ÓRBITAS MARGINALMENTE ESTABLES PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS AXIALMENTESIMÉTRICAS CON DEFORMACIÓN CUADRIPOLAR

JOSE LUIS GONZALEZ ARANGO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA
2005

ÓRBITAS MARGINALMENTE ESTABLES PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS AXIALMENTESIMÉTRICAS CON DEFORMACIÓN CUADRIPOLAR

JOSE LUIS GONZALEZ ARANGO

Trabajo de grado para optar al titulo de físico

Director
DR. JOSE DAVID SANABRIA GÓMEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005

Al Amparo de mi madre, padre y hermanos.

Ellos me labraron un camino fácil.

Gracias.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. José David Sanabria Gómez

Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.

Dr. Marlio Paredes.

A los compañeros Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG).

A Zuley Jhojana y a todos mis amigos personales.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

TITLE: MARGINALLY STABLE ORBITS FOR METRIC AXIALLY SYMMETRICAL STATICS WITH DEFORMATION QUADRIPOLAR*

Author: José Luis González Arango**

Key words: quadrupole moment, orbits marginally stable, metric statics.

The first solution of the equations of field of Einstein was obtained by the German astrophysicist Karl Schwarzschild around year 1916. This solution represents the field of gravitation generated by a spherical mass without rotation. Nevertheless, in general, the astronomical objects are rotating bodies that are turned aside of their spherical symmetry, for such reason is necessary to study solutions of the equations of Einstein that can represent the field of gravitation generated by sources of these characteristics.

Erez and Rosen in the year of 1959 derived a static and axially symmetrical solution with multipole moments from the field equations that serve to describe the field of gravitation of sources that lack spherical symmetry. In addition, this solution is a generalization of the solution of Schwarzschild. Gutsunayev and Manko in 1985 presented a new solution the field equations, with characteristics similar to the obtained one by Erez-Rosen, and that also generalizes the solution of Schwarzschild.

The fundamental intention of this work is to use the equations of motion for the metric ones of Schwarzschild, Erez-Rosen and Gutsunayev-Manko, with the purpose of finding the orbit marginally stable of a test particle that is under the action of the corresponding field of gravitation. In addition, the influence of the parameter will study to cuadripolar, which characterizes the deformation of the source, on the orbits studied here.

** Faculty of Sciences. Program of Physics. Director. Dr. José David Sanabria Gómez

TITULO: ÓRBITAS MARGINALMENTE ESTABLES PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS AXIALMENTE SIMÉTRICAS CON DEFORMACIÓN CUADRIPOLAR*

Autor: José Luis González Arango**

Palabras claves: deformación cuadripolar, orbital marginalmente estable, métricas estáticas.

La primera solución de las ecuaciones de campo de Einstein fue obtenida por el astrofísico alemán Karl Scrwarzschild alrededor del año 1916. Esta solución representa el campo gravitacional generado por una masa esférica sin rotación. Sin embargo, en general, los objetos astronómicos son cuerpos rotantes que se desvían de su simetría esférica, por tal razón es necesario estudiar soluciones de las ecuaciones de Einstein que puedan representar el campo gravitacional generado por fuentes de dichas características.

Erez y Rosen en el año de 1959 derivaron una solución estática y axialmente simétrica con momentos multipolares de las ecuaciones de campo, que sirven para describir el campo gravitacional de fuentes que carecen de simetría esférica. Además, esta solución es una generalización de la solución de Schwarzschild. Gutsunayev y Manko en 1985 dieron a conocer una nueva solución de las ecuaciones de campo, con características similares a la obtenida por Erez-Rosen, y que también generaliza la solución de Schwarzschild.

El propósito fundamental de este trabajo es usar las ecuaciones de movimiento para las métricas de Schwarzschild, Erez-Rosen y Gutsunayev-Manko, con el fin de encontrar la órbita marginalmente estable de una partícula de prueba que está bajo la acción del campo gravitacional correspondiente. Además, se estudiará la influencia del parámetro cuadripolar, que caracteriza la deformación de la fuente, sobre las órbitas aquí estudiadas.

**Facultad de Ciencias. Programa de Física. Director. Dr. José David Sanabria Gómez

INTRODUCCIÓN

La primera solución de las ecuaciones de campo de Einstein fué obtenida por el astrofísico alemán Karl Scrwarzschild alrededor del año 1916. Esta solución representa el campo gravitacional generado por una masa esférica sin rotación. Sin embargo, en general, los objetos astronómicos son cuerpos rotantes que se desvían de su simetría esférica, por tal razón es necesario estudiar soluciones de las ecuaciones de Einstein que puedan representar el campo gravitacional generado por fuentes de dichas características. Erez y Rosen en el año de 1959 derivaron una solución estática y axialmente simétrica con momentos multipolares de las ecuaciones de campo, que sirven para describir el campo gravitacional de fuentes que carecen de simetría esférica. Además, esta solución es una generalización de la solución de Schwarzschild. Gutsunayev y Manko en 1985 dieron a conocer una nueva solución de las ecuaciones de campo, con características similares a la obtenida por Erez-Rosen, y que también generaliza la solución de Schwarzschild.

El propósito fundamental de este trabajo es usar las ecuaciones de movimiento para las métricas de Schwarzschild, Erez-Rosen y Gutsunayev-Manko, con el fin de encontrar la órbita marginalmente estable de una partícula de prueba que está bajo la acción del campo gravitacional correspondiente. Además, se estudiará la influencia del parámetro cuadripolar, que caracteriza la deformación de la fuente, sobre las órbitas aquí estudiadas.

1 ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

Albert Einstein postula su teoría gravitacional en términos de sus ecuaciones de campo, que representan la curvatura como una manifestación geométrica del campo gravitacional en función de la distribución de masa y energía, en cada punto del espacio-tiempo y tiene la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

Esta igualdad entonces involucra, las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (tensor de curvatura que se obtiene a partir de las segundas derivadas del tensor métrico), curvatura escalar R (se obtiene como una contracción del tensor de curvatura), el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$, que describe la configuración de masa y energía en un punto del espacio-tiempo y G que es la constante de gravitación (G=6,67$*$ $10^{-8}cm^3g^{-1}seg^{-1}$ en c.g.s). Las ecuaciones de campo (1.1), representan un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden, acopladas y no lineales. Como la solución es demasiado complicada,se debe simplificar el problema imponiendo criterios de simetría. Además de las simetrías, usualmente se reduce el problema si se resuelven las ecuaciones de Einstein en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$), se entiende este como ausencia de fuentes generadoras de campo gravitacional, es decir

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.2}$$

El tensor de Ricci, que es el encargado de describir la curvatura de una geometría determinada, se obtiene por la contracción del tensor de Riemman,

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}, \tag{1.3}$$

la expresión para el tensor de Riemann, o también llamado tensor de curvatura es [1],

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\,, \tag{1.4}$$

donde los $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ son los símbolos de Christoffel o transformación afín, y se relacionan con el tensor métrico de la siguiente manera

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right)\,, \tag{1.5}$$

entonces, en general, una vez determinado el tensor métrico se obtienen todas las cantidades: símbolos de Christoffel, tensor de curvatura y tensor de Ricci, que al igualarlo a cero definen las ecuaciones de campo de vacío que deben satisfacer el campo gravitacional.

1.1 Métrica estática axialmente simétrica

En un espacio-tiempo cuadridimensional $g_{\mu\nu}$ es una herramienta que permite determinar longitudes, a partir de las coordenadas de los puntos de dicho espacio-tiempo. Estas longitudes se denominan intervalos o elemento de línea y se definen en forma general como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Donde hay suma sobre indices repetidos y x^{μ}, x^{ν} son las coordenadas del sistema de referencia, que se escoge para un problema particular. En este trabajo en particular se imponen condiciones de simetría, en primera instancia, se asume que el tensor métrico es independiente del tiempo, es decir, el elemento de línea (1.6) queda invariante cuando se cambia el signo de la coordenada temporal, esta condición le otorga el carácter estático al espacio-tiempo [15]. Para asegurar este hecho, los diferenciales temporales en el intervalo (1.6) deben ser cuadráticos, luego

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

Ahora el elemento de línea (1.7) se muestra dividido esencialmente en dos partes, un término temporal y el otro espacial, entonces resta con otorgarle el carácter de axialmentesimétrico, es decir, el intervalo es invariante a una rotación sobre el eje de simetría. Si se escoge $x^1 = \phi$, como la coordenada que representa el ángulo axial (1.7)

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}d\phi^2 + g_{AB}dx^A dx^B \qquad A, B = 2, 3. \tag{1.8}$$

Entonces, g_{AB} caracteriza el tensor métrico de una variedad bidimensional, y su elemento de línea tiene la forma

$$dl^2 = g_{AB}dx^A dx^B. \tag{1.9}$$

Toda variedad bidimensional, se puede relacionar con un plano por un elemento matemático que se denomina transformación conforme [6], la cuál permite representar (1.9) de la siguiente forma

$$dl^2 = F(\rho, z)(d\rho^2 + dz^2), \tag{1.10}$$

donde $x^2 = \rho$ y $x^3 = z$ son coordenadas cilíndricas y se introducen porque se ajusta perfectamente a la simetría axial. $(d\rho^2 + dz^2)$ es el elemento del línea del plano, y la función $F(\rho, z)$ manifiesta la curvatura del plano bidimensional. Ahora al incluir (1.9)(1.10) en (1.8) se obtiene

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}d\phi^2 + F(\rho, z)(d\rho^2 + dz^2), \tag{1.11}$$

con la nueva forma que adopta el elemento de línea, de las diez componentes independientes del tensor métrico, quedan tan solo las de la diagonal, las otras han desaparecido en virtud de las simetrías impuestas.

Ahora, la misión es explorar la forma explícita de los elementos g_{00}, g_{11} y $F(\rho, z)$. Para este fin se parte del hecho de que el elemento de línea (1.11), debe reducir a el elemento de línea de Minkowski en el infinito espacial, es decir, el campo gravitacional se debe anular a grandes distancias de la fuente que genera dicho campo, o también, es asintóticamente plano. La métrica de Minkowiski en coordenadas cilíndricas se escribe de la siguiente manera

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2 d\phi^2 + (d\rho^2 + dz^2) \qquad \text{cuando} \qquad \rho, z \to \infty, \tag{1.12}$$

ahora si se hace la comparación de (1.11) y (1.12) se obtiene

$$\lim_{\rho,z\to\infty} g_{00} = -1, \qquad \lim_{\rho,z\to\infty} g_{11} = \rho^2, \qquad \lim_{\rho,z\to\infty} F(\rho, z) = 1, \tag{1.13}$$

se concluye de las condiciones anteriores que g_{00} y $F(\rho, z)$ deben tener una forma tal que: en el infinito tiendan a -1 y 1 respectivamente. Se definen dos funciones reales de ρ y z, $\psi(\rho, z)$ $w(\rho, z)$, que cumplan.

$$\lim_{\rho,z\to\infty} \psi(\rho, z) = 0, \qquad \lim_{\rho,z\to\infty} w(\rho, z) = 0, \tag{1.14}$$

se puede tomar a g_{00} y $F(\rho, z)$ de la siguiente manera.

$$g_{00} = -e^{\psi(\rho,z)}, \qquad F(\rho, z) = e^{w(\rho,z)}, \tag{1.15}$$

y de esta manera satisfacer (1.13). Ahora bien, el determinante del tensor métrico (1.11) es $g_{00} = -e^{\psi} g_{11} F^2(\rho, z)$ y para (1.12) $g_{00} = -\rho^2$ es decir

$$\lim_{\rho,z\to\infty} -e^{\psi} g_{11} F^2(\rho, z) = -\rho^2, \tag{1.16}$$

y según [7] se llega a

$$g_{11} = \rho^2 e^{-}\psi(\rho, z), \tag{1.17}$$

de esta manera, se concluye que el elemento de línea (1.11) toma la forma

$$ds^2 = -e^{\psi(\rho,z)} dt^2 + \rho^2 e^{-\psi(\rho,z)} d\phi^2 + e^{w(\rho,z)}(d\rho^2 + dz^2), \tag{1.18}$$

si se define además, $w(\rho, z) = \gamma(\rho, z) - \psi(\rho, z)$ finalmente se obtiene

$$ds^2 = -e^{\psi(\rho,z)} dt^2 + e^{-\psi(\rho,z)}[\rho^2 d\phi^2 + e^{\gamma(\rho,z)}(d\rho^2 + dz^2)], \tag{1.19}$$

que es la expresión estándar para el elemento de línea estático y axialmentesimétrico. Para este elemento de línea y usando (1.2) las ecuaciones de campo de Einstein son

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \psi_{,zz} = 0, \tag{1.20}$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho(\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,z}^2), \tag{1.21}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z}, \tag{1.22}$$

donde $x_{,\rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho}$ denota derivación parcial. La ecuación (1.20) es la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para la función ψ y su solución es ampliamente estudiada [8]. El sistema (1.21) y (1.22) es un sistema sobredeterminado, es decir, dos ecuaciones diferenciales para una sola función γ. La integrabilidad de γ está garantizada por la condición [7]

$$\gamma_{,\rho z} = \gamma_{,z\rho}. \tag{1.23}$$

Para este trabajo en particular y teniendo en cuenta la simetría de la fuente, que se supone representa las soluciones que se estudiarán (Erez-Rosen y Gutsunayev-Manko), se define el elemento de línea (1.19) en el sistema de coordenadas prolatas, que se relaciona con las coordenadas cilíndricas de Weyl como sigue

$$\rho^2 = m^2(u^2-1)(1-v^2), \tag{1.24}$$

$$z = muv, \tag{1.25}$$

donde m es una constante y se puede asociar con la masa de la fuente que genera el campo gravitacional. Los rangos de las coordenadas u y v son

$$u \geq 1, \qquad -1 \leq v \leq 1, \tag{1.26}$$

entonces se toman u y v como las nuevas variables independientes, y el elemento de línea (1.19) toma la forma [1].

$$\begin{aligned} ds^2 = \quad & e^{2\psi(u,v)}dt^2 - e^{-2\psi(u,v)}(u^2-1)(1-v^2)d\phi^2 \\ & -e^{2(\gamma(u,v)-\psi(u,v))}(u^2-v^2)\left(\frac{du^2}{u^2-1}+\frac{dv^2}{1-v^2}\right), \end{aligned} \tag{1.27}$$

para (1.27) las ecuaciones de campo en el vacío se reducen a:

$$[(u^2-1)\psi_{,u}]_{,u} + [(1-v^2)\psi_{,v}]_{,v} = 0, \tag{1.28}$$

$$\gamma_{,u} = \left(\frac{1-v^2}{u^2-v^2}\right)[u(u^2-1)\psi_{,u}^2 - u(1-v^2)\psi_{,v}^2 - 2v(u^2-1)\psi_{,u}\psi_{,v}], \tag{1.29}$$

[1]Donde se usan unidades naturales, es decir, $c = G = 1$, además, usualmente se toma la masa unitaria, $m = 1$

$$\gamma_{,v} = \left(\frac{u^2-1}{u^2-v^2}\right)[v(u^2-1)\psi_{,u}^2 - v(1-v^2)\psi_{,v}^2 + 2u(u^2-1)\psi_{,u}\psi_{,v}]. \tag{1.30}$$

.

1.2 Órbita marginalmente estable para el caso estático axialmente simétrico

Como textualmente lo indica su nombre esta órbita representa: *la última órbita circular, mas cercana, de una partícula de prueba que está bajo la acción del campo gravitacional, generado por una fuente estática y axialmentesimétrica. Además, la estabilidad de dicha órbita es muy sensible a pequeñas perturbaciones radiales del potencial efectivo.* . Los criterios aplicados para hallar el radio de dicha órbita se encuentran en el trabajo de Bardeen(1970)[9].

Las cantidades conservadas, sirven para determinar completamente la trayectoria de partículas de prueba. La independencia temporal de la métrica, y además, la independencia con respecto al ángulo axial, implica que $x^0 = t$ y $x^1 = \phi$ sean coordenadas ignorables, lo que permite definir las constantes de movimiento asociadas a ellas como cantidades que se conservan, entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{p_t}{m} = -E, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{p_\phi}{m} = L, \tag{1.31}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula, E y L son la energía y momento angular por unidad de masa, respectivamente, y $\mathcal{L}$ es el Lagrangiano del sistema. Se define entonces p_α como el cuadrimomento por unidad de masa [1] y esta dado por la siguiente expresión

$$p_\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \tag{1.32}$$

según la relación anterior

$$p_\alpha p^\alpha = g_{\alpha\beta} p^\alpha p_\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \tag{1.33}$$

y por (1.6) se cumple que,

$$p_\alpha p^\alpha = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2, \tag{1.34}$$

como puede observarse en [10], la relación $p^\alpha p_\alpha = -m^2 = -1$ por lo que

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = -1. \tag{1.35}$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, se procede a buscar la expresión que permita estudiar la geodésica de las partículas de la siguiente manera: Sobre el plano ecuatorial ($v = 0$) el elemento de línea (1.27) toma la forma.

$$ds^2 = \quad e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\psi}(u^2 - 1) d\phi^2 - e^{\gamma - \psi} u^2 \left(\frac{du^2}{u^2 - 1}\right), \tag{1.36}$$

si se define λ como un parámetro afín o parámetro de evolución del sistema, y usando la notación:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}, \qquad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda}, \qquad \dot{u} = \frac{du}{d\lambda}, \tag{1.37}$$

y además es conocido que el Lagrangiano del sistema tiene la forma[1]

$$2\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2. \tag{1.38}$$

Ahora al dividir (1.36) entre $d\lambda^2$ este se reduce a

$$2\mathcal{L} = e^{2\psi} \dot{t}^2 - e^{-2\psi}(u^2 - 1)\dot{\phi}^2 - e^{2(\gamma - \psi)} u^2 \left(\frac{\dot{u}^2}{u^2 - 1}\right), \tag{1.39}$$

si se toman las consideraciones en (1.31), y al usar las ecuaciones de Euler-Lagrange se concluye que

$$p_t = e^{2\psi}\dot{t} = -E, \tag{1.40}$$

$$p_\phi = -e^{2\psi}\dot{\phi}(u^2 - 1) = L, \tag{1.41}$$

es decir

$$\dot{t} = -Ee^{-2\psi}, \tag{1.42}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{Le^{-2\psi}}{(u^2 - 1)}. \tag{1.43}$$

Al reemplazar (1.42) y (1.43) y con las relaciones (1.35) y (1.38) en (1.39) y ordenando la expresión finalmente resulta

$$\frac{\dot{u}^2}{u^2 - 1} = \frac{e^{2(\psi-\gamma)}}{2u^2}\left\{1 - E^2e^{-2\gamma} + \frac{e^{2\gamma}L^2}{u^2 - 1}\right\}, \tag{1.44}$$

de donde se definirá $V(u)$ como el *Potencial efectivo*, el cual permitirá estudiar las geodésicas de las partículas, que se mueven sobre el plano ecuatorial alrededor de la fuente

$$V(u) = \frac{e^{2(\psi-\gamma)}}{2u^2}\left\{1 - E^2e^{-2\gamma} + \frac{e^{2\gamma}L^2}{u^2 - 1}\right\}. \tag{1.45}$$

Si la órbita es circular ρ es constante[2], y entonces es sencillo ver que

[2]Es obvio que ρ constante implica que u es constante, cuando v es cero, por la definición de la transformación coordenada.

$$\dot{u} = \frac{du}{d\lambda} = 0, \tag{1.46}$$

teniendo en cuenta la manera como fue definido el potencial en (1.45), y con la condición anterior se puede concluir para el caso de ρ constante que

$$V(u) = 0, \tag{1.47}$$

en este orden, y para garantizar que el potencial tenga puntos críticos, surge la siguiente condición

$$\frac{dV(u)}{du} = 0, \tag{1.48}$$

las dos ecuaciones (1.47) y (1.48) deben entonces cumplirse de forma simultanea para garantizar un valor de ρ constante, además, puntos críticos que son de interés particular para este trabajo [9]. Entonces de la condición (1.47) y (1.48) se obtiene explícitamente

$$V(u) = \frac{e^{2(\psi-\gamma)}}{2u^2}\left\{1 - E^2 e^{-2\gamma} + \frac{e^{2\gamma}L^2}{u^2-1}\right\} = 0, \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}\frac{dV(u)}{du} &= e^{-2\gamma}(e^{4\psi}(2u^2 + (u-1)(u+1)(\gamma_{,u} - 2\psi_{,u})u - 1) \\ & L^2 - e^2(u^2-1)^2(u\gamma_{,u}+1) + e^{2\psi}(u^2-1)^2(u\gamma_{,u} - u\psi_{,u}+1)) = 0\end{aligned} \tag{1.50}$$

Al resolver estas dos últimas ecuaciones para E y L, energía y momento angular respectivamente, se obtienen las expresiones.

$$E = -e^{\psi}\sqrt{\frac{(u^2-1)\,\psi_{,u} - u}{2\,(u^2-1)\,\psi_{,u} - u}}, \tag{1.51}$$

$$L = -\frac{\sqrt{-\left(u^2-1\right)^2 \psi_{,u}}}{\sqrt{e^{2\psi}\left(2\left(u^2-1\right)\psi_{,u}-u\right)}}, \tag{1.52}$$

que son la energía y momento angular que posee la partícula de prueba, que tiene una órbita circular, con radio ρ, estable o no. Note que si ρ=ρ_{ome}, donde ρ_{ome} es el radio de la *órbita marginalmente estable*, se obtiene la energía y el momento angular mínimo para que se produzcan órbitas circulares. Entonces, el radio ρ_{ome} también minimiza la energía y momento angular para órbitas circulares estables.

Si se quiere garantizar la estabilidad de la órbita debe cumplirse que [9].

$$\frac{d^2V}{du^2} < 0, \tag{1.53}$$

entonces, la última órbita estable se da cuando

$$\frac{d^2V}{du^2} = 0, \tag{1.54}$$

en definitiva, reemplazando (1.51) y (1.52) en (1.47) y aplicando las condiciones (1.54), resulta la expresión

$$\frac{e^{2\psi-2\gamma}\left(\psi_{,u}\left(3u^2+2\left(u^2-1\right)\psi_{,u}\left(2\left(u^2-1\right)\psi_{,u}-3u\right)+1\right)+u\left(u^2-1\right)\psi_{,uu}\right)}{u^2\left(u^2-1\right)\left(2\left(u^2-1\right)\psi_{,u}-u\right)} = 0, \tag{1.55}$$

cuya solución proporciona el *radio de la órbita marginalmente estable*.

2 SOLUCIÓN DE SCHWARZCHILD

Muchos cuerpos celestes tienen distribuciones de masa con simetría esférica, como por ejemplo, estrellas rotando lentamente, planetas y grupos globulares. La solución de las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo gravitacional generado por una fuente de este tipo, es la solución de Schwarzschild(1915). La expresión para el intervalo cuadridimensional asociado con esta geometría es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{2.1}$$

donde M es constante, y se interpreta como las masa de la fuente que genera el campo gravitacional [1]. La intension particular de este trabajo, se centra en encontrar ρ_{ome}, cálculo que se reproduce en varios libros para esta métrica [1], [10], [11], [12], sin embargo, para no romper la secuencia del texto y como prueba del planteamiento anterior, se hará el calculo según la sección (1.39).

Entonces partiendo del elemento de línea (2.1) definido en el plano ecuatorial,es decir, $z = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, el intervalo se reduce a

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \tag{2.2}$$

que al dividir por $d\lambda^2$ y por la relación (1.38) y la notación (1.37) el elemento de línea toma la forma

$$2\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \tag{2.3}$$

entonces se encuentran las constantes de movimiento, respecto de las coordenadas ignorables que según (1.40) y (1.41) son

$$E = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}, \tag{2.4}$$

$$L = r^2\dot{\phi}, \tag{2.5}$$

que al resolver el sistema trivial de ecuaciones, (2.4) y (2.5), para $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$ resulta

$$\dot{t} = E\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \tag{2.6}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \tag{2.7}$$

al usar (1.38) y (1.35) en (2.9) y reemplazando las expresiones para $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$, resulta que

$$\dot{r}^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2 - \frac{L^2}{r^2} - 1, \tag{2.8}$$

donde se define nuevamente el *potencial efectivo* $V(r)$ como

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2 - \frac{L^2}{r^2} - 1, \tag{2.9}$$

si se aplican las condiciones, (1.47) y (1.48) se obtiene el par de ecuaciones

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2 - \frac{L^2}{r^2} - 1 = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{2M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}E^2+\frac{2L^2}{r^3}=0, \tag{2.11}$$

que al solucionarlo para E y L, respectivamente, resulta que

$$E=\left(\frac{4M^2-4Mr+r^2}{(r-3M)r}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.12}$$

$$L=\left(\frac{Mr^2}{r-3M}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.13}$$

ahora bien, reemplazar $E(r)$ y $L(r)$ en la expresión (2.10), y aplicando el criterio de estabilidad (1.54) conduce a

$$\frac{d^2V}{dr^2}=\frac{2M(6M-r)}{r^2(6M^2-5Mr+r^2)}=0, \tag{2.14}$$

la solución para la ecuación, es entonces, $r_{ome}=6M$ o como se denota en la literatura, $r_{ome}=3r_s$ (donde r_s es el radio de Shwarzschild). Note que al reemplazar r_{ome} en (2.12) el valor de $E_{min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $L_{min}=2\sqrt{3}$, tomando M=1, es decir, solo existen órbitas circulares estables, para valores mayores de E_{min} y L_{min}.

3 SOLUCIONES CON DEFORMACIÓN CUADRIPOLAR

3.1 Solución de Gutsunayev-Manko

Gutsunayev y Manko(1985) descubrieron una nueva propiedad de (1.28)-(1.30) que usaron para hallar una nueva solución, a partir de una ya conocida ψ_0, introduciendo.

$$\psi = \psi_0 + A_n \hat{L_n} \psi_0, \tag{3.1}$$

dentro de (1.28), se puede ver que ψ es una solución de la ecuación, entonces, A_n es una constante y $\hat{L_n}$ representa el operador diferencial.

$$\hat{L_n} = \{\frac{v(u^2-1)\partial_u + u(1-v^2)\partial_v}{u^2-v^2}\}^n, \tag{3.2}$$

donde $n = 1, 2, 3, ...$ esta notación denota, el operador entre corchetes actuando sobre la función ψ_0. Se genera una solución ψ para cada valor de n. Gutsunayev y Manko usaron la métrica de Schwarzschild.

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1}, \tag{3.3}$$

obteniendo una solución con momento cuadripolar, a través del operador (3.2) con $n = 2$, entonces

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + A_2\frac{u(u^2-3u^2v^2+3v^2-v^4)}{(u^2-v^2)^3}, \tag{3.4}$$

y calcularon la correspondiente función γ dada por

$$\begin{aligned}\gamma = \quad & \frac{1}{2}\ln\frac{u^2-1}{u^2-v^2} + \frac{A_2(1-v^2)}{2(u^2-v^2)^4}[3(1-5v^2)(u^2-v^2)^2 \\ & +8v^2(3-5v^2)(u^2-v^2)+24v^4(1-v^2)] + \frac{A_2^2(1-v^2)}{8(u^2-v^2)^8} \\ & \times[-12(1-14v^2+25v^4)(u^2-v^2)^5+3(3-153v^2+697v^4-675v^6) \\ & +32v^2(9-105v^2+259v^4-171v^6(u^2-v^2)^3 \\ & +32v^4(45-271v^2+451v^4-225v^6)(u^2-v^2)^2 \\ & +2304v^6(1-4v^2+5v^4-2v^6)(u^2-v^2) \\ & +1152v^8(1-3v^2+3v^4-v^6)],\end{aligned} \tag{3.5}$$

en este punto, es necesario calcular la expansion asintótica de $g_{tt} = e^{2\psi}$, para encontrar como esta definido el momento cuadripolar, para este fin, se introducen coordenadas esféricas

$$u = \frac{r}{m} - 1, \qquad v = \cos\theta, \tag{3.6}$$

entonces, la expansión asintótica $r \to \infty$ y $v = cos\theta$ esta métrica conduce al potencial Newtoniano[1]

$$\begin{aligned}g_{tt} = \quad & 1 + 2\Big\{-\frac{m}{r} - \frac{Q}{r^3}P_2(\cos\theta) - \frac{9mQ}{r^4}P_2(\cos\theta) + \frac{9}{14}\frac{Qm^2}{r^6}P_2(\cos\theta) \\ & + \frac{1}{r^{6.....}}\Big\},\end{aligned} \tag{3.7}$$

[1]El potencial gravitacional Newtoniano esta dado por $-G\sum_{l=0}^{\infty}\frac{M_l}{r^{l+1}}P_l(Cos\theta)$

3.1.1. Órbita marginalmente estable

En el caso de las soluciones de Gutsunayev-Manko, la energía y el momento angular para que ocurran órbitas circulares, se determina a partir de las ecuaciones, (1.51) y (1.52), luego

$$E_{GM} = \frac{e^{A/u}\sqrt{\frac{(u-1)^2(u^2+Au+A)}{u+1}}}{\sqrt{(u-2)u^2+2A\left(u^2-1\right)}}, \tag{3.8}$$

$$L_{GM} = e^{-\frac{A}{u}}\sqrt{-\frac{(u+1)^2\left(A\left(u^2-1\right)-u^2\right)}{(u-2)u^2+2A\left(u^2-1\right)}}, \tag{3.9}$$

con estas expresiones y usando (1.55) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} &e^{\frac{A(12Au^{30}-9Au^{28}+8u^3-12)}{4u^4}}((5-u)u^6+A(u^3-11u^2+3u+15)u^4 \\ &+6A^2(u+1)^2(u^2-3u+2)u^2+4A^3(u-1)^2(u+1)^3)=0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

como se mencionó en la sección 1.2 resta con resolver la ecuación (3.10) para distintos valores de A. Sin embargo, la solución no arrojó resultados que fueran de nuestro interés físico en particular, puesto que la ecuación no tiene raíces reales, excepto para el caso $A_2 = 0$, que es el caso particular en el que no hay deformación, y la métrica de Gutsunayev-Manko se reduce a la métrica de Schwarzschild.[2]

3.2 Solución de Erez-Rosen

El sistema de ecuaciones (1.28)-(1.30) fue resuelto por Erez-Rosen(1959) por el método de separación de variables

[2]Se esperaba que cuando $A_2 = 0$ la métrica de Gutsunayev-Manko reportara este resultado, pues se partió del supuesto que era una generalización de la métrica de Schwarzschild.

$$\psi(u,v) = A(u)B(v), \tag{3.11}$$

donde $A(u)$ y $B(v)$ son funciones de u y v, respectivamente, usando (3.11) en (1.28) se obtiene las siguientes dos ecuaciones

$$[(u^2-1)A_{,u}]_{,u} - \alpha A = 0, \tag{3.12}$$

$$[(1-v^2)B_{,v}]_{,v} + \alpha B = 0, \tag{3.13}$$

donde α es una constante de separación. Una solución para (3.13) que se comporta bien, es dada por los polinomios de Legendre $P_l(v)$ si se toma $\alpha = l(l+1)$ con $l = 0,1,2,3,..,$ y además, la solución para (3.12) esta dada por las funciones de Legendre de segundoa clase $Q_l(u)$ con $l = 0,1,2,3,...$

La solución general para (1.28) esta dada por [4]

$$\psi(u,v) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \psi_l(u,v), \tag{3.14}$$

donde

$$\psi_l(u,v) = P_l(v)Q_l(u), \tag{3.15}$$

en la ecuación anterior no hay suma sobre l. Un caso particular se obtiene cuando, por ejemplo, $l = 0$ entonces

$$\psi_0(u,v) = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}, \tag{3.16}$$

la elección de (3.16) equivale a cambiar

$$A(u) = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}, \qquad B(v) = 1,$$

al lado izquierdo de (3.11) y como $\alpha = l(l+1)$ cuando $l = 0$ entonces $\alpha = 0$ en (3.12)-(3.13), y además al incluir en (1.29)-(1.30) la función $\gamma(u,v)$ es de la siguiente forma.

$$\gamma_0(u,v) = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2-1}{u^2-v^2}, \tag{3.17}$$

esta solución es realmente la métrica de Schwarzschild, si se hace el cambio de coordenadas u, v a coordenadas esféricas r, θ.

Con la solución general (3.14) se puede construir una nueva solución de la forma [13]

$$\psi = \psi_0 + q_l\psi_l, \tag{3.18}$$

donde $l \neq 0$ y q_l es una constante arbitraria. Esta solución se puede considerar como una generalización del campo de Schwarzschild, y puede interpretarse físicamente como el campo gravitacional de un cuerpo, que posee un multipolo de masa de orden l, además de su masa. El caso mas simple después del campo de Schwarzschild es cuando $l = 2$, entonces la solución describe el campo gravitacional de un objeto que tiene estructura cuadripolar. [3] En este caso, Erez y Rosen [2] calcularon que ψ y γ tiene la forma.

$$\begin{aligned}\psi &= P_0(v)Q_0(-u) + q_2P_2(v)Q_2(-u),\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{2}q_2(3v^2-1)\left[\frac{1}{4}(3u^2-1)\ln\frac{u-1}{u+1} + \frac{3}{2}u\right],\end{aligned} \tag{3.19}$$

y

[3] Notese que $l = 1$ no se tiene en cuenta, puesto que representaría un dipolo de masa.

$$\begin{aligned}\gamma = \quad & \frac{1}{2}(1+q_2)^2 \ln \frac{u^2-1}{u^2-v^2} - \frac{3}{2}q_2(1-v^2)\left[u \ln \frac{u-1}{u+1} + 2\right] \\ & \frac{9}{16}q_2^2(1-v^2)\Big[u^2 + 4v^2 - 9u^2v^2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}(u^2-1)(u^2 \\ & v^2 - 9u^2v^2 - 1)\ln^2 \frac{u-1}{u+1}\Big],\end{aligned} \tag{3.20}$$

la función γ es asintóticamente plana [4] y se puede ver para cuando u tiende a infinito, la función γ tiende a cero. Para calcular la expansion asintótica de $g_{tt} = e^{2\psi}$, se introducen coordenadas esféricas.

$$u = \frac{r}{m} - 1, \qquad v = \cos\theta, \tag{3.21}$$

el limite para cuando r tiende a infinito, conduce a

$$\begin{aligned}g_{tt} = \quad & 1 + 2\Big\{ - \frac{m}{r} - \frac{Q}{r^3}P_2(\cos\theta) - \frac{9mQ}{r^4}P_2(\cos\theta) + \frac{9}{14}\frac{Qm^2}{r^6}P_2(\cos\theta) \\ & + \frac{1}{r^{6.....}}\Big\},\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde se usa la notación, $Q = \frac{2m^3q}{15}$ y Q es el momento cuadripolar. es decir, coincide con el potencial Newtoniano de la métrica de Gutsunayev-Manko con la redefinición del parámetro $A_2 = q/15$.

3.2.1. Órbita marginalmente estable

Ahora, al igual que con Gutsunayev-Manko, se procede a particularizar las soluciones obtenidas en la sección 1.2. En este caso, la energía y el momento angular de la partícula de prueba para que ocurran órbitas circulares son.

$$E_{ER} = \frac{\sqrt{\frac{e^{\frac{3qu}{2}}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\frac{1}{4}(3qu^2+q)}\left(6qu^2+3q(u^2-1)\log\left(\frac{u-1}{u+1}\right)u+4u-4q-4\right)}{u(u^2-1)}}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{3qu}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\frac{3qu^2}{2}}\left(2(u+q(3u^2-2)-2)+3qu(u^2-1)\log\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right)}{(u-1)^2u}}}, \tag{3.23}$$

$$L_{ER} = e^{\frac{3q}{4}}(\frac{u-1}{u+1})^{-q/4}\sqrt{-(\frac{u-1}{u+1})^{\frac{1}{4}(3qu^2+q)}(u+1)^2(q(6u^2-4)+3qu(u^2-1)\log(\frac{u-1}{u+1})-4)}, \tag{3.24}$$

y entonces se resuelve la ecuación para distintos valores de q, que como se mencionó anteriormente, representa el parámetro que determina la deformación cuadripolar de la fuente que genera el campo gravitacional. Es decir, buscar las raíces de la expresión.

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{3}{32}q(3q_2(u^2-1)^2\log^2\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+16(u+4)+3q_2(4u^2-3))}\left(1-\frac{1}{u^2}\right)^{-q_2(q_2+2)} \\
&\times\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{-\frac{1}{8}q_2((9q_2+6)u^2-3(5q_2+8)u-2)}(27q_2^3u^3(u^2-1)^3\log^3\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+ \\
&+54q_2^2u^2(u^2-1)^2(u+q_2(3u^2-2)-2)\log^2\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+12q_2u(u^2-1)(3q_2^2(2-3u^2)^2 \\
&+4(u^2-3u+3)+6q_2(3u^3-6u^2-2u+4))\log\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+8(q_2^3(3u^2-2)^3 \\
&+3q_2^2(u-2)(2-3u^2)^2-2(u^2-6u+5) \\
&+2q_2(6u^4-18u^3+14u^2+12u-13)))=0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

La métrica de Erez-Rosen y Gutsunayev-Manko generalizan la solución de Schwarzschild. Además, estás dos soluciones comparten sus primeros momentos multipolares, como se puede ver a continuación [4]

$$
\begin{aligned}
M_0^{GM} &= M_0^{ER} = m, \\
M_1^{GM} &= M_1^{ER} = 0, \\
M_2^{GM} &= M_2^{ER} = \frac{2}{15} q_2 m^3, \\
M_3^{GM} &= M_3^{ER} = 0, \\
M_4^{GM} &= -3 M_4^{ER} = \frac{4}{35} q_2 m^5, \\
M_5^{GM} &= M_5^{ER} = 0, \\
M_6^{GM} &= M_6^{ER} - \frac{2}{17}\frac{817}{33} m^2 M_4^{ER} = \frac{2}{15}\frac{4}{231} q_2 m^7 \left(\frac{194}{7} + \frac{14}{15} q_2\right), \\
M_7^{GM} &= M_7^{ER} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

esta similitud en los momentos multipolares, conduce a pensar que ambas soluciones describen, en primera instancia, el campo gravitacional de una fuente con deformación cuadripolar, lo que indicaría que los resultados para sus *radios de la órbitas marginalmente estables* pueden ser similares.

4 ANÁLISIS DE DATOS

En la tabla 4.1, se muestran los resultados obtenidos para la métrica de Erez-Rosen y Gutsunayev-Manko para diferentes valores de m, masa de la fuente, r_{ome}, radio de la órbita marginalmente estable, q, parámetro que caracteriza la deformación cuadripolar de la fuente, E_{min}, energía para la última órbita circular estable, L_{min}, momento angular para la última órbita circular estable. En la tabla 4.1 se observa, como se comentó en la sección 3.1.1, que no hay soluciones en el caso de Gutsunayev-Manko que tengan interés físico para r_{ome}, [1] puesto que las raíces de (3.10) no son reales.

masa Km	$A = \frac{q}{15}$	$r_{ome}ER$ Km	L_{ER}	E_{ER}	$r_{ome}GM$ Km
2,070	0	12,421	3,464	0,942	12,421
2,305	10,423	16,390	3,666	0,950	–
2,073	1,272	12,806	3,495	0,944	–
2,079	2,763	13,230	3,528	0,945	–
2,085	4,482	12,034	3,598	0,949	–
2,089	6,247	14,076	3,596	0,947	–
2,095	7,804	14,424	3,624	0,948	–
2,099	9,429	14,756	3,651	0,949	–
2,104	11,101	15,079	3,677	0,95	–
2,108	12,319	15,314	3,695	0,951	–
2,111	13,558	15,534	3,713	0,951	–
2,660	0	15,965	15,95	0,942	15,965
2,886	−6,16	19,423	3,595	0,947	–
2,666	−0,328	16,127	3,472	0,943	–
2,677	−0,859	16,389	3,485	0,943	–
2,688	−1,659	16,745	3,503	0,944	–
2,703	−2,739	28,506	3,854	0,958	–
2,716	−3,743	17,527	3,548	0,946	–
2,752	−7,121	18,773	3,612	0,948	–
2,826	−1,85	17,669	3,508	0,944	–
2,829	−2,095	17,774	3,513	0,944	–
2,885	−5,988	19,365	3,591	0,947	–

Tabla 4.1: Datos de *radios de las órbitas marginalmente estables*, para diferentes valores del parámetro deformación cuadripolar de la fuente y diferentes masas.

[1] Excepto cuando $A = \frac{q}{15} = 0$ el r_{ome} para las dos soluciones reduce a: $r_{ome}^{GM} = r_{ome}^{ER} = r_{ome} = 6M$ que se obtuvo para la solución de Schwarzschild.

Los datos para r_{ome}^{ER} y r_{ome}^{GM} se obtuvieron, como se ha comentado anteriormente, hallando las raíces correspondientes a las ecuaciones 3.10 y 3.25 en el programa *Mathematica 5.1* respectivamente. Los valores de E_{ER} y L_{ER} reemplazando el respectivo r_{ome}, en las expresiones 3.23 y 3.24.

En la tabla 4.2, están relacionados, los r_{ome} para una masa, con diferentes deformaciones cuadripolares, en el caso de la solución de Erez-Rosen. Se puede ver que para una valor mayor a $q = 5{,}80$ no hay raíces de la función 3.25.

$m = 1{,}402M_\odot$			
q	$r_{ome}(Km)$	L_{min}	E_{min}
−13,558	15,230	3,713	0,951
−12,319	15,035	3,695	0,951
−11,101	14,835	3,677	0,950
−10,423	14,721	3,666	0,95
−9,429	14,548	3,651	0,949
−7,804	14,251	3,624	0,948
−6,160	13,929	3,595	0,947
−6,247	13,947	3,596	0,947
−4,482	14,022	3,5655	0,946
−2,763	13,174	3,528	0,945
−2,739	13,168	3,527	0,945
2,070	−1,659	3,503	0,944
−1,272	12,788	3,495	0,944
−0,859	12,673	3,485	0,943
−0,328	12,520	3,472	0,943
0	12,421	3,464	0,942
0.328	12.318	3.455	0.942
0.859	12.145	3.441	0.941
1.272	12.004	3.430	0.941
1.659	11.865	3.419	0.940
2.739	11.434	3.385	0.939
2.763	11.423	3.384	0.939
3.1	11.271	3.373	0.938
3.285	11.183	3.367	0.938
3.74	10.950	3.3505	0.937
4.426	10.536	3.323	0.936
4.482	10.498	3.320	0.935
5	10.090	3.296	0.934
5.29	9.794	3.281	0.933

Tabla 4.2: *Radios de las órbitas marginalmente estables*, para una masa $m = 1{,}402M_\odot$ con diferentes deformaciones cuadripolares.

En la tabla 4.3, están relacionados, los r_{ome} para una masa, con diferentes deformaciones cuadripolares, en el caso de la solución de Erez-Rosen. Se puede ver que para una valor mayor a $q = 5{,}85$ no hay raíces de la función 3.25.

$m = 1{,}9162M_{\odot}$			
q	$r_{ome}(Km)$	L_{min}	E_{min}
-7.121	19.295	3.612	0.948
-6.247	19.058	3.596	0.947
-6.160	19.034	3.595	0.947
-5.988	18.987	3.591	0.947
-4.482	18.549	3.563	0.946
-3.743	18.320	3.548	0.94
-2.763	18.002	3.528	0.945
-2.739	17.994	3.527	0.945
-2.095	17.773	3.513	0.944
-1.850	17.686	3.508	0.944
-1.659	17.618	3.503	0.944
-0.328	17.108	3.472	0.943
-0.859	17.318	3.485	0.943
-1.272	17.475	3.495	0.944
0	16.974	3.464	0.942
0.859	16.599	3.441	0.941
1.272	16.406	3.430	0.941
1.850	16.118	3.413	0.940
2.095	15.990	3.405	0.940
2.739	15.626	3.385	0.939
3.000	15.467	3.376	0.938
3.743	14.962	3.350	0.937
4.482	14.347	3.320	0.935
5.000	13.790	3.296	0.934
5.200	13.522	3.286	0.933
5.300	13.370	3.281	0.933
5.450	13.105	3.272	0.932
5.650	12.623	3.259	0.932
5.750	12.204	3.252	0.931

Tabla 4.3: *Radios de las órbitas marginalmente estables*, para una masa $m = 1{,}9162M_{\odot}$ con diferentes deformaciones cuadripolares.

En la tabla 4.4, 4.5, 4.6, están los valores de r_{ome} para diferentes masas que tienen la misma deformación cuadripolar. Además están los valores de E y L, energía y momento angular respectivamente, para la última órbita circular estable. Se puede ver claramente que los valores de E y L son idénticos para todas las masas, esto se debe en primera instancia a que E_{min} y L_{min} dependen de m y r_{ome}, lo que se refleja en la aparición de una constante que denominaremos Ξ, está constante es de gran interés ya que puede simplificar los cálculos de los *radios de las órbitas marginalmente estables*, ya que bastaría con tener un par de parejas $\{masa, r_{ome}\}$, para calcular la constante Ξ y usando la relación

$$\Xi = \frac{m}{r_{ome}}, \tag{4.1}$$

se obtendran los valores de los r_{ome} para cualquier valor de las masa. De las tablas 4.4-4.6, se puede concluir que el parámetro Ξ es diferente para los diferentes valores de q [2]

masa	q	r_{ome}	L	E	$\Xi = m/r_{ome}$
1.7	-2.739	10.813	3.5277	0.9453	0,157217
1.85	-2.739	11.77	3.5277	0.9453	0,157217
2.001	-2.739	12.727	3.5277	0.9453	0,157217
2.07	-2.739	13.1	3.5277	0.9453	0,157217
2.305	-2.739	14.1	3.5277	0.9453	0,157217
2.085	-2.739	13.21	3.5277	0.9453	0,157217
2.104	-2.739	13.382	3.5277	0.9453	0,157217
2.111	-2.739	13.427	3.5277	0.9453	0,157217
2.15	-2.739	13.75	3.5277	0.9453	0,157217
2.3	-2.739	14.29	3.5277	0.9453	0,157217
2.45	-2.739	15.583	3.5277	0.9453	0,157217
2.55	-2.739	1.219	3.5277	0.9453	0,157217
2.8	-2.739	17.04	3.5277	0.9453	0,157217
2.88	-2.739	18.35	3.5277	0.9453	0,157217
3	-2.739	19.081	3.5277	0.9453	0,157217
3.2	-2.739	20.354	3.5277	0.9453	0,157217

Tabla 4.4: *Radios de las órbitas marginalmente estables*, para diferentes masas con la misma deformación cuadripolar $q = -2{,}739$.

[2]Para el caso trivial $q = 0$ la constante sería $\Xi = M/6M = 0{,}16666$. Se puede verificar en las tablas donde aparecen los casos q=0, que basta dividir m/Ξ para obtener el respectivo r_{ome}.

masa	q	r_{ome}	L	E	$\Xi = m/r_{ome}$
1.7	-6.47	11.489	3.6006	0.9480	0,147958
1.85	-6.47	12.503	3.6006	0.9480	0,147958
2.001	-6.47	13.524	3.6006	0.9480	0,147958
2.07	-6.47	13.990	3.6006	0.9480	0,147958
2.089	-6.47	14.076	3.6006	0.9480	0,147958
2.104	-6.47	14.220	3.6006	0.9480	0,147958
2.305	-6.47	15.578	3.6006	0.9480	0,147958
2.15	-6.47	14.531	3.6006	0.9480	0,147958
2.3	-6.47	15.544	3.6006	0.9480	0,147958
2.55	-6.47	17.234	3.6006	0.9480	0,147958
2.886	-6.47	19.5055	3.6006	0.9480	0,147958
3.2	-6.47	21.627	3.6006	0.9480	0,147958

Tabla 4.5: *Radios de las órbitas marginalmente estables*, para diferentes masas con la misma deformación cuadripolar $q = -6{,}47$.

masa	q	r_{ome}	L	E	$\Xi = m/r_{ome}$
1.7	3.743	8.9915	3.3504	0.9374	0,189067
1.85	3.743	9.78489	3.3504	0.9374	0,189067
2.001	3.743	10.5835	3.3504	0.9374	0,189067
2.07	3.743	10.9485	3.3504	0.9374	0,189067
2.305	3.743	12.1914	3.3504	0.9374	0,189067
2.305	3.743	12.1914	3.3504	0.9374	0,189067
2.085	3.743	11.0278	3.3504	0.9374	0,189067
2.104	3.743	11.1283	3.3504	0.9374	0,189067
2.111	3.743	11.1653	3.3504	0.9374	0,189067
2.15	3.743	11.3716	3.3504	0.9374	0,189067
2.3	3.743	12.1650	3.3504	0.9374	0,189067
2.45	3.743	12.9583	3.3504	0.9374	0,189067
2.55	3.743	13.4872	3.3504	0.9374	0,189067
2.68	3.743	14.1748	3.3504	0.9374	0,189067
2.886	3.743	15.2644	3.3504	0.9374	0,189067
3	3.743	15.8674	3.3504	0.9374	0,189067
3.2	3.743	16.9252	3.3504	0.9374	0,189067

Tabla 4.6: *Radios de las órbitas marginalmente estables*, para diferentes masas con la misma deformación cuadripolar $q = 3{,}743$.

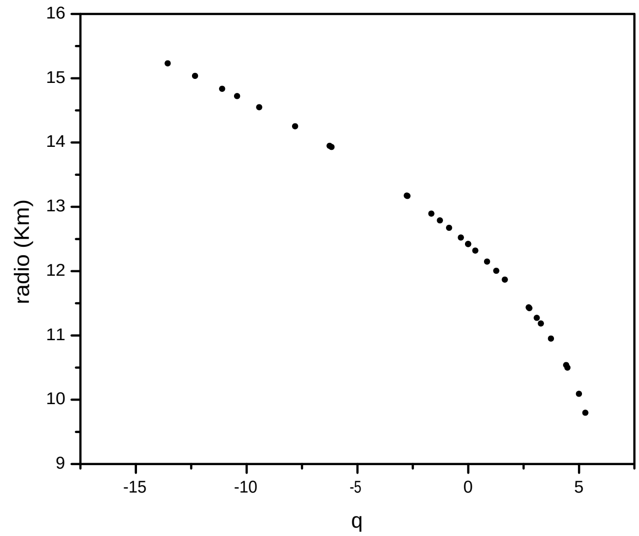

Figura 4.1: Datos de la comparación del radio de la órbita marginalmente estable Vs parámetro de deformación cuadripolar de las estrellas para la masa $m = 1{,}402 M_{\odot}$ que se toman de la tabla 4.2. La ecuación del polinomio que se ajusta a los puntos es $r_{ome} = 12,3554 - 0,35183q - 0,01146q^2$.

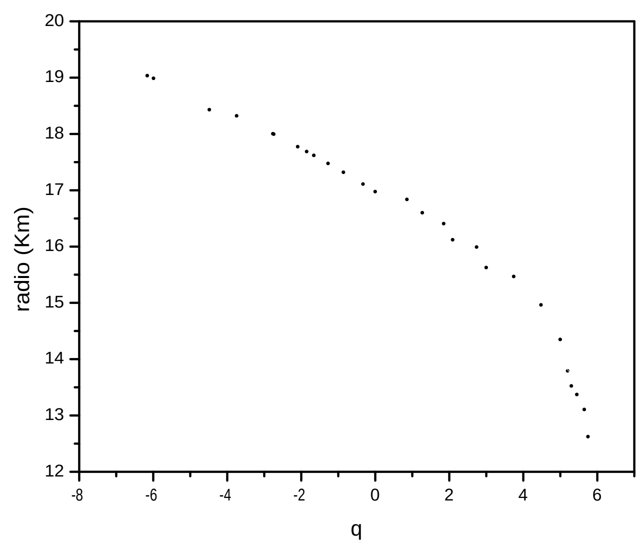

Figura 4.2: Datos de la comparación del radio de la órbita marginalmente estable Vs parámetro de deformación cuadripolar de las estrellas para la masa $m = 1{,}9162 M_{\odot}$ tomados de la tabla 4.3. La ecuación del polinomio que se ajusta a los puntos es $r_{ome} = 17,1264 - 0,46408q - 0,03327q^2$

5 CONCLUSIONES

Para el caso de Gutsunayev-Manko, no se encontraron soluciones que tuvieran algún interés físico, a excepción del caso cuando el parámetro $A = 0$, que como se ha mencionado es el caso particular del campo de Schwarzschild.

Se encontró en este trabajo para la solución de Erez-Rosen, una relación constante, entre la masa de la fuente y el *radio de la órbitas marginalmente estables*, para cada valor del parámetro de deformación q, $\Xi = m/r_{ome}$, por la complejidad de la ecuaciones usadas para el calculó de r_{ome}, no se pudo comprobar de manera analítica esta relación.

Se encontró una dependencia, para la solución de Erez-Rosen, entre el *radio de la órbitas marginalmente estables* y el parámetro de deformación cuadripolar, descrito por la ecuación

$$r_{ome} = a + bq + cq^2, \tag{5.1}$$

donde a,b,c son parámetros que resultan del ajuste polinomial para la curva correspondiente a cada valor de masa.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology.* (Jhon Wiley, 1972).

[2] Erez, G, and Rosen, N. (1959), Bull, Res. Council of Israel 8 F, 47.

[3] Gutsunayev, Ts. I.,and Manko, V.S.,(1985), Gen. Rel. Grav. 17, 1025.

[4] H. Quevedo. *Multipole moments in general relativity -static and stationary vacuum solutions-. Fortschr. Phys.*

[5] D. kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einsteins's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980).

[6] E. Kreyzig. *Matemáticas avanzadas para ingenieria.* (Limusa 1979.).

[7] Bergmann, P.G. *Introduction to the Theory of Relativity.* (Dover publications, INC. New York 1976).

[8] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists.* (Academic Press. Third edition 1985).

[9] Bardeen, J.M. *Stability of circular orbits in stacionary axisymetric space time. Apj 16, 103(1970)*

[10] Shutz, B. F. *A First Course in General Relativity.*(Cambridge University Press 1985).

[11] Zeldovich.Ya.B and Novikov.I.D *Stars and Relativity* .(University of Chicago Press 1971).

[12] Shapiro, S.L and Teulkolsky, S. A. (1983) Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars (Wiley, N.Y.).

[13] Carmeli, Moshed.*Classical fields: General relativity and gauge theory.* (Jhon Wiley, 1982).

[14] E. Berti and N. Stergioulas. *Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutron stars. Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 350 (2004).*

[15] Ramos.J. *Solución General Estática Axialmene Simétrica de las Ecuaciones de Einstein en el Vacío en Coordenadas Esferoidales Generalizadas.Universidad Industrial de Sanander. (2000)*