

El Teorema de Sharkovsky

Yazmin Rubiela Cote Contreras

Trabajo de Grado para optar al título de Matemática

Director

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

Dedicado a la memoria de mi abuela Rosa Amira.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

- ★ A Dios por haberme permitido estudiar esta carrera.
- ★ Al profesor Ph. D Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de este proyecto, por su paciencia, compromiso con este y por todos su aportes en el trascurso de la carrera.
- ★ A mis padres y a mi hermano Javier por todo su apoyo en la realización de mis estudios.
- ★ A los demás profesores de la escuela de matemáticas que me ayudaron a crecer como persona y enseñarme su gusto por las matemáticas.
- ★ A mis amigos en especial a los más cercanos (Daniel, Johana, Astrid, Sebastian, Sandra...) y a mis compañeros de carrera con los que compartí materias, pues siempre estuvieron apoyándome en los buenos y malos momentos.
- ★ A Jhon por escucharme y apoyarme estos dos años.

Tabla de Contenido

Introducción	11
1. Preliminares.	13
1.1. Nociones básicas	13
2. Cobertura de intervalos	17
2.1. Ejemplos de coberturas	23
3. El teorema de Sharkovsky	38
3.1. El orden de Sharkovsky	38
3.2. Secuencias de Štefan	39
3.3. Primera parte del Teorema de Sharkovsky	50
3.4. Segunda Parte del Teorema de Sharkovsky	59
3.4.1. La función Tienda	60
3.4.2. Cálculos de las funciones $T_{k(m)}$	66
3.4.3. Las secuencias de Štefan y las colas del orden de Sharkovsky	71
Referencias Bibliográficas	73

Lista de Figuras

Figura 1.	Representación de $h(x), h^2(x)$	14
Figura 2.	Órbita de f	15
Figura 3.	Representa las iteraciones de f , junto con la recta $y=x$	15
Figura 4.	Iteradas de $g(x)$	16
Figura 5.	Obsérvese que en esta gráfica, f tiene más de un punto fijo, y que b_1 y b_2 pueden tomar diferentes valores	18
Figura 6.	Representación cuando $x < y$	20
Figura 7.	Representación cuando $x > y$	20
Figura 8.	Aclaración de la definición de B	21
Figura 9.	Conclusión de los 3-ciclos	25
Figura 10.	Muestra un 7-ciclo	27
Figura 11.	Muestra un 9-ciclo	32
Figura 12.	K denota los números impares mayores que uno, con el orden usual.	39
Figura 13.	Muestra la forma de una secuencia de Stefan cuando m es impar	41
Figura 14.	Muestra la forma de una secuencia de Stefan cuando m es par	41
Figura 15.	Ilustra un caso particular, donde $x_0 < x_1$ y j impar. Tenga en cuenta que en los otros casos la figura es similar.	43

Figura 16.	Ilustra el caso en que $x_0 < x_1$ y $j = 0$.	43
Figura 17.	Esta figura ilustra que $S_{f(x_j)} \subset f(I_j)$.	44
Figura 18.	Esta figura ilustra el caso en que n es par.	45
Figura 19.	Esta figura muestra claramente que x_n y x_{n-2} no siguen al O-bucle	49
Figura 20.	Esta figura representa el caso en que $x \in \mathcal{S}$	51
Figura 21.	Esta figura ilustra el caso 2	52
Figura 22.	Ilustra gráficamente como se toma I'_i	59
Figura 23.	Comportamiento de T_1^n	62
Figura 24.	Esta figura ilustra $T_{k(m)}$ en relación con T_1	69
Figura 25.	órbitas de orden 4	70
Figura 26.	Gráfica de f	71
Figura 27.	Comportamiento de la órbita de f	72

Resumen

Título: El Teorema de Sharkovsky *

Autor: Yazmin Rubiela Cote Contreras **

Palabras Clave: Teorema de Sharkovsky, Órbita, Periodo, Cobertura, Bucles.

Descripción: En este trabajo se presenta una forma de demostrar el Teorema Sharvosky el cual fue demostrado por Alexander Nicolaevich Sharkovsky en el año 1964 en el artículo titulado “Coexistence of cycles of a continuous mapping into itself” en la revista Ukranian Mathematical Journal. Para enunciar el teorema de Sharkovsky es necesario definir primero el orden de Shakovsky el cual es:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 7 \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Este orden se organiza de mayor a menor, el enunciado del teorema de Sharvosky es la conjunción de los siguientes dos teoremas

Teorema: Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua donde I es un intervalo cerrado y acotado de la recta. Si x es un punto periódico con respecto a f de período m y $m \triangleright l$, entonces l es el período de algún otro punto en I .

Teorema: Cada cola (no vacía) del orden de Sharkovsky es el conjunto de períodos para alguna función continua en $[0, 1]$ en $[0, 1]$.

Para el desarrollo de la demostración de este teorema se presentan tres capítulos, donde en el primero se dan definiciones previas, el segundo se ejemplifica las secuencias de Štefan elemento importante en la demostración, en el tercero se generaliza estos conceptos y se realiza la demostración del Teorema.

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin. Doctor en Matemáticas

Abstract

Title: The Sharkovsky Theorem *

Author: Yazmin Rubiela Cote Contreras **

Keywords: The Sharkovsky Theorem, Orbit, Period, Coverage, Loop.

Description: This paper presents a way to prove the Sharkovsky Theorem which was demonstrated by Alexander Nicolaevich Sharkovsky in 1964 in the article entitled "Coexistence of cycles of a continuous mapping into itself" published in the Ukrainian Mathematical journal. To state Sharkovsky's theorem it is necessary to first define the order of Sharkovsky which is:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 7 \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

This order is organized from highest to lowest, the statement of Sharkovsky's theorem is the conjunction of the following two theorems

Teorema: Let $f : I \rightarrow I$ be a continuous function where I is a closed and bounded interval of the line. If x is a periodic point with respect to f of period m and $m \triangleright l$, then l is the period of some other point in I .

Teorema: Each tail (not empty) of the order of Sharkovsky is the set of periods for some continuous function from $[0, 1]$ to $[0, 1]$.

For the development of the proof of this theorem, three chapters are presented, where in the first one previous definitions are given, the second one exemplifies the sequences of Štefan have an important element in the proof, in the third one these concepts are generalized and The proof of the theorem is carried out.

* Bachelor Thesis

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin. Doctor en Matemáticas.

Introducción

En el año 1964 es publicado un artículo titulado “Coexistence of cycles of a continuous mapping into itself” en la revista *Ukranian Mathematical Journal* por el matemático ucraniano Alexander Nicolaevich Sharkovsky, donde se prueba lo que hoy es conocido como el teorema de Sharkovsky. Para enunciar ese teorema necesitamos definir un orden sobre \mathbb{N} que juega un papel fundamental. El orden de Sharkovsky es el siguiente:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 7 \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

La conjunción de los siguientes enunciados se conoce como el teorema de Sharkovsky.

Teorema: Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua donde I es un intervalo cerrado y acotado de la recta. Si x es un punto periódico con respecto a f de período m y $m \triangleright l$, entonces l es el período de algún otro punto en I .

Teorema: Cada cola (no vacía) del orden de Sharkovsky es el conjunto de períodos para alguna función continua en $[0, 1]$ en $[0, 1]$.

Los artículos originales donde esos teoremas se demostraron fueron escritos en ruso, por tal motivo permanecieron desconocidos para la gran mayoría de la comunidad matemática de ese entonces.

En el año 1975, de manera independiente, Tien-Yien Li y James A. Yorke demostraron un caso particular de este teorema [Li and Yorke, 1975]. Ellos probaron que si una función

tiene un punto con período tres, entonces existen puntos de cualquier periodo. Algún tiempo después de esa publicación, Yorke viajó a Berlín oriental a una conferencia y durante un crucero por el río, un participante ucraniano (Sharkovsky) se le acercó; aunque los dos no hablaban el mismo idioma con ayuda de dos personas (Lasota y Mira) lograron comunicarse, y así Yorke se enteró que habían demostrado un caso particular del teorema de Sharkovsky. Conduciendo así al reconocimiento mundial del trabajo de Sharkovsky.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el teorema de Sharkovsky siguiendo la presentación hecha en [Burns and Hasselblatt, 2011], con la utilización de otros textos como [Alseda and Misiurewicz, 2000].

Este trabajo consta de tres capítulos. En el primero presentamos algunas definiciones y teoremas que ayudarán a la demostración del teorema de Sharkovsky.

En el capítulo 2 introduciremos algunos conceptos claves para llegar a la demostración de la primera parte del teorema Sharkovsky y presentaremos algunos ejemplos particulares que ilustran como se llevará a cabo la demostración de la primera parte del teorema de Sharkovsky. En el capítulo 3 se presenta la demostración del Teorema de Sharkovsky.

1. Preliminares.

Para el desarrollo de este trabajo utilizaremos principalmente los siguientes teoremas, que nos ayudarán en la realización de las demostraciones, que permitirán la demostración del Teorema de Sharkovsky.

Teorema 1.1. (*Teorema del valor intermedio de Bolzano*). Sea I un intervalo cerrado, $a, b \in I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en I . Si $k \in \mathbb{R}$ satisface $f(a) < k < f(b)$, entonces existe un punto c entre a y b talque $f(c) = k$.

Teorema 1.2. Sea I un intervalo acotado cerrado y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en I , entonces el conjunto $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo acotado cerrado.

Teorema 1.3. (*Teorema de preservación de intervalos*) Sea I un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces $f(I)$ es un intervalo.

1.1. Nociones básicas

Iniciaremos con 4 definiciones que se trabajarán en el resto del documento.

Definición 1.4. La órbita de un punto x es el la sucesión $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$ donde f^n representa la composición de f con ella misma n veces. Se denota como:

$$O_f(x) = \{f^n \mid n = 0, 1, \dots\}.$$

Nos interesan primordialmente las órbitas finitas de x en f .

Definición 1.5. x es un punto periódico, si existe n tal que $f^n(x) = x$.

Definición 1.6. Se dice que x es un punto fijo si $f(x) = x$.

Definición 1.7. El periodo de un punto periódico x es el menor entero m tal que $f^m(x) = x$.

Si x es periódico y $y \in O_f(x)$ entonces y tiene el mismo período de x .

Ejemplo 1.8. Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera $h(x) = 1 - x$

Observe que $\frac{1}{2}$ es un punto fijo y que:

$$h(x) = 1 - x$$

$$h^2(x) = x$$

Luego todos los puntos de h son fijos en la segunda iterada, es decir todos los puntos excepto el

$\frac{1}{2}$ son de periodo dos (ver figura 1)

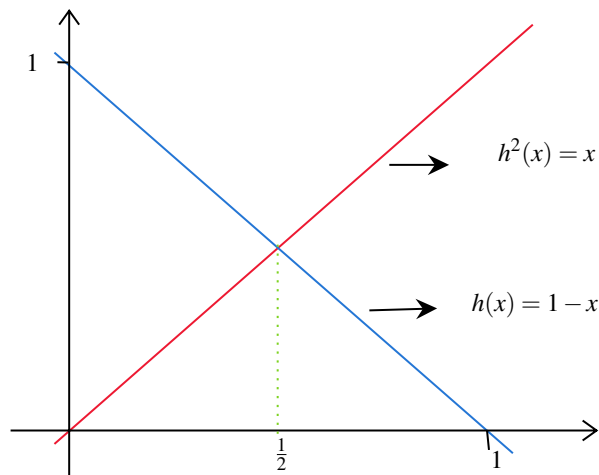


Figura 1. Representación de $h(x)$, $h^2(x)$

Ejemplo 1.9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2$.

Notemos que 1 tiene periodo 3

$$f(1) = 2$$

$$f^2(1) = 3$$

$$f^3(1) = 1$$

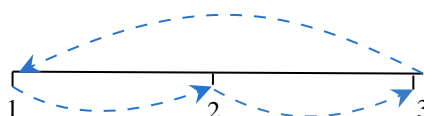


Figura 2. Órbita de f

La Figura 3 muestra las gráficas de las tres primeras iteraciones de f junto con $y = x$, con el fin de visualizar los puntos de periodo uno, dos y tres de f .

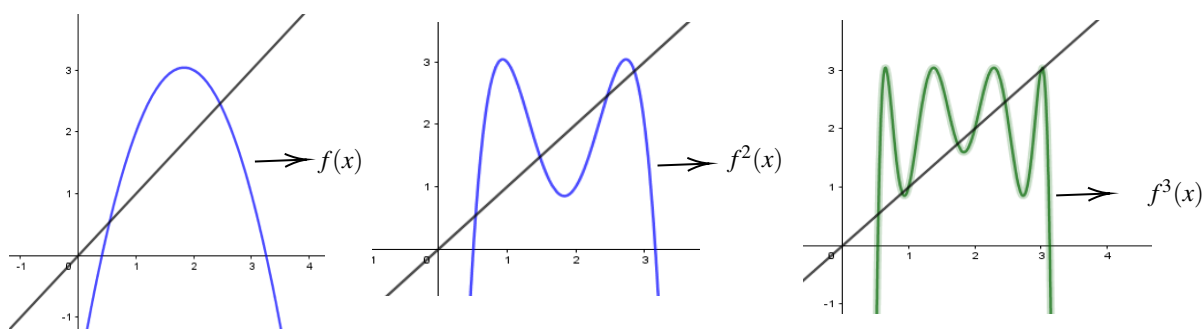


Figura 3. Representa las iteraciones de f , junto con la recta $y=x$

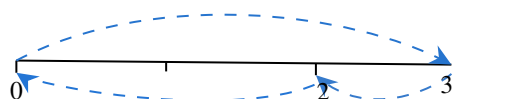
Ejemplo 1.10. [Alphonse, 2016] Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $g(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{23}{6}x + 3$.

Notemos 0 tiene período 3.

$$g(0) = 3$$

$$g^2(0) = 2$$

$$g^3(0) = 0$$



La Figura 4 muestra las gráficas de las iteraciones de g junto con recta $y = x$, evidenciándose los puntos fijos de en cada iteración.

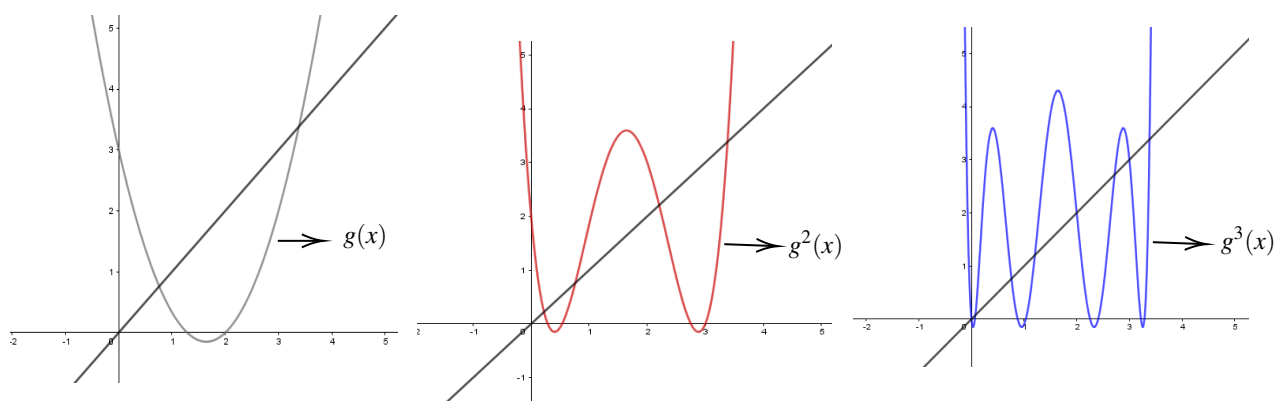


Figura 4. Iteradas de $g(x)$

¿Ahora bien, la función f y g tiene algún otro punto periódico?, si es así, ¿cuáles períodos tiene? Como ya mencionamos, en 1975 Li y Yorke publicaron el trabajo "Period three implies chaos" [Li and Yorke, 1975] en el que se demuestra que, si una función tiene un punto con período 3, entonces está tiene todos los períodos posibles. Este hecho se demostrará en el siguiente capítulo.

Pero esta pregunta también se responderá de una manera más general en el capítulo 3 con el Teorema de Sharkovsky.

2. Cobertura de intervalos

Para el resto de este documento I denotará un intervalo cualquiera de la recta (no necesariamente cerrado) y $f : I \rightarrow I$ una función continua.

Definición 2.1. Sean I, J intervalos. Decimos que I cubre a J si $J \subset f(I)$. Se denotará como $I \xrightarrow{f} J$. Usualmente se escribirá como $I \rightarrow J$

Para la realización de las siguientes pruebas, el ingrediente principal será el teorema del valor intermedio (ver Teorema 1.1).

Lema 2.2. Si $[a_1, a_2] \xrightarrow{f} [a_1, a_2]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a_1, a_2]$

Demostración. Sean $b_1, b_2 \in [a_1, a_2]$ con $f(b_i) = a_i$, b_1 y b_2 existen dado que $[a_1, a_2] \xrightarrow{f} [a_1, a_2]$. Se sigue que $f(b_1) \leq b_1$ y $f(b_2) \geq b_2$, así $f(b_1) - b_1 \leq 0$ y $f(b_2) - b_2 \geq 0$, es decir $f(b_1) - b_1 \leq 0 \leq f(b_2) - b_2$. Por tanto, por el teorema del valor intermedio (ver Teorema 1.1), existe un $k \in (b_1, b_2)$ tal que $f(k) = k$, es decir, f tiene un punto fijo en $[a_1, a_2]$. \square

Una representación gráfica del Lema 2.2, se puede evidenciar en la siguiente figura.

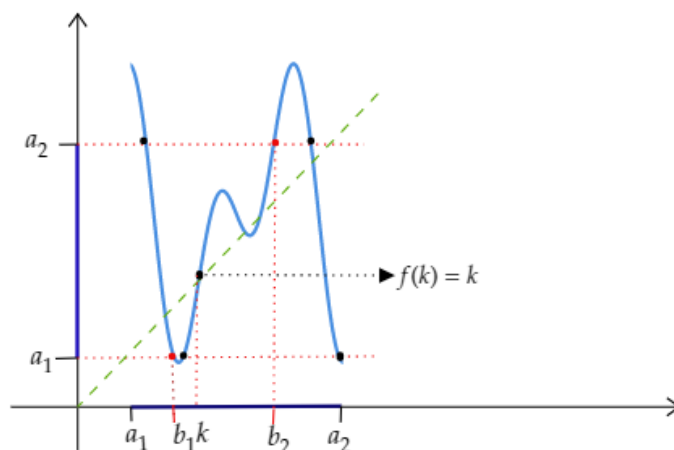


Figura 5. Obsérvese que en esta gráfica, f tiene más de un punto fijo, y que b_1 y b_2 pueden tomar diferentes valores

Proposición 2.3. Si $I \xrightarrow{f} J$ entonces existe un intervalo $K \subset I$ tal que $f(K) = J$ y se denotará como $K \twoheadrightarrow J$.

Demostración. Para comprender mejor la demostración tenga en cuenta las figuras 6 y 7.

Sean $x, y \in I$ y $J = [f(x), f(y)]$. Consideraremos dos casos $x < y$ y $y < x$.

Supongamos primero que $x < y$ (ver figura 6); con $f(x) = p$, $f(y) = q$ y definamos:

$$A = f^{-1}(p) \cap [x, y].$$

Note que A es diferente de vacío, pues $x \in A$. Sea $r = \max(A)$ y

$$B = f^{-1}(q) \cap [r, y].$$

Observe que B es diferente de vacío, pues $y \in B$. Sea $s = \min(B)$.

Probaremos que $J = f([r, s])$. Adviértase que si B se definiese como $f^{-1}(q) \cap [x, y]$, entonces no es necesariamente cierto que $J = f([r, s])$ (ver figura 8).

Dado que $f(r) = p < f(s) = q$ y la continuidad de f , entonces por el Teorema del valor intermedio tenemos $J = [p, q] = [f(r), f(s)] \subset f([r, s])$.

Veamos que $f([r, s]) \subset J$. En efecto, sea $a \in [r, s]$ y veamos que $f(a) \in J$ con $a \neq r, s$. Para ello supongamos que $f(a) \notin J$, entonces $f(a) < f(r)$ o $f(s) < f(a)$.

Caso 1 : Si $f(a) < f(r) = p$ y dado que $p < f(s)$, tenemos que $f(a) < p < f(s)$, entonces por el teorema de valor intermedio, existe un $x_0 \in (a, s)$ tal que $f(x_0) = p$; contradiciendo la definición de r , pues $r = \max(A)$.

Caso 2: Si $f(a) > f(s) = q$ y dado que $f(r) < q$, se sigue que $f(r) < q < f(a)$, luego por el teorema del valor intermedio existe $x_1 \in (r, a)$, tal que $f(x_1) = q$, contradiciendo así la definición de s .

Por tanto $f(a) \in J$ y como a es arbitrario tenemos que $f([r, s]) \subset J$.

Si $y < x$ (ver figura 7), tomemos nuevamente $f(x) = p$, $f(y) = q$ y definamos :

$$A = f^{-1}(p) \cap [y, x]$$

y $r = \min(A)$, observe de nuevo que A es diferente de vacío, pues $x \in A$, de igual manera

definimos:

$$B = f^{-1}(q) \cap [y, r]$$

Notemos nuevamente que B es diferente de vacío pues $y \in B$. Sea $s = \max(B)$. Análogamente como se probó el caso $x < y$ se prueba que $J = f([s, r])$. □

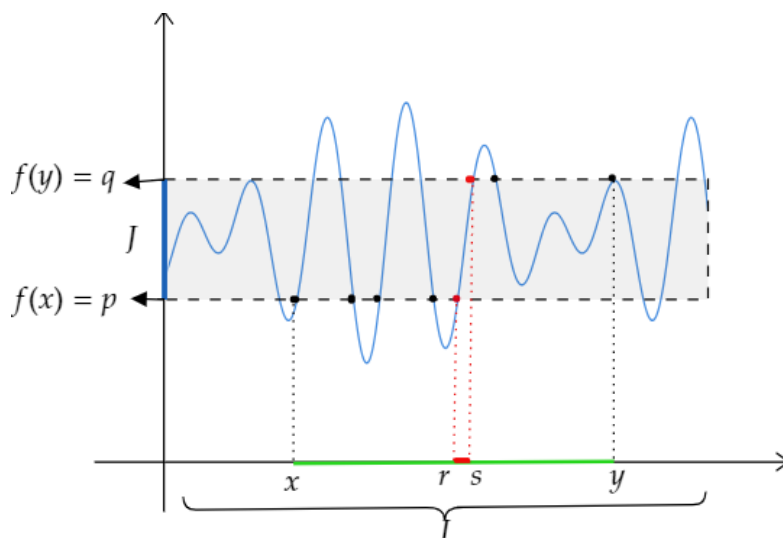


Figura 6. Representación cuando $x < y$

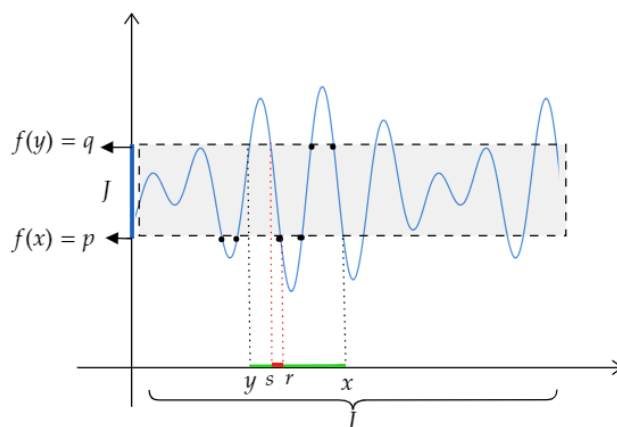


Figura 7. Representación cuando $x > y$

La figura 8 aclara por que es necesario definir a $B = f^{-1}(q) \cap [r, y]$ en vez de $B = f^{-1}(q) \cap [x, y]$.

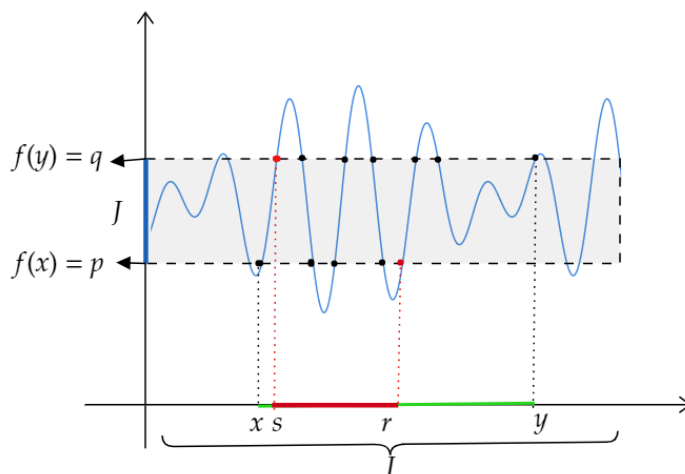


Figura 8. Aclaración de la definición de B

Definición 2.4. Un bucle de intervalos es una sucesión de intervalos cerrados J_0, \dots, J_{n-1} tales que $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$.

Definición 2.5. Dado el siguiente bucle $J_0 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$, su longitud es la cantidad de coberturas que se realizan en el bucle, es decir, n .

Definición 2.6. Se dice que $x \in J_0$ es un punto que sigue el bucle de intervalos $(J_0 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0)$, si $f^i(x) \in J_i$ para $1 \leq i \leq n - 1$ y $f^n(x) = x$.

Lema 2.7. Si J_0, \dots, J_{n-1} forman un bucle de intervalos, $J_0 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ entonces hay un punto x que sigue al bucle.

Demostración. Dado que $J_{n-1} \rightarrow J_0$, por la Proposición 2.3 tenemos que existe $K_{n-1} \subset J_{n-1}$ tal que $K_{n-1} \rightarrow J_0$. Como $J_{n-2} \rightarrow J_{n-1}$, entonces $J_{n-2} \rightarrow K_{n-1}$, pues $K_{n-1} \subset J_{n-1} \subset f(J_{n-2})$.

Igualmente por la Proposición 2.3, existe $k_{n-2} \subset J_{n-2}$ tal que $K_{n-2} \succ K_{n-1}$. Continuando de esa manera, inductivamente se demuestra que existen intervalos $K_i \subset J_i$ para $0 \leq i \leq n$ tales que:

$$K_0 \succ K_1 \succ \cdots \succ K_{n-1} \succ J_0.$$

Obteniendo lo siguiente:

$$f(K_0) = K_1$$

$$f^2(K_0) = f(K_1) = K_2$$

$$\vdots$$

$$f^n(K_0) = J_0.$$

Dado que $K_0 \subset J_0$ entonces $K_0 \subset f^n(K_0)$, teniendo así la siguiente relación de cobertura $K_0 \xrightarrow{f^n} K_0$, luego por el Lema 2.2, existe un $x \in K_0$ tal que $f^n(x) = x$. Por otra parte, se tiene que:

$$f(x) \in f(K_0) = K_1 \subset J_1,$$

$$f^2(x) \in f^2(K_0) = K_2 \subset J_2.$$

Inductivamente se sigue que $f^i(x) \in f^i(K_0) = K_i \subset J_i$ para $0 \leq i < n$, por tanto x es un punto que sigue al bucle. □

Note que un punto que sigue a un bucle tendrá periodo menor o igual que la longitud

del bucle, esto motiva a la siguiente definición:

Definición 2.8. *Se dice que un bucle $J_0 \rightarrow \cdots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ es elemental si cada punto que sigue al bucle tiene periodo igual a su longitud, es decir n .*

El siguiente lema garantiza condiciones suficientes para que un bucle sea elemental.

Lema 2.9. *Sea $J_0 \rightarrow \cdots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ un bucle de intervalos. Si los puntos extremos de J_0 no siguen en el bucle y el $\text{int}(J_0)$ es disjunto con cada uno de los J_i , entonces el bucle es elemental.*

Demostración. Sea x un punto que sigue al bucle entonces, por hipótesis, x no es un punto extremo de J_0 , por tanto $x \in \text{int}(J_0)$. Dado que $\text{int}(J_0) \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} J_i) = \emptyset$, se sigue que para $0 < i \leq n-1$ $f^i(x) \notin \text{int}(J_0)$ porque está en J_i , pues x sigue al bucle. Luego $f^i(x) \neq x$, entonces el periodo de x no puede ser menor que n , por tanto, x tiene periodo n . \square

2.1. Ejemplos de coberturas

Iniciamos esta sección con dos definiciones que se estarán usando constantemente.

Definición 2.10. *Dada una $O_f(x)$, decimos que I es un O -intervalo si los puntos extremos del intervalo pertenecen a $O_f(x)$.*

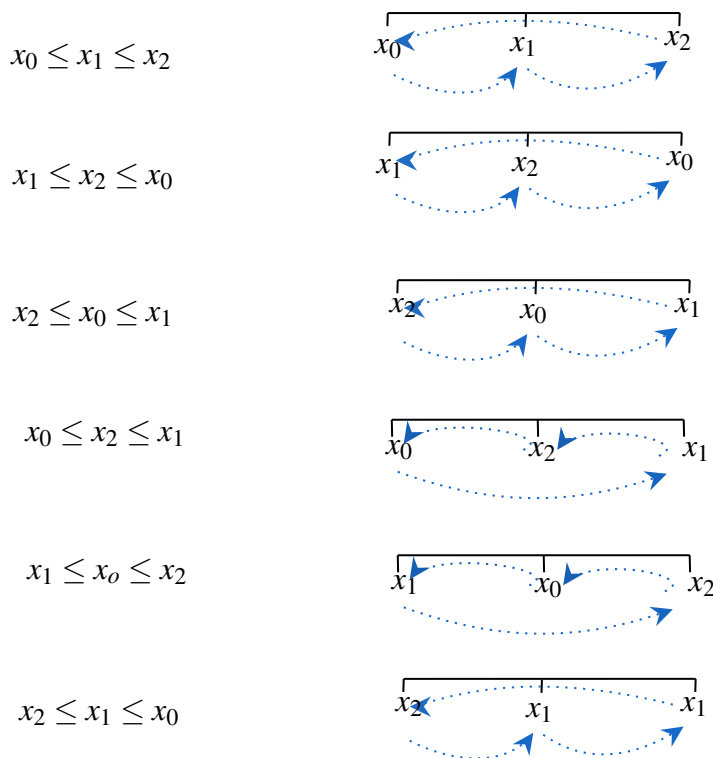
Definición 2.11. *Decimos que es un O -bucle si todos los intervalos del bucle son O -Intervalos.*

En esta sección presentamos algunas coberturas de O -bucles elementales. Cada ejemplo está directamente relacionado con la prueba del Teorema de Sharkovsky, pues representa un ejemplo, que se trabajará de manera general en el siguiente capítulo.

Comenzamos con un ejemplo muy importante, el cual mostrará que, si una función continua tiene un punto de periodo 3, entonces tiene puntos de cualquier periodo. Seguidamente, presentaremos un 7-ciclo, 9-ciclo, y 6-ciclo donde se evidenciará como construir O -bucles elementales a partir del ciclo dado.

Ejemplo 2.12. *Mostraremos que si una función tiene un punto de periodo 3, entonces tiene puntos de cualquier periodo. Sea x_0 en el intervalo de definición de f tal que: $f(x_0) = x_1$, $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_0$.*

Existen 6 comportamientos posibles:



Deduciendo así que un 3-ciclo se puede ver solo de las dos siguientes formas y una es el espejo de la otra. Vea los ejemplos 1.9 y 1.10.



Figura 9. Conclusión de los 3-ciclos

Sin pérdida de generalidad supondremos que $x_1 < x_2$. Definimos $I_0 = [x_0, x_2]$ y $I_1 = [x_1, x_0]$. Observe que estos intervalos son O -intervalos. Notemos además las siguientes relaciones de cobertura:

$$I_0 \rightarrow I_1, I_1 \rightarrow I_0, I_1 \rightarrow I_1.$$

En efecto, $f(\{x_0, x_1\}) = \{x_1, x_2\}$ y $f(\{x_0, x_2\}) = \{x_1, x_0\}$ entonces por el teorema de valor intermedio tenemos que $[x_1, x_2] \subset f(I_1)$ y $[x_1, x_0] \subset f(I_0)$, por lo tanto $I_1, I_0 \subset f(I_1)$ y $I_1 \subset f(I_0)$.

Usaremos la siguiente notación de grafos, para resumir las relaciones de cobertura encontradas.

$$\begin{matrix} \curvearrowright \\ I_1 \end{matrix} \iff I_0 \tag{1}$$

Dado que $I_1 \rightarrow I_1$ por el Lema 2.2 tenemos que f tiene un punto fijo.

De (1) podemos deducir el siguiente O -bucle $I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1$. El objetivo ahora es probar que este es un O -bucle elemental, para ello notemos que el $\text{int}(I_1) \cap I_0 = \emptyset$. Con el fin de utilizar

el Lema 2.9, veamos que x_0, x_1 no siguen al O -bucle, .

- $f(x_1) \in I_0$, pues $f(x_1) = x_2$, pero $f^2(x_1) \neq x_1$, por tanto x_1 no sigue al O -bucle.
- $f(x_0) = x_1$ luego $f(x_0) \notin I_0$ entonces x_0 no sigue al bucle.

Por tanto $I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1$ es un O -bucle elemental, por el Lema 2.9. Ahora por el Lema 2.7 tenemos que existe un punto que sigue al O -bucle, como es un bucle elemental de longitud 2, entonces los puntos que siguen al O -bucle tiene periodo 2, lo que implica que f tiene puntos de periodo 2.

Ahora mostraremos que para todo $l > 3$, existe un punto de periodo l .

De (1) también se deduce el siguiente O -bucle:

$$I_0 \rightarrow \overbrace{I_1 \rightarrow I_1 \cdots I_1}^{l-1 \text{ copias}} \rightarrow I_0 \quad (2)$$

Mostraremos que si $l > 3$, entonces ese O -bucle es elemental. En efecto, veamos que x_0, x_2 no siguen al O -bucle.

- $f(x_0) \in I_1$ dado que $f(x_0) = x_1$, pero $f(x_1) \notin I_1$ pues $f(x_1) = x_2$, por tanto x_0 no sigue al O -bucle.

- $f(x_2) \in I_1$ pues $f(x_2) = x_0$, $f(x_0) = x_1$ y así $f(x_0) \in I_1$. Por otra parte, $f(x_1) \notin I_1$, es decir que x_2 no sigue al O bucle.

Como el $\text{int}(I_0) \cap I_1 = \emptyset$ y los puntos x_0, x_2 no siguen al O -bucle, entonces por el Lema 2.9 tenemos que el O -bucle es elemental. Ahora por el Lema 2.7 se tiene que existe un punto que sigue al O -bucle, por ende tenemos que f tiene puntos con periodo l .

Anteriormente habíamos probado que tenía por lo menos un punto fijo y un punto de periodo 2, lo que implica que f tiene puntos de cualquier periodo. Concluyendo así lo que queríamos mostrar en este ejemplo.

Ejemplo 2.13. Considere el siguiente 7-ciclo con los O intervalos indicados en la Figura 10.

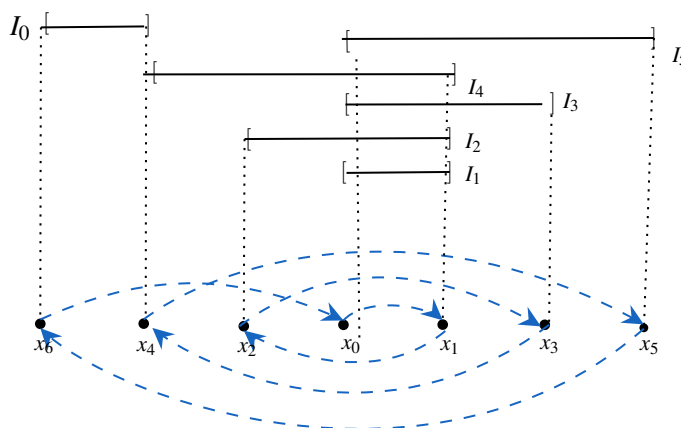


Figura 10. Muestra un 7-ciclo

Mostraremos que si una función tiene un 7-ciclo como el anterior, entonces esta función tendrá un punto fijo y puntos de periodo 2,4,6 y mayores que 7.

Para ello tenga en cuenta que se puede obtener las siguientes relaciones de cobertura, con los O intervalos mostrados en la figura 10:

1. $I_1 \rightarrow I_1$ y $I_0 \rightarrow I_1$. En efecto: $f(\{x_0, x_1\}) = \{x_1, x_2\}$, luego por el teorema de valor intermedio tenemos que $[x_2, x_1] \subset f(I_1)$ y dado que $I_1 = [x_0, x_1]$ entonces $I_1 \subset f(I_1)$, es decir $I_1 \rightarrow I_1$. Por otra parte también tenemos que $f(\{x_6, x_4\}) = \{x_0, x_5\}$, se sigue, por el teorema de valor intermedio, que $[x_0, x_5] \subset f(I_0)$, luego $I_0 \rightarrow I_1$.
2. $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.

En efecto:

$$f(\{x_2, x_1\}) = \{x_2, x_3\},$$

$$f(\{x_0, x_3\}) = \{x_1, x_4\},$$

$$f(\{x_4, x_1\}) = \{x_5, x_2\},$$

$$f(\{x_0, x_5\}) = \{x_1, x_6\}.$$

Luego por el teorema del valor intermedio tenemos:

$$[x_2, x_3] \subset f(I_2)$$

$$[x_4, x_1] \subset f(I_3)$$

$$[x_2, x_5] \subset f(I_4)$$

$$[x_6, x_1] \subset f(I_5).$$

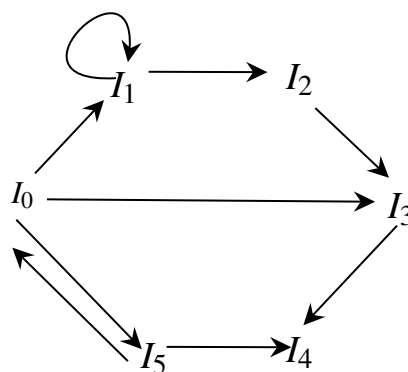
Ahora dado que: $I_3 = [x_0, x_3]$, $I_4 = [x_4, x_1]$, $I_5 = [x_0, x_5]$, $I_0 = [x_6, x_4]$ entonces $I_2 \rightarrow I_3$,

$I_3 \rightarrow I_4, I_4 \rightarrow I_5$ y $I_5 \rightarrow I_0$. Por ítem anterior tenemos que $I_1 \rightarrow I_2$ por lo tanto: $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.

3. $I_0 \rightarrow I_5, I_3, I_1$

Por el ítem 1 tenemos que: $[x_0, x_5] \subset f(I_0)$ y como $I_5 = [x_0, x_5], I_3 = [x_0, x_3], I_1 = [x_0, x_1]$, se sigue la relación $I_0 \rightarrow I_5, I_3, I_1$.

Lo anterior se puede resumir en el siguiente grafo:



(3)

De (3) podemos deducir los siguientes *O*-bucles.

1. $I_1 \rightarrow I_1$.
2. $I_0 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$
3. $I_0 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.
4. $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$

$$5. I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots I_1}_{l-5} \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0 \text{ con } l-5 \text{ copias de } I_1 \text{ y } l-5 \geq 3.$$

- $I_1 \rightarrow I_1$ entonces por el Lema 2.2 tenemos que existe un punto que es fijo.

Veamos ahora que los O -bucles 2,3,4 y 5 son elementales, para ello utilizaremos el Lema 2.9.

- $I_0 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$ es un O -bucle elemental, en efecto: Veamos primero que x_6, x_4 no siguen al O -bucle, dado que x_6, x_4 tiene periodo 7 entonces $f^2(x_4) \neq x_4$ y $f^2(x_6) \neq x_6$, luego x_4 y x_6 no sigue al O -bucle. Como el $\text{int}(I_0) \cap I_5 = \emptyset$, se sigue que por el Lema 2.9 el O -bucle es el elemental y por el Lema 2.7 se tiene que existe un punto que sigue al O -bucle que es de periodo 2.

- $I_0 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.

Para probar que es un O -bucle elemental veamos primero que x_4, x_6 no siguen al O -bucle:

Se tiene que $f(x_4) \notin I_3$, pues $f(x_4) = x_5$, luego x_4 no sigue al O -bucle, por otra parte tenemos que x_6 tampoco sigue al O -bucle, ya que aunque $f(x_6) = x_0 \in I_3$, y $f(x_0) = x_1 \in I_4$, se tiene $f(x_1) = x_2 \notin I_5$, por tanto x_6 no sigue al O -bucle. Dado que el $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ para $j \in \{3, 4, 5\}$, entonces por el Lema 2.9 tenemos que el O -bucle es elemental y por el Lema 2.7 se tiene que existe un punto que sigue al O -bucle, que es de periodo cuatro.

- $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.

De manera similar probaremos que este es un O -bucle elemental, en efecto: Tenemos que x_6 y x_4 no siguen al O -bucle pues x_6 y x_4 son de periodo 7 luego $f^6(x_4) \neq x_4$ y $f^6(x_6) \neq x_6$ y como $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ para $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces por el Lema 2.9 tenemos que el O -bucle es elemental y por el Lema 2.7 se tiene que existe un punto que sigue al O -bucle, lo que implica que f tiene un punto de periodo 6.

$$\bullet I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots I_1}_{l-5} \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0.$$

Veamos nuevamente que x_4, x_6 no siguen al O -bucle. Para ello, note nuevamente que $f(x_4) \notin I_1$, luego x_4 no sigue al O -bucle, por otra parte notemos $f(x_6) = x_0$, $f^2(x_6) = x_1$ y $f^3(x_6) = x_2$ se sigue que $f(x_6) \in I_1$, $f^2(x_6) \in I_1$ y $f^3(x_6) \notin I_1$, entonces x_6 no siguen al O -bucle.

Como $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ para $1 \leq j \leq 5$ entonces por el Lema 2.9 tenemos que es un bucle elemental. Por otra parte, el Lema 2.7 asegura que hay un punto que sigue al bucle, por tanto f tiene un punto de periodo l con $l \geq 8$.

Por lo anterior tenemos que f tiene por lo menos un punto fijo y puntos de periodo 2, 4, 6 y mayores que 7.

Ejemplo 2.14. Considere el siguiente 9-ciclo y los O intervalos como se indica en la figura 11.

Mostraremos en este ejemplo que si f tiene un 7 ciclo como el anterior entonces f tendrá un punto fijo y puntos de periodo 2,4,6 y mayores que 7.

luego por el teorema del valor intermedio se sigue:

$$[x_2, x_5] \subset f(I_0),$$

$$[a, x_1] \subset f(I_1),$$

$$[a, b] \subset f(I_2),$$

$$[x_4, x_1] \subset f(I_3),$$

$$[a, x_5] \subset f(I_4) \text{ y}$$

$$[x_6, x_1] \subset f(I_5).$$

Tenemos que $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_2, x_1]$, $I_3 = [x_0, x_3]$, $I_4 = [x_4, x_1]$, $I_5 = [x_0, x_5]$ y $I_0 = [x_6, x_4]$. Se sigue que $I_1, I_2 \subset [a, x_1]$, $I_1, I_3, I_5 \subset [x_2, x_5]$, $I_3 \subset [a, b]$, $I_5 \subset [a, x_5]$ y $I_0 \subset [x_6, x_1]$ deduciendo así: $I_1 \rightarrow I_1$, $I_1 \rightarrow I_2$, $I_3 \rightarrow I_4$, $I_4 \rightarrow I_5$ y $I_5 \rightarrow I_0$.

Por tanto tenemos las siguientes coberturas:

1. $I_1 \rightarrow I_1$ y $I_0 \rightarrow I_0$
2. $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.
3. $I_0 \rightarrow I_5, I_3, I_1$.

Deduciendo nuevamente (3) del ejemplo anterior e igualmente los O bucles siguientes:

1. $I_1 \rightarrow I_1$.
2. $I_0 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$.

3. $I_0 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0.$

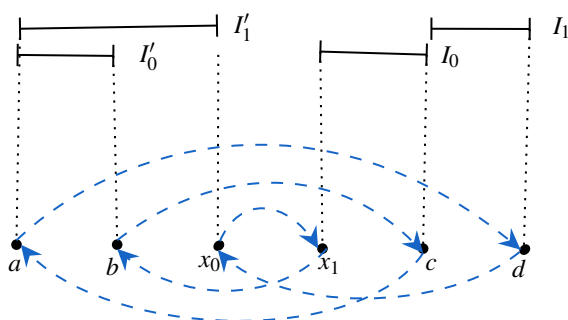
4. $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$

5. $I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{l-5} \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$ con $l - 5$ copias de I_1 y $l - 5 \geq 3.$

Dado que el $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ para $1 \leq j \leq 5$ y utilizando el mismo razonamiento del ejemplo anterior concluimos que x_6, x_4 no siguen al O -bucle. Obtenemos así que los anteriores O -bucles son elementales (por el Lema 2.9).

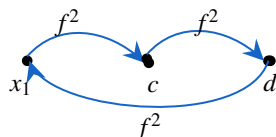
Por el Lema 2.7 tenemos que existen puntos que siguen al bucle, por tanto tenemos que hay órbitas de f de longitud 2, 4, 6 y cualquiera mayor que 7 y nuevamente por el Lema 2.2 tenemos que f tiene por lo menos un punto fijo tomando $I_1 \rightarrow I_1.$

Ejemplo 2.15. *Mostraremos que si f tiene un 6-ciclo como el siguiente, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos pares y además un punto fijo.*



La característica a destacar en este ciclo es que los tres puntos de la mitad de la izquierda, se le asigna a los tres puntos en la derecha y viceversa.

Obsérvese que si consideremos los tres puntos en la mitad de la derecha formamos un 3-ciclo para f^2 .



Teniendo en cuenta los O -intervalos mostrados en el 6-ciclo y lo probado en el ejemplo 2.12, tenemos las siguientes relaciones de cobertura: $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1, I_1 \xrightarrow{f^2} I_0, I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$. Deduciendo así, como en el ejemplo 2.12, que f^2 tiene bucles elementales de todas las longitudes.

A continuación aplicaremos un método recursivo, que utilizaremos más adelante en la prueba del Teorema de Sharkorvsky, que muestra cómo a partir de un O -bucle elemental de longitud k para f^2 , se construye un O -bucle elemental de longitud $2k$ para f .

1. Elegimos intervalos adicionales I'_1, I'_0 , tomando como I'_j el intervalo más corto que contiene $f(I_j \cap O_f(z))$.
2. Reemplazamos cada ocurrencia de $I_1 \xrightarrow{f^2}$ y $I_0 \xrightarrow{f^2}$ por $I_1 \rightarrow I'_1 \rightarrow$ y $I_0 \rightarrow I'_0 \rightarrow$ respectivamente. Ahora mostraremos que estos reemplazos producen relaciones de cobertura. Por construcción tenemos que $I'_1 \subset f(I_1)$ y $I'_0 \subset f(I_0)$. Seguidamente se tiene que $f(\{b, x_0\}) = \{x_1, c\}, f(\{a, x_0\}) = \{x_1, d\}$, luego $I_0 \subset f(I'_0)$ y $I_1, I_0 \subset f(I'_1)$. Obteniendo así que: $I_0 \rightarrow I'_0 \rightarrow I_1, I_1 \rightarrow I'_1 \rightarrow I_1$ y $I_1 \rightarrow I'_1 \rightarrow I_0$ donde se deduce $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1, I_1 \xrightarrow{f^2} I_0, I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$.

3. Considerar los siguiente bucles elementales de f^2 :

$$I_1 \xrightarrow{f^2} I_1. \quad (4)$$

$$I_1 \xrightarrow{f^2} I_0 \xrightarrow{f^2} I_1 \quad (5)$$

$$I_0 \xrightarrow{f^2} I_1 \xrightarrow{f^2} I_1 \xrightarrow{f^2} I_1 \xrightarrow{f^2} \cdots I_1 \xrightarrow{f^2} I_0. \quad (6)$$

Solo analizaremos con detalle uno de ellos, los otros se tratan de manera análoga. Consideremos el bucle (6) de longitud k de f^2 . Como se probó en el Ejemplo 2.12, se obtiene que el bucle (6) es elemental con f^2 cuando $k - 1 > 3$.

Ahora hacemos los remplazos correspondientes como se indicó en el paso 2.

$$I_0 \rightarrow I_0' \rightarrow I_1 \rightarrow I_1' \rightarrow I_1 \rightarrow I_1' \rightarrow \cdots I_1 \rightarrow I_1' \rightarrow I_1 \rightarrow I_1' \rightarrow I_0 \quad (7)$$

Mostraremos que este O -bucle es elemental, usando directamente la definición de bucle elemental.

Supongamos que p es un punto que sigue al O -bucle (7) y veamos que tiene periodo $2k$ (para f).

Como p es un punto que sigue al O -bucle (7), entonces también seguirá al O -bucle (6),

que es elemental con f^2 , luego su periodo en relación con f^2 es k , por tanto p tendrá en su órbita en relación con f^2 k puntos distintos a la derecha de x_0 y además $f^{2k}(p) = p$.

Ahora observe que los puntos $f^j(p)$ están en forma alternante entre la derecha y la izquierda del punto medio entre x_0 y x_1 , es decir, entre los intervalos I_j y I_j' .

Teniendo en cuenta lo anterior, se sigue que la órbita de p consistirá de k puntos a la izquierda y k puntos a la derecha del centro de x_0 y x_1 , es decir, la órbita de p tendrá $2k$ puntos distintos, luego el periodo de p en relación con f es $2k$, por tanto el bucle es elemental.

Concluyendo así que f tiene periodos pares mayores o iguales que 8.

Por otra parte se tiene que de los bucles (4) y (5) realizando los remplazos indicados en el paso 2 obtenemos:

$$I_1 \rightarrow I_1' \rightarrow I_1 \quad (8)$$

$$I_1 \rightarrow I_1' \rightarrow I_0 \rightarrow I_0' \rightarrow I_1. \quad (9)$$

Siguiendo un razonamiento análogo, como se probó con el O -bucle (7), se tiene que los bucles (8) y (9) son elementales, probando así la existencia de puntos de periodo 2 y 4.

Con lo visto hasta ahora, concluimos que un 6-ciclo como el de arriba, garantiza el hecho de puntos periódicos con periodo par. Por otra parte, tenemos también que f tiene un

punto fijo, pues esto último se verifica teniendo en cuenta que $[x_0, x_1] \rightarrow [x_0, x_1]$

3. El teorema de Sharkovsky

En este capítulo presentamos la demostración del Teorema de Sharkovsky. En un primer momento introduciremos el orden de Sharkovsky, seguidamente definiremos las secuencias de Štefan, las cuales jugarán un papel importante en la realización de la demostración de la primera parte del Teorema de Sharkovsky, pues permitirá la construcción de O -bucles elementales. Finalmente se realizará la demostración del Teorema de Sharkovsky.

3.1. El orden de Sharkovsky

El **orden de Sharkovsky** está dado de la siguiente manera:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Notemos que este orden inicia con los números impares con excepción del uno, luego le sigue los dobles de estos números, seguidamente los números impares multiplicados por 4 sin tener en cuenta el uno y así sucesivamente, terminando con las potencias de 2 hasta llegar a $2^0 = 1$.
Esté es un orden total que cumple:

$$l \triangleright r \text{ si y solo si, } 2l \triangleright 2r. \quad (10)$$

Está propiedad es inmediata de la construcción del orden, para ello tenga en cuenta la figura 12 la cual ilustra la construcción del orden de Sharkovsky.

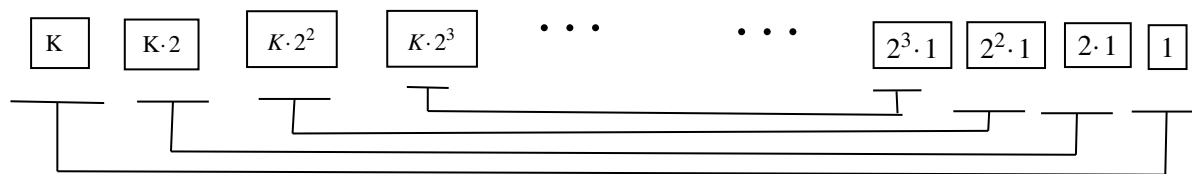


Figura 12. K denota los números impares mayores que uno, con el orden usual.

3.2. Secuencias de Štefan

Iniciaremos esta sección con algunas definiciones que permitirán introducir las secuencias de Štefan y se finalizará esta sección con la construcción de bucles elementales a partir de las secuencias de Štefan.

Para las siguientes definiciones tenga en cuenta $m \geq 2$ y $O_f(z)$ es un m -ciclo de una función continua f .

Definición 3.1. p es el número más grande de $O_f(z)$ para el cual $f(p) > p$ y q el punto inmediatamente a la derecha que este en $O_f(z)$.

Definición 3.2. El centro de $O_f(z)$ está dado por $c = \frac{(p+q)}{2}$.

Definición 3.3. Decimos que x cambia de lados si c está entre x y $f(x)$

Denotamos $S_x \subset O_f(z)$ como el conjunto de puntos que pertenecen a la órbita en x y c , esto es:

$$S_x = O_f(z) \cap [x, p] \text{ cuando } x \leq p, \text{ y}$$

$$S_x = O_f(z) \cap [q, x] \text{ cuando } x \geq q.$$

Definición 3.4. Una secuencia x_0, \dots, x_n de puntos de $O_f(z)$ es llamada una secuencia de Štefan si:

S1 $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$.

S2 x_0, \dots, x_n están en lados alternos del centro del c y las secuencias x_{2j} y x_{2j+1} ambas son estrictamente monótonas alejándose de c .

S3 Si $1 \leq j \leq n-1$ entonces x_j es un punto que cambia de lados y $x_{j+1} \in S_{f(x_j)}$.

S4 x_n no cambia de lado.

Notemos que *S2* garantiza que los puntos x_0, \dots, x_n son distintos, por lo que $n+1 \leq m$.

La condición *S3*, $x_{j+1} \in S_{f(x_j)}$, se usará con frecuencia y la podemos enunciar de manera equivalente como sigue

$$c < x_{j+1} \leq f(x_j) \text{ si } x_j < c \text{ y}$$

$$c > x_{j+1} \geq f(x_j) \text{ si } x_j > c.$$

Algunos ejemplos de estas secuencias, se evidencian en el capítulo anterior:

- El ejemplo 2.12 muestra un secuencia de Štefan donde $n=2$ y $n+1 = m = 3$, en la figura 9.
- El ejemplo 2.13 muestran una secuencia de Štefan donde $n=6$ y $n+1 = m$.
- El ejemplo 2.14 ilustra un caso en el que $n=6$ y $n+1 < m$ donde $m = 9$. Mostrando así que una secuencia de Štefan no necesariamente es igual al ciclo que la contiene (ver figura 11).

Observe que se puede deducir que si $O_f(z)$ es un m -ciclo y toda la órbita forma una secuencia de Štefan, entonces necesariamente la órbita tendrá solo un punto que no cambia de lado y este será el punto más alejado de c , ya sea a la derecha o la izquierda y se puede observar que se forma una espiral con los puntos de la órbita (ver figura 13 y 14, cada una es el espejo de la otra)

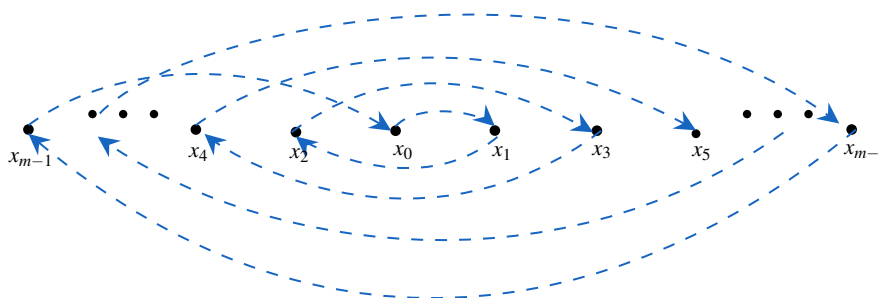


Figura 13. Muestra la forma de una secuencia de Stefan cuando m es impar

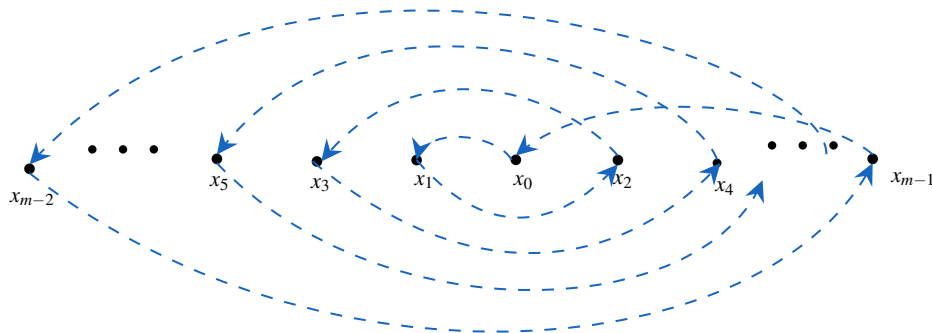


Figura 14. Muestra la forma de una secuencia de Stefan cuando m es par

A cada secuencia de Štefan le asociaremos una sucesión de intervalos $I_0, I_1 \cdots I_{n-1}$ que se usarán para construir bucles elementales.

Sea x_0, \cdots, x_n una sucesión de Štefan. Definimos los intervalos I_j de la siguiente manera:

- Para $j \geq 1$, I_j es el intervalo más pequeño que contiene a x_0, x_1 y x_j .
- Para $j = 0$, I_0 es el intervalo más pequeño que tiene puntos extremos x_n y x_{n-2} .

Proposición 3.5. *Sea x_0, \cdots, x_n una secuencia de Štefan. Tenemos las siguientes relaciones de cobertura con los O -intervalos asociados a la secuencia de Štefan.*

1. $I_1 \rightarrow I_1$ y $I_0 \rightarrow I_1$
2. $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \cdots I_{n-1} \rightarrow I_0$
3. $I_0 \rightarrow I_{n-1}, I_{n-3} \cdots$

Demostración. 1. $I_1 \rightarrow I_1$ y $I_0 \rightarrow I_1$.

Para mostrar este hecho probaremos que $I_1 \subset f(I_j)$ para $0 \leq j \leq n-1$. Dado que f es continua, bastará con probar que $x_0, x_1 \in f(I_j)$. Para ello probaremos que $f(I_j)$ tiene extremos en lados opuestos de c .

Consideremos dos casos:

Caso 1: Supongamos que $1 \leq j \leq n-1$. De la definición de los intervalos, tenemos que los extremos de I_j pertenecen a la secuencia de Štefan. Por S_2 y S_3 se sigue que sus extremos están en lados opuestos de c y cambian de lado (ver figura 14).

Caso 2: Si $j = 0$, entonces tenemos que para I_0 uno de sus extremos es x_n y el otro es

x_{n-2} , además note x_n, x_{n-2} se encuentran en el mismo lado de c por $S2$, luego por $S4$ tenemos x_n no cambia de lado y por $S3$ x_{n-2} si cambia de lado (ver figura 16).

Por tanto en cualquier caso tenemos que $f(I_j)$ tiene extremos en lados opuestos de c . Luego por $S1$ se sigue que contiene a x_0 y x_1 , entonces por el teorema del valor intermedio se tiene que $I_1 \subset f(I_j)$. Considerando $j \in \{1, 0\}$ se tiene lo que se quería mostrar.

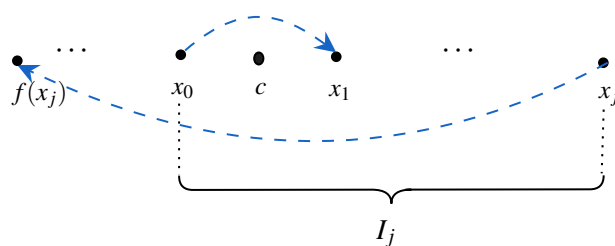


Figura 15. Ilustra un caso particular, donde $x_0 < x_1$ y j impar. Tenga en cuenta que en los otros casos la figura es similar.

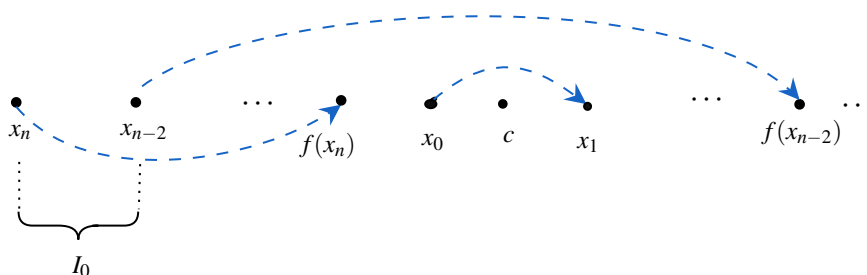


Figura 16. Ilustra el caso en que $x_0 < x_1$ y $j = 0$.

$$2. I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0.$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de continuidad de f es suficiente con demostrar que $x_{j+1}, x_0, x_1 \in f(I_j)$, para $1 \leq j \leq n - 1$. Por ítem anterior tenemos que $x_0, x_1 \in f(I_j)$; veamos entonces que $x_{j+1} \in f(I_j)$. Por $S3$ se sigue que $x_{j+1} \in S_{f(x_j)}$.

Probemos ahora que $S_{f(x_j)} \subset f(I_j)$, en efecto:

Para demostrar este hecho sin pérdida de generalidad tomaremos a $x_0 < x_1$ y j impar.

Por S_2 se tiene que $x_j \geq x_1$, luego por S_3 se tiene que x_0 y x_j cambian de lado, es decir, $f(x_0) \geq x_1$ y $f(x_j) \leq x_0$.

Por definición de I_j , tenemos que $x_0, x_1, x_j \in I_j$, se sigue $[f(x_j), f(x_0)] \subset f(I_j)$ y como $S_{f(x_j)} = O_f(z) \cap [f(x_j), x_0]$ entonces $S_{f(x_j)} \subset f(I_j)$ (ver figura 17). Por consiguiente $x_{j+1} \in f(I_j)$.

Por tanto por el teorema del valor intermedio podemos concluir: $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$.

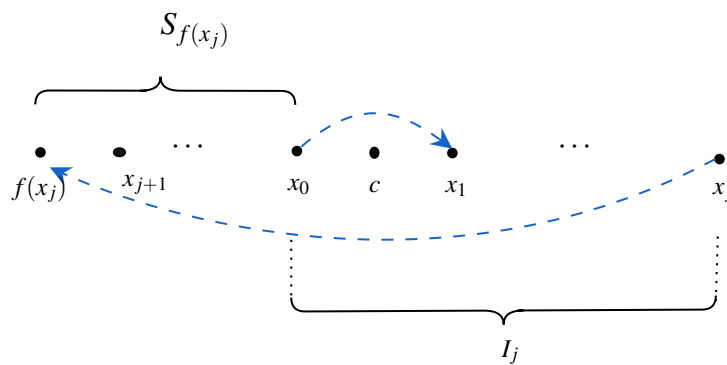


Figura 17. Esta figura ilustra que $S_{f(x_j)} \subset f(I_j)$.

3. $I_0 \rightarrow I_{n-1}, I_{n-3} \dots$

Debemos ver que $x_0, x_1, x_{n-1}, x_{n-3}, \dots \in f(I_0)$. Por ítem 1 tenemos que $x_0, x_1 \in f(I_0)$, luego falta ver que $x_{n-1}, x_{n-3}, \dots \in f(I_0)$. Obsérvese que es suficiente con probar que $x_{n-1} \in f(I_0)$ por S_2 (ver Figura 18), pues:

- Si n es par y $x_1 < x_0$, entonces x_{n-1}, x_{n-3}, \dots es una sucesión estrictamente decreciente.
- Si n es impar y $x_1 < x_0$, entonces x_{n-1}, x_{n-3}, \dots es una sucesión estrictamente creciente.
- Si n es par y $x_0 < x_1$, entonces x_{n-1}, x_{n-3}, \dots es una sucesión estrictamente creciente.
- Si n es impar y $x_0 < x_1$, entonces x_{n-1}, x_{n-3}, \dots es una sucesión estrictamente decreciente.

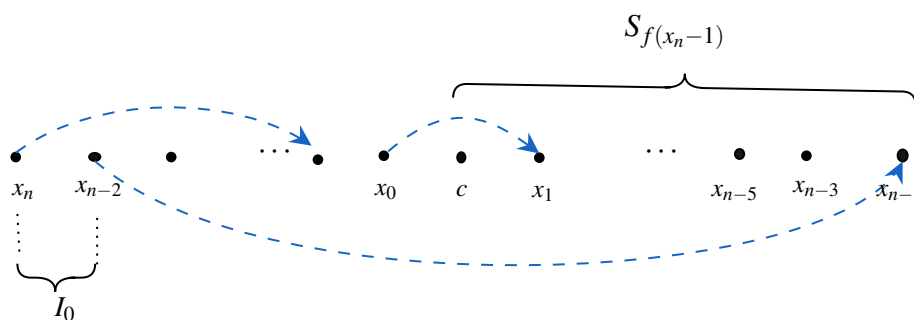
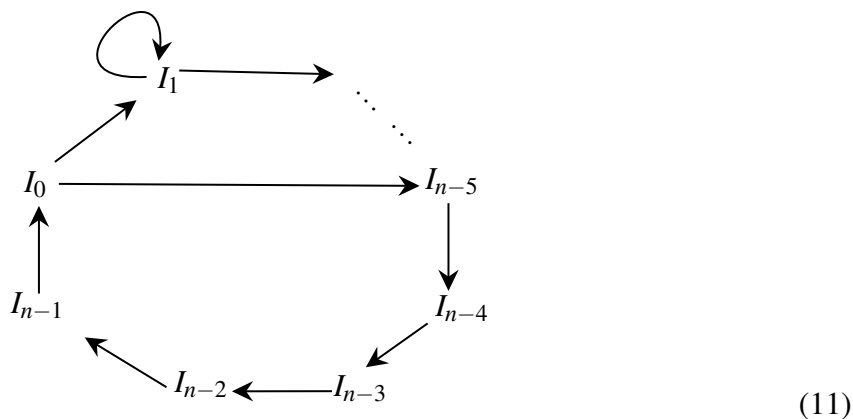


Figura 18. Está figura ilustra el caso en que n es par.

Dado que $x_{n-2} \in I_0$, por S3 se tiene $x_{n-1} \in S_{f(x_{n-2})}$; siguiendo un razonamiento similar al ítem anterior tenemos que $S_{f(x_{n-2})} \subset f(I_0)$. Por tanto $x_{n-1} \in f(I_0)$ entonces por S2 se tiene $x_{n-1}, x_{n-3}, \dots \in f(I_0)$, se sigue que por el teorema del valor intermedio $I_0 \rightarrow I_{n-1}, I_{n-3} \dots$

□

Lo probado en la proposición 3.5 lo podemos resumir en el siguiente gráfico.



Donde deducimos los siguientes bucles.

(L1) $I_1 \rightarrow I_1$.

(L2) $I_0 \rightarrow I_{n-(l-1)} \rightarrow I_{n-(l-2)} \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ para cada l par con $l \leq n$.

(L3) $I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_r \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, con r repeticiones de I_1 para todo $r \geq 1$.

No toda órbita contiene una secuencia de Štefan, veremos más adelante la razón (ver la proposición 3.8). Ahora mostraremos que en caso que una órbita contenga una secuencia de Štefan podemos construir puntos periodicos.

Proposición 3.6. *Sea $O_f(z)$ un m -ciclo que tiene una secuencia de Štefan. Si $l \triangleleft m$, entonces f tiene un O -bucle elemental de longitud l y por tanto un punto con periodo l .*

Demostración. Consideremos 3 casos:

Caso 1: Si $l = 1$, por (L1) y el Lema 2.2 tenemos que existe un punto fijo.

Ahora si $l > 1$ para demostrar la existencia de un O -bucle elemental de longitud l , en los siguientes casos utilizaremos (L2), (L3) y el Lema 2.9. Recordemos que I_j es el intervalo más pequeño que contiene a x_0, x_1 y x_j y I_0 es el intervalo más pequeño que tiene puntos extremos x_n y x_{n-2} . Veamos primero que $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ con $0 < j \leq n-1$. Para demostrar este hecho tenemos por S2 los siguientes casos:

- Si n es par y $x_1 < x_0$, entonces la subsucesión $(x_{2i})_i$ es estrictamente creciente, $(x_{2i+1})_i$ decreciente y $x_0 < x_{n-2} < x_n$.
- Si n es impar y $x_1 < x_0$, entonces la subsucesión $(x_{2i})_i$ es estrictamente creciente, $(x_{2i+1})_i$ decreciente y $x_n < x_{n-2} < x_1$.
- Si n es par y $x_0 < x_1$, entonces la subsucesión $(x_{2i})_i$ es estrictamente decreciente, $(x_{2i+1})_i$ creciente y $x_n < x_{n-2} < x_0$.
- Si n es impar y $x_0 < x_1$, entonces la subsucesión $(x_{2i})_i$ es estrictamente decreciente, $(x_{2i+1})_i$ creciente y $x_1 < x_{n-2} < x_n$.

Supondremos que n es par y $x_0 < x_1$, los otros casos se tratan de manera similar. Luego tenemos que la subsucesión $(x_{2i})_i$ es decreciente y $(x_{2i+1})_i$ creciente. Por lo anterior se sigue que $x_n < x_{n-2} \leq x_j$ para todo j en $1 \leq j < n$, concluyendo así que $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$.

Caso 2: Si $l \leq n < m$.

Primero observe que del orden de Sharkovsky tenemos que:

Si $l \triangleleft m$ y l es impar, entonces $m < l$ en el orden usual de los naturales.

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos que l es par. Por tanto podemos usar (L2). Para probar que (L2) es elemental, veamos que x_n y x_{n-2} (que son los extremos de I_0) no siguen al O -bucle. En efecto, dado que $x_n, x_{n-2} \in O_f(z)$, se sigue que el periodo de x_n, x_{n-2} es m . Por tanto como $l < m$ entonces $f^l(x_n) \neq x_n$ y $f^l(x_{n-2}) \neq x_{n-2}$. Luego x_n y x_{n-2} no siguen al bucle.

Ahora como x_n, x_{n-2} no siguen al O -bucle y el $\text{int}(I_0)$ es disjunto con $I_{n-(l-1)}, I_{n-(l-2)}, \dots, I_{n-1}$, entonces por el Lema 2.9 tenemos que el O -bucle (L2) es elemental y como es de longitud l se sigue que f tiene un punto de periodo l .

Caso 3: Si $l > n$, usaremos (L3) tomando $r = l - n + 1$. Para probar que (L3) es elemental utilizaremos de nuevo el Lema 2.9. Como se vio anteriormente $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ para $0 < j \leq n - 1$. Mostraremos a continuación que x_n y x_{n-2} no siguen al bucle. Para ello debemos analizar dos casos.

Caso 3.1: Supongamos $n < l < m$. Como el bucle (L3) es de longitud l y x_n y x_{n-2} son de periodo m y $l < m$, entonces $f^l(x_n) \neq x_n$ y $f^l(x_{n-2}) \neq x_{n-2}$. Por tanto x_n y x_{n-2} no siguen al bucle.

Caso 3.2: Supongamos $l > m$. Obsérvese primero que $r \geq 3$, pues $r = l - n + 1 \geq m + 1 - n + 1 \geq 3$. El argumento se hace por casos, los cuales son los mencionados antes de comenzar el caso 2. Supondremos que n es par y $x_0 < x_1$, pues en los otros casos

el razonamiento es similar. La figura 19 muestra este caso. Veamos primero que x_n no sigue al bucle. Por S4, tenemos $f(x_n) \leq x_0$, luego debemos considerar dos subcasos que $f(x_n) < x_0$ o $f(x_n) = x_0$.

Es claro que si $f(x_n) < x_0$, entonces x_n no sigue al bucle. Ahora si $f(x_n) = x_0$, tenemos por S3 que $f(x_0) \geq x_1$ y realizando un razonamiento análogo a lo anterior obtenemos que $f(x_0) < x_1$ o $f(x_0) = x_1$. Si $f(x_0) < x_1$, x_n no sigue al O -bucle, por otra parte si $f(x_0) = x_1$, por S3, $f(x_1) \leq x_2 < x_0$. Luego $f(x_n) \in I_1$, $f^2(x_n) \in I_1$ y $f^3(x_n) \notin I_1$, por tanto x_n no sigue al bucle.

Para verificar que x_{n-2} no sigue al O -bucle, tenemos que por S3 y S2 se sigue que $f(x_{n-2}) \geq x_{n-1} > x_1$, luego $f(x_{n-2}) \notin I_1$, es decir, x_{n-2} no sigue al O -bucle.

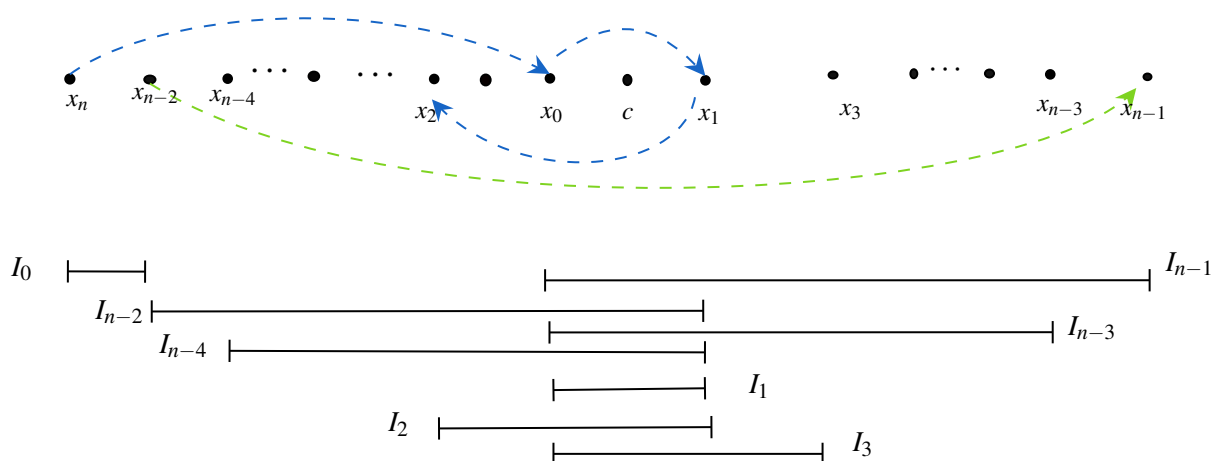


Figura 19. Esta figura muestra claramente que x_n y x_{n-2} no siguen al O -bucle

Concluimos entonces que f tiene un O -bucle elemental de longitud l y por tanto un punto de periodo l .

□

3.3. Primera parte del Teorema de Sharkovsky

En esta sección probaremos la primera parte del Teorema de Sharkovsky, para ello tendremos en cuenta los resultados obtenidos sobre las secuencias de Štefan y los O -bucles elementales. A continuación enunciamos la primera parte del teorema de Sharkovsky.

Teorema 3.7. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua donde I es un intervalo cerrado y acotado de la recta. Si x es un punto periódico con respecto a f de período m y $m \triangleright l$, entonces l es el período de algún otro punto en I .*

Obsérvese que el Teorema de Sharkovsky estaría resuelto si cada ciclo tuviera una secuencia de Štefan (por la Proposición 3.6). Sin embargo, en el Ejemplo 2.15 vemos un ciclo que no admite una secuencia de Štefan, pues todos sus puntos cambian de lado. Veremos ahora que éste es el único obstáculo que no permite encontrar una secuencia de Štefan en un ciclo.

Proposición 3.8. *Un ciclo contiene una secuencia de Štefan a menos que cada punto cambie de lado.*

Antes de iniciar esta prueba recordemos que p es el número más grande de $O_f(z)$ para el cual $f(p) > p$ y q el punto inmediatamente a la derecha que esté en $O_f(z)$.

Demostración. Consideremos $O_f(z)$ un m -ciclo con $m \geq 2$. Sea M el O -intervalo más grande, donde todo punto de $O_f(z)$ cambia de lado y contiene a $[p, q]$. Tenemos que si $x \in O_f(z) \cap M$, entonces en el conjunto S_x todo punto cambia de lado.

Definimos el conjunto \mathcal{S} como los $x \in O_f(z) \cap M$ tales que $f(x)$ es el punto de S_x más lejos de c , es decir, si $x < c$ entonces

$$f(x) = \max\{f(w) : w \in S_x\}.$$

De manera similar, cuando $c < x$, se usa mín en lugar de máx. La siguiente figura ilustra la definición de \mathcal{S} .

Los elementos de \mathcal{S} son los candidatos a ser un término de la secuencia de Štefan.

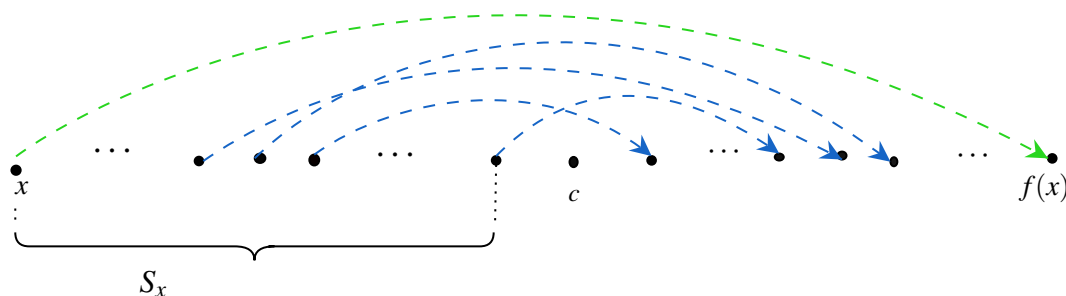


Figura 20. Está figura representa el caso en que $x \in \mathcal{S}$

Observemos que la definición de \mathcal{S} es equivalente a lo siguiente: $x \in \mathcal{S}$ si para todo $w \in S_x, S_{f(w)} \subset S_{f(x)}$.

Note que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pues $p, q \in \mathcal{S}$ en efecto: Es claro que $p, q \in M \cap O_f(z)$. Tenemos que $S_p = \{p\}$ y $S_q = \{q\}$, luego $S_{f(p)} = \{f(p)\}$ y $S_{f(q)} = \{f(q)\}$, por tanto $p, q \in \mathcal{S}$.

Ahora definiremos una función $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow O_f(z)$ que se encarga de asignar el sucesor de cada elemento de la secuencia de Štefan. Sea $x \in \mathcal{S}$.

Caso 1: Si $f(x) \notin M$, tomaremos a $\sigma(x)$ como cualquier punto de $S_{f(x)}$ que no cambia de lado. Note que en este caso $\sigma(x) \notin \mathcal{S}$, pues $\sigma(x) \notin M$.

Caso 2: Si $f(x) \in M$, entonces $\sigma(x)$ es el punto de $S_{f(x)}$ tal que $f(\sigma(x))$ es el punto de $f(S_{f(x)})$ más alejado de c , es decir, $f(S_{f(x)}) \subset S_{f(\sigma(x))}$ (ver figura 21). Note que en este caso $\sigma(x) \in \mathcal{S}$.

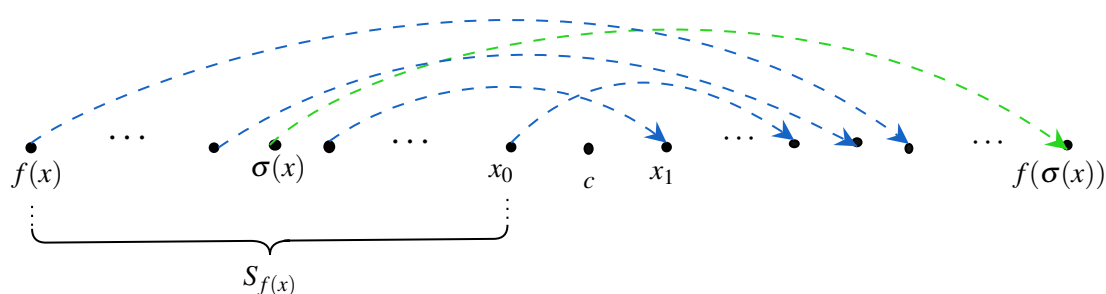


Figura 21. Está figura ilustra el caso 2

Notemos que x y $\sigma(x)$ están en lados opuestos de c , igualmente tenemos que x y $\sigma^2(x)$ están en el mismo lado de c .

Lema 3.9. Si hay un $x \in \mathcal{S}$ tal que $\sigma^2(x) \in S_x$, entonces todos los puntos de $O_f(z)$ cambian de lado.

Demostración. Por definición de σ se sigue que $\sigma(x) \in \mathcal{S}$, luego $\sigma(x)$ cambia de lado, por tanto $f(\sigma(x))$ está en el mismo lado de x .

Queremos ver ahora que $\sigma^2(x) \in \mathcal{S}$. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $f(x) < c < x$. Consideraremos dos casos:

Caso 1 Si $c < f(\sigma(x)) < x$. Dado que $x \in M$ se sigue que $f(\sigma(x)) \in M$, luego $\sigma^2(x) \in \mathcal{S}$.

Caso 2 Si $x < f(\sigma(x))$.

Para mostrar $\sigma^2(x) \in \mathcal{S}$, debemos ver $f(\sigma(x)) \in M$. Veamos primero que $f(\sigma(x))$ cambia de lado. Supongamos que $f(\sigma(x))$ no cambia de lado, luego $f(\sigma(x)) \notin M$, entonces por definición σ , tenemos que como todo punto de S_x cambia de lado, se sigue que $\sigma^2(x) \in (x, f(\sigma(x))]$, contradicción, pues $\sigma^2 \in S_x$. Teniendo que $f(\sigma(x))$ cambia de lado, veamos ahora que $f(\sigma(x)) \in M$. Supongamos que $f(\sigma(x)) \notin M$ entonces existe un $x_0 \in (x, f(\sigma(x)))$ que no cambia de lado. Por definición de σ se tiene que $\sigma^2(x) = x_0$ lo que es una contradicción, pues $\sigma^2(x) \in S_x$, luego $f(\sigma(x)) \in M$ y por tanto $\sigma^2(x) \in \mathcal{S}$.

Para simplificar la escritura, sea $y = \sigma(x)$ y $w = \sigma^2(x)$. Dado que $\sigma(y)$ y $\sigma(x)$ se obtienen usando el caso II de la definición de σ , tenemos:

$$f(S_{f(x)}) \subset S_{f(\sigma(x))} = S_{f(y)}$$

$$f(S_{f(y)}) \subset S_{f(\sigma(y))} = S_{f(w)}.$$

Por otra parte, tenemos por hipótesis que $w \in S_x$ y $x \in \mathcal{S}$, por definición de \mathcal{S} , se sigue que $S_{f(w)} \subset S_{f(x)}$, luego $f(S_{f(y)}) \subset S_{f(x)}$. Tenemos también $f(S_{f(x)}) \subset S_{f(y)}$, entonces $S_{f(x)} \cup S_{f(y)}$ permanece invariante con respecto a f .

Ahora como $O_f(z)$ es una permutación cíclica con respecto a f y el único subconjunto

que permanece invariante con respecto a f de $O_f(z)$ es él y $S_{f(x)} \cup S_{f(y)} \subset O_f(z)$, entonces $O_f(z) = S_{f(x)} \cup S_{f(y)}$.

Por tanto como todos los puntos de $S_{f(x)}$ y $S_{f(y)}$ cambian de lado, pues $f(x), f(y) \in M$, entonces todos los puntos de la órbita cambian de lado. \square

Supongamos que existe un punto que no cambia de lado en $O_f(z)$. La secuencia de Štefan la construiremos de la siguiente manera.

1. Afirmamos que podemos escoger x_0 y x_1 tales que $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ y además $\sigma(x_1) \neq x_0$. En efecto, por el contrareciproco del Lema 3.9, tenemos que no puede ocurrir que $\sigma(q) = p$ y $\sigma(p) = q$ a la vez, pues eso implicaría que $\sigma^2(p) \notin S_p$, pero $\sigma^2(p) = p$ y $p \in S_p$ por definición de S_p . Ahora note que tenemos tres casos que considerar

Caso 1: si $\sigma(p) = q$ y $\sigma(q) \neq p$, entonces $p = x_0$ y $q = x_1$

Caso 2: si $\sigma(q) = p$ y $\sigma(p) \neq q$, entonces $q = x_0$ y $p = x_1$

Caso 3: si $\sigma(q) \neq p$ y $\sigma(p) \neq q$, entonces se elige x_0 y x_1 a decisión del lector.

2. Continuamos eligiendo x_i tal que $\sigma(x_{i-1}) = x_i$.
3. Cuando $f(x_j) \notin M$, tendremos que $\sigma(x_j) = x_{j+1}$ es el último término de la secuencia de Štefan. Así que la longitud de la secuencia de Štefan es $j + 2$.

Veamos que lo anterior define una secuencia de Štefan, en efecto:

S1 Por como se definió tenemos $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$.

S2 Primero observamos que por definición de σ los términos de la secuencia se encuentran en lados alternos de c .

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 < x_1$. Veamos que $x_2 < x_0$:

Tenemos que x_0 y x_2 se encuentran en el mismo lado de c , por definición de σ . Supongamos que $x_0 < x_2$, se sigue $f(x_2) > x_2$ o $f(x_2) < x_2$, por tanto por definición de p y q , $x_2 = p$ o $x_2 = q$, lo que es una contradicción pues $p = x_0$ y $x_1 = q$, luego $x_2 < x_0$.

Ahora de manera general tenemos dos casos para $i > 2$:

Caso 1: Si $x_i < c$, tenemos por la definición de σ que x_{i+2} se encuentran en el mismo lado de x_i .

Dado que existe un punto que no cambia de lado entonces por el Lema 3.9 $\sigma^2(x_i) \notin S_{x_i}$, lo que implica x_{i+2} se encuentra más lejos de c que x_i , por tanto tenemos $x_{i+2} < x_i$.

Como $x_i < c$ entonces tenemos $x_{i+2} < x_i \leq x_0$, por tanto se tiene una sucesión decreciente para $(x_{2i})_i$.

Caso 2: Si $x_i > c$, entonces siguiendo un razonamiento análogo al anterior caso obtenemos que $x_1 < x_i < x_{i+2}$, entonces tenemos una sucesión creciente para $(x_{2i+1})_i$. Por tanto se cumple S2.

S3 Notemos que de la definición de σ tenemos que para $0 \leq i < n$, $x_i \in \mathcal{S}$, lo que implica que cambia de lado (pues \mathcal{S} es subconjunto de M). Ahora por definición de σ se tiene que $\sigma(x_i) \in S_{f(x_i)}$ y dado que $\sigma(x_i) = x_{i+1}$, luego $x_{i+1} \in S_{f(x_i)}$.

S4 Por construcción, el último elemento no cambia de lado.

□

Los anteriores resultados los podemos resumir en la siguiente proposición, su demostración es inmediata de que las Proposiciones 3.6 y 3.8.

Proposición 3.10. *Si f tiene un m ciclo O con $m \leq 2$ que contiene un punto que no cambia de lado, entonces para cada $m \triangleright l$ existe un O -bucle elemental de longitud l .*

Proposición 3.11. *Si f tiene un m ciclo O y $m \triangleright l$, entonces existe un O -bucle elemental de longitud l .*

Demostración. Esta demostración se realizará por inducción sobre m . Es evidente que es cierto para $m = 1$.

Supongamos que se cumple para cualquier función que tenga un k_0 ciclo con $k_0 < m$. Mostremos ahora que es cierto para cualquier función que tenga un m -ciclo. Sea $O_f(z)$ un m -ciclo de f . La prueba la dividiremos en dos casos:

Caso 1 Si hay por lo menos un punto que no cambia de lado, entonces por la Proposición 3.11 existe un l O -bucle elemental.

Caso 2 Si todos los puntos cambian de lado del m -ciclo. Sea $L = \min O_f(z)$ y $R = \max O_f(z)$. Luego S_L va a contener todos los puntos a la izquierda de c y S_R los puntos a la derecha de c . Observe que m es par, pues S_L y S_R son de la misma cardinalidad.

Como m es par, de la definición del orden de Sharkovsky, se deduce que $l = 1$ o $l = 2k$.

Caso 2.1 Supongamos $l = 1$. Basta con observar que $[p, q] \rightarrow [p, q]$, pues tenemos $f(q) \leq p$ y $q \leq f(p)$, como es de longitud uno es elemental.

Para demostrar la existencia de un bucle elemental de longitud $2k$ en un m -ciclo recordemos que por la propiedad 10 del orden de Sharkovsky tenemos

$$l \triangleleft m \text{ si solo si } k \triangleleft m/2.$$

Luego debemos ver que f tiene un O -bucle elemental de longitud $2k$ para cada $k \triangleleft m/2$.

Caso 2.2 Supongamos $l = 2k$. Debemos conseguir un bucle elemental de longitud $2k$. Para encontrar dicho bucle utilizaremos la hipótesis de inducción. Note que f^2 tiene un ciclo de longitud $m/2$ a la derecha y a la izquierda de c , tomaremos el que se encuentra a la derecha de c , es decir, en S_R . Ahora dado que $k \triangleleft m/2$, por hipótesis de inducción tenemos que f^2 tiene un O -bucle elemental de longitud k .

$$I_0 \xrightarrow{f^2} I_1 \xrightarrow{f^2} I_2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^2} I_{k-1} \xrightarrow{f^2} I_0. \quad (12)$$

Observe que los intervalos I_j están a la derecha de c . Ahora aplicaremos el método utilizado en el Ejemplo 2.15 en el bucle (12).

Sea I'_i el intervalo más corto que contienen a $f(I_i \cap O_f(z)) \subset S_L$ para $0 \leq i \leq k-1$ (ver figura 22 y Ejemplo 2.15). Observe que los intervalos I'_i están a la izquierda de c .

Veamos que cada ocurrencia $I_i \xrightarrow{f^2} I_{i+1}$ se puede reemplazar por $I_i \rightarrow I'_i \rightarrow I_{i+1}$ para $0 \leq i \leq k-1$, donde por conveniencia tomamos $I_k = I_0$. En efecto, por construcción tenemos que $I_i \rightarrow I'_i$ para cada $0 \leq i < k-1$. Ahora veamos que $I'_i \rightarrow I_{i+1}$. Para ello partiremos del hecho que $I_i \xrightarrow{f^2} I_{i+1}$, consideremos $a_i, b_i \in S_R \cap I_i$, tales que el intervalo $f^2(a_i)$ y $f^2(b_i)$ contienen a I_{i+1} . Teniendo en cuenta como se definió I'_i se tiene $f(a_i), f(b_i) \in I'_i$. Sea $f(a_i) = a'_i$ y $f(b_i) = b'_i$, se sigue que el intervalo formado $f(a'_i)$ y $f(b'_i)$ contiene I_{i+1} , por tanto $I'_i \rightarrow I_{i+1}$.

Remplazando cada ocurrencia de $I_i \xrightarrow{f^2} I_{i+1}$ por $I_i \rightarrow I'_i \rightarrow I_{i+1}$, en el bucle (12) obtenemos el siguiente O -bucle de longitud $2k$.

$$I_0 \xrightarrow{f} I'_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I'_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_{k-1} \xrightarrow{f} I'_{k-1} \xrightarrow{f} I_0 \quad (13)$$

Queda por probar que el O -bucle (13) es elemental. Consideremos un punto p que sigue al O -bucle (13). Por consiguiente p seguirá al bucle (12), que es elemental por hipótesis, por tanto p tiene período k con respecto a f^2 . Luego la órbita de p (respecto a f^2) tiene k puntos a la derecha de c .

Ahora como los intervalos de (13) están en forma alternante entre la derecha y izquierda de c , entonces la órbita de p con respecto f tendrá k puntos a la izquierda de c , lo que implica que la órbita de p tiene longitud de $2k$. Se sigue que como $f^{2k}(p) = p$, entonces p tiene periodo $2k$ con respecto a f , por tanto el bucle es elemental. Concluyendo así lo que se quería demostrar.

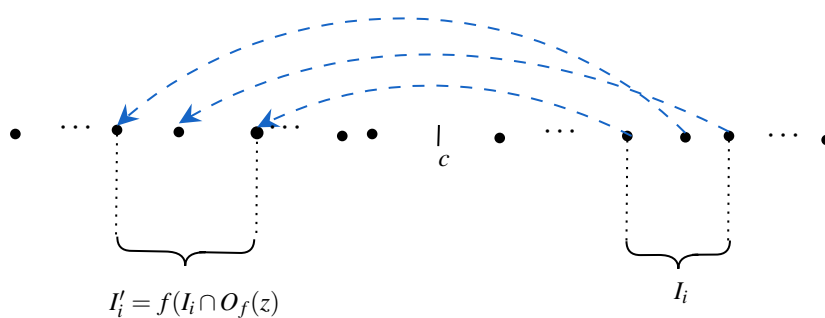


Figura 22. Ilustra gráficamente como se toma I'_i

□

Ahora podemos concluir con la demostración de la primera parte del Teorema de Sharkovsky.

Demostración del Teorema 3.7: Por la proposición 3.11 tenemos que si $l \triangleleft m$ entonces existe un O -bucle elemental de longitud l , luego por el Lema 2.7 tenemos que existe un punto que sigue al bucle. Como el bucle es elemental, entonces se tiene que todo punto que sigue al bucle tiene periodo l , es decir, tenemos que existe un punto de periodo l con respecto a f . □

3.4. Segunda Parte del Teorema de Sharkovsky

Para demostrar la segunda parte del Teorema de Sharkovsky construiremos una familia parametrizada de funciones. Esta familia tiene la propiedad que para cada cola C del orden de Sharkovsky existe una función en la familia cuyos periodos posibles son exactamente los números en C . Un conjunto C es una cola si existe m tal que:

$$C = \{m\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid m \triangleright l\}$$

o si C es el conjunto de todas las potencias de 2.

Teorema 3.12. *Cada cola del orden de Sharkovsky, sin tener en cuenta el vacío, es el conjunto de períodos para alguna función continua de $[0, 1]$ en $[0, 1]$.*

Sea $T_h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dada por $x \rightarrow \min(h, 1 - 2|x - \frac{1}{2}|)$ para $0 \leq h \leq 1$.

Demostraremos que al variar h se puede encontrar un miembro de la familia que tenga como conjunto de períodos exactamente los números de C .

3.4.1. La función Tienda. $T_1 = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$ es conocida como la función tienda, esta tiene dos órbitas de periodo 3, estas órbitas son $O_{T_1}(\frac{2}{7}) = \{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ y $O_{T_1}(\frac{2}{9}) = \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$, por tanto tiene todos los períodos posibles por la primera parte del Teorema de Sharkovsky 3.7.

También tenemos que T_1^n tiene 2^n puntos fijos. Para demostrar que T_1^n tiene 2^n puntos fijos, el argumento lo realizaremos por inducción sobre n .

Para $n = 1$ se tiene que T_1 tiene 2 puntos fijos $T_1(0) = 0$ y $T_1(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, consecuencia de que T_1 recorre el intervalo $[0, 1]$ en los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$.

Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir que T_1^k tiene 2^k puntos fijos y realiza el recorrido del intervalo $[0, 1]$ 2^k veces, en los intervalos $[0, \frac{1}{2^k}]$, $[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}]$, $[\frac{2}{2^k}, \frac{3}{2^k}]$ \cdots $[\frac{2^k-1}{2^k}, 1]$, donde $T_1^k(0) = 0, T_1^k(\frac{1}{2^k}) = 1, T_1^k(\frac{2}{2^k}) = 0, T_1^k(\frac{3}{2^k}) = 1 \cdots T_1^k(1) = 0$

Veamos ahora que T_1^{k+1} tiene 2^{k+1} puntos fijos:

Teniendo en cuenta que T_1 es equivalente a:

$$T_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $T_1^k(0) = 0$, $T_1^k\left(\frac{1}{2^k}\right) = 1$, se sigue que:

$$\begin{aligned} T_1^{k+1}(0) &= T_1^k(T_1(0)) = T_1^k(0) = 0 \\ T_1^{k+1}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) &= T_1^k\left(T_1\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) = T_1^k\left(\frac{1}{2^k}\right) = 1 \\ T_1^{k+1}\left(\frac{1}{2^k}\right) &= T_1^k\left(T_1\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) = T_1^k\left(\frac{2}{2^k}\right) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto por el teorema del valor intermedio tenemos que $\left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right] \subset T_1^{k+1}\left(\left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right]\right)$, luego por el Lema 2.2 tenemos que existe un punto fijo en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right]$, dado que T_1^{k+1} es creciente en $\left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right]$, se sigue que ese punto fijo es único. De igual forma se tiene que en el intervalo $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ T_1^{k+1} tiene un punto fijo que es único, pues T_1^{k+1} es decreciente en ese intervalo y $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right] \subset T_1^{k+1}\left(\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]\right)$.

Por tanto T_1^{k+1} tiene dos puntos fijos en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2^k}\right]$. Siguiendo un razonamiento similar se concluye que para cada intervalo $\left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right] \cdots \left[\frac{2^k-1}{2^k}, 1\right]$ T_1^{k+1} tiene dos puntos fijos. Dado que hay 2^k intervalos, por hipótesis de inducción, entonces T_1^{k+1} tiene $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$ pun-

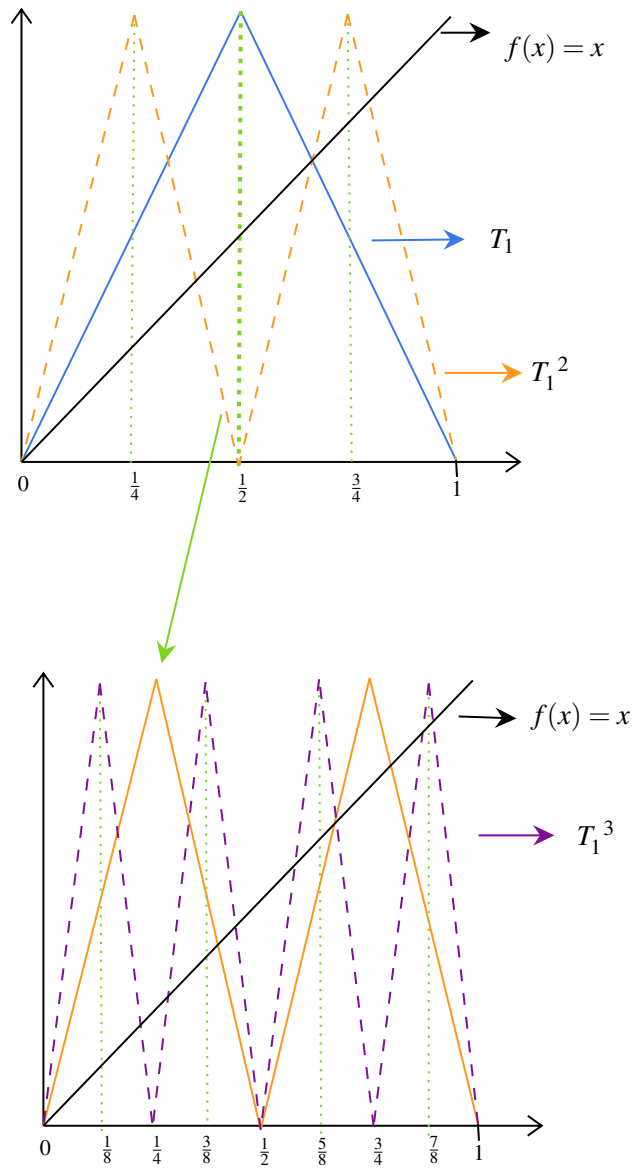


Figura 23. Comportamiento de T_1^n

tos fijos. La figura 23 ilustra lo demostrado.

Por otra parte tenemos que $T_0 = 0$, lo que quiere decir que solo tiene como punto fijo el 0 y el conjunto de periodos es $\{1\}$, mientras que para T_1 es \mathbb{N} . Lo interesante de esta familia es que al variar h se puede construir todas las colas del orden de Sharkovsky en el intervalo $[0, 1]$, para ello se debe tener en cuenta la siguiente función.

Sea $k : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ definida de la siguiente manera:

$$k(m) = \min\{\max O_{T_1}(x) \mid O_{T_1} \text{ es un } m\text{-ciclo de } T_1\}$$

Podemos escribir \min en lugar de \inf porque T_1 tiene un número finito de puntos periódicos de periodo m , pues T_1^n tiene 2^n puntos fijos.

Teorema 3.13. *El conjunto de periodos de $T_{k(m)}$ es exactamente la cola del orden de Sharkovsky:*

$$C = m \cup \{l \in \mathbb{N} \mid m \triangleright l\}$$

Para demostrar este hecho debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

De ahora en adelante \mathcal{O} denotará una órbita.

1. Sea \mathcal{O} una órbita de T_h . Si $\mathcal{O} \subseteq [0, h)$, entonces \mathcal{O} también es una órbita de T_1 . En efecto:

Dado que $\mathcal{O} \subset [0, h)$ entonces $\forall x \in \mathcal{O} \ T_h(x) < h$, lo que implica que $T_h(x) = T_1(x)$, por como se define T_h , se sigue que \mathcal{O} es una órbita también de T_1

2. Sea \mathcal{O} una órbita de T_1 . Si $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$, entonces \mathcal{O} también es una órbita de T_h . En efecto:

Dado que $\mathcal{O} \subset [0, h]$, luego tenemos que $\forall x \in \mathcal{O} T_1(x) \leq h$ entonces $T_h(x) = T_1(x)$, por tanto \mathcal{O} es una órbita de T_h .

3. La órbita de $k(m)$ es un m -ciclo para $T_{k(m)}$. En efecto:

Por definición de $k(m)$, se tiene que $k(m)$ es un punto de periodo m para T_1 y que su órbita \mathcal{O} cumple que $\mathcal{O} \subset [0, k(m)]$, luego por ítem 2 tenemos que es una órbita o ciclo de $T_{k(m)}$.

4. T_h tiene un l ciclo \mathcal{O} , con $\mathcal{O} \subset [0, h]$ si y solo si $k(l) < h$. En efecto:

\Rightarrow Sea \mathcal{O} un l ciclo para T_h tal que $\mathcal{O} \subset [0, h]$, entonces por ítem 1 tenemos \mathcal{O} es una órbita de T_1 , luego por definición de $k(l)$ se sigue que $k(l) \leq \max \mathcal{O}$, entonces $k(l) < h$.

\Leftarrow Si $k(l) < h$, entonces por ítem 3 se sigue que la órbita de $k(l)$, es l -ciclo \mathcal{O} de $T_{k(l)}$ tal que $\mathcal{O} \subset [0, k(l)]$. Dado $k(l) < h$ entonces $\forall x \in \mathcal{O} T_{k(l)}(x) < h$, luego $T_{k(l)}(x) = T_h(x)$, por tanto \mathcal{O} es un l ciclo de T_h tal que $\mathcal{O} \subset [0, h]$.

5. Toda órbita de $T_{k(m)}$ se encuentra en $[0, k(m)]$. Efecto:

Supongamos ahora que existe $\mathcal{O} \not\subseteq [0, K(m)]$ entonces existe un $x_0 \in \mathcal{O}$ tal que $T_{k(m)}(x_0) > k(m)$ lo que contradice la definición de $T_{k(m)}$. Por tanto todo ciclo de $T_{k(m)}$ se encuentra en $[0, k(m)]$

6. $k(l) < k(m)$ si y solo si $l \triangleleft m$ (en el orden de Sharkovsky).

\Leftarrow Si $l \triangleleft m$, entonces por el ítem 3 se tiene que $T_{k(m)}$ tiene un m ciclo, luego por el Teorema de Sharkovsky 3.7, se sigue que $T_{k(m)}$ tiene un l ciclo \mathcal{O} y por ítem anterior se deduce que $\mathcal{O} \subset [0, k(m))$, por tanto por ítem 4 $k(l) < k(m)$.

\Rightarrow Si $k(l) < k(m)$. Supongamos que $l \triangleright m$, luego por lo anterior tenemos que $k(m) < k(l)$, lo que es una contradicción, entonces $l \triangleleft m$.

Demostración del Teorema 3.13: Veamos que $T_{k(m)}$ tiene exactamente la cola del orden de Sharkovsky

$$C = m \cup \{l \in \mathbb{N} \mid m \triangleright l\}$$

Por ítem 3 tenemos que $k(m)$ es un punto de periodo m para $T_{k(m)}$, luego por el teorema de Sharkovsky 3.7 se tiene que el conjunto de periodos de $T_{k(m)}$ contiene a C

Veamos ahora que el conjunto de periodos es exactamente C , para ello supongamos que no es cierto.

Sea $m \triangleleft r$ y supongamos que $T_{k(m)}$ tiene un r -ciclo \mathcal{O} , entonces por ítem 5 se sigue $\mathcal{O} \subset [0, k(m))$, luego por ítem 4 se tiene que $k(r) < k(m)$ y por ítem 6 se tiene que $r \triangleleft m$, lo que viene siendo una contradicción, entonces $T_{k(m)}$ no tiene puntos de periodo r , por tanto el conjunto de periodos de $T_{k(m)}$ es exactamente el conjunto C .

□

Observe que el único conjunto de colas de Sharkovsky que falta es el conjunto de todas las potencias de 2, para dar respuesta definimos:

$$k(2^\infty) = \sup_n(k(2^n))$$

Note que $k(2^\infty) > k(2^n) \forall n \in \mathbb{N}$, luego por ítem 4 se sigue que $T_{k(2^\infty)}$ tiene todos los ciclos de potencias de 2.

Veamos ahora que $T_{k(2^\infty)}$ tiene solo ciclos de potencias de 2, para probar este hecho supongamos no es cierto, es decir, que $T_{k(2^\infty)}$ no tiene todo los ciclos de potencias de 2. Sea \mathcal{O} un m -ciclo de $T_{k(2^\infty)}$ que no es potencia de 2, luego por el Teorema de Sharkovsky 3.7, tenemos que $T_{k(2^\infty)}$ tiene un $2m$ -ciclo. Dado que los dos ciclos son disjuntos, por ítem 5 tenemos que al menos uno de ellos está contenido $[0, k(2^\infty))$, por tanto ese ciclo debe estar contenido en algún $[0, k(2^n))$. Por ítem 4 se sigue que $k(2m) < k(2^n)$ o $k(m) < k(2^n)$ luego por ítem 6, tenemos que $2m \triangleleft 2^k$ o $m \triangleleft 2^k$ lo que es una contradicción. Por tanto $T_{k(2^\infty)}$ tiene todos los ciclos de potencias de 2.

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran lo demostrado anteriormente.

3.4.2. Cálculos de las funciones $T_{k(m)}$. Las funciones $T_{k(1)}$ y $T_{k(2)}$ son las más sencillas de calcular, sin embargo como se verá a continuación a medida que aumenta el m el proceso se hace numéricamente más difícil.

Ejemplo 3.14. *En este ejemplo calculáremos $T_{k(2)}$: para ello tenemos que T_1^2 tiene 4 puntos fijos, dado que T_1 tiene dos puntos fijos entonces T_1 tiene solo una órbita de periodo 2, la cual es:*

$$\mathcal{O}\left(\frac{2}{5}\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

$$\text{Luego } k(2) = \frac{4}{5}$$

También podemos deducir que para las colas con más de un elemento en relación con su parámetro se encuentran $\frac{4}{5} \leq k(m) \leq 1$ pues $k(2) = \frac{4}{5}$.

Ejemplo 3.15. Para calcular $k(3)$ recordemos que como vimos anteriormente T_1 tiene 2 órbitas de periodo 3, donde obtenemos que:

$$k(3) = \text{mín} \left\{ \text{máx } \mathcal{O}\left(\frac{2}{7}\right), \text{máx } \mathcal{O}\left(\frac{2}{9}\right) \right\}$$

$$k(3) = \text{mín} \left\{ \frac{6}{7}, \frac{8}{9} \right\} = \frac{6}{7}$$

$T_{\frac{6}{7}}$ tiene todos los periodos pero solo una órbita de periodo 3.

Ejemplo 3.16. Para calcular $T_{k(5)}$ calcularemos primero todas las órbitas de periodo cinco. Dado que los puntos fijos de T_1^5 son $2^5 = 32$, donde dos son puntos fijos de T_1 y los otros son puntos de periodo 5, teniendo eso en cuenta obtenemos que se tiene 6 órbitas de periodo 5, las cuales son:

$$\mathcal{O}\left(\frac{18}{31}\right) = \left\{ \frac{18}{31}, \frac{26}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{22}{31} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{14}{33}\right) = \left\{ \frac{14}{33}, \frac{28}{33}, \frac{10}{33}, \frac{20}{33}, \frac{26}{33} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{16}{33}\right) = \left\{ \frac{16}{33}, \frac{32}{33}, \frac{2}{33}, \frac{4}{33}, \frac{8}{33} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{4}{31}\right) = \left\{ \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31}, \frac{30}{31}, \frac{2}{31} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{12}{31}\right) = \left\{ \frac{12}{31}, \frac{24}{31}, \frac{14}{31}, \frac{28}{31}, \frac{6}{31} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{4}{11}\right) = \left\{ \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, \frac{6}{11}, \frac{10}{11}, \frac{2}{11} \right\}$$

luego $k(5) = \text{mín}(\text{máx}\{\mathcal{O}(\frac{18}{31}), \mathcal{O}(\frac{14}{33}), \mathcal{O}(\frac{16}{33}), \mathcal{O}(\frac{4}{31}), \mathcal{O}(\frac{12}{31}), \mathcal{O}(\frac{4}{11})\}) = \frac{26}{31}$ la siguiente figura muestra $T_{k(5)}$ su órbita y su relación con T_1 .

Observe que como se demostró anteriormente esta función su conjunto de periodos es: $\mathbb{N} \setminus \{3\}$. Para ello basta con determinar que $T_{k(5)}$ no tiene puntos de periodo 3, pues los únicos puntos posibles de periodo 3, son los puntos de periodo 3 de T_1 pero estos no son de periodo 3 en $T_{k(5)}$, en efecto:

$$T_{k(5)}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}, T_{k(5)}\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{26}{31}, T_{k(5)}\left(\frac{26}{32}\right) = \frac{10}{31}$$

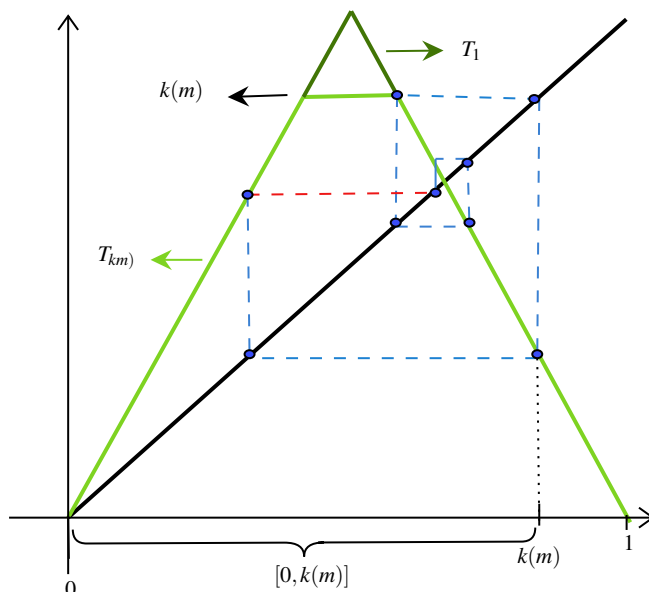


Figura 24. Esta figura ilustra $T_{k(m)}$ en relación con T_1

$$T_{k(5)}\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{2}{9}$$

Luego $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ no son puntos de periodo 3, análogamente tenemos que:

$$T_{k(5)}\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}, T_{k(5)}\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{26}{31}, T_{k(5)}\left(\frac{26}{32}\right) = \frac{10}{31}$$

$$T_{k(5)}\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}$$

Por tanto $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ no son puntos de periodo 3, luego $T_{k(5)}$ no tiene punto de periodo 3, entonces su conjunto de periodos es $\mathbb{N} \setminus \{3\}$, por la primera parte del teorema de Sharkovsky 3.7. Note que hasta el momento hemos calculado solo las $k(m)$ cuando m es primo. Cuando m no es primo se tiene que tener en cuenta los divisores de m , veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo 3.17. Para calcular $k(4)$ se debe calcular primero las órbitas de periodo 2, para

luego calcular las órbitas de periodo 4. Como T_1^4 tiene 16 puntos fijos, y dado que conocemos T_1 tiene una órbita de periodo 2 y que solo tiene 2 puntos fijos, se sigue que T_1 tiene 12 puntos de periodo 4, es decir, 3 órbitas de periodo 4 las cuales son:

$$\mathcal{O}\left(\frac{2}{15}\right) = \left\{ \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{2}{17}\right) = \left\{ \frac{2}{17}, \frac{4}{17}, \frac{8}{17}, \frac{16}{17} \right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{6}{17}\right) = \left\{ \frac{6}{17}, \frac{12}{17}, \frac{10}{17}, \frac{14}{17} \right\}.$$

Luego $k(4) = \frac{14}{17}$, siendo su cola del orden Sharkovsky, por lo demostrado anteriormente igual a $\{4, 2, 1\}$

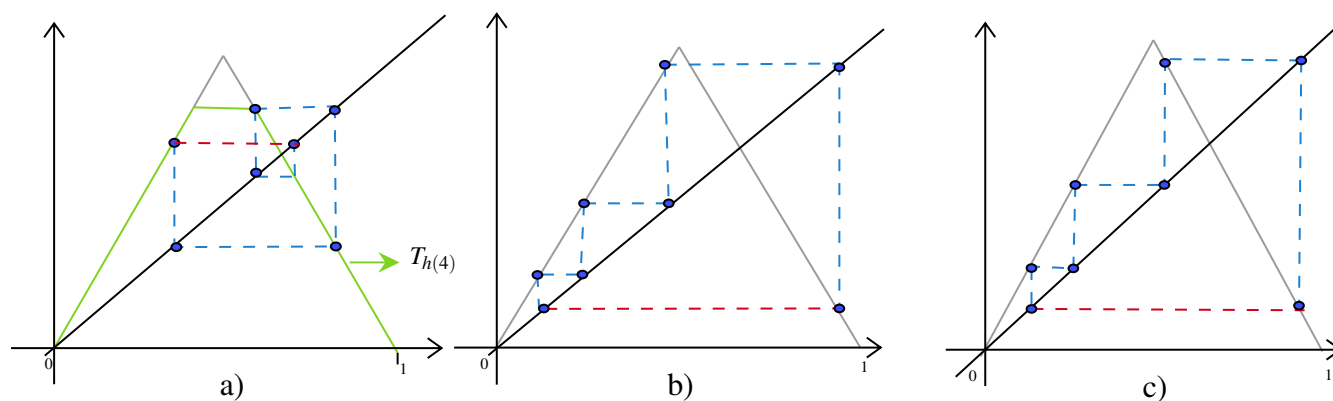


Figura 25. órbitas de orden 4

La figura 25 representa el comportamiento de la órbitas de longitud 4.

3.4.3. Las secuencias de Štefan y las colas del orden de Sharkovsky . Otra forma de demostrar la segunda parte del teorema de Sharkovsky es a través de las secuencias de Štefan. Hasta el momento hemos visto que estas han permitido construir bucles elementales, ahora presentamos como construir funciones con colas del orden de Sharkovsky a partir de ellas, para ello ilustraremos este hecho con un ejemplo, que se puede encontrar en (pag 46, [King and Mendez, 2013])

Ejemplo 3.18. Sea $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ una función lineal por partes definida en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ por $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 2, f(4) = 1$ y $f(5) = 3$ (ver figura 26)

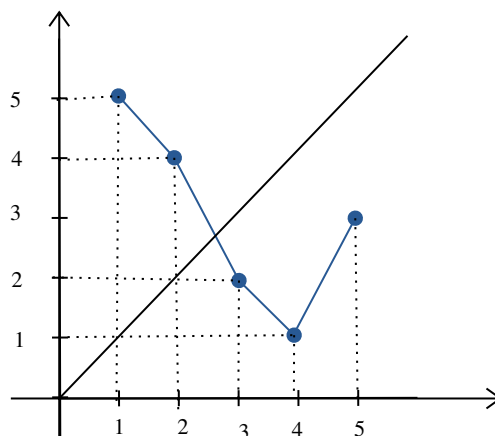


Figura 26. Gráfica de f

Veamos ahora que f no tiene un punto de periodo 3. Para ello note lo siguiente

$$f^3([1, 2]) = [2, 5]$$

$$f^3([2, 3]) = [1, 5]$$

$$f^3([3, 4]) = [1, 3]$$

$$f^3([4, 5]) = [1, 4].$$

De donde se deduce que f no tiene puntos de periodo 3 en los intervalos $[1, 2], [3, 4], [4, 5]$, por otra parte note f^3 tiene un unico fijo el intervalo $[2, 3]$, pues f^3 es decreciente, dado que f es decreciente y número impar de composiciones de funciones decrecientes es decreciente, luego f^3 tiene un unico punto fijo en $[2, 3]$ y como f tiene un punto fijo en ese intervalo, entonces f no tiene puntos de periodo 3 en $[2, 3]$, luego el conjunto de periodos de f es $\mathbb{N} \setminus \{3\}$.

Ahora note que $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ forman una secuencia de Štefan ver figura 27

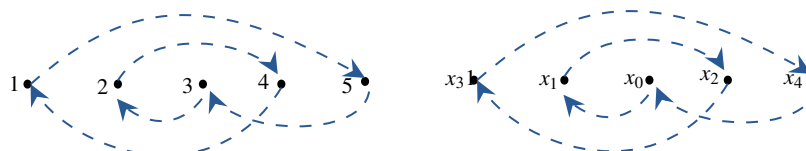


Figura 27. Comportamiento de la órbita de f

De manera general uno puede probar que:

Proposición 3.19. *Para cada $m \in \mathbb{N}, m > 1$ existe una función continua $f : I \rightarrow I$, donde I es un intervalo de \mathbb{R} que tiene una órbita de periodo $2m + 1$ pero no tiene una de periodo $2m - 1$.*

La idea para probar esta proposición es asumir que la órbita de periodo $2m+1$ es una secuencia de Štefan. La demostración de esta proposición puede verse en [King and Mendez, 2013] donde explican con detalle también la construcción de las otras colas a partir de la siguiente función:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}f(3x) + \frac{2}{3} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ [2 + f(1)] (\frac{2}{3} - x) & \text{si } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ x - \frac{2}{3} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Observe que la proposición 3.19 muestra que se pueden construir funciones continuas no solo en el intervalo $[0, 1]$ que tengan como conjunto de periodos colas del orden de Sharkovsky, con por lo menos un punto con periodo impar mayor que uno.

Referencias Bibliográficas

- Alphonse (2016). Stackexchange: Continuous functions with orbit of period 3: Mathematics:. url<https://math.stackexchange.com/questions/1870596/continuous-functions-with-orbit-of-period-3>. Accedido 14-10-2019.
- Alseda, L. L. J. and Misiurewicz, M. (2000). *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, volume 5. World Scientific Publishing Company.
- Burns, K. and Hasselblatt, B. (2011). The sharkovsky theorem: A natural direct proof. *The American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244.
- King, J. and Mendez, H. (2013). *Sistemas Dinamicos Discretos*, volume 1. Universidad Nacional Autonoma de Mexico.
- Li, T.-Y. and Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992.