $i_0 \in I$ tal que

$$\omega(\varphi(s_i), f_0, v) \leq \omega(k, f_0, v) + 1 = \frac{|v|}{2} + 1, \quad i \geq i_0. \quad (3.15)$$

Para cada $i \geq i_0$, por (3.14) podemos fijar un $j \in J_i$ tal que

$$\max\{\|Tf_0(s_i) - w_j^i\|, \|T(-f_0)(s_i) - z_j^i\|\} \leq M\omega(\varphi(s_i), f_0, v) + 1.$$

Luego de (3.15) se sigue que

$$\max\{\|Tf_0(s_i) - w_j^i\|, \|T(-f_0)(s_i) - z_j^i\|\} \leq M \frac{|v|}{2} + M + 1.$$

Así, usando la condición (a) de la Definición 3.5, obtenemos

$$\begin{aligned} \|Tf_0(s_i) - T(-f_0)(s_i)\| &= \|Tf_0(s_i) - w_j^i + w_j^i - T(-f_0)(s_i) + z_j^i - z_j^i\| \\ &\geq \|w_j^i - z_j^i\| - \|Tf_0(s_i) - w_j^i\| - \|T(-f_0)(s_i) - z_j^i\| \\ &\geq \|w_j^i - z_j^i\| - M|v| - 2(M + 1) \\ &\geq \left(\frac{2}{M} - M\right) |v| - 2M - 2. \end{aligned}$$

Lo anterior es válido para cualquier $i \geq i_0$. Entonces, como v satisface que $\left(\frac{2}{M} - M\right) |v| > 2M + 2$, tenemos que

$$\liminf \|Tf_0(s_i) - T(-f_0)(s_i)\| \geq \left(\frac{2}{M} - M\right) |v| - 2M - 2 > 0.$$

Puesto que $Tf_0 - T(-f_0)$ se anula en el infinito, $(s_i)_{i \in I}$ admite una subred convergente.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s_i \rightarrow s$. Para finalizar, veamos que

$s \in \varphi^{-1}(P)$. Definimos

$$\Sigma := \left(\prod_{i \in I} J_i \right) \times I,$$

dotado con el orden del producto^{*}, lo que lo convierte en un conjunto dirigido. Entonces,

para cada $\sigma = ((j_i)_{i \in I}, i') \in \Sigma$, definimos

$$w_\sigma = w_{j_{i'}}^{i'} \text{ y } z_\sigma = z_{j_{i'}}^{i'}. \quad (3.16)$$

^{*}Sean (X, \leq_X) y (Y, \leq_Y) dos conjuntos parcialmente ordenados, definimos el orden producto para el conjunto $X \times Y$ por $(x_1, y_1) \leq_{X \times Y} (x_2, y_2)$ si $x_1 \leq_X x_2$ y $y_1 \leq_Y y_2$.

Veamos que $(w_\sigma, z_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ satisface las condiciones requeridas para tener $s \in \mathcal{N}(k, v)$.

Es inmediato que la red $(w_\sigma, z_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ satisface la condición (a) de la Definición 3.5.

Veamos que esta cumple la condición (b). Sean $f \in A$ y $\varepsilon > 0$, y probemos que existe un $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$\text{máx}\{\|Tf(s) - w_\sigma\|, \|T(-f)(s) - z_\sigma\|\} \leq M\omega(k, f, v) + \varepsilon, \quad \sigma \geq \sigma_0. \quad (3.17)$$

Tomemos $\varepsilon' = \varepsilon/(M + 2)$. Construiremos σ_0 en dos pasos. Primero, usando (3.14), para cada $i \in I$, fijamos $j_i^0 \in J_i$, tal que para cualquier $j \in J_i$ con $j \geq j_i^0$,

$$\text{máx}\{\|Tf(s_i) - w_j^i\|, \|T(-f)(s_i) - z_j^i\|\} \leq M\omega(\varphi(s_i), f, v) + \varepsilon'. \quad (3.18)$$

Segundo, como $s_i \rightarrow s$ y $\varphi(s_i) \rightarrow k$, podemos tomar $i_0 \in I$ tal que, para cualquier $\delta \in \{-1, 1\}$ y $i \geq i_0$,

$$\text{máx}\{\|T(\delta f)(s_i) - T(\delta f)(s)\|, |\omega(\varphi_V(s_i), f, v) - \omega(k, f, v)|\} \leq \varepsilon'. \quad (3.19)$$

Así, tomando $\sigma_0 = ((j_i^0)_{i \in I}, i_0)$, notamos que si $\sigma((j_i)_{i \in I}, i') \in \Sigma$ es tal que $\sigma \geq \sigma_0$, entonces $j'_i \geq j_i^0$ y $i' \geq i_0$. Por lo tanto, usando (3.18) y por la definición de (3.16)

$$\text{máx}\{\|Tf(s_{i'}) - w_\sigma\|, \|T(-f)(s_{i'}) - z_\sigma\|\} \leq M\omega(\varphi_V(s_{i'}), f, v) + \varepsilon', \quad (3.20)$$

y usando (3.19), concluimos que

$$\text{máx}\{\|Tf(s) - w_\sigma\|, \|T(-f)(s) - z_\sigma\|\} \leq M\omega(k, f, v) + (M + 2)\varepsilon'. \quad (3.21)$$

Así, se sigue (3.17) como se deseaba.

De esta manera probamos que $s \in \mathcal{N}(k, v)$. En consecuencia $s \in \varphi^{-1}(P)$ y la prueba de la proposición está completa. ■

La versión no lineal del Teorema 3.1 es la siguiente.

Corolario 3.10 *Suponga que existe un isomorfismo lineal T de un subespacio extremadamente regular A de $C(K)$ en $C_0(S, X)$ de manera que $\|T\| \|T^{-1}\| < S(X)$. Entonces existe un subconjunto compacto S_0 de S y una función continua φ de S_0 en K .*

Bibliografía

- [1] Cuth, M. & Doucha, M. (2015). *Lipschitz-free spaces over ultrametric spaces*. Mediterr. J. Math.
- <http://doi.org/10.1007/s00009-015-0566-7>
- [2] Dutrioux, Y. & Ferenczi, V. (2006). *The Lipschitz free Banach spaces of $C(K)$ -spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 134(4) , 1039-1044.
- [3] Elói Medina Galego, & André Luis Porto da Silva. (2020). *Nonlinear embeddings of spaces of continuous functions*. Proceedings of the American Mathematical Society, 148(4), 1555-1566.
- <https://doi.org/10.1090/proc/14798>
- [4] Elói Medina Galego, & André Luis Porto da Silva. (2022). *On $C_0(S, X)$ -distortion of the class of all separable Banach spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, 150(2), 661.
- <https://doi.org/10.1090/proc/15625>
- [5] Fabian, Marián & Habala, Petr & Hájek, Petr & Montesinos, Vicente & Zizler, Václav. (2011). *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*.
- <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>

- [6] Bahattin Cengiz. (1973). *A Generalization of the Banach-Stone Theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society, 40(2), 426-430.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0320723-6>
- [7] Bahattin Cengiz. (1973). *On extremely regular function spaces*. Pacific Journal of Mathematics, Pacific J. Math. 49(2), 335-338,
- [8] Gabriel Vera (2011). *Lecciones de análisis matemático II*.
- [9] Hájek, P. & Pernecká, E. (2014). *On Schauder bases in Lipschitz-free spaces*. J. Math. Anal. Appl. 416 (2014) 629-646.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X14002078>
- [10] Johnson, Lindenstrauss, J. & Schechtman, G. (1997). *Banach spaces determined by their uniform structures*. Geom. Funct. Anal. 6 no. 3, 430-470. MR1392325 (97b:46016)
- [11] Lancien, G. & Pernecká, E. (2013). *Approximation properties and Schauder decompositions in Lipschitz-free spaces*. J. Funct. Anal. 264, 2323-2334.
<https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0022123613000657?via%3Dihub>
- [12] Megginson, Robert E. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer New York.
- [13] Pedro Levit Kaufmann. (2015). *Products of Lipschitz-free spaces and applications*. Studia Math. 226, no. 3, 213-227.
- [14] Nik Weaver. (1999). *Lipschitz Algebras*. World Scientific, New Jersey.

- [15] Włodzimierz Holsztyński (1966). *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function*. *Studia Math.* 26, 133-136.