

**Elaboración de una cartilla sobre geometría fractal  
en secundaria**

**Giovanni Rodríguez Santamaría**

**Monografía presentada como requisito parcial  
para optar al título de Licenciado en Matemáticas**

Sonia Marleni Sabogal, Doctora  
Director

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Bucaramanga**

2006

*A Dios y a mis padres.*

# Resumen

La geometría fractal es una teoría relativamente nueva que ha sido objeto de investigación, la cual se ha trabajado a nivel universitario. A nivel de educación básica, tanto primaria como secundaria, se han desarrollado varias propuestas metodológicas de aula referentes a este tema. El presente trabajo recopila, analiza y relaciona tres monografías desarrolladas en este ámbito, en forma de cartilla como una alternativa interesante para la enseñanza de la matemática en la secundaria con características muy especiales que la distinguen de la geometría tradicional o Euclidiana, principalmente por lo atractivo, bello y curioso de sus imágenes, sus aplicaciones y su carácter experimental.

La monografía consta de seis capítulos, donde el primero contiene la teoría matemática formal. Los capítulos 2, 3, 4, 5 y 6 contienen: conceptos geométricos básicos, la noción de autosemejanza, la construcción fractales a través del juego semilla-producción y de Sistemas Iterados de Funciones, construcción de fractales por medio de sistemas dinámicos y generación de fractales por medio del software INTERFRAC respectivamente; estos capítulos constituyen la cartilla dirigida a estudiantes y profesores de secundaria, el capítulo 1 es de preliminares a la monografía, por lo cual no hace parte de la cartilla.

En todos los capítulos, además de las definiciones se encontrarán ejemplos e imágenes con sus respectivas explicaciones y análisis, también se proponen preguntas y ejercicios. La cartilla goza de buena presentación y una impresión matemática clara, pero por ser una primera versión está abierta a recibir críticas constructivas para su mejoramiento.

# Abstract

Fractal geometry is a relative new theory that has been object of research and it has been worked at university level. In basic education, even primary school and high school, some class room proposals are been developed about this subject. This work collects, analyses, and relates three monographs developed in this subject, in a kind of first reader like an interesting alternative to teach of mathematics with specials characteristics that make a difference with the traditional euclidian geometry, mainly for attractive, beauty and curious images, applications and experimental character.

This monograph has six chapters, the first one has the formal mathematic theory. Chapters 2, 3, 4, 5 and 6 have: basic geometric concepts, a first develop of selfsimilarity, the construction of fractals by the game seed-production and by iterated systems of functions, and finally fractals are generated by the software INTERFRAC, respectively; these chapters are the first reader, it is presented to high school teachers and students, the first chapter has the preliminaries of the monograph, it is not a part of the first reader.

In all the chapters, the reader will find not only definitions but also images with this respective explications and analysis, also there are questions and exercises. The firs reader has a good presentation and a clear mathematic explanation, but it is a first version, for that reason it is opened to receive constructive critics to improve it.

# Agradecimientos

A mis padres les agradezco el don de la vida, su apoyo y sacrificio abnegado por ver mi progreso constante y crecimiento personal.

A mi padrino Héber por la bella amistad que hemos cultivado y que el tiempo no ha podido degradar. Le agradezco también su apoyo, sus consejos, sus críticas constructivas y su ayuda con  $\text{\LaTeX}$ .

Muchas gracias a la profesora Sonia Sabogal por su enorme paciencia, su colaboración y por compartir sus conocimientos sobre fractales.

A la profesora Nohora Nájera por permitirme incluir su programa INTERFRAC y aclararme dudas sobre su manejo.

A mis amigos: Liseth, Marcela, Diana, Ruby, Paola, Carolina, Yecenia y Xiomara por todos los momentos de alegría durante nuestro paso por la universidad.

GIOVANNI RODRÍGUEZ SANTAMARÍA

*Universidad Industrial de Santander*  
*Septiembre 2006*

# Tabla de Contenido

Índice de figuras	IX
Introducción	XI
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios Métricos . . . . .	1
1.2. Transformaciones Afines en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
1.3. Sistema Iterado de Funciones (SIF) . . . . .	7
1.4. Sistemas Dinámicos . . . . .	8
<b>2. Conceptos Geométricos</b>	<b>10</b>
2.1. Sucesiones . . . . .	10
2.2. Movimientos Geométricos en el Plano . . . . .	14
2.2.1. Traslación . . . . .	14
2.2.2. Reflexión . . . . .	15
2.2.3. Reescalamiento . . . . .	16
2.2.4. Rotación . . . . .	17
2.3. Compacidad . . . . .	18
2.3.1. Bola . . . . .	18
2.3.2. Conjunto acotado . . . . .	18
2.3.3. Conjunto cerrado . . . . .	19
2.3.4. Conjunto compacto . . . . .	20
<b>3. Noción de Autosemejanza</b>	<b>22</b>
3.1. Conjuntos Autosemejantes . . . . .	23
3.2. Autosemejanza en la Naturaleza . . . . .	27
3.3. Conjuntos de Julia y Mandelbrot . . . . .	33
<b>4. Construyendo Fractales</b>	<b>40</b>
4.1. El juego de la “Semilla-Producción” . . . . .	40
4.2. Transformaciones Afines en el Plano . . . . .	43
4.3. Sistemas Iterados de Funciones (SIF) . . . . .	47

<b>5. Sistemas Dinámicos</b>	<b>53</b>
5.1. Construcción de un conjunto de Julia . . . . .	53
5.2. Construcción del conjunto de Mandelbrot . . . . .	57
<b>6. Taller (Generando fractales con INTERFRAC)</b>	<b>60</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>78</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Índice de figuras

1.1. Coordenadas polares del punto $(u, v)$ . . . . .	6
1.2. Coordenadas polares del punto $(a, c)$ . . . . .	6
1.3. Coordenadas polares del punto $(b, d)$ . . . . .	6
2.1. Sucesión de estrellas de puntas. . . . .	11
2.2. Posición $a_?$ . . . . .	11
2.3. Sucesión de polígonos. . . . .	12
2.4. Sucesión de estrellas de radios. . . . .	13
2.5. Sucesión de polígonos eliminando un lado. . . . .	13
2.6. Traslación sobre el eje X e Y respectivamente. . . . .	14
2.7. Trasladar triángulo, hexágono, sombrero. . . . .	14
2.8. Describir traslaciones. . . . .	15
2.9. Reflexiones. . . . .	15
2.10. Aplicar reflexiones. . . . .	16
2.11. Reescalamiento con factor de escala $k = \frac{1}{2}$ . . . . .	16
2.12. Reescalamiento con factor de escala $k = 2$ . . . . .	16
2.13. Reescalamiento con factor de escala $k = 0$ . . . . .	17
2.14. Aplicar reescalamientos. . . . .	17
2.15. Rotación con ángulo positivo. . . . .	17
2.16. Realizar rotaciones. . . . .	17
2.17. Bola. . . . .	18
2.18. Conjuntos acotados. . . . .	18
2.19. Conjuntos no acotados. . . . .	18
2.20. Determinar conjuntos acotados. . . . .	19
2.21. Conjuntos cerrados. . . . .	19
2.22. Conjuntos no cerrados. . . . .	20
2.23. Determinar conjuntos cerrados. . . . .	20
2.24. Conjuntos compactos. . . . .	20
2.25. Determinar compacidad. . . . .	21
3.1. Conjunto de Cantor. . . . .	23
3.2. Triángulo de Sierpiński. . . . .	24
3.3. Curva de Koch. . . . .	25
3.4. Isla de Koch. . . . .	26
3.5. Alfombra de Sierpiński. . . . .	26

3.6. Caja fractal. . . . .	27
3.7. Mandelbrot-Weierstrass. . . . .	27
3.8. Tallo y sección del brócoli. . . . .	28
3.9. Árbol seco. . . . .	28
3.10. Helechos. . . . .	29
3.11. Costas. . . . .	29
3.12. Acercamiento de montañas. . . . .	30
3.13. Coliflor romanescu. . . . .	30
3.14. Gorgonia roja. . . . .	30
3.15. Copo de nieve. . . . .	31
3.16. Rayos en una tormenta. . . . .	31
3.17. Detalle de un pulmón. . . . .	31
3.18. Detalle de los vasos del corazón. . . . .	32
3.19. Corte transversal del cerebro. . . . .	32
3.20. Acercamiento a cráteres de la luna. . . . .	33
3.21. Anillos de saturno. . . . .	33
3.22. Zoom sobre el conjunto de Julia. . . . .	34
3.23. Varios conjuntos de Julia. . . . .	34
3.24. Zoom sobre el conjunto de Mandelbrot. . . . .	35
3.25. Variantes de los conjuntos de Julia y Mandelbrot. . . . .	38
4.1. Semilla-Producción 1. . . . .	40
4.2. Semilla-Producción 2. . . . .	41
4.3. Semilla-Producción 3. . . . .	42
4.4. Figura inicial. . . . .	44
4.5. Reescalamiento. . . . .	45
4.6. Rotación de $90^\circ$ . . . . .	45
4.7. Reflexión. . . . .	45
4.8. Desplazamiento. . . . .	46
4.9. Aplicar transformaciones 1 . . . . .	46
4.10. Aplicar transformaciones 2 . . . . .	47
4.11. Aplicar transformaciones 3 . . . . .	47
4.12. Aplicación de un SIF . . . . .	49
4.13. SIF no contractivo . . . . .	50
4.14. Identificar SIF 1 . . . . .	52
4.15. Identificar SIF 2 . . . . .	52
5.1. Paseo desde $z = 1$ . . . . .	54
5.2. Paseo desde $z = i$ . . . . .	55
5.3. Puntos pertenecientes al conjunto <b>J</b> . . . . .	56
5.4. Conjunto <b>J</b> para $f(z) = z^2 + i$ . . . . .	56
5.5. Conjunto <b>J</b> para $f(z) = z^2 - i$ . . . . .	57
5.6. Paseo según $f_1(z)$ . . . . .	58
5.7. Paseo según $f_i(z)$ . . . . .	58
5.8. Conjunto de Mandelbrot. . . . .	59

# Introducción

La teoría fractal gana cada vez más adeptos tanto por su aplicabilidad en el aula como en lo cotidiano, actualmente muchas ramas de distintas ciencias investigan y exploran sobre los fractales. Sin embargo estos temas no se recogen en ningún curso oficial de nuestros colegios y solo algunos cursos de universidades.

El presente trabajo pretende llenar ese hueco, recopilando los trabajos de monografías ya existentes, para ofrecer los aspectos más básicos de esta interesante teoría. Además, para hacerla atractiva tanto para profesores como estudiantes interesados en el ámbito matemático de esta materia como para aquellos que prefieran su aplicabilidad y desarrollo en el computador. También se pretende dejar una clara noción del concepto de fractal y su principal característica que es la autosemejanza. Así mismo, que el alumno adquiera la destreza necesaria para convertirse en un “diseñador de fractales”, por medio de un programa computacional, que se incluye en esta monografía y que se enseñará a manejar entendiendo a la vez cómo se realizan estos diseños fractales y cómo los puede comparar con elementos de la naturaleza, comprendiendo así que estos programas no son complicados de manejar ni son de uso exclusivo de doctores en matemáticas o ingenieros de sistemas.

“La geometría fractal fue descubierta alrededor del año 1970, por el matemático polaco Benoit Mandelbrot. El estaba fascinado con los complejos patrones que veía en la naturaleza, pero no los podía describir por medio de la geometría euclídea: las nubes no eran esféricas, las montañas no eran conos, las líneas costeras no eran círculos, ni tampoco los rayos viajaban en líneas rectas. Entonces desarrolló el concepto y lo denominó “fractal”, a partir del significado en Latín de esta palabra, que encontró en un libro de texto de su hijo. Fractal significa fracturado, fragmentado o quebrado.”<sup>1</sup>

La monografía consta de 6 capítulos. En el primero (Preliminares) el lector encontrará la parte teórica formal que sostiene los conceptos de los siguientes capítulos, por ejemplo en este capítulo se presenta la definición formal del concepto de autosemejanza (Definición 1.27), que posteriormente en el capítulo 3 se expone de manera intuitiva; aunque este capítulo está más dirigido al profesor que quiera fundamentar los resultados obtenidos en el desarrollo de la cartilla. El segundo (Conceptos Geométricos) se tratan conceptos básicos de geometría euclidiana de una forma gráfica, por ejemplo en la sección 2.1 se construyen sucesiones de figuras para hacer comprender al alumno que las sucesiones

---

<sup>1</sup>tomado de <http://www.cientec.or.cr/matematica/fractales.html>

numéricas no son las únicas existentes. Una sección importante de este capítulo es la de compacidad, pues si no se incluye este concepto un alumno perspicaz puede poner en aprietos al profesor si este propone aplicar un SIF a un conjunto que no sea compacto. El tercer capítulo (Noción de Auto semejanza) muestra una colección de imágenes que incluyen los fractales clásicos (Cantor, Sierpiński, Koch, etc.), una actualización de los que se pueden encontrar en la naturaleza, y otra muy vistosa de los conjuntos de Julia y Mandelbrot. El cuarto capítulo (Constuyendo Fractales) expone la manera de generar fractales partiendo de un juego (Juego de la Semilla-Producción) para luego formalizar la notación a través de las transformaciones afines en el plano, que se utilizarán con el método de Sistemas Iterados de Funciones (SIF). El quinto capítulo (Sistemas Dinámicos) se hace una breve pero clara explicación de cómo se construyen los conjuntos de Julia y el de Mandelbrot. Por último, el sexto capítulo (Generando Fractales con INTERFRAC) presenta un taller sobre el uso de un programa computacional para la generación de fractales y que servirá como actividad de refuerzo para retomar los ejemplos y ejercicios de los capítulos previos.

La cartilla usa diversas gráficas en cuanto a formas y colores, además se ha utilizado una buena y clara notación de la simbología matemática, lo cual es un punto benéfico para el alumno y el profesor quienes podrán aprovechar este aspecto visual.

Los capítulos 2,3,4,5 y 6 constituyen la cartilla dirigida a los alumnos y profesores de básica secundaria, el capítulo 1 es de preliminares al presente trabajo de monografía, más no constituye parte de la cartilla.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se hace un breve resumen de definiciones y teoremas que conformarán la base matemática de la cartilla. Estos preliminares se dedican a asegurar que los resultados usados en el desarrollo de los capítulos siguientes están formalmente demostrados. Podemos citar como ejemplo el hecho de que no tiene importancia el compacto (no vacío) inicial que se tome, siempre se obtendrá el mismo atractor de un Sistema Iterado de Funciones (SIF).

Clasificaremos estos conceptos básicos en secciones: una que corresponde a la teoría de espacios métricos, otra sobre transformaciones afines en el espacio métrico  $\mathbb{R}^2$ , una tercera sección que presenta cómo se define un Sistema Iterado de Funciones (SIF) y la forma de obtener conjuntos fractales con estos sistemas, y como cuarta y última sección, se presenta algo sobre la teoría de Sistemas Dinámicos y la manera de crear fractales con ellos. Las definiciones y conceptos pertenecientes a este capítulo, han sido tomados principalmente de [2].

### 1.1. Espacios Métricos

**Definición 1.1** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface para cualesquiera  $x, y, z \in X$  :

- i)  $d(x, y) \geq 0$ ;
- ii)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Entonces se dice que  $d$  es una **métrica** sobre  $X$  y que la pareja  $(X, d)$  es un **espacio métrico**.

**Ejemplo 1.1** Tomando  $X = \mathbb{R}$ , es fácil verificar que  $(\mathbb{R}, d_u)$ , donde  $d_u(x, y) = |x - y|$ , es un espacio métrico; en este caso,  $d_u$ , es llamada **la métrica usual o euclidiana de la recta**.

**Ejemplo 1.2**  $(\mathbb{R}^2, d_e)$  es espacio métrico, donde  $d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  es llamada **la métrica usual o euclidiana del plano**.

**Definición 1.2** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Se define **bola** con centro en  $x$  y radio  $\varepsilon$  al conjunto  $B_d(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ .

**Definición 1.3** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x \in X$  y  $A \subseteq X$ . Se dirá que  $A$  es **acotado** si y solo si  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $A \subseteq B_d(x; \varepsilon)$ .

**Definición 1.4** Dado  $(X, d)$  espacio métrico y  $A \subseteq X$ , se dirá que  $A$  es **abierto** si y solo si  $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0$ , tal que  $B_d(a; \varepsilon) \subseteq A$ .

**Definición 1.5** Dado  $(X, d)$  espacio métrico y  $A \subseteq X$ , se dirá que  $A$  es **cerrado** si y solo si  $X - A$  es abierto.

**Definición 1.6** Dado  $(X, d)$  espacio métrico,  $A \subseteq X$  y  $a \in X$ , se dirá que  $a$  es **punto frontera** de  $A$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0, B_d(a; \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset \wedge B_d(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ .

**Definición 1.7** Dado  $(X, d)$  espacio métrico,  $A \subseteq X$ , se define **frontera de  $A$**  como  $\partial A = \{x \in X \mid x \text{ es punto frontera de } A\}$ .

**Definición 1.8** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos,  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  una función y  $c \in X_1$ ;  $f$  se llamará **función continua** en  $c$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $d_1(x, c) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$ .

**Definición 1.9** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos,  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  una función y  $K \subseteq X_1$ . Se dirá que  $f$  es continua en  $K$  si y solo si  $f$  es continua en  $c$ , para todo  $c \in K$ . Si  $K = X_1$  entonces simplemente se dice que  $f$  es **continua**.

**Definición 1.10** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos,  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  una función biyectiva. Se dirá que  $f$  es **bicontinua** si y solo si  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas.

**Definición 1.11** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos, se dirá que  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son **homeomorfos** y se denotará  $(X_1, d_1) \cong (X_2, d_2)$ , si y solo si existe una función  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  biyectiva y bicontinua.

**Definición 1.12** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos,  $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$  una función. Se dirá que  $f$  es una **contracción** si y solo si  $\exists k \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq k < 1$  y  $\forall x, y \in X_1$  se tiene que  $d_2(f(x), f(y)) \leq kd_1(x, y)$ . La constante  $k$  se llama **factor de contracción** de  $f$ .

**Teorema 1.1** Toda contracción es continua.

Para su demostración ver [2] pág. 80.

**Definición 1.13** Sean  $X \neq \emptyset$  y  $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$  una función; en este caso denotamos  $f(n) = x_n$  y la función  $f$  se llama **sucesión** en  $X$ . Abusando un poco del lenguaje y la notación, se identifica comúnmente la función  $f$  con su “recorrido ordenado”:  $f = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ .

**Definición 1.14** Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en un espacio métrico  $(X, d)$ .  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es llamada **sucesión de Cauchy** si y solo si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n \geq N$  se tiene que  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

**Definición 1.15** Una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  es llamada **sucesión convergente** si y solo si  $\exists x \in X$  y para algún número dado  $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$ . En este caso el elemento  $x$  es llamado **el límite** de la sucesión, y se denotará  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Nota:** No es difícil demostrar que si una sucesión es convergente en un espacio métrico, entonces tiene un **único** punto límite.

**Teorema 1.2** Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Para su demostración ver [1] pág. 88.

El recíproco del teorema 1.2 no siempre se cumple. Por ejemplo si consideramos  $X = (0, 1]$  y la sucesión  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ , es claro que esta sucesión es de Cauchy en  $X$  y converge a 0 como sucesión en  $\mathbb{R}$ , pero  $0 \notin X$ , luego  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente en  $X$ .

**Definición 1.16** Un espacio métrico  $(X, d)$ , es llamado **espacio métrico completo** si y solo si toda sucesión de Cauchy converge en  $X$ .

**Ejemplo 1.3**  $(\mathbb{R}, d_u)$  es un espacio métrico completo.

**Ejemplo 1.4**  $(\mathbb{R}^2, d_e)$  es un espacio métrico completo.

Para comprobar la veracidad de los anteriores ejemplos, en [1] pág. 90 se pueden encontrar sus respectivas demostraciones.

**Teorema 1.3** Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos,  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  una función continua en  $X_1$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente en  $X_1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$ .

**Definición 1.17** Sea  $f : X \rightarrow X$  una función sobre un conjunto no vacío; un elemento  $x_f \in X$  tal que  $f(x_f) = x_f$  es llamado **punto fijo** de  $f$ .

El siguiente teorema se conoce como **el teorema del punto fijo** para espacios métricos completos, para su demostración ver [1] pág. 112.

**Teorema 1.4** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  una contracción; entonces existe un único  $x_f \in X$  tal que  $x_f$  es punto fijo de  $f$ .

**Teorema 1.5** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  una contracción; entonces  $\forall x \in X$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(x) = x_f$ , donde  $f^{on}(x) = (f \circ \dots \circ f)$  y  $f$  se compone  $n$  veces.

Para su demostración ver [2] pág. 76.

**Definición 1.18** Sean  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números naturales, donde  $k_1 > k_2 \implies n_{k_1} > n_{k_2}$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ ; entonces la sucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  es llamada **subsucesión** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definición 1.19** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq X$ . Se dice que  $K$  es **compacto** si y solo si, toda sucesión en  $K$  posee una subsucesión convergente en  $K$ .

**Proposición 1.1** Dado  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  es compacto  $\Leftrightarrow K$  es cerrado y acotado.

**Definición 1.20 (El hiperespacio de los compactos no vacíos).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, se define  $\mathcal{H}(X) = \{K \subseteq X \mid K \neq \emptyset \text{ y } K \text{ es compacto}\}$ .

**Definición 1.21** Sea  $a \in X$  y  $K \in \mathcal{H}(X)$ . Se define  $\hat{d}(a, K) = \min\{d(a, x) \mid x \in K\}$ .

**Proposición 1.2** Si  $a \in X$  y  $K \in \mathcal{H}(X)$  entonces  $\hat{d}(a, K)$  siempre existe.

**Nota:** Observe que  $\hat{d}$  no es métrica ya que  $\hat{d} : X \times \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.22** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , se define  $\tilde{d}(A, B) = \max\{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\}$ .

**Proposición 1.3** Si  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , entonces  $\tilde{d}(A, B)$  siempre existe.

**Nota:**  $\tilde{d}$  no es métrica, consideremos  $(\mathbb{R}, d_u)$  como espacio métrico, y los compactos  $A = \{0\}$  y  $B = [0, 1]$ . Dado que  $0 \in B$ ,  $\hat{d}(0, B) = \min\{d_u(0, x) \mid x \in B\} = d_u(0, 0) = 0$ , luego  $\tilde{d}(A, B) = \max\{0\} = 0$ , claramente  $A \neq B$ , y no se cumple la condición **ii)** de las métricas.

La siguiente proposición generaliza este ejemplo.

**Proposición 1.4**  $A \subseteq B$  si y solo si  $\tilde{d}(A, B) = 0$ .

**Demostración.** Si  $A \subseteq B$  tenemos que  $\hat{d}(a, B) = d(a, a) = 0$  para todo  $a \in A$ , luego  $\tilde{d}(A, B) = \max\{0\} = 0$ . Recíprocamente si  $\tilde{d}(A, B) = 0$ , tendríamos que  $\max\{\hat{d}(a, B) \mid a \in A\} = 0$ , es decir,  $\forall a \in A$ ,  $\hat{d}(a, B) = 0$ , luego  $\exists b \in B$  tal que  $d(a, b) = 0$ , pero dado que  $d$  es métrica, tenemos que  $a = b$ , luego  $\forall a \in A$  se tiene que  $a \in B$ . ■

**Definición 1.23 (Métrica de Hausdorff).** Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , entonces se define  $\hbar(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$ .

**Proposición 1.5**  $\hbar : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$  es métrica sobre  $\mathcal{H}(X)$ , es decir,  $(\mathcal{H}(X), \hbar)$  es espacio métrico.

**Demostración.** *i)*  $\hbar(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .

$\hbar(A, B) = 0 \Leftrightarrow \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} = 0 \Leftrightarrow \tilde{d}(A, B) = 0$  y  $\tilde{d}(B, A) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq B$  y  $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ .

*ii)*  $\hbar(A, B) \leq \hbar(A, C) + \hbar(B, C)$ .

Para la demostración de esta segunda parte usaremos los siguientes lemas los cuales no son difíciles de demostrar:

**Lema 1.1** Si  $S, T \subseteq \mathbb{R}$ , y  $\forall s \in S, \forall t \in T$  se tiene  $s \leq t$ , entonces  $\hat{\min}(S) \leq \hat{\min}(T)$ .

**Lema 1.2** Si  $S \subseteq \mathbb{R}$ , entonces  $\hat{\min}\{a + s \mid s \in S\} = a + \hat{\min}(S)$ .

**Lema 1.3** Si  $a \leq b + c$  y  $a' \leq b' + c'$ , entonces  $\hat{\max}\{a, a'\} \leq \hat{\max}\{b, b'\} + \hat{\max}\{c, c'\}$ .

Ahora si, demostremos *ii*).

Sea  $a \in A$ , entonces  $\hat{d}(a, B) = \hat{\min}\{d(a, b) \mid b \in B\}$ ; usando el Lema 1.1,  $\hat{d}(a, B) \leq \hat{\min}\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\}$ .

Usando el Lema 1.2,  $\hat{\min}\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\} = d(a, c) + \hat{\min}\{d(c, b) \mid b \in B\} \leq d(a, c) + \hat{\max}\{\hat{\min}\{d(c, b) \mid b \in B\} \mid c \in C\} = d(a, c) + \tilde{d}(C, B)$ . Resumiendo,  $\forall a \in A, \forall c \in C, \hat{d}(a, B) \leq d(a, c) + \tilde{d}(C, B)$ .

Sea  $a_0 \in A$  tal que  $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$ , y  $c_0 \in C$  tal que  $d(a_0, c_0) = \hat{d}(a_0, C)$ . Entonces  $\tilde{d}(A, B) \leq d(a_0, c_0) + \tilde{d}(C, B) = \hat{d}(a_0, C) + \tilde{d}(C, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$ , de lo cual tenemos que  $\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$ . Análogamente,  $\tilde{d}(B, A) \leq \tilde{d}(C, A) + \tilde{d}(B, C)$ , y usando el Lema 1.3,  $\hat{\max}\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} \leq \hat{\max}\{\tilde{d}(A, C), \tilde{d}(C, A)\} + \hat{\max}\{\tilde{d}(B, C), \tilde{d}(C, B)\}$ , lo que equivale a  $\tilde{h}(A, B) \leq \tilde{h}(A, C) + \tilde{h}(B, C)$ ; y usando la proposición 1.1, queda demostrado que  $(\mathcal{H}(X), \tilde{h})$  es espacio métrico. ■

El espacio métrico  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), \tilde{h})$  es muy importante para la fundamentación teórica de esta cartilla, ya que los fractales que construiremos son “puntos” de este espacio.

**Teorema 1.6** Si  $(X, d)$  es espacio métrico completo, entonces  $(\mathcal{H}(X), \tilde{h})$  es espacio métrico completo.

La demostración de este teorema puede encontrarse en [2] pág. 37.

## 1.2. Transformaciones Afines en $\mathbb{R}^2$

**Definición 1.24** Una transformación afín sobre el espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_e)$  es una función  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma:

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + t$$

Donde  $a, b, c, d, e$  y  $f$  son números reales,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  y  $t = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

También  $w$  es llamada una transformación afín bidimensional. La matriz  $\mathbf{A}$  puede escribirse de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Para esto debemos tener en cuenta que para cualquier par de coordenadas  $(u, v)$  en el plano, se tiene que  $u = r \cos \theta$  y  $v = r \sin \theta$  donde  $r$  es la distancia del punto  $(u, v)$  al

origen y  $\theta$  es el ángulo que forma el vector con el semieje positivo  $X$ , es decir,  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares de  $(u, v)$ .

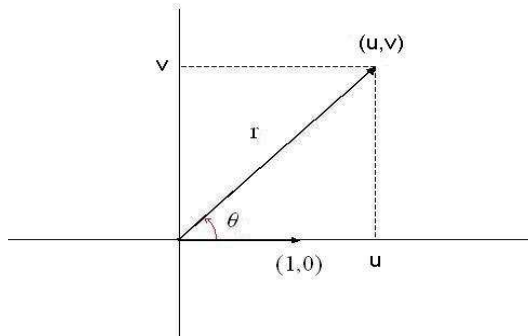


Figura 1.1: Coordenadas polares del punto  $(u, v)$ .

Consideremos la observación anterior para las parejas coordenadas  $(a, c)$  y  $(b, d)$ . Entonces tenemos que  $a = r_1 \cos \theta_1$  y  $c = r_1 \sin \theta_1$ , donde  $r_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$  es la norma del vector  $(a, c)$  y  $\theta_1$  es el ángulo que este forma con el semieje positivo de  $X$ , tal como lo indica la siguiente figura.

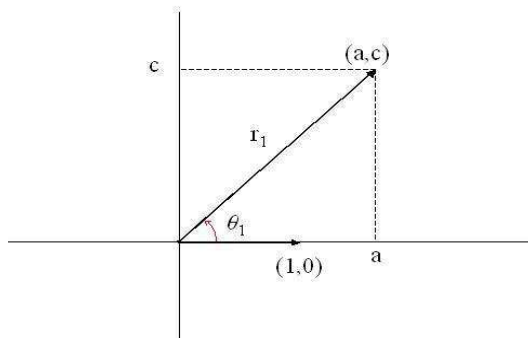


Figura 1.2: Coordenadas polares del punto  $(a, c)$ .

Por otra parte, para la pareja  $(b, d)$  consideraremos como  $\theta_2$  el ángulo que este vector forma con el semieje positivo  $Y$ , entonces el ángulo que se forma con el semieje positivo  $X$  es  $\theta_2 + 90$  (ver figura), luego usando la observación inicial tenemos que  $b = r_2 \cos(\theta_2 + 90^\circ) = r_2(\cos \theta_2 \cos 90^\circ - \sin \theta_2 \sin 90^\circ) = -r_2 \sin \theta_2$  y  $d = r_2 \sin(\theta_2 + 90^\circ) = r_2(\sin \theta_2 \cos 90^\circ + \cos \theta_2 \sin 90^\circ) = r_2 \cos \theta_2$ ; donde nuevamente  $r_2 = \sqrt{b^2 + d^2}$ .

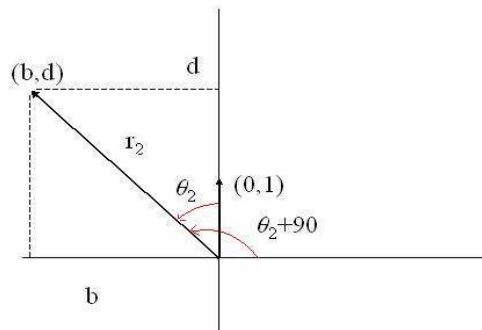


Figura 1.3: Coordenadas polares del punto  $(b, d)$ .

**Definición 1.25** Una transformación  $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  es llamada una **similitud** si es una transformación afín que tiene una de las siguientes formas:

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Donde  $(e, f) \in \mathbb{R}^2$  es una traslación,  $r \neq 0$  un número real,  $\theta$  un ángulo,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

$\theta$  es llamado el **ángulo de rotación**, mientras que  $r$  es llamado el **factor de escala**.

La transformación lineal llamada **rotación**, tiene la siguiente forma:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La transformación lineal llamada **reflexión** con respecto al eje  $X$ , tiene la siguiente forma:

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

### 1.3. Sistema Iterado de Funciones (SIF)

Los SIF constituyen una forma muy usada para construir conjuntos fractales generalmente sencillos, como el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpiński.

**Definición 1.26** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, y sean  $f_1, f_2, \dots, f_N$  contracciones de  $X$ . Se define  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  como un **Sistema Iterado de Funciones**.

**Teorema 1.7** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y una contracción  $f : X \longrightarrow X$ ; entonces la función  $\hat{f} : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por  $\hat{f}(B) = \{f(x) \mid x \in B\}; \forall B \in \mathcal{H}(X)$ , es una contracción de  $\mathcal{H}(X)$ .

Ver demostración en [2] pág. 80.

**Teorema 1.8** Sea  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un Sistema Iterado de Funciones; entonces  $F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por  $F(B) = \bigcup_{i=1}^N \hat{f}_i(B)$ , es una contracción.

Ver demostración en [2] pág. 81.

Aplicando entonces los teoremas 1.4 (Teorema del punto fijo) y 1.8, tenemos que para cada Sistema Iterado de Funciones existe un único  $A \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $F(A) = A$ , lo cual nos da paso a la siguiente definición.

**Definición 1.27** Sea  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un Sistema Iterado de Funciones. Se define **atractor del SIF** como el punto fijo de la contracción  $F$ .

Según el teorema 1.5, el atractor de un SIF se puede obtener a través del límite de la sucesión  $B, F(B), F(F(B)), F(F(F(B))), \dots$ ; utilizando **cualquier** elemento  $B \in \mathcal{H}(X)$ , es decir, si  $A$  es el atractor del SIF  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  entonces para cualquier  $B \subseteq X$  no vacío y compacto tenemos que  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(B)$ .

## 1.4. Sistemas Dinámicos

**Definición 1.28** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$ . El par  $\{X, f\}$  se llamará **sistema dinámico**. Dado  $x \in X$  definimos la sucesión:

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, f^{on}(x)$$

tal sucesión es llamada la **órbita** del punto  $x$ , que se denotará como  $\mathcal{O}(x)$ .

**Definición 1.29** Sea  $\{X, f\}$  un sistema dinámico,  $x \in X$  y  $\mathcal{O}(x)$  la órbita de  $x$ . Se dirá que  $\mathcal{O}(x)$  es **acotada** si y solo si existe  $a \in X$  y  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{O}(x) \subseteq B_d(a, \varepsilon)$ . Si no es posible encontrar una bola que contenga todos los puntos de la órbita, diremos que  $\mathcal{O}(x)$  es **no acotada** o se “se escapa al infinito”.

Un punto de interés en la teoría de los sistemas dinámicos es estudiar el “comportamiento” de las órbitas de los diferentes puntos de un conjunto  $X$ . En particular si  $X = \mathbb{C}$ , tendremos lo que se llamaría un **sistema dinámico complejo** en el cual observaremos si las órbitas para cada complejo  $z$  son acotadas o no. Tal distinción entre las órbitas nos lleva a la noción de **conjuntos de Julia**.

**Definición 1.30 Conjuntos de Julia.** Dado un sistema dinámico complejo  $\{\mathbb{C}, f\}$  se define el **Conjunto lleno de Julia** de  $f$ , que notaremos  $F_f$  por:

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{O}(z) \text{ es acotada}\}.$$

Denotaremos por  $J_f$  el **Conjunto de Julia** de  $f$ , definido por la frontera del **Conjunto lleno de Julia**, es decir,

$$J_f = \partial(F_f).$$

**Ejemplo 1.5** Consideremos  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = z^2$ . Calculemos las órbitas de algunos complejos en particular para determinar si pertenecen o no al **Conjunto lleno de Julia**.

$$\mathcal{O}(0) = (0, 0, 0, \dots) \text{ luego } 0 \in F_f,$$

$$\mathcal{O}(1) = (1, 1, 1, \dots) \text{ luego } 1 \in F_f,$$

$$\mathcal{O}(1+i) = (1+i, 2i, -4, 16, 256, \dots) \text{ luego } 1+i \notin F_f,$$

$$\mathcal{O}(i) = (i, -1, 1, 1, 1, \dots) \text{ luego } i \in F_f,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(-i) &= (-i, -1, 1, 1, 1, \dots) \text{ luego } -i \in F_f, \\ \mathcal{O}\left(\frac{3}{2}i\right) &= \left(\frac{3}{2}i, -\frac{9}{4}, \frac{81}{16}, \dots\right) \text{ luego } \frac{3}{2}i \notin F_f, \\ \mathcal{O}(-2) &= (-2, 4, 16, 256, \dots) \text{ luego } -2 \notin F_f, \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots\right) \text{ luego } \frac{1}{2} \in F_f, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Usando la notación polar de los complejos, es decir  $z = re^{i\theta}$ , tenemos entonces  $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ , lo que geoméricamente significa que elevar un complejo al cuadrado consiste en elevar al cuadrado el módulo y duplicar el argumento. De esta manera es fácil deducir que el conjunto lleno de Julia de  $f(z) = z^2$  es el conjunto de todos los complejos que quedan en el interior y sobre la circunferencia de centro en el origen y radio 1, es decir:

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}.$$

Por lo tanto el conjunto de Julia correspondiente a esta función será precisamente la circunferencia de centro en el origen y radio 1, es decir:

$$J_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}.$$

**Nota:** El lector ávido puede encontrar en [6] pág. 22 una mejor explicación sobre la notación compleja.

**Definición 1.31 *El Conjunto de Mandelbrot.*** Consideremos la familia de funciones de variable compleja y valor complejo  $\{f_c\}_{c \in \mathbb{C}}$  donde  $f_c(z) = z^2 + c$  para cada  $c \in \mathbb{C}$ . Entonces si para cada función  $f_c$  analizamos la correspondiente órbita del cero  $\mathcal{O}_{f_c}(0)$ ; definimos el conjunto de Mandelbrot como el conjunto  $M$  de todos los complejos  $c$  para los cuales  $\mathcal{O}_{f_c}(0)$  es acotada, es decir:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \mathcal{O}_{f_c}(0) \text{ es acotada}\}.$$

**Ejemplo 1.6** Calculemos la órbita de cero para algunos  $c$ :

$c = 0$  entonces  $f_0(z) = z^2$  y  $\mathcal{O}_{f_0}(0) = \{0, 0, 0, \dots\}$  luego  $0 \in M$   
 $c = 1$  entonces  $f_1(z) = z^2 + 1$  y  $\mathcal{O}_{f_1}(0) = \{0, 2, 5, 26, \dots\}$  luego  $1 \notin M$   
 $c = i$  entonces  $f_i(z) = z^2 + i$  y  $\mathcal{O}_{f_i}(0) = \{0, i, -1 + i, -i, -1 + i, -i, \dots\}$  luego  $i \in M$   
 $c = 1 + i$  entonces  $f_{1+i}(z) = z^2 + 1 + i$  y  $\mathcal{O}_{f_{1+i}}(0) = \{0, 1 + i, 1 + 3i, -1 + 7i, -47 - 13i, \dots\}$  luego  $1 + i \notin M$ , etc.

# Capítulo 2

## Conceptos Geométricos

En este capítulo se retoman varios conceptos que ya fueron definidos formalmente en el capítulo anterior, pero aquí se dará una descripción muy informal e intuitiva de dichos conceptos, aunque más detallada, pensando en que estarían dirigidos a estudiantes de secundaria.

### 2.1. Sucesiones

Una sucesión en un conjunto  $A$ , es una lista de elementos que pertenecen a  $A$  y que representaremos por  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$  y que siguen una ley o regla, *donde los  $a_i$  no necesariamente son números*. Veamos algunos ejemplos sencillos:

**Ejemplo 2.1** *Tomemos  $A$  como el conjunto de los números naturales*

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & 15, & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \dots \end{array}$$

Frecuentemente en muchos textos matemáticos se presenta una sucesión mostrando algunos términos iniciales consecutivos de la sucesión, como en el ejemplo anterior; otras veces se define la sucesión mediante una expresión algebraica, la cual es conocida como el **término general**, el cual nos permite conocer el valor de un determinado término si se conoce el lugar que ocupa en la sucesión. Usualmente el término general de una sucesión se denota por  $a_n$  y se conoce como el término  $n$ -ésimo. En el ejemplo anterior,  $2n - 1$  define la sucesión, es decir,  $a_n = 2n - 1$  es el término general. Esto es, cuando  $n = 1$  tenemos  $a_1 = 2(1) - 1 = 1$ , cuando  $n = 2$  se tiene que  $a_2 = 2(2) - 1 = 3$ ,  $\dots$ , para  $n = 7$  obtenemos que  $a_7 = 2(7) - 1 = 13$ , así sucesivamente; luego la expresión algebraica  $2n - 1$  modela los términos de la sucesión presentados en este ejemplo. Note que esta sucesión determina los naturales impares.

*Toda sucesión esta ordenada*, este es un hecho que esta implícito en la definición de sucesión, ya que si una sucesión es una lista, tendremos siempre un primer elemento en la lista, luego un segundo, un tercero y así sucesivamente, cada elemento de la sucesión tiene un puesto que ocupar en ella misma (en la lista); este orden es otorgado por el orden de los números naturales, es decir, el término general  $a_n$  ocupa el lugar  $n$ -ésimo

de la lista, para cualquier  $n$  natural. Analizando el orden de la sucesión del ejemplo 2.1 tenemos que  $a_1 = 1$  será el primer término,  $a_2 = 3$  será el segundo término,  $a_3 = 5$  será el tercer término, y así sucesivamente.

**Ejemplo 2.2** *Determinemos la expresión algebraica que define los términos de la siguiente sucesión: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...*

Dado que los términos de la sucesión son potencias de 2, los términos de la sucesión están definidos por la expresión  $2^n$ , donde  $n$  es un número natural.

**Ejercicio 2.1** *En el ejemplo 2.1 ¿Cuáles serán los términos para las posiciones 9, 10, 15, 32, 95, 520 y 1001? ¿Qué posiciones tendrán los términos 399, 839, 2047?*

**Ejercicio 2.2** *Determine la expresión algebraica que define los términos de la sucesión  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$*

**Ejemplo 2.3** *En este ejemplo observamos una sucesión cuyos términos no son números sino estrellas, en la que cada estrella tiene una punta más que la anterior.*

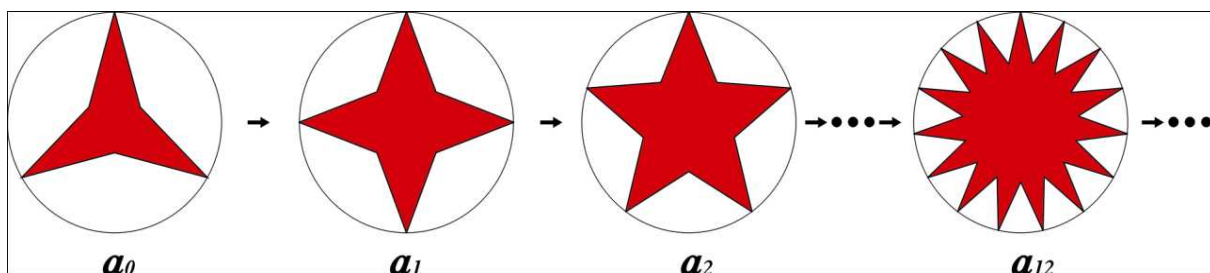


Figura 2.1: Sucesión de estrellas de puntas.

Así, el primer término es una estrella de 3 puntas, el segundo una estrella de 4 puntas, el tercero una estrella de 5 puntas, etc.

**Ejercicio 2.3** *¿Qué posición ocupa la siguiente estrella? ¿Cuántas puntas tendrá la estrella de posición 10?, dibújela.*

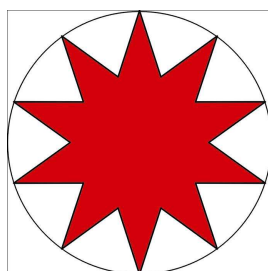


Figura 2.2: Posición  $a_7$ .

Algunas sucesiones se aproximan cada vez más a un cierto elemento fijo, es decir, por más grande que sea  $n$  en el término general, el resultado será el mismo o casi el mismo,

estas sucesiones se llaman **convergentes**, y dicho elemento fijo es conocido como el **límite** de la sucesión.

Las sucesiones que no tienen un límite específico se llaman **divergentes**. Las sucesiones de los ejemplos 2.1 y 2.2 son divergentes, pues cada vez que tomamos un  $n$  mayor, las sucesiones no se acercan a algún número en particular, por el contrario tienden a ser más grande o se “escapan” al infinito.

Nos enfocaremos en dar una buena idea de sucesiones convergentes cuyos elementos sean figuras del plano, ya que son las que interesan en esta cartilla para la obtención de conjuntos fractales. Veamos este ejemplo:

**Ejemplo 2.4** *La regla que rige esta sucesión de polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio 1, está dada por el incremento de un lado en cada paso.*

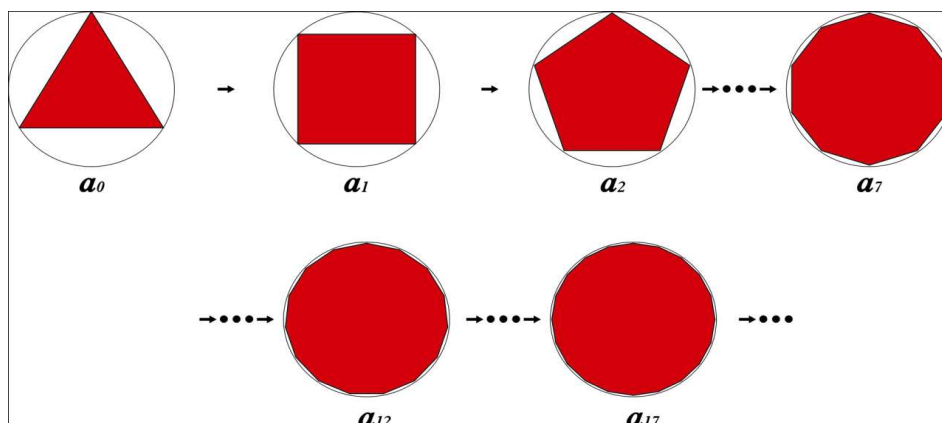


Figura 2.3: Sucesión de polígonos.

Notamos entonces que a medida que aumenta el número de lados, como en los términos 7,12,17 el polígono se aproxima más a una forma circular, esto es, si el número de lados es muy grande, el polígono “ante nuestros ojos” es casi un círculo, es como si el círculo fuese la figura final de un polígono regular de “infinitos” lados, por lo tanto, intuitivamente el círculo es el **límite** de la sucesión.

En el ejemplo 2.3 a medida que aumentamos en gran cantidad las puntas, la sucesión también toma una forma circular; podemos deducir entonces que la sucesión converge al círculo, luego el círculo es el límite de la sucesión.

Nótese que dos sucesiones con distintos términos pueden converger a un mismo límite. ¿Qué pasaría si en el ejemplo 2.3 y 2.4 tomamos las figuras sin relleno, es decir, si tomamos solo el contorno, a que figura convergen?

**Ejercicio 2.4** *En la siguiente sucesión, dibuje los términos 15 ,20 y 100 deduzca el límite de la sucesión, ¿qué similitudes y diferencias hay con el ejemplo anterior?*

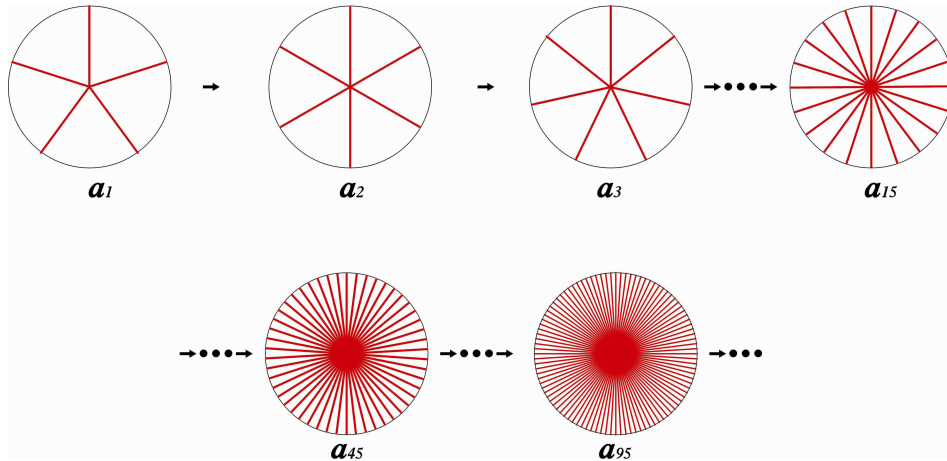


Figura 2.4: Sucesión de estrellas de radios.

**Ejemplo 2.5** Para esta sucesión de polígonos regulares, trazamos un segmento de recta desde un vértice cualquiera hasta un segundo vértice consecutivo, y eliminamos la sección triangular obtenida, el polígono resultante es de un lado menor al anterior, así sucesivamente hasta que obtenemos el menor polígono regular posible.

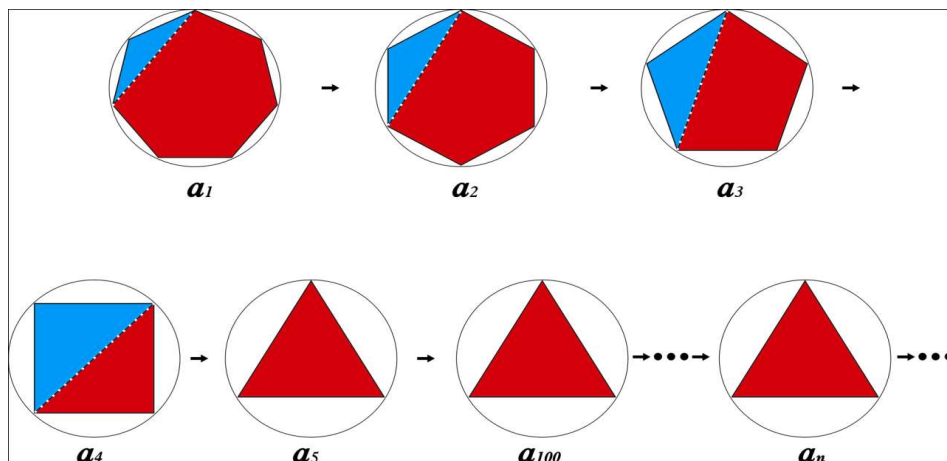


Figura 2.5: Sucesión de polígonos eliminando un lado.

Note que a partir del 5º término no es posible eliminar más lados, lo que implica que a partir de este momento siempre se tiene un triángulo. Así el triángulo se puede considerar como el límite de esta sucesión. Las sucesiones de este tipo se denominan **cuasi-constantes**, dado que a partir de un término la sucesión no presenta cambio alguno en los términos posteriores, es decir, los términos posteriores son iguales o constantes.

**Ejercicio 2.5** Para esta sucesión tome como primer término un dodecágono, y aplique la regla del ejemplo anterior. Grafique los términos 10, 20, 500 y deduzca el límite de la sucesión, ¿es la sucesión cuasi-constante?

## 2.2. Movimientos Geométricos en el Plano

A continuación presentaremos algunos de los principales movimientos que se pueden aplicar a objetos geométricos del plano, como son la traslación, la reflexión (con respecto a un eje), reescalamiento (cambios de escala) y rotaciones. Tales efectos nos ayudarán a mecanizar y comprender mejor el tema de transformaciones afines en el plano y los sistemas iterados de funciones que veremos en el capítulo 3, esenciales para la generación de los fractales.

### 2.2.1. Traslación

Una **traslación** de una figura en el plano (*una figura del plano no es más que un conjunto de puntos*) consiste en realizar un desplazamiento de esta, en dirección del eje  $X$  ó del eje  $Y$  ó combinación de las dos. El sentido que tome el desplazamiento puede ser positivo o negativo respecto a la posición inicial de la figura, es decir:

- i. *En la dirección del eje  $X$* : positivo si es a derecha y negativo si es a izquierda.
- ii. *En la dirección del eje  $Y$* : positivo si es hacia arriba y negativo si es hacia abajo.

En otras palabras una traslación es un movimiento en una dirección determinada, que no deja ningún punto perteneciente de la figura en la posición inicial, a menos que la traslación sea nula.



Figura 2.6: Traslación sobre el eje  $X$  e  $Y$  respectivamente.

**Ejercicio 2.6** *Realice las siguientes traslaciones en el plano:*

<i>Trasladar la figura, 5 unidades sobre el eje <math>X</math> y 3 unidades sobre el eje <math>Y</math>.</i>	<i>Trasladar la figura, -1 unidad sobre el eje <math>X</math> y -2 unidades sobre el eje <math>Y</math>.</i>	<i>Trasladar la figura, 4 unidades sobre el eje <math>X</math> y -4 unidades sobre el eje <math>Y</math>.</i>

Figura 2.7: Trasladar triángulo, hexágono, sombrero.

**Ejercicio 2.7** *Describe las siguientes traslaciones:*

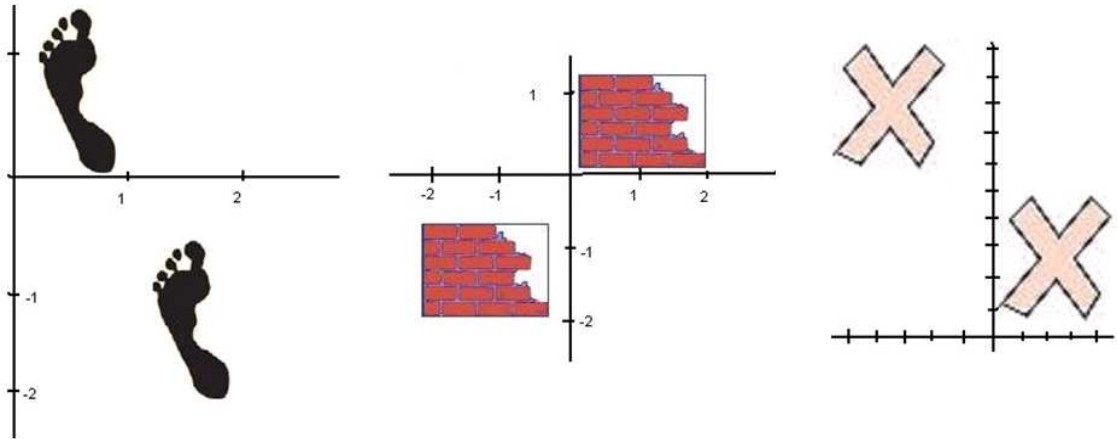


Figura 2.8: Describir traslaciones

### 2.2.2. Reflexión

Tomando una figura y una recta como eje de simetría, la reflexión de la figura con respecto al eje consiste en tomar los puntos equidistantes correspondientes a los puntos de la figura. Para nuestros intereses, el eje de simetría será el eje  $X$  ó  $Y$ , o ambos ejes (*reflejando con respecto a un eje primero y luego con respecto al otro*).

Podemos hacernos a la idea de que estamos mirando la figura inicial sobre un espejo, es decir, su reflejo (*de ahí la palabra reflexión*). Así:

- i. *Con respecto al eje  $X$* : lo que esta arriba, quedará abajo y viceversa.
- ii. *Con respecto al eje  $Y$* : lo que esta a derecha, quedará a izquierda y viceversa.

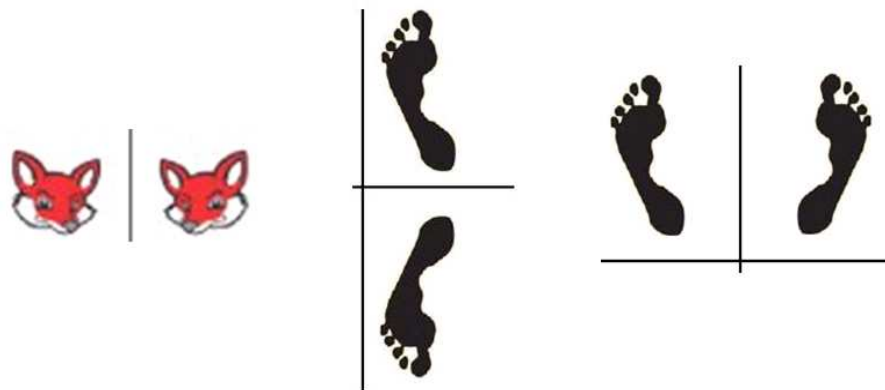


Figura 2.9: Reflexiones

**Ejercicio 2.8** *Realice las siguientes reflexiones sobre  $X$  e  $Y$  para cada figura:*

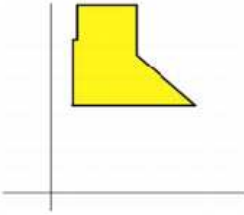

		
<i>Reflejar la figura respecto al eje Y.</i>	<i>Reflejar la figura respecto al eje X y luego respecto al eje Y.</i>	<i>Reflejar la figura respecto al eje X.</i>

Figura 2.10: Aplicar reflexiones

### 2.2.3. Reescalamiento

Un **reescalamiento** consiste en agrandar o encoger una figura, o dicho de otra forma, dilatar o contraer la figura de manera homogénea, es decir, sin deformar la figura. Para poder realizar dichos efectos usaremos un factor de escala  $k$ , el cual es un número real no negativo que multiplicaremos por las medidas de la figura; así, tendremos entonces que:

- i. Si  $k > 1$  la figura se agranda o dilata.
- ii. Si  $k = 1$  la figura conserva su tamaño inicial.
- iii. Si  $0 < k < 1$  la figura se encoge o contrae.
- iv. Si  $k = 0$  el reescalamiento es nulo, por lo tanto la figura se convierte en un punto.

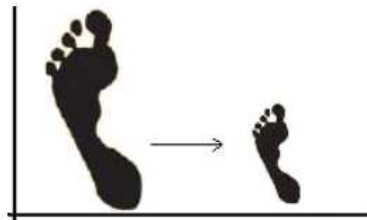


Figura 2.11: Reescalamiento con factor de escala  $k = \frac{1}{2}$ .

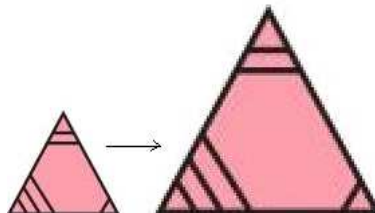


Figura 2.12: Reescalamiento con factor de escala  $k = 2$ .

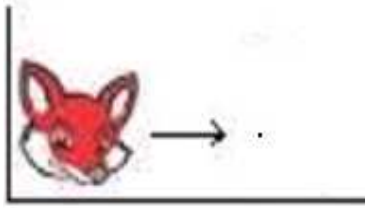


Figura 2.13: Reescalamiento con factor de escala  $k = 0$ .

**Ejercicio 2.9** Realice los siguientes reescalamientos:

<p>Aplicar un factor de escala <math>k = 1, \frac{1}{2}</math> y <math>0</math>.</p>	<p>Aplicar un factor de escala <math>k = 3, \frac{1}{4}</math> y <math>\frac{3}{2}</math>.</p>	<p>Aplicar un factor de escala <math>k = \frac{5}{2}, \frac{1}{3}</math> y <math>2</math>.</p>

Figura 2.14: Aplicar reescalamientos.

## 2.2.4. Rotación

Una **rotación** sobre una figura, consiste en girarla al rededor del origen con respecto a un ángulo dado. Si el ángulo es positivo, el giro se realizará en sentido contrario a las manecillas del reloj; si el ángulo es negativo, el giro se realizará en sentido horario.



Figura 2.15: Rotación con ángulo positivo.

**Ejercicio 2.10** Realice las siguientes rotaciones:

<p>Rotar <math>45^\circ, -45^\circ, 180^\circ</math>.</p>	<p>Rotar <math>180^\circ, -30^\circ, -120^\circ</math>.</p>	<p>Rotar <math>360^\circ, -90^\circ, 60^\circ</math>.</p>

Figura 2.16: Realizar rotaciones.

## 2.3. Compacidad

Los conjuntos **compactos** serán las “figuras del plano” con las cuales trabajaremos para generar fractales, pero antes necesitamos otras nociones para poder explorar y dar una idea muy general sobre estos conjuntos.

### 2.3.1. Bola

Llamaremos **bola** a todo círculo o disco que podamos dibujar sin su contorno, es decir, solo tomaremos el conjunto de puntos interiores de un círculo. Ahora, ya que las bolas en el plano tienen forma de círculos sin contorno, tendrán centro en un punto  $(x, y)$  y un radio fijo  $r > 0$ .

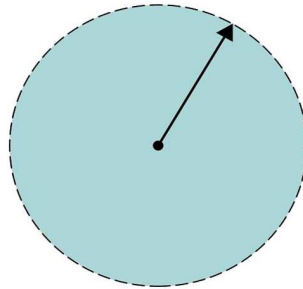


Figura 2.17: Bola.

### 2.3.2. Conjunto acotado

Llamaremos **conjunto acotado** a toda figura del plano que podamos cubrir completamente con una bola.

**Ejemplo 2.6** *Los siguientes conjuntos (cuadrado, disco, escalera, casita) son acotados:*

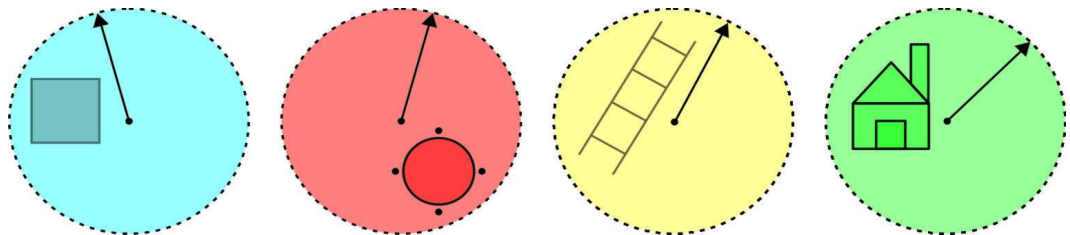


Figura 2.18: Conjuntos acotados.

**Ejemplo 2.7** *Los siguientes conjuntos no son acotados:*

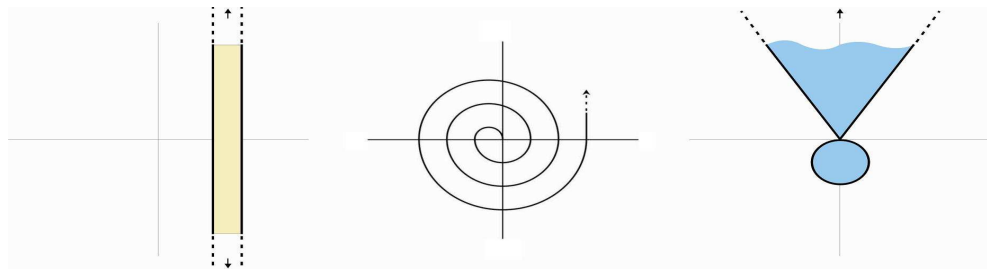


Figura 2.19: Conjuntos no acotados.

**Ejercicio 2.11** *Determine cuáles de los siguientes conjuntos son acotados:*

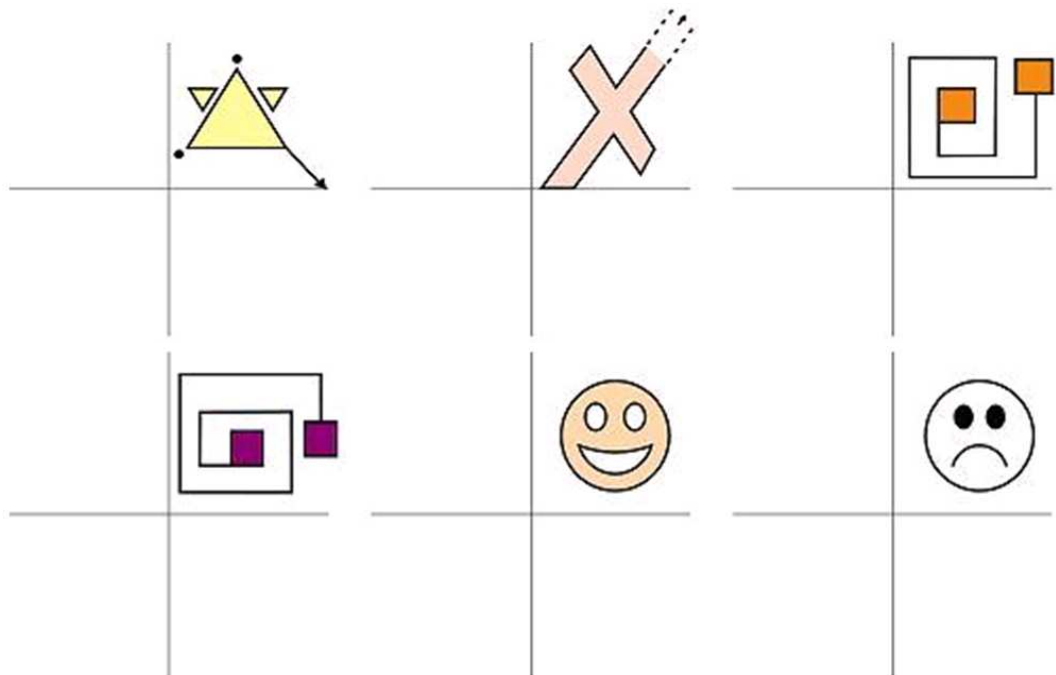


Figura 2.20: Determinar conjuntos acotados.

### 2.3.3. Conjunto cerrado

Llamaremos **conjunto cerrado** a toda figura del plano que posea contorno, por contorno entenderemos las líneas que delimitan una figura.

**Ejemplo 2.8** *Los siguientes conjuntos son cerrados, como caso especial tenemos que cualquier conjunto finito de puntos es un conjunto cerrado:*

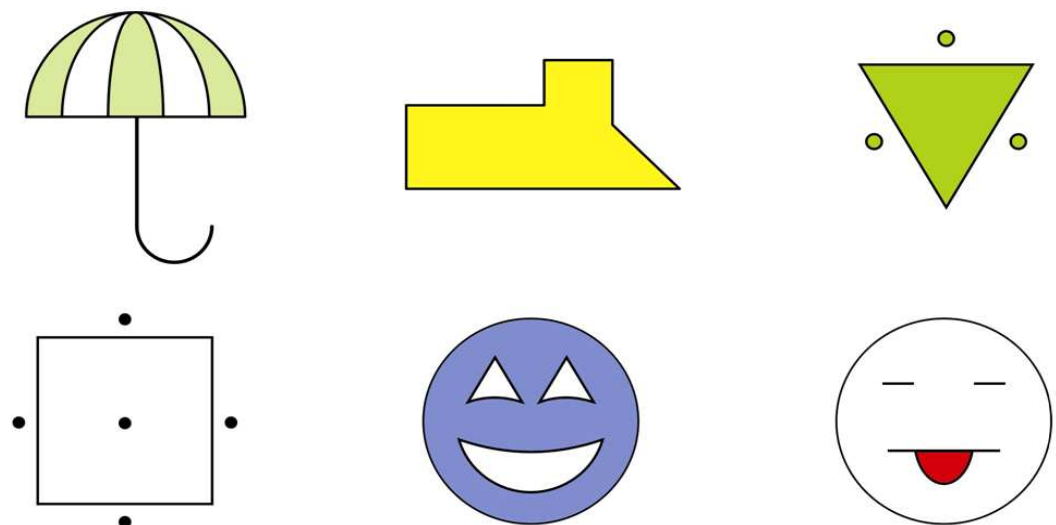


Figura 2.21: Conjuntos cerrados.

**Ejemplo 2.9** *Los siguientes conjuntos no son cerrados:*

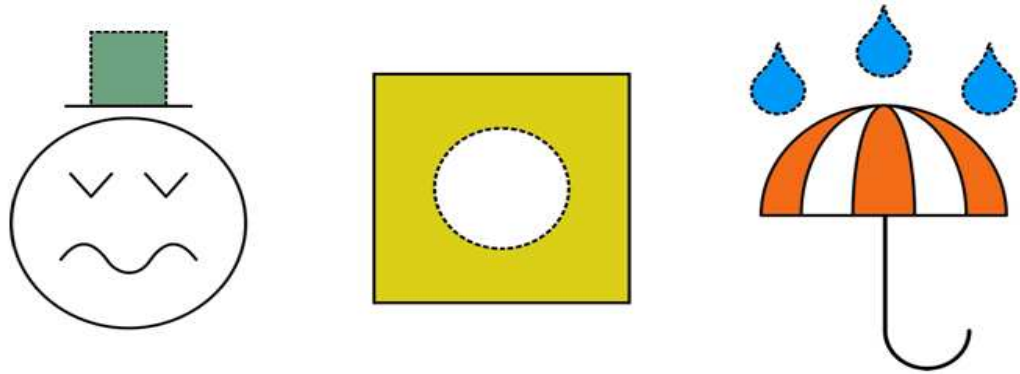


Figura 2.22: Conjuntos no cerrados.

**Ejercicio 2.12** *Determine cuales de los siguientes conjuntos son cerrados:*

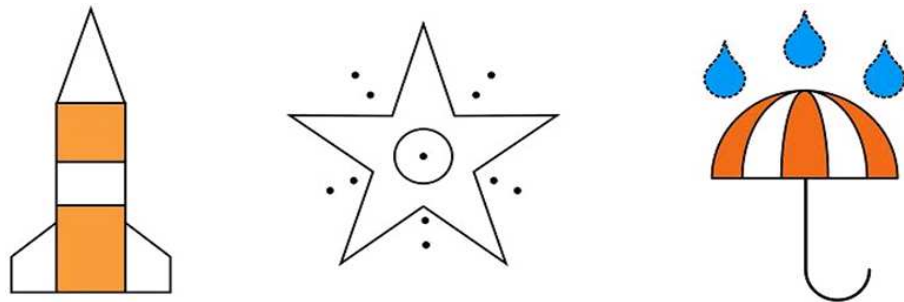


Figura 2.23: Determinar conjuntos cerrados.

Ahora si, podemos atrevernos a dar una noción de **conjunto compacto** en el plano.

### 2.3.4. Conjunto compacto

Diremos que un conjunto en el plano es un **compacto** si y solo si ese conjunto es cerrado y acotado.

**Ejemplo 2.10** *Los siguientes conjuntos son compactos:*

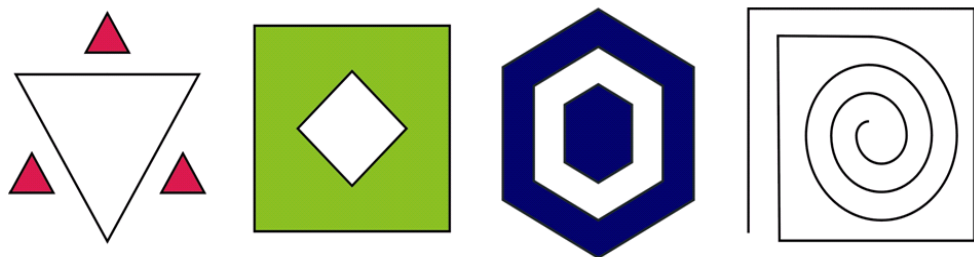


Figura 2.24: Conjuntos compactos.

**Ejercicio 2.13** *Determine cuales de los siguientes conjuntos no son compactos y explique por qué no lo son:*

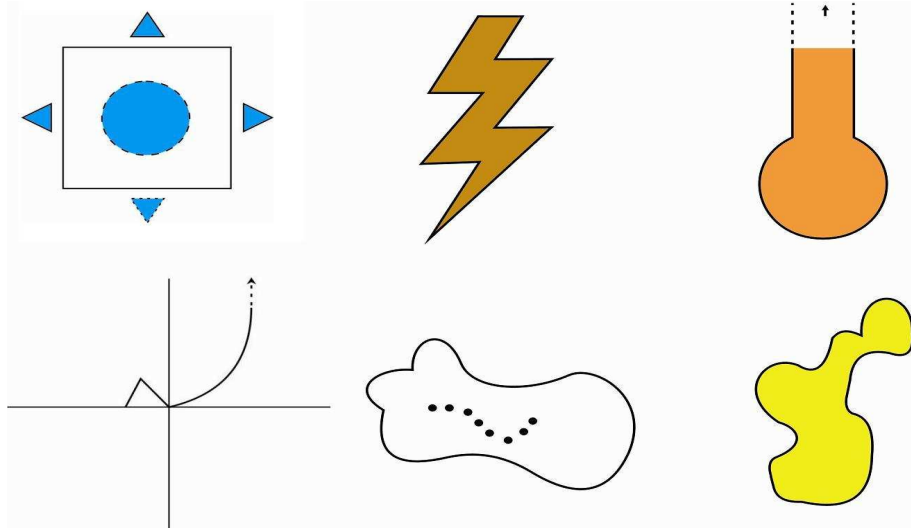


Figura 2.25: Determinar compacidad.

## Capítulo 3

# Noción de Autosemejanza

En este capítulo presentaremos una colección de imágenes que nos permitirán apreciar de manera gráfica una de las propiedades más importantes de los fractales, la **autosemejanza**. Intuitivamente se puede decir que un objeto es autosemejante si es igual a sus partes, salvo un factor de escala, es decir, si tomamos una parte de esa figura notaremos que esa parte es igual al todo exceptuando el tamaño (*imaginemos que utilizamos una lupa o hasta un microscopio, para ello*).

La geometría tradicional, la euclídiana, es la rama de la matemática que se encarga de las propiedades y de las mediciones de elementos tales como puntos, líneas, planos, volúmenes, etc. Sin embargo, las formas encontradas en la naturaleza, como montañas, franjas costeras, sistemas hidrográficos, nubes, hojas, árboles, vegetales, copos de nieve, y un sinnúmero de otros objetos no son fácilmente descritos por la geometría tradicional. La geometría fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las complicadas formas de la naturaleza.

Mandelbrot formuló la definición de fractal en la década de lo 70, es asombrosa la cantidad y la rapidez con que científicos han elaborado modelos para describir y para comprender como la naturaleza crea sus formas, y como el crecimiento en la naturaleza está vinculado a modelos fractales. Tal parece que la naturaleza sintiera predilección por la estética fractal.

Si se lo explicamos bien a un niño, este puede encontrar formas fractales en múltiples estructuras vegetales: hojas, troncos, ramas, raíces, en el perfil de montañas, rocas y piedras, etc. Por su parte los científicos han identificado fractales en la forma de las galaxias, las costas marítimas, las montañas y perfiles rocosos, los perfiles de los bosques, las fronteras; y en procesos físicos y químicos como la cristalización, las fracturas de materiales, los movimientos de partículas, las descargas eléctricas y la electrólisis. En nuestro organismo: el sistema circulatorio, la ramificación de venas, arterias, nervios, la estructura de los pulmones, el cerebro. Y en otro ámbito se pueden considerar formas fractales las nubes, los relámpagos, los árboles.

Es importante señalar que aunque los fractales no permiten explicar ni dar modelos para describir todas las formas naturales, por primera vez nos encontramos frente a un

planteamiento que permite describir y dar respuesta a formas geométricas tan distintas como las que tienen los objetos descritos.

Las imágenes que aparecen en este capítulo han sido tomadas de las siguientes páginas web:

- i) <http://matap.dmae.upm.es/cursofractales/index.html>
- ii) <http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-01.shtml>
- iii) <http://www.fractovia.org/art/es>
- iv) <http://www.arrakis.es/sysifus/galeria.html>
- v) <http://es.webfractales.com/galerie.php>

### 3.1. Conjuntos Autosemejantes

Esta sección está dedicada a los primeros conjuntos que ya son conocidos en el mundo matemático y que fueron los primeros en ser creados por matemáticos que se dedicaron al tema de la geometría fractal, además de que es posible generarlos con lápiz y papel. Son exactamente idénticos en todas sus escalas “hasta el infinito”, es decir, cuando uno comienza a “sumergirse” dentro de estos objetos siempre va a encontrar la misma estructura, sin distorsiones, sin importar la escala que se use.

**Ejemplo 3.1** *Este conjunto es conocido como el conjunto de Cantor, probablemente el primer conjunto fractal puro en la historia; fue descrito por el matemático alemán George Cantor (inventor de la teoría de conjuntos) alrededor de 1872. A pesar de parecer una figura sencilla presenta autosimilitud a cualquier escala.*

*Para construir el conjunto de Cantor partimos de un segmento de recta de longitud 1, removemos el tercio central, obtenemos así una nueva figura que consta de dos segmentos de longitud  $\frac{1}{3}$ . Sucesivamente, se continua el proceso, removiendo el tercio central de cada nuevo subintervalo generado. Hemos construido entonces una sucesión de figuras donde intuitivamente obtendremos un “figura límite”, este límite de la sucesión es el conjunto de Cantor.*

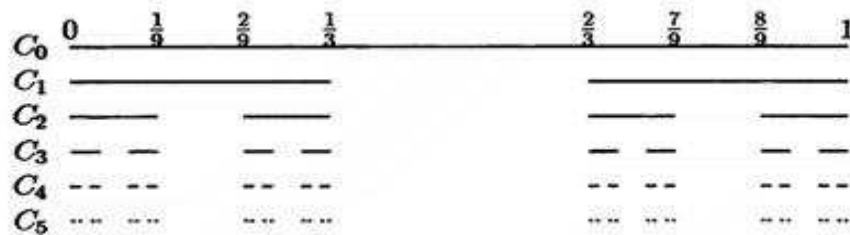


Figura 3.1: Conjunto de Cantor.

Notemos que el conjunto de Cantor está formado por la unión de dos copias reducidas de si misma, cada una de las cuales a su vez está formada por la unión de otras dos copias reducidas de si misma y así sucesivamente.

**Ejemplo 3.2** *El triángulo de Sierpiński, es un conjunto inventado por el matemático polaco Waclaw Sierpiński en 1915. De hecho, se dice que se han encontrado imágenes con las características del triángulo de Sierpiński mucho antes en grabados de telas japonesas en los años 1400.*

*Para construir el triángulo de Sierpiński partimos de un triángulo equilátero de lado 1 incluyendo su interior, ubicamos los puntos medios de cada lado y removemos el triángulo interior formado por tales puntos. Obtenemos una figura que consta de tres triángulos semejantes al inicial. Se repite el proceso para cada triángulo semejante, ubicando nuevamente los puntos medios de los lados y se remueve el triángulo interior con vértices en tales puntos.*

*Procedemos de igual forma para cada nueva figura obtenida, lo cual nos proporciona una sucesión y el límite de esta sucesión de figuras será el triángulo de Sierpiński.*

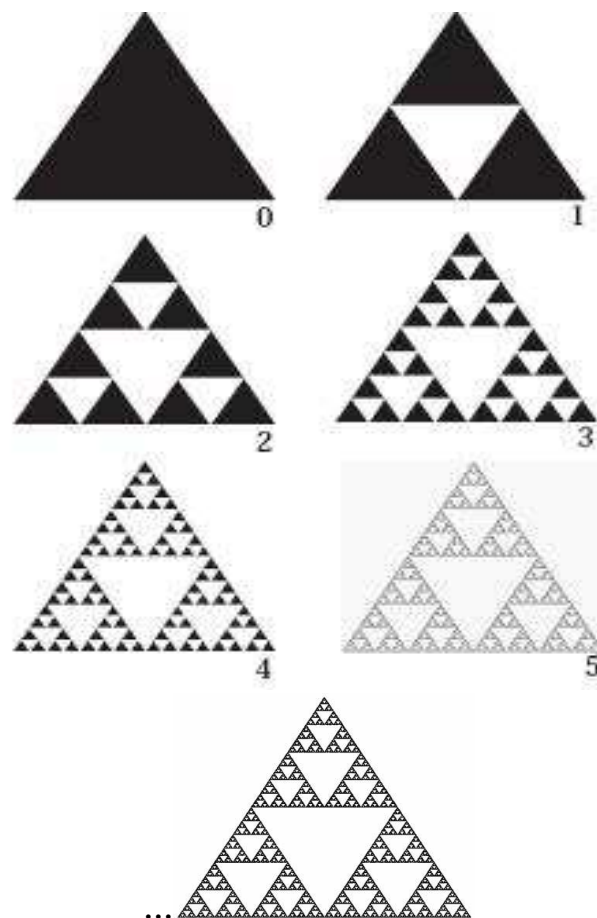


Figura 3.2: Triángulo de Sierpiński.

El triángulo de Sierpiński también está formado por la unión de tres copias reducidas de sí mismo, cada una de las cuales a su vez está formada por la unión de otras tres copias reducidas de sí misma, y así sucesivamente.

**Ejemplo 3.3** *En 1.904 el matemático sueco Niels Fabian Helge Von Koch define la curva que lleva su nombre.*

Para iniciar la construcción partimos de un segmento de recta de longitud 1, dividimos el segmento en tres partes de longitud  $\frac{1}{3}$ , sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un triángulo equilátero pero sin su base como se muestra en la figura 3.3. Con la nueva figura obtenida repetimos la operación para cada nuevo segmento.

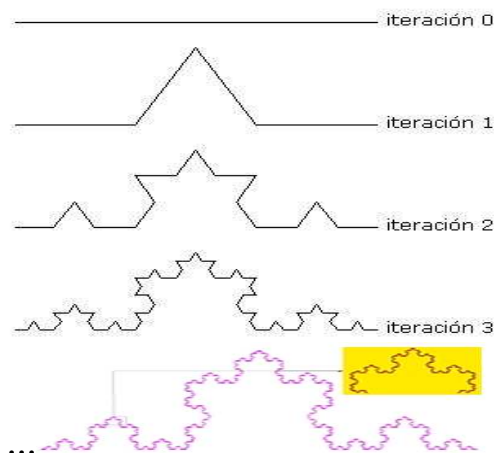


Figura 3.3: Curva de Koch.

Notamos que esta curva está formada por cuatro copias reducidas de si misma, cada una de las cuales está formada por otras cuatro copias reducidas de si misma, y así sucesivamente.

“La curiosidad de esta curva radica en que presenta las mismas características de una costa. Para entender mejor esto, imaginemos que estamos en una playa y que queremos medir con absoluta precisión la longitud de la orilla.

Empezamos a medir de metro en metro, pero esta medida es demasiado grande, queremos afinar más la medición. Pasamos a medir centímetro a centímetro, aún no es demasiado exacta. Las reglas aceptan milímetros, vamos a medir milímetro a milímetro. Claro, pero al fin y al cabo, como la orilla no es una línea recta, deberíamos afinar aún más nuestra medición. Vamos a usar medidas más pequeñas que el milímetro.

Si nos acercamos más, veremos los granos de arena, y veremos que tienen una superficie algo curva, así que también tendremos que medir esa longitud para que nuestra medida sea lo más fiel; pero a medida que nos acercamos, los granos de arena se componen de otros elementos más pequeños que también debemos medir...

Si seguimos afinando la medida y empujando nuestra escala, veremos que (en teoría) no terminamos nunca, siempre podemos afinar y afinar más. Conclusión: nunca podremos medir efectivamente la orilla porque siempre nos encontraremos con que nos falta un trozo para llegar a la medición total”.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>tomado de <http://www.fjromero.com/?cat=4>

**Ejemplo 3.4** *La isla de Koch también creada por Helge Von Koch es conocida como el copo de nieve, por su parecido a la estructura cristalina de la nieve.*

*La construcción de la isla comienza con un triángulo equilátero, y se aplica a cada uno de sus lados el procedimiento que se utilizó para generar la curva de Koch. Notamos entonces que una característica de este conjunto es que esta compuesto por 3 curvas de Koch.*

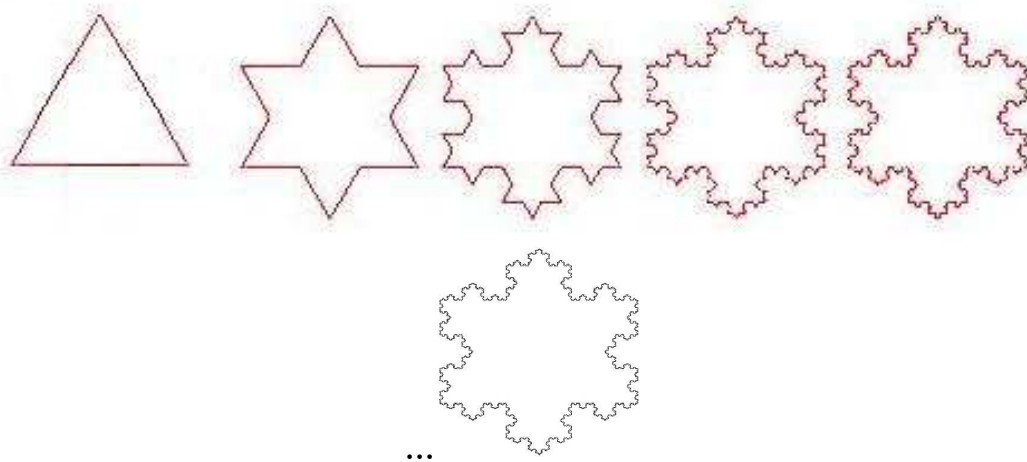


Figura 3.4: Isla de Koch.

Supongamos que pudiésemos deslizar un dedo por el perímetro del copo. ¿Qué sensación al tacto tendríamos?, ¿Podríamos decir que se trata de curvas lisas o suaves?

**Ejemplo 3.5** *W. Sierpiński describe un segundo conjunto, denominado tapiz o alfombra de Sierpiński.*

*Su construcción se inicia tomando un cuadrado de lado 1 incluyendo su interior, lo dividimos en nueve cuadrados de lado  $\frac{1}{3}$  y removemos el cuadrado central, obteniendo así una figura compuesta por ocho cuadrados semejantes al inicial. Repetimos el proceso para cada cuadrado semejante para obtener otra nueva figura. Así, procedemos de igual forma con cada nueva figura creando una sucesión de la cual su límite será la alfombra de Sierpiński.*

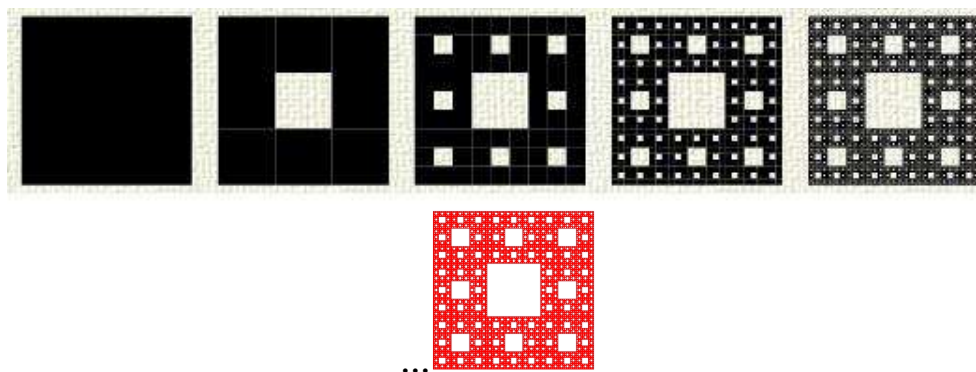


Figura 3.5: Alfombra de Sierpiński.

Observamos que la alfombra de Sierpiński está formada por la unión de ocho copias reducidas de si misma, y estas a su vez por la unión de otras ocho copias reducidas de si misma, así sucesivamente.

**Ejemplo 3.6** *Este conjunto conocido como “caja fractal” se construye de forma similar a los ejemplos anteriores de esta sección.*

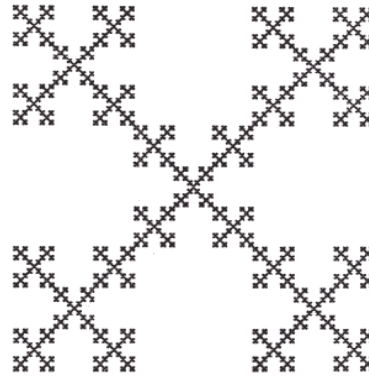


Figura 3.6: Caja fractal.

Realize la descripción de la construcción.

**Ejemplo 3.7** *La curva de Mandelbrot-Weierstrass tiene alguna clase de autosemejanza, ya que Mandelbrot diseñó una modificación a la curva de Weierstrass.*

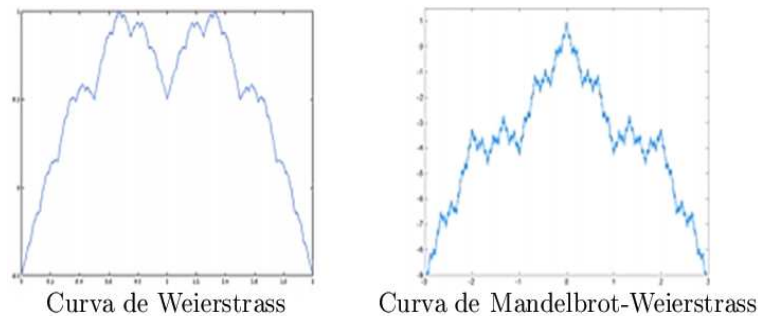


Figura 3.7: Mandelbrot-Weierstrass.

### 3.2. Autosemejanza en la Naturaleza

Es muy raro encontrar que la matemática esté relacionada con elementos de nuestro habitat natural como lo son las plantas, paisajes y hasta elementos básicos como lo es el agua en forma de nieve, pero si pensamos en autosemejanza, nos daremos cuenta que este concepto esta ligado a nuestro entorno, por ejemplo una hoja de helecho tiene esta peculiar característica, ya que si observamos con una lupa sus partes nos daremos cuenta que hay pequeñas hojas de helecho, como si la hoja de helecho se conformara por pequeñas hojas de helecho; pero este no es nuestro único ejemplo, a continuación mostramos otros:

**Ejemplo 3.8** *El brócoli es un excelente ejemplo de autosemejanza, observemos con detenimiento y veremos como cada pequeña rama del brócoli permanece casi invariante con respecto al todo, excepto por el tamaño.*

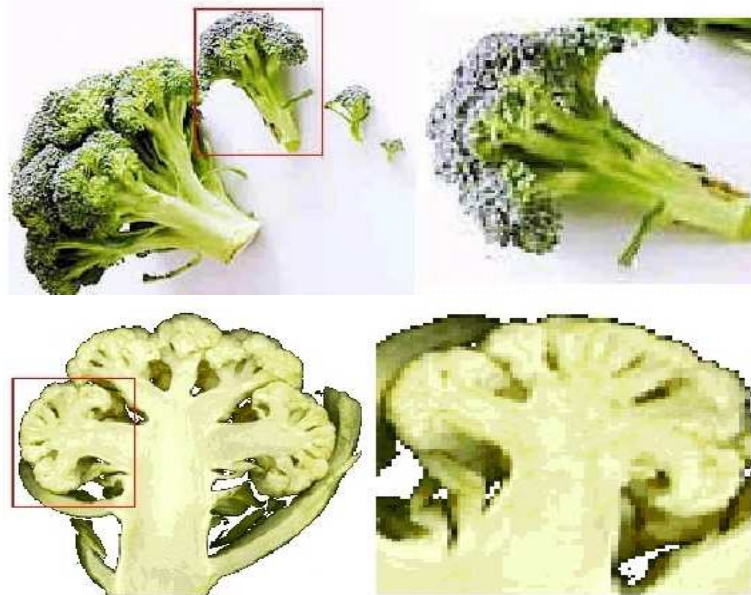


Figura 3.8: Tallo y sección del brócoli.

**Ejemplo 3.9** *Lo misma autosimilitud podemos apreciar en las ramas de un árbol seco.*

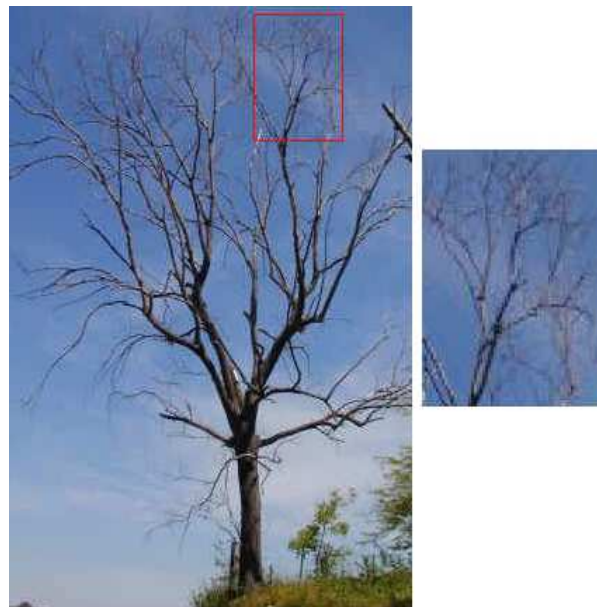


Figura 3.9: Árbol seco.

**Ejemplo 3.10** *Las pequeñas hojas que conforman un helecho son una copia de la hoja mayor.*



Figura 3.10: Helechos.

**Ejemplo 3.11** Incluso, bajo nuestra mirada tan “euclidiana”, a lo mejor no nos damos cuenta que las costas como las que presentamos a continuación son un ejemplo fractal (curiosamente las islas de Gran Bretaña y las costas de esta nación anglosajona sirvieron al matemático Benoit Mandelbrot para presentar sus primeros modelos de fractales).



Figura 3.11: Costas.

**Ejemplo 3.12** Las montañas también tienen la propiedad de autosemejanza.

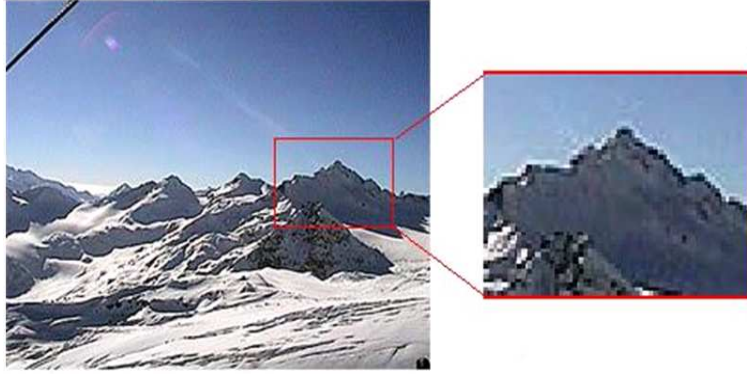


Figura 3.12: Acercamiento de montañas.

**Ejemplo 3.13** *A continuación esta curiosa especie de coliflor llamada coliflor romanescu, muy llamativa por su estructura compleja y muy autosemejante.*

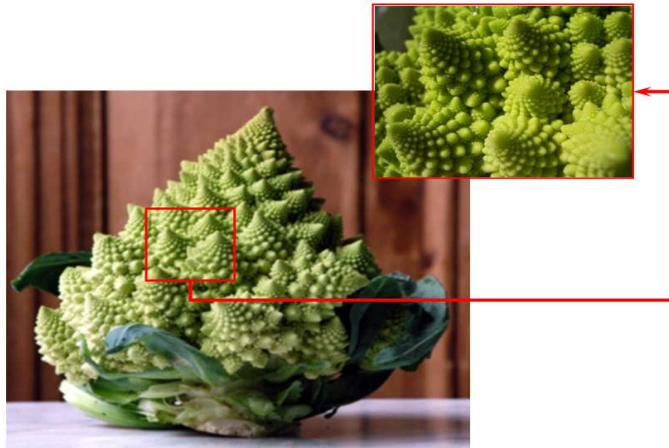


Figura 3.13: Coliflor romanescu.

**Ejemplo 3.14** *Las algas también tienen autosimilitud, especialmente la gorgonia roja.*

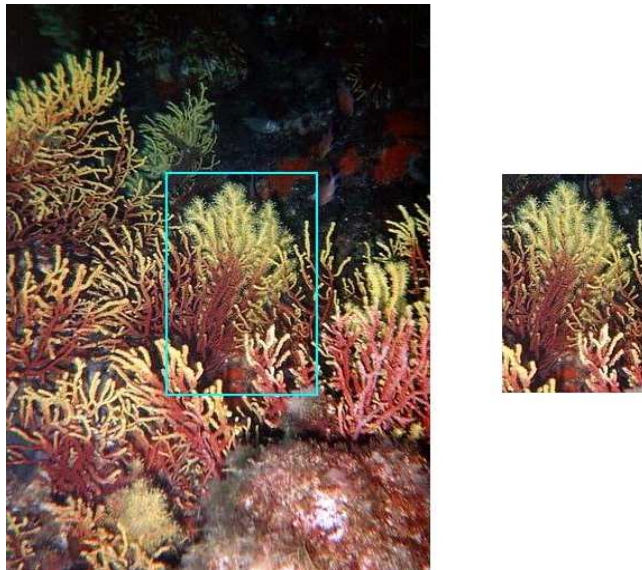


Figura 3.14: Gorgonia roja.

**Ejemplo 3.15** Observemos la configuración cristalina de un copo de nieve, notaremos el gran parecido con el copo de nieve de Von Koch.

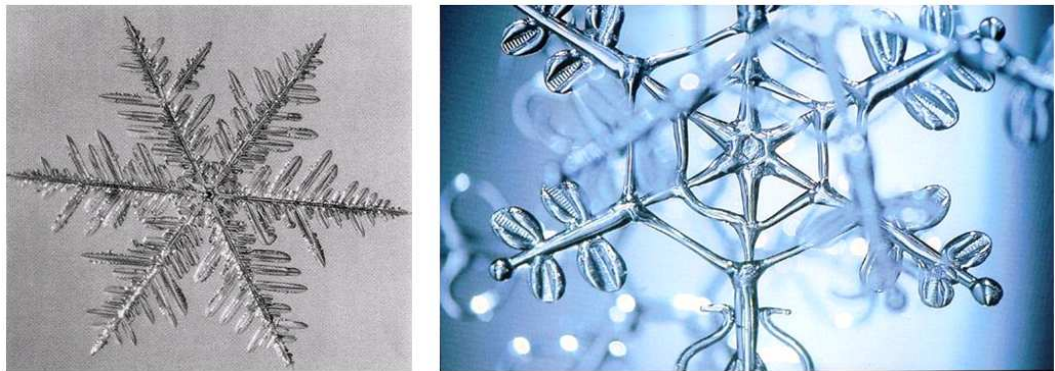


Figura 3.15: Copo de nieve.

**Ejemplo 3.16** Los rayos al descender a la tierra, lo hacen en forma de ramificaciones, debido a esto lo podemos comparar con el ejemplo de las ramas de un árbol pero invertido.

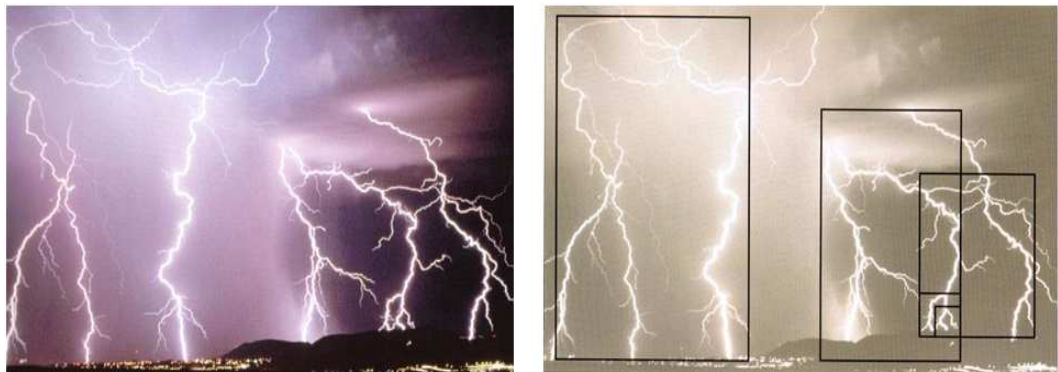


Figura 3.16: Rayos en una tormenta.

**Ejemplo 3.17** La estructura ramificada del pulmón también es autosemejante

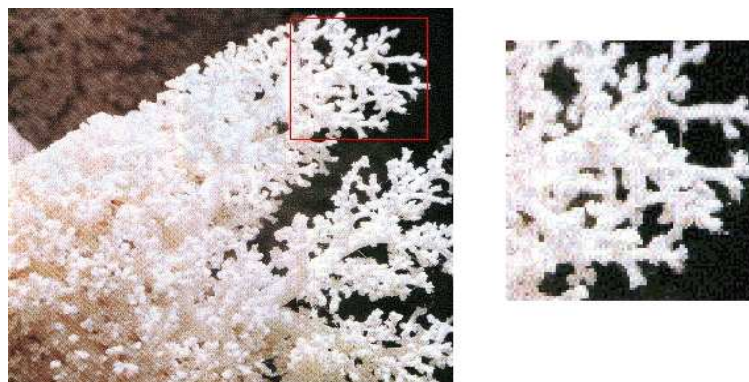


Figura 3.17: Detalle de un pulmón.

**Ejemplo 3.18** Ya que vimos en el ejemplo anterior, el pulmón. ¿Habrá algo más fractal que el corazón humano?. observe la siguiente foto donde los vasos sanguíneos manifiestan una ramificación fractal. Un ejercicio interesante sería usar el programa Paint u otro editor gráfico e ir seccionando partes de esos vasos sanguíneos. En definitiva, los vasos sanguíneos mayores se dividen en vasos finos, y estos a su vez se ramifican en otros aún más finos.

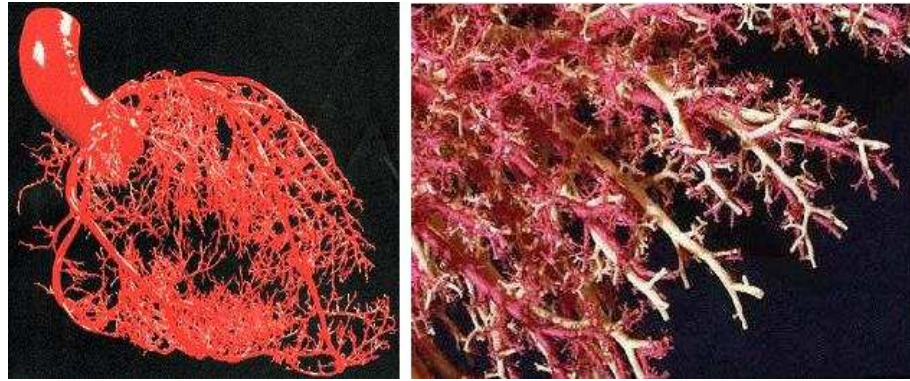


Figura 3.18: Detalle de los vasos del corazón.

**Ejemplo 3.19** El cerebro está formado por pliegues y arrugas, al observarlo de forma más detallada se encuentran nuevas arrugas y pliegues cuya forma es parecida a los pliegues mayores. Lo cual quiere decir que la estructura cerebral tiende a repetirse bajo distintos cambios de escala y por ende a comportarse como una estructura autosimilar. Razón por la cual el cerebro se distribuye de esta forma se debe a que la cantidad de masa cerebral es bastante grande y la cavidad del cráneo es bastante limitada, por lo tanto la única forma de que esta masa quepa es comportándose como estructura fractal.

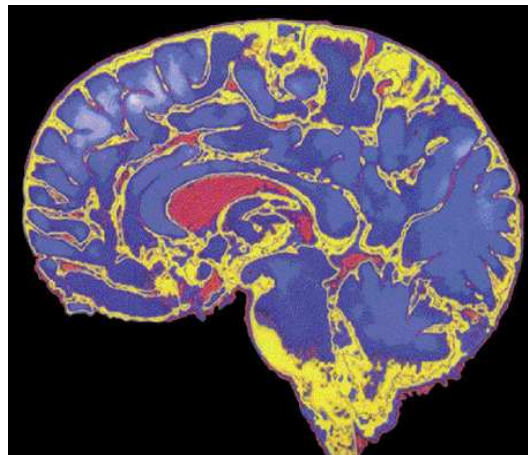


Figura 3.19: Corte transversal del cerebro.

**Ejemplo 3.20** La luna también tiene estructura autosemejante, notemos sus cráteres y observaremos que cuando ampliamos la vista sobre la superficie, encontraremos nuevos cráteres casi idénticos pero a una escala distinta.

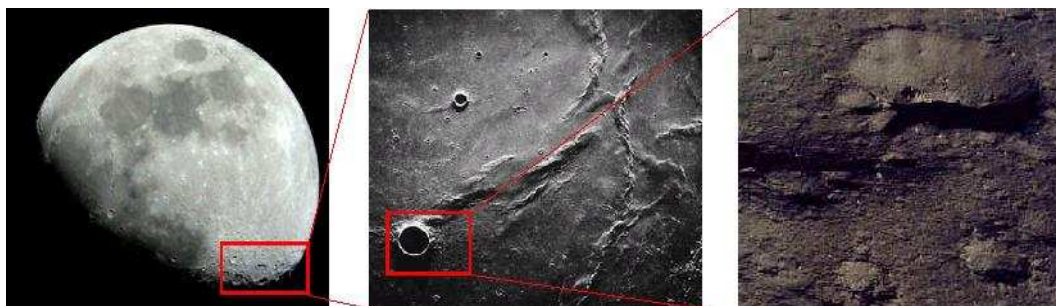


Figura 3.20: Acercamiento a cráteres de la luna.

**Ejemplo 3.21** *Descubiertos por Galileo, los anillos de saturno han sido motivo de especulación por los astrónomos. Cuando los telescopios se hicieron más sensibles, se descubrieron las llamadas divisiones de casini, el anillo no era sólido, sino que estaba dividido en una serie de anillos concéntricos, separados en una sucesión curiosa de distancias. Se descubrió pues así que la distribución de los anillos sigue un patrón cantoriano (recordemos el conjunto de Cantor).*

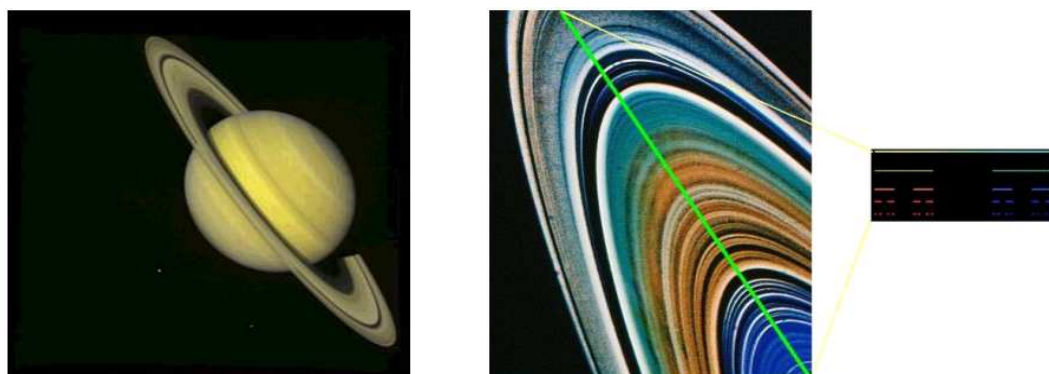


Figura 3.21: Anillos de saturno.

### 3.3. Conjuntos de Julia y Mandelbrot

Se podría decir que estos fractales serían casi imposibles de visualizar si no contáramos con la ayuda de las computadoras, ya que obtener solo unos cuantos puntos usando solamente lápiz y papel resulta demasiado tedioso. Pero por fortuna, las computadoras son capaces de realizar millones de operaciones en muy poco tiempo, recompensándonos con fractales muy raros y vistosos, además de hermosos y mágicos a la vista humana.

Debido a que las operaciones se deben hacer sobre el conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$ , y luego observar si el número complejo obtenido cumple las condiciones de pertenecer al conjunto de Julia o Mandelbrot, así sucesivamente para cada complejo que tomemos, es muy difícil visualizar el conjunto que se está obteniendo al dibujar un punto cada vez, lo que no ocurre con los anteriores conjuntos, pues en ellos podíamos trabajar tomando todo el conjunto facilitando el trabajo manual.

Los conjuntos de Mandelbrot y Julia están estrechamente relacionados. El conjunto de Mandelbrot itera  $z = z^2 + c$  comenzando con  $z = 0$  y variando el valor de  $c$ . El de

Julia, por su parte, itera esa misma función, pero con valores fijos para  $c$  y variando los de  $z$ . Cada punto  $c$  en el conjunto de Mandelbrot especifica la estructura geométrica del conjunto de Julia correspondiente. Si  $c$  está en el conjunto de Mandelbrot, entonces el conjunto de Julia correspondiente será conexo, lo que intuitivamente significa que está formado por una sola pieza o pedazo. De lo contrario, el conjunto de Julia será sólo una colección de puntos desconectados, trazados sobre una gráfica.

**Ejemplo 3.22** *El siguiente es un conjunto de Julia, llamado así en nombre del matemático francés Gaston Julia (1893-1978). Cabe resaltar que esta figura intuitiva por Julia no fue vista por el ojo humano hasta la década de los 80 gracias al uso del computador.*

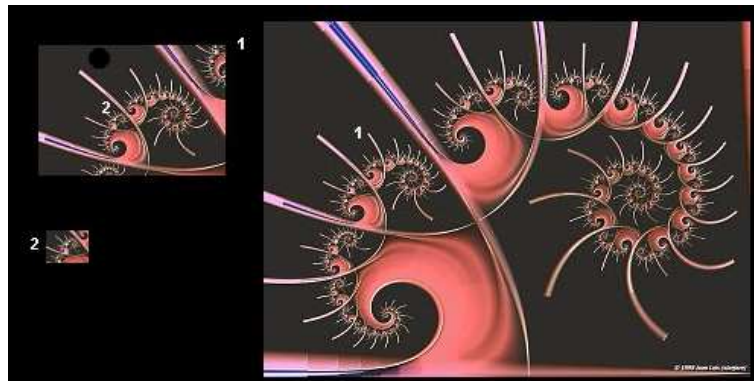


Figura 3.22: Zoom sobre el conjunto de Julia.

Los siguientes son otros conjuntos de Julia

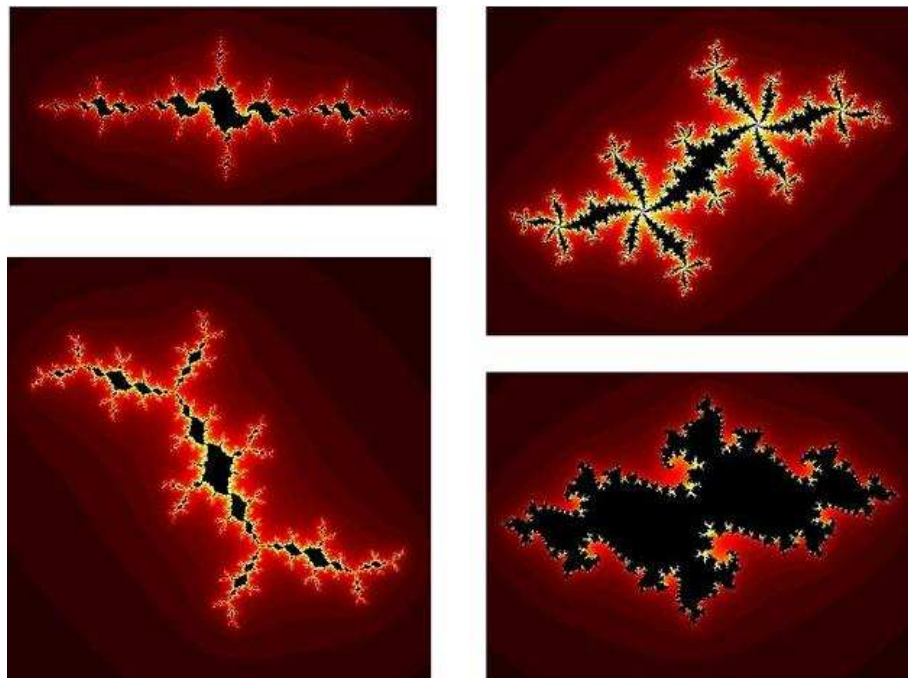


Figura 3.23: Varios conjuntos de Julia.

**Ejemplo 3.23** *El conjunto de Mandelbrot fue descubierto por Benoît Mandelbrot en la década de 1970, y bautizado en su honor por Adrien Douady y J. Hubbard en 1982. Su peculiar figura ha sido reproducida en innumerables ocasiones desde que se logró su primera representación visual en 1980.*

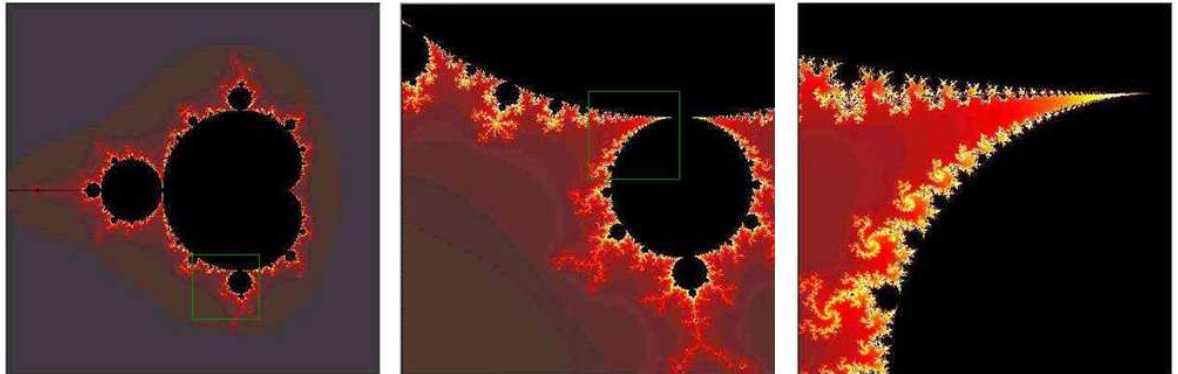
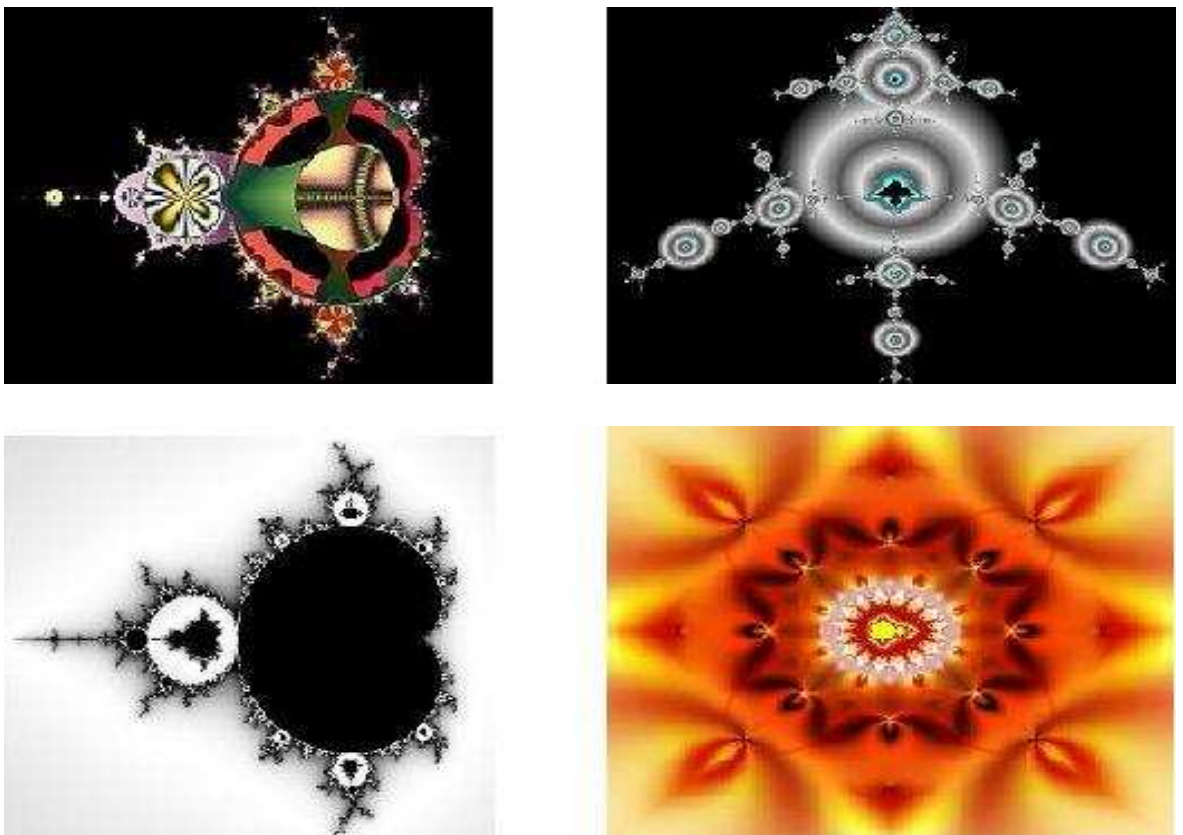
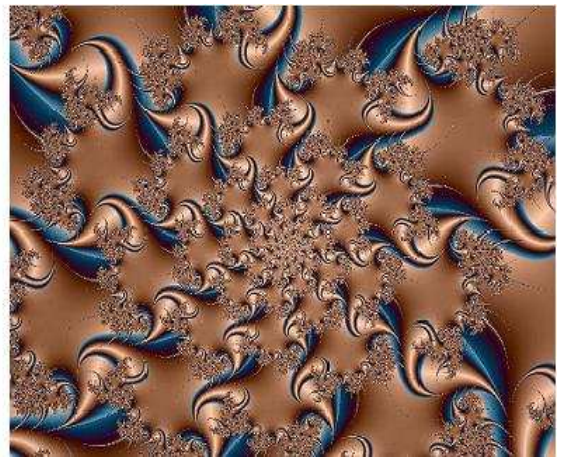
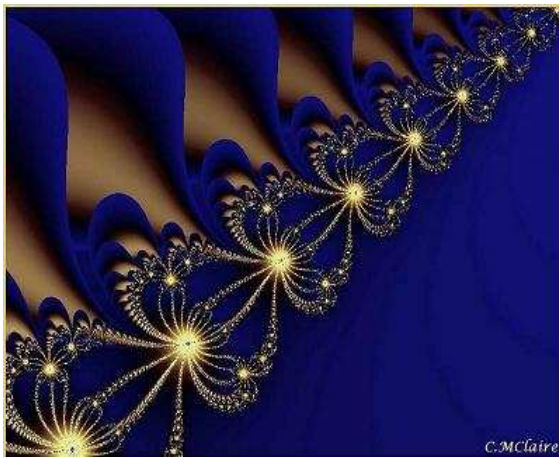
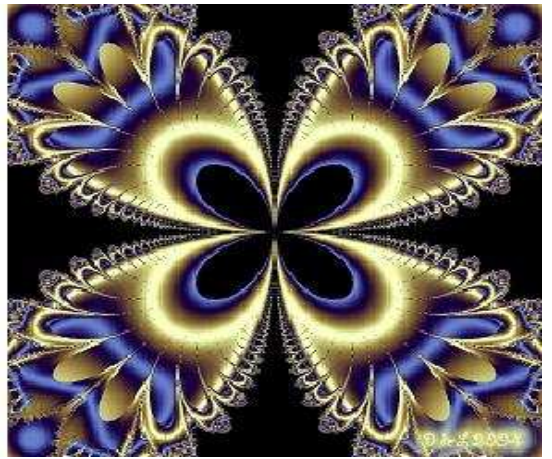
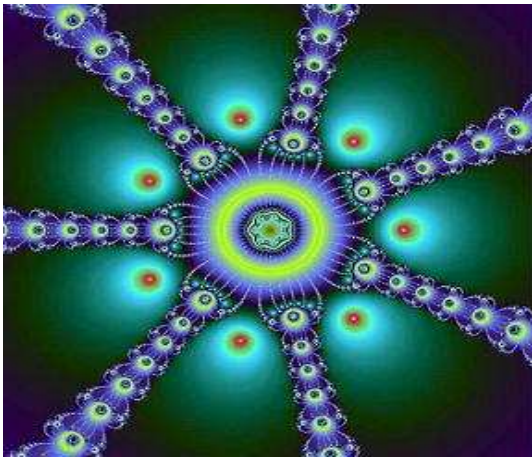
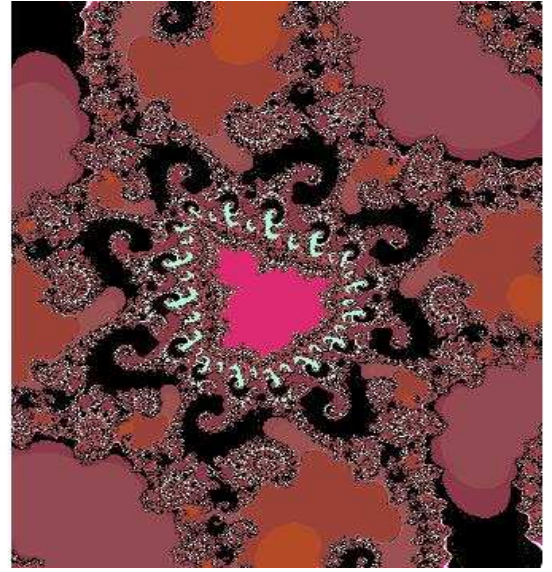
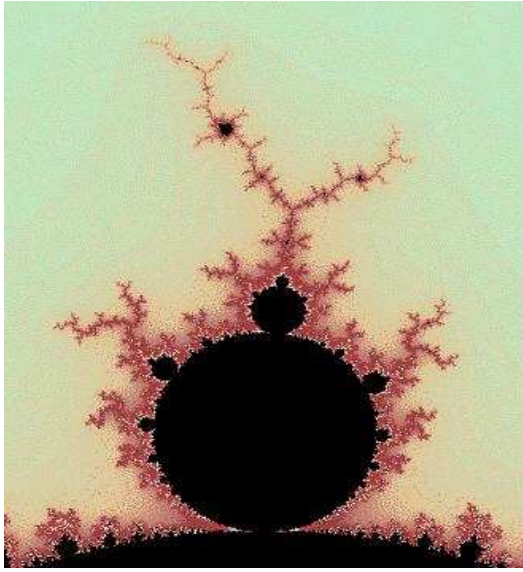


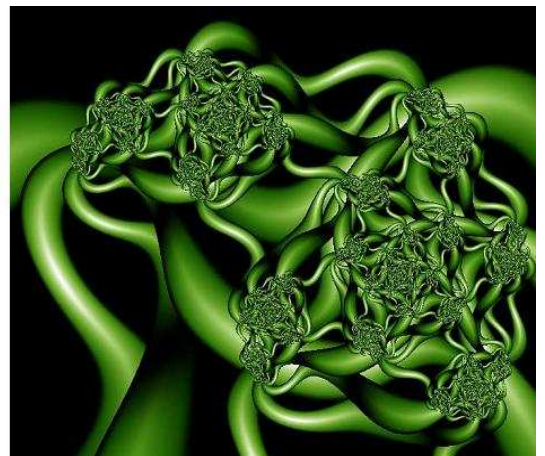
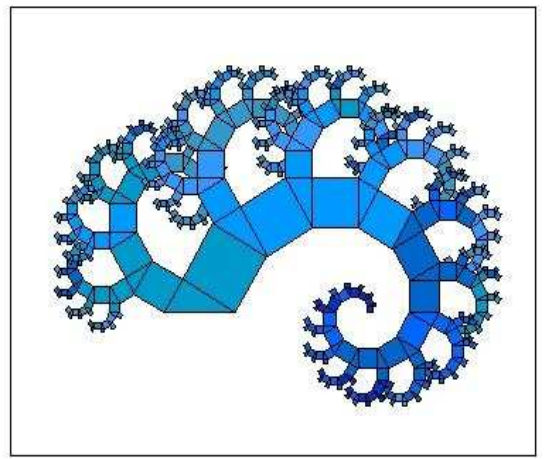
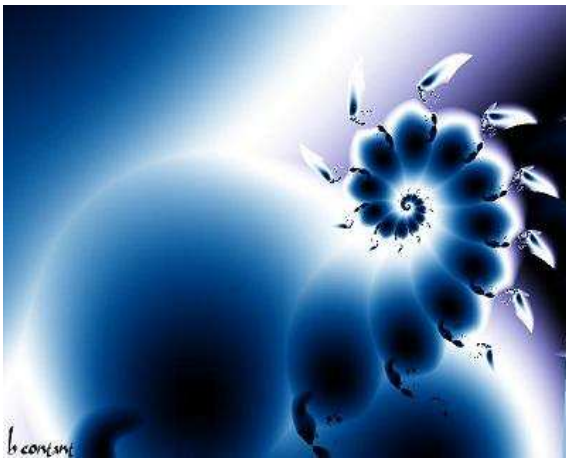
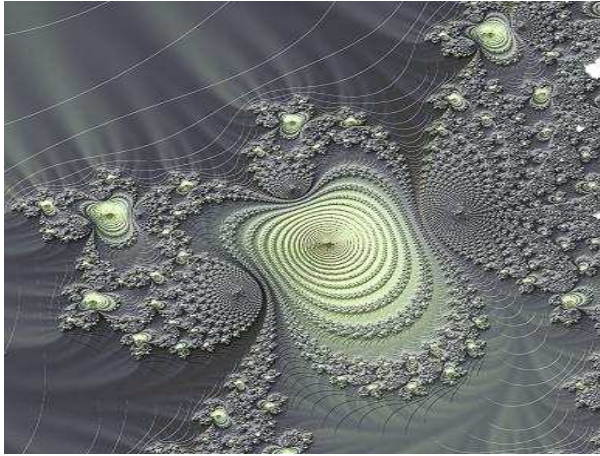
Figura 3.24: Zoom sobre el conjunto de Mandelbrot.

Los conjuntos de Mandelbrot y de Julia son los más paradigmáticos entre las estructuras fractales, ya que presentan sus características de auto semejanza e invarianza escalar.

Pequeñas variaciones de valores en sus ecuaciones producen conjuntos de apariencia totalmente distinta (sensibilidad a las condiciones iniciales). Las siguientes imágenes ilustran este hecho.







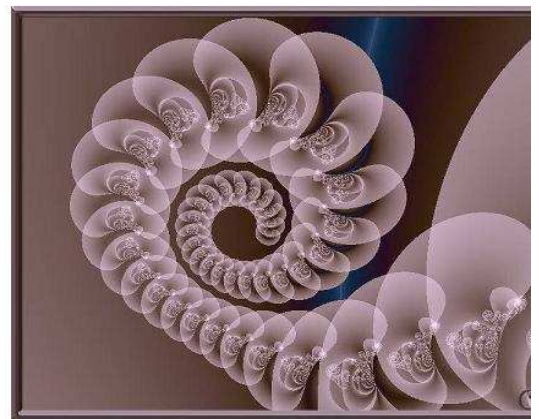
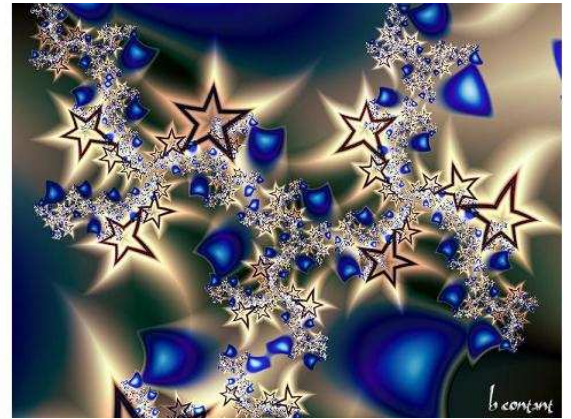
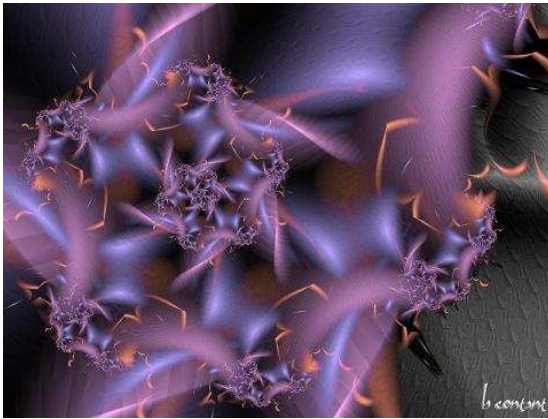
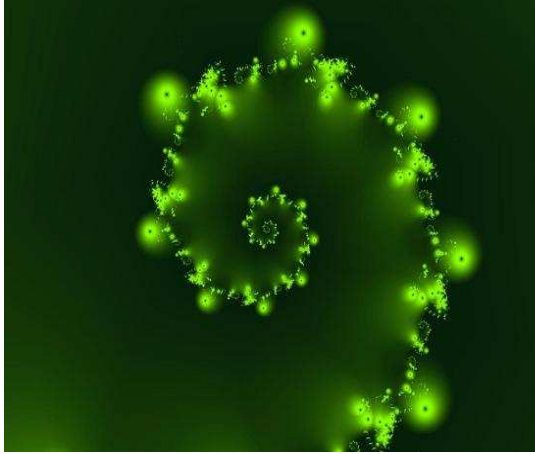


Figura 3.25: Variantes de los conjuntos de Julia y Mandelbrot.

## ¿QUÉ HACE QUE LAS IMÁGENES DE LOS FRACTALES SEAN TAN COLORIDAS Y EXTRAÑAS?

Las imágenes de los fractales obtienen sus formas y colores cuando le asignamos un rango determinado de colores a una serie de puntos, dependiendo de su comportamiento matemático mientras se resuelve la función, con la ayuda indispensable de un ordenador (la computadora). En efecto, esa es la única manera de captarlos visualmente. Existen varias posibilidades al momento de asignar los valores que determinarán los colores:

- ✓ Si el resultado se aproxima a cero (en cuyo caso, pertenece al conjunto).
- ✓ Si escapa al infinito (y por tal, no pertenece al conjunto).
- ✓ Si oscila entre varios estados.
- ✓ Si no exhibe ningún patrón discernible.

El primer caso ocurre dentro de los límites que comprenden la figura fractal; el segundo, fuera de sus límites; y los tercero y cuarto ocurren en la frontera. Si no fuera por esa asignación artificial de colores, los fractales lucirían como cualquier otra gráfica poco atractiva.

# Capítulo 4

## Construyendo Fractales

### 4.1. El juego de la “Semilla-Producción”

En esta sección trabajaremos un juego conocido como “**Semilla-Producción**” que nos servirá como base para generar fractales. Se mostrarán y explicarán ejemplos, luego se propondrán algunos ejercicios al alumno para que adquiera cierta destreza a la hora de manipular figuras en el plano y consolide conceptos importantes tales como sucesión, efectos geométricos y compacidad.

El juego consiste en tomar una figura inicial que llamaremos “**semilla**”, luego definiremos de manera muy informal un conjunto de funciones que aplicaremos a esta semilla, cada función se aplica a la semilla, obteniendo una nueva figura por cada función; la primera producción es la unión de todas esas “**figuras**”. Teniendo esta primera producción aplicaremos nuevamente las funciones que tenemos, obteniendo un segundo resultado o segunda producción, así repetiremos el proceso de aplicar las funciones a cada nueva figura obtenida en el paso anterior, tendremos entonces una sucesión de producciones, que llamaremos “**producción**”, valga la redundancia.

**Ejemplo 4.1** *Tomemos como semilla un segmento de recta, y apliquemos las siguientes funciones definidas así:*

- i. Reducir a la tercera parte.*
- ii. Reducir a la tercera parte y desplazar dos tercios a la derecha.*

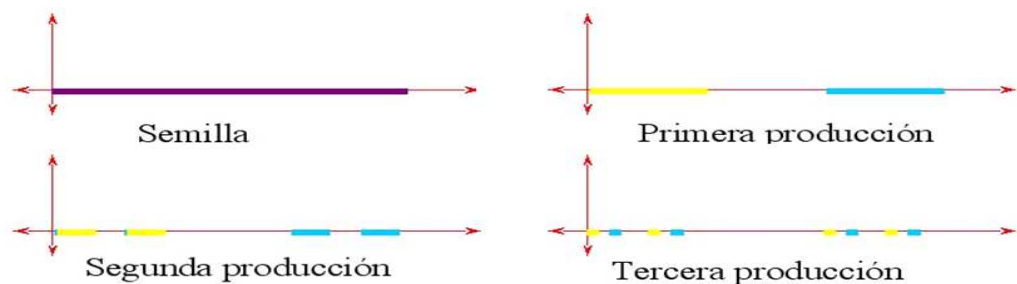


Figura 4.1: Semilla-Producción 1.

En este ejemplo nuestra “Semilla” es un segmento de recta, la “Producción” se empieza a generar cuando quitamos el segundo tercio de este segmento, repetimos la operación para los dos tercios restantes y así sucesivamente para cada paso.

**Ejemplo 4.2** Tomemos como semilla un cuadrado junto con su interior, y apliquemos las siguientes funciones:

- i. Reducir a la mitad.
- ii. Reducir a la mitad y desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia la derecha.
- iii. Reducir a la mitad, desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia la derecha y desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia arriba.

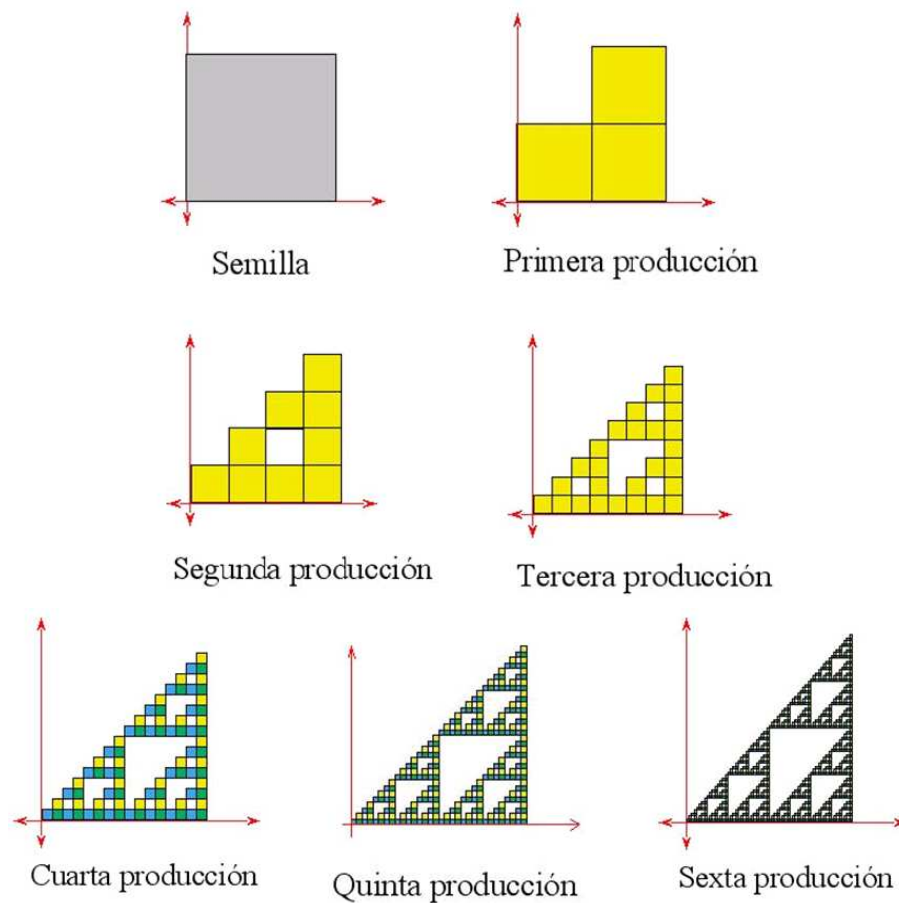


Figura 4.2: Semilla-Producción 2.

**Ejemplo 4.3** Tomemos como semilla un segmento de recta, y apliquemos las siguientes funciones:

- i. Reducir a la tercera parte.
- ii. Reducir a la tercera parte, rotar  $60^\circ$  y desplazar  $\frac{1}{3}$  a la derecha.

iii. Reducir a la tercera parte, rotar  $-60^\circ$ , desplazar  $\frac{1}{2}$  a la derecha y desplazar hacia arriba  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

iv. Reducir a la tercera parte y desplazar  $\frac{2}{3}$  a la derecha.

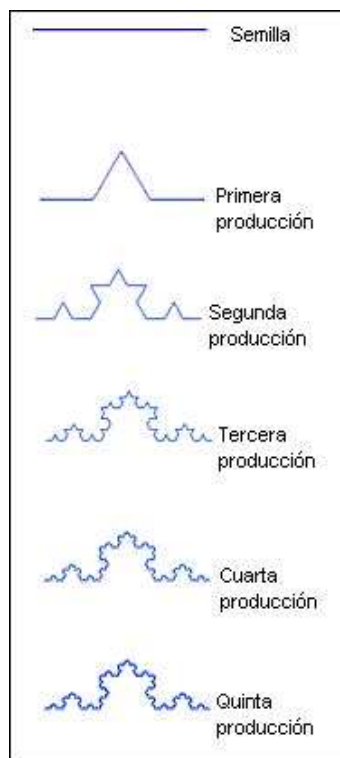


Figura 4.3: Semilla-Producción 3.

Una pregunta interesante para debatir es determinar si las sucesiones anteriores obtenidas mediante el juego son convergentes o no; en el caso de ser convergentes, ¿Cuál es su límite?.

**Ejercicio 4.1** Tomar como semilla un triángulo equilátero junto con su interior, y aplicar las siguientes funciones:

i. Reducir a la mitad.

ii. Reducir a la mitad y desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia la derecha.

iii. Reducir a la mitad, desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia la derecha y desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia arriba.

Realice mínimo 5 producciones y deduzca cuál es el límite.

**Ejercicio 4.2** Tomar como semilla un cuadrado junto con su interior, y aplicar las siguientes funciones:

i. Reducir a la tercera parte.

ii. Reducir a la tercera parte y desplazar  $\frac{2}{3}$  a la derecha.

Realice mínimo 5 producciones y deduzca cuál es el límite.

**Ejercicio 4.3** Tomar como semilla un círculo junto con su interior, y aplicar las siguientes funciones:

i. Reducir a la mitad.

ii. Reducir a la mitad y desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia la derecha.

iii. Reducir a la mitad, desplazar  $\frac{1}{4}$  hacia la derecha y desplazar  $\frac{1}{2}$  hacia arriba.

Realice mínimo 5 producciones y deduzca cuál es el límite.

## 4.2. Transformaciones Afines en el Plano

En la sección 1.2 del capítulo 1 hablamos sobre efectos geométricos en el plano tales como las rotaciones, traslaciones, reflexiones, reescalamientos y simetrías; en realidad estos efectos son funciones más conocidas como transformaciones afines, y son las mismas funciones que aplicamos en el juego de la “semilla-producción” de manera informal.

**Nota:** Para una mejor comprensión sobre la notación que usaremos se recomienda al estudiante que solicite la ayuda del profesor, de igual forma el profesor debe estar preparado con libros que contengan el tema de matrices cuadradas de orden  $2 \times 2$ . Pueden encontrar una buena ayuda en la siguiente página web: [www.aulademate.com/article-topic-12.html](http://www.aulademate.com/article-topic-12.html).

En esta sección definiremos la notación que usaremos para escribir dichas transformaciones, por medio de la denominada notación geométrica, la cual nos facilitará la escritura de las funciones de una forma más simbólica, esta escritura además tiene otro fin, el cual es formalizar matemáticamente las transformaciones afines y entender la notación de un software para general fractales que estudiaremos en el capítulo 6. Por lo tanto, de ahora en adelante, las transformaciones de traslación, rotación, y reescalamiento las notaremos de la siguiente forma:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & -s \sin \beta \\ r \sin \alpha & s \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

donde las constantes  $r, s, \alpha, \beta, e$  y  $f$  se interpretan así:

$r$  indica el cambio de escala sobre el eje  $X$ .

$s$  indica el cambio de escala sobre el eje  $Y$ .

$\alpha$  indica el ángulo de rotación sobre el eje  $X$ .

$\beta$  indica el ángulo de rotación sobre el eje  $Y$ .

$e$  indica el desplazamiento sobre el eje  $X$ .

$f$  indica el desplazamiento sobre el eje  $Y$ .

Ahora, una transformación afín es llamada **similitud** si tiene una de las siguientes formas:

$$i) w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$ii) w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & r \sin \alpha \\ r \sin \alpha & -r \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

La primera es llamada **Similitud Directa**. La segunda también es una similitud, más no es directa ya que trae como efecto adicional una reflexión.

En ambos casos,  $r$  lo llamaremos el **factor de escala** de la similitud.

Nótese que con respecto a la notación general de las transformaciones afines se tomó  $r = s$ , lo cual indica que el factor de escala será el mismo sobre el eje  $X$  e  $Y$ ; y se tomó también  $\alpha = \beta$ , que indica que la figura gira de manera rígida.

Además si  $0 < r < 1$  las transformaciones afines se llamarán **contracciones**, ya que cualquier valor real entre 0 y 1 reduce cualquier longitud.

**Ejemplo 4.4** *Aplicar a la figura las siguientes transformaciones:*

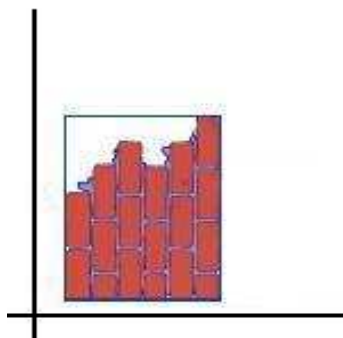


Figura 4.4: Figura inicial.

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En  $w_1$  tenemos que:

$$r = \frac{1}{2} = s$$

$$\theta = 0 = \beta$$

$$e = 0 = f$$

Por lo tanto, la transformación corresponde a una similitud directa y tiene como efecto geométrico un reescalamiento.

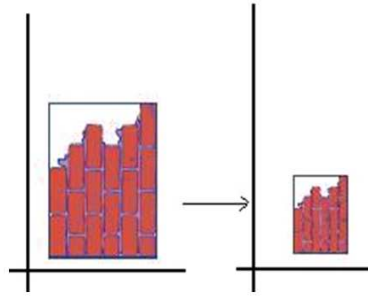


Figura 4.5: Reescalamiento.

En  $w_2$  tenemos que:

$$r = 1 = s$$

$$\theta = 90^\circ = \beta$$

$$e = 0 = f$$

Por lo tanto, la transformación corresponde a una similitud directa y tiene como efecto geométrico una rotación de  $90^\circ$ .

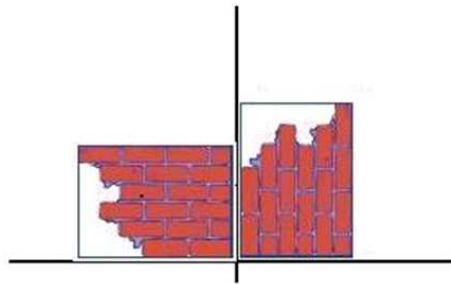


Figura 4.6: Rotación de  $90^\circ$ .

En  $w_3$  tenemos que:

$$r = 1$$

$$s = -1$$

$$\theta = 0 = \beta$$

$$e = 0 = f$$

Por lo tanto, la transformación corresponde a una similitud no directa y tiene como efecto geométrico una reflexión sobre el eje  $Y$ .

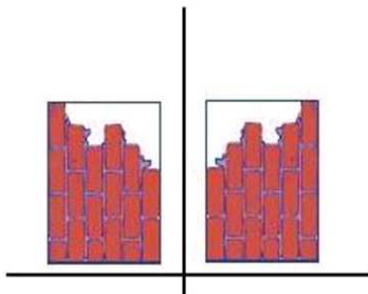


Figura 4.7: Reflexión.

En  $w_4$  tenemos que:

$$r = 1 = s$$

$$\theta = 0 = \beta$$

$$e = 1$$

$$f = 1$$

Por lo tanto, la transformación corresponde a una similitud directa y tiene como efecto geométrico un desplazamiento de una unidad tanto sobre el eje  $X$  como sobre el eje  $Y$ .

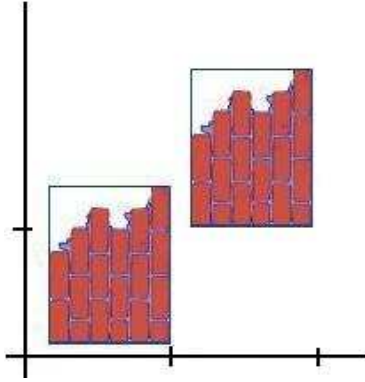


Figura 4.8: Desplazamiento.

**Ejercicio 4.4** Aplique las siguientes transformaciones al conjunto dado:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sen 45^\circ \\ \sen 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

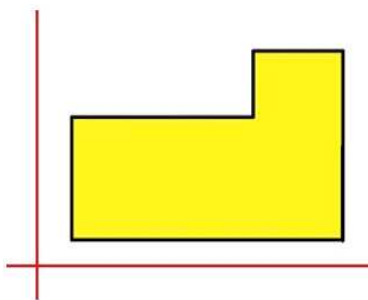


Figura 4.9: Aplicar transformaciones 1

**Ejercicio 4.5** Aplique las siguientes transformaciones al conjunto dado:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos 60^\circ & -\frac{1}{2} \sin 60^\circ \\ \frac{1}{2} \sin 60^\circ & \frac{1}{2} \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

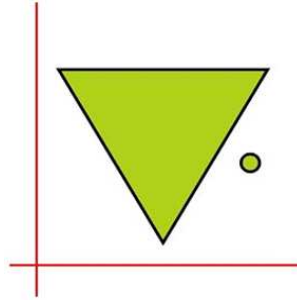


Figura 4.10: Aplicar transformaciones 2

**Ejercicio 4.6** Aplique las siguientes transformaciones al conjunto dado:

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(-45^\circ) & \frac{1}{2} \sin(-45^\circ) \\ \frac{1}{2} \sin(-45^\circ) & -\frac{1}{2} \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

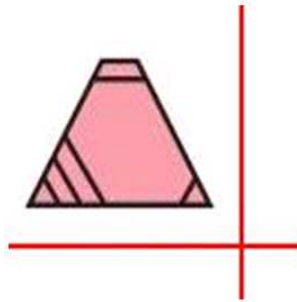


Figura 4.11: Aplicar transformaciones 3

### 4.3. Sistemas Iterados de Funciones (SIF)

Los sistemas iterados de funciones constituyen un método sencillo muy usado para construir fractales, basados en un conjunto finito de transformaciones afines en  $\mathbb{R}^2$  (contracciones) y una figura del plano  $A_0$  (conjunto compacto).

Llamaremos entonces **Sistema Iterado de Funciones** a la estructura:

$$\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, \dots, w_n \mid w_i \text{ es una } \mathbf{contracción} \text{ en } \mathbb{R}^2\}$$

Veamos ahora como funciona un SIF con los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 4.5** Dado  $A_0$  como un cuadrado de lado 1, aplicar el siguiente SIF:  $\{w_1, w_2, w_3\}$  donde  $w_1, w_2, w_3$  se definen así:

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Grafiquemos la siguiente secuencia de figuras:

★ Paso 0 =  $A_0$

$A_0$  es nuestra figura inicial, o por decirlo de otra manera, nuestra semilla

★ Paso 1 =  $A_1 = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_3(A_0)$

$w_1(A_0)$  es la figura que se obtiene al aplicar la transformación  $w_1$  a  $A_0$ ,  $w_2(A_0)$  es la figura que se obtiene al aplicar la transformación  $w_2$  a  $A_0$ ,  $w_3(A_0)$  es la figura que se obtiene al aplicar la transformación  $w_3$  a  $A_0$ . Ahora bien, ya que tenemos estas nuevas figuras después de aplicar cada transformación afín del SIF, se define  $A_1$  como la unión de estas nuevas figuras..

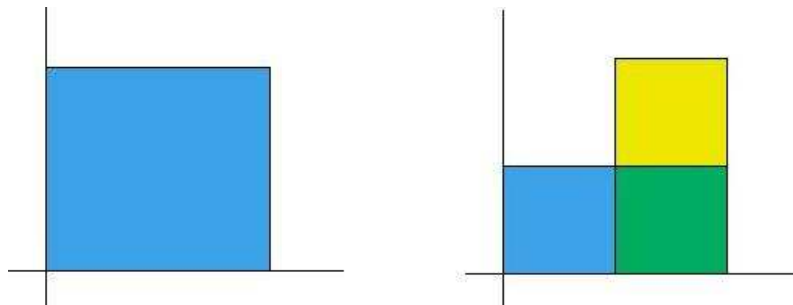
★ Paso 2 =  $A_2 = w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup w_3(A_1)$

Repetimos el procedimiento anterior, pero aplicando ahora las transformaciones afines del SIF a  $A_1$ , y definiendo  $A_2$  como la unión de  $w_1(A_1), w_2(A_1), w_3(A_1)$ .

★ Paso 3 =  $A_3 = w_1(A_2) \cup w_2(A_2) \cup w_3(A_2)$

Nuevamente realizamos los procedimientos de los paso 1 y 2, pero recordemos que debemos aplicar el SIF a  $A_2$ . Sucesivamente haremos este proceso para cada paso que deseemos obtener, teniendo en cuenta que cada paso nos genera una nueva figura, y que esa figura será la que utilizaremos para realizar el siguiente paso.

Tendremos entonces para nuestro ejemplo:



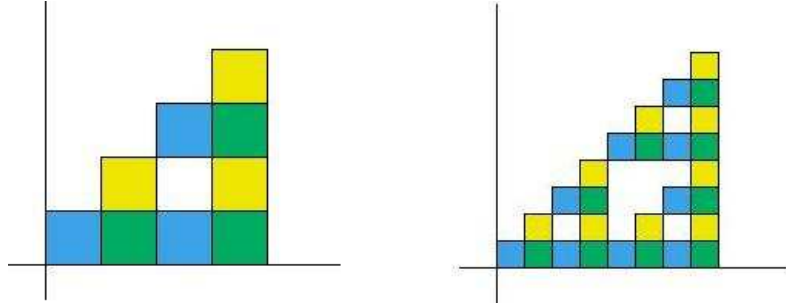


Figura 4.12: Aplicación de un SIF

Realice los pasos 4 y 5. ¿Qué fractal nos está generando el SIF anterior?

**Ejercicio 4.7** Dado  $A_0 = [0, 1]$  (segmento de recta de longitud 1), aplique el siguiente SIF  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  donde  $w_1, w_2, w_3, w_4$  están definidas así:

$$\begin{aligned}
 w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos 60^\circ & -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 60^\circ \\ \frac{1}{3} \operatorname{sen} 60^\circ & \frac{1}{3} \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos(-60^\circ) & -\frac{1}{3} \operatorname{sen}(-60^\circ) \\ \frac{1}{3} \operatorname{sen}(-60^\circ) & \frac{1}{3} \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \\
 w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Realice 4 pasos o más para que deduzca qué fractal nos está generando el SIF anterior.

Observando los ejemplos anteriores podemos escribir la **estructura general** de un proceso para la generación de fractales de la siguiente forma:

Sean  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  **contracciones**,  $A_0$  un **conjunto compacto** del plano; se construye luego la sucesión de figuras:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_3(A_0) \cup \dots \cup w_n(A_0) \\
 A_2 &= w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup w_3(A_1) \cup \dots \cup w_n(A_1) \\
 A_3 &= w_1(A_2) \cup w_2(A_2) \cup w_3(A_2) \cup \dots \cup w_n(A_2) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 A_n &= w_1(A_{n-1}) \cup w_2(A_{n-1}) \cup w_3(A_{n-1}) \cup \dots \cup w_n(A_{n-1})
 \end{aligned}$$

Esta sucesión de figuras converge a una figura límite, la cual llamaremos el **atractor del SIF** y que notaremos con la letra **A**.

La existencia del límite está garantizada, ya que las transformaciones afines que usamos son **contracciones** y estas usan un factor de escala entre 0 y 1, de no ser así, puede que el límite no exista. veamos un ejemplo:

**Ejemplo 4.6** Dado  $A_0$  como un cuadrado de lado 1, aplicar el siguiente SIF  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ , donde  $w_1, w_2, w_3, w_4$  se definen así:

$$\begin{aligned}
 w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

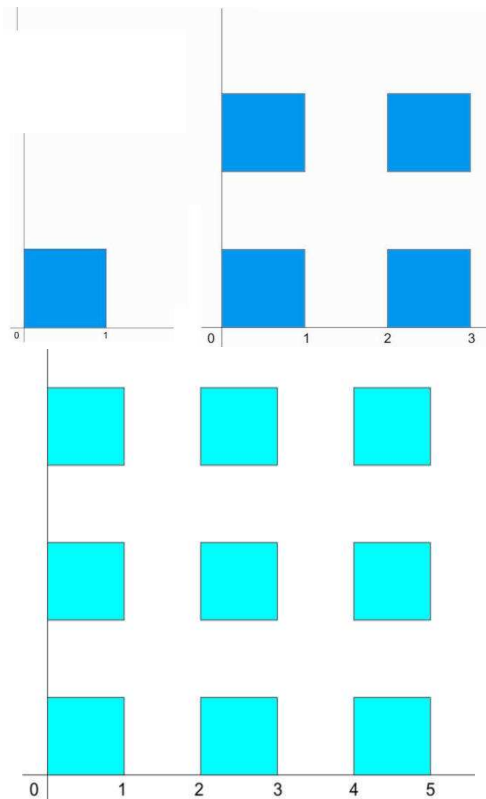


Figura 4.13: SIF no contractivo.

Así sucesivamente, podríamos realizar el proceso “infinitamente” y no obtendríamos ningún límite.

Notemos que la construcción de un fractal por este método se basa en tomar un conjunto compacto, aplicar un grupo de funciones repetidamente (iterativamente), y encontrar un límite al que llamamos **atractor** (conjunto fractal).

**Ejercicio 4.8** Encuentre el atractor del siguiente SIF  $\{A_0; w_1, w_2\}$ , donde  $A_0 = [0, 3]$  y  $w_1, w_2$  definidas así:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.9** Encuentre el atractor del siguiente SIF  $\{A_0; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ , donde  $A_0$  es un cuadrado de lado 3 y  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  definidas así:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.10** Encuentre el atractor del siguiente SIF  $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ , donde  $A_0$  es un cuadrado de lado 3 y  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$  definidas así:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.11** *Identifique y escriba el SIF que actúa sobre  $A_0$ , además encuentre el atractor correspondiente.*

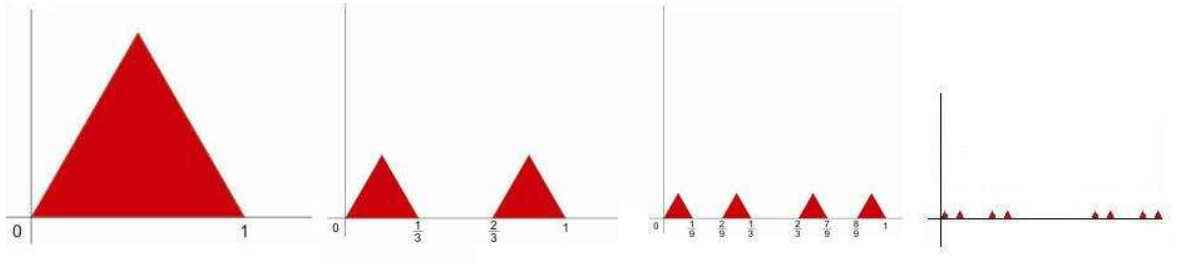


Figura 4.14: Identificar SIF 1

**Ejercicio 4.12** *Identifique y escriba el SIF que actúa sobre  $A_0$ , además encuentre el atractor correspondiente.*

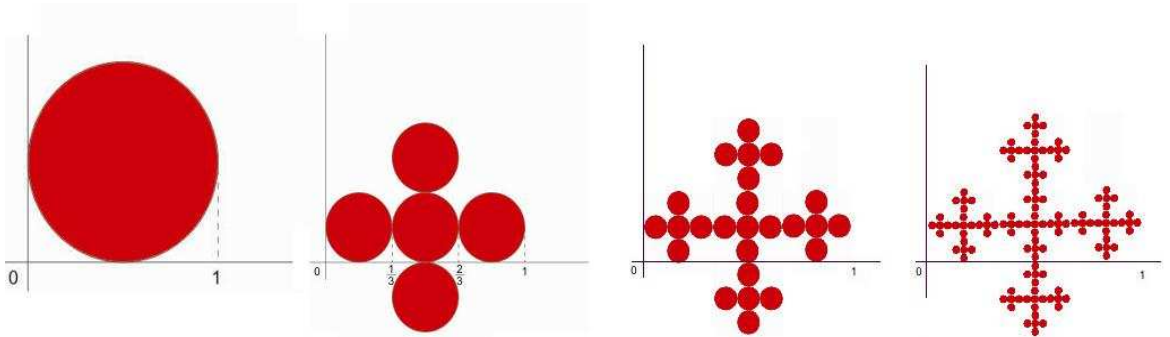


Figura 4.15: Identificar SIF 2

# Capítulo 5

## Sistemas Dinámicos

Los sistemas dinámicos constituyen otro método con el cual podemos generar fractales, pero debido a su complejidad al momento de hacer operaciones y graficar dichos fractales se necesita de la ayuda del computador y programas especializados para poder visualizarlos.

Por eso en este capítulo haremos una introducción a dicho método, para tener una noción de cómo se generan los fractales mostrados en la sección 3.3.

Cabe aclarar que no se pretende dar una explicación rigurosa, sino solo mostrar cuál es la motivación del origen de los conjuntos de **Julia** y **Mandelbrot**, aunque si es requisito necesario el manejo de las operaciones básicas con números complejos, por lo tanto el profesor y el estudiante deben estar preparados y de ser posible, realizar alguna actividad de refuerzo sobre este tema.

### 5.1. Construcción de un conjunto de Julia

Dado que el conjunto de los números complejos se puede representar en el plano, imaginaremos que una persona dará un “paseo” sobre dicho plano partiendo de un punto  $z$ , los pasos que dará serán determinados al componer la función compleja  $f(z) = z^2 + i$  consigo misma.

Tenemos:

Inicio del paseo:  $z$

Primer paso:  $f^{\circ 1}(z) = f(z)$

Segundo paso:  $f^{\circ 2}(z) = f \circ f(z) = f(f(z))$

Tercer paso:  $f^{\circ 3}(z) = f \circ f \circ f(z) = f(f(f(z)))$

.

.

.

Paso n-ésimo:  $f^{\circ n}(z) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}(z) = f(\dots f(z))$

Analizemos que pasaría si la persona sale a dar su paseo desde el punto  $z = 1$ .

Inicio del paseo:  $z = 1$

Primer paso:  $f^{\circ 1}(1) = f(1) = 1^2 + i = 1 + i$

Segundo paso:  $f^{\circ 2}(1) = f(1 + i) = (1 + i)^2 + i = 3i$

Tercer paso:  $f^{\circ 3}(1) = f(3i) = (3i)^2 + i = i - 9$

Cuarto paso:  $f^{\circ 4}(1) = f(i - 9) = (i - 9)^2 + i = 80 - 17i$

Dibujemos estos puntos:

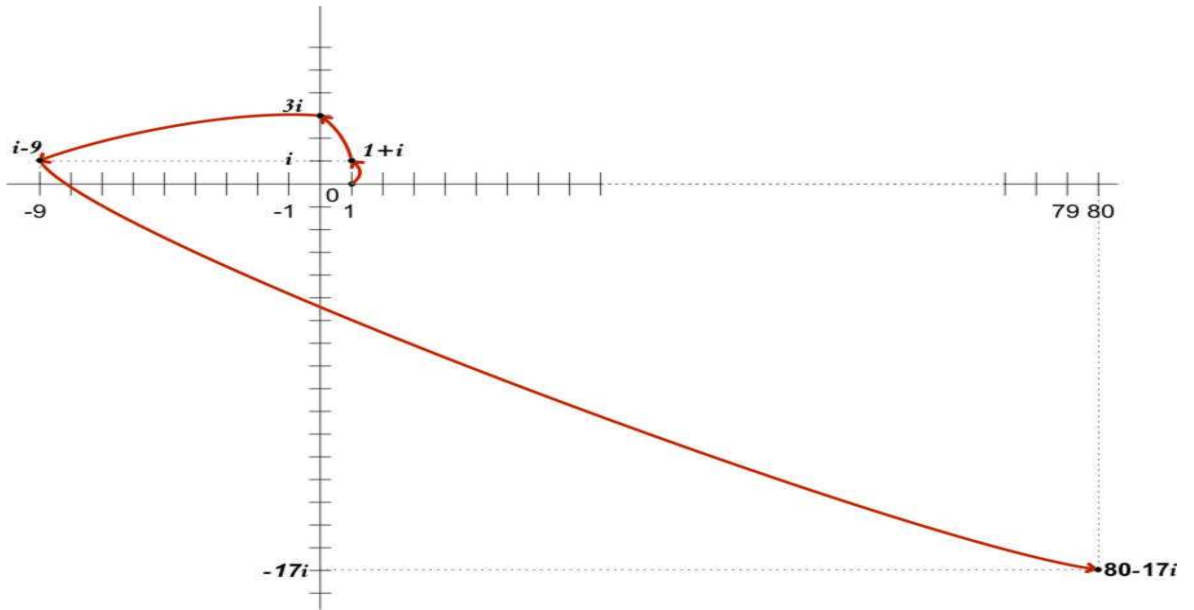


Figura 5.1: Paseo desde  $z = 1$ .

Como vemos, este paseo lleva a que la persona se aleje cada vez más y más de su punto de partida.

Veamos que pasa si la persona sale a pasear desde el punto  $z = i$ .

Inicio del paseo:  $z = i$

Primer paso:  $f^{\circ 1}(i) = f(i) = i^2 + i = i - 1$

Segundo paso:  $f^{\circ 2}(i) = f(i - 1) = (i - 1)^2 + i = -i$

Tercer paso:  $f^{\circ 3}(i) = f(-i) = (-i)^2 + i = i - 1$

Cuarto paso:  $f^{\circ 4}(i) = f(i - 1) = (i - 1)^2 + i = -i$

Podemos observar entonces que para los pasos pares la persona se situará en el punto  $-i$ , y para los pasos impares la persona se situará en el punto  $i - 1$ . Observemos la gráfica.

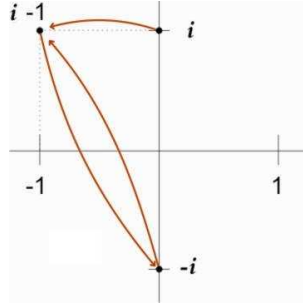


Figura 5.2: Paseo desde  $z = i$ .

La sucesión  $i, f^{o1}(i), f^{o2}(1), f^{o3}(i) \dots$ , la llamaremos **órbita** de  $i$ , la órbita del punto  $z = i$  es acotada (recordemos la definición de conjunto acotado en la sección 2.3) puesto que los puntos de la sucesión los podemos cubrir totalmente con una bola, mientras que en el caso anterior, cuando la persona partía del punto  $z = 1$ , la sucesión de pasos que se generaba no era acotada.

Tendremos especial interés en los puntos que tienen órbita acotada.

Tomemos otros puntos más de partida y analicemos si su órbita es acotada o no.

Inicio del paseo:  $z = -i$

$$\text{Primer paso: } f^{o1}(-i) = f(-i) = (-i)^2 + i = i - 1$$

$$\text{Segundo paso: } f^{o2}(-i) = f(i - 1) = (i - 1)^2 + i = -i$$

$$\text{Tercer paso: } f^{o3}(-i) = f(-i) = (-i)^2 + i = i - 1$$

$$\text{Cuarto paso: } f^{o4}(-i) = f(i - 1) = (i - 1)^2 + i = -i$$

Para  $z = -i$  se vuelve a quedar oscilando entre los puntos  $i - 1$  y  $-i$ , por lo tanto la órbita de  $-i$  es acotada.

Inicio del paseo:  $z = -2 - i$

$$\text{Primer paso: } f^{o1}(-2 - i) = f(-2 - i) = (-2 - i)^2 + i = 3 + 5i$$

$$\text{Segundo paso: } f^{o2}(-2 - i) = f(3 + 5i) = (3 + 5i)^2 + i = 31i - 16$$

$$\text{Tercer paso: } f^{o3}(-2 - i) = f(31i - 16) = (31i - 16)^2 + i = -705 - 991i$$

Notamos que nos alejamos a pasos gigantes de  $-2 - i$ , por lo tanto la órbita de  $-2 - i$  no es acotada.

Inicio del paseo:  $z = -1$

$$\text{Primer paso: } f^{o1}(-1) = f(-1) = (-1)^2 + i = 1 + i$$

$$\text{Segundo paso: } f^{o2}(-1) = f(1 + i) = (1 + i)^2 + i = 3i$$

$$\text{Tercer paso: } f^{o3}(-1) = f(3i) = (3i)^2 + i = i - 9$$

$$\text{Cuarto paso: } f^{o4}(-1) = f(i - 9) = (i - 9)^2 + i = 80 - 17i$$

Nuevamente la persona se aleja del punto  $z = -1$ , y por ende la órbita de  $-1$  no es acotada.

Inicio del paseo:  $z = 1 - i$

Primer paso:  $f^{\circ 1}(1 - i) = f(1 - i) = (1 - i)^2 + i = -i$

Segundo paso:  $f^{\circ 2}(1 - i) = f(-i) = (-i)^2 + i = i - 1$

Tercer paso:  $f^{\circ 3}(1 - i) = f(1 - i) = (1 - i)^2 + i = -i$

Cuarto paso:  $f^{\circ 4}(1 - i) = f(-i) = (-i)^2 + i = i - 1$

Quedando el paseo de la persona oscilando entre  $i - 1$  y  $-i$ , luego la órbita del punto  $1 - i$  es acotada.

Hemos conseguido 3 puntos que tienen órbita acotada, y para obtenerlos se ha tenido que realizar una buena cantidad de operaciones.

Definiremos **conjunto de Julia** al conjunto de los complejos que tienen órbita acotada y lo notaremos con la letra **J**.

$$J =: \{z \in \mathbb{C} \mid \text{la órbita de } z \text{ es acotada}\}.$$

Dibujemos los puntos obtenidos anteriormente que pertenecen a **J**:

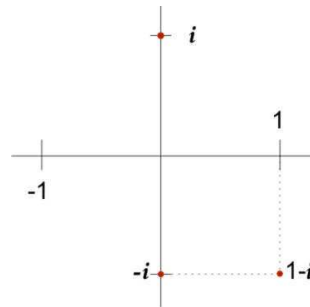


Figura 5.3: Puntos pertenecientes al conjunto **J**.

Hasta el momento tenemos un conjunto **J** de tres puntos y como vemos no tiene ninguna apariencia fractal, habría que examinar “muchos” puntos más; ¿cómo obtener por ejemplo 100.000 puntos de órbita acotada?. Sería totalmente tedioso por no decir que imposible de hacer esto “a mano”. Por lo tanto el uso del computador se hace indispensable para realizar esta gran cantidad de operaciones, con esta ayuda y la de un software especializado obtenemos una figura colorida y que despierta gran curiosidad.

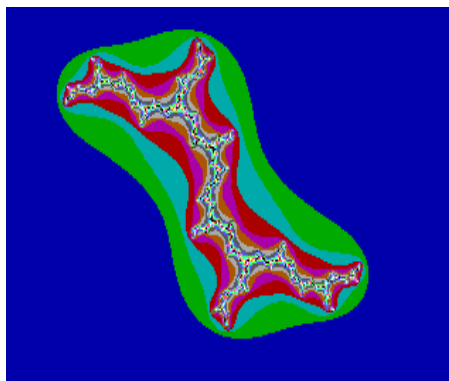


Figura 5.4: Conjunto **J** para  $f(z) = z^2 + i$ .

La gráfica anterior fue generada con el programa **Fractint** (disponible para descargar gratuitamente de la internet), aunque existen muchos programas, este es de los más sencillos, se puede encontrar un tutorial completo en la siguiente dirección web: <http://areafractal.tierradenomadas.com/ftint.html>

La función  $f(z) = z + i$  se puede cambiar por cualquier otra,  $f(z) = z^2 - i$  por ejemplo.

**Ejercicio 5.1** Encuentre algunos puntos pertenecientes a  $\mathbf{J}$  para la función  $f(z) = z^2 - i$

La figura correspondiente al conjunto  $\mathbf{J}$  es la siguiente:

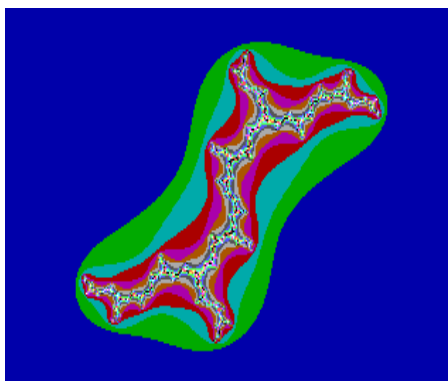


Figura 5.5: Conjunto  $\mathbf{J}$  para  $f(z) = z^2 - i$ .

El parecido de las figuras con objetos naturales como la raíz de una planta, una grieta en el suelo o un rayo descendiendo sobre la tierra (ver ejemplo 3.16) nos hace recordar la propiedad de autosemejanza, característica de los fractales.

## 5.2. Construcción del conjunto de Mandelbrot

Ahora imaginemos que otra persona descubre una forma distinta de “pasear” por el plano mediante funciones de la forma  $f_c(z) = z^2 + c$ , para cada  $c \in \mathbb{C}$ ; la persona siempre saldrá a pasear desde el punto  $z = 0$ , lo cual significa que analizaremos la órbita del cero para cada función  $f_c$ .

Se define el **conjunto de Mandelbrot** como sigue:

$$M =: \{c \in \mathbb{C} \mid \text{la órbita de } 0 \text{ para } f_c \text{ es acotada}\}$$

Cosideremos algunos valore para  $c$ :

tomando  $c = 1$  tenemos:

$f_1(z) = z^2 + 1$ ; analizemos la órbita del cero:

Inicio del paseo:  $z = 0$

Primer paso:  $f_1^{o1}(0) = 0^2 + 1 = 1$

Segundo paso:  $f_1^{\circ 2}(0) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$

Tercer paso:  $f_1^{\circ 3}(0) = f(2) = 2^2 + 1 = 5$

Cuarto paso:  $f_1^{\circ 4}(0) = f(5) = 5^2 + 1 = 26$

Grafiquemos este paseo

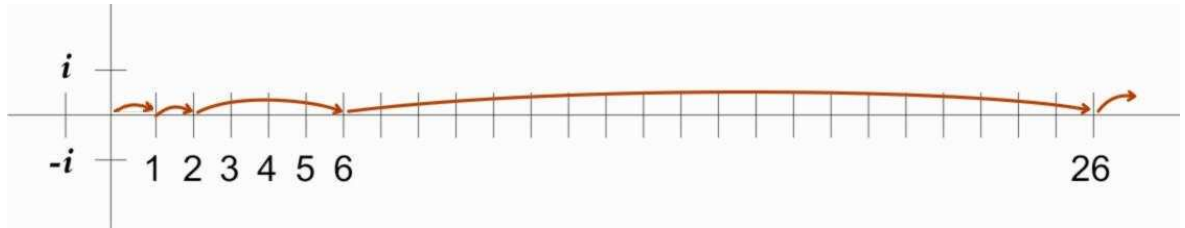


Figura 5.6: Paseo según  $f_1(z)$ .

Observamos que la persona se escapa velozmente hacia el infinito, lo que significa que la órbita de 0 no es acotada, por lo tanto  $1 \notin \mathbf{M}$ .

Tomando  $c = i$  tenemos:

$f_i(z) = z^2 + i$ , analizemos la órbita del cero:

Inicio del paseo:  $z = 0$

Primer paso:  $f_i^{\circ 1}(0) = 0^2 + i = i$

Segundo paso:  $f_i^{\circ 2}(0) = f(i) = i^2 + i = i - 1$

Tercer paso:  $f_i^{\circ 3}(0) = f(i - 1) = (i - 1)^2 + i = -i$

Cuarto paso:  $f_i^{\circ 4}(0) = f(-i) = (-i)^2 + i = i - 1$

Graficando tenemos:

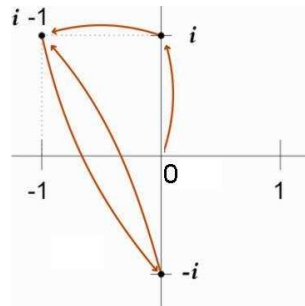


Figura 5.7: Paseo según  $f_i(z)$ .

luego la órbita de 0 es acotada, entonces  $i \in \mathbf{M}$ .

Tomando  $c = -2i$  tenemos:

$f_{-2i}(z) = z^2 - 2i$ , analizemos la órbita del cero:

Inicio del paseo:  $z = 0$

Primer paso:  $f_{-2i}^{\circ 1}(0) = 0^2 - 2i = -2i$

Segundo paso:  $f_{-2i}^{\circ 2}(0) = f(-2i) = (-2i)^2 - 2i = -4 - 2i$

Tercer paso:  $f_{-2i}^{\circ 3}(0) = f(-4 - 2i) = (-4 - 2i)^2 - 2i = 12 + 14i$

Cuarto paso:  $f_{-2i}^{\circ 4}(0) = f(12 + 14i) = (12 + 14i)^2 - 2i = -52 + 334i$

Otra vez, la persona se extravía hacia el infinito, por lo que la órbita de 0 no es acotada, luego  $-2i \notin \mathbf{M}$ .

Nos encontramos envueltos nuevamente en una gran cantidad de operaciones por realizar para obtener puntos pertenecientes a  $\mathbf{M}$ . Entonces, como ocurrió con los conjuntos de Julia, recurriremos nuevamente a la ayuda del computador y del programa **Fractint** obteniendo la siguiente figura:

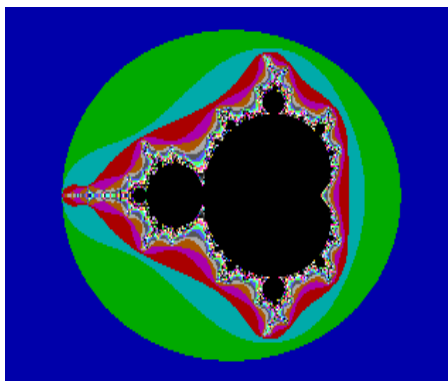


Figura 5.8: Conjunto de Mandelbrot.

Notemos la autosimilitud del conjunto de Mandelbrot, el cual está formado en sí por un gran bulbo, si inspeccionamos más de cerca sus alrededores encontramos otros bulbos más pequeños que son semejantes al principal. La región de color negro corresponde a los puntos  $c$  tales que la órbita de 0, bajo  $f_c$ , es acotada.

La mayoría de los conjuntos de Julia y Mandelbrot suelen aparecer coloreados según la velocidad con que cada punto se escapa al infinito, tal y como lo hemos comentado al final del capítulo 3.

El objetivo de este capítulo es servir de introducción al mundo de los conjuntos fractales obtenidos mediante sistemas dinámicos, que en general, son difíciles de visualizar sin la ayuda de un programa computacional. Por otra parte, este tipo de programas permiten e invitan tanto al alumno como al profesor, a seguir experimentando por el camino de los sistemas dinámicos.

## Capítulo 6

# Taller (Generando fractales con INTERFRAC)

A continuación presentaremos un software llamado INTERFRAC que nos permitirá generar fractales de manera rápida y sencilla, lo cual claramente constituye una gran ventaja con respecto al método manual que hemos trabajado en el capítulo 4. Además podremos realizar iteración por iteración o muchas a la vez, otorgar colores a cada función del SIF, y desde luego apreciar con más detalle la propiedad de autosemejanza.

El software fue creado por la profesora Nohora Nájera como soporte para el desarrollo de su proyecto de maestría en informática, y está hecho en lenguaje Visual Basic 5.0. Además la profesora participó en el Seminario Fractales de la Universidad Industrial de Santander durante los años 2003 y 2004.

Cabe destacar que el programa goza de buena presentación, es amigable y sencillo de manejar. Veamos como se generaría el triángulo de Sierpiński por medio de este programa.

Veamos entonces como se generaría el triángulo de Sierpiński por medio de INTERFRAC.

Un SIF para el generar el triángulo de Sierpiński es el siguiente:

$$\begin{aligned}w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

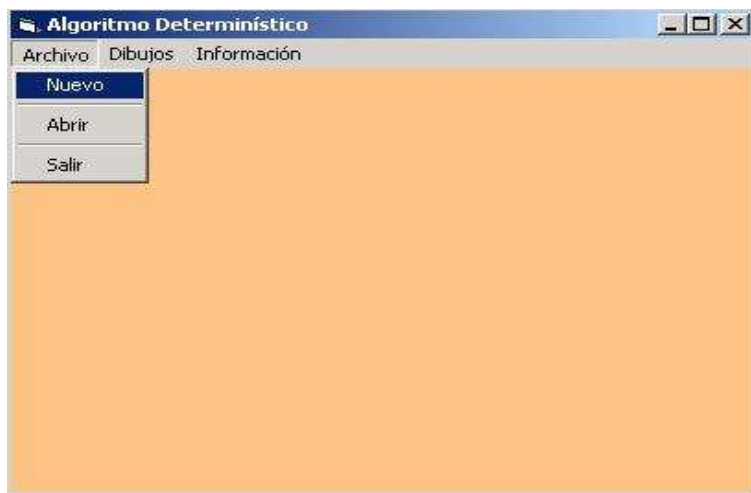
Al ejecutar el programa nos aparecerá la siguiente ventana de inicio:



Seleccionamos del menú **Métodos** la opción **SIF/Algoritmo Determinístico**.



Tendremos otra nueva ventana de la cual seleccionaremos el menú **Archivo/Nuevo**.



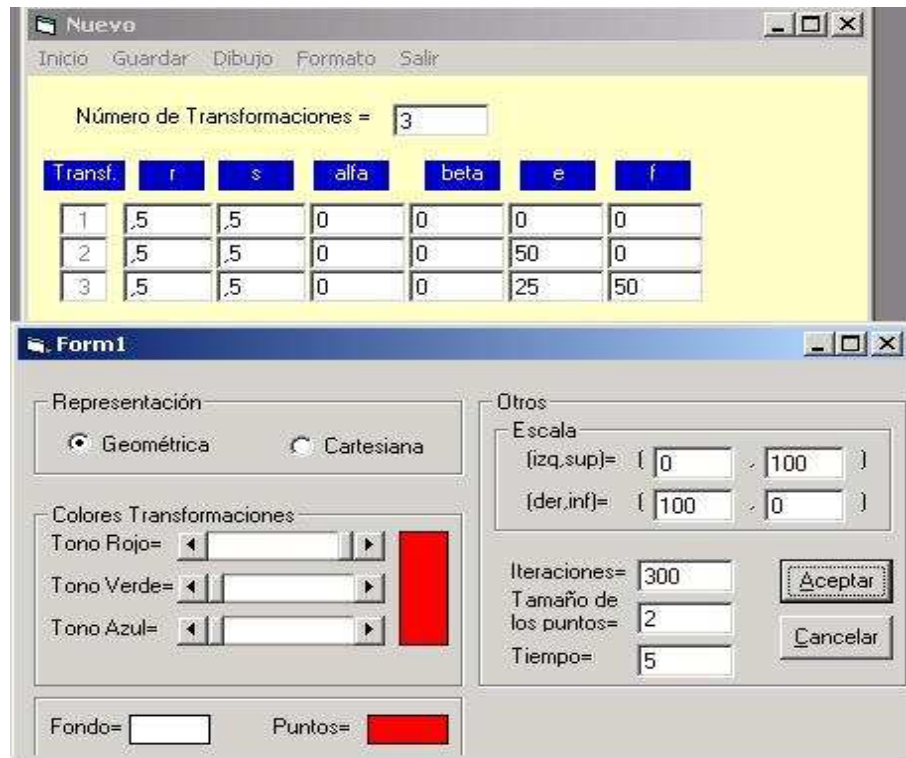
La nueva ventana nos solicitará ingresar la cantidad de transformaciones que vamos a iterar.



En este caso digitamos 3 y se nos habilitará una tabla solicitándonos los factores de escala **r**, **s** (los factores **r**, **s** deben escribirse como cantidades decimales tomando como separador decimal el símbolo coma (,) y se puede omitir el cero antes de la coma); los ángulos **alfa**, **beta** y los desplazamientos **e**, **f** (las cantidades **e**, **f** se deben multiplicar por 100).



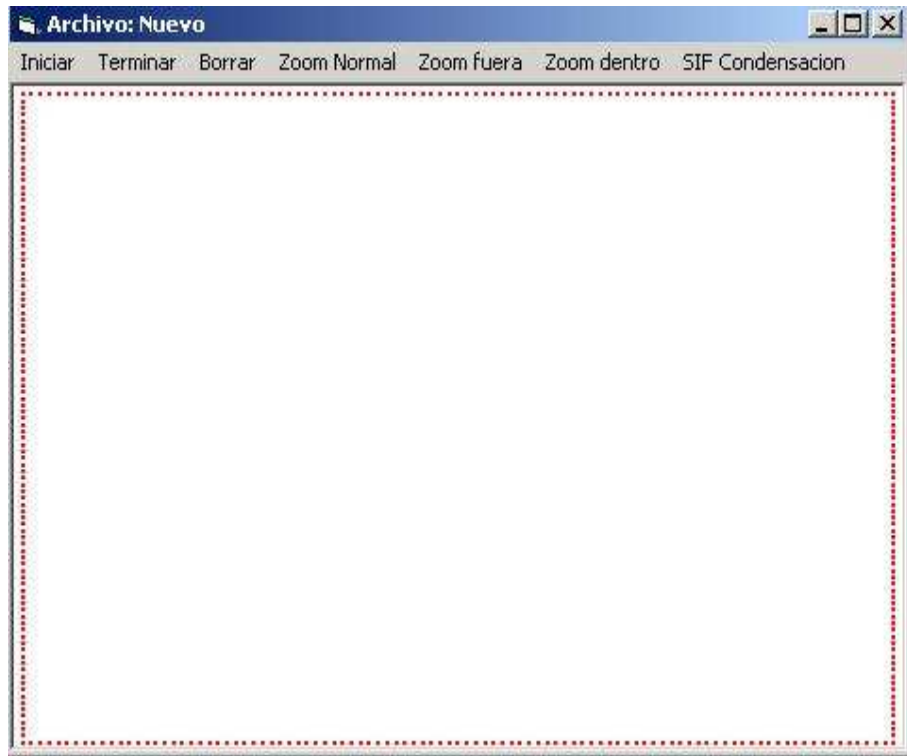
Usando la opción **Formato** podemos cambiar el color del fondo y de la figura que vamos a iterar desplazando las barras hasta obtener el color deseado, luego damos doble clic sobre el rectángulo en el que aparece el color ya definido y después un clic sobre el rectángulo de fondo o puntos. El grosor de la línea de la figura se puede cambiar en la opción **Tamaño de los puntos**.



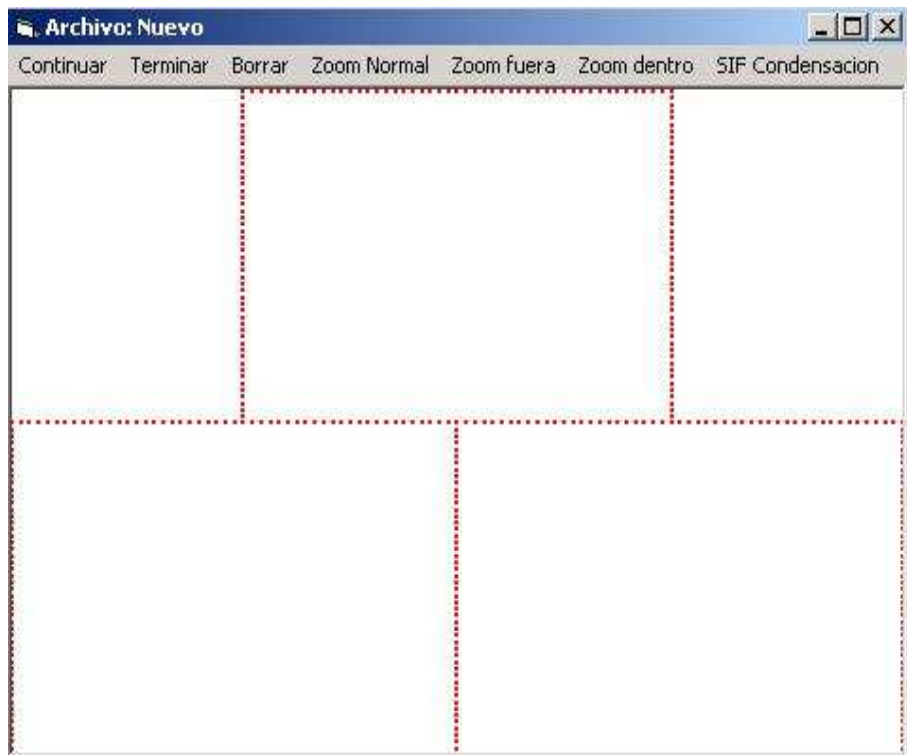
Hechos los cambios damos clic sobre **Aceptar** y sin cerrar la ventana de **Formato** seleccionamos la opción **Dibujo** y escogemos una de las figuras predeterminadas, **Cuadrado** para nuestro ejemplo.



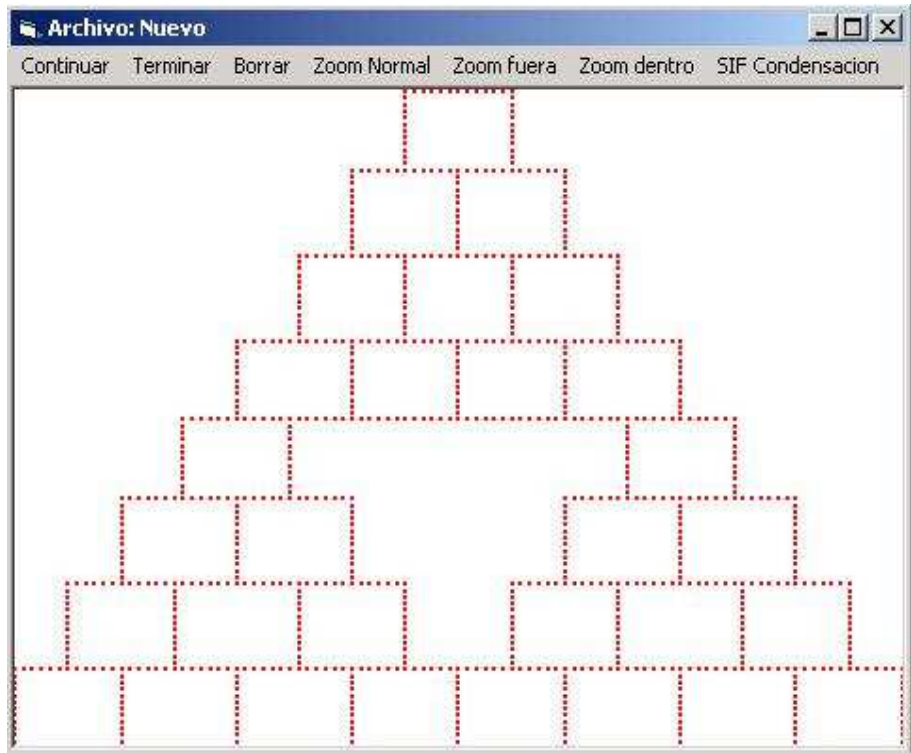
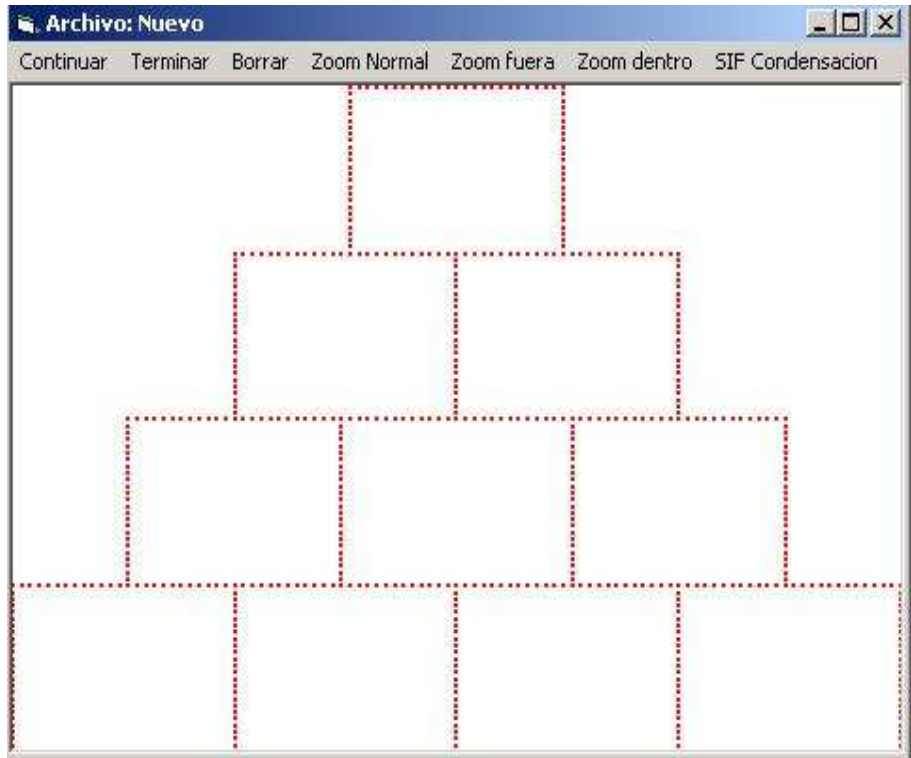
Obtenemos entonces una ventana con el dibujo de un cuadrado, el cual es nuestra semilla o figura inicial  $A_0$ .

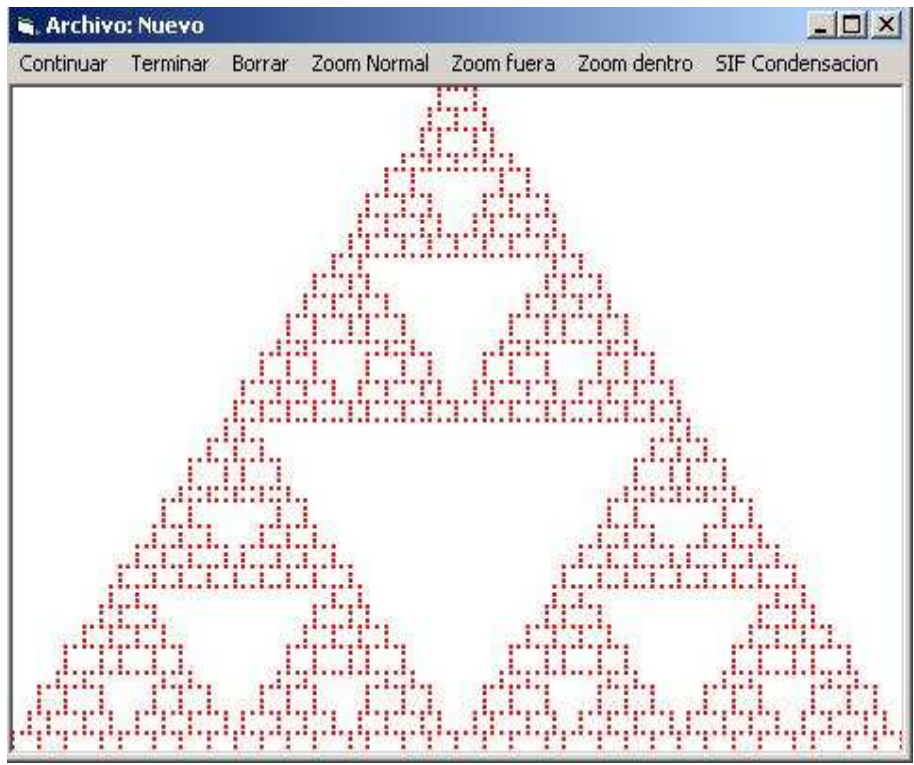
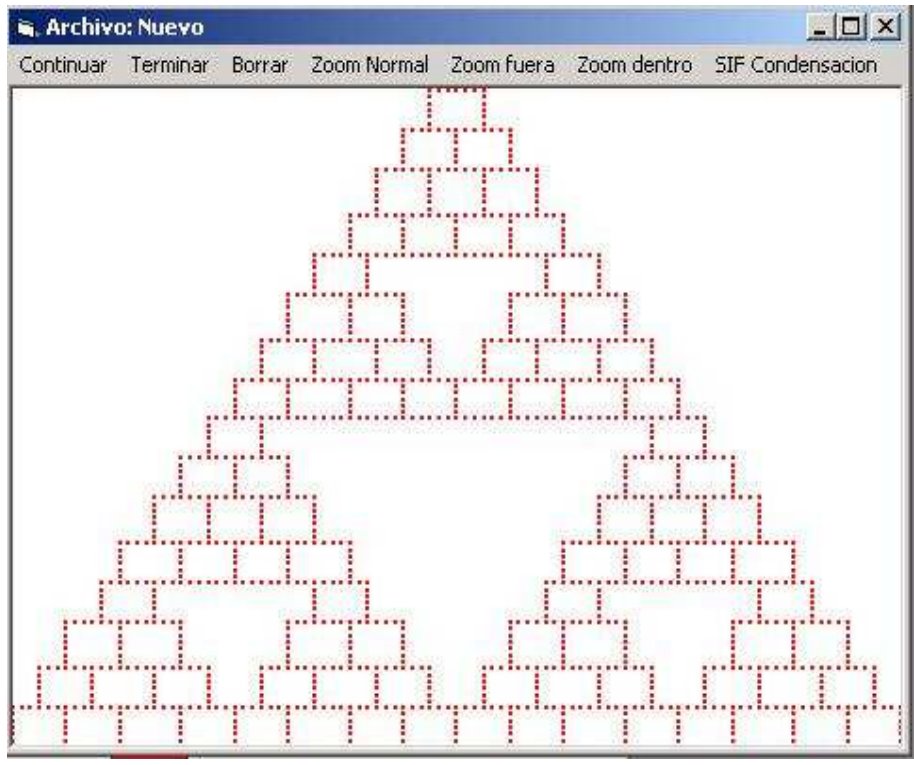


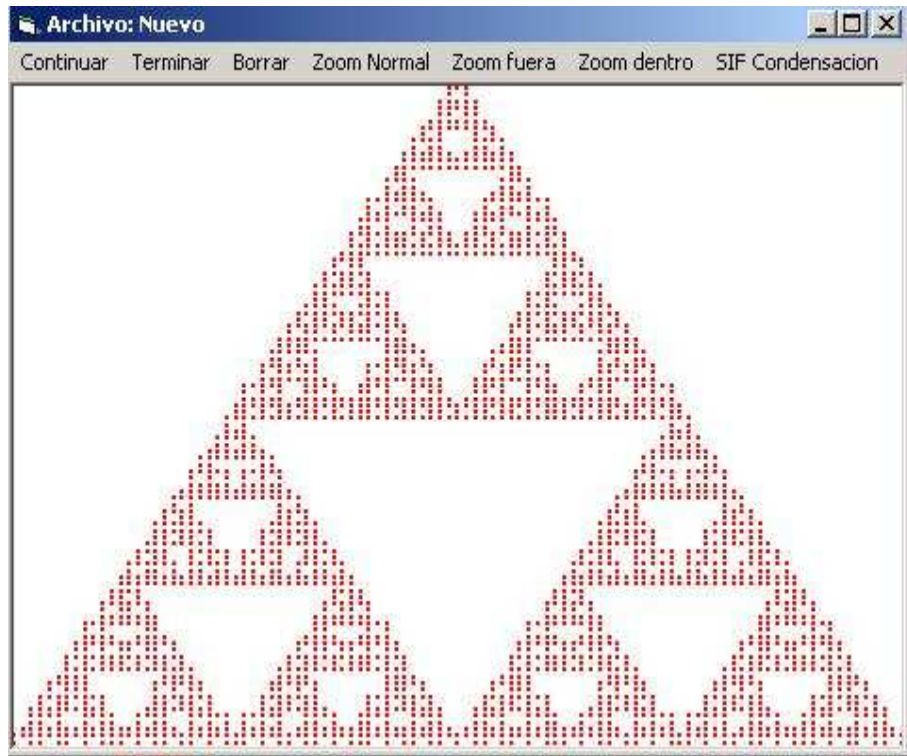
Seleccionamos la opción **Iniciar** para obtener la primera iteración, es decir  $A_1$ .



Para obtener las siguientes iteraciones  $A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$  seleccionamos **Continuar**.







Para reforzar el uso del software, es bueno que el estudiante realice el procedimiento con las otras figuras predeterminadas que se encuentran en el menú **Dibujo**, y además utilice e invente otros SIF. La opción de **Algoritmo Determinístico** permite al profesor y estudiante complementar las actividades de la sección 4.1 (*El Juego de la Semilla-Producción*) y las actividades de la sección 4.3 (*Sistemas Iterados de Funciones*).

Ahora utilizaremos la opción **Algoritmo de Iteración Randómica** con la cual podremos apreciar la propiedad de autosemejanza aún a pequeñas escalas.

Ejecutado ya el programa, desde la ventana de inicio, seleccionamos del menú **Métodos**, la opción **SIF/Algoritmo Iterac. Randómica**.



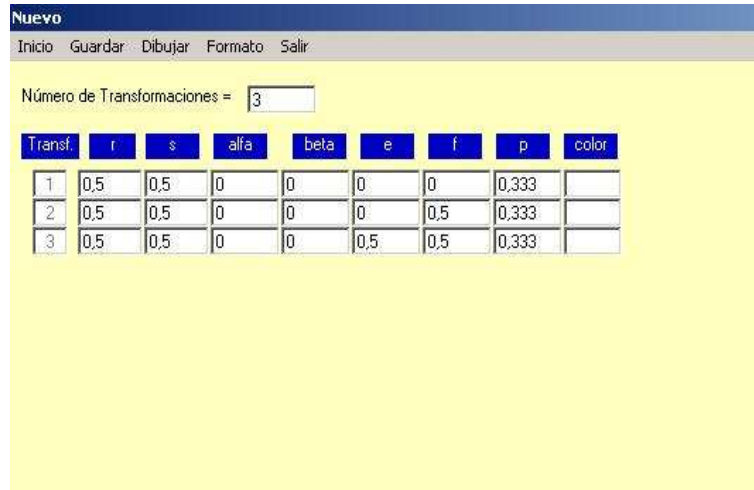
Desde la nueva ventana seleccionamos del menú **Archivo** la opción **Nuevo**.



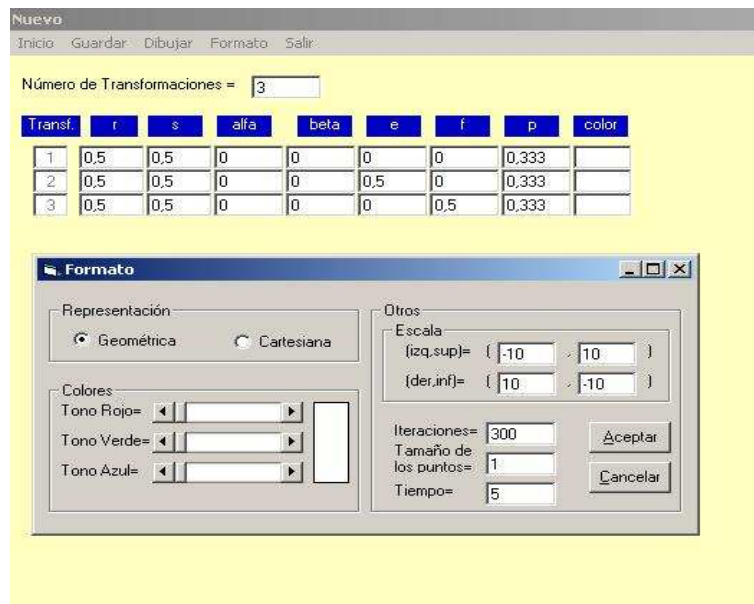
Digitamos el número de transformaciones y entramos los datos tal cual como en el método **Algoritmo Determinístico**, aunque en este caso podremos digitar los valores **e** y **f** sin necesidad de multiplicarlos por 100.

Notemos que aparecen dos nuevas columnas **p** y **color**, la **p** nos indica el porcentaje de puntos que se van a dibujar para cada función, la suma de todos los porcentajes no debe exceder el 100%, una manera fácil de calcular estos porcentajes es dividiendo el porcentaje total que es 1 sobre la cantidad de funciones del SIF:

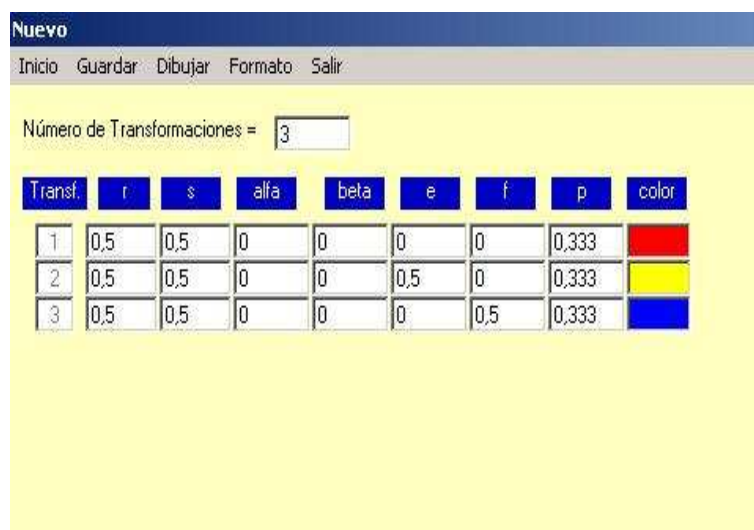
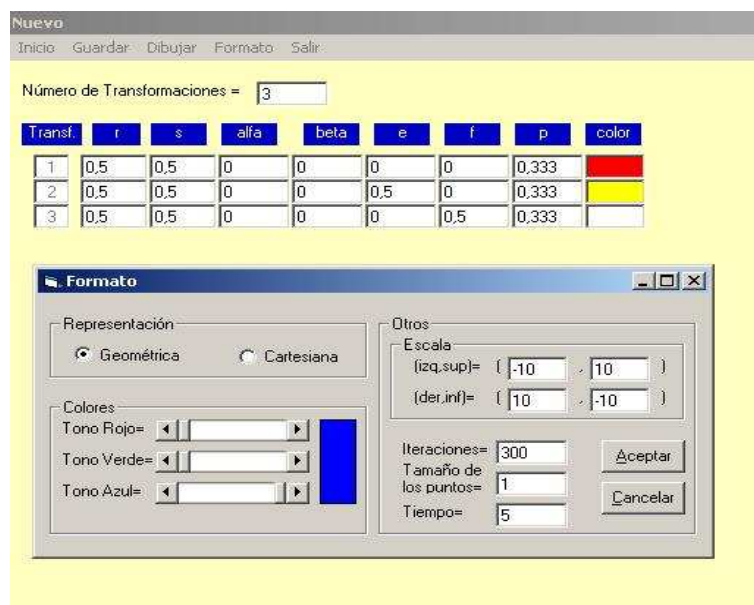
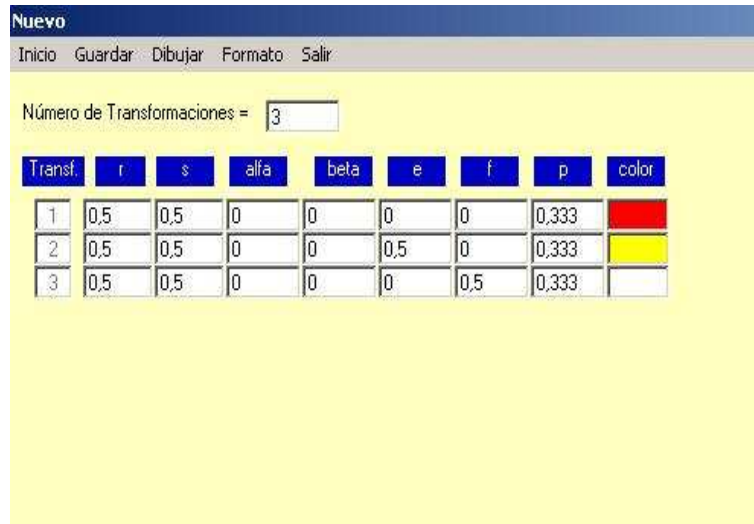
$$p = \frac{1}{\text{número de funciones}}$$



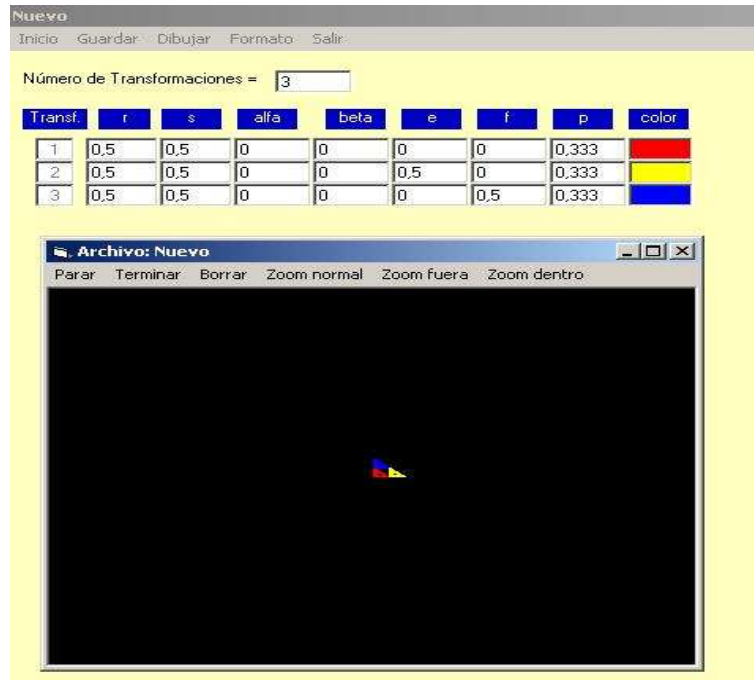
La columna **color** nos permite asociar un color a cada función, y se hace dando clic sobre cada casilla, desplazamos las barras hasta obtener el color deseado y luego doble clic sobre el rectángulo del color ya definido.



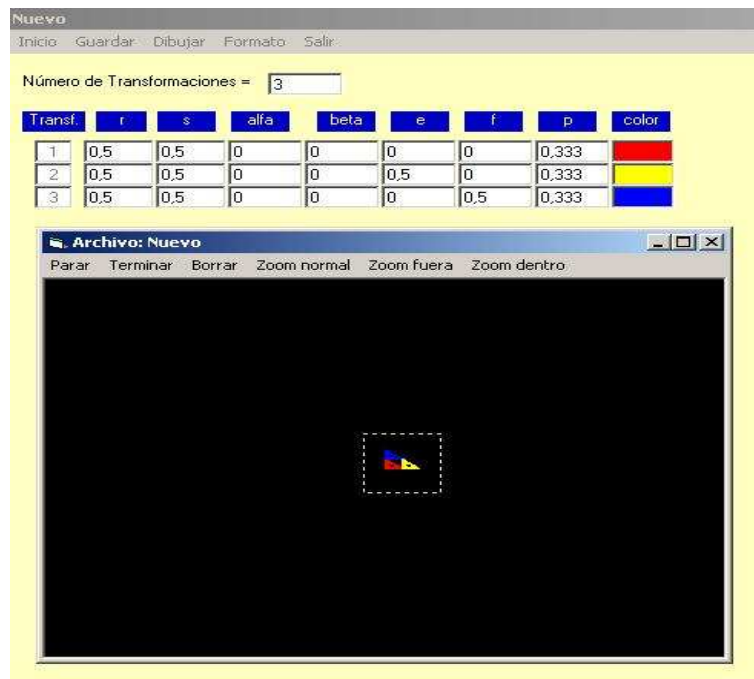


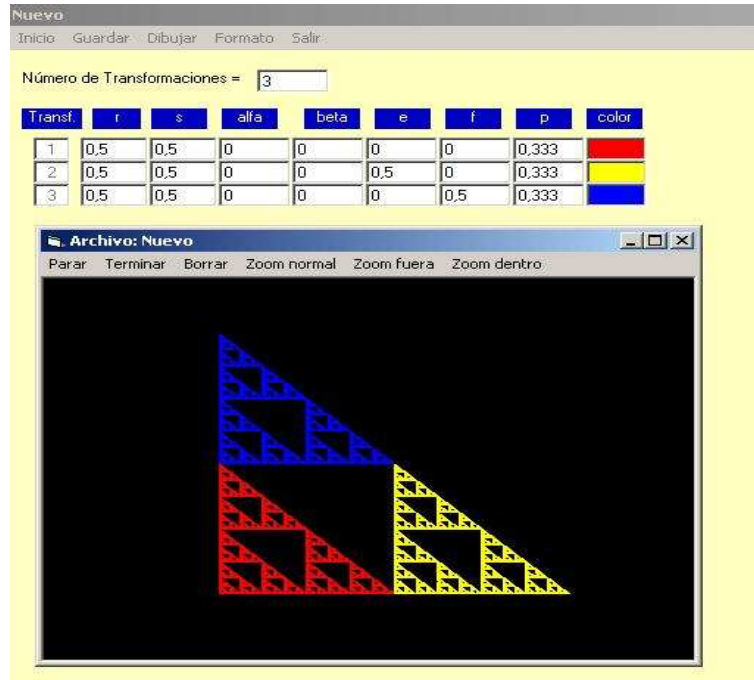


Completada la tabla, usamos la opción **Dibujar** y obtenemos el conjunto que genera el SIF.

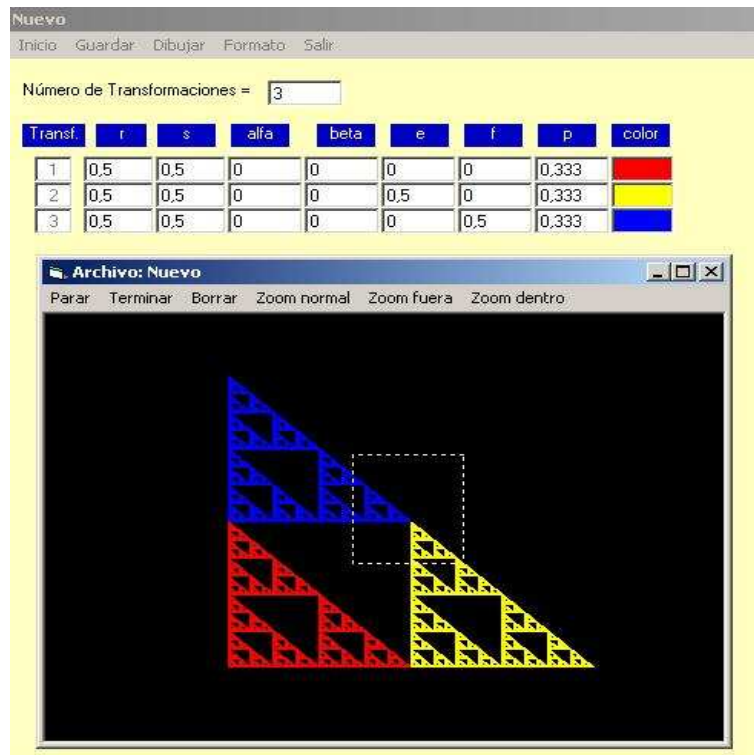


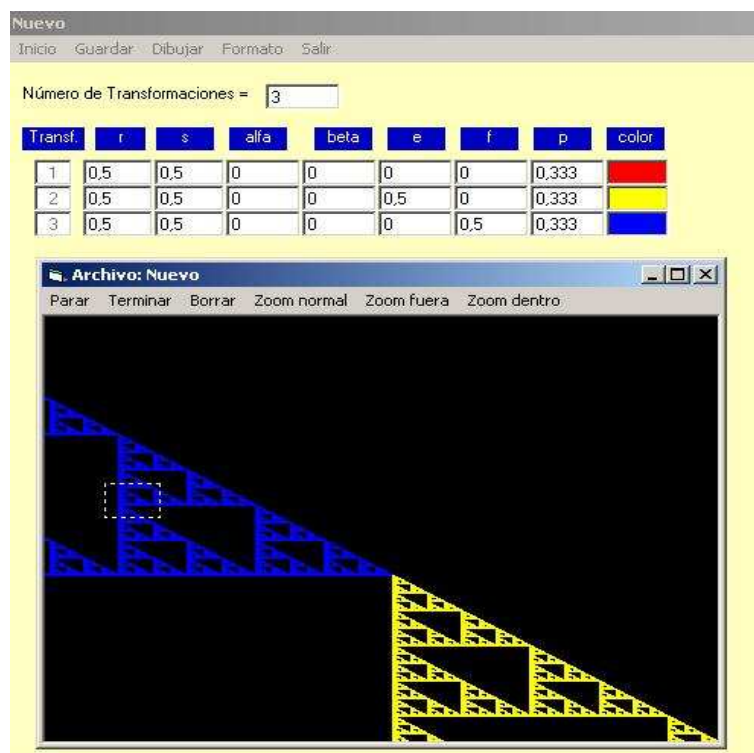
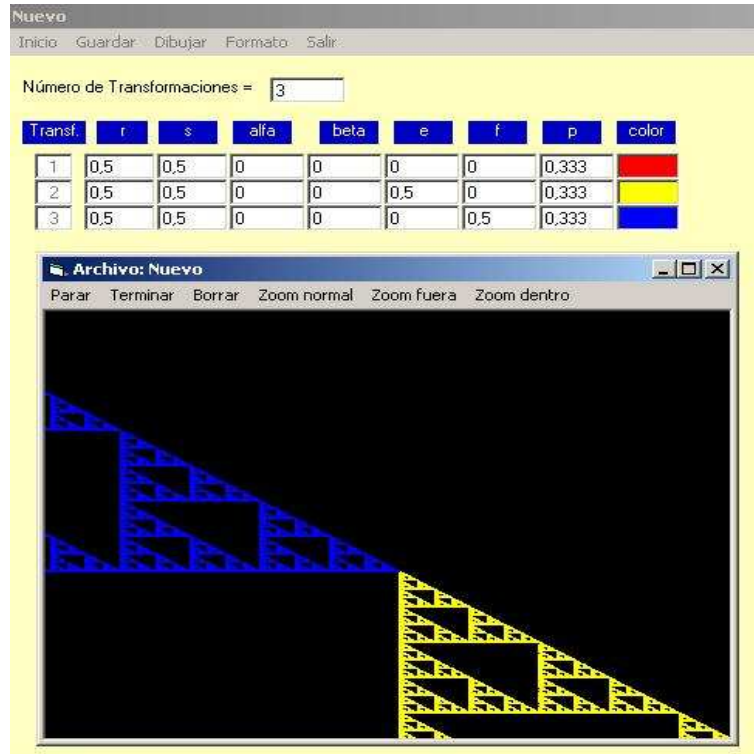
Para obtener una ampliación del conjunto, seleccionaremos la opción **Zoom dentro** y con clic izquierdo sostenido enmarcamos el conjunto, al dejar de sostener obtenemos la ampliación.

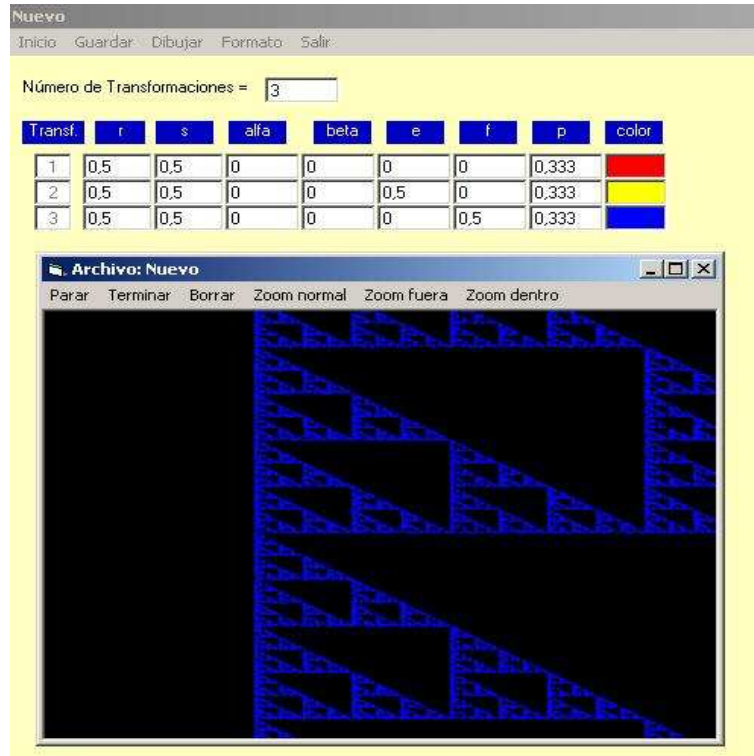




Con la herramienta **Zoom dentro** podremos apreciar la autosemejanza del conjunto al repetir el paso anterior sobre cualquier sector del conjunto.







En [3] se utilizan programas como **WINLOGO** y **FRACTLIN 1.2** para el desarrollo de algunas actividades. Aunque son muy buenos programas, el programa **FRACTINT** tiene algunas ventajas sobre estos.

- ✓ **FRACTINT** se ejecuta sobre el sistema operativo **WINDOWS**, mientras los otros lo hacen sobre **D.O.S**.
- ✓ **FRACTINT** permite el acceso a menús por medio del mouse, con los otros hay que utilizarlas flechas del teclado.
- ✓ **FRACTINT** tiene la opción de realizar una iteración a la vez y la opción de aplicar el SIF sobre diferentes figuras iniciales.
- ✓ Con **FRACTINT** se pueden realizar varios zoom sobre un conjunto fractal de manera mucho más rápida y sencilla.

**Ejercicio 6.1** Con la ayuda del programa *INTERFRAC* grafique los fractales que generan los siguientes SIF's, explore la autosemejanza con la herramienta **Zoom dentro** y diga cuáles se parecen a objetos de la naturaleza:

★ SIF 1:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,85 \cos(-1,7) & 0,85 \operatorname{sen}(-1,7) \\ 0,85 \operatorname{sen}(-1,7) & 0,85 \cos(-1,7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0,25 \cos(-51,6) & 0,3 \operatorname{sen}(-51,6) \\ -0,25 \operatorname{sen}(-51,6) & 0,3 \cos(-51,6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,2 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,25 \cos(51,6) & 0,3 \operatorname{sen}(51,6) \\ 0,25 \operatorname{sen}(51,6) & 0,3 \cos(51,6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

★ *SIF 2:*

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,65 \cos(1,1) & 0,65 \operatorname{sen}(1,1) \\ 0,65 \operatorname{sen}(1,1) & 0,65 \cos(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,18 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,65 \cos(2,3) & 0,65 \operatorname{sen}(2,3) \\ 0,65 \operatorname{sen}(2,3) & 0,65 \cos(2,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,33 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,45 \cos(45) & 0,45 \operatorname{sen}(45) \\ 0,45 \operatorname{sen}(45) & 0,45 \cos(45) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0,45 \cos(-45) & 0,45 \operatorname{sen}(-45) \\ -0,45 \operatorname{sen}(-45) & 0,45 \cos(-45) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

★ *SIF 3:*

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,6 \cos(40,3) & 0,5 \operatorname{sen}(40,1) \\ 0,6 \operatorname{sen}(40,3) & 0,5 \cos(40,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 \cos(19,9) & 0,45 \operatorname{sen}(19,7) \\ 0,5 \operatorname{sen}(19,9) & 0,45 \cos(19,7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,1 \end{pmatrix} \\
w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 \cos(-30,2) & 0,53 \operatorname{sen}(-31,9) \\ 0,5 \operatorname{sen}(-30,2) & 0,53 \cos(-31,9) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,55 \cos(-39,8) & 0,4 \operatorname{sen}(-40) \\ 0,55 \operatorname{sen}(-39,8) & 0,4 \cos(-40) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

★ *SIF 4:*

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,75 \cos(45) & 0,75 \operatorname{sen}(45) \\ 0,75 \operatorname{sen}(45) & 0,75 \cos(45) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 \cos(-90) & 0,5 \operatorname{sen}(-90) \\ 0,5 \operatorname{sen}(-90) & 0,5 \cos(-90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

★ *SIF* 5:

$$\begin{aligned}w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \\w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Conclusiones

- ✓ La cartilla recopila los trabajos [3], [4] y [5] basandose a diferencia de estos, no en talleres si no en definiciones formales y la propuesta de actividades que permiten la construcción del concepto de conjunto fractal.
- ✓ El uso de una clara notación de la simbología matemática junto con la diversidad y colorido de las imágenes hacen que la cartilla sea una propuesta innovadora, fácil y agradable de entender.
- ✓ El programa computacional INTERFRAC constituye una herramienta importante de la cartilla al momento de generar fractales y mostrar la autosemejanza de estos.
- ✓ Se espera que esta primera versión de la cartilla se pueda divulgar entre docentes y estudiantes de secundaria, así como también se esperan críticas constructivas para mejorar su contenido y presentación desde un punto de vista didáctico.

# Bibliografía

- [1] APOSTOL Tom. Análisis matemático. Barcelona, Editorial Revertés S.A., 1986.
- [2] BARNSELY Michael F. Fractals everywhere. Academic Press, Cambridge, MA, 1993.
- [3] CASTRO, Fabiola. Geometría Fractal en el Bachillerato, Bucaramanga, enero de 1994.
- [4] COBOS, Genny. Introducción a la Geometría Fractal en la Básica Primaria, Bucaramanga, Agosto de 2002.
- [5] DAZA, Carlos Julio. Geometría Fractal en el Bachillerato: Acercamiento por Sistemas Dinámicos, Bucaramanga, febrero de 1999.
- [6] ISAACS, R., SABOGAL, S. Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico, Ediciones UIS, 2005.
- [7] LAMBERTSON, Lori. Fractales en su aula, San Francisco, EUA, Fundación Cientec 2001, [consultado 15-06-2006]: Disponible en: <http://www.cientec.or.cr/matematica/fractales.html>.
- [8] NAYLOR, Michael. Exploring Fractals in the classroom. Mathematical Teacher, volume 92, number 4.
- [9] PEITGEN H. O., JÜRGENS H., SAUPE D. Fractals for the classroom, strategic activities,. volume two, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [10] ROMERO, Javier. La Curva de Koch, Soliloquios de Javier Romero 2006, [consultado 15-06-2006]: Disponible en: <http://www.fjromero.com/?cat=4>.