

Las teorías de Galileones escalares y su estatus actual a la luz de la detección de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB170817A

Jhan Nicolás Martínez Lobo

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

### **Dedicatoria**

Este trabajo viene dedicado:

En especial a mi papá y a mi mamá por hacer posible día a día no solo mi realización como profesional sino que también como persona.

A Danny, Felipe, Angélica, Giselle y Juan Pablo, mis hermanos, a mis tías, a mi abuelita y a mi nona que siempre están ahí brindándome su apoyo incondicional.

A Dennis, mi amor, que por su cariño y bellas palabras siempre se me dibuja una sonrisa en el rostro.

Y finalmente a Juan José, Daniel, Rafael, Cristian, David, Édgar, Miguel, Heiner, Wilson, Stephany, Érika, Javier, Leidy, Carlos, Jaime y Alexis, mis amigos, con los que siempre cualquier plática es posible.

### **Agradecimientos**

Agradezco encarecidamente a mi director de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de mi trabajo de grado. Así como también agradezco a todos los profesores de quienes tuve la oportunidad de ser guiado en mi proceso formativo tanto académico como moral.

**Tabla de Contenido**

<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>15</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>16</b>
2.1. Restricción en las ondas gravitacionales	16
2.2. Inestabilidad de Ostrogradski	17
<b>3. Galileones escalares</b>	<b>23</b>
3.1. Construcción del Galileón	23
3.2. Prueba de unicidad en espacio-tiempo de Minkowski	31
3.3. Covariantización	45
<b>4. Rapidez de las ondas gravitacionales</b>	<b>48</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>56</b>
<b>Apéndices</b>	<b>61</b>

**Lista de Figuras**

- Figura 1. Ejemplo de sistema físico con Hamiltoniano acotado por debajo. 19
- Figura 2. En esta gráfica se puede ver el comportamiento de  $H$  en función de  $P_1$  para un sistema mecánico cuyas ecuaciones de movimiento son de orden superior a dos. 22

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Forma alternativa de $\mathcal{E}_N$	61
Apéndice B. Variación de los ciclos $[i]$ y $\langle j \rangle$	63
Apéndice C. Razón entre coeficientes $\alpha_{\square}$	64
Apéndice D. Razón entre coeficientes $\alpha_{\diamond}$	67
Apéndice E. Equivalencia entre los Lagrangianos $\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\}$ y $\mathcal{L}_n^{(3)}\{f\}$	69
Apéndice F. Ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a $\mathcal{L}$	72
Apéndice G. Versión alternativa de las ecuaciones de Euler-Lagrange	77
Apéndice H. Contra-término de $\mathcal{L}_4$	81
Apéndice I. Contra-término de $\mathcal{L}_5$	84
Apéndice J. Perturbaciones	91

## Resumen

**Título:** Las teorías de Galileones escalares y su estatus actual a la luz de la detección de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB170817A \*

**Autor:** Jhan Nicolás Martínez Lobo \*\*

**Palabras Clave:** Galileón escalar, onda gravitacional & gravedad modificada.

**Descripción:** La colaboración LIGO-Virgo detectó, el 17 de Agosto de 2017, una señal de onda gravitacional (GW170817) proveniente de un sistema binario de estrellas de neutrones próximas a fusionarse, y 1,7 s después de la fusión de las estrellas de neutrones, se detectó una ráfaga de rayos  $\gamma$  (GRB 170817A); el análisis realizado mediante la diferencia de llegada de estas señales permitió concluir que, de existir una diferencia entre la rapidez de las ondas gravitacionales y la rapidez de la luz, ésta debe ser del orden de  $10^{-15}$ . Debido a que las teorías de gravedad modificada predicen, en general, una rapidez anómala para las ondas gravitacionales, se estudian en este documento las implicaciones que las mencionadas observaciones tienen sobre la viabilidad de algunas de estas teorías bien motivadas como lo son las teorías escalar-tensor. Concretamente, se estudiará el impacto que tiene sobre la teoría de Galileones escalares la detección de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB 170817A. La teoría de los Galileones escalares se construye exigiendo que las ecuaciones de campo sean, cuando mucho, de segundo orden, de tal manera que se prevengan patologías en la teoría que, claramente, no corresponden al comportamiento de la naturaleza. Así, cualquier teoría que involucre campos escalares, y que pretenda describir la naturaleza, debe estar contenida en la teoría de Galileones escalares. El presente documento abarca la construcción de la acción para Galileones escalares en espacio-tiempo de Minkowski, su reescritura en espacio-tiempo curvo y su respectivo análisis mediante la teoría de perturbaciones cosmológicas con el fin de obtener la ecuación de propagación de las ondas gravitacionales en el marco del Galileón escalar. Finalmente, se pone a prueba la teoría a la luz de las ya mencionadas observaciones.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física.

### Abstract

**Title:** Las teorías de Galileones escalares y su estatus actual a la luz de la detección de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB170817A \*

**Author:** Jhan Nicolás Martínez Lobo \*\*

**Keywords:** Scalar Galileon, gravitational wave & modified gravity.

**Description:** The advanced Laser Interferometer Gravitational Observatory (LIGO) and the VIRGO interferometer announced the detection of gravitational waves (GW170817) from the merger of a binary neutron star on August 17, 2017; as well as the associated gamma ray burst (GRB170817A), 1.7 s after the gravity wave detection. An immediate consequence of these detections is that gravity waves propagate at light speed in one part to  $10^{15}$ . Modified gravity theories, for example the scalar Galileon one, predict, in general, modifications to the gravity waves speed. We built the action for the scalar Galileon and study the implications of the mentioned detections on this theory. The scalar Galileon is a scalar field whose action leads to field equations that are not higher than second-order. This is a necessary condition to make the Hamiltonian bounded from below, as it is required to avoid tachyonic instabilities. So, any theory that involves scalar fields and aims to describe nature must belong to the scalar Galileon action. This document encompasses the construction of the scalar Galileon in Minkowski space-time, then in curved space-time and its analysis through the theory of cosmological perturbations to find the gravitational waves equation in this modified theory of gravity. Finally we found the restricted theory of the scalar Galileon.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, PhD in Physics.

## Introducción

En 1974, G.W. Horndeski escribió la acción más general para un campo escalar y gravedad clásica que lleva a ecuaciones de campo a lo sumo de segundo orden (Horndeski, 1974). Curiosamente, sus resultados fueron ignorados durante mucho tiempo hasta la década del 2010 cuando fueron redescubiertos (Kobayashi et al., 2011; Deffayet et al., 2011) en lo que se conoce hoy en día como la teoría de los Galileones escalares (Nicolis et al., 2009). Un Galileón es un campo escalar que resulta de la construcción de la acción más general para dicho campo que evita la inestabilidad de Ostrogradski mediante la eliminación de las derivadas de orden mayor a dos en las ecuaciones de campo (Ostrogradski, 1850). La inestabilidad de Ostrogradski es una patología sufrida por ciertos sistemas la cual se define como la ausencia de una cota inferior en el Hamiltoniano del sistema dado. Eliminar las derivadas de orden mayor a dos en las ecuaciones de campo por lo tanto, es una condición necesaria mas no suficiente que un sistema debe cumplir para no sufrir de la inestabilidad de Ostrogradski (Woodard, 2007, 2015). Desde que se redescubrió esta idea, los Galileones han gozado de gran protagonismo en física de altas energías y cosmología.

La existencia de ondas gravitacionales fue predicha por A. Einstein en 1918 mediante el uso de su teoría de la relatividad general (Einstein, 1918); un curioso detalle allí encontrado fue que la rapidez de las ondas gravitacionales predicha era igual a la rapidez de la luz. En cuanto a las teorías de gravedad modificada, se ha encontrado que en general predicen una rapidez anómala para las ondas gravitacionales en parte fruto de los acoplamientos no mínimos a la gravedad (Will, 2014; Bettoni et al., 2017).

Por ende es importante tener en cuenta que al ser una teoría de gravedad modificada, la teoría de Galileones escalares predice, de forma genérica, una rapidez anómala para las ondas gravitacionales (Bettoni et al., 2017). La predicción acerca de la existencia de las ondas gravitacionales fue confirmada por el laboratorio de detección de ondas gravitacionales LIGO gracias a la señal recibida en el 2016, debido a la fusión de un par de agujeros negros (Abbott et al., 2016).

Con esto en mente, es de gran interés ahora mencionar que, el 17 de agosto del 2017, la red de detección LIGO-Virgo observó una señal de onda gravitacional proveniente de un sistema binario compuesto por estrellas de neutrones próximas a fusionarse; como resultado de la fusión, se emitió también una ráfaga de rayos  $\gamma$  que fue detectada en Tierra 1.7 s después de la detección de la onda gravitacional. A la señal de onda gravitacional se le bautizó como GW170817 y a su contraparte electromagnética como GRB 170817A (Abbott et al., 2017c,b,a). El análisis de la diferencia de tiempo en que se detectaron las señales llevó a concluir que la rapidez de las ondas gravitacionales difiere de la rapidez de la luz por encima, a lo sumo, en un orden de  $10^{-15}$ . Por otra parte es preciso mencionar que debido a la ausencia de radiación de Cherenkov en los rayos cósmicos, la rapidez de las ondas gravitacionales posee una cota inferior respecto a la rapidez de la luz lo cual hace que la rapidez de las ondas gravitacionales difiera por debajo respecto a la de la luz en, cuando mucho  $2 \times 10^{-15}$  (Moore and Nelson, 2001).

En el presente documento se estudia el impacto que tiene sobre la teoría de Galileones escalares la detección de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB 170817A; para ello se construye la acción del Galileón escalar paso a paso (Rodríguez and Navarro, 2017), y mediante la teoría de perturbaciones cosmológicas (Mukhanov et al., 1992; Wang,

2017) se encontrará la ecuación de propagación de las ondas gravitacionales. Finalmente, gracias al mencionado resultado experimental, se pondrá a prueba la teoría de Galileones escalares.

El resultado final indica que los únicos términos sobrevivientes de la acción son una función general del campo escalar ( $\pi$ ) y de su término cinético, una función arbitraria del campo escalar y de su término cinético multiplicada por un D' Alembertiano del campo, y un acoplamiento no mínimo a la gravedad de la forma  $Rf(\pi)$  (Baker et al., 2017; Sakstein and Jain, 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017).

Haber realizado este proyecto ha sido de gran importancia dado que cualquier teoría de campo escalar debe estar contenida en la teoría de Galileones escalares puesto que toda teoría física debe estar libre de inestabilidades. También es de gran importancia dado que la reciente observación de una onda gravitacional y su contraparte electromagnética da lugar a un escenario ideal para llevar a cabo uno de los pasos más interesantes del método científico: la falsación de la teoría (Popper, 2005). Un detalle importante sobre los campos escalares es el papel que juegan en varias áreas de la Física, como por ejemplo en cosmología en donde son relevantes dado que no generan anisotropías (Lyth and Liddle, 2009) y en física de partículas en donde el campo de Higgs se encarga de dar masa a todas las partículas (Kane, 1993).

Concretamente en este documento se analiza la restricción sobre la rapidez de las ondas gravitacionales en la subsección 2.1, luego se detalla la inestabilidad de Ostrogradski en la subsección 2.2, en la subsección 3.1 se realiza la construcción de la acción del Galileón escalar siguiendo a (Deffayet et al., 2011; Rodriguez and Navarro, 2017), en la subsección 3.2 se prueba la unicidad del Galileón escalar de acuerdo a (Deffayet et al., 2011), en la subsección 3.3 se procede a escri-

bir la acción del Galileón escalar es espacio-tiempo curvo de acuerdo a (Rodriguez and Navarro, 2017), en la subsección 4 se escriben las cantidades presentes en la acción del Galileón escalar en términos de una perturbación en la métrica de acuerdo a (Wang, 2017) y se usa la restricción sobre la rapidez de las ondas gravitacionales para obtener la acción falsada del Galileón escalar como en (Baker et al., 2017; Sakstein and Jain, 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017), finalmente en la sección 5 se habla del resultado encontrado y de futuros proyectos. En el documento de usan unidades naturales, la signatura mayormente positiva,  $(-, +, +, +)$ , el tensor de Riemman definido como  $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \nabla_\alpha \pi = R_{\mu\nu\beta\alpha} \nabla^\beta \pi$  y el tensor de Ricci  $R_{\nu\beta} = R^\alpha_{\nu\beta\alpha}$ .

## 1. Objetivos

### Objetivo general

Estudiar el impacto que tiene sobre la teoría de Galileones escalares la detección de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB170817A.

### Objetivos específicos

Encontrar la acción más general de un campo escalar más gravedad, que conduzca a ecuaciones de campo de orden inferior o igual a dos;

encontrar la ecuación de propagación de las ondas gravitacionales asociadas a esta acción;

estudiar el impacto que la restricción de la rapidez de las ondas gravitacionales tiene sobre la teoría de Galileones escalares;

aislar los términos de la teoría de Galileones escalares que satisfacen la restricción sobre la rapidez de las ondas gravitacionales.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Restricción en las ondas gravitacionales

Para poder ilustrar cómo la diferencia de 1,7 s entre la detección de la onda gravitacional GW170817 y de su contraparte electromagnética GRB170817A reportada en (Abbott et al., 2017b) acota la rapidez de las ondas gravitacionales con respecto a la rapidez de la luz, se define  $t_T$  como el tiempo de fusión de las estrellas de neutrones,  $t_c$  como el tiempo en el cual es detectada la ráfaga de rayos gamma y  $t_s$  como el tiempo de emisión tanto de la onda gravitacional como de la onda electromagnética; puede haber un retraso de hasta 1000 s, pero esto no cambia los resultados.

Entonces durante el tránsito de la onda gravitacional y la onda electromagnética hasta la tierra se cumple que  $v(t_T - t_s) = d_s$  así como también  $t_c - t_s = d_s$ , en donde  $v$  es la rapidez de las ondas gravitacionales y  $d_s$  es la distancia entre la tierra y la nueva estrella de neutrones producto de la fusión detectada.

Entonces se define  $\Delta t \equiv t_c - t_T$  que corresponde a la diferencia de tiempo en que se detectaron el par de señales (1,7 s), que junto con la distancia  $d_s \approx 40Mpc$  permite escribir

$$\frac{\Delta t}{d_s} = 1 - \frac{1}{v}. \quad (1)$$

Parametrizando la rapidez como  $v^2 = 1 + \alpha_T$ , con el fin de que  $\alpha_T$  lleve consigo la desviación de la rapidez de las ondas gravitacionales con respecto a la de la luz, el miembro derecho de la Ec.(1) se puede expandir a primer orden en serie de Taylor y obtener así  $\alpha_T \approx 2\Delta t/d_s$ , lo cual

implica  $|\alpha_T| \lesssim 1 \times 10^{-15}$ .

## 2.2. Inestabilidad de Ostrogradski

La inestabilidad de Ostrogradski es una patología que se encuentra en ciertos sistemas que tienen en sus ecuaciones de movimiento derivadas de orden mayor a dos (Woodard, 2015). Esta inestabilidad consiste en la ausencia de una cota inferior en el Hamiltoniano del sistema en cuestión.

Por ejemplo, supongamos un sistema mecánico con un grado de libertad, descrito por el siguiente Lagrangiano:

$$L = L(q, \dot{q}). \quad (2)$$

La ecuación de Euler-Lagrange del sistema es:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (3)$$

siempre que satisfaga la condición de no degeneración que establece que  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  debe depender de  $\dot{q}$ .

La condición de no degeneración equivale a decir que  $\dot{q}$  no desaparece del Lagrangiano al hacer integración por partes por lo cual la ecuación de movimiento y su solución son:

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}) \quad \rightarrow \quad q(t) = Q(t, q_0, \dot{q}_0). \quad (4)$$

Observemos el Hamiltoniano tomando las variables canónicas del sistema como

$$Q \equiv q, \quad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (5)$$

La condición de no degeneración garantiza que  $\dot{q}$  se puede escribir en términos de  $Q$  y  $P$ :

$$\dot{q} = v(Q, P), \quad (6)$$

por lo que el Hamiltoniano se puede escribir como

$$\begin{aligned} H(Q, P) &\equiv P\dot{q} - L \\ &= Pv(Q, P) - L(Q, v(Q, P)). \end{aligned} \quad (7)$$

Con esas variables canónicas, las ecuaciones canónicas de evolución reproducen la transformación de fase inversa Ec. (6) y la ecuación de Euler-Lagrange:

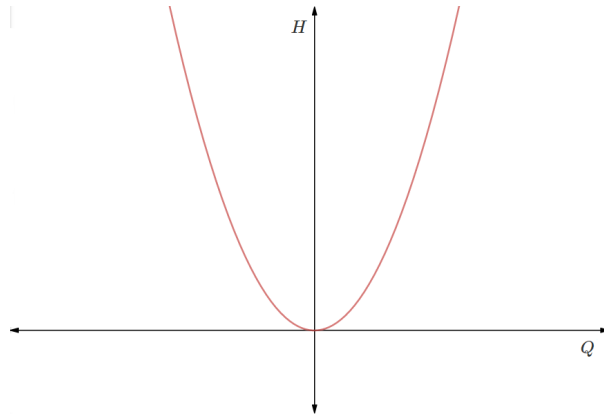


Figura 1. Ejemplo de sistema físico con Hamiltoniano acotado por debajo.

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = v(Q, P), \quad (8)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (9)$$

De esta manera, se concluye que el Hamiltoniano es la energía de sistema. Se observa además que el Hamiltoniano no es explícitamente lineal ni en  $Q$  ni en  $P$ , por lo que, en principio, no sufre de la inestabilidad de Ostrogradski, es decir, la energía estaría acotada por debajo, como lo describe el ejemplo de la figura 1.

Ahora supongamos un sistema mecánico con un solo grado de libertad pero en el que su Lagrangiano depende también de  $\ddot{q}$ ,

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}). \quad (10)$$

La ecuación de Euler-Lagrange del sistema es:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0, \quad (11)$$

siempre que se satisfaga la condición de no degeneración, lo que equivale a que  $\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$  deba depender de  $\ddot{q}$ .

La condición de no degeneración equivale a decir que  $\ddot{q}$  no desaparece del Lagrangiano al hacer integración por partes, por lo que la ecuación de movimiento y su respectiva solución son:

$$q^{(4)} = F(q, \dot{q}, \ddot{q}, q^{(3)}) \quad \rightarrow \quad q(t) = Q(t, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, q_0^{(3)}). \quad (12)$$

Busquemos el Hamiltoniano del sistema con las 4 variables canónicas de Ostrogradski:

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv q, & P_1 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}, \\ Q_2 &\equiv \dot{q}, & P_2 &\equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \end{aligned} \quad (13)$$

La condición de no degeneración garantiza que  $\ddot{q}$  puede ser escrito en términos de  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $P_2$ :

$$\ddot{q} = a(Q_1, Q_2, P_2). \quad (14)$$

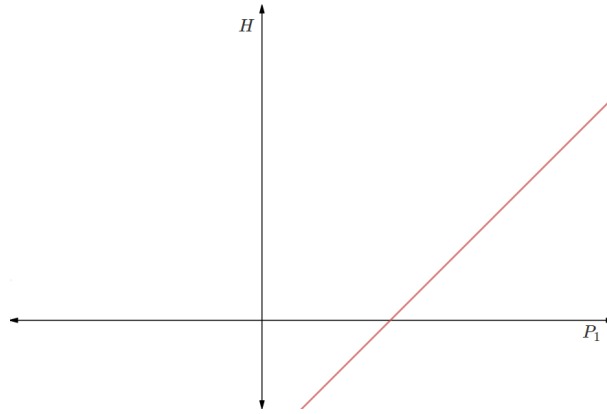
Así, el Hamiltoniano queda escrito como

$$\begin{aligned} H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &\equiv P_1 \dot{q} + P_2 \ddot{q} - L \\ &= P_1 Q_2 + P_2 a(Q_1, Q_2, P_2) - L(Q_1, Q_2, a(Q_1, Q_2, P_2)). \end{aligned} \quad (15)$$

De manera similar al caso anterior, las ecuaciones canónicas de evolución reproducen la transformación de fase inversa Ec. (14) y la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial P_1} = Q_2, & \dot{Q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial P_2} = a(Q_1, Q_2, P_2), \\ \dot{P}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = \frac{\partial L}{\partial q}, & \dot{P}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial Q_2} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Lo anterior nos permite concluir que el Hamiltoniano es la energía del sistema. Se observa además que el Hamiltoniano es explícitamente lineal en  $P_1$  lo cual hace que, en general, cualquier sistema físico que tenga ecuaciones de evolución de orden mayor a dos posea un Hamiltoniano no acotado por debajo como se ejemplifica en la figura 2.



*Figura 2.* En esta gráfica se puede ver el comportamiento de  $H$  en función de  $P_1$  para un sistema mecánico cuyas ecuaciones de movimiento son de orden superior a dos.

Por lo tanto, para que un sistema no presente problemas de inestabilidad en la energía se debe cumplir como condición necesaria, mas no suficiente, la no existencia de derivadas de orden superior a dos en sus ecuaciones de movimiento.

### 3. Galileones escalares

#### 3.1. Construcción del Galileón

El Galileón escalar se define como el resultante de la construcción de la acción más general para un campo escalar que evita la inestabilidad de Ostrogradski. Con el fin de construir el Galileón puro de acuerdo a (Rodriguez and Navarro, 2017), en espacio-tiempo de Minkowski, partimos de segundas derivadas de un campo escalar y de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} = 0. \quad (17)$$

La teoría de grupos nos dice que las únicas cantidades que podemos usar para encontrar invariantes de Lorentz a partir de segundas derivadas de un campo escalar son tensores métricos y tensores de Levi-Civita (Georgi, 1999), por lo tanto el término más simple del que podemos partir es  $\partial_\mu \partial_\nu \pi$ , y el único término invariante de Lorentz aquí es  $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \pi$ .

Ahora bien, procedemos a buscar los invariantes de Lorentz con dos derivadas del campo escalar, por tanto partimos de  $\partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\alpha \partial_\beta \pi$ , del cual se encuentra que el único término invariante de Lorentz y que no lleva a ecuaciones de movimiento de mayor orden a dos es  $(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\alpha \partial_\beta \pi$ , el cual se encuentra al hacer una combinación lineal de los dos términos invariantes de Lorentz posibles y posteriormente anulando su contribución en las ecuaciones de Euler-Lagrange a términos de orden mayor a dos.

El tercer término es  $\partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\alpha \partial_\beta \pi \partial_\gamma \partial_\sigma \pi$ , del cual se encuentra que el único término invariante de Lorentz y que no lleva a ecuaciones de movimiento de mayor orden a dos es  $(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\sigma} - 3\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} + 2\eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\gamma\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\alpha \partial_\beta \pi \partial_\gamma \partial_\sigma \pi$ .

Es interesante reescribir estos tres términos como:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \pi = \delta_\nu^\mu \partial_\mu \partial^\nu \pi, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\alpha \partial_\beta \pi &= (\delta_\nu^\mu \delta_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta) \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial^\alpha \partial_\beta \pi, \\ &= 2! \delta_{[\nu}^{[\mu} \delta_{\alpha]}^{\beta]} \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial^\alpha \partial_\beta \pi, \\ &= 2! \delta_{[\nu}^\mu \delta_{\alpha]}^\beta \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial^\alpha \partial_\beta \pi, \\ &= \delta_{\nu\alpha}^{\mu\beta} \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial^\alpha \partial_\beta \pi, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\sigma} - 3\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} + 2\eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\gamma\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial_\alpha \partial_\beta \pi \partial_\gamma \partial_\sigma \pi \\ &= 3! \delta_\beta^{[\alpha} \delta_\nu^\mu \delta_\sigma^{\gamma]} \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\alpha \partial^\beta \pi \partial_\gamma \partial^\sigma \pi, \\ &= \delta_{\beta\nu\sigma}^{\alpha\mu\gamma} \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\alpha \partial^\beta \pi \partial_\gamma \partial^\sigma \pi. \end{aligned} \quad (20)$$

Entonces usando la notación  $\partial^\mu \pi \equiv \pi^\mu$ , en primera instancia se podría pensar que el Lagrangiano del Galileón puro es de la forma

$$\mathcal{L} = -\delta_{v_1 \dots v_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \pi_{\mu_1}^{v_1} \dots \pi_{\mu_n}^{v_n}, \quad (21)$$

en donde

$$\delta_{v_1 \dots v_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = n! \delta_{v_1}^{[\mu_1} \delta_{v_2}^{\mu_2} \dots \delta_{v_n}^{\mu_n]}. \quad (22)$$

Este Lagrangiano lleva a ecuaciones de campo idénticamente iguales a cero.

Ahora bien construyamos el Lagrangiano de Galileón puro (de solo segundas derivadas) de manera genérica como

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}_{(2n)}^{\mu_1 \dots \mu_n v_1 \dots v_n} \pi_{\mu_1 v_1} \dots \pi_{\mu_n v_n}. \quad (23)$$

De acuerdo la teoría de grupos, el tensor  $\mathcal{T}$  es función de la métrica y de tensores de Levi-Civita, lo cual permite obtener un Lagrangiano invariante de Lorentz, además se le ha puesto la subetiqueta  $2n$  que significa que hay  $n$  segundas derivadas del campo escalar contraídas con el tensor. Debido a que las derivadas parciales conmutan en espacio-tiempo de Minkowski, para que no sea nulo el Lagrangiano,  $\mathcal{T}$  debe ser simétrico ante cambios de índices  $\mu_i \leftrightarrow v_i$ .

Adicionalmente, debido a que

$$\pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} = \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_{i-1} \nu_{i-1}} \pi_{\mu_j \nu_j} \pi_{\mu_{i+1} \nu_{i+1}} \dots \pi_{\mu_{j-1} \nu_{j-1}} \pi_{\mu_i \nu_i} \pi_{\mu_{j+1} \nu_{j+1}} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \quad (24)$$

para que no sea nulo el lagrangiano,  $\mathcal{T}$  debe ser simétrico ante cambios de pares de índices  $\mu_i \nu_i \leftrightarrow \mu_j \nu_j$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este Lagrangiano vienen dadas por

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{(2n)}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \partial_{\mu_i} \partial_{\nu_i} (\pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_{i-1} \nu_{i-1}} \pi_{\mu_{i+1} \nu_{i+1}} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}) = 0. \quad (25)$$

Así, de este Lagrangiano genérico construído de segundas derivadas de un campo se encuentra que, si se quieren evitar las derivadas de orden mayor a dos en las ecuaciones de Euler-Lagrange se debe hacer al tensor  $\mathcal{T}$ , como condición necesaria, completamente anti-simétrico tanto en los  $n$  índices  $\mu_i$ , así como también en los  $n$  índices  $\nu_i$ .

Una primera definición para el tensor  $\mathcal{T}$ , que no depende de  $\pi$ ,  $\pi_\mu$  ó  $\pi_{\mu\nu}$  vendría dada por  $\mathcal{T}_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = -\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$  Ec.(21), si bien este Lagrangiano no lleva a ecuaciones de movimiento de orden mayor a dos, tampoco conduce a ecuación de movimiento alguna (dado que se obtiene cero idénticamente igual a cero), lo cual hace que éste Lagrangiano se comporte como una derivada total.

De manera genérica  $\mathcal{T}$  es función tanto del campo como de su primera derivada, por lo cual para hacer al Lagrangiano lo más general posible, se hace  $\mathcal{T}_{(2n)} = \mathcal{T}_{(2n)}(\pi, \pi_\alpha)$ , por lo cual el término más simple sería de la forma  $\mathcal{T}_{(2)}(\pi, \pi_\alpha)^{\mu\nu} = f(\pi, \pi_\alpha) g^{\mu\nu}$ ; este término no lleva a ecuaciones de campo de orden mayor a dos, pero en el caso general en el cual  $n > 1$ , términos

de terceras y cuartas derivadas del campo eventualmente pueden aparecer en las ecuaciones de movimiento, las cuales tienen todos sus índices contraídos con el tensor  $\mathcal{T}_{(2n)}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}_\alpha)$ . Si bien términos de terceras derivadas se ven anulados gracias a que  $f(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}_\alpha)g^{\mu\nu}$  no lleva a ecuaciones de campo de mayor orden a dos, de manera genérica las terceras y cuartas derivadas del campo vienen contraídas con  $\mathcal{T}_{(2n)}$  y dado que en el espacio-tiempo de Minkowski las derivadas conmutan, inmediatamente tenemos el siguiente resultado:

**Lema** Una condición suficiente para que las ecuaciones de campo derivadas del Lagrangiano (23), con  $\mathcal{T}_{(2n)} = \mathcal{T}_{(2n)}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}_\alpha)$ , sean de orden igual ó menor a dos es que el tensor  $\mathcal{T}_{(2n)}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n}$  sea totalmente antisimétrico en sus índices  $\mu_i$ , así como también (de manera independiente) en sus  $\nu_i$  índices.

Un primer modelo de Lagrangiano que satisface éste lema, mediante la definición  $X \equiv \partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_\mu^\mu$ , está dado por la expresión

$$\mathcal{L}_N = -X \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \boldsymbol{\pi}_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \boldsymbol{\pi}_{\mu_n}^{\nu_n}, \quad (26)$$

en donde se ha agregado la etiqueta  $N$  que representa el número de campos en el Lagrangiano y  $n$  denota el número de segundas derivadas del campo presentes en el Lagrangiano con  $N = n + 2$ . Éste último Lagrangiano no tiene derivadas de orden mayor a dos en sus ecuaciones de Euler-Lagrange, y coincide con el Lagrangiano  $\mathcal{L}_N^{\text{Gal},3}$  de (Deffayet et al., 2011) dado que  $-\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \mathcal{A}_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ , además allí se tiene

$$\mathcal{A}_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}^{v_1 \dots v_{n+1}} = \mathcal{A}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{v_1 \dots v_n} \delta_{\mu_{n+1}}^{v_{n+1}} - \sum_{p=1}^n \mathcal{A}_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}^{v_1 \dots v_{p-1} v_{n+1} v_{p+1} \dots v_n} \delta_{\mu_{n+1}}^{v_p}, \quad (27)$$

lo que corresponde a la expansión de Laplace, que al ser multiplicada por  $\pi_{\mu_{n+1}} \pi^{v_{n+1}} \pi_{\mu_1}^{v_1} \dots \pi_{\mu_n}^{v_n}$  permite entonces, obtener la ecuación

$$(N-2)\mathcal{L}_N^{\text{Gal},2} + \mathcal{L}_N^{\text{Gal},1} = \mathcal{L}_N^{\text{Gal},3}, \quad (28)$$

la cual se encuentra presente en (Deffayet et al., 2011), en donde  $\mathcal{L}_N^{\text{Gal},1}$ ,  $\mathcal{L}_N^{\text{Gal},2}$  y  $\mathcal{L}_N^{\text{Gal},3}$  se definen como:

$$\mathcal{L}_N^{\text{Gal},1} = \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_{n+1} v_1 \dots v_{n+1}} \pi_{\mu_{n+1}} \pi_{v_{n+1}} \pi_{\mu_1 v_1} \dots \pi_{\mu_n v_n}, \quad (29)$$

$$\mathcal{L}_N^{\text{Gal},2} = \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n v_1 \dots v_n} \pi_{\mu_1} \pi_{\lambda} \pi_{v_1}^{\lambda} \pi_{\mu_2 v_2} \dots \pi_{\mu_n v_n}, \quad (30)$$

$$\mathcal{L}_N^{\text{Gal},3} = \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_\tau \pi^\tau \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}. \quad (31)$$

Es de gran utilidad poder definir  $J_N^\mu$ , de acuerdo a

$$J_N^\mu = X \mathcal{A}^{\mu \mu_2 \dots \mu_n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \pi_{\nu_1} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \quad (32)$$

dado que al sacar su divergencia se encuentra

$$\partial_\mu J_N^\mu = 2\mathcal{L}_N^{\text{Gal},2} + \mathcal{L}_N^{\text{Gal},3}, \quad (33)$$

que junto con las ecuaciones 29, 30 y 31, da como resultado

$$\mathcal{L}_N^{\text{Gal},1} = \frac{N}{2} \mathcal{L}_N^{\text{Gal},3} - \frac{N-2}{2} \partial_\mu J_N^\mu, \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_N^{\text{Gal},1} = -N \mathcal{L}_N^{\text{Gal},2} + \partial_\mu J_N^\mu, \quad (35)$$

y por tanto se ve que los tres Lagrangianos (29),(30) y (31) son equivalentes, dado que se relacionan entre sí mediante una derivada total.

Un detalle importante del Lagrangiano aquí construido y que se puede ver en (Deffayet et al., 2009) es que al usar

$$\sum_{\sigma \in S_D} \varepsilon(\sigma) g^{\mu_{\sigma(1)} \nu_1} g^{\mu_{\sigma(2)} \nu_2} \dots g^{\mu_{\sigma(D)} \nu_D} = -\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \varepsilon^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_D}, \quad (36)$$

en dónde  $\sigma$  denota una permutación del signo  $\varepsilon(\sigma)$  del grupo de permutaciones  $S_D$  y  $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}$  es el símbolo de Levi-Civita en  $D$  dimensiones, se demuestra que todas las permutaciones posibles de tensores métricos en  $D$  dimensiones se escriben de manera genérica en términos de tensores de Levi-Civita del espacio en cuestión, lo cual da una relación directa entre los términos que la teoría de grupos nos da para poder formar invariantes de Lorentz.

Las ecuaciones de campo que se obtienen del Lagrangiano (31) son

$$N \mathcal{E}_N \equiv N \mathcal{A}_{(2n+2)}^{\mu_1 \dots \mu_{n+1} \nu_1 \dots \nu_{n+1}} \pi_{\mu_1 \nu_1} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} = 0, \quad (37)$$

las cuales son iguales para los tres Lagrangianos dado que se relacionan por una derivada total y además nótese que  $\mathcal{E}_N$  contiene  $N - 1$  campos. Finalmente el Lagrangiano (31), puede ser reescrito como

$$\mathcal{L}_N^{Gal,3} = X \mathcal{E}_{N-1}, \quad (38)$$

en donde  $\mathcal{E}_{N-1}$ , resulta de las ecuaciones de movimiento de la Ec.(37), las cuales son iguales para los tres Lagrangianos dado que están relacionados por una derivada total.

### 3.2. Prueba de unicidad en espacio-tiempo de Minkowski

Para proceder a demostrar la unicidad de los Lagrangianos antes mencionados de acuerdo a (Deffayet et al., 2011) se define

$$[i] \equiv \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi_{\mu_3}^{\mu_2} \pi_{\mu_4}^{\mu_3} \dots \pi_{\mu_i}^{\mu_{i-1}} \pi_{\mu_1}^{\mu_i}, \quad (39)$$

entonces, por ejemplo se tiene

$$[1] = \square \pi, \quad [2] = \pi_{\beta}^{\alpha} \pi_{\alpha}^{\beta}. \quad (40)$$

De manera similar se define

$$\langle i \rangle \equiv \pi_{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi_{\mu_3}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_{i+1}}^{\mu_i} \pi^{\mu_{i+1}}, \quad (41)$$

tal que

$$\langle 1 \rangle \equiv \pi_{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi^{\mu_2}, \quad \langle 2 \rangle \equiv \pi_{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi_{\mu_3}^{\mu_2} \pi^{\mu_3}. \quad (42)$$

Nótese que  $[i]$  contiene  $i$  segundas derivadas del campo  $\pi$  y a su vez  $i$  campos  $\pi$ , por otro lado  $\langle i \rangle$  contiene de nuevo  $i$  segundas derivadas del campo  $\pi$ , pero  $i + 2$  campos  $\pi$ .

También es de utilidad definir

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{bmatrix} \equiv [1]^{p_1} [2]^{p_2} \dots [r]^{p_r}, \quad (43)$$

así como también

$$\left\langle \begin{matrix} q_1 & q_2 & \dots & q_s \\ 1 & 2 & \dots & s \end{matrix} \right\rangle \equiv \langle 1 \rangle^{q_1} \langle 2 \rangle^{q_2} \dots \langle s \rangle^{q_s}, \quad (44)$$

en donde  $p_i$  y  $q_i$  pueden tomar como valor cero ó cualquier número natural.

De manera general para cualquier  $N$ ,  $\mathcal{E}_N$  puede ser expresado en términos de una combina-

ción lineal específica de monomios de acuerdo a (ver apéndice 1)

$$\mathcal{E}_N = \sum \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{bmatrix}, \quad (45)$$

en la cual la suma corre sobre todos los  $p_i$ , junto con el hecho de que

$$N = 1 + \sum_{i=1}^r i p_i, \quad (46)$$

además los coeficientes  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N$  no dependen de la dimensión, solo dependen del número de campos  $N$ , específicamente

$$\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N = (-1)^{N+p_1+\dots+p_r} \frac{(N-1)!}{p_1! p_2! \dots p_r! 1^{p_1} 2^{p_2} \dots r^{p_r}}. \quad (47)$$

Entonces con el fin de estudiar el Lema antes presentado, se expresa éste de manera más genérica en una teoría que cumpla las siguientes condiciones:

- 1 que su Lagrangiano contenga derivadas de orden dos ó menor del campo escalar;
- 2 que su Lagrangiano sea polinómico en las segundas derivadas del campo escalar;
- 3 que sus correspondientes ecuaciones de campo contengan derivadas de segundo orden ó

menor.

En espacio-tiempo plano las únicas cantidades escalares que son polinómicas en segundas derivadas de  $\pi$  deben ser construídas con  $[i]$  y  $\langle i \rangle$ . Entonces la teoría escalar más general que se puede construir que tenga en su Lagrangiano derivadas de orden menor ó igual a dos de  $\pi$  y que su Lagrangiano sea polinómico en segundas derivadas de  $\pi$ , tiene un Lagrangiano que es una combinación lineal de monomios, cada uno de la forma  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$ , definida como

$$\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r} = f(\pi, X) \left[ \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{array} \right] \left\langle \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \dots & q_s \\ 1 & 2 & \dots & s \end{array} \right\rangle, \quad (48)$$

en donde  $f$  es una función escalar arbitraria de  $\pi$  y  $X$  (diferente para cada monomio  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$ ).

La forma final del Lagrangiano viene dada por

$$\mathcal{L} = \sum_{\substack{\{p_i\} \\ \{q_i\}}} C_{\{p_i\}\{q_i\}} \mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}, \quad (49)$$

en donde la suma es sobre todos los índices  $\{p_i\} = (p_1, \dots, p_r)$  y  $\{q_i\} = (q_1, \dots, q_s)$ . Nótese también

que el número  $N$  de campos y el número  $n$  de segundas derivadas que tiene  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$ , sin tener

en cuenta a  $f$ , vienen dados por las ecuaciones:

$$N = \left( \sum_{i=1}^r ip_i \right) + \left( \sum_{j=1}^s (j+2)q_j \right), \quad (50)$$

$$n = N - 2 \sum_{j=1}^s q_j. \quad (51)$$

Entonces para poder encontrar además el Lagrangiano más general que tenga derivadas de orden menor ó igual a dos de  $\pi$ , que sea polinómico en segundas derivadas de  $\pi$  y que además sus ecuaciones de movimiento sean de orden menor ó igual a dos se procede a eliminar las derivadas de cuarto orden en  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$ .

Siguiendo la prueba presentada en (Deffayet et al., 2011) se empieza eliminando aquellas derivadas de la forma  $\square \pi_{\beta}^{\alpha}$ . Al variar  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$  éste tipo de términos pueden aparecer mediante (ver apéndice 2)

$$\begin{aligned} \delta_{\pi} [i]^{p_i} &\supset \frac{2ip_i}{i-1} [\square(i-1)] [i]^{p_i-1} \delta \pi & (i > 1), \\ \delta_{\pi} \langle i \rangle^{q_i} &\supset 2q_i \langle \square(i-1) \rangle \langle i \rangle^{q_i-1} \delta \pi & (i > 1), \end{aligned} \quad (52)$$

en donde

$$\begin{aligned}
&\equiv \sum_{k=1}^j \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi_{\mu_3}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_k}^{\mu_{k-1}} (\square \pi_{\mu_{k+1}}^{\mu_k}) \pi_{\mu_{k+2}}^{\mu_{k+1}} \dots \pi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}} \pi_{\mu_1}^{\mu_j} \\
&= j \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi_{\mu_3}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}} (\square \pi_{\mu_1}^{\mu_j}),
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\langle \square(j) \rangle \equiv \sum_{k=1}^j \pi_{\mu_1}^{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \pi_{\mu_3}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_k}^{\mu_{k-1}} (\square \pi_{\mu_{k+1}}^{\mu_k}) \pi_{\mu_{k+2}}^{\mu_{k+1}} \dots \pi_{\mu_{j+1}}^{\mu_j} \pi^{\mu_{j+1}}. \tag{54}$$

Ahora bien, consideremos la contribución de la Ec.(52), asociada al ciclo  $[i]^{p_i}$ . La variación de  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$  contribuye a las ecuaciones de movimiento con el término

$$\frac{2ip_i}{i-1} f(\pi, X) [1]^{p_1} [2]^{p_2} \dots [i-1]^{p_{i-1}} [\square(i-1)] [i]^{p_{i-1}} \dots [r]^{p_r} \left\langle \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \dots & q_s \\ 1 & 2 & \dots & s \end{array} \right\rangle, \tag{55}$$

y sólo puede ser cancelado si uno agrega al Lagrangiano un término proporcional a

$$f \left[ \begin{array}{cccccccc} p_1+1 & p_2 & \dots & p_{i-2} & p_{i-1}+1 & p_i-1 & p_{i+1} & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & i-2 & i-1 & i & i+1 & \dots & r \end{array} \right] \left\langle \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \dots & q_s \\ 1 & 2 & \dots & s \end{array} \right\rangle. \tag{56}$$

Al variar el ciclo  $[i-1]$  del Lagrangiano de la Ec.(56), y intercambiando derivadas entre un ciclo  $[\square(i-2)]$  y un ciclo  $[1]$ , mediante derivadas totales, se obtiene un término proporcional al de

la Ec.(55) (ver apéndice 3). Entonces una condición necesaria para que la teoría obedezca las tres condiciones arriba mencionadas, esto es, que ésta deba tener una acción con la combinación lineal

$$f \left\langle \begin{matrix} q_1 & q_2 & \dots & q_s \\ 1 & 2 & \dots & s \end{matrix} \right\rangle \times \left\{ \left[ \begin{matrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{matrix} \right] + \alpha_{\square} \left[ \begin{matrix} p_1 + 1 & p_2 & \dots & p_{i-2} & p_{i-1} + 1 & p_i - 1 & p_{i+1} & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & i-2 & i-1 & i & i+1 & \dots & r \end{matrix} \right] \right\}, \quad (57)$$

en donde  $\alpha_{\square}$  es la razón entre los coeficientes definida en la Ec.(49), la cual está dada por

$$\alpha_{\square} = -\frac{ip_i}{(p_1 + 1)(p_{i-1} + 1)(i - 1)}, \quad (58)$$

de donde se puede ver que  $\alpha_{\square}$  es independiente de  $f(\pi, X)$  (ver apéndice 3).

Un razonamiento similar se le puede aplicar a la "pieza"  $\langle \rangle$  definida en la Ec.(55). En ese sentido, usando de la Ec.(52) se sigue que cualquier teoría que obedezca las tres condiciones arriba mencionadas y que tenga un término en su acción dado por  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$  debe también contener un término

$$\alpha_{\langle j \rangle} f \begin{bmatrix} p_1 + 1 & p_2 & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{bmatrix} \left\langle \begin{matrix} q_1 & \dots & q_{j-2} & q_{j-1} + 1 & q_j - 1 & q_{j+1} & \dots & q_s \\ 1 & \dots & j-2 & j-1 & j & j+1 & \dots & s \end{matrix} \right\rangle, \quad (59)$$

en donde (ver apéndice 4)

$$\alpha_{\langle j \rangle} = -\frac{q_j}{(p_1 + 1)(q_{j-1} + 1)}. \quad (60)$$

De nuevo, las ecuaciones (48) y (59) tienen el mismo número de campos  $N$  y de  $n$  campos  $\pi$  dos veces diferenciados.

A partir de éste razonamiento recursivo para eliminar derivadas de cuarto orden, se pueden definir los mapeos  $F$  y  $G$  sobre el conjunto de monomios de la Ec.(48), éstos mapeos  $F$  llevan un término de  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$ , es decir de la Ec.(48), a uno de la forma de la Ec.(55), en el caso de los mapeos  $G$  llevan un término de la forma de la Ec.(48) a uno de la forma de la Ec.(59).

Nótese que al ir de la Ec.(48) a la Ec.(55), la potencia de  $[i]$  se disminuye en uno y las potencias tanto de  $[i-1]$  como de  $[1]$  se incrementan en uno. De manera similar, al ir de la Ec.(48) a la Ec.(59) la potencia de  $\langle j \rangle$  se disminuye en uno y las potencias tanto de  $\langle j-1 \rangle$  y  $\langle 1 \rangle$  aumentan en uno.

Entonces, aplicando recursivamente los mapeos  $F$  y  $G$ , a los ciclos  $[r]$  y  $\langle s \rangle$ , los cuales tienen el valor más alto de  $r$  y  $s$  respectivamente, uno puede llegar a la conclusión que cualquier

término  $\mathcal{L}_{q_1, q_2, \dots, q_s}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$  está conectado (mediante múltiples aplicaciones de los mapeos  $F$  y  $G$ ) a un término en el cual todos los  $p_i, q_i$  desaparecen menos  $p_1$  y  $q_1$ .

Éste término está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_q^p &= f[1]^p \langle 1 \rangle^q \\ &= f(\square \pi)^p (\pi^\mu \pi_{\mu\nu} \pi^\nu)^q,\end{aligned}\tag{61}$$

en donde

$$q = \sum_{j=1}^s q_j,\tag{62}$$

$$p = \sum_{i=1}^r i p_i + \sum_{j=1}^s (j-1) q_j.\tag{63}$$

Usando las ecuaciones (50) y (51) se obtiene:

$$p = \frac{1}{2}(3n - N),\tag{64}$$

$$q = \frac{1}{2}(N - n). \quad (65)$$

Ahora bien variando la acción dada por la Ec.(61) obtenemos un término con una cuarta derivada, el cual es proporcional a

$$f(\square\pi)^p (\pi^\lambda \pi^\rho \pi^\sigma \pi^\tau \pi_{\lambda\rho\sigma\tau}) (\pi^\mu \pi_{\mu\nu} \pi^\nu)^{q-2}, \quad (66)$$

sin embargo es imposible eliminar éste término mediante la variación de cualquier otro término en el Lagrangiano (conectado con  $\mathcal{L}_q^p$  mediante mapeos  $F$  ó  $G$ ). Entonces se concluye que solo existen dos posibilidades para el exponente  $q$

$$\begin{aligned} q=0 & \iff N = n \\ q=1 & \iff N = n + 2. \end{aligned} \quad (67)$$

Primero enfoquémonos en  $q = 0$ , tiene como particularidad que  $N = n$ , y de la Ec.(62) se encuentra que  $q_i = 0$  dado que todos son ó cero ó números naturales lo cual hace que el Lagrangiano sea una suma de monomios de la forma de la Ec.(43). Como se ha visto, esos coeficientes relativos son independientes de la función  $f$ . Uno puede concluir entonces que los coeficientes deben ser

los mismos  $\mathcal{E}_{p_1, \dots, p_r}^{N+1}$  que aparecen en la Ec.(45) de la expansión de  $\mathcal{E}_{N+1}$ . Como anteriormente se demostró, que si se considera a  $\mathcal{E}_{N+1}$  como un Lagrangiano, éste tiene ecuaciones de campo nulas, dado que es una derivada total. Por lo tanto, obedece las tres condiciones arriba mencionadas y cumple con el hecho de tener el número correcto de potencias,  $n = N$ , de campos dos veces diferenciados que aparece en la expansión de monomios de la Ec.(43).

Entonces, uno llega a la conclusión que cualquier teoría que obedece las tres condiciones y que tiene  $N = n$  debe tener un Lagrangiano de la forma  $g \times \mathcal{E}_{N+1}$ , en donde  $g$  es una función de  $\pi$  y  $X$ . Usando la Ec.(38), éste se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(3)}\{f\} &\equiv f(\pi, X) \mathcal{L}_{n+2}^{Gal,3} \\ &= f(\pi, X) \mathcal{L}_N^{Gal,3}, \end{aligned} \tag{68}$$

con  $f \equiv gX^{-1}$ . Un argumento similar se puede usar para la otra familia de modelos que resulta de  $q = 1$ .

Aquí la Ec.(62) es igual a uno, y  $N = n + 2$ ; éstos modelos deben tener un Lagrangiano de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(2)}\{f\} &\equiv f(\pi, X) \mathcal{L}_{n+2}^{Gal,2} \\ &= f(\pi, X) \mathcal{L}_N^{Gal,2}. \end{aligned} \tag{69}$$

En efecto  $\mathcal{L}_N^{Gal,2}$  obedece las tres condiciones y tiene una expansión en monómios de la forma de la Ec.(43) y de la Ec.(44) con  $q = 1$ .

Es sencillo ver a partir de

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_n\{f\} &= f(\boldsymbol{\pi}, X) \mathcal{L}_{N=n+2}^{Gal,3} \\ &= f(\boldsymbol{\pi}, X) \mathcal{L}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_\tau \pi^\tau \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \end{aligned} \quad (70)$$

que las ecuaciones de campo son de segundo orden (véase apéndice 6),

$$\begin{aligned} 0 &= 2(f + X f_X) \mathcal{E}_N + 4(2f_X + X f_{XX}) \mathcal{L}_{N+1}^{Gal,2} \\ &+ X[2X f_X \pi - (n-1)f_\pi] \mathcal{E}_{N-1} \\ &- n(4X f_X \pi + 4f_\pi) \mathcal{L}_N^{Gal,2} - nX f_\pi \pi \mathcal{L}_{N-1}^{Gal,1}. \end{aligned} \quad (71)$$

Finalmente estamos en posición de demostrar que la Ec.(68) y la Ec.(69) son equivalentes mediante derivadas totales, para lo cual se define  $\mathcal{L}_n^{(1)}\{f\} \equiv f(\boldsymbol{\pi}, X) \mathcal{L}_{n+2}^{Gal,1}$ . Al usar la identidad de la Ec.(28) los tres modelos de Galileones se generalizan como

$$n \mathcal{L}_n^{(2)}\{f\} = \mathcal{L}_n^{(3)}\{f\} - \mathcal{L}_n^{(1)}\{f\}, \quad (72)$$

y de manera similar la Ec.(33), se ve generalizada como

$$\partial_\mu(f(\pi, X)J_n^\mu) = 2\mathcal{L}_n^{(2)}\{f + Xf_X\} + \mathcal{L}_{n-1}^{(1)}\{Xf_\pi\} + \mathcal{L}_n^{(3)}\{f\}, \quad (73)$$

con  $J_N^\mu \equiv J_n^\mu$ .

La eliminación de  $\mathcal{L}_n^{(1)}$  entre éstas dos ecuaciones, (72) y (73), da una relación de recurrencia entre  $\mathcal{L}_n^{(2)}$  y  $\mathcal{L}_n^{(3)}$ , específicamente (ver apéndice 5)

$$\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\} = -(n-1)\mathcal{L}_{n-1}^{(2)}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial \pi}\right\} + \mathcal{L}_n^{(3)}\left\{\frac{g_1}{X}\right\} + \mathcal{L}_{n-1}^{(3)}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial \pi}\right\} + \text{tot. div.}, \quad (74)$$

con

$$g_1\{f\} = -\frac{1}{2}\int_o^X dY f(\pi, Y). \quad (75)$$

Usando (74) repetidamente, se encuentra que  $\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\}$  puede ser expresado como una combinación lineal de  $\mathcal{L}_i^{(3)}\{f\}$  y una derivada total, ésto es

$$\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\} = \mathcal{L}_0^{(3)}\left\{\frac{\partial g_{n,1}}{\partial \pi}\right\} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_n^{(3)}\left\{\frac{g_{n,i}}{X} + \frac{\partial g_{n,i+1}}{\partial \pi}\right\} + \mathcal{L}_n^{(3)}\left\{\frac{\partial g_{n,n}}{\partial \pi}\right\} + \text{tot. div.}, \quad (76)$$

en donde  $\mathcal{L}_0^{(3)}\{f\} = Xf$ , y además

$$\begin{aligned}
g_{n,i}\{f\} &\equiv \frac{(n-1)!}{(i-1)!} g_{n-i+1}\{f\}, \\
g_i\{f\} &\equiv -\frac{1}{2^i} \left( \frac{\partial}{\partial \pi} \right)^{i-1} \int_{X_0}^X dX_1 \int_{X_0}^{X_1} dX_2 \cdots \int_{X_0}^{X_{i-1}} dX_i f(\pi, X_i).
\end{aligned} \tag{77}$$

La Ec.(76) muestra la equivalencia de los Lagrangianos con  $q = 0$  y  $q = 1$  dado por las ecuaciones (68) y (69).

Finalmente, debido a que (76) y (72) para  $n = D$ , se tiene que  $D\mathcal{L}_D^{(2)}\{f\} = \mathcal{L}_D^{(3)}\{f\}$ , lo cual implica, a su vez, que  $\mathcal{L}_D^{(3)}\{f\}$  es una combinación lineal de  $\mathcal{L}_k^{(3)}$  con  $k = 0, \dots, D-1$ .

Entonces para concluir, el Lagrangiano más general en  $D$  dimensiones que obedece las tres condiciones arriba mencionadas está dado por

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{D-1} \mathcal{L}_n\{f_n\}. \tag{78}$$

en donde  $f_n$  son funciones arbitrarias de  $\pi$  y de  $X$ , y también  $\mathcal{L}_n\{f\} \equiv \mathcal{L}_n^{(3)}\{f\}$ .

En nuestro caso particular de  $D = 4$ , el Lagrangiano completo del Galileón escalar viene dado por la suma de

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_2(\pi, X), \\
\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_3(\pi, X)\square\pi, \\
\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_4(\pi, X)[(\square\pi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\pi)(\partial^\mu\partial^\nu\pi)], \\
\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_5(\pi, X)[(\square\pi)^3 - 3(\square\pi)(\partial_\mu\partial_\nu\pi)(\partial^\mu\partial^\nu\pi) + 2(\partial_\mu\partial^\nu\pi\partial_\nu\partial^\rho\pi\partial_\rho\partial^\mu\pi)].
\end{aligned} \tag{79}$$

### 3.3. Covariantización

Para extender los Lagrangianos encontrados a espacio-tiempo curvo, se cambian las derivadas parciales por derivadas covariantes y se agrega  $\sqrt{-g}$  para hacer invariante el elemento de línea ante transformaciones generales de coordenadas, además en ésta sección y en adelante se usará  $X = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\pi\nabla_\mu\pi$ , con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_2(\pi, X), \\
\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_3(\pi, X)\square\pi, \\
\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_4(\pi, X)[(\square\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi)], \\
\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv f_5(\pi, X)[(\square\pi)^3 - 3(\square\pi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) + 2(\nabla_\mu\nabla^\nu\pi\nabla_\nu\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\nabla^\mu\pi)],
\end{aligned} \tag{80}$$

en donde las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\pi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\pi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\pi)} = 0, \quad (81)$$

y pueden ser reescritas como (ver apéndice 7)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\pi} - \nabla_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\pi)} + \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)} = 0, \quad (82)$$

lo cual permite proceder a analizar las ecuaciones de campo de  $\mathcal{L}_4$  (ver apéndice 8). Allí se encuentra que existe un término con terceras derivadas de la métrica dado por  $-2f\nabla^\alpha\pi\nabla^\mu R_{\mu\alpha}$ , el cual no satisface la condición necesaria del teorema del Ostrogradski, lo cual implica necesariamente la adición de un término que elimine esta derivada de la métrica de tercer orden.

Entonces, se define  $\mathcal{L}'_4 = G(\pi, X)R$ , del cual se encuentra que el único término con derivadas de orden mayor a dos en la métrica está dado por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}'_4}{\partial(\nabla_\mu\pi)} \right) &\supset -(G_X\nabla^\mu\pi\nabla_\mu R) \\ &= -2G_X\nabla^\mu\pi\nabla^\gamma R_{\gamma\mu}, \end{aligned} \quad (83)$$

en tal caso, al adicionar  $\mathcal{L}'_4$  se elimina el término que contiene tercera derivada de la métrica al hacer  $f = G_X$  y por ende éste Lagrangiano queda reescrito como

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} = G_4(\pi, X)R + G_{4,X}(\pi, X)[(\square\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi)]. \quad (84)$$

Ahora se procede a mirar las ecuaciones de movimiento para  $\mathcal{L}_5$ (ver apéndice 9), allí se encuentra que éste Lagrangiano contiene una derivada del tensor de Einstein lo cual hace necesaria la introducción de un contra-término para poder eliminar ésta derivada.

Se define, por tanto, un nuevo Lagrangiano  $\mathcal{L}'_5 = G(\pi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi)$ , que aporta de la siguiente forma a las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} -\nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}'_5}{\partial (\nabla_\mu \pi)} \right) + \nabla_\alpha \nabla_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}'_5}{\partial (\nabla_\alpha \nabla_\beta \pi)} \right) &\supset G_X (\nabla_\alpha G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla^\alpha \pi \\ &+ G_{\mu\nu} \nabla^\alpha \pi \nabla_\alpha \nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\ &- G_X G^{\alpha\beta} \nabla^\gamma \pi \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \pi \\ &= G_X \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla^\alpha \pi \nabla_\alpha G_{\mu\nu} \\ &+ G_X G^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\tau} \nabla^\alpha \pi \nabla^\tau \pi \\ &= G_X \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla^\alpha \pi \nabla_\alpha G_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (85)$$

La adición de este nuevo Lagrangiano permite entonces eliminar la derivada del tensor de Einstein, lo cual hace que el Lagrangiano total quede reescrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_5(\pi, X) G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
&\quad - \frac{1}{6} G_{5,X}(\pi, X) [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) + 2(\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi)].
\end{aligned} \tag{86}$$

Los resultados obtenidos nos permiten afirmar que el Lagrangiano completo del Galileón escalar en espacio-tiempo curvo viene dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_2(\pi, X), \\
\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_3(\pi, X) \square \pi, \\
\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_4(\pi, X) R + G_{4,X}(\pi, X) [(\square \pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi)], \\
\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_5(\pi, X) G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
&\quad - \frac{1}{6} G_{5,X}(\pi, X) [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) + 2(\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi)].
\end{aligned} \tag{87}$$

#### 4. Rapidez de las ondas gravitacionales

Para hallar la ecuación de onda gravitacional que predice el Galileón escalar procedemos a perturbar a segundo orden su Lagrangiano. Perturbar a segundo orden el Lagrangiano es escribir cada término presente en el Lagrangiano de manera polinómica y hasta segunda potencia, de una perturbación en la métrica. Para ello es necesario perturbar cada cantidad presente en el Lagrangiano hasta segundo orden. Cada cantidad perturbada está calculada en el apéndice 10, así como

también en la Ref.(Wang, 2017) <sup>1</sup>.

De allí se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}G_n &= G_n, \\
 {}^{(1)}G_n &= 0, \\
 {}^{(2)}G_n &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}\sqrt{-g} &= a^4, \\
 {}^{(1)}\sqrt{-g} &= 0, \\
 {}^{(2)}\sqrt{-g} &= -\frac{a^4}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}\square\pi &= \partial_0\partial^0\pi + 4\partial_0\ln a\partial^0\pi, \\
 {}^{(1)}\square\pi &= 0, \\
 {}^{(2)}\square\pi &= -\frac{1}{2}h^{il}\partial_0h_{il}\partial^0\pi.
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

---

<sup>1</sup> Vale la pena aclarar que una perturbación de orden  $n$  sobre cierta cantidad  $f$ , se denota mediante superíndice previo a la cantidad  ${}^{(n)}$ , esto es  ${}^{(n)}f$ , perturbación  $n$ -ésima de  $f$ .

$$\begin{aligned}
(0)\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\mu}\pi &= \partial_0\partial^0\pi\partial_0\partial^0\pi + 2\partial_0\partial^0\pi\partial_0\ln a\partial^0\pi + 4\partial_0\ln a\partial^0\pi\partial_0\ln a\partial^0\pi, \\
(1)\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\mu}\pi &= 0, \\
(2)\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\mu}\pi &= \frac{1}{4}\partial_0h^{ij}\partial_0h_{ij}\partial^0\pi\partial^0\pi - h^{il}\partial_0h_{il}\partial^0\pi\partial_0\ln a\partial^0\pi.
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
(0)\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\rho}\pi\nabla_{\rho}\nabla^{\mu}\pi &= f(\pi, \partial_0\pi, \partial_0\partial_0\pi, a, \partial_0a), \\
(1)\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\rho}\pi\nabla_{\rho}\nabla^{\mu}\pi &= 0, \\
(2)\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\rho}\pi\nabla_{\rho}\nabla^{\mu}\pi &= -\frac{3}{2}h^{ij}\partial_0h_{ij}\partial^0\pi\partial_0\ln a\partial^0\pi\partial_0\ln a\partial^0\pi \\
&\quad + \frac{3}{4}\partial_0h_{ij}\partial_0h^{ij}\partial^0\pi\partial^0\pi\partial_0\ln a\partial^0\pi.
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
(0)R &= -4\partial_0\partial^0\ln a - 10\partial_0\ln a\partial^0\ln a, \\
(1)R &= 0, \\
(2)R &= a^{-2}\left(-h^{ij}\partial_0\partial_0h_{ij} - \frac{3}{4}\partial_0h_{ik}\partial_0h^{ki} + h^{ij}\partial_k\partial^kh_{ji} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4}\partial^kh_{lj}\partial_kh^{jl} - \frac{1}{2}\partial_kh_{lj}\partial^lh^{jk}\right) + 2h^{il}\partial_0h_{il}\partial^0\ln a.
\end{aligned} \tag{93}$$

Las Ec.(88), (89), (90), (91), (92) y (93) corresponden a las perturbaciones hasta segundo orden de una función general del campo,  $\sqrt{-g}$ ,  $\square\pi$ ,  $\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\mu}\pi$ ,  $\nabla_{\mu}\nabla^{\nu}\pi\nabla_{\nu}\nabla^{\rho}\pi\nabla_{\rho}\nabla^{\mu}\pi$  y  $R$  respectivamente.

La acción del Galileón escalar está dada por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i. \quad (94)$$

Mediante la derivada total

$$\nabla^\mu (G_5 G_{\mu\nu} \nabla^\nu \pi) = G_5 G_{\mu\nu} \nabla^\nu \nabla^\mu \pi + G_{5,\pi} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi + G_{5,X} G_{\mu\nu} \nabla^\mu X \nabla^\nu \pi, \quad (95)$$

se puede reescribir esta acción como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \left( G_4 - X G_{5,\pi} + \frac{1}{2} G_{5,X} \nabla_\mu \pi \nabla^\mu X \right) R \right. \\ & - \left( G_{5,\pi} \nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi + G_{5,X} \nabla^\mu X \nabla^\nu \pi \right) R_{\mu\nu} \\ & + \nabla_\mu \nabla_\nu \pi \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \left( \frac{1}{2} G_{5,X} \square \pi - G_{4,X} \right) \\ & - \frac{1}{3} G_{5,X} \nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi \\ & \left. + G_2 + G_3 \square \pi + G_{4,X} (\square \pi)^2 - \frac{1}{6} G_{5,X} (\square \pi)^3 \right] \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (96)$$

Haciendo uso de las perturbaciones en las cantidades presentes en la acción del Galileón escalar se encuentra que esta acción a segundo orden está dada por

$${}^{(2)}\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^4x M_*^2 \left[ (\dot{h}_{ij})^2 - v^2 (\nabla h_{ij})^2 \right], \quad (97)$$

en donde hemos vuelto a usar tiempo cósmico y no tiempo conforme, junto con esto  $M_*^2$  está dada por

$$M_*^2 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X} + XG_{5,\pi} - \dot{\pi}HXG_{5,X}), \quad (98)$$

y además

$$M_*^2 \alpha_T \equiv 2X[2G_{4,X} - 2G_{5,\pi} - (\ddot{\pi} - \dot{\pi}H)G_{5,X}], \quad (99)$$

en donde  $\alpha_T$  proviene de hacer

$$v^2 = 1 + \alpha_T. \quad (100)$$

Al hacer la variación de la acción de la Ec.(97) respecto a la perturbación de la métrica igual a cero se encuentran las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{ij}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu h_{ij})} \right) = 0. \quad (101)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange de la Ec.(101) a el Lagrangiano dentro de la Ec.(97) se encuentra

$$2\frac{\dot{M}_*}{M_*}\dot{h}^{ij} + \frac{1}{v^2}\ddot{h}^{ij} - \partial_k\partial^k h^{ij} = 0. \quad (102)$$

Esta última ecuación corresponde a una ecuación de onda, lo cual hace que a la perturbación de la métrica ( $h^{ij}$ ), se le asigne el nombre de onda gravitacional. Así pues la Ec.(97) corresponde a la acción de las ondas gravitacionales en esta teoría de gravedad modificada,  $M_*$  es la masa efectiva de Planck y  $v$  la rapidez de las ondas gravitacionales.

Nótese que en la acción perturbada del Galileón escalar Ec.(97) se omitieron términos como  $h_{ij}\dot{h}^{ij}$ ,  $h_{ij}\dot{h}^{ij}$  y  $\partial_k h_{lj}\partial^l h^{jk}$  dado que a la luz de las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentra que estos términos corresponden a fuentes de ondas gravitacionales.

La parametrización realizada sobre la rapidez de las ondas gravitacionales Ec.(100) tiene como propósito aislar las modificaciones de la rapidez de las ondas gravitacionales; por lo cual  $\alpha_T$ <sup>2</sup> puede tomar valores tanto negativos como positivos, pero debe cumplir que (ver Ref. (Baker et al., 2017))

$$|\alpha_T| \lesssim 1 \times 10^{-15}, \quad (103)$$

lo cual implica que para propósitos prácticos  $\alpha_T \approx 0$ . Una forma de satisfacer  $\alpha_T \approx 0$ , es mediante

---

<sup>2</sup> La medida de la desviación de la rapidez de las ondas gravitacionales respecto de la rapidez de la luz.

una delicada cancelación entre  $G_{4,X}$ ,  $G_{5,\pi}$  y  $G_{5,X}$ , pero debido a que  $\dot{\pi}$  y  $H$  están también presentes, es imposible que esta cancelación tenga un carácter global con respecto tanto al tiempo como al contenido material del universo. Otra posible forma de satisfacer la restricción experimental es posible por medio de  $G_{5,X} = 0$ , lo cual hace posible que  $G_{5,\pi}$  pueda ser integrado por partes, pero esta cancelación es equivalente a  $G_{4,X} = 0$ .

Entonces finalmente vemos que para hacer  $\alpha_T \approx 0$  evitando cualquier tipo de ajuste fino se debe hacer  $G_{4,X} = 0$ ,  $G_{5,\pi} = 0$  y  $G_{5,X} = 0$ , dado que son funciones independientes  $G_5(\pi, X)$ , queda convertida en una constante y su Lagrangiano como

$$\mathcal{L}_5 \propto G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \pi, \quad (104)$$

el cual no lleva a ecuaciones de campo, por lo cual  $\mathcal{L}_5$  queda completamente anulado y de  $\mathcal{L}_4$  no sobrevive el término con segundas derivadas del campo.

Finalmente la acción del Galileón escalar es

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=2}^4 \mathcal{L}_i, \quad (105)$$

en donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_2(\pi, X), \\
\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_3(\pi, X) \square \pi, \\
\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} &\equiv G_4(\pi) R.
\end{aligned}
\tag{106}$$

## 5. Conclusiones

En este trabajo se realizó la construcción de la acción del Galileón escalar y posteriormente se falsó esta acción mediante la restricción en la rapidez de las ondas gravitacionales, todo esto mediante la reproducción de la construcción del Lagrangiano del Galileón escalar de acuerdo a (Deffayet et al., 2011; Rodriguez and Navarro, 2017), la demostración de la unicidad es espacio-tiempo de Minkowski del Lagrangiano del Galileón escalar según (Deffayet et al., 2011), la covariantización de la acción del Galileón escalar de acuerdo a (Rodriguez and Navarro, 2017), la obtención de la acción de las ondas gravitacionales en esta teoría de gravedad modificada siguiendo a (Wang, 2017) y, finalmente, la obtención de la acción falsada del Galileón escalar de acuerdo a (Baker et al., 2017; Sakstein and Jain, 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017) mediante el uso de la restricción existente sobre la rapidez de las ondas gravitacionales.

El resultado obtenido, Ec.(106), corresponde físicamente a una modificación de la ley de gravitación universal de Newton para escalas mayores al sistema solar, cumple con la restricción experimental  $v = 1$ , y no genera períodos de expansión acelerada del universo por lo cual presenta

una evolución acorde a la cosmología (véase la Ref.(Wang et al., 2012)). Este resultado incluye teorías de gravedad de la forma  $f(R)$  (véase la Ref.(Lombriser and Lima, 2017)) y es del tipo Jordan-Brans-Dick generalizado. Así, se concluye entonces que la acción falseada del Galileon escalar no lleva a física nueva pero, en general, existen en la naturaleza tanto campos escalares como campos vectoriales, lo cual, junto con la novedosa idea de evitar la inestabilidad de Ostrogradski para que una teoría sea física, constituye una guía para construir teorías que busquen describir nuestro universo. En este sentido, de hecho, ya existe la versión de la acción de Horndeski para un campo vectorial (véase la Ref.(Hull et al., 2016; Rodríguez and Navarro, 2017)), y se le conoce como Galileon vectorial; existen también diferentes trabajos en la fenomenología del Galileon vectorial como se puede observar en (Rodríguez and Navarro, 2018; Chagoya et al., 2017), incluidas las restricciones provenientes de  $v = 1$  (véase la Ref. (Baker et al., 2017)). También se han empezado a desarrollar teorías que involucran varios campos escalares las cuales evitan la inestabilidad de Ostrograski (véase la Ref. (Allys, 2017)) así como también la teoría de los “Galileones tensoriales” (véase la Ref. (Chatzistavrikidis et al., 2017)). Se espera a futuro poder seguir trabajando con esta novedosa idea junto con las restricción en la rapidez de las ondas gravitacionales en la búsqueda de teorías más generales que describan nuestro universo de manera cada vez más precisa.

### Referencias Bibliográficas

- Abbott, B. P. et al. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102.
- Abbott, B. P. et al. (2017a). Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB170817A. *Astrophys. J.*, 848(2):L13.
- Abbott, B. P. et al. (2017b). Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *Astrophys. J.*, 848(2):L12.
- Abbott, B. P. et al. (2017c). GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101.
- Allys, E. (2017). New terms for scalar multi-Galileon models and application to SO(N) and SU(N) group representations. *Phys. Rev.*, D95(6):064051.
- Baker, T. et al. (2017). Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251301.
- Bettoni, D., Ezquiaga, J. M., Hinterbichler, K., and Zumalacárregui, M. (2017). Speed of gravitational waves and the fate of scalar-tensor gravity. *Phys. Rev.*, D95(8):084029.
- Chagoya, J., Niz, G., and Tasinato, G. (2017). Black Holes and Neutron Stars in Vector Galileons. *Class. Quant. Grav.*, 34(16):165002.

Chatzistavrakidis, A., Khoo, F. S., Roest, D., and Schupp, P. (2017). Tensor Galileons and Gravity. *JHEP*, 1703:070.

Creminelli, P. and Vernizzi, F. (2017). Dark energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251302.

Deffayet, C., Deser, S., and Esposito-Farese, G. (2009). Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors. *Phys. Rev.*, D80:064015.

Deffayet, C., Gao, X., Steer, D. A., and Zahariade, G. (2011). From k-essence to generalised galileons. *Phys. Rev.*, D84:064039.

Einstein, A. (1918). Über gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167.

Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2017). Dark energy after GW170817: Dead ends and the road ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251304.

Georgi, H. (1999). Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories. Westview press.

Horndeski, G. W. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384.

- Hull, M., Koyama, K., and Tasinato, G. (2016). Covariantized vector Galileons. *Phys. Rev.*, D93(6):064012.
- Kane, G. (1993). *Modern Elementary Particle Physics: The Fundamental Particles and Forces?* Addison-Wesley Pub.
- Kobayashi, T., Yamaguchi, M., and Yokoyama, J. (2011). Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. *Prog. Theor. Phys.*, 126:511–529.
- Lombriser, L. and Lima, N. A. (2017). Challenges to Self-Acceleration in Modified Gravity from Gravitational Waves and Large-Scale Structure. *Phys. Lett.*, B765:382–385.
- Lyth, D. H. and Liddle, A. R. (2009). *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure.* Cambridge University Press.
- Moore, G. D. and Nelson, A. E. (2001). Lower bound on the propagation speed of gravity from gravitational cherenkov radiation. *JHEP*, 0109:023.
- Mukhanov, V. F., Feldman, H., and Brandenberger, R. (1992). Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, 215:203 – 333.
- Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E. (2009). The galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79:064036.
- Ostrogradski, M. (1850). Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres. *Mem. Ac. St. Petersbourg*, VI:385.

Popper, K. (2005). *The logic of scientific discovery*. Routledge.

Rodríguez, Y. and Navarro, A. A. (2017). Scalar and vector galileons. *J. Phys. Conf. Ser.*, 831(1):012004.

Rodríguez, Y. and Navarro, A. A. (2018). Non-Abelian  $S$ -term dark energy and inflation. *Phys. Dark Univ.*, 19:129–136.

Sakstein, J. and Jain, B. (2017). Implications of the neutron star merger GW170817 for cosmological scalar-tensor theories. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251303.

Wang, J., Hui, L., and Khoury, J. (2012). No-Go Theorems for Generalized Chameleon Field Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 109:241301.

Wang, M. S. (2017). Primordial gravitational waves from cosmic inflation. *Mathematical Tripos Part III Essay #75, University of Cambridge*.

Will, C. M. (2014). The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Relativ.*, 17:4.

Woodard, R. P. (2007). Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity. *Lect. Notes Phys.*, 720:403–433.

Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky's theorem on hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8):32243.

## Apéndices

### Apéndice A. Forma alternativa de $\mathcal{E}_N$

La cantidad  $\mathcal{E}_N$  se encuentra definida por

$$\mathcal{E}_N \equiv \mathcal{A}_{(2n+2)}^{\mu_1 \dots \mu_{n+1} \nu_1 \dots \nu_{n+1}} \pi_{\mu_1 \nu_1} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_{n+1} \nu_{n+1}}. \quad (107)$$

Dado que  $\mathcal{E}_N$  contiene solo segundas derivadas del un campo escalar contraídas con un tensor métrico, se puede entonces reescribir en términos de los ciclos definidos en la Ec.(39) mediante

$$\mathcal{E}_N = \sum \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{bmatrix}, \quad (108)$$

en donde la sumatoria va sobre todos los índices  $p_i$  que representan las potencias de cada uno de los ciclos.

De forma alternativa  $\mathcal{E}_N$  se puede escribir como

$$\mathcal{E}_N \equiv - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} \pi^{\mu_{\sigma(i)}}. \quad (109)$$

Por ejemplo para hallar los coeficientes  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N$  para  $\mathcal{E}_N$  con  $N = 4$  (3 campos dos veces

derivados) se usa la definición de  $\mathcal{E}_N$  en términos de  $\mathcal{A}$  y se encuentra que

$$\mathcal{E}_4 = -[1]^3 + 3[1][2] - 2[3] = - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

con

$$3 = p_1 + 2p_2 + 3p_3. \quad (111)$$

Los coeficientes  $p_i$  son números naturales o cero (dado que son potencias), y cumplen esta igualdad si  $p_1 = 3$  y  $p_2 = p_3 = 0$  con  $\mathcal{C}_{p_1 p_2, p_3}^4 = -1$ , ó  $p_1 = p_2 = 1$  y  $p_3 = 0$  con  $\mathcal{C}_{p_1 p_2, p_3}^4 = 3$ , ó si  $p_1 = p_2 = 0$  y  $p_3 = 1$  con  $\mathcal{C}_{p_1 p_2, p_3}^4 = -2$  y así se obtiene que para  $N = 4$ , los coeficientes de  $\mathcal{E}_N$  son

$$\mathcal{C}_{p_1, p_2, p_3}^4 = (-1)^{3+p_1+p_2+p_3} \frac{(3)!}{p_1! p_2! p_3! 1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}}. \quad (112)$$

Análogamente los coeficientes  $\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N$  se hallan con la definición de  $\mathcal{E}_N$  en términos de  $\mathcal{A}$  con lo cual se encuentra que

$$\mathcal{C}_{p_1, \dots, p_r}^N = (-1)^{N+p_1+\dots+p_r} \frac{(N-1)!}{p_1! p_2! \dots p_r! 1^{p_1} 2^{p_2} \dots r^{p_r}}. \quad (113)$$

### Apéndice B. Variación de los ciclos $[i]$ y $\langle j \rangle$

En el Lagrangiano la variación de  $[i]^{p_i}$  respecto al campo está dada por

$$\begin{aligned}
\delta_\pi [i]^{p_i} &= \partial_\alpha \partial_\beta \left( \frac{\partial([i]^{p_i})}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \pi)} \right) \delta \pi \\
&\supset i p_i [i]^{p_i-1} \partial_\alpha \partial_\beta \left( \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}} \delta_\beta^{\mu_j} \delta_{\mu_{j+1}}^\alpha \pi_{\mu_{j+2}}^{\mu_{j+1}} \dots \pi_{\mu_1}^{\mu_i} \right) \delta \pi \\
&\supset 2i p_i [i]^{p_i-1} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}} \square \pi_{\mu_{j+1}}^{\mu_j} \pi_{\mu_{j+2}}^{\mu_{j+1}} \dots \pi_{\mu_1}^{\mu_{i-1}} \delta \pi \\
&= \frac{2i p_i}{i-1} [\square(i-1)] [i]^{p_i-1} \delta \pi.
\end{aligned} \tag{114}$$

Para el caso de  $\langle i \rangle^{q_i}$ , su variación respecto al campo está dada por

$$\begin{aligned}
\delta_\pi \langle i \rangle^{q_i} &= \partial_\alpha \partial_\beta \left( \frac{\partial(\langle i \rangle^{q_i})}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \pi)} \right) \delta \pi \\
&\supset q_i \langle i \rangle^{q_i-1} \partial_\alpha \partial_\beta \sum_{j=1}^i \pi_{\mu_1} \pi^{\mu_{i+1}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}} \delta_\beta^{\mu_j} \delta_{\mu_{j+1}}^\alpha \pi_{\mu_{j+2}}^{\mu_{j+1}} \dots \pi_{\mu_{i+1}}^{\mu_i} \delta \pi \\
&\supset 2q_i \langle i \rangle^{q_i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \pi_{\mu_1} \pi^{\mu_{i+1}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}} \square \pi_{\mu_{j+1}}^{\mu_j} \pi_{\mu_{j+2}}^{\mu_{j+1}} \dots \pi_{\mu_{i+1}}^{\mu_i} \delta \pi \\
&= 2q_i \langle \square(i-1) \rangle \langle i \rangle^{q_i-1} \delta \pi.
\end{aligned} \tag{115}$$

### Apéndice C. Razón entre coeficientes $\alpha_{\square}$

Partiendo del Lagrangiano,  $\mathcal{L}$ , definido en la Ec. (56) se encuentra que la variación sobre el ciclo  $[i-1]$  está dada por

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi} \delta \pi \supset f \frac{\delta [i-1]^{p_{i-1}+1}}{\delta \pi} [1]^{p_1+1} [2]^{p_2} \dots [i-2]^{p_{i-2}} [i]^{p_i-1} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle \delta \pi, \quad (116)$$

en donde

$$\frac{\delta [i-1]^{p_{i-1}+1}}{\delta \pi} \delta \pi = \frac{2(p_{i-1}+1)(i-1)}{(i-2)} [\square(i-2)] [i-1]^{p_{i-1}} \delta \pi. \quad (117)$$

Para obtener un término proporcional al de la Ec. (55) se hacen las siguientes derivadas totales:

$$\begin{aligned}
& \partial_{\mu_1} \left( 2(i-1)(p_{i-1}+1)f[1]^{p_1+1}[2]^{p_2} \dots [i-2]^{p_{i-2}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_{i-2}}^{\mu_{i-3}} \square \pi^{\mu_{i-2}} [i-1]^{p_{i-1}} \right. \\
& \quad \left. \times [i]^{p_{i-1}} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle \right) \\
& \supset 2(i-1)(p_{i-1}+1)f[1]^{p_1+1}[2]^{p_2} \dots [i-2]^{p_{i-2}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_{i-2}}^{\mu_{i-3}} \square \pi_{\mu_1}^{\mu_{i-2}} [i-1]^{p_{i-1}} \\
& \quad \times [i]^{p_{i-1}} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle \\
& + 2(i-1)(p_{i-1}+1)(p_1+1)f[1]^{p_1}[2]^{p_2} \dots [i-2]^{p_{i-2}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_{i-2}}^{\mu_{i-3}} \square \pi^{\mu_{i-2}} \square \pi_{\mu_1} [i-1]^{p_{i-1}} \\
& \quad \times [i]^{p_{i-1}} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle,
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_v \left( 2(i-1)(p_{i-1}+1)(p_1+1)f[1]^{p_1}[2]^{p_2} \dots [i-2]^{p_{i-2}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_{i-2}}^{\mu_{i-3}} \square \pi^{\mu_{i-2}} \pi_{\mu_1}^v [i-1]^{p_{i-1}} \right. \\
& \quad \left. \times [i]^{p_{i-1}} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle \right) \\
& \supset 2(i-1)(p_{i-1}+1)(p_1+1)f[1]^{p_1}[2]^{p_2} \dots [i-2]^{p_{i-2}} \pi_{\mu_2}^{\mu_1} \dots \pi_{\mu_{i-2}}^{\mu_{i-3}} \square \pi^{\mu_{i-2}} \square \pi_{\mu_1} [i-1]^{p_{i-1}} \\
& \quad \times [i]^{p_{i-1}} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle \\
& + 2(p_{i-1}+1)(p_1+1)f[1]^{p_1} \dots [i-2]^{p_{i-2}} [\square(i-1)] [i-1]^{p_{i-1}} \\
& \quad \times [i]^{p_{i-1}} [i+1]^{p_{i+1}} \dots [r]^{p_r} \langle \dots \rangle.
\end{aligned} \tag{119}$$

Al multiplicar el último término de la segunda derivada total por la cantidad

$$\alpha_{\square} = \frac{-ip_i}{(i-1)(p_1+1)(p_{i-1}+1)}, \tag{120}$$

se obtiene una expresión que contrarresta a la Ec.(55).

### Apéndice D. Razón entre coeficientes $\alpha_{\langle j \rangle}$

Partiendo del Lagrangiano,  $\mathcal{L}$ , definido en la Ec. (59) se encuentra que la variación sobre el ciclo  $\langle i-1 \rangle$  está dada por

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi} \delta \pi \supset f \frac{\delta \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}+1}}{\delta \pi} [1]^{p_1+1} [2]^{p_2} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s} \delta \pi, \quad (121)$$

$$\frac{\delta \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}+1}}{\delta \pi} \delta \pi = 2(q_{j-1}+1) \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \langle \square(j-2) \rangle \delta \pi. \quad (122)$$

Para poder contrarrestar los términos de cuartas derivadas que se obtienen al variar  $\langle j \rangle$  en la acción Ec.(48), se realizan las siguientes derivadas totales:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{j-2} \partial^{\mu_k} \left( 2f(q_{j-1}+1) [1]^{p_1+1} [2]^{p_2} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \right. \\ & \quad \times \pi_{\mu_1}^{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_k}^{\mu_k} \square \pi_{\mu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \pi_{\mu_{k+2}}^{\mu_{k+2}} \dots \pi_{\mu_{j-1}}^{\mu_{j-1}} \pi^{\mu_{j-1}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s} \left. \right) \\ & \supset 2f(q_{j-1}+1) [1]^{p_1+1} [2]^{p_2} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \\ & \quad \times \langle \square(j-2) \rangle \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s} \\ & + 2f(q_{j-1}+1) (p_1+1) [1]^{p_1} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \\ & \quad \times \sum_{k=1}^{j-2} \square \pi^{\mu_k} \pi_{\mu_1}^{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_k}^{\mu_k} \square \pi_{\mu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \pi_{\mu_{k+2}}^{\mu_{k+2}} \dots \pi_{\mu_{j-1}}^{\mu_{j-1}} \pi^{\mu_{j-1}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s}, \end{aligned} \quad (123)$$

$$\begin{aligned}
& \partial^{\nu} \left( 2f(q_{j-1} + 1)(p_1 + 1)[1]^{p_1} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \right. \\
& \quad \times \sum_{k=1}^{j-2} \pi_{\nu}^{\mu_k} \pi_{\mu_1}^{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \square \pi_{\mu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \pi_{\mu_{k+2}}^{\mu_{k+2}} \dots \pi_{\mu_{j-1}}^{\mu_{j-2}} \pi^{\mu_{j-1}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s} \left. \right) \\
& \supset 2f(q_{j-1} + 1)(p_1 + 1)[1]^{p_1} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \\
& \quad \times \sum_{k=1}^{j-2} \square \pi^{\mu_k} \pi_{\mu_1}^{\mu_1} \pi_{\mu_2}^{\mu_2} \dots \pi_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \square \pi_{\mu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \pi_{\mu_{k+2}}^{\mu_{k+2}} \dots \pi_{\mu_{j-1}}^{\mu_{j-2}} \pi^{\mu_{j-1}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s} \\
& + 2f(q_{j-1} + 1)(p_1 + 1)[1]^{p_1} \dots [r]^{p_r} \langle 1 \rangle^{q_1} \dots \langle j-2 \rangle^{q_{j-2}} \\
& \quad \times \langle \square(j-1) \rangle \langle j-1 \rangle^{q_{j-1}} \langle j \rangle^{q_{j-1}} \langle j+1 \rangle^{q_{j+1}} \dots \langle s \rangle^{q_s}.
\end{aligned} \tag{124}$$

Finalmente para contrarrestar los términos de cuartas derivadas que se obtienen al variar  $\langle j \rangle$  en la acción Ec.(48), se multiplica el último término de la segunda derivada total por la cantidad

$$\alpha_{\langle j \rangle} = - \frac{q_j}{(q_{j-1} + 1)(p_1 + 1)}. \tag{125}$$

### Apéndice E. Equivalencia entre los Lagrangianos $\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\}$ y $\mathcal{L}_n^{(3)}\{f\}$

La Ec.(33), se ve generalizada como

$$\partial_\mu(f(\pi, X)J_n^\mu) = 2\mathcal{L}_n^{(2)}\{f + Xf_X\} + \mathcal{L}_{n-1}^{(1)}\{Xf_\pi\} + \mathcal{L}_n^{(3)}\{f\}, \quad (126)$$

al agregar  $f(\pi, X)$ , y también al agregar  $f(\pi, X)$  a la expansión de Laplace se encuentra

$$n\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\} = \mathcal{L}_n^{(3)}\{f\} - \mathcal{L}_n^{(1)}\{f\}, \quad (127)$$

de la cual se puede cambiar  $n$  por  $n-1$  y  $f$  por  $g_{1,\pi}$  para obtener

$$(n-1)\mathcal{L}_{n-1}^{(2)}\{g_{1,\pi}\} = \mathcal{L}_{n-1}^{(3)}\{g_{1,\pi}\} - \mathcal{L}_{n-1}^{(1)}\{g_{1,\pi}\}, \quad (128)$$

en donde  $g_{1,\pi}$  es la derivada de  $g_1$  respecto de  $\pi$ , y además

$$g_1\{f\} = -\frac{1}{2} \int_0^X dY f(\pi, Y). \quad (129)$$

La Ec.(33), también se puede generalizar como

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(X^{-1}g_1J_n^\mu) &= X^{-1}(g_{1,X}\partial_\mu X + g_{1,\pi}\partial_\mu\pi)J_n^\mu + X^{-1}\mathcal{L}_n^{(3)}\{g_1\} \\
&= \mathcal{L}_{n-1}^{(1)}\{g_{1,\pi}\} + 2\mathcal{L}_n^{(2)}\{g_{1,X}\} + \mathcal{L}_n^{(3)}\left\{\frac{g_1}{X}\right\},
\end{aligned} \tag{130}$$

que, junto con la Ec.(128) se encuentra

$$\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\} = -(n-1)\mathcal{L}_{n-1}^{(2)}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial\pi}\right\} + \mathcal{L}_n^{(3)}\left\{\frac{g_1}{X}\right\} + \mathcal{L}_{n-1}^{(3)}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial\pi}\right\} + \text{tot. div.} \tag{131}$$

Se define  $\mathcal{L}_0^{(3)}\{f\} \equiv Xf$ , y además

$$\begin{aligned}
g_{n,i}\{f\} &\equiv \frac{(n-1)!}{(i-1)!}g_{n-i+1}\{f\}, \\
g_i\{f\} &\equiv -\frac{1}{2^i}\left(\frac{\partial}{\partial\pi}\right)^{i-1}\int_{X_0}^X dX_1 \int_{X_0}^{X_1} dX_2 \cdots \int_{X_0}^{X_{i-1}} dX_i f(\pi, X_i).
\end{aligned} \tag{132}$$

Para  $n = 1$  nótese que  $\mathcal{L}_1^{(2)}\{f\}$  queda escrito en términos de  $\mathcal{L}_0^{(3)}\{f\}$  y  $\mathcal{L}_1^{(3)}\{f\}$  lo cual hace posible que  $\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\}$ , para cualquier  $n$ , pueda ser escrito en términos de  $\mathcal{L}_i^{(3)}\{f\}$ , con  $i$  desde 0 hasta  $n$ .

Así pues, usando repetidamente la Ec.(131), queda expresado  $\mathcal{L}_n^{(2)}\{f\}$  como una combi-

nación lineal de  $\mathcal{L}_i^{(3)} \{f\}$  y una derivada total, ésto es

$$\mathcal{L}_n^{(2)} \{f\} = \mathcal{L}_0^{(3)} \left\{ \frac{\partial g_{n,1}}{\partial \pi} \right\} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_n^{(3)} \left\{ \frac{g_{n,i}}{X} + \frac{\partial g_{n,i+1}}{\partial \pi} \right\} + \mathcal{L}_n^{(3)} \left\{ \frac{\partial g_{n,n}}{\partial \pi} \right\} + \text{tot. div.}, \quad (133)$$

Finalmente se ve aquí la equivalencia de los Lagrangianos con  $q = 0$  y  $q = 1$  junto con esto debido a que (76) y (72) para  $n = D$ , da como resultado  $D\mathcal{L}_D^{(2)} \{f\} = \mathcal{L}_D^{(3)} \{f\}$ , lo cual implica, a su vez, que  $\mathcal{L}_D^{(3)} \{f\}$  es una combinación lineal de  $\mathcal{L}_k^{(3)}$  con  $k = 0, \dots, D - 1$ .

Entonces para concluir, el Lagrangiano más general en  $D$  dimensiones que obedece las tres condiciones arriba mencionadas está dado por

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{D-1} \mathcal{L}_n \{f_n\}. \quad (134)$$

en donde  $f_n$  son funciones arbitrarias de  $\pi$  y de  $X$ , y también  $\mathcal{L}_n \{f_n\} \equiv \mathcal{L}_n^{(3)} \{f_n\}$ .

### Apéndice F. Ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a $\mathcal{L}$

Para hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange de  $\mathcal{L}$  se procede a calcular de manera separada cada término de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \pi)} \right) + \partial_\alpha \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \pi)} \right) = 0, \quad (135)$$

con  $X = \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi$ , se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} = f_\pi X \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}. \quad (136)$$

Para el segundo término:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = (f + X f_X) \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left( 2\pi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \right) &= 2\pi^\alpha (f + X f_X) \mathcal{E}_{N-1} \\ &+ 2\pi^\alpha (f_\pi \pi_\alpha + 4f_X \pi_{\alpha\gamma} \pi^\gamma + X f_{\pi X} \pi_\alpha + 2X f_{XX} \pi_{\alpha\gamma} \pi^\gamma) \mathcal{E}_{N-1} \\ &+ 2\pi^\alpha (f + X f_X) \partial_\alpha \mathcal{E}_{N-1}, \end{aligned} \quad (138)$$

$$2\pi^\alpha f \partial_\alpha \mathcal{E}_{N-1} = 2n\pi^\alpha f \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_1 \nu_1} \alpha \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \quad (139)$$

$$2\pi^\alpha X f_X \partial_\alpha \mathcal{E}_{N-1} = 2n\pi^\alpha X f_X \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_1 \nu_1} \alpha \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_{i-1} \nu_{i-1}} \delta_{\mu_i}^\alpha \delta_{\nu_i}^\beta \pi_{\mu_{i+1} \nu_{i+1}} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \quad (140)$$

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \partial_{\mu_i} \left( \pi_{\mu_1 \nu_1} \dots \pi_{\mu_{i-1} \nu_{i-1}} \delta_{\nu_i}^\beta \pi_{\mu_{i+1} \nu_{i+1}} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} \right) = 0. \quad (141)$$

Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \pi)} \right) &= \partial_\alpha \partial_\beta \left( X f \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) \\ &= (\partial_\alpha \partial_\beta X f + \partial_\beta X \partial_\alpha f + \partial_\alpha X \partial_\beta f + X \partial_\alpha \partial_\beta f) \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \\ &= (2\pi_\alpha^\gamma \pi_\gamma f + 2\pi_\beta^\gamma \pi_\gamma \alpha f + 2\pi_\beta^\gamma \pi_\gamma (f_\pi \pi_\alpha + 2f_X \pi_{\alpha\sigma} \pi^\sigma) \\ &\quad + 2\pi_\alpha^\gamma \pi_\gamma (f_\pi \pi_\beta + 2f_X \pi_{\beta\sigma} \pi^\sigma) + X \pi_{\alpha\beta} f_\pi + X \pi_\alpha \pi_\beta f_{\pi\pi} \\ &\quad + 2X \pi_\beta \pi_{\alpha\tau} \pi^\tau f_{\pi X} + 2X \pi_\alpha \pi_{\beta\sigma} \pi^\sigma f_X \pi \\ &\quad + 4X \pi_{\alpha\tau} \pi^\tau \pi_{\beta\sigma} \pi^\sigma f_{XX} + 2X \pi_{\alpha\beta\sigma} \pi^\sigma f_X \\ &\quad + 2X \pi_{\beta\sigma} \pi_\alpha^\sigma f_X) \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \pi)} \right) &= (2\pi_{\lambda\alpha\beta} \pi^\lambda f + 2\pi_{\alpha\lambda} \pi_\beta^\lambda f + 4\pi_{\beta\lambda} \pi^\lambda \pi_\alpha f_\pi + 8\pi_{\lambda\alpha} \pi^\lambda \pi^\sigma \pi_{\sigma\beta} f_X \\
&+ X \pi_{\alpha\beta} f_\pi + X \pi_\alpha \pi_\beta f_{\pi\pi} + 4X \pi^\gamma \pi_{\gamma\alpha} \pi_\beta f_X \pi \\
&+ 4X \pi^\gamma \pi_{\gamma\alpha} \pi^\sigma \pi_{\sigma\beta} f_{XX} + 2X f_X \pi_{\alpha\beta\lambda} \pi^\lambda + 2X f_X \pi_{\alpha\lambda} \pi_\beta^\lambda) \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}},
\end{aligned} \tag{143}$$

en donde

$$\begin{aligned}
\pi_{\alpha\beta} f_\pi X \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= n f_\pi X \mathcal{E}_{N-1}, \\
2\pi_{\alpha\beta\lambda} \pi^\lambda f \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 2n \pi^\lambda f \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_1 \nu_1 \lambda} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \\
2\pi_{\lambda\alpha} \pi_\beta^\lambda f \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 2n \pi_{\lambda\mu_1} \pi_{\nu_1}^\lambda f \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \\
4\pi_{\lambda\alpha} \pi^\lambda \pi_\beta f_\pi \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 4n \pi_{\lambda\mu_1} \pi_{\nu_1}^\lambda \pi_{\nu_1} f_\pi \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} = 4n f_\pi \mathcal{L}_N^{Gal,2}, \\
8\pi_{\lambda\alpha} \pi^\lambda \pi^\sigma \pi_{\sigma\beta} f_X \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 8n \pi_{\lambda\mu_1} \pi_{\nu_1}^\lambda \pi_{\sigma\nu_1} f_X \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n},
\end{aligned} \tag{144}$$

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha \pi_\beta f_\pi X \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= n \pi_{\mu_1} \pi_{\nu_1} f_\pi X \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} = n f_\pi X \mathcal{L}_{N-1}^{Gal,1}, \\
4\pi^\gamma \pi_{\gamma\alpha} \pi_\beta X f_X \pi \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 4n \pi^\gamma \pi_{\gamma\mu_1} \pi_{\nu_1} X f_X \pi \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} \\
&= 4n X f_X \pi \mathcal{L}_N^{Gal,2}, \\
2\pi_\beta^\gamma \pi_{\gamma\alpha} X f_X \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 2n \pi_{\mu_1}^\gamma \pi_{\gamma\nu_1} X f_X \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \\
2\pi_{\alpha\beta\gamma} \pi^\gamma X f_X \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 2n \pi_{\mu_1 \nu_1 \gamma} \pi^\gamma X f_X \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}, \\
4X \pi^\gamma \pi_{\gamma\alpha} \pi^\sigma \pi_{\sigma\beta} X f_{XX} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{N-1}}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \right) &= 4n \pi^\gamma \pi_{\gamma\mu_1} \pi^\sigma \pi_{\sigma\nu_1} X f_{XX} \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n}.
\end{aligned} \tag{145}$$

Así las ecuaciones de Euler-Lagrange estarían dadas por

$$\begin{aligned}
0 &= (n-1) f_\pi X \mathcal{E}_{N-1} + 4n X f_X \pi \mathcal{L}_N^{Gal,2} + 4n f_\pi \mathcal{L}_N^{Gal,2} - 2\pi_\alpha^\alpha (f + X f_X) \mathcal{E}_{N-1} \\
&\quad - 2\pi^\alpha (4f_X \pi_{\alpha\gamma} \pi^\gamma + X f_X \pi \pi_\alpha + 2X f_{XX} \pi_{\alpha\gamma} \pi^\gamma) \mathcal{E}_{N-1} \\
&\quad + 2n(f + X f_X) \pi_{\lambda\mu_1} \pi_{\nu_1}^\lambda \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} \\
&\quad + 4n(2f_X + X f_{XX}) \pi^\gamma \pi_{\gamma\mu_1} \pi^\sigma \pi_{\sigma\nu_1} \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} \pi_{\mu_2 \nu_2} \dots \pi_{\mu_n \nu_n} \\
&\quad + nX f_\pi \pi \mathcal{L}_{N-1}^{Gal,1}.
\end{aligned} \tag{146}$$

Gracias a que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{N+1}^{Gal,2} &= \pi^\alpha \pi_\lambda \pi_\alpha^\lambda \mathcal{E}_{N-1} - n\pi^\alpha \pi_\lambda \pi_{v_1}^\lambda \pi_{\alpha\mu_1} \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n v_1 \dots v_n} \pi_{\mu_2 v_2} \dots \pi_{\mu_n v_n}, \\ \mathcal{E}_N &= \pi_\alpha^\alpha \mathcal{E}_{N-1} - n\pi_{v_1}^\alpha \pi_{\alpha\mu_1} \mathcal{A}^{\mu_1 \dots \mu_n v_1 \dots v_n} \pi_{\mu_2 v_2} \dots \pi_{\mu_n v_n},\end{aligned}\tag{147}$$

se obtiene finalmente que las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan escritas como

$$\begin{aligned}0 &= (n-1)f_\pi X \mathcal{E}_{N-1} + 4nX f_X \pi \mathcal{L}_N^{Gal,2} + 4nf_\pi \mathcal{L}_N^{Gal,2} \\ &+ nX f_\pi \pi \mathcal{L}_{N-1}^{Gal,1} - 2(f + X f_X) \mathcal{E}_N - 8f_X \mathcal{L}_{N+1}^{Gal,2} \\ &- 4X f_{XX} \mathcal{L}_{N+1}^{Gal,2}.\end{aligned}\tag{148}$$

### Apéndice G. Versión alternativa de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Para demostrar la equivalencia entre las dos formas de escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange se usa un Lagrangiano que depende de un campo escalar ( $\pi$ ) y sus primeras y segundas derivadas covariantes, por lo cual se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \nabla_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \pi)} = 0. \quad (149)$$

Por tanto se procede a separar cada término de las ecuaciones de Euler-Lagrange, gracias a que el Lagrangiano escrito en términos del campo escalar y sus derivadas covariantes es equivalente a uno que depende del campo y sus derivadas parciales que está multiplicado por  $\sqrt{-g}$ , gracias a que las derivadas covariantes pueden ser escritas en términos de las parciales, lo cual hace que el primer término del miembro izquierdo de la ecuación se pueda escribir como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \pi}. \quad (150)$$

En segunda instancia

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} &= \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} + \Gamma^{\mu}_{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\lambda} \pi)} \\ &= \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} \right), \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\nu \pi)} \frac{\partial(\nabla_\nu \pi)}{\partial(\partial_\mu \pi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)} \frac{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)}{\partial(\partial_\mu \pi)} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\nu \pi)} \delta_\nu^\mu - \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \pi)} - \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)},
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi)} + \sqrt{-g} \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)} \right). \tag{153}$$

En tercera instancia

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} &= \nabla_\mu \left[ \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\lambda \pi)} \right] \\
&= \partial_\mu \left[ \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\lambda \pi)} \right] \\
&\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left[ \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\rho \pi)} \right] \\
&\quad + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \left[ \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\nu \pi)} + \Gamma_{\nu\rho}^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\rho \pi)} \right] \\
&\quad + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \left[ \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\lambda \pi)} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\lambda \pi)} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\rho \pi)} \right] \\
&= \left[ \partial_\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g}) \right] \left[ \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda(\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\lambda \pi)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \partial_\nu \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} \right) + \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} \right].
\end{aligned} \tag{154}$$

En donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \pi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\nu \nabla_\sigma \pi)} \frac{\partial(\nabla_\nu \nabla_\sigma \pi)}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \pi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\rho \pi)} \frac{\partial(\nabla_\rho \pi)}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \pi)} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)}. \end{aligned} \quad (155)$$

Finalmente se obtiene

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \partial_\nu \left[ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \pi)} \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} \right]. \quad (156)$$

Por tanto si tomamos cada uno de los términos de las ecuaciones de Euler-Lagrange reescritos anteriormente se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \pi)} + \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \pi} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \pi)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\lambda \nabla_\nu \pi)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \pi} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \pi)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{157}$$

Finalmente, las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan reescritas como

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \pi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \pi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} = 0. \tag{158}$$

### Apéndice H. Contra-término de $\mathcal{L}_4$

Para mantener el Lagrangiano  $\mathcal{L}_4$  con ecuaciones de Euler-Lagrange de menor ó igual orden a dos en espacio-tiempo curvo, se procede a calcular éstas ecuaciones, enfocados en las derivadas no deseadas (mayores a dos). Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial (\nabla_\mu \pi)} \right) &= -\nabla_\mu \left[ \nabla^\mu \pi f_X (\nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi \nabla_\nu \nabla^\nu \pi - \nabla_\gamma \nabla_\nu \pi \nabla^\gamma \nabla^\nu \pi) \right], \\
&\supset -2\nabla^\mu \pi f_X (\nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi \nabla_\nu \nabla^\nu \pi - \nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla_\nu \pi \nabla^\gamma \nabla^\nu \pi), \\
&= -2f_X (\nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi \nabla_\nu \nabla^\nu \pi \nabla^\mu \pi - \nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla_\nu \pi \nabla^\gamma \nabla^\nu \pi \nabla^\mu \pi).
\end{aligned} \tag{159}$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} \right) = 2f [g^{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla^\mu \nabla^\nu \pi], \tag{160}$$

$$\nabla_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} \right) = 2f [g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \tag{161}$$

$$+ 2(f_\pi \nabla_\nu \pi - f_X \nabla_\nu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi) [g^{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla^\mu \nabla^\nu \pi], \tag{162}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)} \right) &\supset 2f [g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \\
&+ 2(f_\pi \nabla_\mu \pi - f_X \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi) [g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \\
&+ 2(f_\pi \nabla_\nu \pi - f_X \nabla_\nu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi) [g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla_\mu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \\
&- 2f_X \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi [g^{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi - \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \\
&= 2f [\nabla_\mu \nabla^\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \pi - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \\
&+ 2f_\pi [\nabla_\mu \pi \nabla^\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \pi - \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \\
&+ \nabla_\nu \pi \nabla^\nu \nabla_\mu \nabla^\mu \pi - \nabla_\nu \pi \nabla_\mu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi] \\
&- 2f_X [\nabla^\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi + \nabla^\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \\
&+ \nabla^\mu \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla_\nu \nabla^\nu \pi \nabla^\sigma \pi - \nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \\
&- \nabla_\mu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\sigma \pi \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla^\sigma \pi] \\
&= 2f \nabla^\mu (R_{\mu\nu\alpha}{}^\nu \nabla^\alpha \pi) + 2f_\pi ((R_{\mu\nu\alpha}{}^\nu \nabla^\alpha \pi) \nabla^\mu \pi + (R_{\nu\mu\alpha}{}^\mu \nabla^\alpha \pi) \nabla^\nu \pi) \\
&- 2f_X [2\nabla^\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi + \nabla^\mu \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla_\nu \nabla^\nu \pi \nabla^\sigma \pi \\
&- 2\nabla_\nu \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\mu \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\sigma \pi \nabla^\mu \nabla^\nu \pi \nabla^\sigma \pi].
\end{aligned} \tag{163}$$

Entonces si seguimos enfocados en los términos de derivadas de mayor orden a dos en la ecuaciones de campo se encuentra que

$$\begin{aligned}
-\nabla_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} \right) + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \pi)} \right) &\supset 2f_X [\nabla^{\mu} \nabla^{\sigma} \pi \nabla_{\sigma} \pi R_{\nu\mu\alpha}{}^{\nu} \nabla^{\alpha} \pi \\
&+ \nabla_{\nu} \nabla^{\nu} \pi \nabla^{\mu} \pi R_{\mu\gamma\alpha}{}^{\gamma} \nabla^{\alpha} \pi \\
&+ \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \pi \nabla^{\gamma} \pi R_{\mu\sigma\alpha\nu} \nabla^{\alpha} \pi] \\
&- 2f \nabla^{\mu} (R_{\mu\alpha} \nabla^{\alpha} \pi) \\
&\supset -2f \nabla^{\alpha} \pi \nabla^{\mu} R_{\mu\alpha}.
\end{aligned} \tag{164}$$

### Apéndice I. Contra-término de $\mathcal{L}_5$

Para mantener el Lagrangiano  $\mathcal{L}_5$  con ecuaciones de Euler-Lagrange de menor ó igual orden a dos en espacio-tiempo curvo, se procede a calcular éstas ecuaciones, enfocados en las derivadas no deseadas (mayores a dos). Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial (\nabla_\mu \pi)} \right) &= -\nabla_\mu (\nabla^\mu \pi f_X [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
&\quad + 2(\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi)]) \\
&\supset -f_X [3(\square \pi)^2 \nabla^\mu \pi \nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi \\
&\quad - 3\nabla^\mu \pi \nabla_\mu \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi (\nabla_\alpha \nabla_\nu \pi) (\nabla^\alpha \nabla^\nu \pi) \\
&\quad - 6(\square \pi) \nabla^\mu \pi (\nabla_\mu \nabla_\alpha \nabla_\nu \pi) (\nabla^\alpha \nabla^\nu \pi) \\
&\quad + 6\nabla^\mu \pi (\nabla_\mu \nabla_\alpha \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi)],
\end{aligned} \tag{165}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial (\nabla_\alpha \nabla_\beta \pi)} &= f [3(\square \pi)^2 g^{\alpha\beta} - 3g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
&\quad - 6(\square \pi) (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6(\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi)],
\end{aligned} \tag{166}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial (\nabla_\alpha \nabla_\beta \pi)} \right) &= (f_\pi \nabla_\beta \pi - f_X \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi) [3(\square \pi)^2 g^{\alpha\beta} - 3g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
&\quad - 6(\square \pi) (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6(\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi)] \\
&\quad + f [6(\square \pi) g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi - 6g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
&\quad - 6\nabla_\beta \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) - 6(\square \pi) (\nabla_\beta \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) \\
&\quad + 6\nabla_\beta \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi + 6\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi],
\end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \nabla_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial (\nabla_\alpha \nabla_\beta \pi)} \right) \supset & -f_X \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi [3(\square \pi)^2 g^{\alpha\beta} - 3g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
& - 6(\square \pi) (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6(\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi)] \\
& + (f_\pi \nabla_\beta \pi - f_X \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi) [6(\square \pi) g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\tau \nabla^\tau \pi \\
& - 6g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) - 6\nabla_\alpha \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) \\
& - 6(\square \pi) (\nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6(\nabla_\alpha \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi) \\
& + 6(\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\alpha \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi)] \\
& + (f_\pi \nabla_\alpha \pi - f_X \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi) [6(\square \pi) g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\tau \nabla^\tau \pi \\
& - 6g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) - 6\nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) \\
& - 6(\square \pi) (\nabla_\beta \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6\nabla_\beta \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi \\
& + 6\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi] \\
& + f [6(\square \pi) \nabla^\beta \nabla_\beta \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi + 6\nabla^\beta \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi \nabla_\beta \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi \\
& - 6(\nabla_\beta \nabla^\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) - 6(\nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\beta \nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
& - 6\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) - 6\nabla_\beta \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi (\nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) \\
& - 6(\square \pi) (\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) - 6(\nabla^\alpha \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi) (\nabla_\beta \nabla_\alpha \nabla^\beta \pi) \\
& + 6\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi + 6\nabla_\beta \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\alpha \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi \\
& + 6\nabla_\alpha \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi + 6\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi],
\end{aligned} \tag{168}$$

los cuales se pueden agrupar como:

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright f_\pi [6\Box\pi\nabla^\beta\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi\nabla_\beta\pi - 6\nabla_\beta\pi(\nabla^\beta\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) - 6\nabla_\beta\pi\nabla_\alpha\nabla_\gamma\nabla^\gamma\pi(\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) \\
& - 6(\Box\pi)\nabla_\beta\pi(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) + 6\nabla_\beta\pi(\nabla_\alpha\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi) + 6\nabla_\beta\pi(\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\alpha\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi) \\
& + 6(\Box\pi)\nabla_\alpha\pi\nabla^\alpha\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi - 6\nabla_\alpha\pi(\nabla^\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) \\
& - 6\nabla_\alpha\pi\nabla_\beta\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi(\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) - 6\nabla_\alpha\pi(\Box\pi)(\nabla_\beta\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) \\
& + 6\nabla_\alpha\pi\nabla_\beta\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi + 6\nabla_\alpha\pi\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\beta\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi] \\
& = 6f_\pi[\Box\pi\nabla^\alpha\pi R_{\alpha\sigma\beta}{}^\sigma\nabla^\beta\pi + \Box\pi\nabla^\beta\pi R_{\beta\sigma\gamma}{}^\sigma\nabla^\gamma\pi + \nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla^\alpha\pi R_{\beta\alpha\gamma\rho}\nabla^\gamma\pi \\
& + \nabla^\rho\nabla^\alpha\pi\nabla^\beta\pi R_{\alpha\beta\gamma\rho}\nabla^\gamma\pi + \nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\beta\pi R_{\alpha\rho\gamma}{}^\alpha\nabla^\gamma\pi + \nabla^\alpha\nabla^\rho\pi\nabla_\alpha\pi R_{\beta\rho\gamma}{}^\beta\nabla^\gamma\pi].
\end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright f[6(\square\pi)\nabla^\beta\nabla_\beta\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi + 6\nabla^\beta\nabla_\gamma\nabla^\gamma\pi\nabla_\beta\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi - 6(\nabla_\beta\nabla^\beta\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) \\
& \quad - 6(\nabla_\beta\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\beta\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) - 6\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi(\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) - 6\nabla_\beta\nabla_\sigma\nabla^\sigma\pi(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) \\
& \quad - 6(\square\pi)(\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\nabla^\beta\pi) - 6(\nabla^\alpha\nabla_\gamma\nabla^\gamma\pi)(\nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla^\beta\pi) + 6\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi \\
& \quad + 6\nabla_\beta\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\alpha\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi + 6\nabla_\alpha\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\beta\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi + 6\nabla^\beta\nabla^\rho\pi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\rho\nabla^\alpha\pi] \\
& = 6f[\nabla^\mu\nabla^\beta\nabla^\rho\pi R_{\beta\mu\sigma\rho}\nabla^\sigma\pi + R_{\rho\sigma}R_\alpha^\rho\nabla^\sigma\pi\nabla^\alpha\pi + \nabla^\rho\nabla^\alpha\pi\nabla_\alpha(R_{\gamma\rho}\nabla^\gamma\pi) \\
& \quad + \nabla^\rho\nabla^\beta\pi\nabla^\alpha(R_{\beta\alpha\gamma\rho}\nabla^\gamma\pi) - \square\pi\nabla^\beta(R_{\beta\gamma}\nabla^\gamma\pi)] \\
& \supset 6f[-\nabla^\mu\nabla^\beta\nabla^\rho\pi R_{\beta\sigma\rho\mu}\nabla^\sigma\pi + R_{\rho\sigma}R_\alpha^\rho\nabla^\sigma\pi\nabla^\alpha\pi + \nabla^\rho\nabla^\alpha\pi\nabla^\gamma\pi\nabla_\alpha R_{\gamma\rho} \\
& \quad + \nabla^\rho\nabla^\beta\pi\nabla^\gamma\pi\nabla^\alpha R_{\beta\alpha\gamma\rho} - \square\pi\nabla^\gamma\pi\nabla^\beta R_{\beta\gamma}] \\
& \supset 6f[-(\nabla^\beta\nabla^\mu\nabla^\rho\pi + R^{\mu\beta\gamma\rho}\nabla_\gamma\pi)R_{\beta\sigma\rho\mu}\nabla^\sigma\pi + R_{\rho\sigma}R_\alpha^\rho\nabla^\sigma\pi\nabla^\alpha\pi \\
& \quad + \nabla^\rho\nabla^\alpha\pi\nabla^\gamma\pi\nabla_\alpha R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2}\square\pi\nabla^\gamma\pi\nabla_\gamma R \\
& \quad + \nabla^\rho\nabla^\beta\pi\nabla^\gamma\pi(\nabla_\gamma R_{\beta\rho} - \nabla_\rho R_{\beta\gamma})] \\
& = 6f[-R^{\mu\beta\gamma\rho}R_{\beta\sigma\rho\mu}\nabla^\sigma\pi\nabla_\gamma\pi + R_{\rho\sigma}R_\alpha^\rho\nabla^\sigma\pi\nabla^\alpha\pi \\
& \quad + \nabla^\rho\nabla^\beta\pi\nabla^\gamma\pi\nabla_\gamma R_{\beta\rho} - \frac{1}{2}\square\pi\nabla^\gamma\pi\nabla_\gamma R] \\
& \supset 6f\nabla^\rho\nabla^\beta\pi\nabla^\gamma\pi\nabla_\gamma G_{\beta\rho}.
\end{aligned} \tag{170}$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright -f_X [3(\square\pi)^2 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi - 3 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
& \quad - 6 \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\square\pi) (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6 \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi) \\
& \quad + 6 \nabla^\alpha \nabla_\tau \pi \nabla^\tau \pi (\nabla_\alpha \nabla_\sigma \nabla^\sigma \pi) (\square\pi) - 6 \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
& \quad - 6 \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \nabla_\alpha \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) - 6(\square\pi) \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) \\
& \quad + 6 \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\alpha \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi) + 6 \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\alpha \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi) \\
& \quad + 6(\square\pi) \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \nabla^\alpha \nabla_\tau \nabla^\tau \pi - 6 \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla^\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
& \quad - 6 \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla^\gamma \pi (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) - 6(\square\pi) \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\beta \nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) \\
& \quad + 6 \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \nabla_\beta \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi + 6 \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi] \\
& = -f_X [3(\square\pi)^2 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi - 3 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\
& \quad - 6 \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\square\pi) (\nabla^\alpha \nabla^\beta \pi) + 6 \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi (\nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\alpha \pi) \\
& \quad + 6 \nabla_\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi R_{\rho\gamma} \nabla^\gamma \pi - 6 \square\pi \nabla^\alpha \nabla_\tau \pi \nabla^\tau \pi R_{\alpha\gamma} \nabla^\gamma \pi \\
& \quad - 6 \square\pi \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\sigma \pi R_{\alpha\gamma} \nabla^\gamma \pi + 6 \nabla_\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\alpha \nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi R_{\rho\gamma} \nabla^\gamma \pi \\
& \quad + 6 \nabla^\beta \nabla_\sigma \pi \nabla^\alpha \nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi R_{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla^\gamma \pi + 6 \nabla^\alpha \nabla_\sigma \pi \nabla^\beta \nabla^\rho \pi \nabla^\sigma \pi R_{\beta\alpha\gamma\rho} \nabla^\gamma \pi].
\end{aligned} \tag{171}$$

De aquí se encuentra que los términos que involucran derivadas de mayor orden a dos en las ecuaciones de Euler-Lagrangre están dados por

$$\begin{aligned}
-\nabla_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial (\nabla_{\mu} \pi)} \right) + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \pi)} \right) &\supset f_X [3(\square \pi)^2 \nabla^{\mu} \pi \nabla_{\mu} \nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} \pi \\
&- 3 \nabla^{\mu} \pi \nabla_{\mu} \nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} \pi (\nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} \pi) (\nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} \pi) \\
&- 6(\square \pi) \nabla^{\mu} \pi (\nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} \pi) (\nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} \pi) \\
&+ 6 \nabla^{\mu} \pi (\nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} \pi \nabla_{\nu} \nabla^{\rho} \pi \nabla_{\rho} \nabla^{\alpha} \pi)] \\
&- f_X [3(\square \pi)^2 \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \nabla_{\sigma} \pi \nabla^{\sigma} \pi \\
&- 3 \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \nabla_{\sigma} \pi \nabla^{\sigma} \pi (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \pi) (\nabla^{\mu} \nabla^{\nu} \pi) \\
&- 6 \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\sigma} \pi \nabla^{\sigma} \pi (\square \pi) (\nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} \pi) \\
&+ 6 \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\sigma} \pi \nabla^{\sigma} \pi (\nabla^{\beta} \nabla^{\rho} \pi \nabla_{\rho} \nabla^{\alpha} \pi)] \quad (172) \\
&+ 6 f \nabla^{\rho} \nabla^{\beta} \pi \nabla^{\gamma} \pi \nabla_{\gamma} G_{\beta \rho} \\
&= f_X [-3(\square \pi)^2 \nabla^{\mu} \pi R_{\mu \sigma} \nabla^{\sigma} \pi \\
&+ 3 \nabla^{\sigma} \pi \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} \pi \nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} \pi R_{\sigma \tau} \nabla^{\tau} \pi \\
&+ 6(\square \pi) \nabla^{\sigma} \pi \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} \pi R_{\alpha \sigma \tau \beta} \nabla^{\tau} \pi \\
&+ 6 \nabla^{\mu} \pi (\nabla^{\nu} \nabla^{\rho} \pi \nabla_{\rho} \nabla^{\alpha} \pi) R_{\mu \alpha \tau \nu} \nabla^{\tau} \pi] \\
&+ 6 f \nabla^{\rho} \nabla^{\beta} \pi \nabla^{\gamma} \pi \nabla_{\gamma} G_{\beta \rho} \\
&\supset 6 f \nabla^{\rho} \nabla^{\beta} \pi \nabla^{\gamma} \pi \nabla_{\gamma} G_{\beta \rho}.
\end{aligned}$$

Aquí se tiene entonces que el único término de derivadas con mayor orden a dos es  $6 f \nabla^{\rho} \nabla^{\beta} \pi \nabla^{\gamma} \pi \nabla_{\gamma} G_{\beta \rho}$ .

## Apéndice J. Perturbaciones

Siguiendo la filosofía de (Wang, 2017) se define  $g^{\alpha\beta} = a^2 \bar{g}^{\alpha\beta}$ , siendo  $g^{\alpha\beta}$  una métrica conformalmente equivalente a la de Minkowski perturbada  $(\bar{g}^{\alpha\beta}), \bar{g}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$ ,<sup>3</sup> para poder encontrar las perturbaciones a segundo orden de las cantidades presentes en la acción del Galileón escalar.

En general las perturbaciones para una función general que dependen del campo y su primera derivada ( $f(\pi, X)$ ), están dadas por

$$^{(1)}f(\pi, X) = f_{\pi} \delta\pi + f_X \delta X, \quad (173)$$

$$^{(2)}f(\pi, X) = \frac{1}{2} f_{\pi\pi} \delta\pi \delta\pi + \frac{1}{2} f_{XX} \delta X \delta X + f_{\pi X} \delta\pi \delta X, \quad (174)$$

en donde los subíndices  $\pi$  y  $X$  en  $f$  denotan derivadas respecto de  $\pi$  y  $X$  respectivamente,  $\delta\pi$  y  $\delta X$  son perturbaciones sobre el campo y sobre su término cinético respectivamente. Gracias a la isotropía y homogeneidad del espacio,  $\pi \equiv \pi(t)$ . Ahora bien, dado que nos vamos a enfocar en las perturbaciones tensoriales, se obtienen las perturbaciones para cualquier función que dependa del campo y de  $X$ , de acuerdo a

---

<sup>3</sup> Se usa tiempo conforme ( $\eta$ ) por facilidad.

$${}^{(1)}f(\pi, X) = -\frac{1}{2}f_X \nabla_\alpha \pi \nabla_\beta \pi \pi \quad {}^{(1)}g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}f_X \nabla_\alpha \pi \nabla_\beta \pi h^{\alpha\beta} = 0, \quad (175)$$

$${}^{(2)}f(\pi, X) = \frac{1}{2}f_{XX} \delta X \delta X = \frac{1}{8}f_{XX} \nabla_\rho \pi \nabla_\sigma \pi \nabla_\alpha \pi \nabla_\beta \pi h^{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} = 0. \quad (176)$$

Para encontrar las respectivas perturbaciones en las cantidades geométricas se hace

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\beta g_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}) \\ &= \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha + a^{-1}\bar{g}^{\alpha\sigma}(\bar{g}_{\sigma\gamma}\partial_\beta a + \bar{g}_{\sigma\beta}\partial_\gamma a - \bar{g}_{\beta\gamma}\partial_\sigma a) \\ &= \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha + \delta_\beta^\alpha \partial_\gamma \ln a + \delta_\gamma^\alpha \partial_\beta \ln a - \bar{g}_{\beta\gamma} \partial^\alpha \ln a, \end{aligned} \quad (177)$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\sigma}^\sigma - \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma \\ &= \bar{R}_{\alpha\beta} - \partial_\gamma (\bar{g}_{\alpha\beta} \partial^\gamma \ln \Omega) - 2\partial_\alpha \partial_\beta \ln \Omega + 2\partial_\alpha \ln \Omega \partial_\beta \ln \Omega \\ &\quad + 2\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \ln \Omega - 2\bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\gamma \ln \Omega \partial^\gamma \ln \Omega - \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}_{\gamma\sigma}^\gamma \partial^\sigma \ln \Omega \\ &\quad + \bar{g}_{\beta\sigma} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma \partial^\gamma \ln \Omega + \bar{g}_{\alpha\sigma} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma \partial^\gamma \ln \Omega, \end{aligned} \quad (178)$$

pero se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta \ln a &= \partial_\alpha \partial_\beta \ln a - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \ln a \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta \ln a - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \ln a - 2\partial_\alpha \ln a \partial_\beta \ln a + \bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \ln a, \end{aligned} \quad (179)$$

y además

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho(\bar{g}_{\alpha\beta}\nabla^\rho \ln a) &= \partial_\rho(\bar{g}_{\alpha\beta}\nabla^\rho \ln a) - \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \bar{g}_{\beta\lambda} \partial^\rho \ln a - \Gamma_{\beta\rho}^\lambda \bar{g}_{\alpha\lambda} \partial^\rho \ln a + \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \bar{g}_{\beta\alpha} \partial^\lambda \ln a \\
&= \partial_\rho(\bar{g}_{\alpha\beta}\nabla^\rho \ln a) - \bar{\Gamma}_{\alpha\rho}^\lambda \bar{g}_{\beta\lambda} \partial^\rho \ln a - \bar{\Gamma}_{\beta\rho}^\lambda \bar{g}_{\alpha\lambda} \partial^\rho \ln a + \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\rho \bar{g}_{\beta\alpha} \partial^\lambda \ln a \quad (180) \\
&\quad + 2\bar{g}_{\alpha\beta} \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \ln a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $R_{\alpha\beta}$  es

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - 2\nabla_\alpha \nabla_\beta \ln a - 2\nabla_\alpha \ln a \nabla_\beta \ln a + 2\bar{g}_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \ln a \nabla_\gamma \ln a - \nabla_\gamma(\bar{g}_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \ln a), \quad (181)$$

adicionalmente el escalar de Ricci viene dado por

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = a^{-2} \bar{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= a^{-2} \bar{R} - 2\nabla_\alpha \nabla^\alpha \ln a - 2\nabla^\alpha \ln a \nabla_\alpha \ln a - 2\nabla_\alpha \nabla^\alpha \ln a + 8\nabla^\alpha \ln a \nabla_\alpha \ln a \quad (182) \\
&= a^{-2} \bar{R} - 4\nabla_\alpha \nabla^\alpha \ln a + 6\nabla^\alpha \ln a \nabla_\alpha \ln a.
\end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel para la métrica de Minkowski perturbada ( $\bar{g}^{\mu\nu}$ ), con  $a^{-2}\bar{g}^{\mu\nu} =$

$g^{\mu\nu}$  (métrica perturbada de FLRW) son perturbados hasta segundo orden

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^0 &= \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij}, \\
\bar{\Gamma}_{j0}^i &= \frac{1}{2} (\partial_0 h_j^i - h^{ik} \partial_0 h_{kj}) + \mathcal{O}(h^3), \\
\bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{1}{2} (\partial_j h_k^i + \partial_k h_j^i - \partial^i h_{jk} - h^{il} \partial_j h_{lk} - h^{il} \partial_k h_{lj} + h^{il} \partial_l h_{jk}) + \mathcal{O}(h^3),
\end{aligned} \tag{183}$$

los demás siendo iguales a cero. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho &= \bar{g}^{0\nu} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{0\nu}^\rho + \bar{g}^{i\nu} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{i\nu}^\rho = \bar{g}^{0j} \partial_k \bar{\Gamma}_{0j}^k + \bar{g}^{i\nu} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{i\nu}^\rho \\
&= \bar{g}^{0j} \partial_k \bar{\Gamma}_{0j}^k + \bar{g}^{i0} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{i0}^\rho + \bar{g}^{ij} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{ij}^\rho \\
&= \bar{g}^{0j} \partial_k \bar{\Gamma}_{0j}^k + \bar{g}^{i0} \partial_k \bar{\Gamma}_{i0}^k + \bar{g}^{ij} \partial_0 \bar{\Gamma}_{ij}^0 + \bar{g}^{ij} \partial_k \bar{\Gamma}_{ij}^k \\
&= \bar{g}^{ij} \partial_0 \bar{\Gamma}_{ij}^0 + \bar{g}^{ij} \partial_k \bar{\Gamma}_{ij}^k \\
&= \frac{1}{2} (\eta^{ij} - h^{ij}) \partial_0 \partial_0 h_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\eta^{ij} - h^{ij}) \partial_k (\partial_j h_i^k + \partial_i h_j^k - \partial^k h_{ji} - h^{kl} \partial_j h_{li} - h^{kl} \partial_i h_{lj} + h^{kl} \partial_l h_{ji}) \\
&= -\frac{1}{2} h^{ij} \partial_0 \partial_0 h_{ij} + \frac{1}{2} (\eta^{ij} - h^{ij}) \partial_k (h^{kl} \partial_l h_{ji} - \partial^k h_{ji} - h^{kl} \partial_j h_{li} - h^{kl} \partial_i h_{lj}) \\
&= -\frac{1}{2} h^{ij} \partial_0 \partial_0 h_{ij} + \frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_k (-h^{kl} \partial_j h_{li} - h^{kl} \partial_i h_{lj}) + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_k \partial^k h_{ji} \\
&= -\frac{1}{2} h^{ij} \partial_0 \partial_0 h_{ij} + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_k \partial^k h_{ji},
\end{aligned} \tag{184}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\rho &= -\bar{g}^{0\nu}\partial_\nu\bar{\Gamma}_{0\rho}^\rho - \bar{g}^{i\nu}\partial_\nu\bar{\Gamma}_{i\rho}^\rho = -\bar{g}^{00}\partial_0\bar{\Gamma}_{0i}^i - \bar{g}^{0j}\partial_j\bar{\Gamma}_{0i}^i - \bar{g}^{i\nu}\partial_\nu\bar{\Gamma}_{ij}^j \\
&= -\bar{g}^{00}\partial_0\bar{\Gamma}_{0i}^i - \bar{g}^{0j}\partial_j\bar{\Gamma}_{0i}^i - \bar{g}^{i0}\partial_0\bar{\Gamma}_{ij}^j - \bar{g}^{ik}\partial_k\bar{\Gamma}_{ij}^j \\
&= -\bar{g}^{00}\partial_0\bar{\Gamma}_{0i}^i - \bar{g}^{ik}\partial_k\bar{\Gamma}_{ij}^j \\
&= \frac{1}{2}\eta^{00}\partial_0(h^{il}\partial_0h_{li}) - \frac{1}{2}(\eta^{ik} - h^{ik})\partial_k(h^{jl}\partial_lh_{ij} - h^{jl}\partial_ih_{lj} - h^{jl}\partial_jh_{il}) \\
&= \frac{1}{2}\partial^0(h^{il}\partial_0h_{li}) - \frac{1}{2}\eta^{ik}\partial_k(h^{jl}\partial_lh_{ij} - h^{jl}\partial_ih_{lj} - h^{jl}\partial_jh_{il}) \\
&= \frac{1}{2}\partial^0(h^{il}\partial_0h_{li}) + \frac{1}{2}\partial^i(h^{jl}\partial_ih_{lj}),
\end{aligned} \tag{185}$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i = \bar{g}^{0\nu}\bar{\Gamma}_{0\nu}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i + \bar{g}^{j\nu}\bar{\Gamma}_{j\nu}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i \\
&= \bar{g}^{00}\bar{\Gamma}_{00}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i + \bar{g}^{0j}\bar{\Gamma}_{0j}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i + \bar{g}^{j0}\bar{\Gamma}_{j0}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i + \bar{g}^{jk}\bar{\Gamma}_{jk}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho i}^i \\
&= \bar{g}^{0j}\bar{\Gamma}_{0j}^k\bar{\Gamma}_{ki}^i + \bar{g}^{j0}\bar{\Gamma}_{j0}^k\bar{\Gamma}_{ki}^i + \bar{g}^{jk}\bar{\Gamma}_{jk}^0\bar{\Gamma}_{0i}^i + \bar{g}^{jk}\bar{\Gamma}_{jk}^l\bar{\Gamma}_{li}^i \\
&= \bar{g}^{jk}\bar{\Gamma}_{jk}^0\bar{\Gamma}_{0i}^i + \bar{g}^{jk}\bar{\Gamma}_{jk}^l\bar{\Gamma}_{li}^i \\
&= \frac{1}{4}(\eta^{jk} - h^{jk})\partial_0h_{jk}(\partial_0h_i^i - h^{il}\partial_0h_{il}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{g}^{jk}\bar{\Gamma}_{jk}^l(h^{im}\partial_mh_{il} - h^{im}\partial_ih_{ml} - h^{im}\partial_lh_{im}) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{186}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\rho} &= -\bar{g}^{0\nu}\bar{\Gamma}_{0\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\rho} - \bar{g}^{i\nu}\bar{\Gamma}_{i\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\rho} \\
&= -\bar{g}^{00}\bar{\Gamma}_{0\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{0\sigma}^{\rho} - \bar{g}^{0i}\bar{\Gamma}_{0\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{i\sigma}^{\rho} - \bar{g}^{i0}\bar{\Gamma}_{i\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{0\sigma}^{\rho} - \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}_{i\rho}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{j\sigma}^{\rho} \\
&= -\bar{g}^{00}\bar{\Gamma}_{0j}^i\bar{\Gamma}_{0i}^j - \bar{g}^{i0}\bar{\Gamma}_{ik}^j\bar{\Gamma}_{0j}^k - \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}_{i\rho}^0\bar{\Gamma}_{j0}^{\rho} - \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}_{i\rho}^k\bar{\Gamma}_{jk}^{\rho} \\
&= -\bar{g}^{00}\bar{\Gamma}_{0j}^i\bar{\Gamma}_{0i}^j - \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}_{ik}^0\bar{\Gamma}_{j0}^k - \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}_{i0}^k\bar{\Gamma}_{jk}^0 - \bar{g}^{ij}\bar{\Gamma}_{il}^k\bar{\Gamma}_{jk}^l \\
&= -\frac{1}{4}\eta^{00}(\partial_0 h_j^i - h^{im}\partial_0 h_{mj})(\partial_0 h_i^j - h^{jm}\partial_0 h_{mi}) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\eta^{ij} - h^{ij})\partial_0 h_{ik}(\partial_0 h_j^k - h^{km}\partial_0 h_{mj}) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\eta^{ij} - h^{ij})\partial_0 h_{jk}(\partial_0 h_i^k - h^{km}\partial_0 h_{mi}) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\eta^{ij} - h^{ij})(\partial_i h_l^k + \partial_l h_i^k - \partial^k h_{li})(\partial_j h_k^l + \partial_k h_j^l - \partial^l h_{jk}) \quad (187) \\
&= \frac{1}{4}\partial_0 h_j^i \partial_0 h_i^j - \frac{1}{4}\partial_0 h_{ik} \partial_0 h^{ki} - \frac{1}{4}\partial_0 h_{jk} \partial_0 h^{kj} \\
&\quad -\frac{1}{4}\eta^{ij}(\partial_i h_l^k + \partial_l h_i^k - \partial^k h_{li})(\partial_j h_k^l + \partial_k h_j^l - \partial^l h_{jk}) \\
&= -\frac{1}{4}\partial_0 h_{ik} \partial_0 h^{ki} \\
&\quad -\frac{1}{4}\eta^{ij}(\partial_i h_l^k \partial_j h_k^l + \partial_i h_l^k \partial_k h_j^l - \partial_i h_l^k \partial^l h_{jk} \\
&\quad + \partial_l h_i^k \partial_j h_k^l + \partial_l h_i^k \partial_k h_j^l - \partial_l h_i^k \partial^l h_{jk} \\
&\quad - \partial^k h_{li} \partial_j h_k^l - \partial^k h_{li} \partial_k h_j^l + \partial^k h_{li} \partial^l h_{jk}) \\
&= -\frac{1}{4}\partial_0 h_{ik} \partial_0 h^{ki} + \frac{1}{4}\partial^k h_{lj} \partial_k h^{jl} - \frac{1}{2}\partial_k h_{lj} \partial^l h^{jk},
\end{aligned}$$

entonces se encuentra que  $\bar{R}$  es

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\rho + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\sigma \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\rho \\
&= -\frac{1}{2} h^{ij} \partial_0 \partial_0 h_{ij} + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_k \partial^k h_{ji} + \frac{1}{2} \partial^0 (h^{il} \partial_0 h_{li}) + \frac{1}{2} \partial^i (h^{jl} \partial_i h_{lj}) \\
&\quad - \frac{1}{4} \partial_0 h_{ik} \partial_0 h^{ki} + \frac{1}{4} \partial^k h_{lj} \partial_k h^{jl} - \frac{1}{2} \partial_k h_{lj} \partial^l h^{jk} \\
&= -h^{ij} \partial_0 \partial_0 h_{ij} - \frac{3}{4} \partial_0 h_{ik} \partial_0 h^{ki} + h^{ij} \partial_k \partial^k h_{ji} \\
&\quad + \frac{3}{4} \partial^k h_{lj} \partial_k h^{jl} - \frac{1}{2} \partial_k h_{lj} \partial^l h^{jk}.
\end{aligned} \tag{188}$$

La cantidad  $\square \ln a$  está dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\nu \ln a &= \partial_\mu \partial^\nu \ln a + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \partial^\alpha \ln a \\
&= \partial_\mu \partial^\nu \ln a + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \partial^\lambda \ln a + \delta_\mu^\nu \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \ln a,
\end{aligned} \tag{189}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\mu \ln a &= \partial_\mu \partial^\mu \ln a + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu \partial^\alpha \ln a \\
&= \partial_\mu \partial^\mu \ln a + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \partial^\lambda \ln a + 4 \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \ln a \\
&= \partial_0 \partial^0 \ln a + \bar{\Gamma}_{\mu 0}^\mu \partial^0 \ln a + 4 \partial_0 \ln a \partial^0 \ln a.
\end{aligned} \tag{190}$$

Finalmente las perturbaciones de  $R$  son

$$\begin{aligned}
(0)R &= -4\partial_0\partial^0\ln a - 10\partial_0\ln a\partial^0\ln a, \\
(1)R &= 0, \\
(2)R &= a^{-2}\left(-h^{ij}\partial_0\partial_0h_{ij} - \frac{3}{4}\partial_0h_{ik}\partial_0h^{ki} + h^{ij}\partial_k\partial^kh_{ji} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4}\partial^kh_{lj}\partial_kh^{jl} - \frac{1}{2}\partial_kh_{lj}\partial^lh^{jk}\right) + 2h^{il}\partial_0h_{il}\partial^0\ln a.
\end{aligned} \tag{191}$$

Para  $\square\pi$  se hace

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla^\nu\pi &= \partial_\mu\partial^\nu\pi + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu\partial^\alpha\pi \\
&= \partial_\mu\partial^\nu\pi + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu\partial^\lambda\pi + \delta_\mu^\nu\partial_\lambda\ln a\partial^\lambda\pi + \partial_\mu\ln a\partial^\nu\pi - \partial^\nu\ln a\partial_\mu\pi,
\end{aligned} \tag{192}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla^\mu\pi &= \partial_\mu\partial^\mu\pi + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu\partial^\alpha\pi \\
&= \partial_\mu\partial^\mu\pi + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu\partial^\lambda\pi + 4\partial_\lambda\ln a\partial^\lambda\pi \\
&= \partial_0\partial^0\pi + \bar{\Gamma}_{\mu 0}^\mu\partial^0\pi + 4\partial_0\ln a\partial^0\pi \\
&= \partial_0\partial^0\pi + 4\partial_0\ln a\partial^0\pi - \frac{1}{2}h^{il}\partial_0h_{il}\partial^0\pi.
\end{aligned} \tag{193}$$

Para  $\nabla_\mu \nabla_\nu \pi \nabla^\mu \nabla^\nu \pi$  se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi &= (\partial_\mu \partial^\nu \pi + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \partial^\lambda \pi + \delta_\mu^\nu \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi + \partial_\mu \ln a \partial^\nu \pi - \partial^\nu \ln a \partial_\mu \pi) \nabla_\nu \nabla^\mu \pi \\
&= \partial_\mu \partial^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \partial^\lambda \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi + \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \nabla_\mu \nabla^\mu \pi \\
&\quad + \partial_\mu \ln a \partial^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi - \partial^\nu \ln a \partial_\mu \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi \\
&= \partial_\mu \partial^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \partial^\lambda \pi \nabla_\nu \nabla^\mu \pi + \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \nabla_\mu \nabla^\mu \pi \\
&= \partial_\nu \partial^\mu \pi \partial_\mu \partial^\nu \pi + \bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \partial^\lambda \pi \partial_\mu \partial^\nu \pi + \partial_\mu \partial^\mu \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \\
&\quad + \partial_\nu \partial^\mu \pi \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \partial^\lambda \pi \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \\
&\quad + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial_\nu \ln a \partial^\mu \pi - \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial^\mu \ln a \partial_\nu \pi \\
&\quad + \partial_\mu \partial^\mu \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi + 4 \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
&= \partial_\nu \partial^\mu \pi \partial_\mu \partial^\nu \pi + 2 \partial_\mu \partial^\mu \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi + 4 \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
&\quad + \bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi + 2 \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi.
\end{aligned} \tag{194}$$

Aislado las perturbaciones a segundo orden de obtiene

$$\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi + 2 \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\gamma} \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \\
&= \bar{\Gamma}^\mu_{\nu 0} \bar{\Gamma}^\nu_{\mu 0} \partial^0 \pi \partial^0 \pi + 2 \bar{\Gamma}^\mu_{\mu 0} \partial^0 \pi \partial_0 \ln a \partial^0 \pi \\
&= \frac{1}{4} \partial_0 h_j^i \partial_0 h_i^j \partial^0 \pi \partial^0 \pi - h^{il} \partial_0 h_{il} \partial^0 \pi \partial_0 \ln a \partial^0 \pi.
\end{aligned} \tag{195}$$

$\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi$  está dado por

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi = & [\partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi + 2\partial_\mu \partial^\rho \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \\
& + \partial_\mu \partial^\nu \pi (\partial_\nu \ln a \partial^\rho \pi - \partial^\rho \ln a \partial_\nu \pi) \\
& + \partial_\nu \partial^\rho \pi (\partial_\mu \ln a \partial^\nu \pi - \partial^\nu \ln a \partial_\mu \pi) \\
& + \delta_\mu^\rho \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + 3\partial_\mu \ln a \partial^\rho \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
& - \partial^\rho \ln a \partial_\mu \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi - \partial_\mu \ln a \partial^\rho \ln a \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \\
& - \partial_\mu \pi \partial^\rho \pi \partial^\nu \ln a \partial_\nu \ln a + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi \\
& + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi] \nabla_\rho \nabla^\mu \pi,
\end{aligned} \tag{196}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi = & [\partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi + 2\partial_\mu \partial^\rho \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \\
& + \partial_\mu \partial^\nu \pi (\partial_\nu \ln a \partial^\rho \pi - \partial^\rho \ln a \partial_\nu \pi) \\
& + \partial_\nu \partial^\rho \pi (\partial_\mu \ln a \partial^\nu \pi - \partial^\nu \ln a \partial_\mu \pi) \\
& + \delta_\mu^\rho \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + 3\partial_\mu \ln a \partial^\rho \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
& - \partial^\rho \ln a \partial_\mu \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi - \partial_\mu \ln a \partial^\rho \ln a \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \\
& - \partial_\mu \pi \partial^\rho \pi \partial^\nu \ln a \partial_\nu \ln a] \partial_\rho \partial^\mu \pi \\
& + [\delta_\mu^\rho \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi \\
& + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi] \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \\
& + [\partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi + 2\partial_\mu \partial^\rho \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \\
& + \partial_\mu \partial^\nu \pi (\partial_\nu \ln a \partial^\rho \pi - \partial^\rho \ln a \partial_\nu \pi) \\
& + \partial_\nu \partial^\rho \pi (\partial_\mu \ln a \partial^\nu \pi - \partial^\nu \ln a \partial_\mu \pi) \\
& + \delta_\mu^\rho \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + 3\partial_\mu \ln a \partial^\rho \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
& - \partial^\rho \ln a \partial_\mu \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi - \partial_\mu \ln a \partial^\rho \ln a \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \\
& - \partial_\mu \pi \partial^\rho \pi \partial^\nu \ln a \partial_\nu \ln a + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi \\
& + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi] \delta_\rho^\mu \partial_\sigma \ln a \partial^\sigma \pi \\
& + [\partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi + 2\partial_\mu \partial^\rho \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi
\end{aligned} \tag{197}$$

$$\begin{aligned}
& + \partial_\mu \partial^\nu \pi (\partial_\nu \ln a \partial^\rho \pi - \partial^\rho \ln a \partial_\nu \pi) \\
& + \partial_\nu \partial^\rho \pi (\partial_\mu \ln a \partial^\nu \pi - \partial^\nu \ln a \partial_\mu \pi) \\
& + \delta_\mu^\rho \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + 3 \partial_\mu \ln a \partial^\rho \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
& - \partial^\rho \ln a \partial_\mu \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi - \partial_\mu \ln a \partial^\rho \ln a \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \\
& - \partial_\mu \pi \partial^\rho \pi \partial^\nu \ln a \partial_\nu \ln a (\partial_\rho \ln a \partial^\mu \pi - \partial^\mu \ln a \partial_\rho \pi),
\end{aligned}$$

así, aislando las perturbaciones de primer y segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned}
^{(1,2)}(\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi) &= [\bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi \\
& + \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi + \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^\rho \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi] \\
& + [\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu \partial^\gamma \pi \partial^\lambda \pi \partial_\sigma \ln a \partial^\sigma \pi + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \partial_\sigma \ln a \partial^\sigma \pi \\
& + \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^\mu \partial^\gamma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\sigma \ln a \partial^\sigma \pi] \\
& = 3 \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \partial_\lambda \ln a \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
& + 3 \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \partial^\sigma \pi \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\gamma \ln a \partial^\gamma \pi \\
& = -\frac{3}{2} h^{ij} \partial_0 h_{ij} \partial^0 \pi \partial_0 \ln a \partial^0 \pi \partial_0 \ln a \partial^0 \pi \\
& + \frac{3}{4} \partial_0 h_j^i \partial_0 h_i^j \partial^0 \pi \partial^0 \pi \partial_0 \ln a \partial^0 \pi \\
& = ^{(2)}(\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi).
\end{aligned} \tag{198}$$

Para el caso de las perturbaciones para  $\sqrt{-g}$  se parte de  $B$ , una matriz diagonalizable y se

escoje su representación en la base en la que es diagonal. Sabiendo que

$$\text{Tr}(B) = \sum_j \lambda_j, \quad (199)$$

donde  $\lambda_j$  son los valores propios, y teniendo en cuenta que

$$\ln \det(B) = \ln(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \cdots + \ln \lambda_n = \text{Tr} \ln(B), \quad (200)$$

$$\ln \det(B) = \text{Tr} \ln(B),$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \det(A) \det(I + A^{-1}B) \\ &= \det(A) \exp \ln \det(I + A^{-1}B) \\ &= \det(A) \exp [\text{Tr} \ln(I + A^{-1}B)] \\ &= \det(A) \exp \left[ \text{Tr}(B^{-1}A) - \frac{1}{2} \text{Tr}(B^{-1}A)^2 + \cdots \right] \\ &= \det(A) \left[ 1 + \left( \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A^{-1}B)^2 + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A^{-1}B)^2 + \cdots \right)^2 + \cdots \right] \\ &= \det(A) \left[ 1 + \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A^{-1}B)^2 + \frac{1}{2} (\text{Tr}(A^{-1}B))^2 \right] + \mathcal{O}(B^3). \end{aligned} \quad (201)$$

Así,

$$\begin{aligned}
(0)g &= -a^8, \\
(1)g &= (0)g\text{Tr}((0)g^{\mu\nu}a^2h_{\mu\nu}) = (0)g\text{Tr}(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}) = 0, \\
(2)g &= \frac{1}{2}(0)g[0^2 - \text{Tr}((0)g^{\mu\nu}a^2h_{\nu\rho}(0)g^{\rho\sigma}a^2h_{\sigma\lambda})] = \frac{a^8}{2}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{202}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det(A+B)} &= \sqrt{\det(A)\det(I+A^{-1}B)} \\
&= \exp \ln \sqrt{\det(A)\det(I+A^{-1}B)} \\
&= \exp \left( \frac{1}{2} \ln(\det A) + \frac{1}{2} \ln \det(I+A^{-1}B) \right) \\
&= \sqrt{\det(A)} \exp \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(I+A^{-1}B) \right] \\
&= \sqrt{\det(A)} \exp \left[ \frac{1}{2} \text{Tr}(B^{-1}A) - \frac{1}{2} \text{Tr}(B^{-1}A)^2 + \dots \right] \\
&= \sqrt{\det(A)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A^{-1}B)^2 + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \left( \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A^{-1}B)^2 + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
&= \sqrt{\det(A)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{Tr}(A^{-1}B) - \frac{1}{4} \text{Tr}(A^{-1}B)^2 + \frac{1}{8} (\text{Tr}(A^{-1}B))^2 \right] + \mathcal{O}(B^3),
\end{aligned} \tag{203}$$

lo que implica que las perturbaciones de  $\sqrt{-g}$  son iguales a

$${}^{(0)}\sqrt{-g} = a^4,$$

$${}^{(1)}\sqrt{-g} = 0, \tag{204}$$

$${}^{(2)}\sqrt{-g} = -\frac{a^4}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}.$$