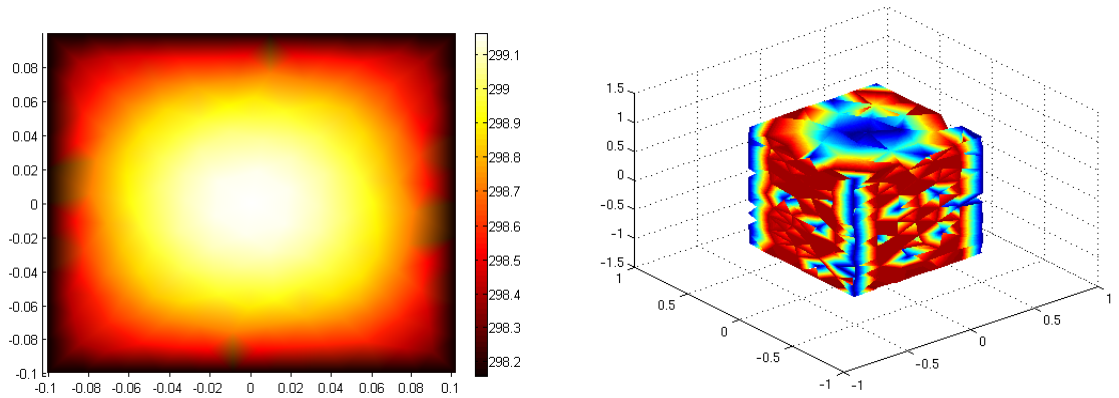


ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN TÉRMICA EN HIERRO POR CORRIENTES DE EDDY UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS



ALEJANDRO PARADA MAYORGA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

Bucaramanga, 2009

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN TÉRMICA EN HIERRO POR CORRIENTES DE EDDY UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

ALEJANDRO PARADA MAYORGA

Trabajo de grado para optar por el título de Ingeniero Electrónico

Director

M.Sc Ernesto Aguilera Bermudez

Co-director

Ph.D Carlos Rodrigo Correa Cely

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

Bucaramanga-Abril 2009

*A Dios, mi madre, mis hermanos
y a todos aquellos que creyeron en mí
cuando ni siquiera yo lo hacía*

*A mis dos angelitos, Valeria y Estefanía
que han llenado mi vida de luz y sonrisas*

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por estar conmigo en cada paso y llenar mi vida de bendiciones.

Debo a mi familia tantas cosas, que unas líneas no serían suficientes para expresar toda mi gratitud. Agradezco a ellos por todo su apoyo, comprensión y cariño. En especial le doy gracias a mi madre y mis hermanos por llenar mi vida de motivación.

Le agradezco enormemente al profesor Ernesto Aguilera por creer en mí y brindarme su apoyo a lo largo de este duro pero gratificante camino.

A aquellos grandes maestros que dejaron huella en mi formación, transmitiéndome su amor por la ciencia y su pasión por la investigación: Rafael Isaacs (Matemáticas), Gabriel Ordóñez (Ing. Electrónica), César Duarte (Ing. Electrónica), Guillermo González (Física), Elkim Roa (Ing. Electrónica) y Ernesto Aguilera (Ing. Electrónica). A todos ellos un agradecimiento desde lo más profundo de mi alma.

Por supuesto, no puedo olvidar dar las gracias a Leonardo Ortíz y sus padres, por abrirme las puertas de su casa y brindarme un apoyo sin el cual todo hubiera sido mucho más difícil. Me faltan palabras para agradecerles por todo, y me queda una deuda que creo, no podré saldar jamás.

RESUMEN

TÍTULO:

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN TÉRMICA EN HIERRO POR CORRIENTES DE EDDY UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS¹

AUTOR:² ALEJANDRO PARADA MAYORGA

PALABRAS CLAVE: Elementos Finitos (FEM), Corrientes de Eddy, calentamiento inductivo, modelamiento matemático, distribución de temperatura, histéresis, calentamiento por histéresis, calentamiento por pérdidas óhmicas.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se aborda el análisis del calentamiento por corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos de geometrías cúbicas y rectangulares, utilizando análisis de elementos finitos.

Inicialmente se realiza un estudio de las propiedades electromagnéticas y térmicas de los materiales a tratar teniendo en cuenta los modelos, sus limitaciones y principales rangos de trabajo. Así mismo se analiza el fenómeno de la histéresis y su estrategia de modelado e introducción dentro de un planteamiento analítico.

Con un tratamiento detallado del fenómeno de corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos, se hace una selección de las formulaciones a emplear junto con un esquema de introducción de la histéresis, teniendo en cuenta el acople entre el fenómeno electromagnético y el térmico definiendo los términos de generación de calor. Se aplica análisis de elementos finitos a los planteamientos analíticos encontrados, y se realiza una implementación de los esquemas resultantes considerando eficiencia y costo computacional.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos realizando una contrastación con trabajos de otros autores, considerando además el significado físico de los mismos y la consistencia de las soluciones respecto de los modelos que describen el problema.

¹Proyecto de Grado

²Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: MSc. Ernesto Aguilera Bermúdez. email: alejandro.parada.m@hotmail.com

SUMMARIZE

TITLE:

ANALYSIS OF THERMAL DISTRIBUTION ON IRON FOR EDDY CURRENTS USING THE FINITE ELEMENT METHOD³

AUTHOR:⁴ ALEJANDRO PARADA MAYORGA

KEY WORDS: Finite Elements (FEM), Eddy currents, inductive heating, mathematical modeling, thermal distribution, hysteresis, heating for hysteresis, heating for ohmic losses.

DESCRIPTION:

This paper tackles the analysis of the heating by Eddy currents in ferromagnetic materials of cubic and rectangular geometries using finite element analysis.

Initially a study of thermal and electromagnetic properties of materials to be treated, is done; taking into account the models, their limitations and ranges of major work. Likewise, an analysis of hysteresis phenomenon and its modeling strategy is carried out introducing it into an analytical approach.

With a detailed study and analysis of the phenomenon of Eddy currents in ferromagnetic materials, a selection choice of formulations to be used together with an outline of the introduction of hysteresis is done, taking into account the coupling between the electromagnetic and thermal phenomenon by defining the terms of heat generation. Applies finite element analysis to analytical approaches found, and is an implementation of the schemes resulting taking into account the efficiency and computational cost.

Finally presents the results obtained by drawing a comparison with works of other authors, taking into account also the physical meaning of them and the consistency of the solutions to the models that describe the problem.

³Thesis

⁴Physics Mechanical Engineering Faculty. Electric, Electronic and Telecommunications School. Director: MSc. Ernesto Aguilera Bermúdez. email: alejandro_parada.m@hotmail.com

Índice general

1. Introducción	19
1.1. Motivación	19
1.2. Consideraciones Generales	20
1.2.1. El Fenómeno Electromagnético	20
1.2.2. El Fenómeno Térmico	21
1.2.3. Relación Entre el Fenómeno Electromagnético y el Fenómeno Térmico	21
1.2.4. Estado del Arte en el Análisis de Fenómenos Electromagnéticos en Materiales Ferromagnéticos	22
1.2.5. Estado del Arte en el Análisis de Calentamiento por Corrientes de Eddy en Materiales Ferromagnéticos	22
1.3. Especificaciones	22
1.3.1. Naturaleza de las Condiciones de Frontera	24
1.4. Organización del Documento	24
2. Propiedades del Hierro en Presencia de Campos Electromagnéticos	27
2.1. Propiedades Electromagnéticas	27
2.1.1. Conductividad Eléctrica	27
2.1.2. Permeabilidad: Relación B-H	28
2.1.3. Propiedades Térmicas	30
3. Corrientes de Eddy	31
3.1. Descripción Cuantitativa	31
3.2. Formulaciones de Corrientes de Eddy	32
3.2.1. Formulaciones Diferenciales	32
3.3. Selección de la Formulación	34
3.3.1. Grado de Aproximación	34

3.3.2.	Introducción de un Esquema para el manejo de la Histéresis	35
3.3.3.	Dominio de Solución	35
3.4.	Planteamiento del Problema Electromagnético	35
3.4.1.	Condiciones de Frontera	35
3.4.2.	Condición Inicial	36
3.4.3.	Condiciones de Calibración	37
3.4.4.	El significado físico de $\vec{\nabla}\phi$	37
3.4.5.	Unicidad de la Solución	37
4.	Calentamiento por Corrientes de Eddy	39
4.1.	Planteamiento del Problema Térmico	39
4.1.1.	Términos de Generación de Calor	39
4.1.2.	Condiciones Iniciales y de Frontera	40
5.	Análisis de Elementos Finitos	41
5.1.	Formulación Variacional	41
5.1.1.	Problema Electromagnético	41
5.1.2.	Problema Térmico	43
5.2.	Selección de un Espacio de Elementos Finitos	44
5.2.1.	Caso 2D	44
5.2.2.	Caso 3D	45
5.3.	Discretización en el Dominio del Tiempo	46
5.3.1.	Problema Electromagnético	47
5.3.2.	Problema Térmico	49
5.4.	Demostración de Estabilidad	51
6.	Aspectos de Implementación	53
6.1.	Algoritmo de Solución	53
6.1.1.	Adecuación y Modelado de los datos Experimentales de la relación B-H . . .	53
6.1.2.	Algoritmo: Problema Electromagnético	54
6.1.3.	Algoritmo: Problema Térmico	55
6.2.	Cómputo de operaciones básicas	55
6.2.1.	Transformación a Planos Computacionales	56

6.2.2. Implementación en Matlab	57
6.3. Proceso de Ensamble de Matrices	57
6.3.1. Implementación en Matlab	58
6.4. Ajuste de Valores de la Frontera	58
6.5. Solución de los Sistemas Matriciales	59
6.5.1. Implementación en Matlab	59
6.5.2. Solución de sistemas cuando hay valores conocidos en la frontera	59
6.6. Cálculo del Rotacional	60
6.6.1. Caso 2D	60
6.6.2. caso 3D	60
6.7. Ajuste y Control de los Datos	60
6.7.1. Ajustes en el Problema Electromagnético	61
6.7.2. Ajustes en el Problema Térmico	61
6.8. Resultados Finales de Implementación	61
6.8.1. Simulación del Fenómeno Electromagnético	62
6.8.2. Simulación del Fenómeno Térmico	62
7. Resultados	63
7.1. Sección Rectangular de Barra Infinita	63
7.1.1. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con Otros Trabajos: <i>Problema Electromagnético</i>	64
7.1.2. Resultados problema Térmico con condición de temperatura constante en la frontera	67
7.1.3. Resultados problema Térmico con condición de aislamiento térmico	67
7.1.4. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con Otros Trabajo: <i>Problema Térmico</i>	72
7.2. Barra Finita de Sección Rectangular	73
7.2.1. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con otros Trabajos: <i>Problema Electromagnético</i>	73
7.2.2. Resultados del problema térmico con condición convectiva	76
7.2.3. Resultados del problema térmico con condición de aislamiento térmico	76
7.2.4. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con otros Trabajos: <i>Problema Térmico</i>	80
7.3. Conclusiones	80

7.4. Observaciones y Recomendaciones para Trabajos Futuros	81
A. Parámetros Principales en el Manejo de los Códigos	83
A.1. Parámetros de Geometría	83
A.2. Parámetros del Problema Electromagnético	83
A.2.1. Parámetros de histéresis	83
A.2.2. Otros parámetros	84
A.3. Problema Térmico	84
A.4. Algunos Aspectos para Tener en Cuenta	84
B. ElectroFEM_2D.m	85
C. ThermalFEM_2D.m	99
D. ThermalFEMConv_2D.m	103
E. ThermalFEMN0_2D.m	111
F. ElectroFEM_3D.m	115
G. ThermalFEM_3D.m	135
H. ThermalFEMConv_3D.m	141
I. ThermalFEMN0_3D.m	153
J. Curvas Experimentales de Histéresis. Trafoperm	159
K. Curvas Experimentales de Histéresis. Vacofer	161

Índice de cuadros

1.1. Recopilación de trabajos recientes sobre Corrientes de Eddy en materiales Ferromagnéticos	22
1.2. Recopilación de Trabajos sobre Calentamiento por Corrientes de Eddy en Materiales Ferromagnéticos	22

Índice de figuras

1.1.	Diagrama representativo de la interacción entre fenómenos térmicos y electromagnéticos	21
1.2.	Configuración 2D	23
1.3.	Configuración 3D	24
2.1.	Relación B-H en un material ferromagnético	28
3.1.	Esquema básico de las corrientes de Eddy	33
5.1.	Elemento triangular de primer orden con su respectiva asignación de nodos	45
5.2.	Elemento tetrahedrico de primer orden con su respectiva asignación de nodos	46
6.1.	Transformación de un elemento en el plano físico a un elemento canónico en un plano computacional (caso 2D)	56
7.1.	Enmallado para dominio 2D rectangular. Dimensiones en metros [m].	64
7.2.	Magnitud y direcciones del vector densidad de corriente en la muestra 1000 (2 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$	65
7.3.	Magnitud y direcciones del vector densidad de corriente en la muestra 1005 (2.01 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$	65
7.4.	Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 43 de coordenadas $(0.3775e-3, 0.3854e-3)[m]$. Unidades de J_{xy} en $[A/m^2]$, y eje de abscisas en muestras	66
7.5.	Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 156 de coordenadas $(0.0604, 0.0001)[m]$. Unidades de J_{xy} en $[A/m^2]$, y eje de abscisas en muestras	66
7.6.	Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 112 de coordenadas $(0.0803, -0.0051)[m]$. Unidades de J_{xy} en $[A/m^2]$, y eje de abscisas en muestras	67
7.7.	Distribución de temperatura en la muestra 5000 (10 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]	68
7.8.	Distribución de temperatura en la muestra 20000 (40 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]	68

7.9. Distribución de temperatura en la muestra 40000 (80 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]	69
7.10. Distribución de temperatura en la muestra 73730 (147.46 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]	69
7.11. Distribución de temperatura en la muestra 10000 (20 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]	70
7.12. Distribución de temperatura en la muestra 20000 (40 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]	70
7.13. Distribución de temperatura en la muestra 40000 (80 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]	71
7.14. Distribución de temperatura en la muestra 70000 (140 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]	71
7.15. Gráfica de las Temperaturas máxima (rojo), promedio (azul) y mínima (verde) del calentamiento en la sección rectangular ferromagnética. Eje de abscisas en muestras.	72
7.16. Enmallado para dominio 3D. Dimensiones en metros [m].	73
7.17. Magnitud del vector densidad de corriente en las muestras 3 y 8 (0.006 y 0.016 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 3: $1.5279e3 [A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 8: $1.2452e3 [A/m^2]$	74
7.18. Magnitud del vector densidad de corriente en las muestras 1000 y 1005 (2 y 2.016 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 1000: $8.2655e3 [A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 1005: $9.1165e3 [A/m^2]$	74
7.19. Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 100 de componentes (-0.3312, 0.1683, -0.6424)[m]. Unidades de Jxyz en $[A/m^2]$ y eje de abscisas en muestras	75
7.20. Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 100 de componentes (-0.1647, 0.0681, -0.6358)[m]. Unidades de Jxyz en $[A/m^2]$ y eje de abscisas en muestras	75
7.21. Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 140 de componentes (0.5, 0.15, -0.4591)[m]. Unidades de Jxyz en $[A/m^2]$ y eje de abscisas en muestras	75
7.22. Distribución de temperatura en la muestra 800 (1.6 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 500.7629 [K] y 298.5794 [K]	76
7.23. Distribución de temperatura en la muestra 2000 (4 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 503.9126 [K] y 299.3663 [K]	77
7.24. Distribución de temperatura en la muestra 5000 (10 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 509.6181 [K] y 299.3854 [K]	77
7.25. Distribución de temperatura en la muestra 10000 (20 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 513.3403 [K] y 299.6148 [K]	78

7.26. Distribución de temperatura en la muestra 800 (1.6 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 501.2447 [K] y 300.2321 [K]	78
7.27. Distribución de temperatura en la muestra 2000 (4 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 505.2017 [K] y 300.4948 [K]	79
7.28. Distribución de temperatura en la muestra 5000 (10 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 513.2868 [K] y 300,5610 [K]	79
7.29. Distribución de temperatura en la muestra 10000 (20 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 521.7331 [K] y 300.6225 [K]	80

Capítulo 1

Introducción

Un aspecto inmerso en todas las tendencias de desarrollo de la investigación científica y tecnológica en la electrónica, es la comprensión y manejo de los distintos fenómenos electrotérmicos secundarios, ya sea por que los efectos de éstos son indeseables y alteran de manera significativa el comportamiento de un sistema; o bien porque su estudio hace parte de un valor agregado en un mundo donde los requerimientos de diseño son cada vez más exigentes.

Los efectos más significativos, en cuanto a este tipo de fenómenos, son referidos frecuentemente a aplicaciones en donde se manejan altos niveles de corriente y los medios involucrados poseen conductividades térmica y eléctrica elevadas. Actualmente en muchos de los modelos que describen el funcionamiento de sistemas básicos, se plantea la necesidad de tener en cuenta los efectos secundarios de los campos electromagnéticos.

Teniendo en cuenta el anterior argumento, en este proyecto de grado se plantea el análisis del calentamiento por corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos. En este capítulo se presentan los aspectos principales de este trabajo, así como las especificaciones que describen el problema a tratar.

1.1. Motivación

Las crecientes exigencias a nivel de diseño e implementación de dispositivos eléctricos y electrónicos, han impulsado el desarrollo de esquemas para el análisis y simulación de diferentes fenómenos electromagnéticos y térmicos existentes en éstos, a fin de conocer sus efectos cualitativos y cuantitativos. El continuo mejoramiento en rendimiento de las computadoras, ha permitido que la investigación en este campo se desarrolle y que existan varios trabajos realizados por especialistas de diferentes áreas, empleando técnicas numéricas de alto nivel.

En este sentido, aunque se realizan simulaciones numéricas de fenómenos acoplados, sólo uno de éstos es tratado con rigurosidad la mayor parte de las veces, mientras el otro es manejado por aproximaciones no completamente satisfactorias ni congruentes con la realidad física del problema; como consecuencia de ésto el software disponible para estos propósitos está destinado a un conjunto específico de problemas [1][2]. Actualmente existen algunos paquetes comerciales para ello como ANSYS y CST, sin embargo con limitaciones enormes para el manejo de características no lineales y de histéresis, ya que no ofrece alternativas para el manejo de estos aspectos, por lo cual obtener una solución y realizar una simulación empleando este recurso, para un problema con estas características, no es posible.

Por tanto, existe la necesidad de investigar fenómenos acoplados, teniendo en cuenta no linealida-

des e histéresis a fin de mejorar y hacer más confiables las estimaciones de los efectos electrotérmicos en el comportamiento de distintos sistemas.

En este campo el estudio de las corrientes de Eddy y sus efectos juega un papel esencial, ya que su existencia, inherente a la de campos variantes en el tiempo en materiales conductores, es un hecho en casi la totalidad de dispositivos eléctricos y electrónicos, y es de considerable influencia en el comportamiento de un sistema por sus efectos electrotérmicos. La solución de este problema en materiales ferromagnéticos es un área con una cantidad reducida de trabajos, muchos de los cuales son realizados con un número excesivo de simplificaciones.

Con este trabajo se busca realizar una contribución en este campo, calculando los efectos de calentamiento producido por las corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos de geometrías cúbicas y rectangulares.

Siendo consecuente con este propósito, se usa *análisis de elementos finitos*. Existen razones para emplear esta técnica:

- La calidad y forma de las aproximaciones en cuanto exactitud, que se obtiene en un problema de tipo electrotérmico, es superior a la obtenida con otros métodos [1].
- FEM posee una sólida fundamentación matemática que permite conocer las características de convergencia¹ hacia una posible solución del problema [3].
- Con FEM las no linealidades se manejan con relativa facilidad [4].
- FEM posee versatilidad para el manejo de geometrías arbitrarias, no necesariamente rectangulares [2].

1.2. Consideraciones Generales

En la simulación de fenómenos electrotérmicos existen diferentes enfoques, consecuencia del compromiso entre exactitud, manejo de la relación entre escalas de tiempo y tratamiento de las variables involucradas en el problema. Por esto, es esencial considerar los cambios producidos en los factores que influyen en la evolución del fenómeno². Deben definirse las relaciones entre las cantidades de solución, con las propiedades en torno a las cuales están estructurados los modelos que definen el problema. Esto permite concebir el fenómeno por medio de una interacción.

En la aplicación de FEM, se requiere de la obtención de las formulaciones variacionales de las ecuaciones diferenciales parciales que representan los modelos descriptivos, y de la selección de un espacio de elementos finitos que se adecue a los requerimientos de costo computacional, convergencia y exactitud de la solución aproximada.

En el tratamiento de las propiedades de los materiales ferromagnéticos, juega un papel esencial la forma cómo se modela e introduce la histéresis en los planteamientos analíticos, previos a la implementación de una técnica numérica de solución.

1.2.1. El Fenómeno Electromagnético

Para el análisis de las corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos se requiere de la selección de una formulación algebraica que se ajuste a los requerimientos de exactitud deseada de la solución

¹Aunque la investigación actual en FEM es extensa y rigurosa, las condiciones de convergencia están plenamente establecidos para dominios de Lipschitz

²Cambios en las propiedades electromagnéticas y térmicas respecto de las variables descriptivas del problema

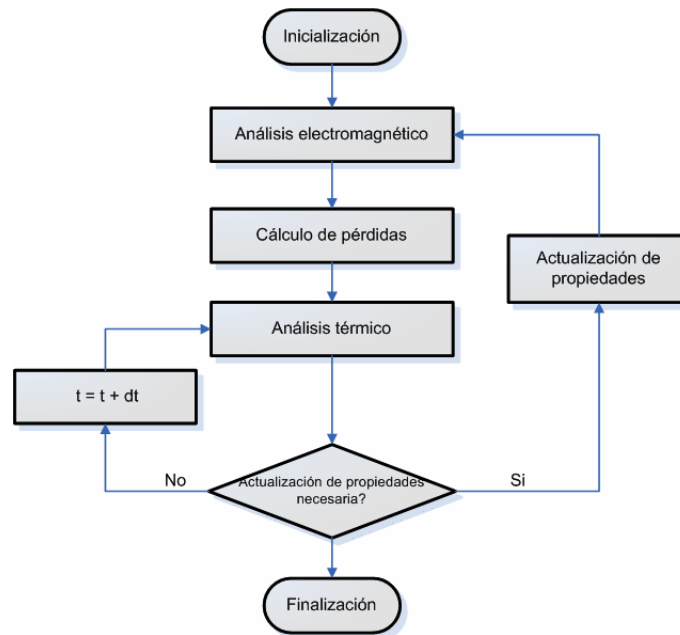


Figura 1.1: Diagrama representativo de la interacción entre fenómenos térmicos y electromagnéticos

y adaptabilidad a la geometría del problema, en compromiso con la selección de un esquema para el manejo e introducción de la histéresis. Se deben considerar los posibles efectos de la temperatura en las variables electromagnéticas.

1.2.2. El Fenómeno Térmico

El calentamiento por corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos es modelado como un fenómeno de conducción térmica, descrito mediante la ecuación de difusión de calor, donde existe un término asociado al calor generado internamente en el material, que se relaciona con las pérdidas óhmicas y por histéresis referentes a estas corrientes [5][1]. Los cambios de temperatura atribuidos a un problema de calentamiento tienen influencia en los valores de las propiedades tanto térmicas como electromagnéticas.

1.2.3. Relación Entre el Fenómeno Electromagnético y el Fenómeno Térmico

La interacción entre campos térmicos y electromagnéticos no es de fácil descripción y modelamiento. La influencia de un campo en las variables que definen el otro, hacen que la tarea de plantear el problema matemáticamente sea compleja. Para el tratamiento de estos tópicos deben realizarse consideraciones que permitan definir cuantitativamente cual es el aporte de un campo en las propiedades del otro, así como los porcentajes de variación exactos de las variables que describen el problema, de manera que se puedan establecer criterios de cómputo para la solución. En la figura 1.1 se presenta un diagrama propuesto por Clemens en [6], donde se describe en forma genérica este tipo de interacción.

Autor	Referencia	Año	Método
V. Ionita	[7]	1996	FEM
V. Ionita	[8]	1998	FEM
E. Fallah	[9]	2006	FEM
O. Bottauscio	[10]	2006	EFGM
A. Manzini	[11]	2007	EFGM

Cuadro 1.1: Recopilación de trabajos recientes sobre Corrientes de Eddy en materiales Ferromagnéticos

Autor	Referencia	Año	Método
H.H.J.J Hanssen	[5]	1995	FEM
J. Driesen	[1]	2000	FEM
I.R. Ciric	[12]	2008	PFPM

Cuadro 1.2: Recopilación de Trabajos sobre Calentamiento por Corrientes de Eddy en Materiales Ferromagnéticos

1.2.4. Estado del Arte en el Análisis de Fenómenos Electromagnéticos en Materiales Ferromagnéticos

Existen varios trabajos realizados, donde se plantean intentos para estimar u obtener equivalencias en el análisis de fenómenos electromagnéticos en materiales ferromagnéticos. Sin embargo la literatura en donde se consideran las características de histéresis y no linealidad con fidelidad es escasa, y más aún cuando se intenta describir los campos en el interior del metal. En el cuadro 1.1 se presenta una recopilación de los autores más recientes que han abordado el problema de las corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos considerando con rigurosidad la no linealidad y la histéresis, el más reciente de éstos emplea una técnica tipo *meshless* denominada EFGM³ aún en desarrollo.

1.2.5. Estado del Arte en el Análisis de Calentamiento por Corrientes de Eddy en Materiales Ferromagnéticos

La literatura referente al calentamiento en metales es reducida, y lo es aún más cuando se trata de abordar el calentamiento en materiales ferromagnéticos. En el cuadro 1.2 se muestran los autores que han abordado este problema. En el trabajo más reciente, perteneciente a Ciric, se emplea una técnica novedosa denominada PFPM⁴, con la que se realizan cálculos de los valores máximos, mínimos y promedio de la distribución de temperatura.

1.3. Especificaciones

Las geometrías abordadas en este trabajo son de tipo rectangular y cúbico, por lo cual los sistemas de coordenadas considerados serán rectangulares, y se hará uso de la nomenclatura clásica corres-

³*Element Free-Galerkin Method*

⁴*Polarization Fixed Point Method*

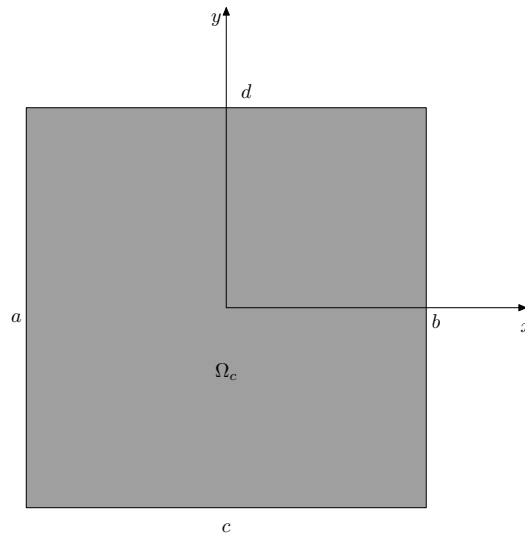


Figura 1.2: Configuración 2D

pondiente a este tipo de sistemas⁵. El esquema rectangular será considerado como la sección de una barra de longitud infinita orientada en la dirección z , sometida a una intensidad de campo magnético variable en el tiempo, que está en la dirección de la barra (dirección z); de manera tal que las corrientes que se inducen sólo tienen componentes en las direcciones xy [13][14][15], y la distribución de temperatura es dependiente únicamente de estas mismas coordenadas [16][17]. Existen razones para emplear estas consideraciones:

- En muchas aplicaciones, las dimensiones de la sección rectangular de una geometría sometida a un campo variante en el tiempo, son demasiado pequeñas comparadas con la longitud, de manera que la concepción del problema puede aproximarse satisfactoriamente como el caso de una sección de una barra de longitud infinita [15].
- Las piezas de tipo laminar⁶ se pueden modelar satisfactoriamente bajo estas consideraciones [18][19].

Esta sección rectangular se encontrará descrita como se muestra en la figura 1.2, representando con a, b los límites inferior y superior respectivamente, en el eje x y con c, d los límites inferior y superior, en el eje y .

El esquema cúbico será considerado como una barra de sección rectangular, orientada en la dirección z . Esta consideración se basa en el hecho de que en esta geometría se pueden estudiar los efectos tridimensionales de las corrientes en distintos materiales, sin pérdida de generalidad⁷. En la figura 1.3 se aprecia esta configuración; donde a, b, c, d, e, f representan los límites del volumen en el sistema coordenado.

⁵La nomenclatura será xyz

⁶En donde los efectos de las corrientes de Eddy son indeseados y de considerable influencia, los materiales se laminan para reducir las pérdidas y el calentamiento

⁷Como se verá al final de este trabajo los códigos empleados para resolver el problema en 3D son fácilmente adaptables a distintas dimensiones de la barra

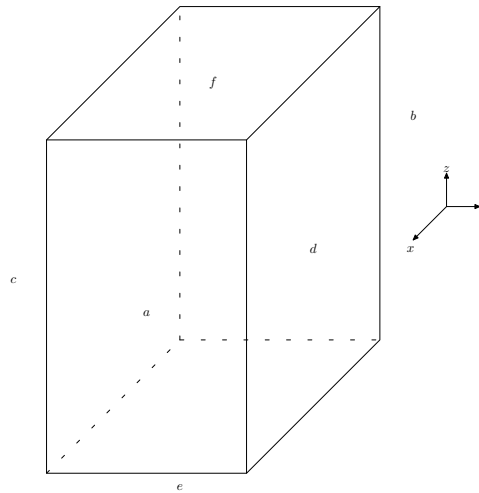


Figura 1.3: Configuración 3D

1.3.1. Naturaleza de las Condiciones de Frontera

Los alcances de este trabajo están ligados al estudio de materiales específicos, de los cuales se tiene información experimental para excitaciones de tipo cosenoidal. Ésta viene dada para intensidades de campo magnético del tipo:

$$H(t) = H_{0max} \cos(2\pi ft) [A/m]$$

es decir excitaciones cosenoidales a una frecuencia de f Hz con amplitudes entre $-H_{0max}$ y H_{0max} amperes sobre metro. Por lo cual las condiciones de frontera empleadas están referidas a esta forma.

En el problema térmico se emplearán los tres tipos básicos de condiciones de frontera a partir de los cuales se describen todos los demás posibles, éstos son:

- Condición de frontera tipo Dirichlet (Valor conocido de temperatura en la frontera).
- Condición de frontera tipo Newmann (Conocimiento de las derivadas de la temperatura en la frontera).
- Condición de frontera tipo Robin (Conocimiento de la relación entre derivadas y valores de la temperatura en la frontera).

1.4. Organización del Documento

En este trabajo se realiza el análisis del calentamiento por corrientes de Eddy utilizando el método de elementos finitos. Con el presente documento, se da informe de los pasos seguidos durante el desarrollo de la investigación. Para dar una ubicación al lector sobre el contenido y alcances del libro, a continuación se da una breve descripción de los principales aspectos del contenido.

En el capítulo 2 se analizan las propiedades del material ferromagnético involucradas en los modelos que describen el fenómeno en estudio, y su relación con las variables que se desea calcular. Posteriormente se determina por medio de un análisis cuales son los modelos más adecuados para representar las características del material.

Las corrientes de Eddy son abordadas en el capítulo 3. En donde se analiza su descripción cuantitativa, para seleccionar la representación más adecuada en términos de aproximación y adaptabilidad a la geometría. Así mismo, se selecciona el esquema de introducción de la histéresis y se verifica la unicidad de la solución del problema para descartar fallas de convergencia en la aplicación de FEM.

En el capítulo 4 se considera el problema térmico, describiendo los modelos en torno a los cuales está estructurado el fenómeno y especificando cual es la forma de los términos de generación de calor con relación a las cantidades electromagnéticas.

El capítulo 5 expone la aplicación de elementos finitos a los planteamientos analíticos determinados en los capítulos precedentes. Se realiza una selección del tipo de espacio de elementos finitos y se demuestra que las relaciones obtenidas son estables en cuanto su discretización en el tiempo, encontrándose que la constante que da la medida de la estabilidad para variaciones temporales es, dependiente de las características de las matrices principales de geometría obtenidas para el problema espacial.

Los aspectos principales de implementación son descritos en el capítulo 6, en donde se realiza una selección de las herramientas más adecuadas para la implementación en Matlab de los planteamientos resultantes del capítulo 5.

El capítulo 7 exhibe los resultados alcanzados, presentando en primera instancia las simulaciones de dos materiales ferromagnéticos, realizándose una descripción de los datos obtenidos, para enfocar alrededor de éstos una discusión en torno a su significado físico y su relación con los trabajos de otros autores.

Capítulo 2

Propiedades del Hierro en Presencia de Campos Electromagnéticos

El hierro es un material ferromagnético, posee una alta densidad y conductividades térmica y eléctrica elevadas. Es extensivamente usado en aplicaciones donde se requieren excelentes conductores y medios de gran permeabilidad magnética [20][21].

En la fabricación de la mayor parte de motores, transformadores y generadores se emplean materiales de este tipo en grandes proporciones [20][21], hecho que implica una notable influencia de los efectos de las corrientes de Eddy en el comportamiento de estos sistemas.

La forma funcional de la permeabilidad magnética aunque conocida, presenta una enorme dificultad a la hora de realizar estudios cuantitativos debido a la no linealidad y la histéresis. En este capítulo se hace un análisis de las propiedades del hierro involucradas en el fenómeno físico de calentamiento por corrientes de Eddy, teniendo en cuenta los principales modelos que las describen, sus limitaciones, y principales rangos de trabajo.

2.1. Propiedades Electromagnéticas

2.1.1. Conductividad Eléctrica

La conductividad eléctrica se cuantifica como el inverso de la resistividad. Esta última se modela en materiales conductores en forma polinómica [1] como¹:

$$\rho_E = \rho_{Er} \left(1 + \alpha_{\rho_{Er}} \Delta T + \beta_{\rho_{Er}} (\Delta T)^2 + \gamma_{\rho_{Er}} (\Delta T)^3 + \dots \right) \quad (2.1)$$

con $\Delta T = T - T_{ref}$, donde T_{ref} es la temperatura de referencia y T la temperatura del cuerpo.

En materiales ferromagnéticos el término dominante es $\alpha_{\rho_{Er}} \Delta T$ cuyo valor está alrededor de $4,5 \times 10^{-3} \Delta T$ con una temperatura de referencia de $293,15K$ [1].

En sistemas como motores, transformadores, generadores y en donde la existencia de las corrientes de Eddy es indeseable, la magnitud de los cambios de temperatura ΔT , permite usar satisfactoria-

¹ $\rho_{Er}, \sigma_{\rho_{Er}}$, son los valores registrados en la temperatura de referencia T_{ref} , generalmente ésta última se asocia a la temperatura ambiente.

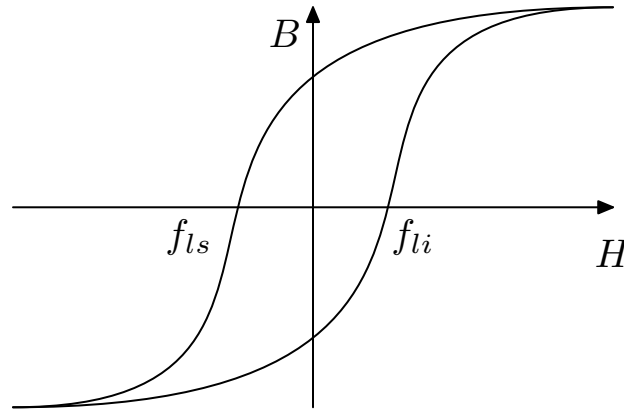


Figura 2.1: Relación B-H en un material ferromagnético

mente el modelo de conductividad eléctrica [1]:

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{1 + \alpha_{\rho Er} \Delta T} \quad (2.2)$$

Clemens y Gjonaj han mostrado en [22], que los cambios de las propiedades electromagnéticas y térmicas, no son significativos en todos los intervalos de temperatura, ya que existen intervalos ΔT_{sc} en los cuales éstas son débilmente dependientes de la última. Esto permite realizar actualizaciones de las propiedades, por alteraciones térmicas, sólo cuando haya cambios significativos, lo cual se define observando el porcentaje de variación de las cantidades involucradas, y el grado de aproximación que se desea en el tiempo en el que se realiza el estudio.

En este trabajo se considerarán intervalos ΔT donde σ en 2.2 cambie en menos de un 10 %. Por lo cual no se requieren actualizaciones de la conductividad eléctrica del material respecto a cambios en la temperatura.

2.1.2. Permeabilidad: Relación B-H

Uno de los principales retos para modelar campos electromagnéticos en materiales ferromagnéticos, es la modelización y manejo de la histéresis en la relación B-H.

Algunos autores como Naidu en [23], han propuesto modelos matemáticos para simular este fenómeno a fin de introducirlo en algunos esquemas numéricos, sacrificando exactitud y precisión a cambio de un manejo y costo computacional aceptables. En otros enfoques, se han empleado estrictamente las características experimentales de la curva B-H, y se han diseñado esquemas cada vez más eficientes adaptados a esta consideración [9][7][8].

Para el uso de las características experimentales del material se requiere de un proceso de modelado de los lazos de histéresis a partir de los datos obtenidos por medición. Así, para introducir estos modelos en un esquema es necesario que las curvas obtenidas cumplan algunos criterios para garantizar convergencia [7][8].

En un mismo problema pueden emplearse varios modelos de histéresis con propósitos diferentes [24]. Es frecuente modelar los lazos de histéresis con curvas por interpolación polinómica fragmentada para calcular los campos evolucionando en el tiempo, y emplear otro modelo más simplificado para calcular las pérdidas. Existen razones de peso para hacer esto:

- La interpolación polinómica fragmentada permite excelentes aproximaciones para el modelamiento de los datos, con condiciones de diferenciabilidad e integrabilidad [25], de tal manera que se obtiene una fiel representación del fenómeno B-H.
- Los requerimientos de regularidad (integrabilidad y diferenciabilidad) que son necesarios en un modelo para el cálculo de campos, son innecesarios para el cálculo de pérdidas ya que se requiere a lo más que²: $f_s \in C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ [26].
- El modelo del cálculo de pérdidas debe ser lo suficientemente sencillo como para que la integral $\int f_s dH$ sea manejable en términos de implementación y costo computacional.

Por ello, en este trabajo se hará uso de estas ideas. El modelo principal se seleccionará de forma tal que las curvas obtenidas son modeladas mediante interpolación por trazadores cúbicos, y sean funciones de Lipschitz³ en su dominio de definición. Para garantizar esto se realiza un tratamiento de los datos experimentales (ver capítulo 6), y se asegura el hecho de que las funciones de lazo obtenidas deben ser no decrecientes.

Entonces, sea \mathfrak{H} el modelo que representa la histéresis para el cálculo de campos, éste se define como

$$\mathfrak{H} = \begin{cases} f_{ls} & \text{si } t_i < t \leq t_{i+T/2} \\ f_{li} & \text{si } t_{i+T/2} < t \leq t_{i+T} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde f_{ls}, f_{li} son los lazos superior e inferior de la curva de histéresis, t_i representa el tiempo inicial de la excitación en forma cosenoidal, $t_{i+T/2}$ el tiempo correspondiente a medio periodo de la excitación y t_{i+T} el tiempo de un periodo, durante un ciclo. Las funciones de lazo superior e inferior f (ver figura 2.1) poseen las siguientes características⁴:

- f es un polinomio cúbico, representado f_j en el intervalo $[H_j, H_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- $f(H_j) = B_j \forall j = 0, 1, \dots, n$.
- $f_{j+1}(H_{j+1}) = f_j(H_{j+1}) \forall j = 0, 1, \dots, n-2$.
- $f'_{j+1}(H_{j+1}) = f'_j(H_{j+1}) \forall j = 0, 1, \dots, n-2$.
- $f''_{j+1}(H_{j+1}) = f''_j(H_{j+1}) \forall j = 0, 1, \dots, n-2$.
- $f''(H_{min}) = f''(H_{max}) = 0$

Con H_j, B_j los datos experimentales de las curvas de histéresis.

Pfister en [26] realiza una propuesta para calcular las pérdidas por histéresis empleando un modelo de función analítico. En este trabajo se seguirá este enfoque empleando una función del tipo⁵:

$$f_s = k_1 + k_2 \tan^{-1}(H \pm H_c)$$

debido a su semejanza y cercanía a los datos experimentales del material. Las razones para seguir esta metodología, están definidas por los excelentes resultados que obtuvo Pfister respecto de mediciones realizadas.

² f_s representa la relación B-H, como una función de la intensidad de campo magnético. $C^n(X)$ $n = 0, 1, \dots$ representa el conjunto de funciones n -diferenciables en el dominio X . $L^1(X)$ es el conjunto de funciones integrables en el dominio X

³Para definición ver [27][28]

⁴ H_j, B_j representan los datos experimentales ya con un tratamiento de adecuación

⁵ k_1, k_2 son constantes que se ajustan de acuerdo al comportamiento de los datos. H_c es el valor de campo coercitivo

2.1.3. Propiedades Térmicas

Conductividad Térmica, Densidad y Calor Específico

Al igual que la resistividad eléctrica, la conductividad térmica y el producto densidad-calor específico se modelan como en la ecuación 2.1 [1][29]. Frecuentemente, estas propiedades son consideradas como constantes dentro de un intervalo adecuado de temperatura [1]. El término dominante para éstas es del orden de $1 \times 10^{-4} \Delta T$ [1][29]. Así, una selección de ΔT de la misma magnitud que en la conductividad eléctrica será suficiente para garantizar que una actualización por cambio de temperatura no sea necesaria y que la dependencia de ésta sea débil.

Ter Maten y Melissen en [30], Janssen en [5], Gong en [31] y Ciric en [12] han realizado cálculos y simulaciones de calentamiento por corrientes de Eddy, teniendo en cuenta los aspectos considerados anteriormente en materiales lineales y ferromagnéticos, obteniendo resultados satisfactorios en cuanto a exactitud y precisión respecto de los datos obtenidos por medición.

Capítulo 3

Corrientes de Eddy

Consecuencia de las leyes básicas del electromagnetismo, es el hecho de que a partir de un campo magnético variante en el tiempo pueda obtenerse una tensión inducida en un material sometido a éste. Cuando el medio es conductor se forman en él corrientes, denominadas de Eddy, cuya existencia afecta a la mayor parte de dispositivos eléctricos y electrónicos. El presente capítulo está destinado al estudio de las corrientes de Eddy, y sus principales formas de descripción, así como a un análisis de sus formulaciones analíticas.

3.1. Descripción Cuantitativa

Como todo fenómeno electromagnético, el fenómeno de Corrientes de Eddy puede describirse a partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{H}} = \vec{\mathbb{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbb{D}}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{D}} = \rho_v \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{B}} = 0 \quad (3.4)$$

Sin embargo los efectos más significativos de las corrientes de Eddy, se aprecian a menudo en sistemas con excitaciones de baja frecuencia (50-60 Hz), en cuyo caso la descripción de éstas se realiza empleando la aproximación cuasiestática de las ecuaciones 3.1 3.2 3.3 3.4 [32][33]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbb{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{H}} &= \vec{\mathbb{J}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{D}} &= \rho_v \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{B}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

cuya validez requiere

$$\text{máx} \left| \frac{\partial \vec{\mathbb{D}}}{\partial t} \right| \ll \text{máx} |\vec{\mathbb{J}}|$$

o en forma equivalente

$$\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \ll 1$$

donde ω es la frecuencia angular máxima registrada, ϵ la permitividad y σ la conductividad eléctrica. Para metales como el hierro la corriente de desplazamiento es despreciable comparada con la corriente de conducción hasta frecuencias del orden de 10^{15}Hz [32][14].

Adicional a esto, es necesario el conocimiento de la relación entre intensidad de campo magnético \vec{H} y la densidad de flujo magnético \vec{B} , así como la relación entre el campo eléctrico y la densidad de corriente; junto con unas condiciones iniciales y de frontera asociadas a la región de solución [34][14][35][15].

3.2. Formulaciones de Corrientes de Eddy

Para la solución de las ecuaciones 3.5 existen diferentes planteamientos conocidos como formulaciones en los que se introducen nuevas variables, que permiten lograr una forma equivalente de problema, adecuada a requerimientos de implementación de una técnica numérica de solución [34][36].

Las formulaciones diferenciales son particularmente adaptables a técnicas como FEM, mientras que las formulaciones integrales lo son a métodos de elemento de frontera (BEM)[14][4]. Sin embargo, la formulación variacional, un caso particular de formulación integral, se realiza a partir de formulaciones diferenciales y es necesaria en un planteamiento donde se use FEM; por estas razones se discutirán en este capítulo las formulaciones diferenciales, y la formulación variacional se discutirá en el capítulo 5.

3.2.1. Formulaciones Diferenciales

Sea Ω_c una región conductora ferromagnética, simplemente conexa y acotada. Ω_s una región de conductividad eléctrica nula circundante a Ω_c (ver figura 3.1), en donde puede haber excitaciones generadoras de campo magnético. $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_s$ es en general la región de solución de un problema de corrientes de Eddy. Para la solución de cualquier planteamiento se requiere:

- Un conjunto de ecuaciones descriptivas del problema (EDP).
- Condiciones iniciales y de frontera.
- Condiciones de interfaz en $\partial\Omega_{cs}$ para asegurar la continuidad de algunas cantidades.
- El conocimiento de la relación B-H en Ω .
- Condiciones de calibración, impuestas para garantizar la unicidad de la solución.

La forma de las EDP depende del esquema empleado para la introducción y representación de la relación B-H en las ecuaciones, así como de las condiciones de calibración y la geometría del problema [34]. La presentación de dicho esquema se realizará en secciones subsecuentes, a continuación se presentarán las características esenciales de cada formulación necesarias para llegar a las EDP.

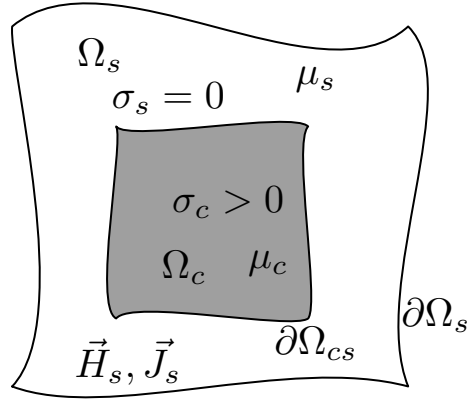


Figura 3.1: Esquema básico de las corrientes de Eddy

Formulación $\vec{\mathbb{A}} - \phi$

Se definen $\vec{\mathbb{A}} \in C^2(\Omega) \cap C^1(0, t_f)$ y $\phi \in C^2(\Omega_c) \cap C^1(0, t_f)$ tales que¹

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}} &= \vec{\mathbb{B}} & \text{en } \Omega = \Omega_c \cup \Omega_s \\ \vec{\mathbb{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbb{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi & \text{en } \Omega_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con estas ecuaciones, el conjunto de ecuaciones 3.5 y la relación B-H se obtiene una ecuación diferencial parcial vectorial en donde $\vec{\mathbb{A}}$ y ϕ son las incógnitas. En la región Ω_c habrían dos incógnitas $\vec{\mathbb{A}}$ y ϕ , mientras que en Ω_s sólo $\vec{\mathbb{A}}$. Las condiciones de frontera son impuestas en $\partial\Omega_s$ sobre $\vec{\mathbb{A}}$, así como las condiciones de interfaz en $\partial\Omega_{cs}$ [34].

Formulación $\vec{\mathbb{A}} - \phi, \psi$

En esta formulación, conocida como de potencial escalar reducido [37][38], se definen $\vec{\mathbb{A}} \in C^2(\Omega_c) \cap C^1(0, t_f)$, $\phi \in C^2(\Omega_c) \cap C^1(0, t_f)$ y $\psi \in C^2(\Omega_s) \cap C^1(0, t_f)$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}} &= \vec{\mathbb{B}} \\ \vec{\mathbb{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbb{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi & \text{en } \Omega_c \\ \vec{\mathbb{H}} &= \vec{\mathbb{H}}_s - \vec{\nabla} \psi \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{H}}_s &= \vec{J}_s & \text{en } \Omega_s \end{aligned} \quad (3.7)$$

relacionando con 3.5 y el conocimiento de la relación B-H se obtiene una EDP donde $\vec{\mathbb{A}}, \phi, \psi$ son las incógnitas. Este planteamiento implica en términos de implementación de una técnica numérica de solución, un menor costo computacional, comparativamente con la formulación $\vec{\mathbb{A}} - \phi$ [34]. Las condiciones de frontera son impuestas sobre ψ en $\partial\Omega_s$, mientras las condiciones de interfaz se imponen sobre $\vec{\mathbb{A}}$ y ψ en $\partial\Omega_{cs}$ [14].

¹ $C^2(\Omega) = \{ \vec{\mathbb{F}} = F_i \hat{u}_i \mid F_i \in C^2(\Omega) \}$, y t_f el límite superior de tiempo sobre el que se analiza el fenómeno

Formulación $\vec{\mathbb{T}} - \tilde{O}$

De forma análoga a la introducción de un potencial magnético vectorial $\vec{\mathbb{A}}$, puede introducirse un potencial eléctrico vectorial $\vec{\mathbb{T}} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$ y un potencial magnético escalar $\tilde{O} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$ [39][14], tales que :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{J}} &= \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{T}} \\ \vec{\mathbb{H}} &= \vec{\mathbb{T}} - \vec{\nabla} \tilde{O} \quad \text{en } \Omega = \Omega_c \cup \Omega_s \end{aligned} \quad (3.8)$$

El uso de esta formulación es menos frecuente que las de tipo potencial magnético vectorial, sin embargo los resultados obtenidos en algunos estudios y experimentos realizados por Nakata en [36], muestran que tiene ventajas frente a algunas de este tipo. Las condiciones de frontera y de interfaz son impuestas sobre $\vec{\mathbb{T}}$ y \tilde{O} [39].

Formulación $\vec{R} - \psi$

Sea $\vec{R} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$ y $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega_c) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$ tales que:

$$\vec{\mathbb{H}} = \vec{R} - \vec{\nabla} \psi \quad \text{en } \Omega \quad (3.9)$$

A diferencia de la formulación $\vec{\mathbb{T}} - \tilde{O}$ las condiciones de frontera son impuestas únicamente sobre ψ , así como las condiciones de interfaz. Otra diferencia entre este tipo de planteamiento y otras formulaciones es que en las EDP obtenidas no se involucran derivadas espaciales de la conductividad eléctrica.

Formulación $\vec{\mathbb{H}} - \vec{\mathbb{E}}$

Sin ningún tipo de adecuación algebraica, la formulación del problema de las corrientes de Eddy puede realizarse en términos de las cantidades primarias de las ecuaciones de Maxwell, empleando $\vec{\mathbb{H}}$ y $\vec{\mathbb{E}}$ como variables de estado [40]. Las condiciones de calibración en un planteamiento de este tipo pueden no ser necesarias, y la interpretación física de la solución es directa.

3.3. Selección de la Formulación

En la solución numérica de un problema electromagnético hay un compromiso entre exactitud y costo computacional. Los objetivos de este trabajo están enfocados hacia el primer aspecto, y dentro de este ámbito hay puntos fundamentales para considerar en la selección de una formulación:

3.3.1. Grado de Aproximación

Nakata y Fujiwara han realizado en [36], un estudio comparativo entre formulaciones diferenciales en el análisis de corrientes de Eddy, en geometrías que incluyen cúbicas y rectangulares, usando FEM. Como resultado de éste se concluye que las mejores aproximaciones a la solución se obtienen con la formulación $\vec{\mathbb{A}} - \phi, \psi$.

3.3.2. Introducción de un Esquema para el manejo de la Histéresis

Ionita en [7][8] y Fallah en [9] han propuesto independientemente, un esquema de tipo iterativo para el manejo e introducción de la histéresis, computacionalmente eficiente², empleando el potencial magnético vectorial, obteniendo excelentes resultados respecto de mediciones realizadas. En este esquema se define una variable de actualización de datos dada por:

$$\vec{R} = \nu_{FP}\vec{\mathbb{B}} - \vec{\mathbb{H}} \quad \text{con} \quad \nu_{FP} = cte$$

donde $\vec{\mathbb{B}}$ y $\vec{\mathbb{H}}$ están dados por el modelo empleado para representar los datos experimentales de la curva de histéresis, y ν_{FP} es seleccionada entre el máximo y mínimo valor del inverso de la permeabilidad [8][7][9]. Con \vec{R} se actualizan las propiedades del material respecto a cambios en el tiempo, ya que se usa paralelamente con las EDP obtenidas de la formulación seleccionada.

3.3.3. Dominio de Solución

En problemas donde sólo se consideran los efectos de las corrientes de Eddy en el material conductor, como en este trabajo, se adapta particularmente la formulación $\vec{\mathbb{A}} - \phi, \psi$ ya que $\vec{\mathbb{A}}$ y ϕ están definidas sólo en Ω_c y ψ que representa la información externa sólo en Ω_s .

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se selecciona la formulación $\vec{\mathbb{A}} - \phi, \psi$ junto con el esquema de manejo de la histéresis propuesto por Ionita y Fallah.

3.4. Planteamiento del Problema Electromagnético

Con la selección de la formulación y el esquema de manejo de la histéresis, se obtienen las EDP del problema electromagnético:

$$-\sigma \left(\frac{\partial \vec{\mathbb{A}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \right) = \nu_{FP} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}}) - \vec{\nabla} \times \vec{R} \quad \text{en} \quad \Omega_c \quad (3.10)$$

$$\vec{\mathbb{H}} = \nu_{FP} \vec{\mathbb{B}} - \vec{R} \quad \text{en} \quad \Omega_c \quad (3.11)$$

donde $\vec{\mathbb{A}} \in \mathcal{C}^2(\Omega_c) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$, $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega_c) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$ y $\vec{R} \in \mathcal{C}^2(\Omega_c)$.

3.4.1. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera empleadas en diversas investigaciones donde sólo se realizan cálculos en la región conductora, obedecen a la continuidad de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético y de la componente normal de la densidad de flujo magnético en la frontera.

²En la literatura existen pocos esquemas diseñados para introducir la histéresis en forma eficiente teniendo en cuenta la información experimental. Los trabajos de Ionita y Fallah representaron la única alternativa eficiente donde se contemplan los datos experimentales con fidelidad. Es más, a partir de los estudios de estos dos autores se realiza actualmente investigación sobre materiales ferromagnéticos empleando otras técnicas numéricas aún en desarrollo

Esto se expresa como³ $\vec{\mathbb{H}} \times \vec{\mathbf{n}}_c = \vec{H}_s \times \vec{\mathbf{n}}_c$ y $\vec{\mathbb{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c = \vec{B}_s \cdot \vec{\mathbf{n}}_c$, lo cual implica en términos algebraicos un conocimiento directo y/o indirecto de una intensidad de campo magnético en $\partial\Omega_c$ [13][41][42]. Teniendo en cuenta esto, las condiciones de frontera para el problema electromagnético consideradas en este trabajo tienen las características siguientes

- En el caso de la sección rectangular, la intensidad de campo magnético total es conocida en la frontera, es decir:

$$\vec{\mathbb{H}}|_{\partial\Omega_c} = \vec{H}_0(t) \implies \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}} \right) |_{\partial\Omega_c} = \vec{B}_{0curve}$$

donde $\vec{H}_0(t)$ es una función conocida, $\vec{B}_{0curve} = \mathfrak{H} \left(\vec{H}_0(t) \right)$ en $\partial\Omega_c$, \mathfrak{H} es el modelo de la histéresis.

- En el caso de la barra de longitud finita, se tendrá conocimiento de la densidad de flujo magnético en $\partial\Omega_{cb}$, y la intensidad de campo magnético en $\partial\Omega_{ch}$, donde $\partial\Omega_{cb}, \partial\Omega_{ch}$ son dos subconjuntos del conjunto de frontera, disjuntos entre sí y que cubren completamente a $\partial\Omega_c$:

$$\vec{\mathbb{B}}|_{\partial\Omega_{cb}} = \vec{B}_0(t) \implies \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}} \right) |_{\partial\Omega_{cb}} = \vec{B}_0(t)$$

$$\vec{\mathbb{H}}|_{\partial\Omega_{ch}} = \vec{H}_0(t) \implies \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}} \right) |_{\partial\Omega_{ch}} = \vec{B}_{0curve}$$

Esto se puede sintetizar para la representación de los dos casos, como el conocimiento ya sea de una función de intensidad de campo magnético, o el de una función de densidad de flujo magnético en la frontera.

3.4.2. Condición Inicial

En el instante inicial $t = 0$ se considerará el material saturado. Esto se realiza teniendo en cuenta la poca contribución en términos cuantitativos para el calentamiento, correspondiente a la curva de magnetización, comparativamente con la correspondiente a los lazos superior e inferior de la curva de histéresis [5]; por lo cual:

$$\vec{\mathbb{B}}(t = 0) = B_{sat} \hat{u}_3 \quad \text{en } \Omega_c$$

donde B_{sat} es la densidad de flujo magnético correspondiente a la saturación, \hat{u}_3 es el vector unitario en la misma dirección de la orientación del paralelepípedo o rectángulo⁴ considerado en un sistema cartesiano $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$. Para satisfacer esta condición en términos de $\vec{\mathbb{A}}$, se selecciona $\vec{A}_0 = \vec{\mathbb{A}}(t = 0)$ como:

$$\vec{A}_0 = \frac{B_{sat}}{2} (-x_2 \hat{u}_1 + x_1 \hat{u}_2) \quad \text{en } \Omega_c \quad (3.12)$$

de forma tal que en $t=0$, se obtenga $\vec{\nabla} \times \vec{A}_0 = B_{sat} \hat{u}_3$.

³ \vec{H}_s es la intensidad de campo magnético en el medio circundante al metal. En los problemas donde se analiza solamente la región conductora, es considerado como una función conocida [13][18]. $\vec{\mathbf{n}}_c$ es el vector normal a $\partial\Omega_c$.

⁴Según las especificaciones dadas en el capítulo 1, ésta correspondería a la dirección z

3.4.3. Condiciones de Calibración

Para garantizar la unicidad del potencial magnético vectorial \vec{A} , no basta con las condiciones de frontera, es necesario agregar unas condiciones denominadas de calibración [35][15][34], así como la especificación de algunas condiciones implícitas en la naturaleza del fenómeno [34][14]. Para solucionar problemas de corrientes de Eddy se emplea la condición de calibración de Coulomb [34][35][15]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.13)$$

Adicional a ello, se especifican más condicionamientos, los cuales son derivados de la física del problema. Así de :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \quad \text{en } \Omega_c && : \Omega_c \text{ libre de fuentes y sumideros de corriente} \\ \vec{J} \cdot \vec{n}_c &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_c && : \text{la corriente no tiene componentes salientes a } \Omega_c \end{aligned}$$

se obtienen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \right) &= 0 \quad \text{en } \Omega_c \\ \vec{n}_c \cdot \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \right) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_c \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.4.4. El significado físico de $\vec{\nabla} \phi$

En regiones donde la conductividad eléctrica no tiene variaciones espaciales, no se generan superficies de carga, con lo que se puede asegurar que $\vec{\nabla} \phi = 0$ [43][44][45]. Los materiales considerados en este trabajo no poseen variaciones espaciales de la conductividad, por lo cual el término $\vec{\nabla} \phi$ desaparece de las EDP del planteamiento. Por otra parte, el hecho de que esta condición se verifique, garantiza que el cumplimiento de la condición de calibración de Coulomb se encuentre implícito en la ecuación que define el planteamiento [34][39].⁵

3.4.5. Unicidad de la Solución

Sea Ω_c una región ferromagnética conductora; teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores el planteamiento de corrientes de Eddy es:

$$\begin{aligned} -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \nu_{FP} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \times \vec{R} \\ \vec{H} &= \nu_{FP} \vec{B} - \vec{R} \end{aligned} \quad \text{en } \Omega_c \quad (3.15)$$

junto con las condiciones

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})|_{\partial\Omega_c} &= \vec{B}_{0curve} \\ \vec{A}(t=0) &= \vec{A}_0 = \frac{B_{sat}}{2} (-x_2 \hat{u}_1 + x_1 \hat{u}_2) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \quad \text{en } \Omega_c \\ \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{n}_c &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_c \end{aligned} \quad (3.16)$$

⁵Esto se ve al tomar la divergencia de 3.10, y teniendo en cuenta que el potencial magnético vectorial es dependiente del tiempo

Y sean $\vec{\mathbb{A}}_1, \vec{\mathbb{A}}_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(0, t_f)$ dos soluciones de 3.15 con las condiciones 3.16. Se construye $\vec{\mathbb{A}}^{(0)}$ tal que $\vec{\mathbb{A}}^{(0)} = \vec{\mathbb{A}}_1 - \vec{\mathbb{A}}_2$. Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{n}}_c \cdot \vec{\mathbb{A}}^{(0)} &= 0 & \text{en } \partial\Omega_c \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}}^{(0)} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{A}}^{(0)} &= 0 & \text{en } \Omega_c \end{aligned}$$

de la relación de rotacional se implica $\vec{\mathbb{A}}^{(0)} = \vec{\nabla}u$, para algún $u \in C^2(\Omega_c)$. Adicionalmente teniendo en cuenta las dos relaciones restantes se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & \text{en } \Omega_c \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en } \partial\Omega_c \end{aligned}$$

lo cual implica que $u = cte$ en Ω_c [46][47]. Entonces $\vec{\nabla}u = 0 \implies \vec{\mathbb{A}}_1 = \vec{\mathbb{A}}_2$, con lo que se garantiza la unicidad de la solución.

En este trabajo se considerarán geometrías cúbicas y rectangulares, por lo cual $\vec{\mathbf{n}}_c$ no estará estrictamente definido en todo $\partial\Omega_c$. Sin embargo estas geometrías son dominios acotados de Lipschitz⁶ y el conjunto de puntos para los cuales no se define $\vec{\mathbf{n}}_c$ es de medida cero [49], lo que permite garantizar unicidad en casi todo punto [50].

⁶Para detalles de este término ver [48]

Capítulo 4

Calentamiento por Corrientes de Eddy

El fenómeno de corrientes de Eddy es caracterizado en algunos sistemas por sus efectos de calentamiento [5][29]. En materiales ferromagnéticos éste es consecuencia principalmente del efecto Joule y la histéresis. En la mayor parte de las situaciones estos efectos son indeseables, debido a que no son contemplados en los análisis de diseño y en muchos otros casos son sólo estimados. Este capítulo está destinado a tratar la relación cuantitativa existente entre las corrientes de Eddy y el fenómeno de calentamiento consecuencia de éstas.

4.1. Planteamiento del Problema Térmico

El calentamiento por corrientes de Eddy en una región ferromagnética Ω_c es descrito como un problema de conducción térmica [5][30], cuya EDP es:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + q \quad \text{en } \Omega_c$$

donde ρ es la densidad de masa, c el calor específico y λ la conductividad térmica. El término q es asociado a la generación de calor, y T es la temperatura del cuerpo. Para los materiales tratados en este trabajo, donde la conductividad térmica es homogénea (ver capítulo 2) la EDP se reduce a [5]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + q \quad \text{en } \Omega_c \quad (4.1)$$

para solucionar esta ecuación se requiere de condiciones de frontera, así como de una condición inicial asociada.

4.1.1. Términos de Generación de Calor

La circulación de corriente en un material ferromagnético está asociada directamente a un calentamiento descrito mediante el efecto Joule. Por otra parte, el rozamiento entre los dominios ferromagnéticos cuando existe una intensidad de campo magnético de excitación, tiene como consecuencia un aumento de temperatura considerable. Este último es frecuentemente calculado por ciclo de excitación [26][51][52][53], sin embargo en el análisis transitorio del fenómeno esto no es admisible ya que se requiere del conocimiento de los términos de calor en cada instante.

El término q en 4.1 de generación de calor puede expresarse como la suma de un término asociado a las pérdidas óhmicas q_{oh} y otro asociado a las pérdidas por histéresis q_{hy} [1][5]:

$$q = q_{oh} + q_{hy} \quad (4.2)$$

$$q_{oh} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (4.3)$$

$$q_{hy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_i}^{H(t)} B dH' \quad (4.4)$$

en donde la densidad de flujo magnético se considera por medio del modelo empleado para representar la histéresis, y se realiza la integración entre una intensidad de campo inicial y otro final referente al instante en el que se calculan las pérdidas. En problemas donde las intensidades de campo posean dos o tres componentes, habrá un término de pérdidas asociado a cada una de ellas, de manera que las pérdidas totales asignadas a ese punto se calculan como:

$$q_{hy} = \sqrt{q_{hy(x)}^2 + q_{hy(y)}^2 + q_{hy(z)}^2}$$

4.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera

Para el manejo del problema térmico no se requieren condiciones de calibración, ya que las condiciones de frontera y la condición inicial garantizan unicidad [16][5][30]. En este trabajo se considerarán tres tipos de condiciones de frontera:

- $T(\partial\Omega_c) = T_{amb}$ (Condición tipo Dirichlet). Este condicionamiento resulta adecuado para modelar el efecto de un flujo refrigerante sobre el cuerpo en calentamiento, de manera tal que la temperatura en las fronteras permanece constante.
- $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} |_{\partial\Omega_c} = h(T_m - T) |_{\partial\Omega_c}$ (Condición tipo Robin). Con ésta se modelan los efectos convectivos en $\partial\Omega_c$. Representa una transferencia neta de calor entre el metal en calentamiento y el medio circundante.
- $\frac{\partial T}{\partial n} |_{\partial\Omega_c} = 0$ (Condición tipo Newmann). Cuando no hay transferencia de calor entre el cuerpo en calentamiento y el medio circundante, se emplea esta condición, denominada de aislamiento térmico.

La condición inicial considerada es $T(t = 0) = T_{amb}$, es decir la temperatura inicial es la temperatura ambiente.

Capítulo 5

Análisis de Elementos Finitos

Para el análisis de fenómenos electromagnéticos y térmicos, hay diversos métodos y técnicas, entre los cuales sobresalen FEM, BEM y FDTD¹. Driesen en [1] muestra que FEM resulta ser el método más adecuado para el análisis de fenómenos electromagnéticos acoplados a fenómenos térmicos, teniendo en cuenta exactitud y aspectos de implementación. Algunos estudios y experimentos han sido realizados empleando FEM para solucionar problemas referentes a las corrientes de Eddy, obteniéndose excelentes resultados en cuanto a aproximación e implementación, como por ejemplo en [34][18][9][54][55][38][56]. Igualmente se ha empleado FEM para solucionar numéricamente el problema de calentamiento producido por éstas corrientes, y los resultados obtenidos son superiores a los obtenidos por otros métodos en cuanto a exactitud [1][30][5]. En el presente capítulo se realiza la aplicación de elementos finitos a los planteamientos analíticos obtenidos en los dos capítulos anteriores, y la implementación de un esquema de discretización en el tiempo a fin de obtener las ecuaciones matriciales que deben resolverse.

5.1. Formulación Variacional

5.1.1. Problema Electromagnético

La formulación variacional se realiza a partir de las EDP, teniendo en cuenta las condiciones de frontera empleando el método de Galerkin [3][2][4]. Sea $\vec{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega_c)$ ². Multiplicando la ecuación 3.15a por \vec{v} con el producto punto de \mathbb{R}^n e integrando en el dominio de solución, se obtiene

$$-\int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega_c = \int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \nu_{FP} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\Omega_c - \int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{R} d\Omega_c \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega_c) \quad (5.1)$$

Esta ecuación puede llevarse por medio de integración por partes e identidades vectoriales³, a una donde sólo existan términos con primeras derivadas sobre \vec{A} [34][3][50]. Para las geometrías tratadas en este trabajo (cúbicas y rectangulares) se tienen las siguientes ecuaciones, realizadas teniendo en cuenta las condiciones de frontera descritas en el capítulo 3 y los esquemas de las especificaciones 1.2 1.3:

¹Finite Difference Time Domain

² $\mathcal{H}^1(\Omega_c) = \{\vec{F} | F_i \in H^1(\Omega_c)\}$ esto es, el conjunto de vectores cuyas componentes pertenecen al espacio de sobolev $H^1(\Omega_c)$ [48][46]

³Para las principales identidades vectoriales véase [57]

Caso 2D

$$-\int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega_c = \nu_{FP} \left(\int_{\Omega_c} (\vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}) d\Omega_c - \oint_{\partial\Omega_{c\uparrow}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{v} \cdot \vec{n}_c \right) - \int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{R} d\Omega_c \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega_c) \quad (5.2)$$

donde

$$-\oint_{\partial\Omega_{c\uparrow}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{v} \cdot \vec{n}_c = \int_a^b B_{0curve}(t) (v_x(y=d) - v_x(y=c)) dx + \int_c^d B_{0curve}(t) (v_y(x=b) - v_y(x=a)) dy$$

Caso 3D

$$-\int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega_c = \nu_{FP} \left(\int_{\Omega_c} (\vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}) d\Omega_c - \oint_{\partial\Omega_c} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{v} \cdot (-\vec{n}_c) \right) - \int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{R} d\Omega_c \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega_c) \quad (5.3)$$

donde \vec{n}_c está dirigido de adentro de Ω_c hacia afuera, y

$$-\oint_{\partial\Omega_c} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{v} \cdot (-\vec{n}_c) = \int_e^f \int_a^b B_{0curve} (v_x(y=d) - v_x(y=c)) dx dz - \int_e^f \int_c^d (v_y(x=b) - v_y(x=a)) dy dz$$

La solución de 5.3 y 5.2 posee menos diferenciabilidad que la solución de 3.15-3.16. En 5.3 y 5.2 se requiere de la existencia de derivadas débiles⁴, ya que en el procedimiento se usa integración de Lebesgue⁵[3][2], y condiciones de integrabilidad sobre \vec{A}, \vec{R}, ϕ . Existen razones para emplear integración de Lebesgue en la obtención de éste planteamiento:

- Para obtener resultados de 5.3 y 5.2 no se requiere de la diferenciabilidad en todo punto, sino en *casi todo punto*⁶ [3][50], seleccionando un espacio de elementos finitos con funciones base lineales a trozos y de soporte compacto.
- La integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemman, para el caso de funciones Riemman-Integrables. [49][58].
- En los principales resultados y teoremas relacionados con la convergencia, se emplea este tipo de integración [3].

En este trabajo se hará uso de los rudimentos principales de la integración de Lebesgue, sin entrar en las rigurosidades de esta extensa y formal teoría, sólo en el planteamiento de la formulación variacional, ya que en los aspectos de implementación las integrales consideradas por integración de Lebesgue son Riemman-Integrables. [3][50].

⁴Derivadas generalizadas

⁵Para ver los principales aspectos de esta teoría ver[49][58]

⁶Esto quiere decir que el conunto de puntos en los cuales la derivada usual no está definida es de medida cero

5.1.2. Problema Térmico

sea $v \in H_{(0),0}^1(\Omega_c)^7$. Multiplicando 4.1 por este término e integrando sobre Ω_c :

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = \int_{\Omega_c} \lambda v \nabla^2 T d\Omega_c + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H_{(0),0}^1(\Omega_c) \quad (5.4)$$

al igual que en la ecuación 5.1, puede llevarse por medio de integración por partes a una ecuación donde sólo existen términos con primeras derivadas sobre T .

Caso 2D

- Condición $T(\partial\Omega_c) = T_{amb}$.

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = -\lambda \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} v d\Omega_c + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_c) \quad (5.5)$$

- Condición $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} |_{\partial\Omega_c} = h(T_m - T) |_{\partial\Omega_c}$.

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = \lambda \left(- \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} v d\Omega_c + \int_{\partial\Omega_c \uparrow} v \vec{\nabla} T \cdot \vec{\mathbf{n}}_c \right) + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H^1(\Omega_c) \quad (5.6)$$

donde

$$\int_{\partial\Omega_c \uparrow} v \vec{\nabla} T \cdot \vec{\mathbf{n}}_c = \frac{-h}{\lambda} \left(\int_c^d v (T_m - T) |_{x=a}^{x=b} dy + \int_a^b v (T_m - T) |_{y=c}^{y=d} dx \right)$$

- Condición $\frac{\partial T}{\partial n} |_{\partial\Omega_c} = 0$

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = -\lambda \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} v d\Omega_c + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H^1(\Omega_c) \quad (5.7)$$

Caso 3D

- Condición $T(\partial\Omega_c) = T_{amb}$.

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = -\lambda \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} v d\Omega_c + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_c) \quad (5.8)$$

- Condición $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} |_{\partial\Omega_c} = h(T_m - T) |_{\partial\Omega_c}$

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = \lambda \left(- \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} v d\Omega_c + \int_{\partial\Omega_c} v \vec{\nabla} T \cdot \vec{\mathbf{n}}_c \right) + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H^1(\Omega_c) \quad (5.9)$$

donde

$$\int_{\partial\Omega_c} v \vec{\nabla} T \cdot \vec{\mathbf{n}}_c = \frac{-h}{\lambda} \left(\int_e^f \int_c^d v (T_m - T) |_{x=a}^{x=b} dy dz + \int_e^f \int_a^b v (T_m - T) |_{y=c}^{y=d} dx dz + \int_c^d \int_a^b v (T_m - T) |_{z=e}^{z=f} dx dy \right)$$

⁷Es decir el espacio de sobolev puede ser H_0^1 o bien H^1 dependiendo del tipo de condiciones de frontera

- Condición $\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega_c} = 0$

$$\int_{\Omega_c} \rho cv \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_c = -\lambda \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} v d\Omega_c + \int_{\Omega_c} v q d\Omega_c \quad \forall v \in H^1(\Omega_c) \quad (5.10)$$

5.2. Selección de un Espacio de Elementos Finitos

Para tratar el problema de las corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos usando FEM se han realizado diversos trabajos empleando elementos de primer orden triangulares para 2D y tetrahedricos para 3D [9][7][8][54], obteniéndose excelentes resultados en cuanto a exactitud y precisión. Por otra parte, existen razones que justifican el uso de elementos triangulares para 2D y tetrahedricos para 3D de primer orden:

- Con elementos triangulares (tetrahedricos para 3D) se obtienen excelentes aproximaciones, sin necesidad de elevar el costo computacional para el manejo de un espacio de funciones de mayor orden asociado a otros elementos como rectangulares o elementos exóticos [7][9][2].
- La introducción de nodos dado un elemento, es un procedimiento que se realiza por conveniencia a problemas específicos [2], y por lo tanto no es necesario para llegar a resultados más exactos.

Para el problema térmico se considerarán los mismos elementos asociados al problema electromagnético, ya que esto permite asociar directamente las cantidades involucradas en los dos fenómenos [5]. Ter Maten en [30] ha empleado este esquema para determinar calentamiento por corrientes de Eddy obteniendo resultados satisfactorios.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ una región acotada no vacía. Se denominará con V el espacio de dimensión finita de funciones de forma definidas sobre K , y $N = \{N_1, \dots, N_k\}$ una base de V' (el conjunto de variables nodales, es el espacio dual a V) [3]. Se define el elemento finito

$$(K, V, N)$$

la base $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ de V es la base nodal de V . Entonces el interpolante sobre este elemento finito de una función $v : \Omega_c \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $N_i \forall i$ está definido, puede escribirse como

$$\mathcal{I}_K v = \sum_{i=1}^k N_i(v) \phi_i$$

5.2.1. Caso 2D

Sea $\Omega_c \subset \mathbb{R}^2$ un dominio rectangular acotado. Se considera una triangulación⁸ de Ω_c . El elemento finito para este tipo de subdivisión se particulariza como

$$(K^{(e)}, V^{(e)}, N^{(e)})$$

⁸Para definición ver [59] página 113

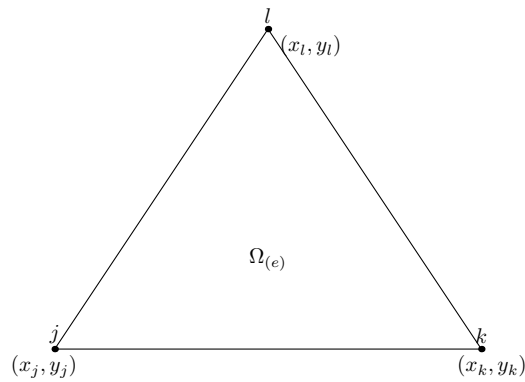


Figura 5.1: Elemento triangular de primer orden con su respectiva asignación de nodos

donde $K^{(e)}$ es el e-ésimo triángulo de la subdivisión, $V^{(e)}$ el espacio de funciones asociado cuya base es $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ y $N^{(e)}$ una base de $V^{(e)}$ que es $\{N_1, N_2, N_3\}$. Sean j, k, l los nodos del triángulo (e) (ver figura 5.1), entonces:

$$\phi_j^{(e)}(x, y) = \frac{D_{k,l}^{(e)}(x, y)}{C_{j,k,l}^{(e)}} \quad k \neq j \neq l \quad (5.11)$$

donde

$$C_{j,k,l}^{(e)} = \begin{vmatrix} 1 & x_j^{(e)} & y_j^{(e)} \\ 1 & x_k^{(e)} & y_k^{(e)} \\ 1 & x_l^{(e)} & y_l^{(e)} \end{vmatrix}, \quad D_{k,l}^{(e)}(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k^{(e)} & y_k^{(e)} \\ 1 & x_l^{(e)} & y_l^{(e)} \end{vmatrix}$$

5.2.2. Caso 3D

Sea $\Omega_c \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada en forma de paralelepípedo. Se considera una división de Ω_c en tetrahedros. El elemento finito para este caso es

$$\left(K^{(e)}, V^{(e)}, N^{(e)} \right)$$

donde $K^{(e)}$ es el e-ésimo tetrahedro de la subdivisión, $V^{(e)}$ el espacio de funciones asociadas cuya base es $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$. Sean j, k, l, m los nodos del tetrahedro (e) (ver figura 5.2), entonces:

$$\phi_j^{(e)}(x, y, z) = \frac{D_{k,l,m}^{(e)}(x, y, z)}{C_{j,k,l,m}^{(e)}} \quad (5.12)$$

donde

$$C_{j,k,l,m}^{(e)} = \begin{vmatrix} 1 & x_j^{(e)} & y_j^{(e)} & z_j^{(e)} \\ 1 & x_k^{(e)} & y_k^{(e)} & z_k^{(e)} \\ 1 & x_l^{(e)} & y_l^{(e)} & z_l^{(e)} \\ 1 & x_m^{(e)} & y_m^{(e)} & z_m^{(e)} \end{vmatrix}, \quad D_{k,l,m}^{(e)}(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_k^{(e)} & y_k^{(e)} & z_k^{(e)} \\ 1 & x_l^{(e)} & y_l^{(e)} & z_l^{(e)} \\ 1 & x_m^{(e)} & y_m^{(e)} & z_m^{(e)} \end{vmatrix}$$

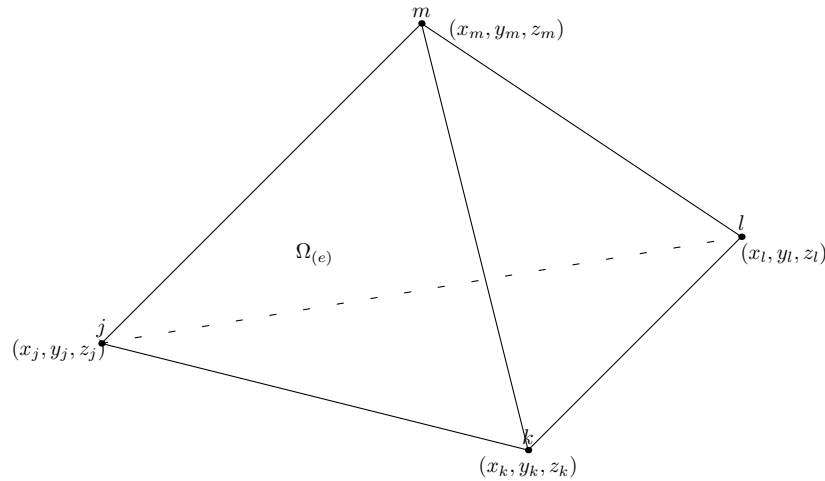


Figura 5.2: Elemento tetrahedrico de primer orden con su respectiva asignación de nodos

5.3. Discretización en el Dominio del Tiempo

La aplicación de elementos finitos al problema espacial teniendo en cuenta la variación temporal de las cantidades involucradas, es una técnica frecuente en el análisis numérico de ecuaciones diferenciales parciales [2]. El uso de esta técnica en este trabajo, es consecuencia del esquema empleado para introducir la histéresis ya que permite concebir la aproximación espacial con un espacio de elementos finitos asociado a un enmallado fijo, pero con los valores asignados a los nodos variando en el tiempo.

Una gran variedad de métodos pueden aplicarse para la discretización temporal en la obtención de una aproximación de las ecuaciones en cuanto a las variaciones temporales. Las relaciones resultantes son esquemas de ecuaciones en diferencias que deben tener tres características básicas para que puedan considerarse como aproximaciones valederas al modelamiento del problema:

- **Consistencia.** Las relaciones resultantes deben ser una *buena* aproximación de la ecuación original del problema.⁹
- **Convergencia.** La solución del sistema discreto debe ser una *buena* aproximación de la solución de la ecuación diferencial.
- **Estabilidad.** La solución del sistema discreto no debe ser alterada fácilmente por perturbaciones en los datos.

Fallah en [9] y Ionita en [7][8] han empleado para el problema de las corrientes de Eddy en materiales ferromagnéticos, una discretización temporal basada en integración numérica por trapecios como un medio para interrelacionar las cantidades en el tiempo, empleando el esquema de manejo de histéresis usado en este trabajo¹⁰. La representación de esta aproximación para un término se expresa como¹¹:

$$\int_{t_0}^{t_f} w(t)dt \simeq \frac{\Delta t}{2} (w(t + \Delta t) + w(t))$$

⁹ Aquí y en los demás incisos se hace referencia a las ecuaciones en cuanto a variaciones temporales.

¹⁰ Ionita y Fallah, son independientemente los creadores de este esquema

¹¹ Δt es el tamaño de paso empleado para la integración

Ionita muestra en [7] que el esquema de ecuación en diferencias obtenido es convergente siempre y cuando haya consistencia y las curvas que modelan la hystéresis sean funciones de Lipschitz. La consistencia depende de Δt y su relación con las condiciones de frontera. Tomando un Δt dentro de un rango adecuado¹², de tal manera que estén descritas las características principales de las funciones que definen estas condiciones, se obtiene consistencia [7][9]. En el caso particular de este trabajo las señales asociadas a las fronteras son funciones cosenoidales de f [Hz].

Teniendo en cuenta estos dos aspectos (consistencia y convergencia) y los espacios de elementos finitos seleccionados, el problema numérico se describe con las ecuaciones presentadas en la siguiente sección. Al final de ésta se demostrará que los esquemas de ecuaciones en diferencias obtenidos son estables.

Sea $[\mathbf{A}] = [A_{1x} \dots A_{n_{dx}} A_{y1} \dots A_{n_{dy}}]^T$ el vector de valores asignados a los nodos del espacio de elementos finitos seleccionado en el caso bidimensional, y $[\mathbf{A}] = [A_{1x} \dots A_{n_{dx}} A_{y1} \dots A_{n_{dy}} A_{1z} \dots A_{n_{dz}}]^T$ el vector de valores de los nodos en el caso de tres dimensiones. Se representará de esta manera al potencial magnético vectorial en las ecuaciones matriciales que se presentan en la siguiente sección. De manera análoga y consistente con las dimensiones de las matrices, se definen los vectores correspondientes a las funciones de prueba¹³ de la formulación variacional como $[\mathbf{v}] = [v_{1x} \dots v_{n_{dx}} v_{y1} \dots v_{n_{dy}}]$ y $[\mathbf{v}] = [v_{1x} \dots v_{n_{dx}} v_{y1} \dots v_{n_{dy}} v_{1z} \dots v_{n_{dz}}]^T$ para dos y tres dimensiones respectivamente.

5.3.1. Problema Electromagnético

Caso 2D

El planteamiento *por elemento* se escribe como

$$\nu_{FP} \left\{ \frac{\Delta t}{2} \left(B_{0curve}^{t+\Delta t} + B_{0curve}^t \right) [\mathbf{v}][\alpha\mathbf{f}] + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{v}][\alpha\mathbf{3}] \left([\mathbf{A}]^t + [\mathbf{A}]^{t+\Delta t} \right) \right\} - [\mathbf{v}][\beta] \frac{\Delta t}{2} \left([\mathbf{R}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{R}]^t \right) = -\sigma[\mathbf{v}][\gamma] \left([\mathbf{A}]^{t+\Delta t} - [\mathbf{A}]^t \right) \quad \forall [\mathbf{v}] \quad (5.13)$$

donde

$$[\alpha\mathbf{f}] = \begin{bmatrix} [\alpha\mathbf{f1}] \\ [\alpha\mathbf{f2}] \end{bmatrix}, \quad [\beta] = \begin{bmatrix} [\beta\mathbf{1}] \\ -[\beta\mathbf{2}] \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} [\gamma\mathbf{1}] & 0 \\ 0 & [\gamma\mathbf{1}] \end{bmatrix}$$

$$[\alpha\mathbf{3}] = \int_{\Omega(e)} \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N_j}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \\ - \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} [\partial N_j / \partial y]_{1 \times 3} & -[\partial N_j / \partial x]_{1 \times 3} \end{array} \right] d\Omega(e)$$

$$[\beta\mathbf{1}] = \int_{\Omega(e)} [N_j]_{3 \times 1} [\partial N_j / \partial y]_{1 \times 3} d\Omega(e), \quad [\beta\mathbf{2}] = \int_{\Omega(e)} [N_j]_{3 \times 1} [\partial N_j / \partial x]_{1 \times 3} d\Omega(e)$$

$$[\gamma\mathbf{1}] = \int_{\Omega(e)} [N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3} d\Omega(e)$$

¹²Con el Δt seleccionado se debe describir los aspectos principales de la señal de frontera, en el sentido de contemplar crecimiento y decrecimiento en todos los intervalos, además de máximos y mínimos

¹³Son las funciones con las que se multiplicaron las ecuaciones diferenciales antes de realizarse el proceso de integración en el dominio de solución

$$[\alpha \mathbf{f}1] = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} [N_j]_{3 \times 1} \Big|_{y=c}^{y=d} dx & \text{si } \mu_{\mathbb{R}}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha \mathbf{f}2] = \begin{cases} \int_{y_1}^{y_2} [N_j]_{3 \times 1} \Big|_{x=a}^{x=b} dy & \text{si } \mu_{\mathbb{R}}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) = 0 \end{cases}$$

¹⁴La expresión del problema ensamblado es

$$[\mathbf{XX1}] [\mathbf{A}]^{t+\Delta t} = [\mathbf{XX2}] [\mathbf{A}]^t + [\beta_{\mathbf{T}}] \frac{\Delta t}{2} \left([\mathbf{R}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{R}]^t \right) - \nu_{FP} \frac{\Delta t}{2} \left(B_{0curve}^{t+\Delta t} + B_{0curve}^t \right) [\alpha \mathbf{f}_{\mathbf{T}}] \quad (5.14)$$

con

$$[\mathbf{XX1}] = \nu_{FP} \frac{\Delta t}{2} [\alpha \mathbf{3}_{\mathbf{T}}] + \sigma [\gamma_{\mathbf{T}}], \quad [\mathbf{XX2}] = \nu_{FP} \frac{\Delta t}{2} [\alpha \mathbf{3}_{\mathbf{T}}] - \sigma [\gamma_{\mathbf{T}}]$$

Caso 3D

El planteamiento por *elemento* es

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}] \left\{ -\sigma [\gamma] - \nu_{FP} [\alpha \mathbf{3}] \frac{\Delta t}{2} \right\} [\mathbf{A}]^{t+\Delta t} &= [\mathbf{v}] \left\{ -\sigma [\gamma] + \nu_{FP} [\alpha \mathbf{3}] \frac{\Delta t}{2} \right\} [\mathbf{A}]^t + \\ [\mathbf{v}] \left\{ \nu_{FP} [\alpha \mathbf{f}] \frac{\Delta t}{2} \left(B_{0curve}^{t+\Delta t} + B_{0curve}^t \right) - [\beta] \frac{\Delta t}{2} \left([\mathbf{R}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{R}]^t \right) \right\} &\quad \forall [\mathbf{v}] \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde

$$[\gamma] = \mathbf{I}_{3 \times 3} \otimes [\gamma \mathbf{1}], \quad [\gamma \mathbf{1}] = \int_{\Omega_{(e)}} [N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)}$$

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 0 & -[\beta \mathbf{z}] & [\beta \mathbf{y}] \\ [\beta \mathbf{z}] & 0 & -[\beta \mathbf{x}] \\ -[\beta \mathbf{y}] & [\beta \mathbf{x}] & 0 \end{bmatrix}, \quad [\beta \mathbf{u}] = \int_{\Omega_{(e)}} [N_j]_{3 \times 1} [\partial N_j / \partial u]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)} \quad u = x, y, z$$

$$[\alpha \mathbf{3}] = [\alpha \mathbf{32}] - [\alpha \mathbf{31}] - [\alpha \mathbf{33}] + [\alpha \mathbf{34}] - [\alpha \mathbf{35}] - [\alpha \mathbf{36}]$$

$$[\alpha \mathbf{32}] = \begin{bmatrix} [\alpha \mathbf{3zz}] & 0 & -[\alpha \mathbf{3zx}] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\alpha \mathbf{33}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\alpha \mathbf{3zz}] & [\alpha \mathbf{3zy}] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\alpha \mathbf{35}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [\alpha \mathbf{3xz}] & 0 & -[\alpha \mathbf{3xx}] \end{bmatrix}$$

¹⁴ $\mu_{\mathbb{R}}$ es la medida de lebesgue en \mathbb{R} , es una medida de longitud.

$$[\alpha\mathbf{36}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\alpha\mathbf{3yz}] & [\alpha\mathbf{3yy}] \end{bmatrix}, \quad [\alpha\mathbf{31}] = \begin{bmatrix} -[\alpha\mathbf{3yy}] & [\alpha\mathbf{3yx}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\alpha\mathbf{34}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -[\alpha\mathbf{3xy}] & [\alpha\mathbf{3xx}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$[\alpha\mathbf{3uw}] = \int_{\Omega_{(e)}} \left[\frac{\partial N_j}{\partial u} \right]_{3 \times 1} [\partial N_j / \partial w]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)} \quad u, w = x, y, z$$

$$[\alpha\mathbf{f}] = [\alpha\mathbf{f1}] - [\alpha\mathbf{f2}], \quad [\alpha\mathbf{f1}] = \begin{bmatrix} [\alpha\mathbf{fdc}] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\alpha\mathbf{f2}] = \begin{bmatrix} 0 \\ [\alpha\mathbf{fba}] \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha\mathbf{fdc}] = \begin{cases} \int_e^f \int_a^b [N_j]_{3 \times 1} |c^d| dx dz & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha\mathbf{fba}] = \begin{cases} \int_e^f \int_c^d [N_j]_{3 \times 1} |a^b| dy dz & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2}(\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c) = 0 \end{cases}$$

¹⁵La expresión del problema ensamblado es

$$[\mathbf{XX1}] [\mathbf{A}]^{t+\Delta t} = [\mathbf{XX2}] [\mathbf{A}]^t + [\beta_{\mathbf{T}}] \frac{\Delta t}{2} \left([\mathbf{R}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{R}]^t \right) - \nu_{FP} \frac{\Delta t}{2} \left(B_{0curve}^{t+\Delta t} + B_{0curve}^t \right) [\alpha\mathbf{f}_{\mathbf{T}}] \quad (5.16)$$

con

$$[\mathbf{XX1}] = \nu_{FP} \frac{\Delta t}{2} [\alpha\mathbf{3}_{\mathbf{T}}] + \sigma [\gamma_{\mathbf{T}}], \quad [\mathbf{XX2}] = \nu_{FP} \frac{\Delta t}{2} [\alpha\mathbf{3}_{\mathbf{T}}] - \sigma [\gamma_{\mathbf{T}}]$$

5.3.2. Problema Térmico

Caso 2D

La siguiente expresión, *por elemento*, describe tanto el fenómeno con condición de Dirichlet como el de aislamiento térmico (véase capítulo 4).

$$[\mathbf{v}] \rho c [\theta] \left\{ [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} - [\mathbf{T}]^t \right\} = [\mathbf{v}] (-\lambda) [\zeta] \frac{\Delta t}{2} \left\{ [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{T}]^t \right\} + [\mathbf{v}] [\theta] \frac{\Delta t}{2} \left\{ [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{q}]^t \right\} \quad (5.17)$$

donde

$$[\theta] = \int_{\Omega_{(e)}} [N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)}, \quad [\zeta] = [\zeta_x] + [\zeta_y], \quad [\zeta_u] = \int_{\Omega_{(e)}} \left[\frac{\partial N_j}{\partial u} \right]_{3 \times 1} [\partial N_j / \partial u]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)} \quad u = x, y$$

¹⁵ $\mu_{\mathbb{R}^2}$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 , es una medida de área

la versión ensamblada de este planteamiento es

$$[\mathbf{XX1}] [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} = [\mathbf{XX2}] [\mathbf{T}]^t + [\theta_T] \frac{\Delta t}{2} \{ [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{q}]^t \} \quad (5.18)$$

donde

$$[\mathbf{XX1}] = \rho c [\theta_T] + \lambda [\zeta_T], \quad [\mathbf{XX2}] = \rho c [\theta_T] - \lambda [\zeta_T]$$

Para el problema convectivo se tiene que la versión ensamblada del planteamiento es:

$$[\mathbf{XX1}] [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} = [\mathbf{XX2}] [\mathbf{T}]^t - \Delta t h T_m [\alpha \mathbf{f1}_T] + [\theta_T] \frac{\Delta t}{2} \{ [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{q}]^t \} \quad (5.19)$$

donde

$$[\mathbf{XX1}] = \rho c [\theta_T] + \lambda \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{h}{\lambda} [\alpha \mathbf{f2}_T] + [\zeta_T] \right), \quad [\mathbf{XX2}] = \rho c [\theta_T] - \lambda \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{h}{\lambda} [\alpha \mathbf{f2}_T] + [\zeta_T] \right)$$

$$[\alpha \mathbf{f1}] = \begin{cases} [\alpha b a_{b1}] - [\alpha b a_{a1}] + [\alpha d c_{d1}] - [\alpha d c_{c1}] & \text{si } \mu_{\mathbb{R}} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha \mathbf{f2}] = \begin{cases} [\alpha b a_{a2}] - [\alpha b a_{b2}] + [\alpha d c_{c2}] - [\alpha d c_{d2}] & \text{si } \mu_{\mathbb{R}} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha b a_{r1}] = \int_c^d [N_j]_{3 \times 1} |_{x=r} dy, \quad [\alpha b a_{r2}] = \int_c^d ([N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3}) |_{x=r} dy \quad r = a, b$$

$$[\alpha d c_{r1}] = \int_a^b [N_j]_{3 \times 1} |_{x=r} dx, \quad [\alpha d c_{r2}] = \int_a^b ([N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3}) |_{x=r} dx \quad r = c, d$$

Caso 3D

La siguiente expresión, *por elemento*, describe tanto el fenómeno con condición de Dirichlet como de aislamiento térmico.

$$[\mathbf{v}] \rho c [\theta] \{ [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} - [\mathbf{T}]^t \} = [\mathbf{v}] (-\lambda) [\psi] \frac{\Delta t}{2} \{ [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{T}]^t \} + [\mathbf{v}] [\theta] \frac{\Delta t}{2} \{ [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{q}]^t \} \quad (5.20)$$

donde

$$[\theta] = \int_{\Omega_{(e)}} [N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)}, \quad [\psi] = [\psi_x] + [\psi_y] + [\psi_z], \quad [\psi_u] = \int_{\Omega_{(e)}} \left[\frac{\partial N_j}{\partial u} \right]_{3 \times 1} [\partial N_j / \partial u]_{1 \times 3} d\Omega_{(e)} \quad u = x, y, z$$

la versión ensamblada de este problema es

$$[\mathbf{XX1}] [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} = [\mathbf{XX2}] [\mathbf{T}]^t + [\theta_T] \frac{\Delta t}{2} \{ [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{q}]^t \} \quad (5.21)$$

$$[\mathbf{XX1}] = \rho c [\theta_T] + \lambda [\psi_T], \quad [\mathbf{XX2}] = \rho c [\theta_T] - \lambda [\psi_T]$$

Para el problema convectivo se tiene que la versión ensamblada del planteamiento es:

$$[\mathbf{XX1}] [\mathbf{T}]^{t+\Delta t} = [\mathbf{XX2}] [\mathbf{T}]^t - \Delta t h T_m [\alpha \mathbf{f1}_T] + [\theta_T] \frac{\Delta t}{2} \{ [\mathbf{q}]^{t+\Delta t} + [\mathbf{q}]^t \} \quad (5.22)$$

$$[\alpha \mathbf{f1}] = \begin{cases} [\alpha b a_{b1}] - [\alpha b a_{a1}] + [\alpha d c_{d1}] - [\alpha d c_{c1}] + [\alpha f e_{f1}] - [\alpha f e_{e1}] & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha \mathbf{f2}] = \begin{cases} [\alpha b a_{a2}] - [\alpha b a_{b2}] + [\alpha d c_{c2}] - [\alpha d c_{d2}] + [\alpha f e_{e2}] - [\alpha f e_{f2}] & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{R}^2} (\Omega_{(e)} \cap \partial \Omega_c) = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha b a_{r1}] = \int_e^f \int_c^d [N_j]_{3 \times 1} |_{x=r} dy dz, \quad [\alpha b a_{r2}] = \int_e^f \int_c^d ([N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3}) |_{x=r} dy dz \quad r = a, b$$

$$[\alpha d c_{r1}] = \int_e^f \int_a^b [N_j]_{3 \times 1} |_{x=r} dx dz, \quad [\alpha d c_{r2}] = \int_e^f \int_a^b ([N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3}) |_{x=r} dx dz \quad r = c, d$$

$$[\alpha f e_{r1}] = \int_c^d \int_a^b [N_j]_{3 \times 1} |_{x=r} dx dy, \quad [\alpha f e_{r2}] = \int_c^d \int_a^b ([N_j]_{3 \times 1} [N_j]_{1 \times 3}) |_{x=r} dx dy \quad r = e, f$$

5.4. Demostración de Estabilidad

En esta sección se presenta una demostración de que las relaciones resultantes a la aplicación de elementos finitos, forman un conjunto estable de ecuaciones de evolución del fenómeno, por lo cual los efectos de las perturbaciones por redondeo y malos condicionamientos están acotados, haciendo aún más confiables los resultados que se obtengan de la simulación.

Considérese las ecuaciones del problema 5.14 5.16¹⁶, sustituyendo $t + \Delta t$ por $n + 1$ y t por n ¹⁷. Sea $[\mathbf{A}]$ la representación de los datos asociados a un problema sin perturbaciones y $[\mathbf{A}]$ los datos

¹⁶Esta demostración se plantea siguiendo las ecuaciones electromagnéticas, sin embargo debe tenerse en cuenta que las ecuaciones del problema térmico resultante tienen la misma forma, por lo cual con esta demostración se verifica la estabilidad tanto en el problema térmico como en el electromagnético

¹⁷Esta notación es equivalente, ya que se está describiendo la relación entre cantidades discretas; con la primera notación sólo se añade el hecho de saber en qué tiempo real se da esa relación

asociados a un problema con éstas. Se define $\delta^n = [\mathbf{A}]^n - [\tilde{\mathbf{A}}]^n$. Se dice que un esquema de ecuaciones en diferencias es estable si $\exists C > 0$, independiente de Δt , tal que¹⁸

$$\|\delta^n\| < C \|\delta^0\|$$

cuando $n \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$ y $t \leq t_f$ ¹⁹. Empleando 5.14 5.16 con datos perturbados y no perturbados, resultan dos ecuaciones, de cuya resta se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathbf{XX1}] \delta^{n+1} = [\mathbf{XX1}] \delta^n &\implies \|[\mathbf{XX1}] \delta^{n+1}\| = \|[\mathbf{XX1}] \delta^n\| \implies \|[\mathbf{XX1}]\| \|\delta^{n+1}\| = \|[\mathbf{XX1}]\| \|\delta^n\| \\ &\implies \|\delta^{n+1}\| < C \|\delta^n\| \forall n \quad \text{con} \quad C = \frac{\|[\mathbf{XX2}]\|}{\|[\mathbf{XX1}]\|} \end{aligned}$$

entonces²⁰

$$\|\delta^{n+1}\| < C \|\delta^n\| < \dots < C^{n+1} \|\delta^0\| \implies \exists C > 0 \quad \text{tal que} \quad \|\delta^n\| < C \|\delta^0\| \forall n$$

este C es independiente de Δt y la relación se mantiene cuando $n \rightarrow \infty$, dentro de los límites de tiempo impuestos para la simulación del fenómeno. Esto garantiza que el esquema es estable, lo cual coincide con los resultados experimentales obtenidos por Ionita en [7] y Fallah en [9]. Por otra parte debe prestarse especial atención al hecho de que la constante que da la medida de la estabilidad C , es dependiente de las características de geometría del problema espacial, evidenciándose una conexión en los dos tipos de planteamiento.

¹⁸Esta definición de estabilidad es propuesta por Flaherty en [2]

¹⁹ t_f es el tiempo final de simulación

²⁰En la demostración $\|\cdot\|$ representa la norma de las matrices y los vectores de datos. La norma empleada para la demostración puede ser l_2 o bien l_∞ [25]

Capítulo 6

Aspectos de Implementación

La implementación de un algoritmo de solución numérica de un problema dado, requiere de la selección adecuada de las técnicas para la obtención y realización de operaciones básicas como la integración, la derivación y los ensambles. En la herramienta de simulación Matlab se cuenta con varias funciones destinadas para satisfacer en parte éstos propósitos, lo que permite hacer más sistemático y compacto un código diseñado para éstos problemas. En este capítulo se presentan los aspectos de implementación considerados para llevar a cabo los algoritmos de solución, seleccionando las herramientas más adecuadas y eficientes de acuerdo a las necesidades involucradas en cada sección del problema.

6.1. Algoritmo de Solución

El algoritmo de solución en la parte electromagnética está ligado al esquema empleado para introducir la histéresis. Es la sistematización del problema en torno a este esquema. Por otra parte, el algoritmo para el problema térmico es un planteamiento directo ya que no se requieren procesos iterativos.

6.1.1. Adecuación y Modelado de los datos Experimentales de la relación B-H

Antes de emplear los procesos para resolver el problema de las corrientes de Eddy es necesario adecuar los datos experimentales y obtener los modelos de la curva de histéresis del material. Así el conjunto de pares ordenados (experimentales) asociados acada lazo debe tener las siguientes características

- Dada una pareja ordenada de datos (H_j, B_j) no existe otra (H_k, B_k) tal que $H_j = H_k$ o $B_j = B_k$.
- Los datos tienen un comportamiento no decreciente entre los valores máximo y mínimo de la intensidad de campo magnético considerada.

con el cumplimiento de estos requerimientos se aplican las líneas de códigos descritas a continuación para modelado de las curvas.

Implementación en Matlab

Sea H_{inf}, B_{inf} la representación de los datos correspondientes al lazo inferior y H_{sup}, B_{sup} los del lazo superior.

```

FI=spline(Hinf,Binf);
FIX=spline(Binf,Hinf);
[i,j]=find(Binf==min(abs(Binf)));clear i
Hci=Hinf(j(1));clear j
fl=fittype('ai*atan(x-ni)+bi','problem','ni');
[cli,gli]=fit(Hinf',Binf',fl,'problem',Hci);clear fl
ai=cli.ai;bi=cli.bi;ni=cli.ni;clear cli gli;syms hx
fli=@(hx)(ai*atan(hx-ni)+bi);clear ai ni bi
FS=spline(Hsup,Bsup);
FSX=spline(Bsup,Hsup);
[i,j]=find(Bsup==min(abs(Bsup)));clear i
Hcs=Hsup(j(1));clear j
fl=fittype('as*atan(x-ns)+bs','problem','ns');
[cls,gl]=fit(Hsup',Bsup',fl,'problem',Hcs);clear fl
as=cls.as;bs=cls.bs;ns=cls.ns;clear cls;syms hx
fls=@(hx)(as*atan(hx-ns)+bs);clear as bs ns

```

6.1.2. Algoritmo: Problema Electromagnético

- Cómputo de las Matrices de Geometría: Se computan las matrices $[\gamma], [\beta], [\alpha\mathbf{3}], [\psi]$.
- Cómputo de las Matrices de frontera: Se computan las matrices en las que se involucran integrales de frontera tales como $[\alpha\mathbf{f}]$.
- Aplicación de las condiciones iniciales en $[\mathbf{A}]^{t=0}$ y $[\mathbf{R}]^{t=0}$.
- Inicialización de $[\mathbf{A}]_i^{t=1}$ y $[\mathbf{R}]_i^{t=1}$.
- Cómputo de $[\mathbf{A}]_{i+1}^{t=1}$.
 - Si $\sum_{(e)} \left| [\mathbf{A}]_{i+1}^{t=1} - [\mathbf{A}]_i^{t=1} \right| < \Delta_\epsilon$ entonces se da paso al siguiente item, si no:
 - Se realiza $[\mathbf{A}]_i^{t=1} = [\mathbf{A}]_{i+1}^{t=1}$, se calcula el rotacional de $[\mathbf{A}]_{i+1}^{t=1}$ para obtener $[\mathbf{B}]_{i+1}^{t=1}$ y con ello del modelo de la histéresis $[\mathbf{H}]_{i+1}^{t=1}$; se calcula $[\mathbf{R}]_{i+1}^{t=1} = \nu_{FP} [\mathbf{B}]_{i+1}^{t=1} - [\mathbf{H}]_{i+1}^{t=1}$, y se hace $[\mathbf{R}]_i^{t=1} = [\mathbf{R}]_{i+1}^{t=1}$. Con lo que finalmente se vuelve al inciso principal (calcular el valor del potencial magnético vectorial para la primera muestra).
- Inicializar $[\mathbf{A}]_i^t$ y $[\mathbf{R}]_i^t$.
- Cómputo $[\mathbf{A}]_{i+1}^t$ y $[\mathbf{R}]_{i+1}^t$.
 - Si $\sum_{(e)} \left| [\mathbf{A}]_{i+1}^t - [\mathbf{A}]_i^t \right| < \Delta_\epsilon$ entonces se da paso al siguiente item, si no:

¹ Δ_ϵ es el máximo error absoluto aceptado, tomado sobre la suma de los errores absolutos correspondientes a cada nodo.

- Se realiza $[\mathbf{A}]_i^t = [\mathbf{A}]_{i+1}^t$, se calcula el rotacional de $[\mathbf{A}]_{i+1}^t$ para obtener $[\mathbf{B}]_{i+1}^t$ y con ello del modelo de la histéresis $[\mathbf{H}]_{i+1}^t$; se calcula $[\mathbf{R}]_{i+1}^t = \nu_{FP} [\mathbf{B}]_{i+1}^t - [\mathbf{H}]_{i+1}^t$, y se hace $[\mathbf{R}]_i^t = [\mathbf{R}]_{i+1}^t$. Con lo que finalmente se vuelve al inciso principal (calcular el valor del potencial magnético vectorial para la muestra t).
- Si ya se cumple el máximo tiempo de simulación se finaliza el proceso (continuando en el siguiente ítem), si no se hace $t = \Delta t + t$ y se regresa al proceso de inicialización en t .
- Cómputo del vector de densidad de corriente a partir de los valores de potencial magnético vectorial obtenido.
- Cómputo de las pérdidas óhmicas y por histéresis para la obtención de $[\mathbf{q}]$

6.1.3. Algoritmo: Problema Térmico

- Cómputo de las matrices de geometría: Se computan las matrices $[\theta], [\zeta]$.
- Cómputo de las matrices de frontera: Se computan las matrices en las que se involucran integrales de frontera tales como $[\alpha \mathbf{f}]$.
- Aplicación de las condiciones iniciales en $[\mathbf{T}]^{t=0}$.
- Cómputo de los valores restantes de temperatura, si el tiempo de simulación no ha finalizado; de lo contrario se finaliza el proceso

6.2. Cómputo de operaciones básicas

En la realización de un planteamiento numérico por FEM es necesario emplear e implementar operaciones de derivación e integración. En el primer caso es frecuente usar herramientas de tipo simbólico cuando las funciones asociadas a los nodos son lineales de primer orden, como las que se emplean en este trabajo; mientras que en el segundo hay tendencias a implementaciones por cuadratura Gaussiana [2]. Las integrales se hacen sobre todos los elementos del dominio para el caso de las matrices principales de geometría y sobre los elementos tales que $\Omega_{(e)} \cap \partial\Omega_c \neq \emptyset$ para las matrices de frontera. Hay razones que hacen más adecuada y conveniente la integración por cuadratura gaussiana para las matrices principales de geometría e integración simbólica para los elementos de frontera:

- Dado que las funciones base asociadas a los nodos son funciones polinomiales lineales de primer orden, se puede obtener el valor *exacto*² de una integral que involucre éstos términos empleando un número adecuado de puntos usando cuadratura Gaussiana [25]. Además el tiempo de cómputo se reduce considerablemente respecto del uso de integración simbólica, u otros tipos de integración.
- El cómputo de las integrales de frontera se realiza sobre un número de elementos mucho menor al total empleado en la región de solución, por ello emplear integración numérica en para este caso, no reduce significativamente el costo computacional. Adicionalmente el uso de integración simbólica permite hacer el código correspondiente al cómputo de elementos de frontera más compacto y manejable.

²Esto es consecuencia de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en $[-1, 1]$ [25]

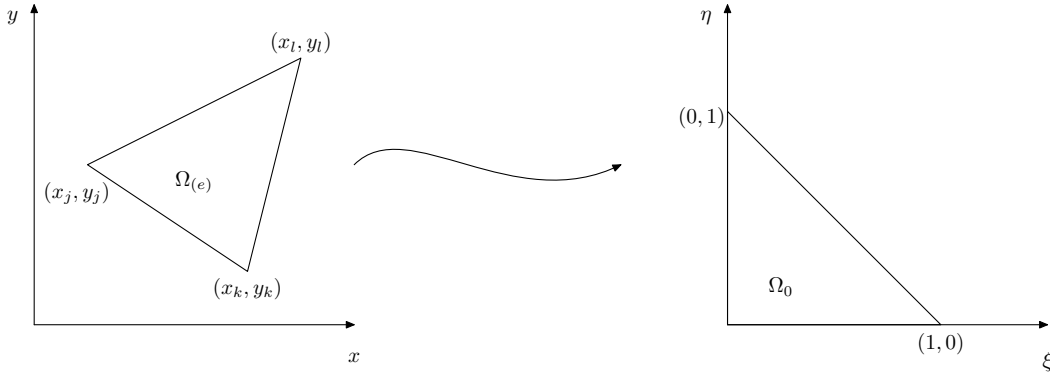


Figura 6.1: Transformación de un elemento en el plano físico a un elemento canónico en un plano computacional (caso 2D)

6.2.1. Transformación a Planos Computacionales

Antes de implementar cualquier técnica numérica de integración es conveniente realizar una transformación a un plano computacional, en donde la región de integración tenga una forma más sencilla en términos analíticos [2]. Esto permite definir exactamente los límites de integración sin necesidad de ningún tipo de aproximaciones [2]. Las transformaciones realizadas son para el caso 2D-mensional de un triángulo arbitrario en el plano xy a un triángulo canónico de lado unitario en el plano $\xi\eta$ con sus lados coincidentes con los ejes ξ y η (ver figura 6.1). Para el caso 3D-mensional se realiza una transformación de un tetrahedro arbitrario a un tetrahedro canónico de arista unitaria en el espacio $\xi\eta\zeta$ con sus vértices coincidentes con los ejes ξ , η y ζ . Las ecuaciones que definen estas transformaciones son:

- Caso 2D-mensional

$$\xi = \phi_2^{(e)}(x, y), \quad \eta = \phi_3^{(e)}(x, y) \quad (6.1)$$

- Caso 3D-mensional

$$\xi = \phi_2^{(e)}(x, y, z), \quad \eta = \phi_3^{(e)}(x, y, z), \quad \zeta = \phi_4^{(e)}(x, y, z) \quad (6.2)$$

de manera que las integrales se transforman de la forma³:

$$\int_{\Omega^{(e)}} f(x, y) d\Omega^{(e)} \mapsto \int_{\Omega_0} f(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} f(x, y, z) d\Omega^{(e)} \mapsto \int_{\Omega_0} f(g(\xi, \eta, \zeta), h(\xi, \eta, \zeta), k(\xi, \eta, \zeta)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta \quad (6.4)$$

las funciones g, h, k definen el valor de las variables x, y, z en términos de las nuevas variables definidas a partir de las transformaciones 6.1 6.2.

³ $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right|$ es el jacobiano de la transformación

6.2.2. Implementación en Matlab

- Integración simbólica:
`int(f(x), 'x', a, b);`
- Integración por Cuadratura Gaussiana:(como ejemplo se mostrará la generación de la matriz $[\gamma]$ por elemento en el caso 2D)

```
%***** Integrales por Cuadratura *****
u1=sqrt(3)/3;u2=-sqrt(3)/3;
Xi1=(u1+1)*0.5;Eta1=0.25*(1-u1)*(1+sqrt(3)/3);Eta1b=0.25*(1-u1)*(1-sqrt(3)/3);
Xi2=(u2+1)*0.5;Eta2=0.25*(1-u2)*(1+sqrt(3)/3);Eta2b=0.25*(1-u2)*(1-sqrt(3)/3);
syms x y
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,'x','y');
x=F1.x;
y=F1.y;clear F1
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
N1=Djk/Cjkl;clear Djk
P11=JC*[Xi1;Eta1;N1]*[Xi1;Eta1;N1]';
syms x y
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,'x','y');
x=F2.x;
y=F2.y;clear F2
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
N1=Djk/Cjkl;clear Djk
P11b=JC*[Xi1;Eta1b;N1]*[Xi1;Eta1b;N1]';
syms x y
F3=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,'x','y');
x=F3.x;
y=F3.y;clear F3
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
N1=Djk/Cjkl;clear Djk
P22=JC*[Xi2;Eta2;N1]*[Xi2;Eta2;N1]';
syms x y
F4=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,'x','y');
x=F4.x;
y=F4.y;clear F4
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
N1=Djk/Cjkl;clear Djk MDjk
P22b=JC*[Xi2;Eta2b;N1]*[Xi2;Eta2b;N1]';
gamma=kron(eye(2),0.125*(1-u1)*(P11+P11b)+0.125*(1-u2)*(P22+P22b));
```

6.3. Proceso de Ensamble de Matrices

Existen diferentes enfoques para la realización de un proceso de ensamble de los elementos que constituyen el problema [4][2]. En este trabajo se aplicará el método propuesto por Flaherty en

[2], ya que su costo computacional es menor respecto del propuesto por Johnson en [4]. El método consiste básicamente en generar a partir de las matrices dadas por elemento, unas matrices asociadas de las mismas dimensiones de la matriz total ensamblada, tal que ésta última se expresa como una sumatoria de las primeras. a continuación se muestra la aplicación de este proceso de ensamble.

6.3.1. Implementación en Matlab

```

alpha3S=zeros(2*nd,2*nd);
gammaS=zeros(2*nd,2*nd);
betaS=zeros(2*nd,nd);
rotAS=zeros(nd,2*nd);
rotBS=zeros(nd,nd);
vpru=t1(:,i);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
alpha3S(vpru(kk),vpru(ll))=alpha3(kk,ll);
alpha3S(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=alpha3(kk,ll+3);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(ll))=alpha3(kk+3,ll);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(ll)+nd)=alpha3(kk+3,ll+3);
gammaS(vpru(kk),vpru(ll))=gamma(kk,ll);
gammaS(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=gamma(kk,ll+3);
gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(ll))=gamma(kk+3,ll);
gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(ll)+nd)=gamma(kk+3,ll+3);
betaS(vpru(kk),vpru(ll))=beta(kk,ll);
betaS(vpru(kk)+nd,vpru(ll))=beta(kk+3,ll);
rotAS(vpru(kk),vpru(ll))=rotA(kk,ll);
rotAS(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=rotA(kk,ll+3);
rotBS(vpru(kk),vpru(ll))=rotB(kk,ll);
end
end
clear rotB rotA beta gamma alpha3 kk ll vpru
alpha3T=alpha3S+alpha3T;clear alpha3S
gammaT=gammaS+gammaT;clear gammaS
betaT=betaS+betaT;clear betaS
rotAT=rotAS+rotAT;clear rotAS
rotBT=rotBS+rotBT;clear rotBS

```

6.4. Ajuste de Valores de la Frontera

En la obtención de los planteamientos variacionales de los problemas acoplados (térmico y electromagnético), se ven implícitas en las ecuaciones resultantes algunas condiciones de frontera; tal es el caso de las condiciones tipo Neumann y Robin. Sin embargo en el caso de las ecuaciones con condiciones de Dirichlet esto no sucede, de hecho la ecuación variacional asociada a un problema de éste tipo y uno de condición homogénea tipo Neumann es la misma. Por ello es necesario ajustar los valores conocidos de frontera en el planteamiento. Esto se realiza asignando los valores conocidos a los nodos que se encuentran en la frontera, empleando las funciones que definen éstas condiciones:

$$N_j^{(e)}(g_0(t)) = g_{0j}^{(e)}(t) \quad \text{donde } j \text{ es un nodo perteneciente a la frontera}$$

$g_0(t)$ es la función que define la condición de frontera. Esta asignación influye en los datos obtenidos para los demás nodos del enmallado y es lo que define la diferencia entre los resultados para un problema de frontera aislada y uno de temperatura constante en el borde en lo que a resultados numéricos se refiere.

6.5. Solución de los Sistemas Matriciales

La selección de los métodos empleados para resolver las ecuaciones matriciales, está estrechamente relacionada con las características de las matrices que constituyen el planteamiento. En los problemas donde se emplea FEM, éstas son *matrices esparcidas*, es decir poseen un gran número de elementos nulos y poseen un gran tamaño, típicamente son arreglos de más de 10000 elementos⁴. Para este tipo de arreglos, resultan mucho más convenientes los métodos iterativos por ser más eficientes tanto en almacenamiento de computadora como en el tiempo empleado de cómputo [25][2].

Uno de los métodos iterativos preferidos es el de Gradiente conjugado, ya que para matrices esparcidas de gran tamaño puede llegar a la solución en aproximadamente \sqrt{n}^5 pasos, lo que lo hace preferible sobre la eliminación gaussiana y los métodos iterativos de Gauss-Seidel, Jacobi, SQR, Stein-Rosenberg y Ostrowski-Reich⁶ [25][50].

6.5.1. Implementación en Matlab

En Matlab se cuenta con las funciones de gradiente conjugado `cgs` y `pcg`. Estas dos funciones se emplean indistintamente en el caso 2D, sin embargo en el caso 3D se emplea la primera debido a su ventaja en el manejo de valores numéricos grandes en comparación con `pcg`. A continuación se presentan dos ejemplos donde se muestra el empleo de éstas:

```
SAtimedis=pcg(XX1,XX2*SAtimedis-1+XXF,1e-16,100);
Ttimedis=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
```

6.5.2. Solución de sistemas cuando hay valores conocidos en la frontera

En problemas con condiciones tipo Dirichlet, la asignación de valores en los nodos se traduce en efectos directos sobre las ecuaciones matriciales que describen el problema, ya que al haber valores conocidos las dimensiones de las matrices se reducen [2]. Considérese la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} p_{11} & & p_{1j} & & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{j1} & \cdots & p_{jj} & \cdots & p_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & & p_{nj} & & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

⁴Las matrices generadas en este trabajo alcanzan incluso más de 1×10^6 elementos ya que en los problemas vectoriales hay varias incógnitas por nodo

⁵ n es el tamaño de la matriz cuadrada generada

⁶Una discusión sobre las ventajas del gradiente conjugado sobre estos métodos está completamente detallada en [25]

en donde $c_j = \gamma_j$ es un valor conocido, entonces el problema para resolver las demás incógnitas es

$$\begin{bmatrix} p_{11} & & p_{1,j-1} & p_{1,j+1} & & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{j-1,1} & \cdots & p_{j-1,j-1} & p_{j-1,j+1} & \cdots & p_{j-1,n} \\ p_{j+1,1} & \cdots & p_{j+1,j-1} & p_{j+1,j+1} & \cdots & p_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & & p_{n,j-1} & p_{n,j+1} & & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{j-1} \\ c_{j+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - p_{1,j}\gamma_j \\ \vdots \\ f_{j-1} - p_{j-1,j}\gamma_j \\ f_{j+1} - p_{j+1,j}\gamma_j \\ \vdots \\ f_n - p_{n,j}\gamma_j \end{bmatrix}$$

6.6. Cálculo del Rotacional

Un aspecto esencial en el desarrollo del algoritmo que permite resolver el problema electromagnético, es el cálculo del rotacional realizado sobre los valores del potencial magnético vectorial. La realización en un esquema numérico se puede lograr empleando elementos finitos sobre la ecuación que describe la operación, aprovechando todos los desarrollos realizados hasta ahora con éste. Entonces se plantea la formulación variacional como

$$\int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}} d\Omega_c = \int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot \vec{\mathbb{B}} d\Omega_c$$

de manera tal que, teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en el capítulo 5, se obtienen las relaciones matriciales⁷

6.6.1. Caso 2D

La versión por elemento es

$$[\mathbf{v}] (-[\beta]) [\mathbf{A}] = [\mathbf{v}] [\gamma \mathbf{1}] [\mathbf{B}]$$

6.6.2. caso 3D

La versión por elemento es

$$[\mathbf{v}] [\beta] [\mathbf{A}] = [\mathbf{v}] [\gamma] [\mathbf{B}]$$

6.7. Ajuste y Control de los Datos

En la solución de problemas numéricos es necesario contemplar la influencia de los errores de redondeo, los efectos del empleo de matrices mal condicionadas y la posibilidad de que se obtengan datos erróneos que no muestren seguir la tendencia de los datos restantes. Una concepción cualitativa del fenómeno simulado es de considerable importancia ya que permite establecer criterios sobre los datos, para descartar aquellos que carezcan de significado físico.

⁷Las matrices $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\gamma \mathbf{1}]$, son las mismas que se definieron en el capítulo 5

6.7.1. Ajustes en el Problema Electromagnético

Estimar el comportamiento de las variables electromagnéticas no es una tarea trivial, y no está al alcance de la intuición física. Sin embargo si es posible realizar ajustes de valores cuando están fuera del rango de operación en el que se están considerando las variables del fenómeno. Los dominios y codominios de las funciones de lazo de con las que se modela la histéresis representan los rangos para las cantidades magnéticas, así un valor de densidad de flujo magnético que no se encuentre en el intervalo $[B_{min}, B_{max}]$ debe ser rectificado dentro de éste de acuerdo a la tendencia que se observe.

Implementación en Matlab

```
for i=1:1:max(size(B{timedis}))
if B{timedis}(i)>1.48
B{timedis}(i)=1.48;
elseif B{timedis}(i)<-1.474
B{timedis}(i)=-1.474;
else
end
end
```

6.7.2. Ajustes en el Problema Térmico

Si se considera un cuerpo ferromagnético en calentamiento con una temperatura inicial T_0 , es de esperar que en la evolución del problema las temperaturas aumenten, ya sea considerando condiciones de Dirichlet y/o de Neumann. Así, de registrarse en algún paso del esquema de ecuación en diferencias un valor significativamente menor a éste, debe ajustarse de acuerdo a la tendencia que se observa con la información mayoritaria. Este ajuste de los datos se aplica observando el comportamiento de la simulación, puede darse el caso de no ser necesario. La idea de realizar este procedimiento es mantener las tendencias y no estimar cuantitativamente un valor para determinadas regiones.

Implementación en Matlab

```
for j=1:1:nd
if T{timedis}(j)<(T0ext-10)
T{timedis}(j)=T0ext;
else
end
end
```

6.8. Resultados Finales de Implementación

El resultado de la realización de las implementaciones, con los aspectos considerados en éste capítulo y todo el análisis y estudio realizado a lo largo del texto se plasma en códigos configurados como funciones de Matlab:

6.8.1. Simulación del Fenómeno Electromagnético

Las funciones implementadas para la simulación del fenómeno de corrientes de Eddy en dos y tres dimensiones son `ElectroFEM_2D.m` y `ElectroFEM_3D.m` respectivamente. Con éstos códigos se simula el problema electromagnético, de manera que se obtiene como variable de salida un término que contiene los datos correspondientes al calentamiento por histéresis y efecto Joule, y que es una de la variables de entrada en el proceso de simulación térmico. En la ejecución de las funciones se muestra el comportamiento de los datos, por ejemplo las tendencias en magnitud y dirección de las corrientes. Los pormenores de estos códigos se encuentran en los apéndices B y F⁸.

6.8.2. Simulación del Fenómeno Térmico

Las funciones implementadas para la simulación del problema de calentamiento por corrientes de Eddy son `ThermalFEM_2D.m`, `ThermalFEMConv_2D.m`, `ThermalFEMNO_2D.m` para el caso de dos dimensiones y `ThermalFEM_3D.m`, `ThermalFEMConv_3D.m`, `ThermalFEMNO_3D.m` para tres dimensiones. La primera función permite tratar el problema con condición de Dirichlet, la segunda con condición convectiva y la tercera con condición de aislamiento térmico. La variable de salida en la ejecución de las funciones es la distribución de temperatura en el cuerpo. Así mismo se muestran gráficamente cuales son las tendencias de los datos. Los detalles de estos códigos pueden encontrarse en los apéndices C, D, E, G, H e I respectivamente.

⁸En el apéndice A se describen los principales aspectos en el manejo de los códigos

Capítulo 7

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas teniendo en cuenta los desarrollos y planteamientos hechos en los capítulos precedentes. Éstas fueron implementadas en la herramienta de simulación Matlab. Se consideran dos materiales ferromagnéticos para mostrar los datos resultantes, acero-silicio 2,5 %¹, y hierro de alta pureza (purón)². En primer lugar se considera el caso de la sección rectangular de la barra infinita, mostrando en primera instancia los comportamientos de los datos del problema electromagnético por medio de figuras en las que se observan las principales características del vector densidad de corriente. Seguidamente se plasman los resultados de los problemas térmico para condiciones de tipo Dirichlet y Neumann.

La presentación de los resultados para el problema de la barra de longitud finita es análoga al caso de dos dimensiones, con la diferencia de que los resultados del problema térmico se dan para condiciones convectiva y de aislamiento térmico. El tamaño de paso en el tiempo para todas las simulaciones es de 0.002 segundos.

7.1. Sección Rectangular de Barra Infinita

En esta configuración la condición de frontera empleada para el problema electromagnético es $\vec{H}(\partial\Omega_c) = 500 \cos(100\pi t)\hat{k}$ [A/m]. Las propiedades del material empleado son:

- Propiedades Electromagnéticas: $\sigma = 2,5 \times 10^6$ [S/m], para los datos referentes a la relación B-H ver [21] y el apéndice J.
- Propiedades Térmicas : $\rho = 7,65 \times 10^3$ [Kg/m³], $\lambda = 31$ [W/m · K], $c = 434$ [J/Kg · K], $T_m = 298,15$ [K].

En la gráfica 7.1 se presenta el dominio estudiado con una triangulación asignada de 1328 triángulos y 707 nodos. Este enmallado es generado con el pdeotool de Matlab. No existen perturbaciones de triangulación en la frontera³. Las figuras 7.2 hasta la 7.3, muestran el comportamiento de las corrientes, tanto en magnitud (izquierda), como en forma de campo vectorial (derecha) en diferentes

¹Denominado Trafoperm [21]

²Denominado Vacofer [21]

³Es decir los nodos exteriores están ubicados exactamente en $\partial\Omega_c$

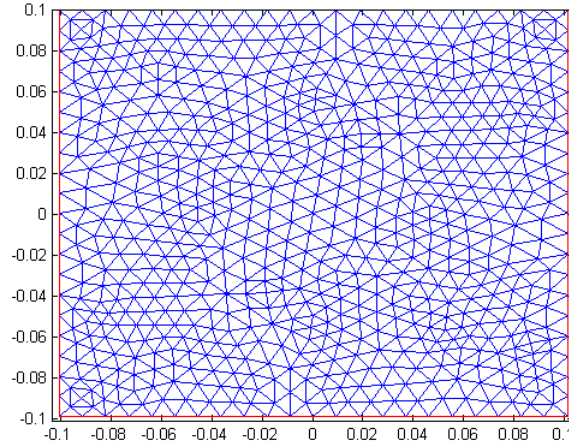


Figura 7.1: Enmallado para dominio 2D rectangular. Dimensiones en metros [m].

tiempos. Y en las figuras 7.4 hasta 7.6 se aprecia el comportamiento de las componentes del vector densidad de corriente en el material en nodos específicos. El propósito de presentar los resultados en cuanto a la parte electromagnética, es verificar los datos electromagnéticos, para su posterior empleo en el análisis del fenómeno térmico. Por medio de éste es posible realizar un estudio y mantener un control más riguroso y minucioso de los cálculos.

La magnitud del vector densidad de corriente es pronunciada hacia las fronteras de la sección, y las direcciones del campo vectorial que define las corrientes, son *arremolinadas*. El comportamiento de las componentes de \vec{J} respecto al tiempo evidencia características oscilatorias consecuente con las funciones empleadas para definir las condiciones de frontera.

7.1.1. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con Otros Trabajos: *Problema Electromagnético*

En las figuras 7.2 hasta 7.3 se aprecian las características del vector densidad de corriente en el material. Un análisis cualitativo del fenómeno permite concluir que este comportamiento en cuanto a las tendencias de la magnitud observada es el esperado, como consecuencia del efecto piel. Esto es coincidente con los resultados obtenidos por Sawicki en [60] en la simulación de campos electromagnéticos y corrientes de Eddy en implantes ferromagnéticos rectangulares y con las simulaciones realizadas por Botauscio en [10] y Manzin en [11] para secciones rectangulares de cuerpos ferromagnéticos.

Las direcciones de la corrientes en los diferentes tiempos permiten asegurar que hay *arremolinamientos* de corrientes, hecho totalmente coherente con la naturaleza del fenómeno estudiado⁴, quedando claro que hay una tendencia en los datos que obedece a las condiciones físicas del problema; mostrándose consistencia con los modelos empleados y coherencia con el trabajo de Zhang, Misaki y Kameari en [13][42][18] respectivamente, en donde se simulan las corrientes de Eddy en un material conductor con permeabilidad constante.

En las figuras 7.4 hasta 7.6 se aprecia la descripción de las componentes de las corrientes en el

⁴El término de corrientes de Eddy se ha empleado en lengua inglesa respetando una nomenclatura ampliamente usada, sin embargo esto traduce literalmente: corrientes de remolino

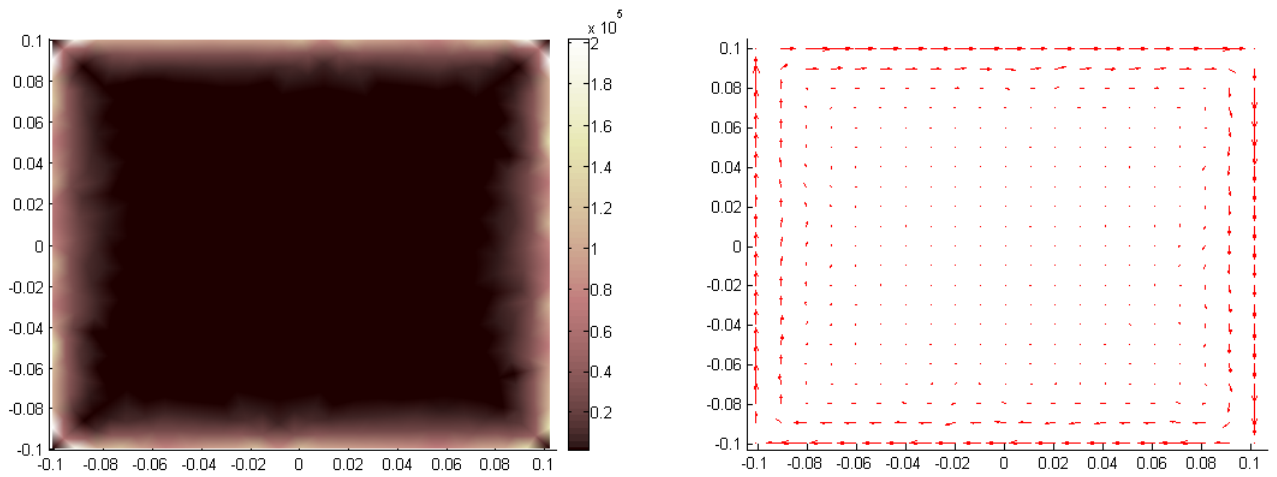


Figura 7.2: Magnitud y direcciones del vector densidad de corriente en la muestra 1000 (2 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$

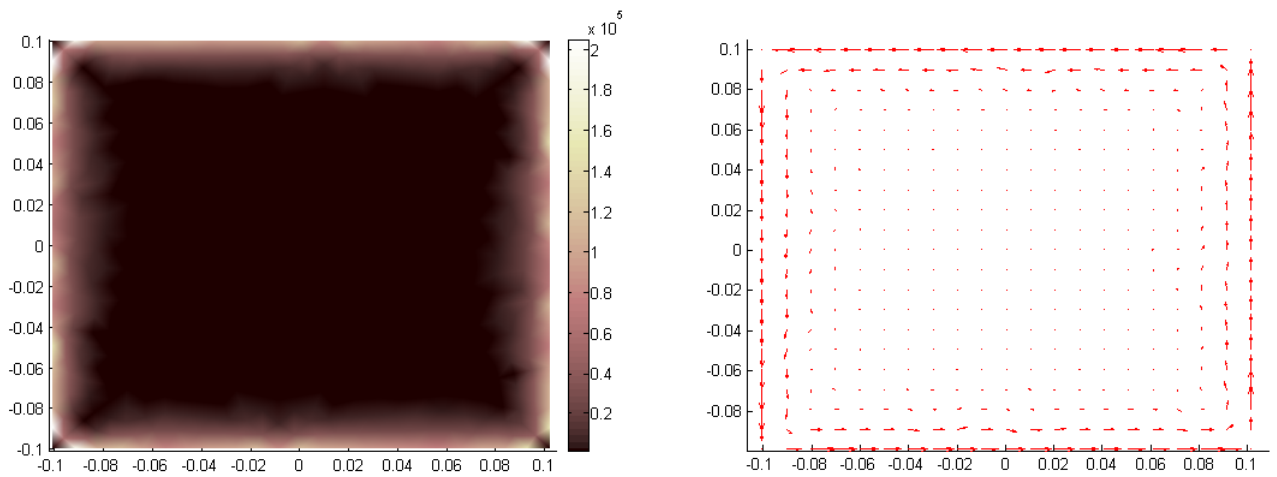


Figura 7.3: Magnitud y direcciones del vector densidad de corriente en la muestra 1005 (2.01 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$

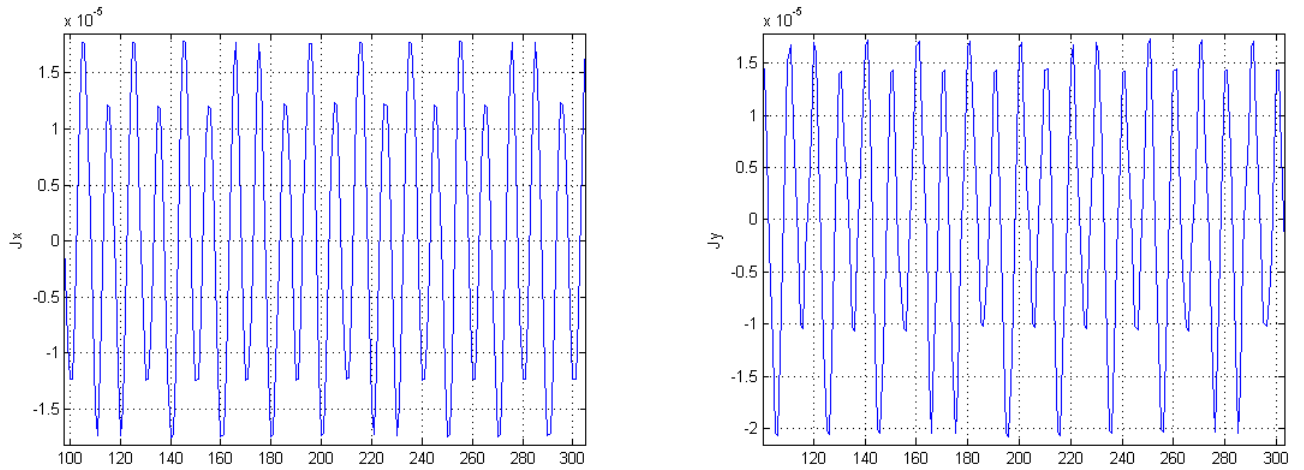


Figura 7.4: Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 43 de coordenadas $(0.3775e-3, 0.3854e-3)$ [m]. Unidades de J_{xy} en $[A/m^2]$, y eje de abscisas en muestras

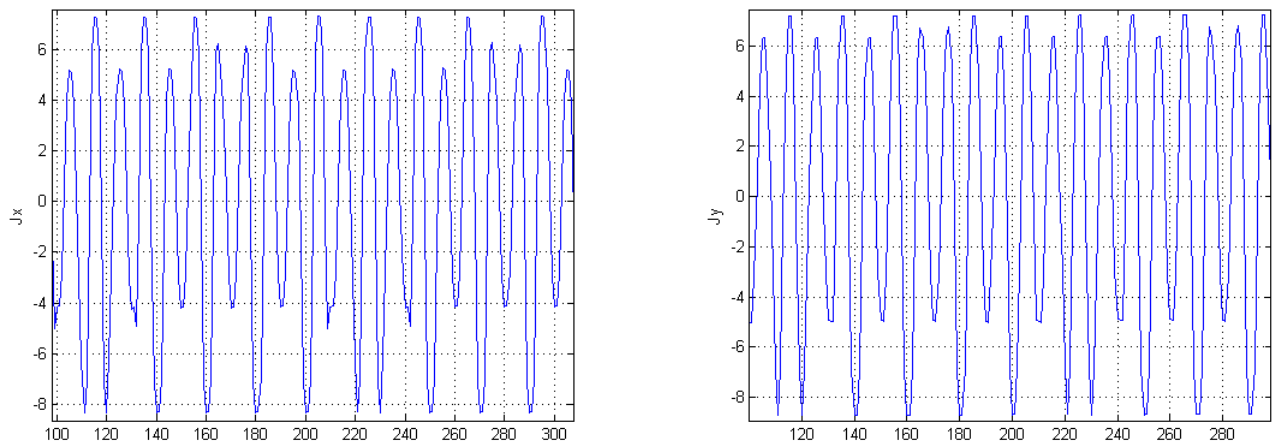


Figura 7.5: Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 156 de coordenadas $(0.0604, 0.0001)$ [m]. Unidades de J_{xy} en $[A/m^2]$, y eje de abscisas en muestras

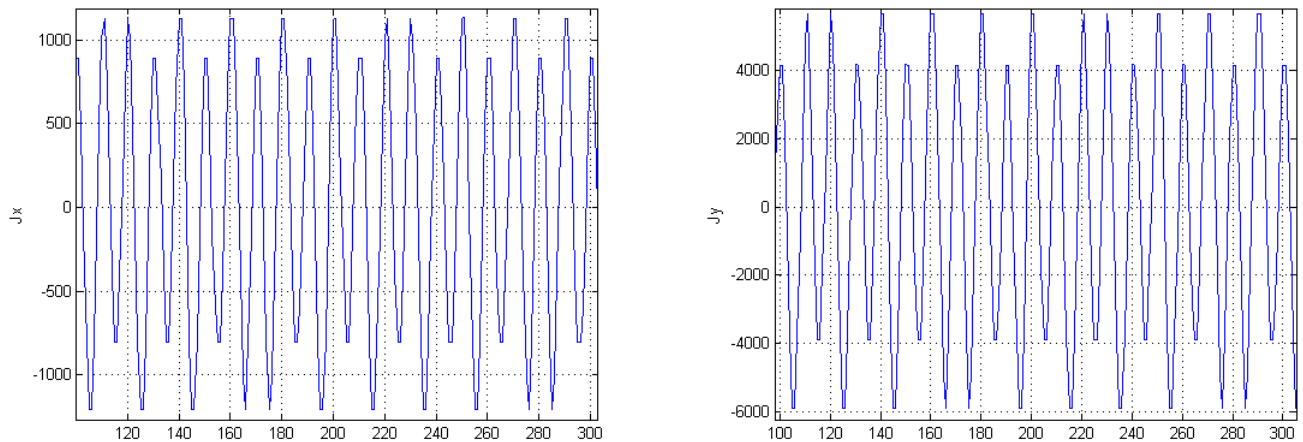


Figura 7.6: Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 112 de coordenadas $(0.0803, -0.0051)$ [m]. Unidades de J_{xy} en $[A/m^2]$, y eje de abscisas en muestras

tiempo. Se verifica por medio de éstas el comportamiento oscilatorio, consecuencia de la condición de frontera empleada. El efecto piel es confirmado observando que las componentes de la corriente en el interior del material son de menor amplitud que en zonas más externas, y se obtienen formas periódicas con $110m^5$ muestras de periodo. Es natural la existencia de armónicos consecuencia de la no linealidad y de la histéresis.

7.1.2. Resultados problema Térmico con condición de temperatura constante en la frontera

En las figuras 7.7 hasta 7.10 se aprecian los resultados del problema térmico con condiciones tipo Dirichlet. Se consideran varios tiempos para describir la evolución del comportamiento térmico del cuerpo en calentamiento, empleando figuras con mapas de color que hacen alusión al incremento de temperatura, así como representaciones en 3D de los resultados sobre el enmallado empleado. A medida que transcurre el tiempo de simulación se evidencia una concentración de temperatura hacia la zona céntrica de la geometría, en donde funcionalmente se aprecia la formación de un máximo absoluto dentro del dominio.

7.1.3. Resultados problema Térmico con condición de aislamiento térmico

En las figuras 7.11 hasta 7.14, se describe el calentamiento con condición homogénea tipo Neumann. Se muestran los datos obtenidos en el tiempo, representando con mapas de color y funciones 3D los valores de temperatura. Se observa en la evolución de los datos de simulación un incremento de temperatura hacia la frontera del cuerpo, registrándose los mayores valores en las esquinas. En la zona central se observan los valores mínimos con una clara tendencia hacia un mínimo absoluto dentro del dominio.

⁵ m es un entero positivo

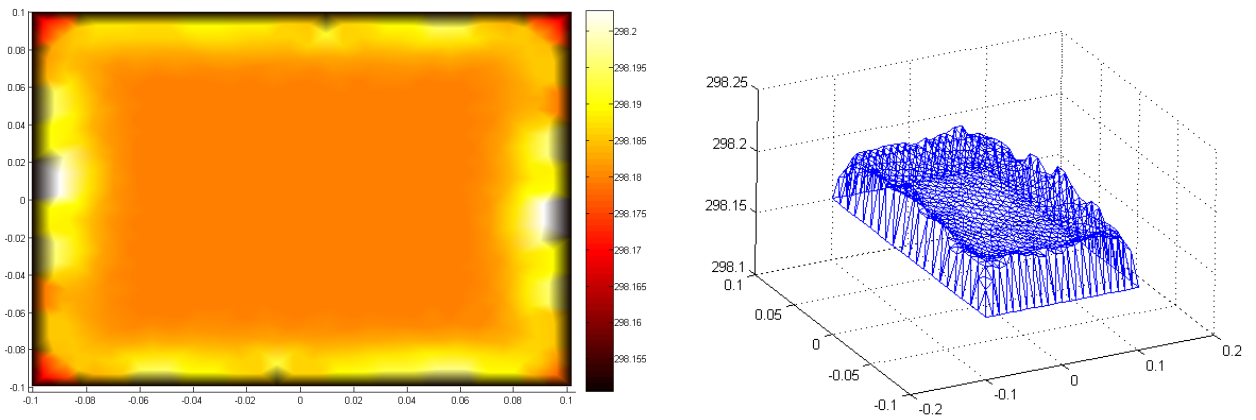


Figura 7.7: Distribución de temperatura en la muestra 5000 (10 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]

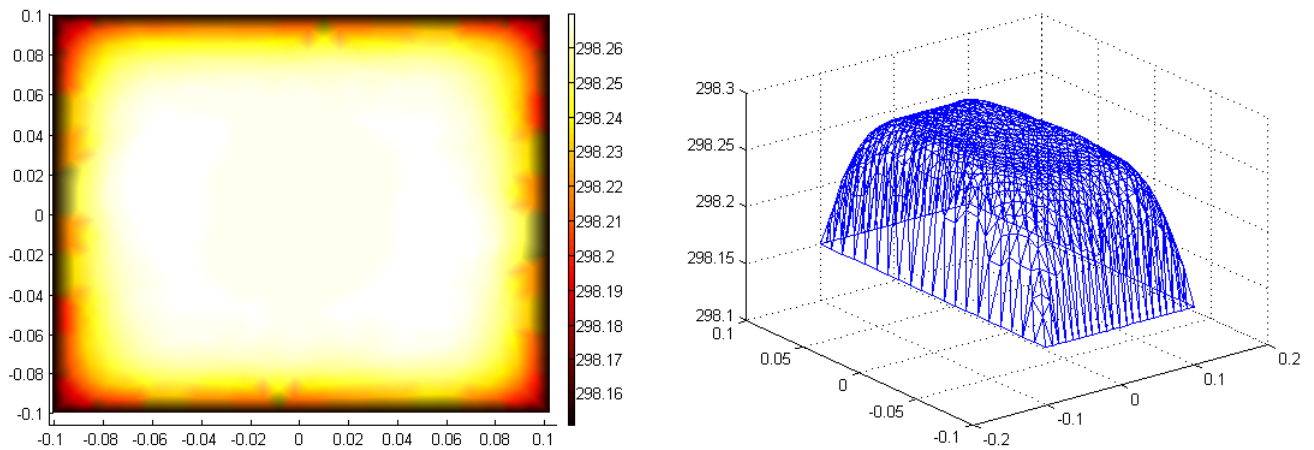


Figura 7.8: Distribución de temperatura en la muestra 20000 (40 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]

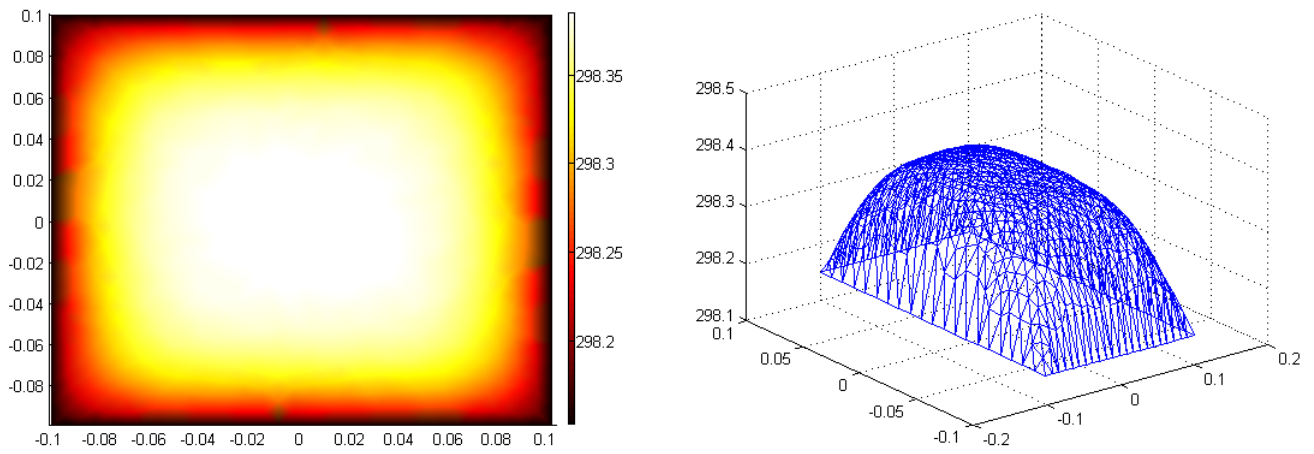


Figura 7.9: Distribución de temperatura en la muestra 40000 (80 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]

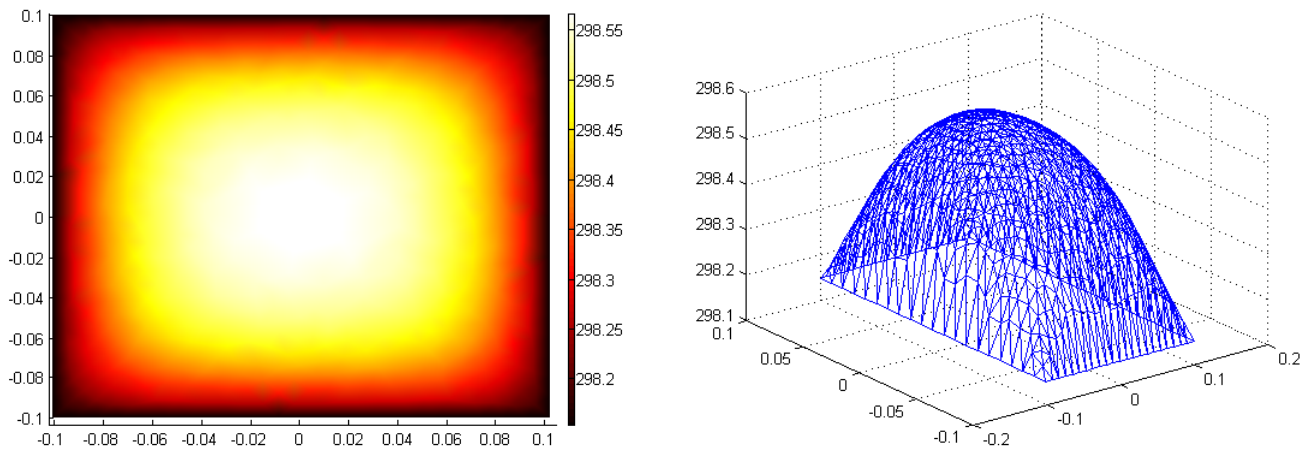


Figura 7.10: Distribución de temperatura en la muestra 73730 (147.46 segundos), para el problema con condición de frontera tipo Dirichlet. Unidades de temperatura en [K]

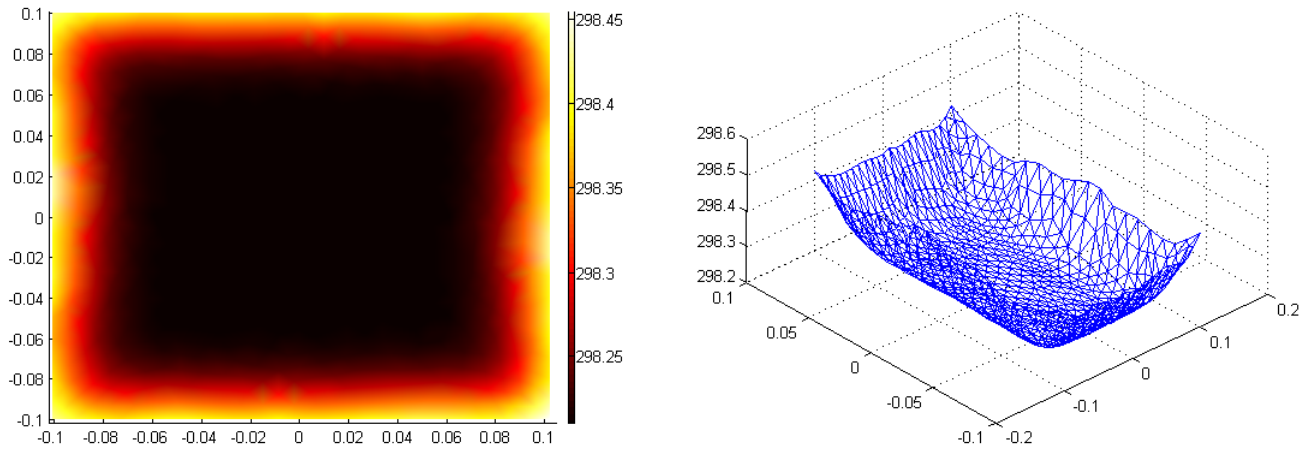


Figura 7.11: Distribución de temperatura en la muestra 10000 (20 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]

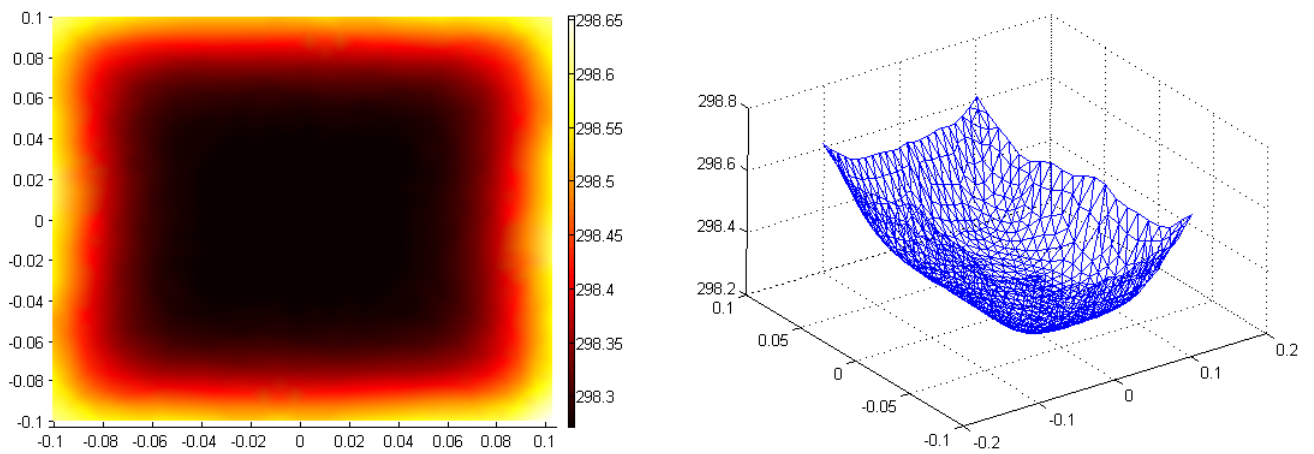


Figura 7.12: Distribución de temperatura en la muestra 20000 (40 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]

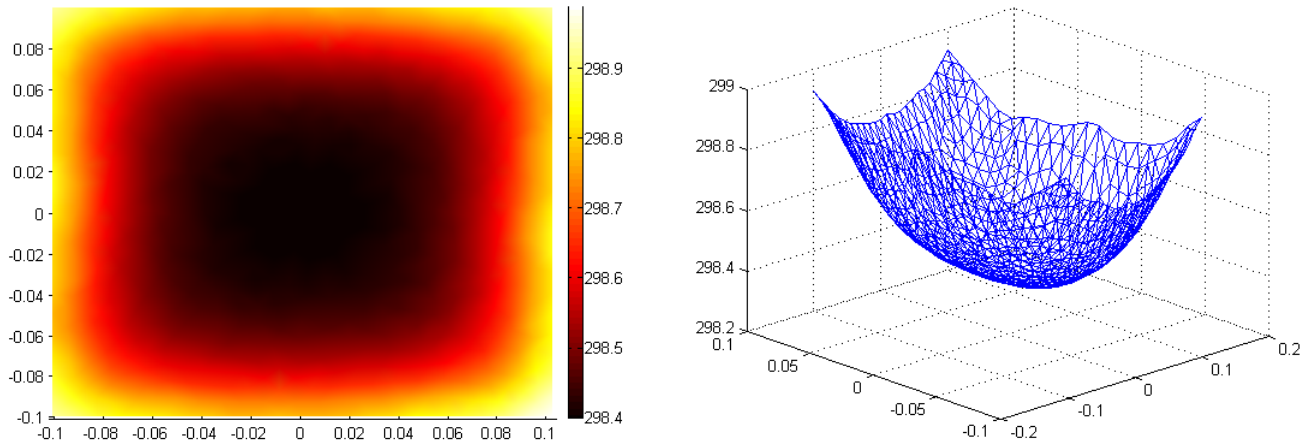


Figura 7.13: Distribución de temperatura en la muestra 40000 (80 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]

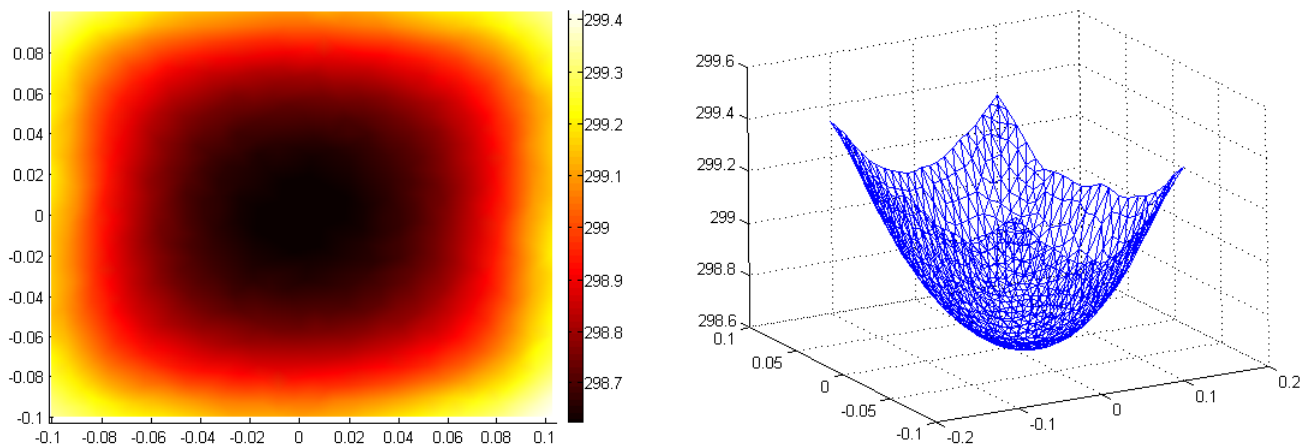


Figura 7.14: Distribución de temperatura en la muestra 70000 (140 segundos) del problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de temperatura en [K]

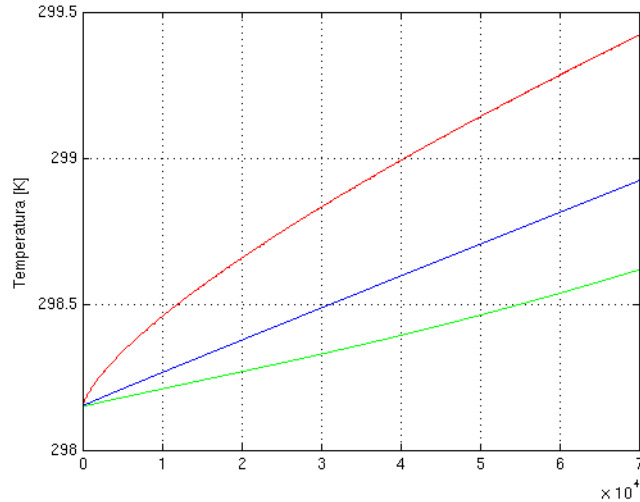


Figura 7.15: Gráfica de las Temperaturas máxima (rojo), promedio (azul) y mínima (verde) del calentamiento en la sección rectangular ferromagnética. Eje de abscisas en muestras.

7.1.4. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con Otros Trabajo: *Problema Térmico*

Los resultados del problema térmico para las distintas condiciones de frontera que se aprecian en las figuras 7.7 hasta 7.14, permiten describir la evolución en el tiempo de la temperatura. Las soluciones obtenidas para este problema están dentro del tipo de curvas típicas de solución para la ecuación de difusión del calor [46][47], es decir los resultados son consistentes con los modelos que describen el problema. Por otra parte en la gráfica 7.15 se puede observar el comportamiento de las temperaturas máxima, promedio y mínima obtenidas a lo largo del proceso de simulación para condición de frontera de Neumann. Este resultado es coherente, consistente y semejante al obtenido por Ciric en [12] para un material ferromagnético teniendo en cuenta la dependencia de la permeabilidad respecto de la temperatura⁶.

⁶En este trabajo esta consideración está implícita al considerar los datos experimentales del material

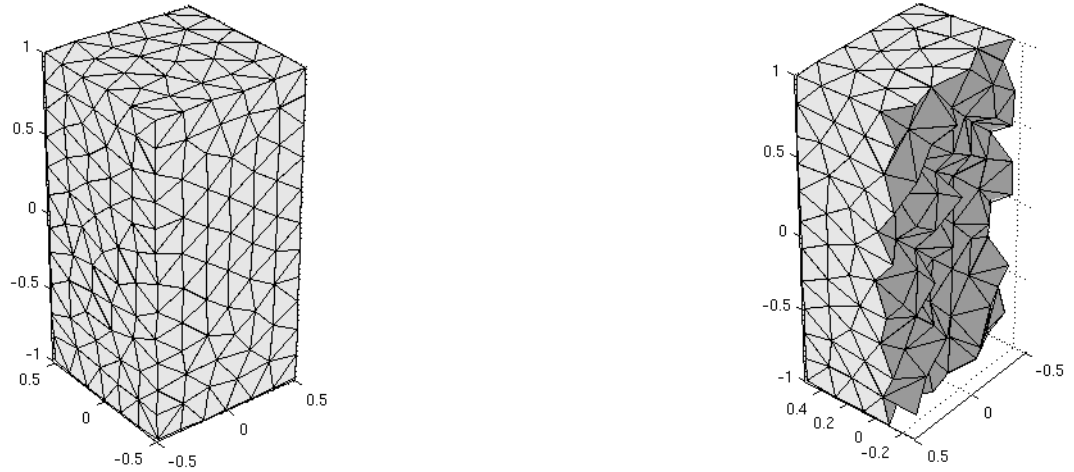


Figura 7.16: Enmallado para dominio 3D. Dimensiones en metros [m].

7.2. Barra Finita de Sección Rectangular

En esta configuración la condición de frontera empleada para el problema electromagnético es $\vec{\mathbb{H}} = 500 \cos(100\pi t)\hat{k}$ [A/m] en las tapas laterales de la barra, y $\vec{\mathbb{B}} = \mu_0 500 \cos(100\pi t)\hat{k}$ [T] en las tapas superior e inferior de la misma. Las propiedades del material empleado son:

- Propiedades Electromagnéticas: $\sigma = 1 \times 10^7$ [S/m], para los datos referentes a la relación B-H ver [21] y el apéndice K.
- Propiedades Térmicas : $\rho = 7,87 \times 10^3$ [Kg/m³], $\lambda = 72$ [W/m · K], $c = 447$ [J/Kg · K], $T_m = 298,15$ [K], $h = 1$ [W/m²K].

En la figura 7.16 se presenta la discretización de la barra en 1700 tetrahedros y 440 nodos. Las figuras 7.17 y 7.18 permiten apreciar el comportamiento en magnitud del vector densidad de corriente en diferentes muestras, se evidencia que los máximos valores se concentran hacia el exterior, evadiendo las aristas paralelas al eje z . En las figuras 7.19 hasta 7.21 se describe el comportamiento de las componentes de éste vector en diferentes puntos de la barra, en términos de las muestras.

7.2.1. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con otros Trabajos: *Problema Electromagnético*

Como se aprecia en las figuras 7.17 y 7.18, se evidencia la tendencia en la magnitud de la corriente a ser pronunciada hacia el exterior de la barra, lo cual es esperado como consecuencia del efecto piel. Se observa que las corrientes están nuevamente arremolinadas, por ello la magnitud de $\vec{\mathbb{J}}$ es reducida incluso en las tapas superior e inferior de la barra hacia la zona céntrica. Con las figuras 7.19 hasta 7.21 se pueden confirmar estos comportamientos, y se destaca la existencia de una componente en la dirección z que es diferente de cero en pequeños intervalos de muestras; además se comprueba

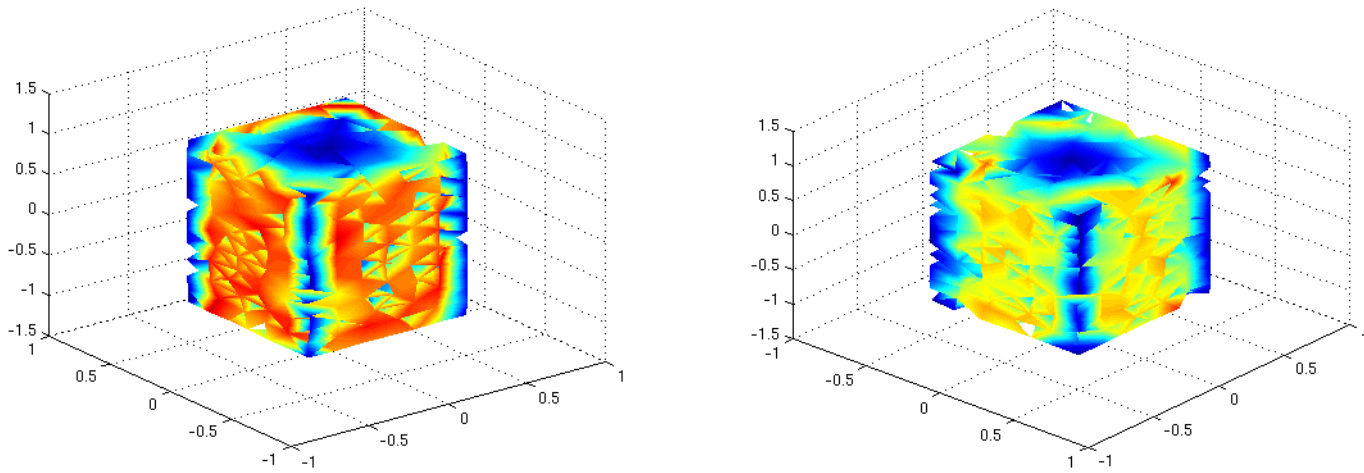


Figura 7.17: Magnitud del vector densidad de corriente en las muestras 3 y 8 (0.006 y 0.016 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 3: $1.5279e3 [A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 8: $1.2452e3 [A/m^2]$

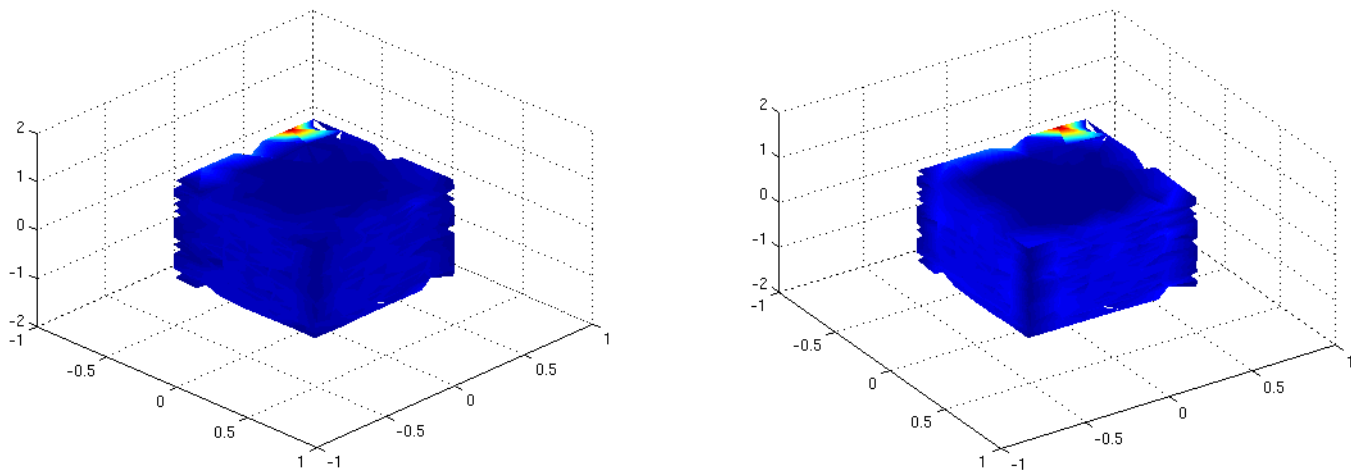


Figura 7.18: Magnitud del vector densidad de corriente en las muestras 1000 y 1005 (2 y 2.016 segundos). Unidades de J en $[A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 1000: $8.2655e3 [A/m^2]$. Máximo de corriente en la muestra 1005: $9.1165e3 [A/m^2]$

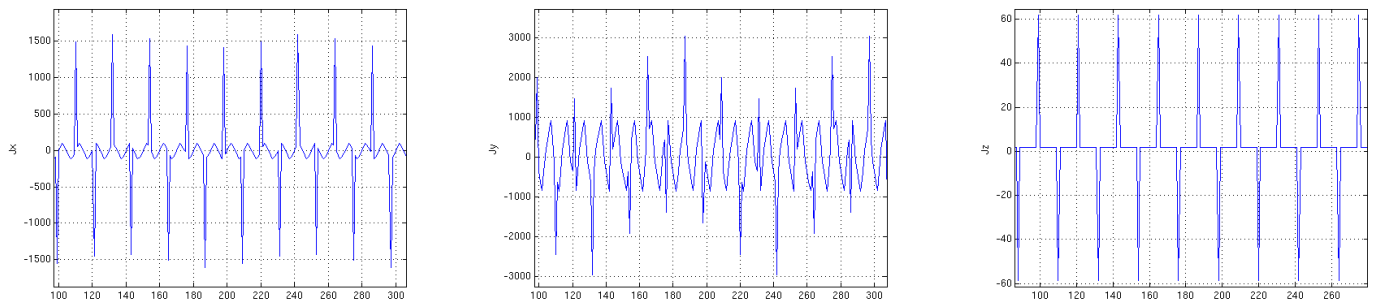


Figura 7.19: Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 100 de componentes $(-0.3312, 0.1683, -0.6424)$ [m]. Unidades de J_{xyz} en $[A/m^2]$ y eje de abscisas en muestras

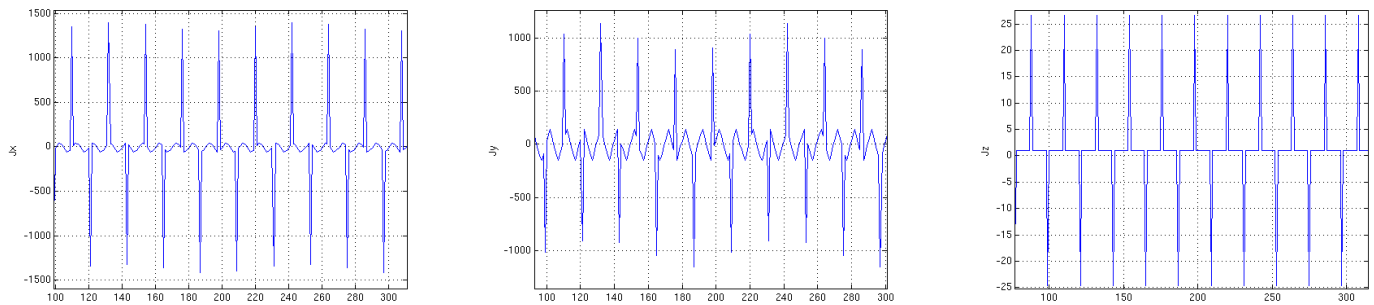


Figura 7.20: Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 100 de componentes $(-0.1647, 0.0681, -0.6358)$ [m]. Unidades de J_{xyz} en $[A/m^2]$ y eje de abscisas en muestras

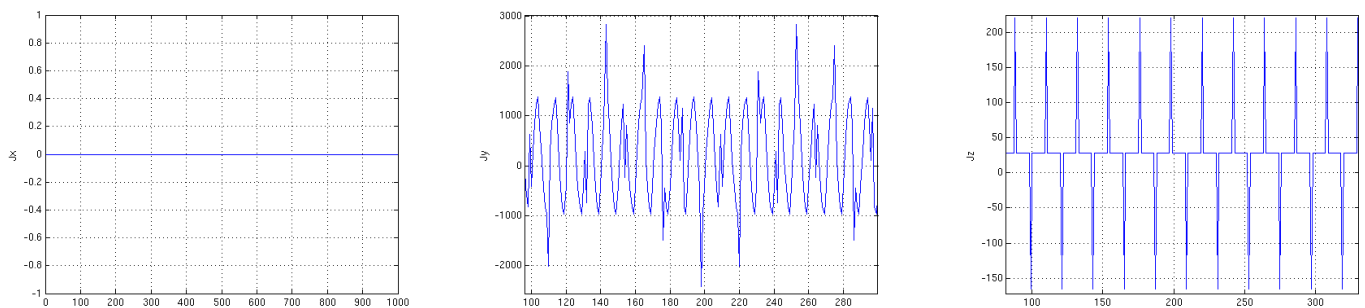


Figura 7.21: Componentes del vector densidad de corriente en el nodo 140 de componentes $(0.5, 0.15, -0.4591)$ [m]. Unidades de J_{xyz} en $[A/m^2]$ y eje de abscisas en muestras

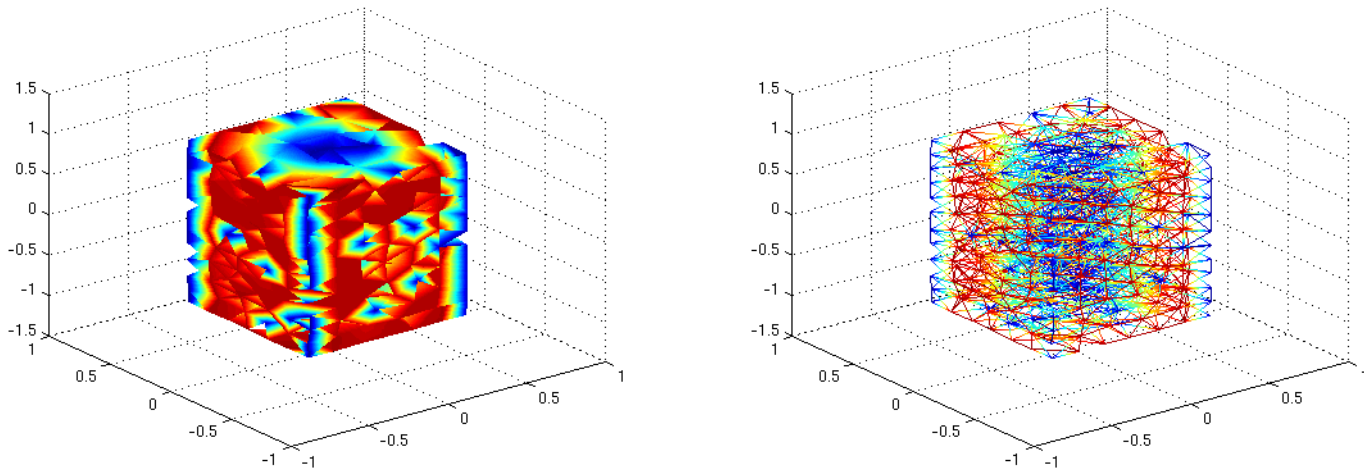


Figura 7.22: Distribución de temperatura en la muestra 800 (1.6 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 500.7629 [K] y 298.5794 [K]

la naturaleza oscilatoria de las corrientes, con una periodicidad cada $110m^7$. Estos resultados están totalmente en acuerdo y semejanza con los obtenidos por Kameari, Tsuboi, Misaki y Enokizono en [18][41][42][19] respectivamente, en donde se hallan datos con las mismas tendencias en materiales de permeabilidad constante.

7.2.2. Resultados del problema térmico con condición convectiva

En las figuras 7.22 hasta 7.25 se aprecia la distribución de temperatura obtenida para el problema de condición convectiva a manera de un mapa de color sobre la geometría, junto a otro realizado sobre las aristas de los tetraedros de tal manera que se puede apreciar el comportamiento de la temperatura en el interior del metal. Los valores más altos de temperatura se dan en los exteriores de la barra, mientras que en el interior se conforma un mínimo absoluto, considerando la temperatura como una función de tres variables.

7.2.3. Resultados del problema térmico con condición de aislamiento térmico

En las figuras 7.26 hasta 7.29 se aprecia el comportamiento de la temperatura para el problema térmico con condición de aislamiento. Igualmente se hace uso de una visualización por medio de mapas de color, con los que se muestra tanto el exterior como las tendencias en el interior de la barra. Los mayores valores de temperatura están hacia los exteriores de la ésta, de manera que hacia el interior se conforma un mínimo absoluto, considerando la temperatura como una función de tres variables.

⁷ m es un entero positivo

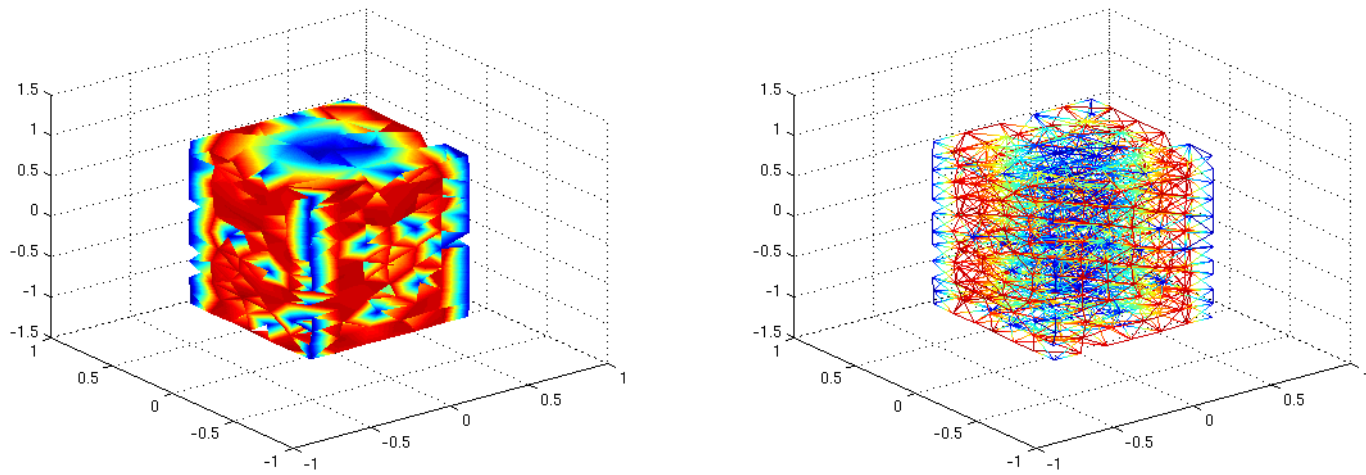


Figura 7.23: Distribución de temperatura en la muestra 2000 (4 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 503.9126 [K] y 299.3663 [K]

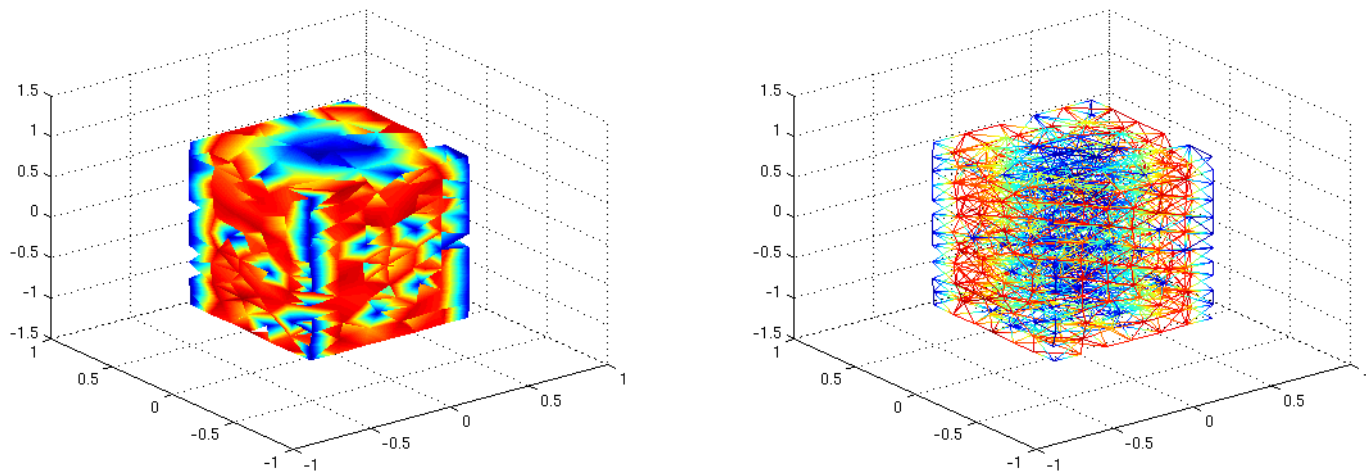


Figura 7.24: Distribución de temperatura en la muestra 5000 (10 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 509.6181 [K] y 299.3854 [K]

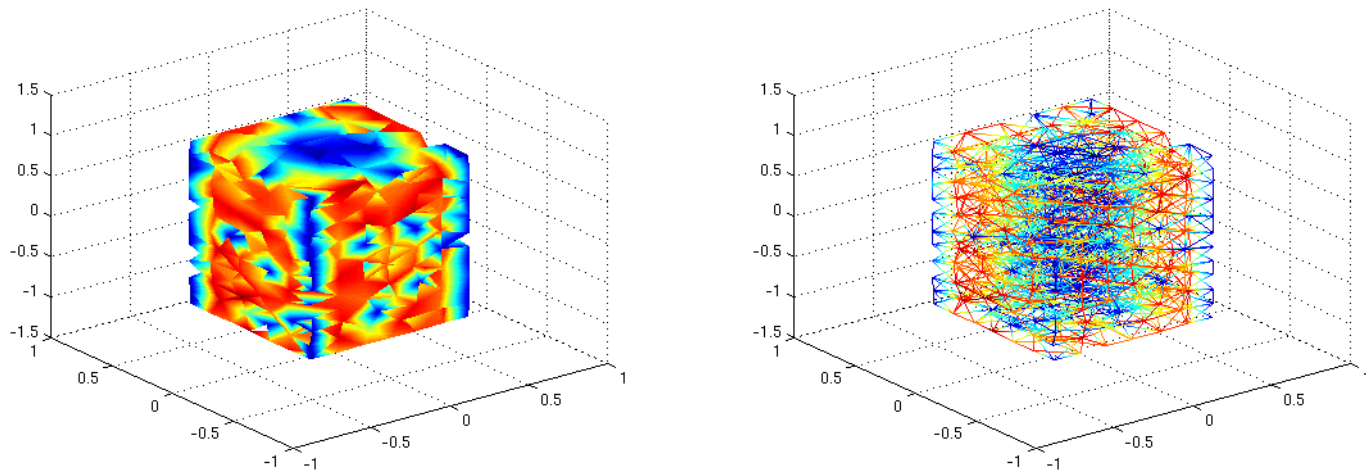


Figura 7.25: Distribución de temperatura en la muestra 10000 (20 segundos) para el problema de condición convectiva. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 513.3403 [K] y 299.6148 [K]

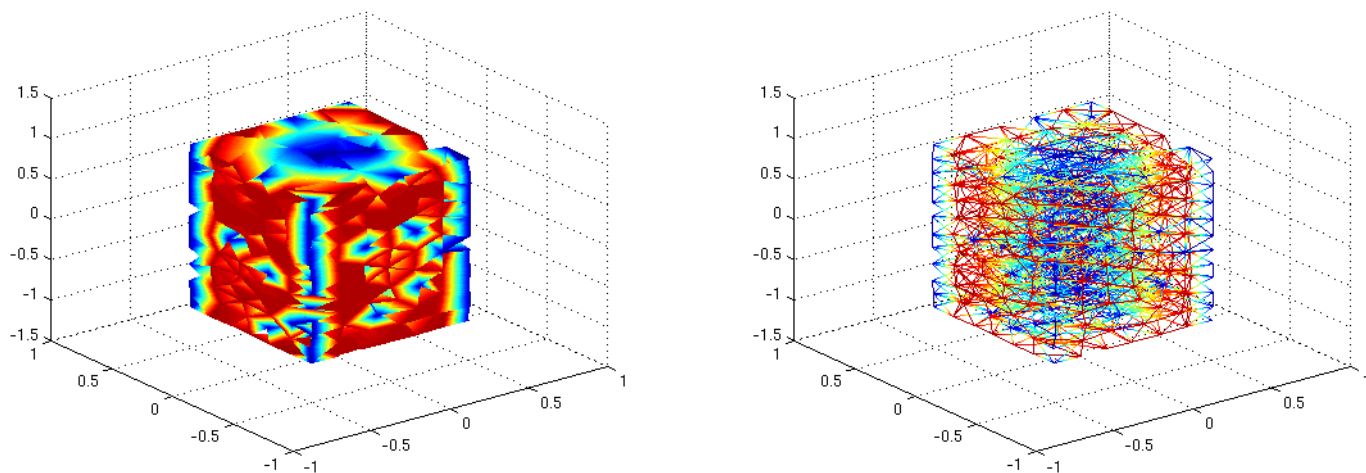


Figura 7.26: Distribución de temperatura en la muestra 800 (1.6 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 501.2447 [K] y 300.2321 [K]

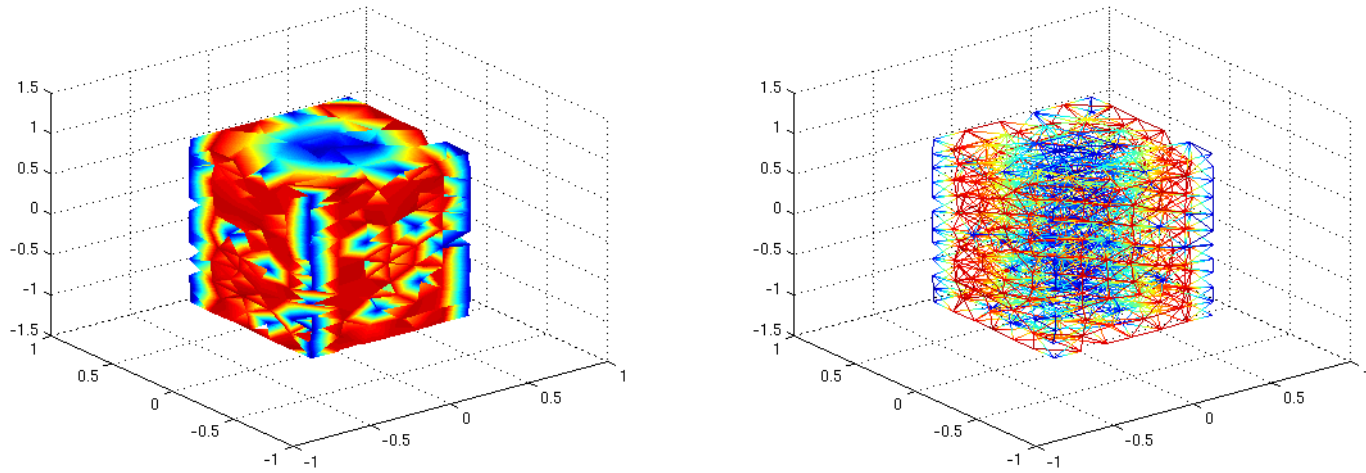


Figura 7.27: Distribución de temperatura en la muestra 2000 (4 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 505.2017 [K] y 300.4948 [K]

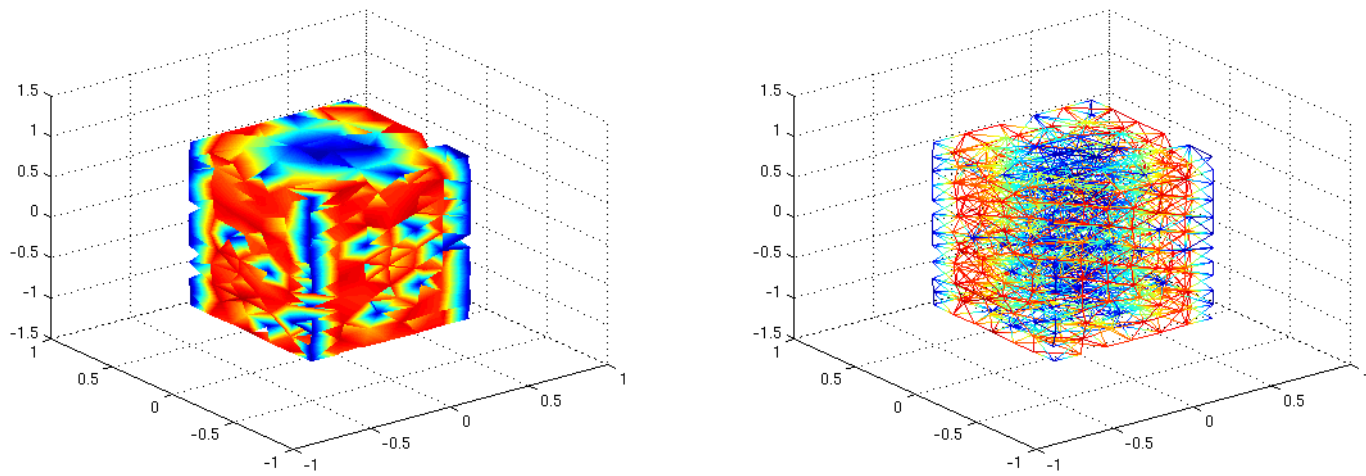


Figura 7.28: Distribución de temperatura en la muestra 5000 (10 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 513.2868 [K] y 300,5610 [K]

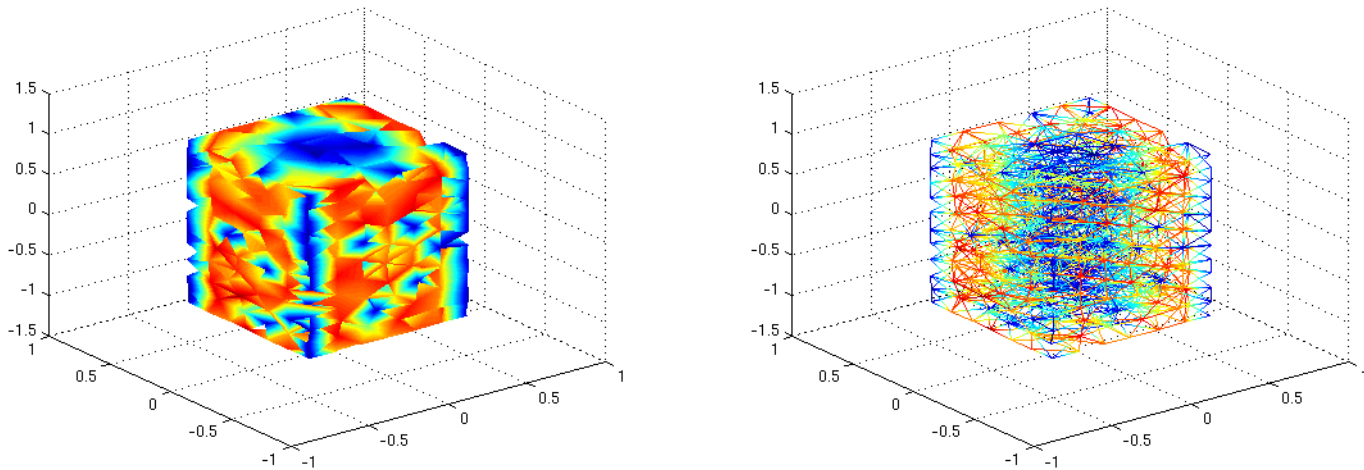


Figura 7.29: Distribución de temperatura en la muestra 10000 (20 segundos) para el problema con condición de aislamiento térmico. Unidades de Temperatura en [K]. Máximo y mínimo de temperatura: 521.7331 [K] y 300.6225 [K]

7.2.4. Significado Físico de los Resultados y Contrastación con otros Trabajos: *Problema Térmico*

En las figuras 7.22 hasta 7.29 se aprecia la evolución del calentamiento en una barra ferromagnética, con una tendencia semejante al problema bidimensional en el caso convectivo y de aislamiento térmico; se muestran valores elevados hacia el exterior, y las tendencias hacia un mínimo se dan en la zona interior de la barra, de manera que estas soluciones son acordes con el tipo de soluciones típicas para la ecuación de calor en este tipo de geometrías con esas condiciones [46][47], por lo cual hay consistencia con los modelos base. Estos resultados son semejantes y coherentes a los presentados en [61], donde se calientan, por medio de dispositivos de inducción, materiales ferromagnéticos de diferentes geometrías. Por otra parte, la tendencia mostrada por la temperatura es semejante a la que se evidencia en [62][63], en donde se realiza una simulación de calentamiento por inducción en geometrías cilíndricas.

7.3. Conclusiones

Como un aspecto esencial en una gran cantidad de sistemas, la descripción de la temperatura en el calentamiento por corrientes de Eddy representa actualmente tanto una necesidad, como una ventaja competitiva en términos de diseño e implementación en diversas aplicaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se logró determinar la distribución de temperatura en cuerpos ferromagnéticos de dos y tres dimensiones calentados por estas corrientes, cumpliéndose los objetivos propuestos y obteniéndose resultados confiables en sus significados físico y analítico, y coherentes con los de otros trabajos realizados. En este aspecto se realiza una contribución a la investigación en la simulación de éstos fenómenos por medio de un estudio detallado y riguroso de las corrientes de Eddy y sus efectos, así como del análisis de elementos finitos aplicado a lo solución de planteamientos

electrotérmicos. Los beneficios de emplear esta técnica son representativos, teniendo en cuenta que los materiales abordados son ferromagnéticos y los esquemas diseñados para manejar este tipo de características, es escaso y están referidos en su mayoría a éste método.

Considerando los anteriores argumentos, debe resaltarse que los códigos resultantes del proceso de investigación, permiten realizar simulaciones del calentamiento por corrientes de Eddy en cualquier tipo de hierro, siempre y cuando se especifiquen los datos experimentales del material. De esta manera se logran rebasar los alcances planteados en la propuesta de éste trabajo, en donde se planteaban códigos diseñados para cuatro tipos de hierro.

7.4. Observaciones y Recomendaciones para Trabajos Futuros

Aunque se plantearan estrategias en las que se consideraban totalmente desacoplados los problemas espacial y temporal, en la demostración de la sección 5.4 se encontró que la constante que da la medida de la estabilidad en cuanto discretización en el tiempo, depende directamente de la norma de las matrices principales de geometría que se obtienen para la solución del problema espacial por elementos finitos.

Los tiempos de ejecución de los códigos en donde se implementan los algoritmos de solución, juegan un papel secundario en la obtención de los resultados. Sin embargo pueden significar una ventaja para el investigador dedicado al análisis de éstos fenómenos. A partir de esto se recomienda la realización de un proyecto de grado dedicado exclusivamente al estudio y obtención de técnicas para el mejoramiento en eficiencia de la ejecución de códigos de este tipo, y así reducir tiempos en la obtención de los datos.

La escasez de la literatura destinada al análisis de corrientes de Eddy en metales ferromagnéticos, y más aún al calentamiento por corrientes de Eddy en estos materiales, representó un gran reto en el proceso de investigación. Así mismo, la falta de información detallada respecto al planteamiento, implementación y cómputo de las simulaciones en estos trabajos, se tradujo en una cantidad permanente de obstáculos en la realización y ejecución de este proyecto. Por esto, aspectos sencillos pero esenciales, dilataron los tiempos de ejecución en cuanto a los pormenores de implementación.

Los resultados obtenidos son contrastados en la literatura con otras técnicas recientes, conocidas como *meshless*, las cuales aún se encuentran en estudio y desarrollo. Éstas consisten básicamente en el empleo de nodos asociados al dominio de análisis, de forma tal que a cada uno de ellos se asigna una función de interpolación, pero no existe ninguna relación geométrica entre nodos por medio de alguna entidad, y así mismo el comportamiento de las funciones es independiente entre sí.

Las geometrías abordadas en este trabajo, son dominios de Lipschitz. Esto permite garantizar que el planteamiento realizado con FEM converge a la solución, y que un enmallado más fino asegura una mejor aproximación de la solución [3]. En este sentido se propone la realización de un proyecto de grado abordando el estudio del calentamiento en geometrías que hagan parte de dispositivos específicos y sean dominios de Lipschitz.

Las herramientas de visualización que posee MATLAB jugaron un papel esencial en el análisis de los datos obtenidos a lo largo de la realización de este trabajo, sin embargo las existentes en este software para visualización sobre enmallados no rectangulares tridimensionales, poseen serias limitaciones. Por esto se propone la realización de un proyecto de grado destinado al desarrollo

de herramientas para la visualización en tres dimensiones de resultados obtenidos por medio del método de elementos finitos.

En la realización de los experimentos numéricos, se registró un comportamiento periódico en el término de generación de calor, correspondiente a pm muestras, con m un entero positivo y p un valor entero dependiente de Δt . El número m varía de acuerdo al punto que se está analizando en la geometría. Este hecho permite reducir el número de muestras necesarias para simular el problema electromagnético, ya que se pueden generar tantas como se quieran hasta la desaparición de los transitorios, y a partir de allí se realiza un desplazamiento de los valores obtenidos hasta el límite de tiempo de simulación del fenómeno térmico.

Con un estudio riguroso del calentamiento en el hierro, el material de más complejo tratamiento entre los de uso frecuente en la ingeniería electrónica, llevado a cabo en éste trabajo; se propone la realización de un proyecto de grado en donde se analice el calentamiento por corrientes de Eddy en configuraciones que posean además de hierro otros materiales como cobre o aluminio.

Biro en [34], encuentra experimentalmente que algunas de las formulaciones de tipo potencial magnético vectorial, resultan inadecuadas para simular el problema de las corrientes de Eddy utilizando elementos finitos a frecuencias cercanas a los 0 Hz. Con ese estudio, se obtuvieron resultados que no mostraron tener una tendencia y carecían de significado físico. En este proyecto de grado se verificó ese comportamiento, simulando las corrientes de Eddy en un material de permeabilidad unitaria sometido a una excitación de frecuencias menores a los 10 Hz. Los resultados obtenidos no eran coherentes con la física del problema. Teniendo en cuenta el anterior argumento, se propone la realización de un proyecto de grado destinado a la obtención, ya sea por experimentación o análisis, de una estrategia para superar esta limitación. Para ello, se sugiere seguir el trabajo propuesto por Zhang en [13], donde se simulan las corrientes de Eddy en un material de sección rectangular con permeabilidad constante, para excitaciones de frecuencias cercanas al valor cero, empleando una formulación de tipo potencial magnético vectorial pero haciendo uso de una técnica novedosa de tipo *meshless*, con la que se obtuvieron resultados satisfactorios en cuanto a exactitud con relación a la solución analítica del problema.

Apéndice A

Parámetros Principales en el Manejo de los Códigos

Para la aplicación de los códigos se requiere tener en cuenta algunos aspectos referentes a los parámetros empleados, así como la interrelación entre éstos considerando las variables de salida. En este apéndice se presentan algunas generalidades sobre el uso de los códigos, así como el significado de las variables que se introducen para obtener la simulación.

A.1. Parámetros de Geometría

La geometría del problema debe describirse, para el caso 2-dimensional por medio de las matrices \mathbf{p} , \mathbf{e} , \mathbf{t} , donde \mathbf{p} es la matriz de nodos del enmallado, \mathbf{t} la matriz de triángulos y \mathbf{e} la matriz de aristas. Siendo consecuente con la implementación de los algoritmos en Matlab, este tipo de datos puede obtenerse mediante el `pdetool`. Para el caso de tres dimensiones la geometría se describe únicamente mediante \mathbf{p} , \mathbf{t} , una matriz de nodos y tetrahedros respectivamente, las cuales pueden generarse con el toolbox `distmesh` diseñado para usar en Matlab, propiedad intelectual de Per Olof Persson y de libre uso para investigación. Si los enmallados son creados por otros medios, los resultados deben adecuarse para presentarse como se obtienen mediante el uso de las anteriores herramientas.

A.2. Parámetros del Problema Electromagnético

A.2.1. Parámetros de histéresis

En la sección 6.1.1 se aprecia el proceso de modelado de las curvas de histéresis en el material, de donde se obtienen los parámetros `FS`, `FSX`, `FI`, `FIX`, `fls`, `fli`. Con `FS`, `FI`, `FSX`, `FIX` se maneja la evolución de los campos mientras que con `fls`, `fli` se realiza el cálculo de las pérdidas. La obtención de éstos, debe realizarse por medio del procedimiento indicado en esa sección.

A.2.2. Otros parámetros

El tiempo máximo de simulación se define en muestras mediante el parámetro `timemax`. Es decir que el tiempo real de simulación sería `Deltat*timemax`, donde `Deltat` es el tamaño de paso seleccionado para la discretización en el dominio del tiempo. Con `f` se representa la frecuencia de la función de onda de excitación y `H0max` el valor máximo de la misma. Con `Sigma` se asigna la conductividad eléctrica. Con `np` se indica el número de muestras que se obtiene con el `Deltat` seleccionado en media longitud de onda de la señal de excitación, y en relación con este parámetro `nlonda` que indica el número de intervalos con media longitud de onda de extensión que se van a tratar en el problema. Éste último puede estimarse como `timemax/(2*np)`. El valor seleccionado puede ser mayor o igual a esta estimación siendo un valor entero¹. Y `nuFP` representa el coeficiente del esquema de introducción de la histéresis, es un número que se puede seleccionar entre los valores máximo y mínimo del inverso de la permeabilidad.

A.3. Problema Térmico

Con `rho`, `lambda`, `c` y `h` se representan la densidad, la conductividad térmica, el calor específico y el coeficiente de convección respectivamente. `T0ext=Tm2` es la temperatura inicial y externa del cuerpo en el fenómeno, `q` representa los valores numéricos del término de generación de calor resultantes del cálculo de las corrientes. Mientras `timeheatmax` representa el tiempo máximo de simulación para el problema térmico.

A.4. Algunos Aspectos para Tener en Cuenta

El proceso de aplicación de los códigos se describe mediante los siguientes pasos

1. Obtener los modelos de la histéresis.
2. Especificar los parámetros restantes de simulación.
3. Emplear la función de cálculo del problema electromagnético : `ElectroFEM_2D.m` o bien `ElectroFEM_3D.m`. La variable de salida de ésta funciones es el término de generación de calor `q`, que hace parte de las variables de entrada del problema térmico.
4. Introducir las variables de simulación del problema térmico, dependiendo de cual es el tipo de condición de frontera deseado.

¹siempre y cuando el valor seleccionado cumpla estos condicionamientos se garantiza que los resultados serán los mismos

²Una misma variable se representó de dos formas en algunos de los códigos para una mayor facilidad de implementación y seguimiento de funcionamiento.

Apéndice B

ElectroFEM_2D.m

```
function out_q=ElectroFEM_2D(p,e,t,nuFP,Sigma,Deltat,f,H0max,timemax,np,nlonda,FS,FSX,
FI,FIx,fls,fli)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
t1=t;
t1(4,:)=[];
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t1(:,i);
a=nodos{i};
for j=1:1:3
cord{j}=p(:,a(j))';
end
cord1i=cord;
end
clear nodos cord a j i
vc1=[1;1;1];
alpha3T=0;
gammaT=0;
betaT=0;
rot_AT=0;
rot_BT=0;
for i=1:1:lf1
i % Indicador de ciclo
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3}];
MDk1=vpa([vc1 s2]);
MDj1=vpa([vc1 s2]);
MDjk=vpa([vc1 s2]);
Cjkl=det([vc1 s2]);clear s2
%***** FORMANDO LOS NMjkl para calcular las integrales en la integrales en la frontera
%***** NMjkl
clear y x
syms x
y=max(p(2,:)); MDk1(1,:)= [1,x,y];
Dk1=det(MDk1);
Nj=Dk1/Cjkl;clear Dk1
```

```

MDj1(2,:)= [1,x,y];
Dj1=det(MDj1);
Nk=Dj1/Cjkl;clear Dj1
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjklc{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear y
%*****
%***** NMjklc
y=min(p(2,:)); % y=c el valor de y
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDj1(2,:)= [1,x,y];
Dj1=det(MDj1);
Nk=Dj1/Cjkl;clear Dj1
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjklc{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear y x
syms y
%*****
%***** NMjklb
x=max(p(1,:)); % x=b el valor de x
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDj1(2,:)= [1,x,y];
Dj1=det(MDj1);
Nk=Dj1/Cjkl;clear Dj1
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjklb{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear x
%*****
%***** NMjkla
x=min(p(1,:)); % x=a el valor de x
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDj1(2,:)= [1,x,y];
Dj1=det(MDj1);
Nk=Dj1/Cjkl;clear Dj1
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjkla{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear y x

```

```

syms y x
%*****
%*****
%Generación de los Nj(x,y) MDk1(1,:)= [1,x,y];
Dk1=det(MDk1);
Nj=Dk1/Cjkl;clear Dk1 MDk1
MDj1(2,:)= [1,x,y];
Dj1=det(MDj1);
Nk=Dj1/Cjkl;clear Dj1 MDj1
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
dyNjkl=[diff(Nj,'y'), diff(Nk,'y'), diff(Nl,'y')]; %derivadas en y de los Nj
dxNjkl=[diff(Nj,'x'), diff(Nk,'x'), diff(Nl,'x')]; %derivadas en x de los Nj
syms Xi Eta
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,'x','y');
x=F.x;y=F.y;JC=abs(det(jacobian([x;y],[Xi, Eta])));clear F
clear x y;
%***** Integrales por Cuadratura *****
u1=sqrt(3)/3;u2=-sqrt(3)/3;
Xi1=(u1+1)*0.5;Eta1=0.25*(1-u1)*(1+sqrt(3)/3);Eta1b=0.25*(1-u1)*(1-sqrt(3)/3);
Xi2=(u2+1)*0.5;Eta2=0.25*(1-u2)*(1+sqrt(3)/3);Eta2b=0.25*(1-u2)*(1-sqrt(3)/3);
syms x y
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,'x','y');
x=F1.x;
y=F1.y;clear F1
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11=JC*[Xi1;Eta1;Nl]*[Xi1;Eta1;Nl]';
Q11=[JC*[Xi1; Eta1; Nl]*dyNjkl JC*[Xi1; Eta1; Nl]*dxNjkl];
S11=[JC*[Xi1; Eta1; Nl]*dyNjkl; -JC*[Xi1; Eta1; Nl]*dxNjkl];
T11=[-JC*[Xi1; Eta1; Nl]*dyNjkl JC*[Xi1; Eta1; Nl]*dxNjkl];clear Nl Eta1
syms x y
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,'x','y');
x=F2.x;
y=F2.y;clear F2
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11b=JC*[Xi1;Eta1b;Nl]*[Xi1;Eta1b;Nl]';
Q11b=[JC*[Xi1; Eta1b; Nl]*dyNjkl JC*[Xi1; Eta1b; Nl]*dxNjkl];
S11b=[JC*[Xi1; Eta1b; Nl]*dyNjkl; -JC*[Xi1; Eta1b; Nl]*dxNjkl];
T11b=[-JC*[Xi1; Eta1b; Nl]*dyNjkl JC*[Xi1; Eta1b; Nl]*dxNjkl];clear Nl Xi1 Eta1b
syms x y
F3=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,'x','y');
x=F3.x;
y=F3.y;clear F3
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk

```

```

P22=JC*[Xi2;Eta2;Nl]*[Xi2;Eta2;Nl]';
Q22=[JC*[Xi2; Eta2; Nl]*dyNjkl JC*[Xi2; Eta2; Nl]*dxNjkl];
S22=[JC*[Xi2; Eta2; Nl]*dyNjkl; -JC*[Xi2; Eta2; Nl]*dxNjkl];
T22=[-JC*[Xi2; Eta2; Nl]*dyNjkl JC*[Xi2; Eta2; Nl]*dxNjkl];clear Eta2 Nl
syms x y
F4=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,'x','y');
x=F4.x;
y=F4.y;clear F4
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk MDjk
P22b=JC*[Xi2;Eta2b;Nl]*[Xi2;Eta2b;Nl]';
Q22b=[JC*[Xi2; Eta2b; Nl]*dyNjkl JC*[Xi2; Eta2b; Nl]*dxNjkl];
S22b=[JC*[Xi2; Eta2b; Nl]*dyNjkl; -JC*[Xi2; Eta2b; Nl]*dxNjkl];
T22b=[-JC*[Xi2; Eta2b; Nl]*dyNjkl JC*[Xi2; Eta2b; Nl]*dxNjkl];clear Nl Xi2 Eta2b
alpha3=[dyNjkl';-dxNjkl']*[dyNjkl,-dxNjkl]*(Cjkl*0.5);
gamma=kron(eye(2),0.125*(1-u1)*(P11+P11b)+0.125*(1-u2)*(P22+P22b));
beta=(0.125*(1-u1)*(S11+S11b)+0.125*(1-u2)*(S22+S22b));
rot_A=0.125*(1-u1)*(T11+T11b)+0.125*(1-u2)*(T22+T22b);
rot_B=0.125*(1-u1)*(P11+P11b)+0.125*(1-u2)*(P22+P22b);
clear Xi Eta x y Nj Nk Nl JC dyNjkl dxNjkl P11 P22 Q11 Q22 P11b P22b Q11b Q22b S11 S22
S11b S22b
alpha3S=zeros(2*nd,2*nd);
gammaS=zeros(2*nd,2*nd);
betaS=zeros(2*nd,nd);
rot_AS=zeros(nd,2*nd);
rot_BS=zeros(nd,nd);
vpru=t1(:,i);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
alpha3S(vpru(kk),vpru(ll))=alpha3(kk,ll);
alpha3S(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=alpha3(kk,ll+3);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(ll))=alpha3(kk+3,ll);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(ll)+nd)=alpha3(kk+3,ll+3);
gammaS(vpru(kk),vpru(ll))=gamma(kk,ll);
gammaS(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=gamma(kk,ll+3);
gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(ll))=gamma(kk+3,ll);
gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(ll)+nd)=gamma(kk+3,ll+3);
betaS(vpru(kk),vpru(ll))=beta(kk,ll);
betaS(vpru(kk)+nd,vpru(ll))=beta(kk+3,ll);
rot_AS(vpru(kk),vpru(ll))=rot_A(kk,ll);
rot_AS(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=rot_A(kk,ll+3);
rot_BS(vpru(kk),vpru(ll))=rot_B(kk,ll);
end
end
clear rot_B rot_A beta gamma alpha3 kk ll vpru
alpha3T=alpha3S+alpha3T;clear alpha3S
gammaT=gammaS+gammaT;clear gammaS
betaT=betaS+betaT;clear betaS
rot_AT=rot_AS+rot_AT;clear rot_AS
rot_BT=rot_BS+rot_BT;clear rot_BS

```

```

end
clear i vc1
% Encontrando los nodos que se encuentran
% en la frontera
p_olof=p';
t_olof=t1'; %Adecuacion de las matrices para usar programa de olof Persson
bound_edges=boundedges(p_olof,t_olof);
bound_nodes=unique(bound_edges); clear bound_edges % Son los nodos que estan en la frontera
%***** MATRIZ [alphaf] *****
%*****
%***** Matriz [alphaf1d] *****
[iid,jjd]=find(p==max(p(2,:)));clear iid
for ll=1:1:max(size(jjd))
[iid2,jjd2]=find(t1==jjd(ll));clear iid2
bord{ll}=jjd2;clear jjd2
end
clear ll jjd
ccbord=bord{1};
for kk=2:1:max(size(bord))
ccbord=[ccbord;bordkk];
end
clear bord kk
for ww=1:1:max(size(ccbord))
[iid3,jjd3]=find(ccbord==ccbord(ww));clear jjd3
iid3=max(size(iid3));
if (iid3)<(2)
ccbord_unid(ww)=ccbord(ww);
else
ccbord_unid(ww)=0;
end
end
clear ww iid3
ccbord_unid=setdiff(ccbord,ccbord_unid);clear ccbord
for rr=1:1:max(size(ccbord_unid)) ggd=t1(:,ccbord_unid(rr));
ggd=intersect(ggd,bound_nodes);
if p(1,ggd(1)) < p(1,ggd(2))
alphaf1dccbord_unid(rr)=int(NMjkldccbord_unid(rr),'x',p(1,ggd(1)),p(1,ggd(2)));
else
alphaf1dccbord_unid(rr)=int(NMjkldccbord_unid(rr),'x',p(1,ggd(2)),p(1,ggd(1)));
end
end
clear ggd rr NMjkl
%*****
%**** Matriz [alphaf1c] *****
[iic,jjc]=find(p==min(p(2,:)));clear iic
for ll=1:1:max(size(jjc))
[iic2,jjc2]=find(t1==jjc(ll));clear iic2
bordc{ll}=jjc2;clear jj2
end
clear ll jjc
ccbordc=bordc{1};

```

```

for kk=2:1:max(size(bordc))
ccbordc=[ccbordc;bordc{kk}];
end
clear kk bordc
for ww=1:1:max(size(ccbordc))
[iic3,jjc3]=find(ccbordc==ccbordc(ww));clear jjc3
iic3=size(iic3);
iic3=iic3(1,1);
if (iic3) < (2)
ccbord_uni(ww)=ccbordc(ww);
else
ccbord_uni(ww)=0;
end
end
clear ww iic3
ccbord_uni=setdiff(ccbordc,ccbord_uni);clear ccbordc
for rr=1:1:max(size(ccbord_uni))
ggc=t1(:,ccbord_uni(rr));
ggc=intersect(ggc,bound_nodes);
if p(1,ggc(1)) < p(1,ggc(2))
alphaf1ccbord_uni(rr)=int(NMjklc{ccbord_uni(rr)},'x',p(1,ggc(1)),p(1,ggc(2)));
else
alphaf1c{ccbord_uni(rr)}=int(NMjklc{ccbord_uni(rr)},'x',p(1,ggc(2)),p(1,ggc(1)));
end
end
clear rr ggc NMjklc
%*****
%***** Matriz [alphaf2b] *****
[iib,jjb]=find(p==max(p(1,:)));clear iib
for ll=1:1:max(size(jjb))
[iib2,jjb2]=find(t1==jjb(ll));clear iib2
bordb{ll}=jjb2;clear jjb2
end
clear ll jjb
ccbordb=bordb{1};
for kk=2:1:max(size(bordb))
ccbordb=[ccbordb;bordb{kk}];
end
clear kk bordb
for ww=1:1:max(size(ccbordb))
[iib3,jjb3]=find(ccbordb==ccbordb(ww));clear jjb3
iib3=size(iib3);
iib3=iib3(1,1);
if (iib3) < (2)
ccbord_uni(ww)=ccbordb(ww);
else
ccbord_uni(ww)=0;
end
end
clear ww iib3
ccbord_uni=setdiff(ccbordb,ccbord_uni);clear ccbordb

```

```

for rr=1:1:max(size(ccbord_unib))
ggb=t1(:,ccbord_unib(rr));
ggb=intersect(ggb,bound_nodes);
if p(2,ggb(1)) < p(2,ggb(2))
alphaf2b{ccbord_unib(rr)}=int(NMjklb{ccbord_unib(rr)},'y',p(2,ggb(1)),p(2,ggb(2)));
else
alphaf2b{ccbord_unib(rr)}=int(NMjklb{ccbord_unib(rr)},'y',p(2,ggb(2)),p(2,ggb(1)));
end
end
clear ggb rr NMjklb
%*****
%***** Matriz [alphaf2a] *****
[iia,jja]=find(p==min(p(1,:)));clear iia
for ll=1:1:max(size(jja))
[iia2,jja2]=find(t1==jja(ll));clear iia2
borda{ll}=jja2;clear jja2
end
clear ll jja
ccborda=borda{1};
for kk=2:1:max(size(borda))
ccborda=[ccborda;borda{kk}];
end
clear kk borda
for ww=1:1:max(size(ccborda))
[iia3,jja3]=find(ccborda==ccborda(ww));clear jja3
iia3=size(iia3);
iia3=iia3(1,1);
if (iia3) < (2)
ccbord_unia(ww)=ccborda(ww);
else
ccbord_unia(ww)=0;
end
end
clear ww iia3
ccbord_unia=setdiff(ccborda,ccbord_unia);clear ccborda
for rr=1:1:max(size(ccbord_unia))
gga=t1(:,ccbord_unia(rr));
gga=intersect(gga,bound_nodes);
if p(2,gga(1)) < p(2,gga(2))
alphaf2a{ccbord_unia(rr)}=int(NMjkla{ccbord_unia(rr)},'y',p(2,gga(1)),p(2,gga(2)));
else
alphaf2a{ccbord_unia(rr)}=int(NMjkla{ccbord_unia(rr)},'y',p(2,gga(2)),p(2,gga(1)));
end
end
clear gga NMjkla
%***** armando la [alphaf] completa
encalpha1d=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unid);clear ccbord_unid
for rr=1:1:max(size(encalpha1d))
alphaf1d{encalpha1d(rr)}=[0;0;0];
end
clear rr encalpha1d

```

```

encalpha1c=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unic);clear ccbord_unic
for rr=1:1:max(size(encalpha1c))
alphaf1c{encalpha1c(rr)}=[0;0;0];
end
clear rr encalpha1c
encalpha2b=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unib);clear ccbord_unib
for rr=1:1:max(size(encalpha2b))
alphaf2b{encalpha2b(rr)}=[0;0;0];
end
clear rr encalpha2b
encalpha2a=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unia);clear ccbord_unia
for rr=1:1:max(size(encalpha2a))
alphaf2a{encalpha2a(rr)}=[0;0;0];
end
clear rr encalpha2a
for rr=1:1:lf1
alphaf{rr}=[alphaf1d{rr}-alphaf1c{rr};-(alphaf2b{rr}-alphaf2a{rr})];
end
clear rr alphaf1d alphaf1c alphaf2b alphaf2a jjc2 p_olof t_olof
for rr=1:1:lf1
alphafS{rr}=zeros(2*nd,1);
vpru=t1(:,rr);
for kk=1:1:3
alphafS{rr}(vpru(kk))=alphaf{rr}(kk);
alphafS{rr}(vpru(kk)+nd)=alphaf{rr}(kk+3);
end
end
clear alphaf kk rr vpru
alphafT=0;
for rr=1:1:lf1
alphafT=alphafS{rr}+alphafT;
end
clear rr alphafS
%*****
%*****
%***** CALCULO DEL POTENCIAL MAGNETICO VECTORIAL *****
clear SAO
for j=1:1:nd
SAO(j,1)=-p(2,j)*(1.472/2);
SAO(j+nd,1)=p(1,j)*(1.472/2);
end
clear j
XX1=(nuFP)*(Deltat)*0.5*alpha3T+Sigma*gammaT;
XX2=Sigma*gammaT-(nuFP)*(Deltat)*0.5*alpha3T;
bnd=size(bound_nodes);
bnd=max(bnd);
cvert=zeros(bnd,1);
chorz=zeros(bnd,1);
for j=1:1:bnd
v=p(:,bound_nodes(j));
if ((v(2,1)==min(p(2,:)) || v(2,1)==max(p(2,:)))

```

```

&& (v(1,1)==min(p(1,:)) || v(1,1)==max(p(1,:)))
chorz(j)=bound_nodes(j);
cvert(j)=bound_nodes(j);
elseif (v(2,1)==min(p(2,:)) || v(2,1)==max(p(2,:)))
chorz(j)=bound_nodes(j);
elseif (v(1,1)==min(p(1,:)) || v(1,1)==max(p(1,:)))
cvert(j)=bound_nodes(j);
end
end
clear j
chorz=nonzeros(chorz);
chorz=chorz'+nd;
cvert=nonzeros(cvert);
cvert=cvert';
colelm=[chorz cvert];
XX1(:,colelm)=[ ];XX1(colelm,:)=[ ];
XX2(:,colelm)=[ ];XX2(colelm,:)=[ ];
SA0(colelm,:)=[ ];
%** Para calcular el valor de A en el tiempo=1 para usar en los demas
%** calculos
SAi{1}=(1e3)*ones(2*nd,1); SAi{1}(colelm,:)=[ ];
Ri{1}=(1e3)*ones(nd,1);
errSA1=10;
while (errSA1>(1e-16))
XXF1=0.5*Deltat*betaT*Ri{1}-nuFP*0.5*Deltat*alphaT*(ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)))
+ppval(FS,H0max));
XXF1(colelm,:)=[ ];
clear SA
SA{1}=pcg(XX1,XXF1,1e-16,100)
errSA1=abs(SA{1}-SAi{1});
errSA1=sum(errSA1)
if (errSA1<(1e-16))
clear SA
SA{1}=SAi{1};
else
clear SAi
SAi{1}=SA{1};
clear j i
j=1;
for i=1:1:(2*nd)
if (ismember(i,colelm))
SAC{1}(i)=0;
else
SAC{1}(i)=SA{1}(j);
j=j+1;
end
end
rot_BT2=rot_BT;
rot_BT2(bound_nodes,:)=[ ];
vp1=(rot_AT)*(SAC{1})'; vp1(bound_nodes,:)=[ ];
for j=1:1:max(size(bound_nodes))

```

```

vp1=vp1-rot_BT2(:,bound_nodes(j))*ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
end
rot_BT2(:,bound_nodes)=[ ];
Bc{1}=pcg(rot_BT2, vp1, 1e-16, 100);
clear i j
j=1;
for i=1:1:nd
if ismember(i, bound_nodes)
B{1}(i)=ppval(FS, H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
else
B{1}(i)=Bc{1}(j);
j=j+1;
end
end
for i=1:1:max(size(B{1}))
if B{1}(i)>1.48
B{1}(i)=1.48;
elseif B{1}(i)<-1.474
B{1}(i)=-1.474;
else
end
end
clear H
H{1}=ppval(FSX, B{1});
clear i j
for i=1:1:nd
if ismember(i, bound_nodes)
H{1}(i)=H0max*cos(2*pi*f*(Deltat));
else
end
end
clear Ri
Ri{1}=nuFP*B{1}'-H{1}';
end
end
clear vp1 rot_BT2 i j XXF1 errSA1
for timedis=2:1:timemax
timedis
SAi{timedis}=(1e3)*ones(2*nd,1); SAitimedis(colelm,:)= [ ]; Ri{timedis}=(1e3)*ones(nd,1);
errSA=10;
while (errSA>(1e-16))
for ii=0:1:nlonda
if ( timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np )
XXF=0.5*Deltat*betaT*(Ri{timedis}+Ri{timedis-1})-
nuFP*0.5*Deltat*(ppval(FS, H0max*cos(f*2*pi*timedis*(Deltat)))+
ppval(FS, H0max*cos(f*2*pi*(timedis-1)*(Deltat))))*alphafT;
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
XXF=0.5*Deltat*betaT*(Ri{timedis}+Ri{timedis-1})-
nuFP*0.5*Deltat*(ppval(FI, H0max*cos(f*2*pi*timedis*(Deltat)))+
ppval(FI, H0max*cos(2*pi*f*(timedis-1)*(Deltat))))*alphafT;
else

```

```

end
end
XXF(colelm,:)=[];
SA{timedis}=pcg(XX1,XX2*SA{timedis-1}+XXF,1e-16,100);
errSA=abs(SA{timedis}-SAi{timedis});
errSA=sum(errSA)
if (errSA <(1e-16))
SA{timedis}=SAi{timedis};
else
SAi{timedis}=SA{timedis};
clear j i
j=1;
for i=1:1:2*nd
if (ismember(i,colelm))
SAC{timedis}(i)=0;
else
SAC{timedis}(i)=SA{timedis}(j);
j=j+1;
end
end
rot_BT2b=rot_BT;
rot_BT2b(bound_nodes,:)=[];
vp1b=(rot_AT)*(SAC{timedis})';
vp1b(bound_nodes,:)=[];
for j=1:1:max(size(bound_nodes))
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
vp1b=vp1b-rot_BT2b(:,bound_nodes(j))*ppval(FS,H0max*cos(f*2*timedis*pi*(Deltat)));
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
vp1b=vp1b-rot_BT2b(:,bound_nodes(j))*ppval(FI,H0max*cos(f*2*timedis*pi*(Deltat)));
else
end
end
end
rot_BT2b(:,bound_nodes)=[];
Bc{timedis}=pcg(rot_BT2b,vp1b,1e-16,100);
clear i j
j=1;
for i=1:1:nd
if ismember(i,bound_nodes)
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
B{timedis}(i,1)=ppval(FS,H0max*cos(f*2*pi*timedis*(Deltat)));
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
B{timedis}(i,1)=ppval(FI,H0max*cos(f*2*pi*timedis*(Deltat)));
else
end
end
else
B{timedis}(i,1)=Bc{timedis}(j);
j=j+1;

```

```

end
end
for i=1:1:max(size(B{timedis}))
if B{timedis}(i)>1.48
Btimedis(i)=1.48; elseif B{timedis}(i)<-1.474
B{timedis}(i)=-1.474;
else
end
end
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
H{timedis}=ppval(FSX,B{timedis});
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
H{timedis}=ppval(FIX,B{timedis});
else
end
end
clear i j
for i=1:1:nd
if ismember(i,bound_nodes)
H{timedis}(i)=H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis);
else
end
end
Ri{timedis}=nuFP*B{timedis}-H{timedis};
end
end
end
clear errSA rot_AT rot_BT rot_BT2b Ri ii j i SAc Bc SAi XX1 XX2 XXF vc1 vp1b
%*****
%*** Obteniendo los potenciales magneticos vectoriales****
%*****
clear A
for rr=1:1:timedis
clear j i
j=1;
for i=1:1:(2*nd)
if (ismember(i,colelm))
A{rr}(i)=0;
else
A{rr}(i)=SA{rr}(j);
j=j+1;
end
end
end
clear i j rr SA
%*****CALCULANDO LAS CORRIENTES*****
%*****
%*****
clear J
J{1}=- (Sigma/Deltat)*A{1};

```

```

for rr=2:1:timedis
J{rr}=- (Sigma/Deltat)*(A{rr}-A{rr-1});
end
clear A
%*****
%** graficando la magnitud de las corrientes en pdeplot
%*****
for i=1:1:nd
magJ(i)=sqrt(J{rr}(i)*J{rr}(i)+J{rr}(i+nd)*J{rr}(i+nd));
end
magJ=magJ';
figure, pdeplot(p,e,t,'xydata',magJ,'colormap','pink')
clear i
%*****
%***** GRAFICANDO LAS DIRECCIONES DE LAS CORRIENTES
%*****
for i=1:1:nd
Jg=J{rr};
mags=1;
if mags~=0
JX(i)=(1/mags)*Jg(i);
JY(i)=(1/mags)*Jg(i+nd);
else
JX(i)=0;
JY(i)=0;
end
end
Jvecxy=[JX' JY'];
figure,pdeplot(p,e,t,'flowdata',Jvecxy)
clear JX JY i mags
%*****
%***** Comportamiento de Jx y Jy en el nodo na ****
%*****
na=43;
qqw=J{1}(na);
qqw2=J{1}(na+nd);
for i=2:1:2000
qqw=[qqw J{i}(na)];
qqw2=[qqw2 J{i}(na+nd)];
end
clear i
figure,plot(qqw);grid;ylabel('Jx')
figure,plot(qqw2);grid;ylabel('Jy')
clear qqw qqw2
clear B
%*****
%***GENERANDO TERMINO DE PERDIDAS POR HYSTERESIS ***
%*****
for j=1:1:nd
Hval=H{1}(j);
for timedis=1:1:300

```

```

Hval=[Hval H{timedis}(j)];
end
Hmax(j)=max(Hval);Hmin(j)=min(Hval);
end
for j=1:1:nd
qhyst{1}(j)=abs((quad(@(hx)(fls),Hmax(j),H{1}(j)))/Deltat);
end
for timedis=2:1:timemax
timedis
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
for j=1:1:nd
Fhyst1=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),H{timedis}(j));
Fhyst2=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),H{timedis-1}(j));
qhyst{timedis}(j)=abs(double((Fhyst1-Fhyst2)/Deltat));clear Fhyst1 Fhyst2
end
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
for j=1:1:nd
Fhyst1=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),Hmin(j))+quad(@(hx)(fli),Hmin(j),H{timedis}(j));
Fhyst1=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),Hmin(j))+quad(@(hx)(fli),Hmin(j),H{timedis-1}(j));
qhyst{timedis}(j)=abs(double((Fhyst1-Fhyst2)/Deltat));clear Fhyst1 Fhyst2
end
else
end
end
end
end
clear H
%*****
%*****GENERANDO EL TERMINO DE PERDIDAS OHMICAS*****
%*****
clear B
for i=1:1:max(size(J))
q2{i}=(1/Sigma)*J{i}.*J{i};
for j=1:1:nd
qoh{i}(j)=q2{i}(j)+q2{i}(j+nd);
end
end
clear q2 i j J
%*****
%***** Suma de perdidas ohmicas y de histéresis *****
%*****
for timedis=1:1:timemax
q{timedis}=qoh{timedis}+qhyst{timedis};
end
clear qoh qhyst
out.q=q;

```

Apéndice C

ThermalFEM_2D.m

```
function out_T=ThermalFEM_2D(p,e,t,rho,lambda,c,T0ext,Deltat,q,timeheatmax)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
t1=t;
t1(4,:)=[];
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t1(:,i);
a=nodos{i};
for j=1:1:3
cord{j}=p(:,a(j))';
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord i j a
vc1=[1;1;1];
thetaT=0;
zetaT=0;
for i=1:1:lf1
i % Indicador de ciclo
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3}];
MDkl=vpa([vc1 s2]);
MDjl=vpa([vc1 s2]);
MDjk=vpa([vc1 s2]);
Cjkl=det([vc1 s2]);
%Generación de los Nj(x,y)
syms x y
MDkl(1,:)=[1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl MDkl
MDjl(2,:)=[1,x,y];
Djl=det(MDjl);
Nk=Djl/Cjkl;clear Djl MDjl
MDjk(3,:)=[1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
```

```

dyNjkl=[diff(Nj,'y'), diff(Nk,'y'), diff(Nl,'y')]; dxNjkl=[diff(Nj,'x'), diff(Nk,'x'),
diff(Nl,'x')]; syms Xi Eta % variables del plano computacional
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,'x','y');
x=F.x;
y=F.y;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y],[Xi, Eta])));
clear x y
%***** Integrables por Cuadratura ***** u1=sqrt(3)/3;u2=-sqrt(3)/3;
Xi1=(u1+1)*0.5;Eta1=0.25*(1-u1)*(1+sqrt(3)/3);Eta1b=0.25*(1-u1)*(1-sqrt(3)/3);
Xi2=(u2+1)*0.5;Eta2=0.25*(1-u2)*(1+sqrt(3)/3);Eta2b=0.25*(1-u2)*(1-sqrt(3)/3);
syms x y
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,'x','y');
x=F1.x;
y=F1.y;clear F1
MDjk(3,:)=1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11=JC*[Xi1;Eta1;Nl]*[Xi1;Eta1;Nl]';
syms x y
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,'x','y');
x=F2.x;
y=F2.y;clear F2
MDjk(3,:)=1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11b=JC*[Xi1;Eta1b;Nl]*[Xi1;Eta1b;Nl]';
syms x y
F3=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,'x','y');
x=F3.x;
y=F3.y;clear F3
MDjk(3,:)=1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P22=JC*[Xi2;Eta2;Nl]*[Xi2;Eta2;Nl]';
syms x y
F4=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,'x','y');
x=F4.x;
y=F4.y;clear F4
MDjk(3,:)=1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P22b=JC*[Xi2;Eta2b;Nl]*[Xi2;Eta2b;Nl]'; zeta=dxNjkl'*dxNjkl*Cjkl*0.5+dyNjkl'*dyNjkl*Cjkl*0.5;
theta=0.125*(1-u1)*(P11+P11b)+0.125*(1-u2)*(P22+P22b);
clear JC x y Xi Eta dyNjkl dxNjkl Nj Nk
zetaS=zeros(nd,nd);
thetaS=zeros(nd,nd);
vpru=t1(:,i);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
zetaS(vpru(kk),vpru(ll))=zeta(kk,ll);
thetaS(vpru(kk),vpru(ll))=theta(kk,ll);

```

```

end
end
clear kk ll zeta theta vpru
thetaT=thetaS+thetaT;
zetaT=zetaS+zetaT;
clear zetaS thetaS
end
%*****
%*****
%*** Calculo de la temperatura en el tiempo 1*****
p_olof=p';
t_olof=t1'; %Adecuacion de las matrices para usar programa de olof Persson
bound_edges=boundedges(p_olof,t_olof);
bound_nodes=unique(bound_edges); clear bound_edges
XXhn1=rho*c*thetaT+lambda*Deltat*0.5*zetaT;
XXhn2=rho*c*thetaT-lambda*Deltat*0.5*zetaT;
XXh1=XXhn1;
XXh2=XXhn2;
XXh1(bound_nodes,:)=[];
vph=XXh2*(T0ext*ones(nd,1))+0.5*Deltat*thetaT*(q{1}');
vph(bound_nodes,:)=[];
for j=1:1:max(size(bound_nodes))
vph=vph-XXh1(:,bound_nodes(j))*T0ext;
end
XXh1(:,bound_nodes)=[];
Tc{1}=cgs(XXh1,vph,1e-16,100);
clear i j
j=1;
for i=1:1:nd
if ismember(i,bound_nodes)
T1(i)=T0ext;
else
T{1}(i)=Tc{1}(j);
j=j+1;
end
end
T{1}=T{1}';
clear XXh1 vph XXh2 j
for timedis=2:1:timeheatmax
timedis
vphn=XXhn2*T{timedis-1}+Deltat*0.5*thetaT*((q{timedis})'+(q{timedis-1})');
XXhnt=XXhn1;
XXhnt(bound_nodes,:)=[];
vphn(bound_nodes,:)=[];
for j=1:1:max(size(bound_nodes))
vphn=vphn-XXhnt(:,bound_nodes(j))*T0ext;
end
XXhnt(:,bound_nodes)=[];
Tc{timedis}=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
clear i j
j=1;

```

```
for i=1:1:nd
if ismember(i,bound_nodes)
T{timedis}(i,1)=T0ext;
else
T{timedis}(i,1)=Tc{timedis}(j);
j=j+1;
end
end
end
clear Tc j XXhnt vphn bound_nodes XXhn1 XXhn2
out_T=T;
```

Apéndice D

ThermalFEMConv_2D.m

```
function out_Tconv=ThermalFEMConv_2D(p,e,t,rho,lambda,c,T0ext,h,Deltat,Tm,q,timeheatmax)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
t1=t;
t1(4,:)=[];
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t1(:,i);
a=nodos{i};
for j=1:1:3
cord{j}=p(:,a(j))';
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord i j a
vc1=[1;1;1]
thetaT=0;
zetaT=0;
for i=1:1:lf1
i % par ver donde va la cuenta
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3}];
MDkl=vpa([vc1 s2]);
MDjl=vpa([vc1 s2]);
MDjk=vpa([vc1 s2]);
Cjkl=det([vc1 s2]);
%***** FORMANDO LOS NMjkl para calcular las integrales en la integrales en la frontera
%***** NMjkld
clear y x
syms x
y=max(p(2,:)); % y=d el valor de y
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDjl(2,:)= [1,x,y];
Djl=det(MDjl);
Nk=Djl/Cjkl;clear Djl
```

```

MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjklc{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear y
%*****
%***** NMjklc
y=min(p(2,:)); % y=c el valor de y
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDjl(2,:)= [1,x,y];
Djl=det(MDjl);
Nk=Djl/Cjkl;clear Djl
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjklc{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear y x
syms y
%*****
%***** NMjklb
x=max(p(1,:)); % x=b el valor de x
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDjl(2,:)= [1,x,y];
Djl=det(MDjl);
Nk=Djl/Cjkl;clear Djl
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjklb{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear x
%*****
%***** NMjkla
x=min(p(1,:)); % x=a el valor de x
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl
MDjl(2,:)= [1,x,y];
Djl=det(MDjl);
Nk=Djl/Cjkl;clear Djl
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
NMjkla{i}=[Nj;Nk;Nl];clear Nj Nk Nl
clear y x
syms y x
%*****
*****

```

```

%Generación de los Nj(x,y)
syms x y
MDk1(1,:)= [41,x,y];
Dk1=det(MDk1);
Nj=Dk1/Cjkl;clear Dk1 MDk1
MDj1(2,:)= [1,x,y];
Dj1=det(MDj1);
Nk=Dj1/Cjkl;clear Dj1 MDj1
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
dyNjkl=[diff(Nj,'y'), diff(Nk,'y'), diff(Nl,'y')]; %derivadas en y de los Nj
dxNjkl=[diff(Nj,'x'), diff(Nk,'x'), diff(Nl,'x')]; %derivadas en x de los Nj
syms Xi Eta % variables del plano computacional
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,'x','y');
x=F.x;
y=F.y;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y],[Xi, Eta])));
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nla=Djk/Cjkl;clear Djk
clear x y
%***** Integrales por Cuadratura *****
u1=sqrt(3)/3;u2=-sqrt(3)/3;
Xi1=(u1+1)*0.5;Eta1=0.25*(1-u1)*(1+sqrt(3)/3);Eta1b=0.25*(1-u1)*(1-sqrt(3)/3);
Xi2=(u2+1)*0.5;Eta2=0.25*(1-u2)*(1+sqrt(3)/3);Eta2b=0.25*(1-u2)*(1-sqrt(3)/3);
syms x y
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,'x','y');
x=F1.x;
y=F1.y;clear F1
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11=JC*[Xi1;Eta1;Nl]*[Xi1;Eta1;Nl]';
syms x y
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,'x','y');
x=F2.x;
y=F2.y;clear F2
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11b=JC*[Xi1;Eta1b;Nl]*[Xi1;Eta1b;Nl]';
syms x y
F3=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,'x','y');
x=F3.x;
y=F3.y;clear F3
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P22=JC*[Xi2;Eta2;Nl]*[Xi2;Eta2;Nl]';
syms x y

```

```

F4=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,'x','y');
x=F4.x;
y=F4.y;clear F4
MDjk(3,:)= [1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P22b=JC*[Xi2;Eta2b;Nl]*[Xi2;Eta2b;Nl]';
zeta=dxNjkl'*dxNjkl*Cjkl*0.5+dyNjkl'*dyNjkl*Cjkl*0.5
theta=0.125*(1-u1)*(P11+P11b)+0.125*(1-u2)*(P22+P22b)
clear JC x y Xi Eta dyNjkl dxNjkl Nj Nk
zetaS=zeros(nd,nd);
thetaS=zeros(nd,nd);
vpru=t1(:,i);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
zetaS(vpru(kk),vpru(ll))=zeta(kk,ll);
thetaS(vpru(kk),vpru(ll))=theta(kk,ll);
end
end
clear kk ll zeta theta vpru
thetaT=thetaS+thetaT;
zetaT=zetaS+zetaT;
clear zetaS thetaS
end
p_olof='p';
t_olof=t1'; %Adecuacion de las matrices para usar programa de olof Persson
bound_edges=boundedges(p_olof,t_olof);
bound_nodes=unique(bound_edges); clear bound_edges % Son los nodos que estan en la frontera
%***** MATRIZ [alphaf] *****
%*****
%***** Matriz [alphaf1d] *****
[iid,jjd]=find(p==max(p(2,:)));clear iid
for ll=1:1:max(size(jjd))
[iid2,jjd2]=find(t1==jjd(ll));clear iid2
bord{ll}=jjd2;clear jjd2
end
clear ll jjd
ccbord=bord{1};
for kk=2:1:max(size(bord))
ccbord=[ccbord;bord{kk}];
end
clear bord kk
for ww=1:1:max(size(ccbord))
[iid3,jjd3]=find(ccbord==ccbord(ww));clear jjd3
iid3=max(size(iid3));
if (iid3)<(2)
ccbord_unid(ww)=ccbord(ww);
else
ccbord_unid(ww)=0;
end
end
end

```

```

clear ww iid3
ccbord_unid=setdiff(ccbord,ccbord_unid);clear ccbord
for rr=1:1:max(size(ccbord_unid))
ggd=t1(:,ccbord_unid(rr));
ggd=intersect(ggd,bound_nodes);
if p(1,ggd(1)) < p(1,ggd(2))
alphafdc_d1{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)},'x',p(1,ggd(1)),p(1,ggd(2)));
alphafdc_d2{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)}*(NMjklc{ccbord_unid(rr)}')
,'x',p(1,ggd(1)),p(1,ggd(2)));
else
alphafdc_d1{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)},'x',p(1,ggd(2)),p(1,ggd(1)));
alphafdc_d2{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)}*(NMjklc{ccbord_unid(rr)}')
,'x',p(1,ggd(2)),p(1,ggd(1)));
end
end
clear ggd rr NMjklc
%*****
%***** Matriz [alphaf1c] *****
[iic,jjc]=find(p==min(p(2,:)));clear iic
for ll=1:1:max(size(jjc))
[iic2,jjc2]=find(t1==jjc(ll));clear iic2
bordc{ll}=jjc2;clear jj2
end
clear ll jjc
ccbordc=bordc{1};
for kk=2:1:max(size(bordc))
ccbordc=[ccbordc;bordc{kk}];
end
clear kk bordc
for ww=1:1:max(size(ccbordc))
[iic3,jjc3]=find(ccbordc==ccbordc(ww));clear jjc3
iic3=size(iic3);
iic3=iic3(1,1);
if (iic3) < (2)
ccbord_unid(ww)=ccbordc(ww);
else
ccbord_unid(ww)=0;
end
end
clear ww iic3
ccbord_unid=setdiff(ccbordc,ccbord_unid);clear ccbordc
for rr=1:1:max(size(ccbord_unid))
ggc=t1(:,ccbord_unid(rr));
ggc=intersect(ggc,bound_nodes);
if p(1,ggc(1)) < p(1,ggc(2))
alphafdc_c1{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)},'x',p(1,ggc(1)),p(1,ggc(2)));
alphafdc_c2{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)}*(NMjklc{ccbord_unid(rr)}')
,'x',p(1,ggc(1)),p(1,ggc(2)));
else
alphafdc_c1{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)},'x',p(1,ggc(2)),p(1,ggc(1)));
alphafdc_c2{ccbord_unid(rr)}=int(NMjklc{ccbord_unid(rr)}*(NMjklc{ccbord_unid(rr)}')

```

```

,'x',p(1,ggd(2)),p(1,ggd(1)));
end
end
clear rr ggc NMjklc
%*****
%***** Matriz [alphaf2b] *****
[iib,jjb]=find(p==max(p(1,:)));clear iib
for ll=1:1:max(size(jjb))
[iib2,jjb2]=find(t1==jjb(ll));clear iib2
bordb{ll}=jjb2;clear jjb2
end
clear ll jjb
ccbordb=bordb{1};
for kk=2:1:max(size(bordb))
ccbordb=[ccbordb;bordb{kk}];
end
clear kk bordb
for ww=1:1:max(size(ccbordb))
[iib3,jjb3]=find(ccbordb==ccbordb(ww));clear jjb3
iib3=size(iib3);
iib3=iib3(1,1);
if (iib3) < (2)
ccbord_unib(ww)=ccbordb(ww);
else
ccbord_unib(ww)=0;
end
end
clear ww iib3
ccbord_unib=setdiff(ccbordb,ccbord_unib);clear ccbordb
for rr=1:1:max(size(ccbord_unib))
ggb=t1(:,ccbord_unib(rr));
ggb=intersect(ggb,bound_nodes);
if p(2,ggb(1)) < p(2,ggb(2))
alphafba_b1{ccbord_unib(rr)}=int(NMjklb{ccbord_unib(rr)},'y',p(2,ggb(1)),p(2,ggb(2)));
alphafba_b2{ccbord_unib(rr)}=int(NMjklb{ccbord_unib(rr)}*(NMjklb{ccbord_unib(rr)})
,'y',p(2,ggb(1)),p(2,ggb(2)));
else
alphafba_b1{ccbord_unib(rr)}=int(NMjklb{ccbord_unib(rr)},'y',p(2,ggb(2)),p(2,ggb(1)));
alphafba_b2{ccbord_unib(rr)}=int(NMjklb{ccbord_unib(rr)}*(NMjklb{ccbord_unib(rr)})
,'y',p(2,ggb(2)),p(2,ggb(1)));
end
end
clear ggb rr NMjklb
%*****
%***** Matriz [alphaf2a] *****
[iia,jja]=find(p==min(p(1,:)));clear iia
for ll=1:1:max(size(jja))
[iia2,jja2]=find(t1==jja(ll));clear iia2
borda{ll}=jja2;clear jja2
end
clear ll jja

```

```

ccborda=borda{1};
for kk=2:1:max(size(borda))
ccborda=[ccborda;borda{kk}];
end
clear kk borda
for ww=1:1:max(size(ccborda))
[iia3,jja3]=find(ccborda==ccborda(ww));clear jja3
iia3=size(iia3);
iia3=iia3(1,1);
if (iia3) < (2)
ccbord_unia(ww)=ccborda(ww);
else
ccbord_unia(ww)=0;
end
end
clear ww iia3
ccbord_unia=setdiff(ccborda,ccbord_unia);clear ccborda
for rr=1:1:max(size(ccbord_unia))
gga=t1(:,ccbord_unia(rr));
gga=intersect(gga,bound_nodes);
if p(2,gga(1)) < p(2,gga(2))
alphafba_a1{ccbord_unia(rr)}=int(NMjkla{ccbord_unia(rr)},'y',p(2,ggb(1)),p(2,ggb(2)));
alphafba_a2{ccbord_unia(rr)}=int(NMjkla{ccbord_unia(rr)}*(NMjkla{ccbord_unia(rr)})'
,'y',p(2,ggb(1)),p(2,ggb(2)));
else
alphafba_a1{ccbord_unia(rr)}=int(NMjkla{ccbord_unia(rr)},'y',p(2,ggb(2)),p(2,ggb(1)));
alphafba_a2{ccbord_unia(rr)}=int(NMjkla{ccbord_unia(rr)}*(NMjkla{ccbord_unia(rr)})'
,'y',p(2,ggb(2)),p(2,ggb(1)));
end
end
clear gga NMjkla
%***** armando la [alphaf] completa
encalpha1d=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unid);clear ccbord_unid
for rr=1:1:max(size(encalpha1d))
alphafdc_d1=[0;0;0];
alphafdc_d2=zeros(3,3);
end
clear rr encalpha1d
encalpha1c=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unic);clear ccbord_unic
for rr=1:1:max(size(encalpha1c))
alphafdc_c1{encalpha1c(rr)}=[0;0;0];
alphafdc_c2{encalpha1c(rr)}=zeros(3,3);
end
clear rr encalpha1c
encalpha2b=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unib);clear ccbord_unib
for rr=1:1:max(size(encalpha2b))
alphafba_b1{encalpha2b(rr)}=[0;0;0];
alphafba_b2{encalpha2b(rr)}=zeros(3,3);
end
clear rr encalpha2b
encalpha2a=setdiff((1:1:lf1),ccbord_unia);clear ccbord_unia

```

```

for rr=1:1:max(size(encalpha2a))
  alphafba_a1{encalpha2a(rr)}=[0;0;0];
  alphafba_a2{encalpha2a(rr)}=zeros(3,3);
end
clear rr encalpha2a
for rr=1:1:lf1
  alphaf1{rr}=alphafba_b1{rr}-alphafba_a1{rr}+alphafdc_d1{rr}-alphafdc_c1{rr};
  alphaf2{rr}=alphafba_a2{rr}-alphafba_b2{rr}+alphadc_c2{rr}-alphadc_d2{rr};
end
clear rr alphafba_b1 alphafba_a1 alphafdc_d1 alphafdc_c1 alphafba_a2 alphafba_b2 alphadc_c2
alphadc_d2 jjc2
p_olof t_olof
for rr=1:1:lf1
  alphaf1S{rr}=zeros(nd,1);
  alphaf2S{rr}=zeros(nd,nd);
  vpru=t1(:,rr);
  for kk=1:1:3
    alphaf1S{rr}(vpru(kk))=alphaf1{rr}(kk);
  for ll=1:1:3
    alphaf2S{rr}(vpru(kk),vpru(ll))=alphaf2{rr}(kk,ll);
  end
  end
end
clear alphaf1 alphaf2 kk rr vpru
alphaf1T=0;
alphaf2T=0;
for rr=1:1:lf1
  alphaf1T=alphaf1Srr+alphaf1T;
  alphaf2T=alphaf2Srr+alphaf2T;
end
clear rr alphaf1S alphaf2S
%*****
%*****
%** Calculo de la temperatura en el tiempo 1*****
XXhn1=rho*c*thetaT+lambda*Deltat*0.5*((h/lambda)*alphaf2T+zetaT);
XXhn2=rho*c*thetaT-lambda*Deltat*0.5*((h/lambda)*alphaf2T+zetaT);
XXh1=XXhn1;
XXh2=XXhn2;
vph=XXh2*(T0ext*ones(nd,1))-Deltat*h*Tm*alphaf1T+Deltat*0.5*thetaT*(q{1}');
T{1}=cgs(XXh1,vph,1e-16,100);
clear XXh1 vph XXh2
for timedis=2:1:timeheatmax
  timedis
  vphn=XXhn2*T{timedis-1}-Deltat*h*Tm*alphaf1T+Deltat*0.5*thetaT((q{timedis})'+(q{timedis-1})');
  XXhnt=XXhn1;
  T{timedis}=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
end
clear XXhnt vphn bound_nodes XXhn1 XXhn2
out_Tconv=T;

```

Apéndice E

ThermalFEMNO_2D.m

```
function out_TNO=ThermalFEMNO_2D(p,e,t,rho,lambda,c,T0ext,Deltat,q,timeheatmax)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
t1=t;
t1(4,:)=[];
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t1(:,i);
a=nodos{i};
for j=1:1:3
cord{j}=p(:,a(j))';
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord i j a
vc1=[1;1;1];
thetaT=0;
zetaT=0;
for i=1:1:lf1
i % par ver donde va la cuenta
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3}];
MDkl=vpa([vc1 s2]);
MDjl=vpa([vc1 s2]);
MDjk=vpa([vc1 s2]);
Cjkl=det([vc1 s2]);
%Generación de los Nj(x,y)
syms x y
MDkl(1,:)= [1,x,y];
Dkl=det(MDkl);
Nj=Dkl/Cjkl;clear Dkl MDkl
MDjl(2,:)= [1,x,y];
Djl=det(MDjl);
Nk=Djl/Cjkl;clear Djl MDjl
MDjk(3,:)= [1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
```

```

dyNjkl=[diff(Nj,'y'), diff(Nk,'y'), diff(Nl,'y')]; %derivadas en y de los Nj
dxNjkl=[diff(Nj,'x'), diff(Nk,'x'), diff(Nl,'x')]; %derivadas en x de los Nj
syms Xi Eta % variables del plano computacional
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,'x','y');
x=F.x;
y=F.y;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y],[Xi, Eta])));
MDjk(3,:)=[1,x,y];
Djk=det(MDjk);
Nla=Djk/Cjkl;clear Djk
clear x y
%***** Integrales por Cuadratura *****
u1=sqrt(3)/3;u2=-sqrt(3)/3;
Xi1=(u1+1)*0.5;Eta1=0.25*(1-u1)*(1+sqrt(3)/3);Eta1b=0.25*(1-u1)*(1-sqrt(3)/3);
Xi2=(u2+1)*0.5;Eta2=0.25*(1-u2)*(1+sqrt(3)/3);Eta2b=0.25*(1-u2)*(1-sqrt(3)/3);
syms x y
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,'x','y');
x=F1.x;
y=F1.y;clear F1
MDjk(3,:)=[1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11=JC*[Xi1;Eta1;Nl]*[Xi1;Eta1;Nl]';
syms x y
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,'x','y');
x=F2.x;
y=F2.y;clear F2
MDjk(3,:)=[1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P11b=JC*[Xi1;Eta1b;Nl]*[Xi1;Eta1b;Nl]';
syms x y
F3=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,'x','y');
x=F3.x;
y=F3.y;clear F3
MDjk(3,:)=[1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P22=JC*[Xi2;Eta2;Nl]*[Xi2;Eta2;Nl]';
syms x y
F4=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,'x','y');
x=F4.x;
y=F4.y;clear F4
MDjk(3,:)=[1,x,y];clear y x
Djk=det(MDjk);
Nl=Djk/Cjkl;clear Djk
P22b=JC*[Xi2;Eta2b;Nl]*[Xi2;Eta2b;Nl]';
zeta=dxNjkl'*dxNjkl*Cjkl*0.5+dyNjkl'*dyNjkl*Cjkl*0.5;
theta=0.125*(1-u1)*(P11+P11b)+0.125*(1-u2)*(P22+P22b);
clear JC x y Xi Eta dyNjkl dxNjkl Nj Nk
zetaS=zeros(nd,nd);

```

```

thetaS=zeros(nd,nd);
vpru=t1(:,i);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
zetaS(vpru(kk),vpru(ll))=zeta(kk,ll);
thetaS(vpru(kk),vpru(ll))=theta(kk,ll);
end
end
clear kk ll zeta theta vpru
thetaT=thetaS+thetaT;
zetaT=zetaS+zetaT;
clear zetaS thetaS
end
%*****
%*****
%*** Calculo de la temperatura en el tiempo 1*****
rho=7.65*(1e3);lambda=31;c=434;T0ext=25+273.15;
XXhn1=rho*c*thetaT+lambda*Deltat*0.5*zetaT;
XXhn2=rho*c*thetaT-lambda*Deltat*0.5*zetaT;
XXh1=XXhn1;
XXh2=XXhn2;
vph=XXh2*(T0ext*ones(nd,1))+0.5*Deltat*thetaT*(q{1}');
T{1}=cgs(XXh1,vph,1e-16,100);
clear XXh1 vph XXh2
for timedis=2:1:timeheatmax
timedis
vphn=XXhn2*T{timedis-1}+Deltat*0.5*thetaT*((q{timedis})'+(q{timedis-1})');
XXhnt=XXhn1;
T{timedis}=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
end
clear Tc j XXhnt vphn bound_nodes XXhn1 XXhn2
out.TN0=T;

```


Apéndice F

ElectroFEM_3D.m

```
function out_q=ElectroFEM_3D(p,t,nuFP,Sigma,Deltat,f,H0max,np,nlonda,timemax,FS,FSX,FI
,FIX,fls,fli)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t(i,:);
for j=1:1:4
cord{j}=p(nodos{i}(j),:);
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord j i
gammaT=0;
betaT=0;
alpha3T=0;
rotAT=0;
rotBT=0;
vc1=[1;1;1;1];
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%syms x y z
MDklm(1,:)=[1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=[1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=[1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
```

```

Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
dxNjklm=[diff(Nj,'x'),diff(Nk,'x'),diff(Nl,'x'),diff(Nm,'x')];
dyNjklm=[diff(Nj,'y'),diff(Nk,'y'),diff(Nl,'y'),diff(Nm,'y')];
dzNjklm=[diff(Nj,'z'),diff(Nk,'z'),diff(Nl,'z'),diff(Nm,'z')];
syms Xi Eta zzeta
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,Nl-zzeta,'x','y','z');
x=F.x;
y=F.y;
z=F.z;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y;z],[Xi, Eta, zzeta])));
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nma=Djkl/Cjklm;clear Djkl
clear x y z;
%***** Integrales por cuadratura *****
u1=sqrt(3/5);u2=0;u3=-u1;
c1=(5/9);c2=8/9;c3=c1;
Xi1=0.5*(u1+1);Xi2=0.5*(u2+1);Xi3=0.5*(u3+1);
Eta1=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta2=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta3=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
zzeta1=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1c=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2c=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3c=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
syms x y z
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F1.x;y=F1.y;z=F1.z;clear F1
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]';
betaz111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*dzNjklm;
betay111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*dyNjklm;
betax111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1b,'x','y','z');
x=F2.x;y=F2.y;z=F2.z;clear F2
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]';
betaz111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*dzNjklm;

```

```

betay111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*dyNjklm;
betax111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*dxNjklm;clear Nm zzeta1b
syms x y z
F3=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1c,'x','y','z');
x=F3.x;y=F3.y;z=F3.z;clear F3
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P11b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]';
betaz11b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*dzNjklm;
betay11b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*dyNjklm;
betax11b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*dxNjklm;clear Nm zzeta1c
syms x y z
F4=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F4.x;y=F4.y;z=F4.z;clear F4
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]';
betaz11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*dzNjklm;
betay11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*dyNjklm;
betax11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F5=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F5.x;y=F5.y;z=F5.z;clear F5
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]';
betaz222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*dzNjklm;
betay222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*dyNjklm;
betax222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F6=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2b,'x','y','z');
x=F6.x;y=F6.y;z=F6.z;clear F6
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]';
betaz222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*dzNjklm;
betay222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*dyNjklm;
betax222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F7=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2c,'x','y','z');
x=F7.x;y=F7.y;z=F7.z;clear F7
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]';
betaz22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*dzNjklm;
betay22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*dyNjklm;

```

```

betax22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F8=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F8.x;y=F8.y;z=F8.z;clear F8
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]';
betaz22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*dzNjklm;
betay22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*dyNjklm;
betax22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F9=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F9.x;y=F9.y;z=F9.z;clear F9
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]';
betaz333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*dzNjklm;
betay333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*dyNjklm;
betax333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F10=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3b,'x','y','z');
x=F10.x;y=F10.y;z=F10.z;clear F10
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]';
betaz333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*dzNjklm;
betay333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*dyNjklm;
betax333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F11=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3c,'x','y','z');
x=F11.x;y=F11.y;z=F11.z;clear F11
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]';
betaz333b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*dzNjklm;
betay333b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*dyNjklm;
betax333b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*dxNjklm;clear Nm
syms x y z
F12=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F12.x;y=F12.y;z=F12.z;clear F12
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]';
betaz33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*dzNjklm;
betay33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*dyNjklm;
betax33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*dxNjklm;clear Nm

```

```

gamma=kron(eye(3),c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P111+P111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P11b1c+P11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P222+P222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P22b2c+P22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P333+P333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P33b3c+P33b3));
betaz=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz111+betaz111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz11b1c+betaz11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz222+betaz222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz22b2c+betaz22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz333+betaz333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz33b3c+betaz33b3);
b12=zeros(3,3);b12(1,2)=-1;
b12=kron(b12,betaz);
b21=zeros(3,3);b21(2,1)=1;
b21=kron(b21,betaz);clear betaz
betay=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay111+betay111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay11b1c+betay11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay222+betay222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay22b2c+betay22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay333+betay333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay33b3c+betay33b3);
b13=zeros(3,3);b13(1,3)=1;
b13=kron(b13,betay);
b31=zeros(3,3);b31(3,1)=-1;
b31=kron(b31,betay);clear betay
betax=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax111+betax111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax11b1c+betax11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax222+betax222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax22b2c+betax22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax333+betax333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax33b3c+betax33b3);
b23=zeros(3,3);b23(2,3)=-1;
b23=kron(b23,betax);
b32=zeros(3,3);b32(3,2)=1;
b32=kron(b32,betax);clear betax
beta=b12+b13+b21+b23+b31+b32;clear b12 b21 b13 b31 b23 b32
alpha3zz=JC*dzNjklm'*dzNjklm*(1/6);
alpha3zx=JC*dzNjklm'*dxNjklm*(1/6);
a11=zeros(3,3);a11(1,1)=1;a13=zeros(3,3);a13(1,3)=-1;
alpha32=kron(a11,alpha3zz)+kron(a13,alpha3zx);clear a11 a13
alpha3zy=JC*dzNjklm'*dyNjklm*(1/6);
a22=zeros(3,3);a22(2,2)=-1;a23=zeros(3,3);a23(2,3)=1;
alpha33=kron(a22,alpha3zz)+kron(a23,alpha3zy);clear a22 a23
alpha3xz=JC*dxNjklm'*dzNjklm*(1/6);
alpha3xx=JC*dxNjklm'*dxNjklm*(1/6);
a31=zeros(3,3);a31(3,1)=1;a33=zeros(3,3);a33(3,3)=-1;
alpha35=kron(a31,alpha3xz)+kron(a33,alpha3xx);clear a31 a33
alpha3yz=JC*dyNjklm'*dzNjklm*(1/6);
alpha3yy=JC*dyNjklm'*dyNjklm*(1/6);
a32=zeros(3,3);a32(3,2)=-1;a33=zeros(3,3);a33(3,3)=1;

```

```

alpha36=kron(a32,alpha3yz)+kron(a33,alpha3yy);clear a32 a33
alpha3yx=JC*dyNjklm'*dxNjklm*(1/6);
a11=zeros(3,3);a11(1,1)=-1;a12=zeros(3,3);a12(1,2)=1;
alpha31=kron(a11,alpha3yy)+kron(a12,alpha3yx);clear a11 a12
alpha3xy=JC*dxNjklm'*dyNjklm*(1/6);
a21=zeros(3,3);a21(2,1)=-1;a22=zeros(3,3);a22(2,2)=1;
alpha34=kron(a21,alpha3xy)+kron(a22,alpha3xx);clear a22 a21
alpha3=alpha32-alpha31-alpha33+alpha34-alpha35-alpha36;
clear alpha32 alpha31 alpha33 alpha34 alpha35 alpha36 alpha3zz
alpha3zx alpha3zy alpha3xz alpha3xx alpha3yz alpha3yy alpha3yx alpha3xy
Gijdz=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz111+betaz111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz11b1c+betaz11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz222+betaz222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz22b2c+betaz22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz333+betaz333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betaz33b3c+betaz33b3);
Gijdy=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay111+betay111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay11b1c+betay11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay222+betay222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay22b2c+betay22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay333+betay333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betay33b3c+betay33b3);
Gijdx=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax111+betax111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax11b1c+betax11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax222+betax222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax22b2c+betax22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax333+betax333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(betax33b3c+betax33b3);
rotAz=zeros(3,3);rotAz(1,2)=-1;rotAz(2,1)=1;rotAz=kron(rotAz,Gijdz);clear Gijdz
rotAy=zeros(3,3);rotAy(1,3)=1;rotAy(3,1)=-1;rotAy=kron(rotAy,Gijdy);clear Gijdy
rotAx=zeros(3,3);rotAx(2,3)=-1;rotAx(3,2)=1;rotAx=kron(rotAx,Gijdx);clear Gijdx
rotA=rotAx+rotAy+rotAz;clear rotAx rotAy rotAz
Gij1=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P111+P111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P11b1c+P11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P222+P222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P22b2c+P22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P333+P333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P33b3c+P33b3);
clear x y z Xi Eta zeta JC Nj Nk Nl Nm dxNjklm dyNjklm dzNjklm
rotB=kron(eye(3),Gij1);clear Gij1
gammaS=zeros(3*nd,3*nd);
betaS=zeros(3*nd,3*nd);
alpha3S=zeros(3*nd,3*nd);
rotBS=zeros(3*nd,3*nd);
rotAS=zeros(3*nd,3*nd);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:4
for ll=1:1:4
gammaS(vpru(kk),vpru(ll))=gamma(kk,ll);
gammaS(vpru(kk),vpru(ll)+nd)=gamma(kk,ll+4);
gammaS(vpru(kk),vpru(ll)+2*nd)=gamma(kk,ll+8);

```

```

gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(11))=gamma(kk+4,11);
gammaS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11))=gamma(kk+8,11);
gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+nd)=gamma(kk+4,11+4);
gammaS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+2*nd)=gamma(kk+8,11+8);
gammaS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+2*nd)=gamma(kk+4,11+8);
gammaS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+nd)=gamma(kk+8,11+4);
betaS(vpru(kk),vpru(11))=beta(kk,11);
betaS(vpru(kk),vpru(11)+nd)=beta(kk,11+4);
betaS(vpru(kk),vpru(11)+2*nd)=beta(kk,11+8);
betaS(vpru(kk)+nd,vpru(11))=beta(kk+4,11);
betaS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11))=beta(kk+8,11);
betaS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+nd)=beta(kk+4,11+4);
betaS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+2*nd)=beta(kk+8,11+8);
betaS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+2*nd)=beta(kk+4,11+8);
betaS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+nd)=beta(kk+8,11+4);
alpha3S(vpru(kk),vpru(11))=alpha3(kk,11);
alpha3S(vpru(kk),vpru(11)+nd)=alpha3(kk,11+4);
alpha3S(vpru(kk),vpru(11)+2*nd)=alpha3(kk,11+8);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(11))=alpha3(kk+4,11);
alpha3S(vpru(kk)+2*nd,vpru(11))=alpha3(kk+8,11);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(11)+nd)=alpha3(kk+4,11+4);
alpha3S(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+2*nd)=alpha3(kk+8,11+8);
alpha3S(vpru(kk)+nd,vpru(11)+2*nd)=alpha3(kk+4,11+8);
alpha3S(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+nd)=alpha3(kk+8,11+4);
rotBS(vpru(kk),vpru(11))=rotB(kk,11);
rotBS(vpru(kk),vpru(11)+nd)=rotB(kk,11+4);
rotBS(vpru(kk),vpru(11)+2*nd)=rotB(kk,11+8);
rotBS(vpru(kk)+nd,vpru(11))=rotB(kk+4,11); rotBS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11))=rotB(kk+8,11);
rotBS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+nd)=rotB(kk+4,11+4);
rotBS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+2*nd)=rotB(kk+8,11+8);
rotBS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+2*nd)=rotB(kk+4,11+8);
rotBS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+nd)=rotB(kk+8,11+4);
rotAS(vpru(kk),vpru(11))=rotA(kk,11);
rotAS(vpru(kk),vpru(11)+nd)=rotA(kk,11+4);
rotAS(vpru(kk),vpru(11)+2*nd)=rotA(kk,11+8);
rotAS(vpru(kk)+nd,vpru(11))=rotA(kk+4,11);
rotAS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11))=rotA(kk+8,11);
rotAS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+nd)=rotA(kk+4,11+4);
rotAS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+2*nd)=rotA(kk+8,11+8);
rotAS(vpru(kk)+nd,vpru(11)+2*nd)=rotA(kk+4,11+8);
rotAS(vpru(kk)+2*nd,vpru(11)+nd)=rotA(kk+8,11+4);
end
end
clear gamma kk 11 vpru beta alpha3 rotA rotB
gammaT=gammaT+gammaS;clear gammaS
betaT=betaT+betaS;clear betaS
alpha3T=alpha3T+alpha3S;clear alpha3S
rotAT=rotAT+rotAS;clear rotAS
rotBT=rotBT+rotBS;clear rotBS
end
clear vc1 i

```

```

%*****
%***** alphafdc_d*****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,2)>0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%*****Generacion de los Nj(x,y,z)
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1,:),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2,:),:);pcord2D2(2)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3,:),:);pcord2D3(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2,:),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1,:),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDkl2D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDjl2D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms x z;
MDkl2D(1,:)=1,x,z;
Nj2D=det(MDkl2D)/Cjkl2D;
MDjl2D(2,:)=1,x,z;
Nk2D=det(MDjl2D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'x','z');
x=F.x
z=F.z
y=0.5;
clear MDkl2D MDjl2D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)=1,x,y,z;
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=1,x,y,z;
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=1,x,y,z;
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;
Djkl=det(MDjkl);

```

```

Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([x;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafdc_d{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear Nj Nk Nl Nm JC
Xi2D Eta2D x y z
else
alphafdc_d{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
end
end
clear i vc1 ii
%*****
%***** alphafdc_c*****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,2)<-0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%*****Generacion de los Nj(x,y,z)
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1,:),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2,:),:);pcord2D2(2)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3,:),:);pcord2D3(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2,:),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1,:),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms x z;
MDk12D(1,:)= [1,x,z];
Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
MDj12D(2,:)= [1,x,z];
Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'x','z');
x=F.x
z=F.z
y=-0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)= [1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);

```

```

Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)= [1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)= [1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([x;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafdc_c{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear Nj Nk Nl Nm JC
Xi2D Eta2D x y z
else
alphafdc_c{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
end
end
clear i vc1 ii
for i=1:1:lf1
alphaf1{i}=kron([1;0;0],alphafdc_d{i}-alphafdc_c{i});
end
clear alphafdc_d alphafdc_c i
for i=1:1:lf1
alphaf1S{i}=zeros(3*nd,1);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:4
alphaf1S{i}(vpru(kk))=alphaf1{i}(kk);
alphaf1S{i}(vpru(kk)+nd)=alphaf1{i}(kk+4);
alphaf1S{i}(vpru(kk)+2*nd)=alphaf1{i}(kk+8);
end
end
clear alphaf1 kk i vpru
alphaf1T=0;
for i=1:1:lf1
alphaf1T=alphaf1T+alphaf1S{i};
end
clear alphaf1S i
%*****
%***** alphafba_b *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,1)>0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%****Generacion de los Nj(x,y,z)
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2

```

```

tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(1)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(1)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(1)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(1)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(1)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms y z;
MDk12D(1,:)= [1,y,z];
Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
MDj12D(2,:)= [1,y,z];
Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'y','z');
y=F.y
z=F.z
x=0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)= [1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)= [1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)= [1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([y;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafab_b{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear Nj Nk Nl Nm JC
Xi2D Eta2D x y z
else
alphafab_b{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
end
end
clear i vc1 ii
%*****
%***** alphafab_a *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,1)<-0.46);clear jj

```

```

for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%***Generacion de los Nj(x,y,z)
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1,:),:);pcord2D1(1)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2,:),:);pcord2D2(1)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3,:),:);pcord2D3(1)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2,:),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1,:),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms y z;
MDk12D(1,:)= [1,y,z];
Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
MDj12D(2,:)= [1,y,z];
Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'y','z');
y=F.y
z=F.z
x=-0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)= [1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)= [1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)= [1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([y;z],[Xi2D, Eta2D])));
alpha_ba_a{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear Nj Nk Nl Nm JC
Xi2D Eta2D x y z

```

```

else
alphafba_a{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
end
end
clear i vc1 ii
for i=1:1:lf1
alphaf4{i}=kron([0;1;0],alphafba_b{i}-alphafba_a{i});
end
clear alphafba_b alphafba_a i
for i=1:1:lf1
alphaf4S{i}=zeros(3*nd,1);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:4
alphaf4S{i}(vpru(kk))=alphaf4{i}(kk);
alphaf4S{i}(vpru(kk)+nd)=alphaf4{i}(kk+4);
alphaf4S{i}(vpru(kk)+2*nd)=alphaf4{i}(kk+8);
end
end
clear alphaf4 kk i vpru
alphaf4T=0;
for i=1:1:lf1
alphaf4T=alphaf4T+alphaf4S{i};
end
clear alphaf4S i
alphafT=alphaf1T-alphaf4T;clear alphaf1T alphaf4T
%*****
%*** CALCULO DEL POTENCIAL MAGNETICO VECTORIAL *****
%*****
clear SAO
for j=1:1:nd
SAO(j,1)=-p(j,2)*(1.472/2);
SAO(j+nd,1)=p(j,1)*(1.472/2);
SAO(j+2*nd,1)=0;
end
clear j
XX1=-Sigma*gammaT-nuFP*alpha3T*Deltat*0.5;
XX2=-Sigma*gammaT+nuFP*alpha3T*Deltat*0.5;
[i1,j1]=find(p(:,1)>0.46);clear j1
[i2,j2]=find(p(:,1)<-0.46);clear j2
nodayX=union(i1,i2);clear i1 i2
[i1,j1]=find(p(:,2)>0.46);clear j1
[i2,j2]=find(p(:,2)<-0.46);clear j2
nodayY=union(i1,i2);clear i1 i2
[i1,j1]=find(p(:,3)>0.96);clear j1
[i2,j2]=find(p(:,3)<-0.96);clear j2
nodayZ=union(i1,i2);clear i1 i2
arist1=intersect(nodayX,nodayZ);arist2=intersect(nodayZ,nodayY);
aristT=union(arist1,arist2);clear arist1 arist2;
aristT=aristT+2*nd;
nodayZ=setdiff(nodayZ,nodayX);nodayZ=setdiff(nodayZ,nodayY);
colem=union([nodayX],[nodayY+nd]);

```

```

colelm=union(colelm,[nodtapZ+2*nd]);colelm=union(colelm,aristT);
XX1(colelm,:)=[];XX1(:,colelm)=[];
XX2(colelm,:)=[];XX2(:,colelm)=[];
SA0(colelm,:)=[];
SAi{1}=(1000)*ones(3*nd,1); SAi{1}(colelm,:)=[];
Ri{1}=(1000)*ones(3*nd,1);
errSA1=10;
while (errSA1>(1e-13))
XXF1=nuFP*alphafT*Deltat*0.5*(ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)))+
ppval(FS,H0max))-betaT*Deltat*0.5*Ri{1};
XXF1(colelm,:)=[];
clear SA
SA{1}=cgs(XX1,XX2*SA0+XXF1,1e-16,100);
errSA1=abs(SA{1}-SAi{1});
errSA1=sum(errSA1)
if (errSA1<(1e-13))
clear SA
SA{1}=SAi{1};
else
clear SAi
SAi{1}=SA{1};
clear j i
j=1;
for i=1:1:3*nd
if (ismember(i,colelm))
SAC{1}(i)=0;
else
SAC{1}(i)=SA{1}(j);
j=j+1;
end
end
clear i j
rot_BT2=rotBT;
rot_BT2([nodtapZ;nodtapZ+nd;nodtapZ+2*nd;nodtapX;nodtapX+nd;
nodtapX+2*nd;nodtapY;nodtapY+nd;nodtapY+2*nd],:)=[];
vp1=(rotAT)*(SAC{1})';
vp1([nodtapZ;nodtapZ+nd;nodtapZ+2*nd;nodtapX;nodtapX+nd;
nodtapX+2*nd;nodtapY;nodtapY+nd;nodtapY+2*nd],:)=[];
for j=1:1:max(size(nodtapZ))
vp1=vp1-rot_BT2(:,nodtapZ(j)+2*nd)*(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat));
end
for j=1:1:max(size(nodtapX))
vp1=vp1-rot_BT2(:,nodtapX(j)+2*nd)*ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
end
for j=1:1:max(size(nodtapY))
vp1=vp1-rot_BT2(:,nodtapY(j)+2*nd)*ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
end
rot_BT2(:,[nodtapZ;nodtapZ+nd;nodtapZ+2*nd;nodtapX;nodtapX+nd;
nodtapX+2*nd;nodtapY;nodtapY+nd;nodtapY+2*nd])=[];
Bc{1}=cgs(rot_BT2,vp1,1e-16,100);
clear i j

```

```

j=1;
for i=1:1:3*nd
if ismember(i,nodtapZ)
B{1}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapZ+nd)
B{1}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapZ+2*nd)
B{1}(i)=(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat));
elseif ismember(i,nodtapX)
B{1}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapX+nd)
B{1}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapX+2*nd)
B{1}(i)=ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
elseif ismember(i,nodtapY)
B{1}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapY+nd)
B{1}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapY+2*nd)
B{1}(i)=ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
else
B{1}(i)=Bc{1}(j);
j=j+1;
end
end
for i=1:1:max(size(B{1}))
if B{1}(i)>1.472
B{1}(i)=1.472;
elseif B{1}(i)<-1.472
B{1}(i)=-1.472;
else
end
end
clear H
H{1}=ppval(FSX,B{1});
clear i
for i=1:1:nd
if ismember(i,nodtapX)
H{1}(i+2*nd)=H0max*cos(2*pi*f*(Deltat));
H{1}(i)=0;
H{1}(i+nd)=0;
elseif ismember(i,nodtapY)
H{1}(i+2*nd)=H0max*cos(2*pi*f*(Deltat));
H{1}(i)=0;
H{1}(i+nd)=0;
elseif ismember(i,nodtapZ)
H{1}(i+2*nd)=ppval(FSX,(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)));
H{1}(i)=0;
H{1}(i+nd)=0;
else
end

```

```

end
clear Ri
Ri{1}=nuFP*B{1}-H{1};Ri{1}=Ri{1}';
end
end
clear XXF1
for timedis=2:1:timemax
timedis
SAi{timedis}=(1000)*ones(3*nd,1); SAi{timedis}(colelm,:)=[];
Ri{timedis}=(1000)*ones(3*nd,1);
errSA=10;
while (errSA>(1e-13))
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np )
XXF=nuFP*Deltat*0.5*alphafT*(ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*Deltat*timedis))+
ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*Deltat*(timedis-1))))-Deltat*0.5*betaT*(Ri{timedis}-Ri{timedis-1});
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
XXF=nuFP*Deltat*0.5*alphafT*(ppval(FI,H0max*cos(2*pi*f*Deltat*timedis))+
ppval(FI,H0max*cos(2*pi*f*Deltat*(timedis-1))))-Deltat*0.5*betaT*(Ri{timedis}-Ri{timedis-1});
else
end
end
end
XXF(colelm,:)=[];
SA{timedis}=cgs(XX1,XX2*SA{timedis-1}+XXF,1e-16,100);
errSA=abs(SA{timedis}-SAi{timedis});
errSA=sum(errSA)
if (errSA<(1e-13))
SA{timedis}=SAi{timedis};
else
SAi{timedis}=SA{timedis};
clear j i
j=1;
for i=1:1:3*nd
if (ismember(i,colelm))
SAC{timedis}(i)=0;
else
SAC{timedis}(i)=SA{timedis}(j);
j=j+1;
end
end
clear i j
rot_BT2=rotBT;
rot_BT2([nodayZ;nodayZ+nd;nodayZ+2*nd;nodayX;nodayX+nd;
nodayX+2*nd;nodayY;nodayY+nd;nodayY+2*nd],:)=[];
vp1=(rotAT)*(SAC{timedis})';
vp1([nodayZ;nodayZ+nd;nodayZ+2*nd;nodayX;nodayX+nd;nodayX+2*nd;
nodayY;nodayY+nd;nodayY+2*nd],:)=[];
for j=1:1:max(size(nodayZ))
vp1=vp1-rot_BT2(:,nodayZ(j)+2*nd)*(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis);
end
for j=1:1:max(size(nodayX))

```

```

vp1=vp1-rot_BT2(:,nodtapX(j)+2*nd)*ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
end
for j=1:1:max(size(nodtapY))
vp1=vp1-rot_BT2(:,nodtapY(j)+2*nd)*ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
end
rot_BT2(:,[nodtapZ;nodtapZ+nd;nodtapZ+2*nd;nodtapX;nodtapX+nd;
nodtapX+2*nd;nodtapY;nodtapY+nd;nodtapY+2*nd])=[ ];
Bc{timedis}=cgs(rot_BT2,vp1,1e-16,100);
clear i j
j=1;
for i=1:1:3*nd
if ismember(i,nodtapZ)
B{timedis}(i,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapZ+nd)
B{timedis}(i)=0;
elseif ismember(i,nodtapZ+2*nd)
B{timedis}(i,1)=(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis);
elseif ismember(i,nodtapX)
B{timedis}(i,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapX+nd)
B{timedis}(i,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapX+2*nd)
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
B{timedis}(i,1)=ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
B{timedis}(i,1)=ppval(FI,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
else
end
end
elseif ismember(i,nodtapY)
B{timedis}(i,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapY+nd)
B{timedis}(i,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapY+2*nd)
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
B{timedis}(i,1)=ppval(FS,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
B{timedis}(i,1)=ppval(FI,H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
else
end
end
else
B{timedis}(i,1)=Bc{1}(j);
j=j+1;
end
end
for i=1:1:max(size(B{timedis}))
if B{timedis}(i)>1.472
B{timedis}(i)=1.472;

```

```

elseif B{timedis}(i)<-1.472
B{timedis}(i)=-1.472;
else
end
end
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
H{timedis}=ppval(FSX,B{timedis});
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
H{timedis}=ppval(FIX,B{timedis});
else
end
end
clear i
for i=1:1:nd
if ismember(i,nodtapX)
H{timedis}(i+2*nd,1)=H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis);
H{timedis}(i,1)=0;
H{timedis}(i+nd,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapY)
H{timedis}(i+2*nd)=H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis);
H{timedis}(i,1)=0;
H{timedis}(i+nd,1)=0;
elseif ismember(i,nodtapZ)
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
H{timedis}(i+2*nd,1)=ppval(FSX,(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
H{timedis}(i+2*nd,1)=ppval(FIX,(4*pi*(1e-7))*H0max*cos(2*pi*f*(Deltat)*timedis));
else
end
end
H{timedis}(i,1)=0;
H{timedis}(i+nd,1)=0;
end
end
Ri{timedis}=nuFP*B{timedis}-H{timedis};
end
end
end
clear SAc SAi Bc Ri ii nodtapY nodtapX nodtapZ XXF XX1 XX2
%*****
%*** Armando el potencial magnetico vectorial ***
%*****
clear A
for rr=1:1:timemax
clear j i
j=1;
for i=1:1:(3*nd)
if (ismember(i,colelm))
A{rr}(i)=0;

```

```

else
A{rr}(i)=SA{rr}(j);
j=j+1;
end
end
end
clear i j SA
%*****
%**** Armando el vector de las corrientes ****
%*****
clear J
J{1}=- (Sigma/Deltat)*A{1};
for rr=2:1:timemax
J{rr}=- (Sigma/Deltat)*(A{rr}-A{rr-1});
end
clear A
%**** graficando la magnitud de las corrientes ****
for i=1:1:nd
magJ(i)=sqrt(J{rr}(i)*J{rr}(i)+J{rr}(i+nd)*J{rr}(i+nd)+J{rr}(i+2*nd)*J{rr}(i+2*nd));
end
clear i
figure, trisurf(t,p(:,1),p(:,2),p(:,3),magJ,'facecolor','interp','edgecolor','none')
%*****
%****ciclos repetitivos****
%*****
na=43;
qqw=J{1}(na);
qqw2=J{1}(na+nd);
qqw3=J{1}(na+2*nd);
for i=2:1:2000
qqw=[qqw J{i}(na)];
qqw2=[qqw2 J{i}(na+nd)];
qqw3=[qqw3 J{i}(na+2*nd)];
end
figure, plot(qqw); grid; ylabel('Jx')
figure, plot(qqw2); grid; ylabel('Jy')
figure, plot(qqw3); grid; ylabel('Jz')
clear qqw qqw2 qqw3
%*****
%***GENERANDO TERMINO DE PERDIDAS POR HYSTERESIS ****
%*****
for j=1:1:3*nd
Hval=H{1}(j);
for timedis=1:1:300
Hval=[Hval H{timedis}(j)];
end
Hmax(j)=max(Hval); Hmin(j)=min(Hval);
end
for j=1:1:3*nd
qhyst{1}(j)=abs((quad(@(hx)(fls),Hmax(j),H{1}(j)))/Deltat);
end

```

```

for timedis=2:1:timemax
timedis
for ii=0:1:nlonda
if (timedis>=(2*ii*np) && timedis<(2*ii+1)*np)
for j=1:1:nd
Fhyst1=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),H{timedis}(j));
Fhyst2=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),H{timedis-1}(j));
qhyst{timedis}(j)=abs(double((Fhyst1-Fhyst2)/Deltat));clear Fhyst1 Fhyst2
end
elseif (timedis>=(2*ii+1)*np && timedis<(2*(ii+1)*np))
for j=1:1:nd
Fhyst1=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),Hmin(j))+quad(@(hx)(fli),Hmin(j),H{timedis}(j));
Fhyst1=quad(@(hx)(fls),Hmax(j),Hmin(j))+quad(@(hx)(fli),Hmin(j),H{timedis-1}(j));
qhyst{timedis}(j)=abs(double((Fhyst1-Fhyst2)/Deltat));clear Fhyst1 Fhyst2
end
else
end
end
end
clear H
for timedis=1:1:max(size(qhyst))
for j=1:1:nd
qhy{timedis}(j)=sqrt(qhyst{timedis}(j)*qhyst{timedis}(j)+
qhyst{timedis}(j+nd)*qhyst{timedis}(j+nd)+
qhyst{timedis}(j+2*nd)*qhyst{timedis}(j+2*nd));
end
end
clear qhyst
%*****
%*****GENERANDO EL TERMINO DE PERDIDAS OHMICAS*****
%*****
clear B
for i=1:1:max(size(J))
q2{i}=(1/Sigma)*J{i}.*J{i};
for j=1:1:nd
qoh{i}(j)=q2{i}(j)+q2{i}(j+nd)+q2{i}(j+2*nd);
end
end
clear q2 i J
%*****
%***** Suma de perdidas ohmicas y de histéresis *****
%*****
for timedis=1:1:timemax
q{timedis}=qoh{timedis}+qhy{timedis};
end
clear qoh qhyst qhy
out.q=q;

```

Apéndice G

ThermalFEM_3D.m

```
function out_T=ThermalFEM_3D(p,t,rho,lambda,c,T0ext,Deltat,q,timeheatmax)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t(i,:);
for j=1:1:4
cord{j}=p(nodos{i}(j),:);
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord j i
psiT=0;
thetaT=0;
vc1=[1;1;1;1];
for i=1:1:lf1
i s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%****Generacion de los Nj(x,y,z)
syms x y z
MDklm(1,:)=[1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=[1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=[1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
```

```

dxNjklm=[diff(Nj,'x'),diff(Nk,'x'),diff(Nl,'x'),diff(Nm,'x')];
dyNjklm=[diff(Nj,'y'),diff(Nk,'y'),diff(Nl,'y'),diff(Nm,'y')];
dzNjklm=[diff(Nj,'z'),diff(Nk,'z'),diff(Nl,'z'),diff(Nm,'z')];
syms Xi Eta zzeta
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,Nl-zzeta,'x','y','z');
x=F.x;
y=F.y;
z=F.z;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y;z],[Xi, Eta, zzeta])));
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;
Djkl=det(MDjkl);
Nma=Djkl/Cjklm;clear Djkl
clear x y z;
%***** Integrales por cuadratura *****
u1=sqrt(3/5);u2=0;u3=-u1;
c1=(5/9);c2=8/9;c3=c1;
Xi1=0.5*(u1+1);Xi2=0.5*(u2+1);Xi3=0.5*(u3+1);
Eta1=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta2=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta3=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
zzeta1=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1c=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2c=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3c=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
syms x y z
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F1.x;y=F1.y;z=F1.z;clear F1
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]';
syms x y z
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1b,'x','y','z');
x=F2.x;y=F2.y;z=F2.z;clear F2
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]';
syms x y z
F3=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1c,'x','y','z');
x=F3.x;y=F3.y;z=F3.z;clear F3
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]';
syms x y z

```

```

F4=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F4.x;y=F4.y;z=F4.z;clear F4
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]';
syms x y z
F5=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F5.x;y=F5.y;z=F5.z;clear F5
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]';
syms x y z
F6=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2b,'x','y','z');
x=F6.x;y=F6.y;z=F6.z;clear F6
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]';
syms x y z
F7=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2c,'x','y','z');
x=F7.x;y=F7.y;z=F7.z;clear F7
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]';
syms x y z
F8=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F8.x;y=F8.y;z=F8.z;clear F8
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]';
syms x y z
F9=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F9.x;y=F9.y;z=F9.z;clear F9
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]';
syms x y z
F10=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3b,'x','y','z');
x=F10.x;y=F10.y;z=F10.z;clear F10
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]';
syms x y z
F11=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3c,'x','y','z');
x=F11.x;y=F11.y;z=F11.z;clear F11

```

```

MDjkl(4,:)= [1,x,y,z]; clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm; clear Djkl
P33b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]';
syms x y z
F12=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F12.x;y=F12.y;z=F12.z; clear F12
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z]; clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm; clear Djkl
P33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]';
theta=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P111+P111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P11b1c+P11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P222+P222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P22b2c+P22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P333+P333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P33b3c+P33b3)
psix=JC*dxNjklm'*dxNjklm*(1/6)
psiy=JC*dyNjklm'*dyNjklm*(1/6)
psiz=JC*dzNjklm'*dzNjklm*(1/6)
psi=psix+psiy+psiz; clear psix psiy psiz
psiS=zeros(nd,nd);
thetaS=zeros(nd,nd);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
psiS(vpru(kk),vpru(ll))=psi(kk,ll);
thetaS(vpru(kk),vpru(ll))=theta(kk,ll);
end
end
clear kk ll psi theta vpru
thetaT=thetaS+thetaT; clear thetaS
psiT=psiS+psiT; clear psiS
end
clear vc1 i
p_olof='p';
t_olof='t1';
bound_edges=boundedges(p_olof,t_olof);
bound_nodes=unique(bound_edges); clear bound_edges
%*****
%*****
%** Calculo de la temperatura en el tiempo 1*****
bound_nodes=unique(surftri(p,t));
XXhn1=rho*c*thetaT+lambda*Deltat*0.5*psiT;
XXhn2=rho*c*thetaT-lambda*Deltat*0.5*psiT;
XXh1=XXhn1;
XXh2=XXhn2;
XXh1(bound_nodes,:)= [ ];
vph=XXh2*(T0ext*ones(nd,1))+0.5*Deltat*thetaT*(q{1}');
vph(bound_nodes,:)= [ ];
for j=1:1:max(size(bound_nodes))

```

```

vph=vph-XXh1(:,bound_nodes(j))*T0ext;
end
XXh1(:,bound_nodes)=[ ];
Tc{1}=cgs(XXh1,vph,1e-16,100);
clear i j
j=1;
for i=1:1:nd
if ismember(i,bound_nodes)
T{1}(i)=T0ext;
else
T{1}(i)=Tc{1}(j);
j=j+1;
end
end
T{1}=T{1}';
clear XXh1 vph XXh2 j
for timedis=2:1:timeheatmax
timedis
vphn=XXhn2*T{timedis-1}+Deltat*0.5*thetaT*((q{timedis})'+(q{timedis-1})');
XXhnt=XXhn1;
XXhnt(bound_nodes,:)= [ ];
vphn(bound_nodes,:)= [ ];
for j=1:1:max(size(bound_nodes))
vphn=vphn-XXhnt(:,bound_nodes(j))*T0ext;
end
XXhnt(:,bound_nodes)=[ ];
Tc{timedis}=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
clear i j
j=1;
for i=1:1:nd
if ismember(i,bound_nodes)
T{timedis}(i,1)=T0ext;
else
T{timedis}(i,1)=Tc{timedis}(j);
j=j+1;
end
end
end
clear Tc j XXhnt vphn bound_nodes XXhn1 XXhn2
out_T=T;

```


Apéndice H

ThermalFEMConv_3D.m

```
function out_Tconv=ThermalFEMConv_3D(p,t,rho,lambda,c,T0ext,h,Deltat,Tm,q,timeheatmax)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t(i,:);
for j=1:1:4
cord{j}=p(nodos{i}(j),:);
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord j i
psiT=0;
thetaT=0;
vc1=[1;1;1;1];
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%*****Generacion de los Nj(x,y,z)
syms x y z
MDklm(1,:)=[1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=[1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=[1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
```

```

Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
dxNjklm=[diff(Nj,'x'),diff(Nk,'x'),diff(Nl,'x'),diff(Nm,'x')];
dyNjklm=[diff(Nj,'y'),diff(Nk,'y'),diff(Nl,'y'),diff(Nm,'y')];
dzNjklm=[diff(Nj,'z'),diff(Nk,'z'),diff(Nl,'z'),diff(Nm,'z')];
syms Xi Eta zzeta
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,Nl-zzeta,'x','y','z');
x=F.x;
y=F.y;
z=F.z;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y;z],[Xi, Eta, zzeta])));
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nma=Djkl/Cjklm;clear Djkl
clear x y z;
%***** Integrales por cuadratura *****
u1=sqrt(3/5);u2=0;u3=-u1;
c1=(5/9);c2=8/9;c3=c1;
Xi1=0.5*(u1+1);Xi2=0.5*(u2+1);Xi3=0.5*(u3+1);
Eta1=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta2=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta3=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
zzeta1=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1c=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2c=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3c=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
syms x y z
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F1.x;y=F1.y;z=F1.z;clear F1
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]';
syms x y z
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1b,'x','y','z');
x=F2.x;y=F2.y;z=F2.z;clear F2
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]';
syms x y z
F3=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1c,'x','y','z');
x=F3.x;y=F3.y;z=F3.z;clear F3
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]';

```

```

syms x y z
F4=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F4.x;y=F4.y;z=F4.z;clear F4
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]';
syms x y z
F5=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F5.x;y=F5.y;z=F5.z;clear F5
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]';
syms x y z
F6=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2b,'x','y','z');
x=F6.x;y=F6.y;z=F6.z;clear F6
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]';
syms x y z
F7=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2c,'x','y','z');
x=F7.x;y=F7.y;z=F7.z;clear F7
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]';
syms x y z
F8=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F8.x;y=F8.y;z=F8.z;clear F8
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]';
syms x y z
F9=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F9.x;y=F9.y;z=F9.z;clear F9
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]';
syms x y z
F10=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3b,'x','y','z');
x=F10.x;y=F10.y;z=F10.z;clear F10
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]';
syms x y z
F11=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3c,'x','y','z');

```

```

x=F11.x;y=F11.y;z=F11.z;clear F11
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P33b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]';
syms x y z
F12=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F12.x;y=F12.y;z=F12.z;clear F12
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]';
theta=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P111+P111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P11b1c+P11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P222+P222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P22b2c+P22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P333+P333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P33b3c+P33b3)
psix=JC*dxNjklm'*dxNjklm*(1/6)
psiy=JC*dyNjklm'*dyNjklm*(1/6)
psiz=JC*dzNjklm'*dzNjklm*(1/6)
psi=psix+psiy+psiz;clear psix psiy psiz
psiS=zeros(nd,nd);
thetaS=zeros(nd,nd);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
psiS(vpru(kk),vpru(ll))=psi(kk,ll);
thetaS(vpru(kk),vpru(ll))=theta(kk,ll);
end
end
clear kk ll psi theta vpru
thetaT=thetaS+thetaT;clear thetaS
psiT=psiS+psiT;clear psiS
end
clear vc1 i
%*****
%***** alphafdc_d *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,2)>0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);

```

```

pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(2)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms x z;
MDk12D(1,:)=1,x,z;
Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
MDj12D(2,:)=1,x,z;
Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'x','z');
x=F.x
z=F.z
y=0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)=1,x,y,z;
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=1,x,y,z;
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=1,x,y,z;
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)=1,x,y,z;
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([x;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafdc_d1{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);
alphafdc_d2{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm]*[Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear
Nj Nk Nl Nm JC Eta2D Xi2D x y z
else
alphafdc_d1{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
alphafdc_d2{i}=zeros(4,4);
end
end
clear i vc1 ii
%*****
%***** alphafdc_c*****
%*****
vc1=[1;1;1;1];

```

```

[ii,jj]=find(p(:,2)<-0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(2)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms x z;
MDk12D(1,:)= [1,x,z];
Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
MDj12D(2,:)= [1,x,z];
Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'x','z');
x=F.x
z=F.z
y=-0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)= [1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)= [1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)= [1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([x;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafdc_c1{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);
alphafdc_c2{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm]*[Nj,Nk,Nl,Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear

```

```

Nj Nk Nl Nm JC Xi2D Eta2D x y z
else
alphafdc_c1{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
alphafdc_c2{i}=zeros(4,4);
end
end
clear i vc1 ii
%*****
%***** alphafba_b *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,1)>0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(1)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(1)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(1)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(1)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(1)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms y z;
MDk12D(1,:)=[1,y,z];
Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
MDj12D(2,:)=[1,y,z];
Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'y','z');
y=F.y
z=F.z
x=0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)=[1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=[1,x,y,z];

```

```

Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)= [1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([y;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafba_b1{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);
alphafba_b2{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm]*[Nj,Nk,Nl,Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);clear
Nj Nk Nl Nm JC Xi2D Eta2D x y z
else
alphafba_b1{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
alphafba_b2{i}=zeros(4,4);
end
end
clear i vc1 ii
%*****
%***** alphafba_a *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,1)<-0.46);clear jj
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(1)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(1)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(1)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
else
end
clear tcord
MDkl2D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
MDjl2D=vpa([ [1;1;1] [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms y z;
MDkl2D(1,:)= [1,y,z];
Nj2D=det(MDkl2D)/Cjkl2D;
MDjl2D(2,:)= [1,y,z];

```

```

Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'y','z');
y=F.y
z=F.z
x=-0.5;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
MDklm(1,:)=[1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=[1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=[1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([y;z],[Xi2D, Eta2D])));
alphafba_a1{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);
alphafba_a2{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm]*[Nj,Nk,Nl,Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1); clear
Nj Nk Nl Nm JC Xi2D Eta2D x y
z else alphafba_a1{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
alphafba_a2{i}=zeros(4,4);
end
end
clear i vc1 ii
%*****
%***** alphaffe_f *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,3)>0.96);clear jj
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
tcord=intersect(t(i,:),ii);
pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(3)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(3)=[ ];
pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(3)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
if Cjkl2D<0
pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(2)=[ ];
pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(2)=[ ];
Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);

```

```

else
end
clear tcord
MDk12D=vpa([ [1;1;1] [ [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ] );
MDj12D=vpa([ [1;1;1] [ [pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ] );
clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
syms x y;
MDk12D(1,:)= [1,x,y];
Nj2D=det(MDk12D)/Cjk12D;
MDj12D(2,:)= [1,x,y];
Nk2D=det(MDj12D)/Cjk12D;
syms Xi2D Eta2D
F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'x','y');
x=F.x
y=F.y
z=1;
clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjk12D F
MDklm(1,:)= [1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)= [1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)= [1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
JC=abs(det(jacobian([x;y],[Xi2D, Eta2D])));
alphaffe_f1{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);
alphaffe_f2{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm]*[Nj,Nk,Nl,Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1); clear
Nj Nk Nl Nm JC Xi2D Eta2D x y z
else
alphaffe_f1{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
alphaffe_f2{i}=zeros(4,4);
end
end
clear i vc1 ii %*****
%***** alphaffe_f *****
%*****
vc1=[1;1;1;1];
[ii,jj]=find(p(:,3)<-0.96);clear jj
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2

```

```

if max(size(intersect(t(i,:),ii)))>2
    tcord=intersect(t(i,:),ii);
    pcord2D1=p(tcord(1),:);pcord2D1(3)=[ ];
    pcord2D2=p(tcord(2),:);pcord2D2(3)=[ ];
    pcord2D3=p(tcord(3),:);pcord2D3(3)=[ ];
    Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
    if Cjkl2D<0
        pcord2D1=p(tcord(2),:);pcord2D1(2)=[ ];
        pcord2D2=p(tcord(1),:);pcord2D2(2)=[ ];
        Cjkl2D=det([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
    else
        end
    clear tcord
    MDk12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
    MDj12D=vpa([ [1;1;1] [ pcord2D1];[pcord2D2];[pcord2D3] ] ]);
    clear pcord2D1 pcord2D2 pcord2D3
    syms x y;
    MDk12D(1,:)=1,x,y;
    Nj2D=det(MDk12D)/Cjkl2D;
    MDj12D(2,:)=1,x,y;
    Nk2D=det(MDj12D)/Cjkl2D;
    syms Xi2D Eta2D
    F=solve(Nj2D-Xi2D,Nk2D-Eta2D,'x','y');
    x=F.x
    y=F.y
    z=-1;
    clear MDk12D MDj12D Nj2D Nk2D Cjkl2D F
    MDklm(1,:)=1,x,y,z;
    Dklm=det(MDklm);
    Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
    MDjlm(2,:)=1,x,y,z;
    Djlm=det(MDjlm);
    Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
    MDjkm(3,:)=1,x,y,z;
    Djkm=det(MDjkm);
    Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
    MDjkl(4,:)=1,x,y,z;
    Djkl=det(MDjkl);
    Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl MDjkl Cjklm
    JC=abs(det(jacobian([x;y],[Xi2D, Eta2D])));
    alphaffe_e1{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1);
    alphaffe_e2{i}=JC*int(int([Nj;Nk;Nl;Nm]*[Nj;Nk;Nl;Nm],Eta2D,0,1-Xi2D),Xi2D,0,1); clear
    Nj Nk Nl Nm JC Xi2D Eta2D x y z
    else
        alphaffe_e1{i}=zeros(4,1);clear MDklm MDjlm MDjkm MDjkl Cjklm
        alphaffe_e2{i}=zeros(4,4);
    end
end
clear i vc1 ii
for i=1:1:lf1
    alphaf1{i}=alphafba_b1{i}-alphafba_a1{i}+alphafdc_d1{i}-alphafdc_c1{i}+

```

```

alphaffe_f1{i}-alphaffe_e1{i};
alphaf2{i}=alphafba_a2{i}-alphafba_b2{i}+alphafdc_c2{i}-alphafdc_d2{i}+
alphaffe_e2{i}-alphaffe_f2{i};
end
clear alphafba_b1 alphafba_a1 alphafdc_d1 alphafdc_c1 alphaffe_f1 alphaffe_e1 alphafba_a2
alphafba_b2 alphafdc_c2 alphafdc_d2 alphaffe_e2 alphaffe_f2
alphaf1T=0;
alphaf2T=0;
for i=1:1:lf1
alphaf1S=zeros(nd,1);
alphaf2S=zeros(nd,nd);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:4
for ll=1:1:4
alphaf2S(vpru(kk),vpru(ll))=alphaf2i(kk,ll);
end
alphaf1S(vpru(kk))=alphaf1{i}(kk);
end
alphaf1T=alphaf1T+alphaf1S;
alphaf2T=alphaf2T+alphaf2S;
end
clear alphaf2 alphaf1 alphaf1S alphaf2S
%*****
%* Calculo de la temperatura en el tiempo 1*****
XXhn1=rho*c*thetaT+Deltat*0.5*lambda*((h/lambda)*alphaf2T+psiT);
XXhn2=rho*c*thetaT-Deltat*0.5*lambda*((h/lambda)*alphaf2T+psiT);
XXh1=XXhn1;
XXh2=XXhn2;
vph=XXh2*(T0ext*ones(nd,1))-h*Tm*Deltat*alphaf1T+Deltat*0.5*thetaT*(q{1}');
T{1}=cgs(XXh1,vph,1e-16,100);
for j=1:1:nd
if T{1}(j)<(T0ext-10)
T{1}(j)=T0ext;
else
end
end
clear XXh1 vph XXh2
for timedis=2:1:timeheatmax
timedis
vphn=XXhn2*T{timedis-1}-h*Tm*Deltat*alphaf1T+Deltat*0.5*thetaT*((q{timedis})'+(q{timedis-1})');
XXhnt=XXhn1;
T{timedis}=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
for j=1:1:nd
if T{timedis}(j)<(T0ext-10)
T{timedis}(j)=T0ext;
else
end
end
end
clear j XXhnt vphn bound_nodes XXhn1 XXhn2 q
out_Tconv=T;

```

Apéndice I

ThermalFEMNO_3D.m

```
function out_TNO=ThermalFEMNO_3D(p,t,rho,lambda,c,T0ext,Deltat,q,timeheatmax)
lf1=max(size(t));
nd=max(size(p));
for i=1:1:lf1
nodos{i}=t(i,:);
for j=1:1:4
cord{j}=p(nodos{i}(j),:);
end
cord1{i}=cord;
end
clear nodos cord j i
psiT=0;
thetaT=0;
vc1=[1;1;1;1];
for i=1:1:lf1
i
s2=[cord1{i}{1,1};cord1{i}{1,2};cord1{i}{1,3};cord1{i}{1,4}];
MDklm=vpa([vc1 s2]);
MDjlm=vpa([vc1 s2]);
MDjkm=vpa([vc1 s2]);
MDjkl=vpa([vc1 s2]);
Cjklm=det([vc1 s2]);clear s2
%****Generacion de los Nj(x,y,z)
syms x y z
MDklm(1,:)=[1,x,y,z];
Dklm=det(MDklm);
Nj=Dklm/Cjklm;clear Dklm MDklm
MDjlm(2,:)=[1,x,y,z];
Djlm=det(MDjlm);
Nk=Djlm/Cjklm;clear Djlm MDjlm
MDjkm(3,:)=[1,x,y,z];
Djkm=det(MDjkm);
Nl=Djkm/Cjklm;clear Djkm MDjkm
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
```

```

Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
dxNjklm=[diff(Nj,'x'),diff(Nk,'x'),diff(Nl,'x'),diff(Nm,'x')];
dyNjklm=[diff(Nj,'y'),diff(Nk,'y'),diff(Nl,'y'),diff(Nm,'y')];
dzNjklm=[diff(Nj,'z'),diff(Nk,'z'),diff(Nl,'z'),diff(Nm,'z')];
syms Xi Eta zzeta
F=solve(Nj-Xi,Nk-Eta,Nl-zzeta,'x','y','z');
x=F.x;
y=F.y;
z=F.z;clear F
JC=abs(det(jacobian([x;y;z],[Xi, Eta, zzeta])));
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];
Djkl=det(MDjkl);
Nma=Djkl/Cjklm;clear Djkl
clear x y z;
%***** Integrales por cuadratura *****
u1=sqrt(3/5);u2=0;u3=-u1;
c1=(5/9);c2=8/9;c3=c1;
Xi1=0.5*(u1+1);Xi2=0.5*(u2+1);Xi3=0.5*(u3+1);
Eta1=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta2=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
Eta3=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*0.25;Eta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*0.25;
zzeta1=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1b=(1-u1)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta1c=(1-u1)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2b=(1-u2)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta2c=(1-u2)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3b=(1-u3)*(1-sqrt(3)/3)*(1-sqrt(3)/3)*0.125;
zzeta3c=(1-u3)*(1+sqrt(3)/3)*(1+sqrt(3)/3)*0.125;
syms x y z
F1=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F1.x;y=F1.y;z=F1.z;clear F1
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1;Nm]';
syms x y z
F2=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1,Nl-zzeta1b,'x','y','z');
x=F2.x;y=F2.y;z=F2.z;clear F2
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b=JC*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]*[Xi1;Eta1;zzeta1b;Nm]';
syms x y z
F3=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1c,'x','y','z');
x=F3.x;y=F3.y;z=F3.z;clear F3
MDjkl(4,:)= [1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P111b1c=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1c;Nm]';

```

```

syms x y z
F4=solve(Nj-Xi1,Nk-Eta1b,Nl-zzeta1,'x','y','z');
x=F4.x;y=F4.y;z=F4.z;clear F4
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P11b1=JC*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]*[Xi1;Eta1b;zzeta1;Nm]';
syms x y z
F5=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F5.x;y=F5.y;z=F5.z;clear F5
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2;Nm]';
syms x y z
F6=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2,Nl-zzeta2b,'x','y','z');
x=F6.x;y=F6.y;z=F6.z;clear F6
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P222b=JC*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]*[Xi2;Eta2;zzeta2b;Nm]';
syms x y z
F7=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2c,'x','y','z');
x=F7.x;y=F7.y;z=F7.z;clear F7
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2c=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2c;Nm]';
syms x y z
F8=solve(Nj-Xi2,Nk-Eta2b,Nl-zzeta2,'x','y','z');
x=F8.x;y=F8.y;z=F8.z;clear F8
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P22b2=JC*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]*[Xi2;Eta2b;zzeta2;Nm]';
syms x y z
F9=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F9.x;y=F9.y;z=F9.z;clear F9
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3;Nm]';
syms x y z
F10=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3,Nl-zzeta3b,'x','y','z');
x=F10.x;y=F10.y;z=F10.z;clear F10
MDjkl(4,:)=1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P333b=JC*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]*[Xi3;Eta3;zzeta3b;Nm]';
syms x y z
F11=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3c,'x','y','z');

```

```

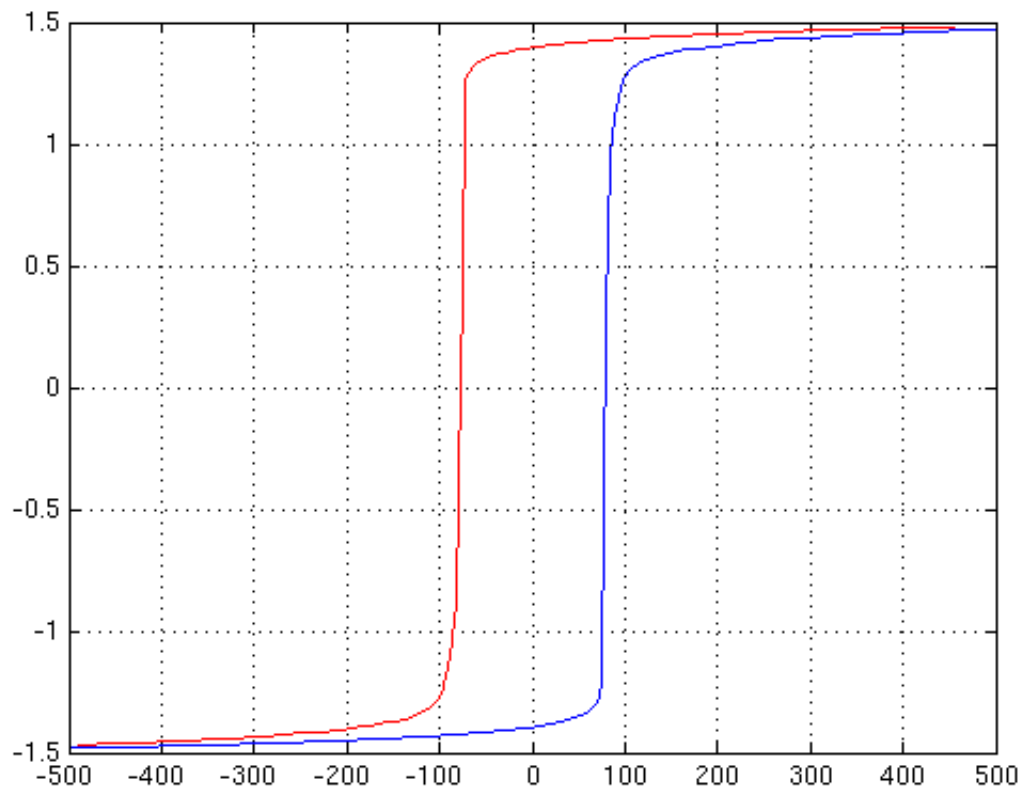
x=F11.x;y=F11.y;z=F11.z;clear F11
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P33b3c=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3c;Nm]';
syms x y z
F12=solve(Nj-Xi3,Nk-Eta3b,Nl-zzeta3,'x','y','z');
x=F12.x;y=F12.y;z=F12.z;clear F12
MDjkl(4,:)=[1,x,y,z];clear x y z
Djkl=det(MDjkl);
Nm=Djkl/Cjklm;clear Djkl
P33b3=JC*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]*[Xi3;Eta3b;zzeta3;Nm]';
theta=c1*(1-u1)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P111+P111b)+
c1*(1-u1)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P11b1c+P11b1)+
c2*(1-u2)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P222+P222b)+
c2*(1-u2)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P22b2c+P22b2)+
c3*(1-u3)^2*(1-sqrt(3)/3)*(1/64)*(P333+P333b)+
c3*(1-u3)^2*(1+sqrt(3)/3)*(1/64)*(P33b3c+P33b3)
psix=JC*dxNjklm'*dxNjklm*(1/6)
psiy=JC*dyNjklm'*dyNjklm*(1/6)
psiz=JC*dzNjklm'*dzNjklm*(1/6)
psi=psix+psiy+psiz;clear psix psiy psiz
psiS=zeros(nd,nd);
thetaS=zeros(nd,nd);
vpru=t(i,:);
for kk=1:1:3
for ll=1:1:3
psiS(vpru(kk),vpru(ll))=psi(kk,ll);
thetaS(vpru(kk),vpru(ll))=theta(kk,ll);
end
end
clear kk ll psi theta vpru
thetaT=thetaS+thetaT;clear thetaS
psiT=psiS+psiT;clear psiS
end
clear vc1 i
%*****
%**Calculo de la temperatura en el tiempo 1*****
XXhn1=rho*c*thetaT+lambda*Deltat*0.5*psiT;
XXhn2=rho*c*thetaT-lambda*Deltat*0.5*psiT;
XXh1=XXhn1;
XXh2=XXhn2;
vph=XXh2*(T0ext*ones(nd,1))+0.5*Deltat*thetaT*(q{1}');
T{1}=cgs(XXh1,vph,1e-16,100);
for j=1:1:nd
if T{1}(j)<(T0ext-10)
T{1}(j)=T0ext;
else
end
end
clear XXh1 vph XXh2

```

```
for timedis=2:1:timeheatmax
timedis
vphn=XXhn2*T{timedis-1}+Deltat*0.5*thetaT*((q{timedis})'+(q{timedis-1})');
XXhnt=XXhn1;
T{timedis}=cgs(XXhnt,vphn,1e-16,100);
for j=1:1:nd
if T{timedis}(j)<(T0ext-10)
T{timedis}(j)=T0ext;
else
end
end
end
clear j XXhnt vphn bound_nodes XXhn1 XXhn2 q
out_TN0=T;
```

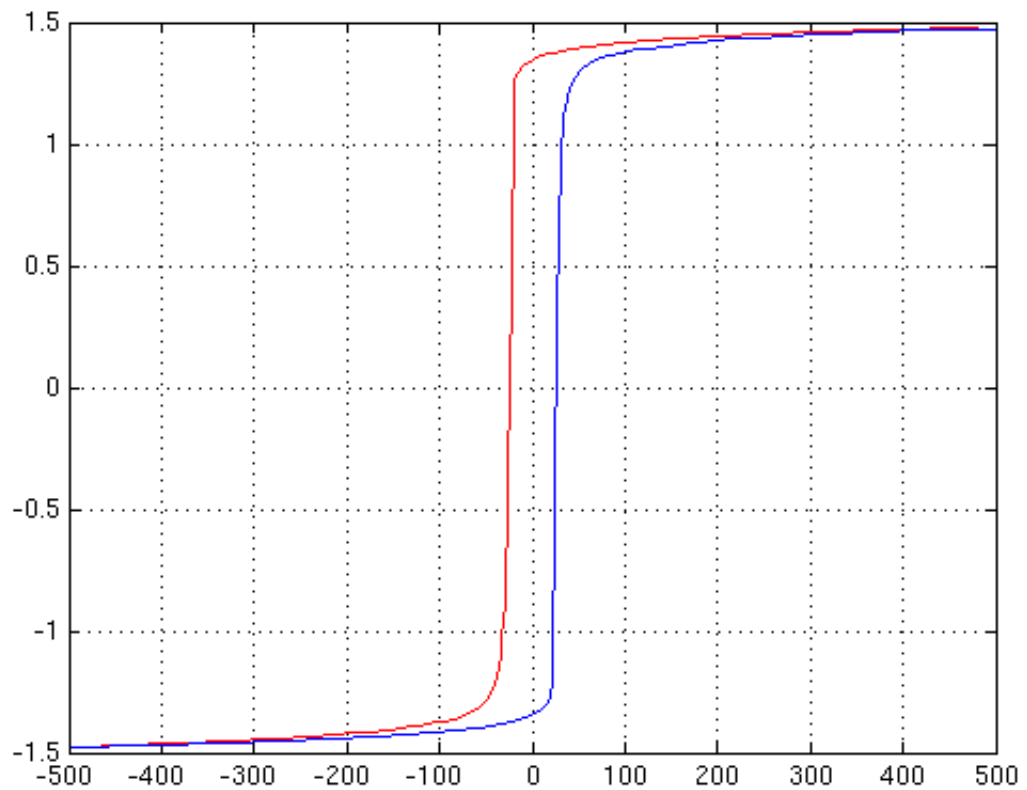

Apéndice J

Curvas Experimentales de Histéresis. Trafoperm



Apéndice K

Curvas Experimentales de Histéresis. Vacofer



Bibliografía

- [1] Johan Driesen. *Coupled Electromagnetic-Thermal Problems in Electrical Energy Transducers*. Ph.D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven. Belgium, 2000.
- [2] Joseph E. Flaherty. *Finite Element Analysis, Lectures Notes*. Department of Computer Science Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, 2000.
- [3] L.Ridgway Susane C. Brenner. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2008.
- [4] Claes Johnson. *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by The Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.
- [5] H.H.J.M. Janssen, E.J.W. ter Maten, D. van Houwelingen. Simulation of coupled electromagnetic and heat dissipation problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30:3331–3334, 1995.
- [6] M. Clemes, E. Gjonaj, P. Pinder, T. Weiland. Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33:739–745, 1997.
- [7] V. Ionita, B. Cranganu-creto, D. Ioan. Cuasi-stationary magnetic field computation in hysteretic media. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:1128–1131, 1996.
- [8] V. Ionita, G. Preda. Evaluation of magnetic material losses produced by hysteresis and eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34:2633–2635, 1998.
- [9] E. Fallah, J.S. Moghani. A new aproach for finite element modeling of hysteresis and dynamic effects. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42:3674–3681, 2006.
- [10] O. Bottauscio, M. Chiampi, A. Manzini. Element-free galerkin method in eddy-current problems with ferromagnetic media. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42:1577–1584, 2006.
- [11] A. Manzini. Element-free galerkin modeling of electromagnetic phenomena in ferromagnetic deformable bodies. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43:1285–1288, 2007.
- [12] Ioan R. Ciric, Florea I. Hantila, Mihai Maricar. Novel solution to eddy-current heating of ferromagnetic bodies with nonlinear b-h characteristic dependent on temperature. *Transactions on Magnetics*, 44:1190–1193, 2008.
- [13] Y. Zhang, K.R. Shao, Y. Guo, J.D. Lavers. A boundary meshless method for transient eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41:4090–4092, 2005.
- [14] E.E. Kriezis, T.D. Tsiboukis, S.M. Panas, J.A Tegopoulos. Eddy currents: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80:1559–89, 1992.

- [15] P. Silvester M.V.K Chari. *Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems*. Wiley, 1980.
- [16] David P. DeWitt Frank P. Incropera. *Fundamentos de Transferencia de Calor*. Pearson-Prentice Hall, 1999.
- [17] Yunus Cengel. *Heat Transfer*. McGraw-Hill, 2000.
- [18] A. Kameari. Three dimensional eddy current calculation using finite element method with $\vec{A} - \phi$ in conductor and \vec{O} in vacuum. *IEEE Transactions on Magnetism*, 24:118–121, 1988.
- [19] M. Enokizono, T. Todaka. Boundary element analysis for the three-dimensional eddy current problem. *IEEE Transactions on Magnetism*, 26:446–449, 1990.
- [20] Albert G. Guy. *Metalurgia Física para Ingenieros*. Fondo Educativo Interamericano, 1970.
- [21] Vacuumschmelze GmbH Richard Boll. *Soft Magnetic Materials, The Vacuumschmelze Handbook*. Heyden, 1979.
- [22] M. Clemes, E. Gjonaj, P. Pinder, T. Weiland. Self-consistent simulations of transient heating effects in electrical devices using the finite integration technique. *IEEE Transactions on Magnetism*, 37:3375–3379, 2001.
- [23] S.R. Naidu. Simulation of the hysteresis phenomenon using preisach’s theory. *IEEE Proceedings*, 137:73–79, 1990.
- [24] Jenó Takács. *Mathematics of hysteretic phenomena*. Wiley-Vhc, 2006.
- [25] J. Douglas Faires Richard L. Burden. *Análisis Numérico*. Thomson Learning, 2002.
- [26] P. Pfister, C. Koechli, M. Markovic y Y. Perriard. Analysis of hysteresis losses in synchronous permanent magnet motors. *IEEE Transactions on Magnetism*, 6:144, 2006.
- [27] Laurent Schwartz. *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*. Hermann, 1970.
- [28] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1989.
- [29] C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, D. Mari, J. Rappppaz, M. Swierkosz. Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries. *IEEE Transactions on Magnetism*, 33:739–745, 1997.
- [30] E.J.W. ter Maten, J.B.M. Melissen. Simulation of inductive heating. *IEEE Transactions on Magnetism*, 28:1287–1290, 1992.
- [31] L.Gong, R. Hagel, R. Unbehauen. On the nonlinear eddy current field coupled to the nonlinear heat transfer. *IEEE Transactions on Magnetism*, 29:1546–1549, 1993.
- [32] Aleksey Matveyev. *Principles of Electrodynamics*. Reinhold Publishing Corporation, 1966.
- [33] F. Dios Otín D. Artigas García J. Recolons Martos A. Comerón Tejero F. Canal Bienzobas. *Campos Electromagnéticos*. Alfaomega, 2000.
- [34] O. Biró, K. Preis. On the use of magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:3145–3158, 1989.
- [35] Ronald L. Ferrari Peter P. Silvester. *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1996.

- [36] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, K. Muramatsu, Z.G Cheng. Comparison of various methods for 3-d eddy current analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:3159–3161, 1988.
- [37] A.G. Kladas, J.A. Tegopoulos. A new scalar potential formulation of 3-d magnetostatics necessitating no source field calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28:1103–1106, 1992.
- [38] A. Kladas, J. Tegopoulos. 3d eddy currents modelling by means of a particular reduced scalar potential technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33:1350–1353, 1997.
- [39] K. Preis, O. Biró, I. Tícar. Fem analysis of eddy current losses in nonlinear laminated iron cores. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41:1412–1415, 2005.
- [40] L. Lin, C. Xiang. Analysis of 3d nonlinear eddy current problem using the field variables h and e directly. *IEEE transactions on Magnetics*, 33:1179–1184, 1997.
- [41] H. Tsuboi, T. Misaki. Three-dimensional analysis of eddy current distributions by the boundary element method using vector potentials. *IEEE Transactions on Magnetics*, mag-23:3044–3046, 1987.
- [42] T. Misaki, H. Tsuboi. Computation of 3-dimensional eddy current problems by using boundary element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, mag-21:2227–2230, 1985.
- [43] T. Morisue, H.N. Mondal. Electric charges induced in an eddy current field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31:1313–1318, 1995.
- [44] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara. Physical meaning of $\vec{\nabla}\phi$ in eddy current analysis using magnetic vector potentials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24:178–181, 1988.
- [45] M. Raugi. Influence of surface charges in the finite volume modeling of conductive regions for 3-d eddy-current computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39:1163–1166, 2003.
- [46] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations I: Basic Theory*. Springer, 1997.
- [47] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations*. Springer, 1997.
- [48] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2002.
- [49] Walter Rudin. *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, 1966.
- [50] Lutz Angerman Peter Knabner. *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*. Springer, 2003.
- [51] D. Labridis, P. Dokopoulos. Calculation of eddy current losses in nonlinear ferromagnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25:2665–2669, 1989.
- [52] T. Matsuo, Y. Osaka, M. Shimasaki. Eddy-current analysis using vector hysteresis models with play and stop hysterons. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36:1172–1177, 2000.
- [53] N. Burais, G. Grelet. Numerical modeling of iron losses in ferromagnetic steel plate. *IEEE Transactions on Magnetics*, mag-18:558–562, 1982.
- [54] D. Albertz, S. Dappen, G. Henneberger. Calculation of the 3d non-linear eddy current field in moving conductors and its application to braking systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:768–771, 1996.

- [55] A.M. El-Sawy Mohamed. Finite element variational formulation of the impedance boundary condition for solving eddy currents problems. *IEE Proc.Sci.Meas. Technol.*, 142:293–298, 1994.
- [56] B. Bandelier, F. Rioux-Damidau. Modeling of eddy currents in magnetic materials and laminated materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40:904–907, 2004.
- [57] I.E. Tarapov A.I. Borisenko. *Vector and Tensor Analysis*. Prentice-Hall, 1968.
- [58] S.V. Fomin A.Ñ. Kolmogorov. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. MIR-Moscú, 1972.
- [59] William Fulton. *Algebraic Topology, A first Course*. Springer, 1997.
- [60] B. Sawicki, J. Starzyński, S. Wincenciak. Numerical model of magnetic stimulation with metal implants. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42:783–786, 2006.
- [61] G. González. Aplicaciones del calentamiento por inducción electromagnética en el procesamiento de prfv. *PRFV/composites*, 1:1–8, 2005.
- [62] R. Cardoso, J. Assumppçao. 3d finite element solution of induction heating problems with efficient time-stepping. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27:4065–4068, 1991.
- [63] K. Aniserowicz, A. Skorek, C. Cossette, M. Zaremba. 3d finite element solution of induction heating problems with efficient time-stepping. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27:4065–4068, 1991.

Índice alfabético

word, 166