

Estudio Numérico del Equilibrio Magnetohidrodinámico de un Plasma de Fusión Confinado en
un Tokamak

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Juan Camilo Sánchez Mendoza

Director

Eduardo Alberto Orozco Ospino

Dr. Ciencias Naturales (Física)

Codirector

Jesús Eduardo López Durán

Magíster en física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme permitido llegar hasta aquí, a mis padres, quienes siempre me apoyaron en todo este proceso, al profesor Eduardo Orozco por sus enseñanzas y por permitirme trabajar con él y formar parte de FITEK y un agradecimiento de sobremanera a Jesús López, quién me guió siempre, me corrigió y el cual fue un pilar fundamental para la realización de este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1. Objetivos	13
2. Preliminares	14
2.1. Principios de la fusión nuclear	14
2.2. Confinamiento magnético	16
2.3. Dispositivos tokamak	18
3. Modelo MHD	21
3.1. Modelo magnetohidrodinámico	21
4. Equilibrio Magnetohidrodinámico	25
4.1. Interpretación física de ψ	28
4.2. Solución de Solov'ev - Shafranov	29
4.3. Formulación del problema: Equilibrio MHD	31
4.3.1. Problema de frontera fija	32
5. Modelo numérico	34
5.1. Normalización y adimensionalización	34
5.2. Geometría y Mallado	35

5.3. Discretización de la ecuación GS	37
5.4. Esquema de interpolación	40
6. Resultados	43
6.1. Resultados y discusión	43
6.2. Validación del código	44
6.3. Preservación de parámetros físicos	48
6.4. Corrimiento de Shafranov	53
7. Conclusiones	54
Referencias Bibliográficas	56

Lista de Figuras

Figura 1.	Principales exponentes del confinamiento magnético toroidal	18
Figura 2.	Dispositivos tokamak	19
Figura 3.	Parámetros geométricos D - Shape.	20
Figura 4.	Equilibrio MHD: Líneas de B y J reposando sobre superficies isobáricas.	26
Figura 5.	Esquema del flujo magnético en sus dos componentes, poloidal y toroidal.	29
Figura 6.	Mallado computacional	36
Figura 7.	Distancias entre puntos y frontera para aplicar el esquema de interpolación.	42
Figura 8.	Diagrama de flujo asociado al esquema de relajación sucesiva.	43
Figura 9.	Comparación de la solución numérica con la analítica	45
Figura 10.	Comportamiento del error	46
Figura 11.	Error en función del número de puntos de malla	48
Figura 12.	Perfiles de campo magnético, densidad de corriente y presión	49
Figura 13.	Isocontornos del flujo poloidal y mapa de la presión	50
Figura 14.	Divergencia del campo magnético	52
Figura 15.	Corrimiento de Shafranov	53

Lista de Tablas

Tabla 1.	Condiciones para la validez del modelo MHD	24
Tabla 2.	Valores típicos de los parámetros de validación del modelo MHD	25
Tabla 3.	Comparación entre valores experimentales y numéricos para el MAST	50

Glosario

Plasma: Gas ionizado cuasineutro que exhibe comportamientos colectivos.

Tokamak: Dispositivo que mantiene confinado un plasma a partir de campos magnéticos generados por bobinas.

Fusión Nuclear : Proceso en el cual dos átomos vencen la barrera de repulsión electrostática y se fusionan generando un nuevo átomo y liberando energía.

Resumen

Título: Estudio numérico del equilibrio magnetohidrodinámico de un plasma de fusión confinado en un tokamak *

Autor: Juan Camilo Sánchez Mendoza **

Palabras Clave: Tokamak, equilibrio MHD, plasma de fusión, diferencias finitas.

Descripción: En dispositivos de fusión termonuclear, el gas se calienta a temperaturas tan altas que se considera plasma, y mantenerlo confinado de manera estable es crucial hasta que la energía liberada por las reacciones de fusión supere la suministrada. Sin embargo, estos sistemas son propensos a inestabilidades debido a su dinámica, la cual depende fuertemente de las condiciones de equilibrio, para lo cual es fundamental conocer perfiles de presión, corriente y campo magnético que confinen el plasma. A partir del balance de fuerza de un elemento de fluido y bajo condiciones de equilibrio estático y estacionario, surge la ecuación de Grad-Shafranov, cuya solución proporciona el equilibrio en dispositivos de confinamiento magnético como los tokamak, obteniéndose numéricamente para casos prácticos. En este trabajo se desarrolló un código que resuelve la ecuación de Grad-Shafranov usando diferencias finitas de segundo orden sobre una malla rectangular uniforme y con frontera de plasma fija. Este código se validó comparándolo con la solución analítica de Solovév, estableciendo la relación entre error y convergencia. Finalmente, se recrearon perfiles de equilibrio de configuraciones experimentales variando corriente, presión y parámetros geométricos, con el objetivo de reducir el coste computacional y controlar la geometría de la columna de plasma.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: ph.D Eduardo Alberto Orozco Ospino. Codirector: ph.D(c) Jesús Eduardo López Durán.

Abstract

Title: Numerical study of magnetohydrodynamical equilibrium of a fusion plasma confined in a tokamak *

Author: Juan Camilo Sánchez Mendoza **

Keywords: Tokamak, fusion plasma, MHD Equilibrium, finite differences.

Description: In thermonuclear fusion devices, the gas is heated to such high temperatures that it becomes plasma, and maintaining its stable confinement is crucial until the energy released by fusion reactions exceeds the supplied energy. However, these systems are prone to instabilities due to their dynamics, which heavily depends on the equilibrium conditions, for which to know profiles of pressure, current, and magnetic field that confine the plasma is fundamental. From the force balance of a fluid element under static and stationary equilibrium conditions, Grad - Shafranov equation emerges, whose solution provides the equilibrium in magnetic confinement devices like tokamaks, been obtaining numerically for practical cases. In this work, a code was developed to solve the Grad-Shafranov equation using second-order finite differences on a uniform rectangular mesh with a fixed plasma boundary. The code was validated by comparing it with Solov'ev's analytical solution, establishing the relationship between error and convergence. Finally, equilibrium profiles of experimental configurations were recreated by varying current, pressure, and geometric parameters, whit the aim to reduce computational costs and control the geometry of the plasma column.

* Bachelor of Science Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: ph.D. Eduardo Alberto Orozco Ospino. Codirectore: Jesús Eduardo López Durán.

Introducción

La fusión termonuclear como fuente de energía ha mostrado ser una alternativa muy atractiva para sustituir a las fuentes de energía convencionales puesto que es una energía limpia, segura y económica Rubbia (1995). Para conseguir esto se requiere de dispositivos que confinen un plasma sometido a temperaturas muy elevadas y así alcanzar las reacciones de fusión. Unos de los primeros avances en este tema fueron dados por los físicos soviéticos Ígor Yevguénievich y Andrei Sakharov en la década de los 50, los cuales diseñaron el tokamak I.E. (1959); Sakharov (1958), posteriormente, uno de los primeros reactores experimentales fue construido en 1964 por el físico estadounidense Philo T. Farnsworth, quien creó el fusor, un dispositivo que utilizaba campos eléctricos para confinar el plasma Farnsworth (1966).

Otro de los primeros esquemas experimentales que propiciaban las reacciones de fusión fue el dispositivo denominado pinch, desarrollado por el físico estadounidense Alvin Weinberg en el Laboratorio Nacional de Oak Ridge en 1958, en el que empleó campos magnéticos para confinar el plasma y así lograr las reacciones de fusión nuclear Weinberg (1967). Así como estos esquemas, muchos otros trabajos fueron capaces de lograr la reacción, sin embargo, no de manera estable y controlada. Desde entonces se han venido desarrollando trabajos para conseguir que la fusión además de lo anterior, sea rentable si se piensa en el desarrollo de reactores que permitan suplir la demanda energética mundial Eich et al. (1993); Matzen et al. (2007); Klinger et al. (2016). Actualmente se han desarrollado nuevas tecnologías y métodos para lograr tal meta; ejemplo de ello lo constituyen los dispositivos de confinamiento magnético denominados tokamak, los cuales son

la base de grandes proyectos como el International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) en Francia o el Japan Torus-60 (JT-60) en Japón, que trabajan actualmente en este tema y con esta tecnología.

Es así como el estudio de la física del plasma toma un papel importante en el desarrollo de estos dispositivos, pues permite comprender cómo se comporta el plasma bajo diversas condiciones. Típicamente, el plasma puede ser estudiado desde dos puntos de vista: *i*) un modelo microscópico el cual se basa en un análisis estadístico y cinético de las variables físicas del plasma y *ii*) un modelo macroscópico en el cual el plasma se considera como un fluido conductor, modelo también conocido como Magnetohidrodinámica (MHD). Es de resaltar que existen otros modelos intermedios que explotan ampliamente propiedades de los dos previamente mencionados Miyamoto (1997). Macroscópicamente, en los dispositivos de confinamiento magnético como los tokamak, la dinámica se rige por el modelo MHD, el cual permite comprender muchas propiedades globales, entre ellas si el sistema es globalmente estable o inestable; sin embargo, desde un punto de vista teórico, para comprender la estabilidad del sistema, se necesita establecer condiciones básicas del confinamiento, como perfiles de presión, campo magnético y concentración, también conocidas como condiciones iniciales y deben obedecer a una condición de equilibrio básica, donde los gradientes de presión son compensados por la fuerza magnética Wesson (1978) y es en este punto, donde la ecuación de Grad-Shafranov toma gran relevancia, pues permite estudiar el plasma de un tokamak en condiciones de equilibrio desde la aproximación estática y estacionaria Grad and Shafranov (1958), pero en general esta ecuación no es sencilla de resolver, ya que es una ecuación diferencial parcial no lineal de tipo Poisson, donde el término fuente contiene deri-

vadas respecto a la función solución, lo cual hace que las soluciones analíticas exactas sean muy escasas y limitadas, haciendo indispensable el uso de técnicas numéricas que permitan resolverla y dar conocer los perfiles de equilibrio en dichos sistemas bajo algunas consideraciones adicionales, generalmente basadas en evidencias experimentales Soloviev (1968); Atanasiu et al. (2004); Takeda and Tokuda (1991); González et al. (2015).

Por tal motivo, en este trabajo se resuelve numéricamente la ecuación de Gran-Shafranov con frontera fija del plasma definida por expresiones analíticas, bajo un esquema de diferencias finitas de segundo orden y así lograr establecer perfiles de equilibrio que permitan análisis futuros de estabilidad.

1. Objetivos

Objetivo general

Elaborar un código computacional para el estudio del equilibrio de un plasma en un tokamak a partir de la solución numérica de la ecuación de Grad - Shafranov usando frontera fija y malla homogénea.

Objetivos específicos

Obtener la expresión de la ecuación de Grad - Shafranov discretizada;

Implementar un esquema de interpolación para imponer la condición de frontera fija;

Desarrollar una subrutina que preserve valores predeterminados del sistema como la presión y corriente del plasma;

Elaborar un Python Notebook de acceso libre en un repositorio que resuelva numéricamente la ecuación de Grad - Shafranov;

Desarrollar experimentos numéricos para establecer diferentes perfiles de equilibrio.

2. Preliminares

2.1. Principios de la fusión nuclear

La fusión nuclear es el proceso en el que dos átomos se unen para crear otro átomo más pesado, y, en esta reacción se puede producir una gran cantidad de energía debido a la diferencia de masa entre los reactivos y el producto, si la masa inicial de los reactivos es mayor a la masa del producto. Esta masa faltante se ha transformado en energía, la cual se puede estimar mediante la ecuación de Einstein, $E = mc^2$, de esta forma y puesto que la velocidad de la luz, c , es un número relativamente grande, se puede obtener altas cantidades de energía en este proceso. Bajo estos conceptos, y bajo la premisa de ser una energía limpia, la idea de emplear los procesos de fusión nuclear como fuentes de producción de energía es muy atractiva. Sin embargo, para que la reacción ocurra, es necesario vencer la barrera de repulsión electrostática entre los núcleos atómicos, lo cual implica una inversión energética Harms (2002). En la mayoría de casos, para conseguir las reacciones de fusión nuclear es necesario alcanzar temperaturas muy elevadas, del orden de cientos de millones de grados, por ello el nombre típico de fusión termonuclear y es la que ocurre, por ejemplo, en el interior de las estrellas, generando así la energía de estas Burbidge et al. (1957).

Conceptualmente, para el desarrollo de reactores de fusión, es necesario que el combustible, usualmente deuterio y tritio, se caliente hasta temperaturas de cientos de millones de grados, donde los reactivos se encuentran ionizados, de modo que se han de encontrar en un estado fundamental de la materia, denominado como plasma, haciendo necesario su confinamiento en una región

limitada dentro del reactor, evitando así, que este toque las paredes del mismo por dos grandes motivos: i) porque no hay materiales que toleren dichas temperaturas y ii) porque el plasma pierde las propiedades requeridas al interactuar con los materiales. Este es un reto que se debe superar y muchos estudios se enfocan en ello, de hecho, hay tres métodos de confinamiento: gravitatorio, inercial y magnético Hazeltine and Meiss (2003).

El confinamiento gravitatorio se da cuando se tienen campos gravitacionales muy fuertes y por su naturaleza es típico en estrellas u otros objetos astronómicos, los cuales tienen asociados campos gravitatorios muy intensos, y como es de esperarse, este tipo de confinamiento no es viable para el desarrollo tecnológico de reactores. Por su parte, el confinamiento inercial consiste en lograr la fusión antes de que el plasma pueda expandirse, para ello se utilizan láseres de alta potencia para calentar el combustible que se encuentra almacenado en pequeñas cápsulas, formar el plasma, y antes de su expansión, generar con los mismos láseres una presión muy alta que comprime tanto al plasma que se vence la repulsión coulombiana y lograr la fusión Pfalzner (2006). Finalmente, el confinamiento magnético consiste en guiar adecuadamente las cargas eléctricas que constituyen al plasma a través de campos magnéticos, generalmente creados por diferentes configuraciones de bobinas, y así mantener el plasma dentro de una zona delimitada, evitando por completo la interacción con las paredes del reactor. Este tipo de confinamiento presenta algunas ventajas, como lograr una mayor estabilidad, ya que se puede aislar el plasma evitando que interactúe con el medio externo y pueda inducir a un rápido enfriamiento del mismo, y en general efectos no deseados. También, mediante el confinamiento magnético se puede controlar la densidad del plasma, el cual es un parámetro importante para ajustar la eficiencia de la fusión, además, el confinamiento magné-

tico permite confinar al plasma en geometrías particulares, por ejemplo, en geometrías toroidales, con las mejores propiedades en la capacidad de confinamiento Miyamoto (1997).

El confinamiento magnético ha mostrado ser uno de los esquemas más propicios para el desarrollo de futuras fuentes de energía, y por lo tanto, muchos trabajos se enfocan en esta área; sin embargo, el confinamiento inercial también es investigado actualmente, principalmente por entidades privadas y/o gubernamentales, con lo que muchos de los resultados o adelantos en esta área suelen ser confidenciales. Recapitulando, para conseguir diseños eficientes de futuros reactores de fusión nuclear, es decir, que se produzca mayor energía de la que se invierte, se requiere aún de mucha investigación en física fundamental sobre la dinámica del plasma, así como de desarrollo tecnológico, siendo actualmente un área de gran interés en la comunidad científica. A pesar de que se han propuesto diferentes esquemas, existen principalmente dos configuraciones prometedoras: 1) los dispositivos de confinamiento magnético tipo tokamak, donde se resalta el proyecto ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) en Francia, y 2) los stellarator, cuyo mayor exponente es el proyecto Wendelstein 7-X (W7-X) en Alemania. Todos estos grandes proyectos trabajan actualmente en este tema, intentando conseguir la fusión termonuclear estable para propiciar escenarios óptimos que confirmen la viabilidad de futuros reactores de fusión como fuente de energía limpia que pueda suplir gran parte de la demanda energética mundial.

2.2. Confinamiento magnético

Dado que la dinámica de las partículas cargadas está determinada por la fuerza de Lorentz, la idea central de este mecanismo de confinamiento consiste en encontrar configuraciones de campo magnético que mantengan alejado al plasma de las paredes de la cavidad; de este modo, es

sencillo comprender que uno de los objetivos claves de estas configuraciones es alcanzar un estado de equilibrio, donde la fuerza de Lorentz compense la fuerza ejercida por la presión del plasma:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

donde la densidad de corriente \mathbf{J} y el campo magnético \mathbf{B} están relacionadas a través de la ley de Ampère: $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$.

Aunque existen diferentes esquemas de confinamiento magnético que se han desarrollado a lo largo de los años, como las configuraciones cilíndricas z -pinch y θ -pinch, configuraciones esféricas como los spheromak, y configuraciones toroidales como los tokamak y stellarator, entre otros Wesson (2004), algunas no han destacado por diversos factores como la estabilidad, y a pesar de que actualmente no hay una configuración 100% estable, las configuraciones toroidales son las que arrojan resultados más prometedores y por ello son las más estudiadas. En particular, los Stellarators son dispositivos que confinan el plasma con imanes y configuraciones de bobinas muy complicadas que curvan la columna de plasma con el objetivo de reducir la corriente en el plasma para brindar así mayor estabilidad (ver Fig. 1.a); sin embargo, debido a la complejidad del embobinado, estas configuraciones representan mayores desafíos técnicos Beidler (2004). Por otro lado, en los tokamak, el embobinado es mucho más simple (ver Fig. 1.b), de modo que en el equilibrio, el sistema se caracteriza por tener simetría axial. En esta configuración, la corriente del plasma es inducida por pulsos externos de corriente, con lo que su operación no es continua. Es de resaltar que los tokamak, actualmente son los dispositivos con mayor viabilidad de cara a la futura

creación de plantas de fusión Helander et al. (2012).

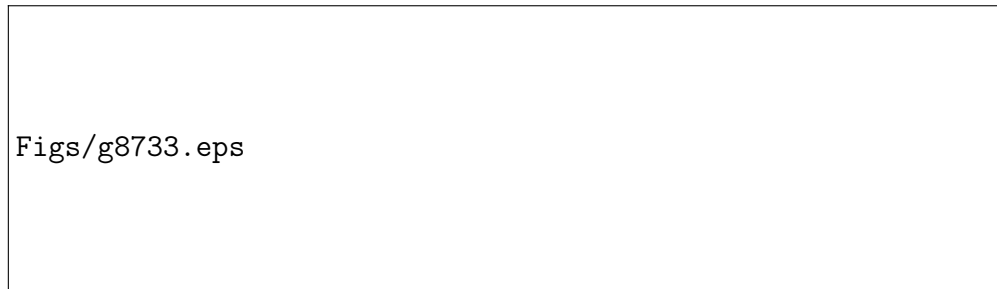


Figura 1. Representación esquemática de los principales exponentes del confinamiento magnético toroidal: (a) Dispositivo stellarator, caracterizado por la gran complejidad en el embobinado y forma retorcida del plasma (b) Dispositivo tokamak: columna de plasma axialmente simétrica. Tomada y adaptada de on Hidden Symmetries and Energy (2020); Bhattacharjee (2019)

2.3. 2.3. Dispositivos tokamak

Los dispositivos tokamak crean el campo magnético que confina el plasma principalmente con dos tipos de embobinados, tal como se presenta en la Figura(2.a): las bobinas toroidales (en rojo) que crean las componentes B_r y B_z del campo magnético, también conocido como campo magnético poloidal; y, las bobinas poloidales que excitan a B_ϕ , la componente toroidal del campo, siendo r, ϕ, z las componentes de un sistema coordenado cilíndrico. Como se puede apreciar en dicha gráfica, las líneas de campo tienen un comportamiento helicoidal al rededor de una línea de campo muy característica de este sistema denominada como eje magnético, pues esta línea de campo es puramente toroidal. Por otra parte, el plasma se encuentra confinado en la región del espacio donde las líneas de campo magnético poloidal se cierran, y en particular, la última línea cerrada recibe el nombre de separatriz, pues define la frontera y forma de la columna del plasma, tal como se presenta en la Figura(2.b), donde se puede apreciar que la sección transversal del sistema, en un plano $\phi = cte$, el plasma en un tokamak adopta una geometría ovalada que se conoce como

D-Shape ya que su frontera se asemeja a la forma de la letra *D* Stangeby et al. (2000); Cizek et al. (2019); Hou et al. (2019).

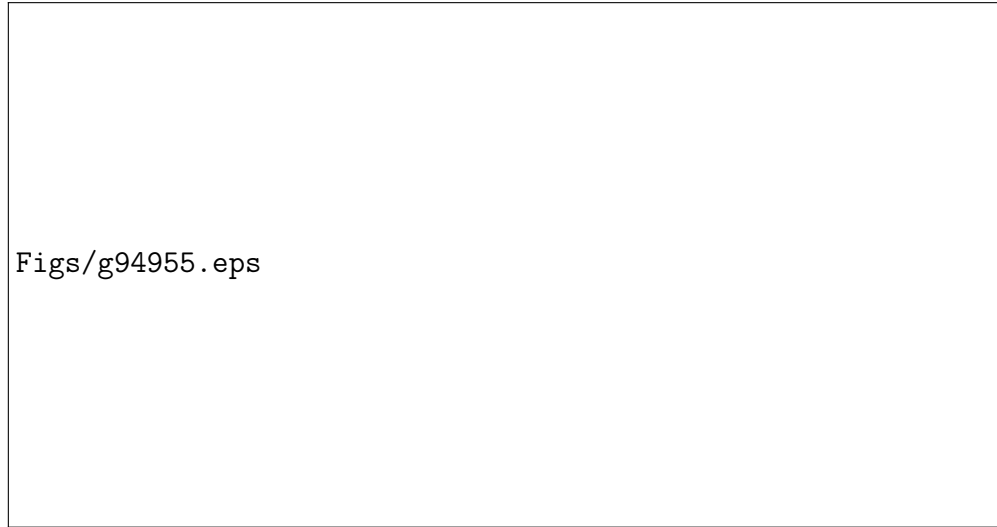


Figura 2. Dispositivos tokamak: (a) Elementos principales: embobinado, líneas de corriente y columna de plasma. (b) Líneas de campo poloidal en un plano $\phi = cte$.

La forma del plasma está completamente caracterizada por cuatro parámetros geométricos, tal como se presenta en la Figura(3): *i*) El radio mayor R_o , que define la distancia radial del centroide respecto al eje axial o eje z , *ii*) el radio menor a , que indica el radio de D-shape, *iii*) la elipticidad κ , que mide qué tan alargada es la columna de plasma, y finalmente *iv*) la triangularidad δ , la cual es una medida del desplazamiento radial del centroide respecto a R_{top} , indicando qué tan triangular es la columna de plasma. Estos cuatro parámetros están definidos por tres puntos coordenados claves: Z_{top} y R_{top} que representan el punto más alto de la frontera, R_{max} y R_{min} los puntos radiales máximo y mínimo de la separatriz.

Aunque la frontera del plasma está definida por la separatriz, la cual depende estrictamente del embobinado y corrientes del sistema, existen diferentes expresiones analíticas que permiten

Radio mayor	Radio menor	Elipticidad	Triangularidad
Figs/Ro.eps	Figs/a.eps	Figs/kapa.eps	Figs/delta.eps
$R_o = \frac{R_{max} + R_{min}}{2}$	$a = \frac{R_{max} - R_{min}}{2}$	$\kappa = \frac{Z_{top}}{a}$	$\delta = \frac{R_o - R_{top}}{a}$

Figura 3. Parámetros geométricos que definen la frontera del plasma, el D-shape.

reconstruir de forma aproximada el D-shape. Las ecuaciones (2) y (3) son un buen ejemplo de esto, pues representan a los puntos de frontera, r_b y z_b como funciones paramétricas de $\theta \equiv [0 : 2\pi]$,

$$r_b = R_o + a \cos[\theta + \arcsin(\delta) \sin(\theta)], \quad (2)$$

$$z_b = \kappa a \sin(\theta). \quad (3)$$

3. Modelo MHD

3.1. Modelo magnetohidrodinámico

Una de las herramientas más empleados en la descripción de un plasma, en especial plasmas de fusión como los confinados magnéticamente en dispositivos tokamak y stellarator, es el modelo magnetohidrodinámico ó simplemente MHD, el cual consiste en describir al plasma desde un punto de vista macroscópico como un fluido conductor; y para ello, toma como punto de partida el acople de las ecuaciones de fluido de Navier-Stokes junto con las ecuaciones de Maxwell; y, en general puede incluir efectos tanto resistivos como viscosos; sin embargo, si el plasma se aproxima como un conductor perfecto, de modo que se desprecian las pérdidas, el modelo se puede simplificar a un conjunto de ecuaciones más simple denominado como el modelo MHD Ideal:

En primer lugar, el modelo MHD ideal considera la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho u), \quad (4)$$

siendo ρ la densidad volumétrica de masa y u la velocidad de un elemento de fluido. Esta ecuación expresa la idea principal de que si la densidad de masa en un elemento de fluido cambia es debido a que las partículas fluyeron a través de dicho elemento de volumen sin contemplar fuentes o sumideros de masa donde las partículas aparecen o desaparecen. En adición, también se tiene la ecuación de balance de momentum o ecuación dinámica,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

con J , la densidad de corriente, p la presión del fluido y B el campo magnético. Esta ecuación expresa que la dinámica de un elemento de fluido está dada por gradientes de presión y por la fuerza magnética. Por otra parte, el campo magnético evoluciona según la ley de Faraday, que al combinarse con la relación constitutiva de campos, la ley de Ohm, $E = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ y junto con la ley de Ampère, se llega que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (7)$$

donde se debe respetar la no existencia de monopolos magnéticos,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

Finalmente, la ecuación de evolución de la presión del fluido,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (9)$$

obedece a una evolución adiabática caracterizada por el factor de relación de calor especí-

fico $\gamma = (D + 2)/D$, siendo D la dimensionalidad, con lo que en el espacio tridimensional $D = 3$ y $\gamma = 5/3$.

Es prudente recalcar que para que el modelo anterior se pueda aplicar se deben respetar o satisfacer un grupo de condiciones y así, tener mayor confianza en los resultados o predicciones que este pueda arrojar. En la Tabla 1 se presenta de forma compacta las condiciones que se deben tener en cuenta para la aplicabilidad del modelo Boyd et al. (2003). En particular, la última condición que se presenta en la Tabla 1, la ausencia de difusión magnética, es necesaria para la validez del modelo MHD ideal.

Experimentos realizados a lo largo de los años en dispositivos de fusión y así como experimentos proyectados hacia el futuro permiten identificar que la temperatura característica en dichos sistemas de fusión es del orden de 3keV a concentraciones del orden de 10^{20} partículas por metro cúbico. Por otra parte, el campo magnético que se tiene es de unos cuantos Tesla, 5T, y el parámetro β , asociado con la relación entre presión cinética y magnética, cerca de $\sim 0.05 = 5\%$. En la Tabla 2 se presentan los valores estimados de los parámetros que rigen el rango de validez del modelo MHD.

Con los datos previos, es posible estimar que el tiempo de difusión de las líneas de campo magnético es de unos cientos de segundos, mientras que la escala de tiempo hidrodinámico, es decir, la escala de tiempo en la que suceden los fenómenos de interés, es de tan sólo unos microsegundos. Esto permite garantizar que bajo las condiciones presentadas, la aplicabilidad del modelo magnetohidrodinámico en el régimen ideal con $R_m \sim 6 \times 10^8 \gg 1$, es completamente viable. Similarmente, las condiciones de cuasineutralidad, sin efectos relativistas y pequeños radios de giro

Aproximación	Expresión
Alta colisionabilidad:	$\tau_i \sim (m_e/m_i)^{1/2} \tau_H; \lambda_c \sim L_H$
No relativista:	$\omega/k \sim L_H/\tau_H \sim u \sim c$
Cuasineutralidad:	$\omega \sim \Omega_e /\omega_p^2 \sim 1$
Radio de Larmor despreciable:	$r_{L_i}/L_H \sim \beta^{1/2}$
Sin difusión magnética:	$R_m \sim 1 : (r_{L_i}/L_H)^2 \sim \beta (m_i/m_e)^{1/2} (\tau_i/\tau_H)$

Tabla 1

Condiciones para la validez del modelo MHD: τ_i y τ_H representan el tiempo entre colisiones iónicas y el tiempo hidrodinámico respectivamente, λ_c camino libre medio, Ω_e la frecuencia ciclotrónica electrónica, ω_p la frecuencia plásmica, R_m el número de Reynolds magnético. Por último β es la razón entre presión cinética y magnética.

son bien satisfechas. Una observación muy importante, y necesaria de resaltar, es que la condición de alta colisionabilidad no se cumple y tampoco está cerca de ser alcanzada, ya que las longitudes características del sistema son del orden de unos cuantos metros y el camino libre medio entre colisiones es del orden de kilómetros; de este modo, la condición de plasma regido por altas colisiones propio del modelo MHD, no aplicaría completamente a los plasmas de fusión.

Lo anterior parece ir en contracorriente con toda la evidencia experimental en la que se ha logrado determinar que el modelo MHD y en particular el modelo ideal provee una amplia y precisa descripción del comportamiento del plasma en un nivel macroscópico Freidberg (2014). Algunos autores reportan este hecho Boyd et al. (2003), y resaltan que la aproximación del plasma como un fluido aún bajo esta circunstancia puede ser sostenible, aunque se requiere mejorar algunos detalles finos del modelo, particularmente de la ecuación de balance de energía, ya que el campo magnético al actuar como un agente de localización, es capaz de compensar una parte del efecto de la baja colisionabilidad. Detalles del modelo parecen tener completa solución al aplicar modelos más precisos pero más complejos Freidberg (2014); Boyd et al. (2003). En gran medida, el modelo

MHD provee una buena descripción macroscópica de la dinámica del plasma de fusión.

Las anteriores ecuaciones permiten describir la evolución de plasma, ahora bien, a partir de estas mismas se puede llegar al equilibrio macroscópico, Ecuación (1), si el plasma se considera estático y estacionario, evidenciando que el equilibrio MHD se alcanza cuando la fuerza de Lorentz compensa la fuerza ejercida por la presión del plasma, tal como se presenta en el siguiente capítulo Freidberg (2014).

Parámetro		Valor
Tiempo entre colisión iónica:	τ_i	$2.6 \times 10^{-3} \text{ s}$
Tiempo MHD característico:	τ_H	$2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$
Camino libre medio entre colisión:	λ_c	$1.4 \times 10^3 \text{ m}$
Longitud MHD característica:	L_H	1.0 m
Frecuencia MHD característica:	$\omega \sim 1/\tau_H$	$5.0 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$
Numero de onda MHD característico:	$k \sim 1/L_H$	1.0 m^{-1}
Frecuencia ciclotrónica electrónica:	Ω_e	$8.9 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$
Frecuencia plásmica:	Ω_p	$5.7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$
Radio de Larmor iónico:	r_{Li}	$2.2 \times 10^{-3} \text{ m}$

Tabla 2

Valores típicos de los parámetros de validación del modelo MHD en plasmas confinados magnéticamente.

4. Equilibrio Magnetohidrodinámico

Como ya se presentó en el capítulo anterior, el modelo magnetohidrodinámico es la herramienta principal cuando se desea estudiar las características globales de los plasmas de fusión, tanto propiedades de la dinámica como del equilibrio. Este trabajo se enfoca en obtener las condiciones del equilibrio de las configuraciones tipo tokamak, bajo la premisa de plasmas estáticos,

$\mathbf{u} = \mathbf{0}$, y estacionarios $\partial_t = 0$, llegando así a la condición de equilibrio, Ecuación (1). De esta ecuación es fácil determinar que: $B \cdot \nabla p = 0$ y $J \cdot \nabla p = 0$, lo cual indica que tanto las líneas de campo magnético, como las líneas de corriente, reposan sobre las superficies de presión constante, tal como se presenta en la Figura(4). Esto no indica que B y J deban ser ortogonales, pueden formar ángulos arbitrarios, pero estos campos no pueden atravesar regiones de presión constante Boyd et al. (2003).



Figura 4. Equilibrio MHD: Líneas de B y J reposando sobre superficies isobáricas.

Para plasmas confinados magnéticamente, la ecuación de equilibrio MHD, Ec.(1), puede conducir a una ecuación diferencial de segundo orden si el sistema tiene algún tipo de simetría, y es conocida como la ecuación de Grad-Shafranov, la cual es la base del estudio de la estabilidad de los plasmas de fusión como los confinados por dispositivos tokamak. El punto de partida es considerar simetría axial, $\partial_\phi = 0$, e introduciendo el vector potencial magnético, \mathbf{A} , en coordenadas cilíndricas y definiendo las funciones

$$\psi = -rA_\phi, \tag{10}$$

$$g = rB_\phi = r[\partial_z(A_r) - \partial_r(A_z)], \quad (11)$$

el campo magnético se puede escribir como,

$$\mathbf{B} = -\nabla\phi \times \nabla\psi + g\nabla\phi. \quad (12)$$

Combinando las ecuaciones (12), (6) y (1) y dado que $\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0$ y $\mathbf{J} \cdot \nabla p = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0$, se obtiene la ecuación de Grad - Shafranov (ecuación GS), la expresión de equilibrio más famosa en física de plasmas de fusión Miyamoto (2005); Shafranov (1966),

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - g \frac{dg}{d\psi}, \quad (13)$$

donde $\Delta^* \psi$ es el operador elíptico toroidal, definido como,

$$\Delta^* \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (14)$$

También es común encontrarla escrita en función de la densidad de corriente toroidal J_ϕ como sigue

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r J_\phi, \quad (15)$$

donde

$$J_{\phi} = r \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{r} g \frac{dg}{d\psi} \quad (16)$$

La solución de la ecuación de Grad – Shafranov, provee la caracterización completa de plasmas toroidales axialmente simétricos, donde se puede apreciar que esta es una ecuación diferencial elíptica y no lineal. Vale la pena observar que la naturaleza del equilibrio está fuertemente determinada por las condiciones de contorno y la elección de las funciones $p(\psi)$ y $g(\psi)$ que generalmente tienen una estructura polinomial y algunos de sus coeficientes son ajustados adecuadamente para preservar parámetros experimentales como la presión o corriente toroidal del plasma. La dificultad principal para resolver esta ecuación radica del hecho de que las funciones p y g dependen de la variable incógnita ψ , por lo que sus soluciones analíticas son limitadas y existe una gran diversidad de técnicas numéricas para aproximar la solución López et al. (2019).

4.1. Interpretación física de ψ

Como ya se presentó, en los dispositivos tipo tokamak existen líneas de campo magnético abiertas y cerradas, así que los contornos $\psi(r, z) = cte$ forman regiones cerradas en el interior del plasma (ver Fig. 2.b) y dado que la presión es función de ψ , estos contornos también son regiones de presión constante sobre las que reposan las líneas de campo y corriente. Adicionalmente, dado que la componente poloidal del campo magnético está definida por $-\nabla\phi \times \nabla\psi$, implica que dicha componente es completamente tangente a los isocontornos de ψ . Ahora, si se calcula el flujo magnético Ψ , utilizando la forma del campo magnético de la ecuación (12), a través de un disco sobre el plano $z = 0$, (ver Fig. 5), y definiendo el diferencial de dicha superficie como $ds = 2\pi r dr \hat{\mathbf{z}}$,

se puede apreciar que la componente toroidal del campo, B_ϕ , no aporta a dicho flujo, por lo que Ψ representa únicamente el flujo magnético poloidal, tal como sigue:

$$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} 2\pi r dr = -2\pi \psi. \quad (17)$$

En este orden de ideas, ψ es el negativo del flujo magnético poloidal por unidad de radián, y aunque no es estrictamente el flujo magnético poloidal, es claro que están directamente relacionados y en la literatura no hay distinción entre ellos, por lo que es común llamar a ψ como el flujo magnético poloidal Jardin (2010a).



Figura 5. Esquema del flujo magnético en sus dos componentes, poloidal y toroidal.

4.2. Solución de Solov'ev - Shafranov

Como se mencionó en la sección 4.1, la ecuación de Grad - Shafranov proporciona las características del equilibrio del plasma, sin embargo, la dependencia del término fuente de esta ecuación con la variable incógnita dificulta encontrar soluciones analíticas. Una de estas pocas

soluciones que se pueden aplicar a plasmas de fusión, es la solución de Solov'ev - Shafranov, la cual toma como punto de partida, suponer dependencia lineal de las funciones de presión p y g^2 con el flujo poloidal ψ , con lo que típicamente se suelen definir los términos de la parte derecha de la ecuación de Grad-Shafranov como sigue:

$$\frac{dp}{d\psi} = -c_1, \quad g \frac{dg}{d\psi} = -c_2 R_0^2, \quad (18)$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales. Así, la solución viene dada por

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2} (c_2 R_0^2 + c_0 r^2) z^2 + \frac{1}{8} (c_1 - c_0) (r^2 - R_0^2)^2, \quad (19)$$

donde c_0 es una constante arbitraria. Es común que las constantes se ajusten para ser relacionadas con ciertos parámetros físicos, que para dispositivos tipo tokamak suelen ser definidas como $c_2 = 0$, $c_1 = B_0(\kappa_0^2 + 1)/(\mu_0 R_0^2 \kappa_0 q_0)$ y $c_0 = B_0/(R_0^2 \kappa_0 q_0)$, por lo que de esta forma, la solución analítica y por ende el equilibrio toma la siguiente estructura:

$$\psi(r, z) = \frac{B_0}{2R_0^2 \kappa_0 q_0} \left[r^2 z^2 + \frac{\kappa_0^2}{4} (r^2 - R_0^2)^2 \right], \quad (20)$$

$$p(\psi) = \frac{B_0 (\kappa_0^2 + 1)}{\mu_0 R_0^2 \kappa_0 q_0} [\psi_B - \psi], \quad (21)$$

$$g = R_0 B_0 \quad (22)$$

Vale la pena resaltar que dado las suposiciones iniciales, esta solución es muy limitada y, en la práctica, no puede ser empleada para predecir con gran precisión el equilibrio de configuraciones experimentales; su gran valor radica en el gran aporte académico como primer acercamiento a estos sistemas y aún más, es de gran importancia porque dota de un resultado exacto que permite realizar procesos de validación de soluciones numéricas a este problema; es decir, los parámetros que puedan surgir en el desarrollo de códigos que pretendan obtener perfiles de equilibrio, se deben ajustar a los parámetros de la solución de Solov'ev, y si el código desarrollado puede reproducir los perfiles esperados, se procede a determinar la precisión que este *solver* ofrece. Estos procesos de validación son indispensables para tener garantía de que la técnica usada es la apropiada para posteriormente recrear sistemas físicos reales. Esta técnica de validación fue empleada en este trabajo y permitió identificar las fortalezas y debilidades del código elaborado, tal como se presentará en el siguiente capítulo.

4.3. Formulación del problema: Equilibrio MHD

Como ya se ha presentado a lo largo de este documento, el equilibrio MHD en configuraciones toroidales tipo tokamak se obtiene al resolver la famosa ecuación de Grad-Shafranov (ec. 13), la cual por su estructura es una ecuación diferencial, por lo que es indispensable definir las respectivas condiciones de frontera o contorno para establecer su solución. Por otra parte, se ha mencionado también, que el campo magnético que confina al plasma es generado principalmente por un conjunto de bobinas tanto poloidales como toroidales, así que son estas las encargadas de definir el contorno o frontera del plasma al resolver la ecuación 13 en el interior del plasma y la ley de Ampere en sus alrededores, para de esta forma, considerar las respectivas interacciones

plasma-bobinas. Este tipo de problema se define como problema de frontera libre, pues no hay nada en específico que defina a priori la forma y posición del plasma. Este es en general un problema complejo en el que se deben tener diferentes factores a consideración y en muchas ocasiones, este problema se reformula para que sea más práctico; donde generalmente se establecen ciertos criterios como posición del plasma y algunos aspectos geométricos del mismo para estimar con estos datos la corriente que debería circular sobre cada bobina y que estas reproduzcan las características deseadas. Estos son algunos de los códigos desarrollados para tal fin Jeon (2015); Jardin (2010a), y como es de esperarse, tener control sobre los aspectos geométricos del plasma no es total, pues como se mencionó, es un problema complejo tratar con algoritmos de optimización.

4.3.1. Problema de frontera fija. La compleja interacción del campo magnético de las bobinas sobre el plasma se puede evitar al considerar un problema en muchos aspectos más simple y que ofrece a su vez ventajas significativas al poder tener control total sobre la geometría del plasma, y es el denominado problema de frontera fija, sobre el que se centra el desarrollo de este trabajo. La idea principal aquí, es definir a través de expresiones matemáticas la forma geométrica y posición del plasma, y sobre esta frontera imponer de forma directa el valor de flujo poloidal ya que técnicamente, la frontera del plasma es la última línea cerrada de $\psi = cte$. En otras palabras, obtener el equilibrio MHD en esta situación consiste en resolver la ecuación de Grad-Shafranov empleando condiciones de contorno de tipo Dirichlet, que matemáticamente se expresaría como se presenta en la ecuación 25 al resaltar que las funciones de p y g son arbitrarias y se escogen de modo que se obtengan los perfiles de presión y corriente deseados.

$$\nabla^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - g \frac{dg}{d\psi} \quad (23)$$

$$p = p(\psi) \quad g = g(\psi) \quad (24)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_{plasma}} = \psi_b \quad (25)$$

Siendo ψ_b el valor de flujo poloidal en la frontera, y es el valor que se ha de fijar para obtener el equilibrio. En principio, matemáticamente su valor puede ser arbitrario, pero se puede tomar siempre el valor nulo sin perder ningún tipo de generalidad, pues como se ha evidenciado, los parámetros físicos de interés depende de las variaciones de ψ y no de sus valores exactos. Por otro lado, desde un punto de vista numérico utilizar p y g como funciones de ψ resulta poco práctico, pues al ser difícil predecir la forma funcional de estos perfiles, se puede conducir a inestabilidades numéricas que impiden la convergencia del código. Para evitar estos problemas es prudente introducir una variable auxiliar que resuelve esta situación de no convergencia y de hecho resulta muy práctica para controlar los perfiles de presión y corriente deseados. Esta es la variable denominada por los autores como el flujo poloidal normalizado Ψ_n , la cual puede definirse de diversas formas, pero la idea general es que en el dominio de solución, dentro del plasma, su valor varíe entre cero y la unidad Jeon (2015); Jardin (2010b); Liu et al. (2021). En particular, en este trabajo

se definió así

$$\psi_n = \frac{\psi_b - \psi}{\psi_b - \psi_o} \quad (26)$$

siendo ψ_b el valor del flujo poloidal en la frontera y ψ_o el mismo pero en el eje magnético, así, en este orden de ideas, ψ_n adopta el valor nulo en la frontera, y la unidad en el eje.

5. Modelo numérico

5.1. Normalización y adimensionalización

En todo trabajo numérico resulta fundamental normalizar y adimensionalizar las cantidades físicas, esto con el fin de trabajar con valores cercanos a la unidad y reducir errores por redondeo al ejecutar los respectivos cálculos: En este trabajo, es fundamental normalizar y adimensionalizar la ecuación de Grad-Shafranov (ecs. 15, 16) y el respectivo campo magnético (ec. 12). La idea fundamental es que toda variable física se escriba como el producto de la variable normalizada \hat{f} y su respectivo parámetro característico de normalización F_o y las derivadas espaciales se normalizan con $1/L_o^n$, donde n representa el orden de la derivada. En este orden de ideas, el set de ecuaciones a resolver toma la siguiente estructura.

$$\frac{\Psi_o}{L_o^2} \hat{\Delta}^* \hat{\Psi} = -\mu_o L_o J_o \hat{r} \hat{J}_\phi, \quad (27)$$

$$J_o \hat{J}_\phi = \frac{L_o P_o}{\Psi_o} \hat{r} \frac{d\hat{p}}{d\hat{\psi}} + \frac{g_o^2}{L_o \Psi_o} \frac{1}{\hat{r}} \hat{g} \frac{d\hat{g}}{d\hat{\psi}}, \quad (28)$$

$$B_o \hat{\mathbf{B}} = \frac{\Psi_o}{L_o^2} (\nabla \hat{\phi} \times \nabla \hat{\psi}) + \frac{g_o}{L_o} \hat{g} \nabla \hat{\phi}. \quad (29)$$

Igualando términos en cada ecuación se encuentra finalmente el esquema de normalización o relación entre dichos parámetros característicos. En este orden de ideas, si se toma la corriente del plasma I_p como corriente de normalización y la longitud característica como el radio mayor, los demás parámetros quedan completamente definidos a través de estos dos. Estos no son estrictamente los parámetros obligatorios, también se puede tomar el radio menor y el campo magnético en el eje, o cualquier otro par de parámetros destacables del sistema.

$$\begin{aligned} L_o &= R_0, & J_o &= I_p / L_o^2, & \Psi_o &= \mu_o J_o L_o^3, \\ P_o &= \frac{J_o L_o}{\Psi_o}, & B_o &= \frac{\Psi_o}{L_o^2}, & g_o &= B_o L_o, \end{aligned} \quad (30)$$

Desde este punto en adelante, se presentarán las variables físicas normalizadas sin el distintivo indicado con anterioridad: \hat{f} , y será claro cuando una cantidad no está adimensionalizada porque se presentará con sus respectivas unidades.

5.2. Geometría y Mallado

La elección del tipo de mallado en estudios computacionales representa uno de los pasos más importantes, puesto que el uso de una determinada malla u otra influye fuertemente en el método por el cual se abordará el problema. Trabajos anteriores realizados en el grupo de investigación, FITEK, adscrito a la Universidad Industrial de Santander, UIS, se han utilizado mallas rectangulares no homogéneas para ajustar los puntos de malla a la frontera y han arrojado muy buenos

resultados López et al. (2019); sin embargo, el uso de estas mallas no homogéneas resulta poco práctico si se piensa en utilizar estos resultados como punto de partida para posteriormente elaborar simulaciones dinámicas y estudios de inestabilidades, puesto que se generan pasos de malla muy finos y densidades de puntos de malla altas, lo cual implica un alto costo computacional a la hora de hacer simulaciones dinámicas, hasta el punto tal que resultan inviables realizar dichas simulaciones. Es por esto que surge la necesidad de describir el equilibrio de un plasma confinado en un tokamak mediante el uso de una malla rectangular y homogénea, y de esta forma sentar las bases para posteriores trabajos en simulaciones de la dinámica global e inestabilidades (ver fig. 6).



Figura 6. Mallado computacional: En azul algunos puntos de malla (i, k) , donde el índice i se reserva para la malla a lo largo del eje r y el índice k para el eje z y el punto (i, k) en rojo, al cual no es posible aplicar diferencias finitas ya que algunos puntos están fuera de la región de simulación.

Por otra parte, una de las ventajas centrales de este trabajo es poder ajustar con facilidad la

geometría del plasma (D - Shape) a partir de los parámetros descritos en la figura 3, y así estimar en muy buena medida la dependencia del equilibrio del plasma dentro en un tokamak con la geometría de la frontera, la cual se define con funciones analíticas como las mostradas en las ecuaciones 2 y 3, que son las más apropiadas entre diferentes funciones propuestas a lo largo de los años, que por su impracticidad no han logrado destacar.

La región de simulación seleccionada es una región rectangular sobre el plano poloidal rz , de modo que esta contenga completamente el D-shape. Recordar, que aquí, el eje toroidal o que es lo mismo, la variable ϕ , no se discretiza porque no aporta al equilibrio dado la propia imposición de simetría axial de este sistema, y por ende, el toroide se reconstruye a partir de la rotación completa $[0 : 2\pi]$ alrededor del eje z . Los pasos de malla a lo largo del eje radial y el eje axial se definen a través de las Longitudes de simulación L_r y L_z , así como de los respectivos números de puntos n_{pr} y n_{pz} ,

$$h_r = \frac{L_r}{n_{pr} - 1}, \quad h_z = \frac{L_z}{n_{pz} - 1}. \quad (31)$$

5.3. Discretización de la ecuación GS

Puesto que se trata de un estudio computacional, es necesario discretizar la ecuación de Grad - Shafranov, para ello se usará un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden, con lo cual, el operador elíptico toroidal se aproxima como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &\approx \frac{1}{h_r^2} [\psi(i+1, k) - 2\psi(i, k) + \psi(i-1, k)] \\
 &\quad - \frac{1}{2r(i)h_r} [\psi(i+1, k) - \psi(i-1, k)] \\
 &\quad + \frac{1}{h_z^2} [\psi(i, k+1) - 2\psi(i, k) + \psi(i, k-1)] \\
 &= r(i)J_\phi(i, k)
 \end{aligned} \tag{32}$$

que al despejar $\psi(i, k)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \psi(i, k) &= c_2 [\psi(i+1, k) + \psi(i-1, k)] - \frac{c_3}{i} [\psi(i+1, k) - \psi(i-1, k)] \\
 &\quad + c_4 [\psi(i, k+1) + \psi(i, k-1)] - c_5 r(i)J_\phi(i, k)
 \end{aligned} \tag{33}$$

con

$$c_1 = 2 \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{h_z^2} \right), \quad c_2 = \frac{1}{c_1 h_r^2}, \quad c_3 = \frac{1}{2h_r c_1}, \quad c_4 = \frac{1}{c_1 h_z^2}, \quad c_5 = \frac{1}{c_1}. \tag{34}$$

Ahora bien, puesto que el término fuente $r(i)J_\phi(i, k)$ depende de las funciones p y g según la ecuación 16, se definen estas al emplear funciones polinómicas como es habitual y sugerido por diferentes autores Jeon (2015); Jardin (2010b); Liu et al. (2021); López et al. (2019),

$$P(\psi_n) = P_a \hat{P}(\psi_n), \quad \hat{P}(\psi) = [1 - (1 - \psi_n)^2]^2 \tag{35}$$

$$g^2(\psi_n) = g_a^2 \hat{g}(\psi_n), \quad \hat{g}(\psi_n) = [1 + \alpha_g \psi_n^2] \tag{36}$$

donde P_a , g_a y α_g son constantes que se ajustan para preservar ciertos parámetros físicos. En

particular, en este trabajo se construyó el código para que la solución numérica preserve la corriente en el plasma y la presión en el eje magnético, y de este modo, estos valores sean parámetros de entrada ingresados por el usuario, y así, la solución obtenida satisfaga estos mismos.

Según las funciones anteriores, P_a representa justamente la presión en el eje magnético, así que este parámetro de entrada es asignado directamente a esta variable y sin ningún algoritmo adicional, se puede garantizar que la solución obtenida respeta la condición deseada. Por su parte, α_g permite preservar la corriente en el plasma, pero su implementación no es tan sencilla como la anterior. Para este, se toma como punto de partida la definición de corriente de plasma a través de la integración de la densidad de corriente J_ϕ

$$I_p = \int J_\phi dA = \int \left(r \frac{dP}{d\psi_n} \frac{d\psi_n}{d\psi} + \frac{1}{r} \frac{g_a^2}{2} \alpha_g \frac{d\psi_n}{d\psi} 2\psi_n \right) dA \quad (37)$$

con lo cual, al organizar se tiene que

$$\alpha_g = \frac{I_p - \int r \frac{dP}{d\psi_n} \frac{d\psi_n}{d\psi} dr dz}{\int \frac{g_a^2 \psi_n}{r} \frac{d\psi_n}{d\psi} dr dz}, \quad (38)$$

y al discretizar las integrales la expresión se transforma en

$$\alpha_g = \frac{I - \sum_{i,k} i \frac{dP(\psi_n)}{d\psi_n(i,k)} \frac{d\psi_n(i,k)}{d\psi(i,k)} h_r h_z}{g_a^2 \psi_n \sum_{i,k} \frac{1}{i} \frac{d\psi_n(i,k)}{d\psi(i,k)} h_r h_z}. \quad (39)$$

El cálculo de α_g se debe realizar continuamente durante cada iteración del propio método de relajación sucesiva, y así, cuando la solución converja, lo hará preservando la corriente I_p . Por

último, el parámetro g_a permite obtener una estimación del campo sobre el eje magnético B_a , al estar definido como sigue:

$$g_a = B_a R_o, \quad (40)$$

resaltando que no se obtendrá el valor deseado, pero si un valor cercano.

5.4. Esquema de interpolación

De acuerdo con la sección anterior, es recomendable la elección de una malla rectangular y homogénea, sin embargo, al escoger este tipo de malla surge un problema al aplicar el método de diferencias finitas, puesto que para calcular el flujo poloidal en un punto de malla (i, k) , es necesario, según la ecuación 33, conocer el flujo poloidal en puntos vecinos $(i + 1, k)$, $(i - 1, k)$, $(i, k + 1)$ y $(i, k - 1)$, lo cual resulta imposible de calcular para algunos puntos, pues algunos de sus puntos vecinos se salen de la región de simulación, al no estar dentro del D-shape. En la figura 6 se puede observar un ejemplo de esto, donde para el punto (i, k) en rojo, no existen los puntos $(i - 1, k)$ y $(i, k - 1)$ ya que se encuentran fuera del D - Shape, la cual es la región de simulación, por tanto, no es posible aplicar la expresión (33) en diferencias finitas sobre estos puntos. Para estos puntos en los que no se puede aplicar diferencias finitas, se implementa un esquema de interpolación lineal utilizando diferentes distancias entre puntos cercanos, algunos de ellos serán puntos de malla y otros serán puntos de la frontera en los cuales sí se tiene información del flujo poloidal (ver fig. 7). En esta gráfica, se puede apreciar el esquema de la molécula computacional que se construye para obtener el valor interpolado de $\psi(i, k)$, donde se definen 4 longitudes, L_a y L_b a lo largo del eje r ,

así como L_c y L_d sobre el eje z .

El esquema de interpolaci³nseleccionadoconsisteprimeroencalcularelvalormediode ψ a lo largo del eje radial y luego lo mismo en z ,

$$\bar{\psi}_r = \psi_a \frac{L_b}{L_r} + \psi_b \frac{L_a}{L_r}, \quad \bar{\psi}_z = \psi_c \frac{L_d}{L_z} + \psi_d \frac{L_c}{L_z}, \quad (41)$$

donde $L_z = L_c + L_d$ y $L_r = L_a + L_b$. Seguido a esto, se calcula el valor promedio de las distancias L_z y L_r ,

y con esto, se puede estimar el valor del flujo poloidal en el punto P como sigue

$$\psi_p = \frac{\bar{\psi}_r \bar{L}_z + \bar{\psi}_z \bar{L}_r}{\bar{L}_z + \bar{L}_r}, \quad (42)$$

lo cual finalmente conduce a

$$\psi_p = \frac{(\psi_a L_b + \psi_b L_a) L_c L_d + (\psi_c L_d + \psi_d L_c) L_a L_b}{(L_a + L_b) L_c L_d + (L_c + L_d) L_a L_b}. \quad (43)$$

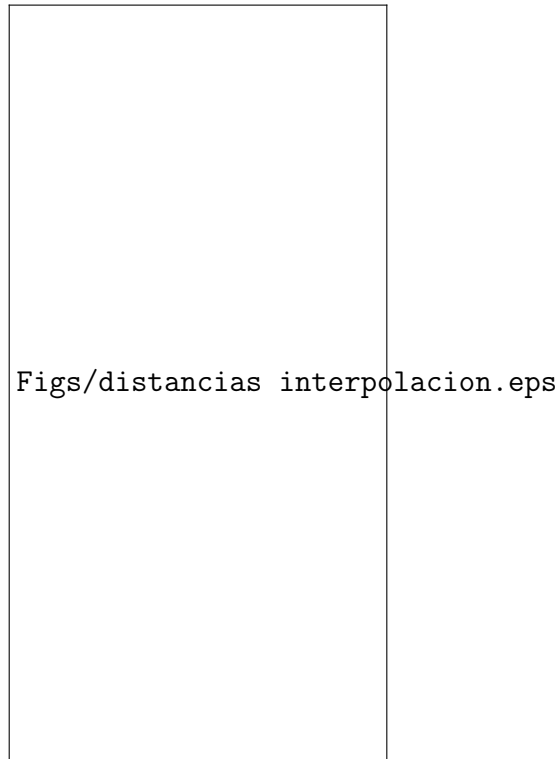


Figura 7. Distancias entre puntos y frontera para aplicar el esquema de interpolación.

Cabe destacar que se lograron identificar 8 distintos casos en los que se debe aplicar el esquema de interpolación. Esto es fundamental para la asignación de las longitudes y valores empleados para ejecutar el algoritmo de interpolación:

- Caso 1: puntos sin $(i + 1, k)$
- Caso 2: puntos sin $(i - 1, k)$
- Caso 3: puntos sin $(i, k + 1)$
- Caso 4: puntos sin $(i, k - 1)$
- Caso 5: puntos sin $(i - 1, k), (i, k + 1)$
- Caso 6: puntos sin $(i + 1, k), (i, k + 1)$
- Caso 7: puntos sin $(i - 1, k), (i, k - 1)$
- Caso 8: puntos sin $(i + 1, k), (i, k - 1)$

6. Resultados

6.1. Resultados y discusión

Los diversos esquemas y detalles numéricos presentados para dar solución a la ecuación de Grad-Shafranov se condensan en el código que se puede encontrar en el siguiente enlace:

<https://goo.su/cUkxtoJ>

La discretización se desarrolló sobre la técnica de diferencias finitas centradas de segundo orden sobre una malla homogénea, y la solución final converge según el esquema de relajación sucesiva (SOR: *Successive over-relaxation*). Las ideas implementadas en el código se pueden apreciar en el siguiente diagrama de flujo.



Figura 8. Diagrama de flujo asociado al esquema de relajación sucesiva.

6.2. Validación del código

Una de los pasos fundamentales de cualquier trabajo asociado con el desarrollo de código es corroborar de alguna manera que los resultados obtenidos a partir de dicha implementación numérica son correctos. Una forma directa de hacerlo consiste en validar los resultados obtenidos numéricamente con soluciones analíticas, y de este modo, se puede determinar si el código funciona correctamente, e incluso estimar su precisión, ventajas, desventajas y limitaciones. De acuerdo con esto, en el presente trabajo se realizó la validación del código desarrollado a partir de la comparación directa con la solución analítica de Solov'ev (ver sec. 4.3).

El punto de partida consiste en asignar valores al conjunto de coeficientes propios de la solución de Solov'ev, ver ecuación (20), los cuales fueron: $R_o = 1.2[m]$, $a = 0.6[m]$, $\kappa = 2.2$, $q = 1.1$ y $B_o = 0.5$. De aquí se tiene el perfil analítico que se usa para comparar directamente con el flujo poloidal obtenido a partir del esquema numérico planteado, ver Figura 9.b . Para obtener la solución numérica se empleó una malla de 110 a lo largo de r y 110 puntos para discretizar el eje z ; por otra parte, se estableció una tolerancia de 10^{-8} al esquema de relajación sucesiva y por último, el D-shape asociado se define con los siguientes parámetros geométricos (ver fig. 3): $R_o = 1.095[m]$, $a = 0.489[m]$, $\kappa = 2.200$ y $\delta = 0.235$. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 9, de la que se puede observar que tanto la solución numérica como la solución analítica tienen comportamientos en el perfil de flujo poloidal muy similares, es decir, el mapa de colores de ψ tanto para la solución analítica, como la solución numérica son idénticos a simple vista. Esta observación permite suponer que el código funciona correctamente, pues recrea a simple detalle

la solución esperada; sin embargo, para tener completa certeza, es necesario analizar el error con mayor profundidad, y para ello, se calculó el valor absoluto de la diferencia entre el flujo poloidal numérico y analítico para identificar posibles diferencias sutiles. En la figura 10 se presenta el comportamiento del error sobre la región central del plasma, a lo largo del eje radial en $Z = 0$, también se presenta el comportamiento de la solución analítica, línea continua, y de la solución numérica, puntos azules.

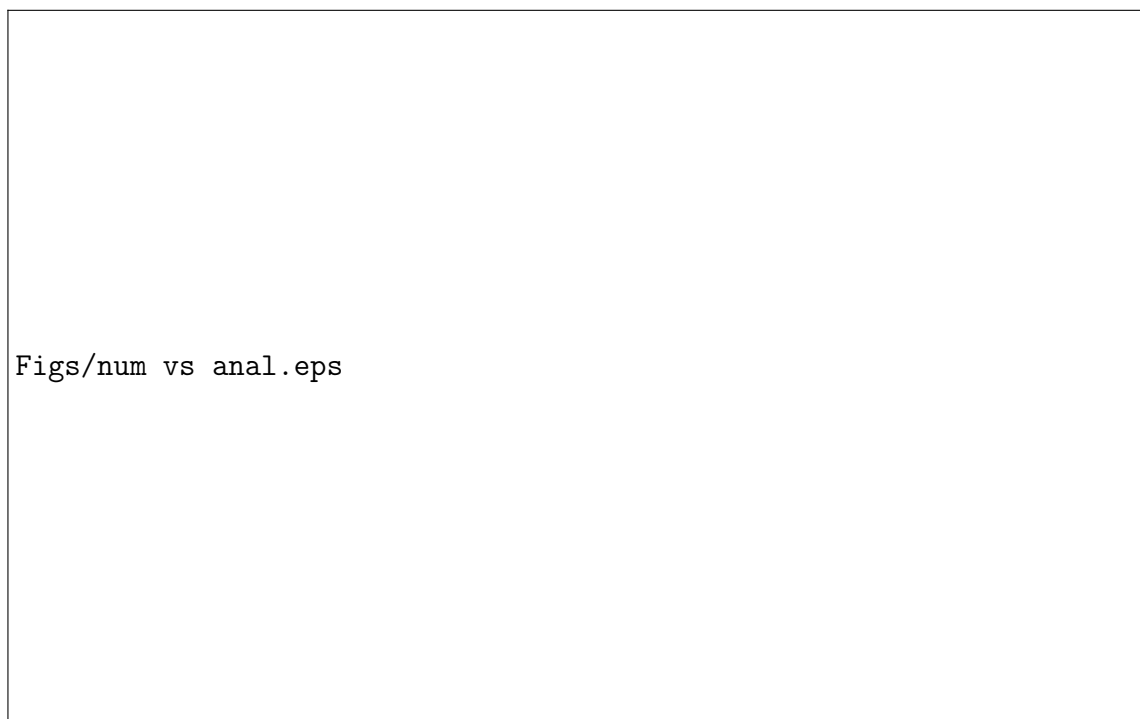


Figura 9. a) Flujo poloidal obtenido a partir de la implementación numérica en el código elaborado y b) Flujo poloidal analítico calculado a partir de la solución analítica de Solov'ev.

La figura 10 permite evidenciar que la diferencia entre la solución analítica y la numérica es del orden de 10^{-4} y tiene su máximo valor en las cercanías del eje magnético de la columna de plasma. Este error es esperado ya que como se mencionó, la ecuación de Grad-Shafranov se

discretizó con un esquema de diferencias finitas de segundo orden ($\sim h^2$), y con los puntos empleados el paso de malla h ronda el valor de ~ 0.011 , lo cual conduce a errores del orden de 10^{-4} , tal como se ha reportado; sin embargo, es prudente mencionar que la naturaleza del esquema de relajación sucesiva, el error puede aumentar dado al proceso iterativo que busca la convergencia, induciendo a errores por redondeo; incluso, el mismo esquema de interpolación puede afectar al comportamiento del error. Por tales motivos y con el ánimo de identificar aspectos generales del comportamiento del error, se realizó un barrido de soluciones numéricas en los que se varió la cantidad de puntos de malla a diferentes valores de tolerancia.

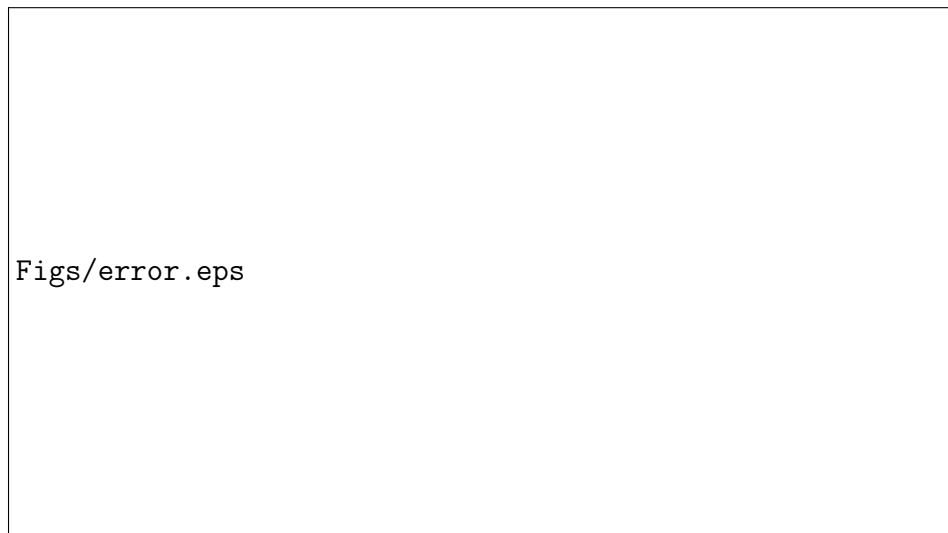


Figura 10. Comportamiento de la solución numérica (puntos azules) respecto a la solución analítica (línea roja) a lo largo del eje radial sobre $Z = 0$ y su respectiva discrepancia, curva verde.

El comportamiento del error como función de la cantidad de puntos a diferentes tolerancias se presenta en la figura 11, de la que se pueden apreciar una serie de observaciones. En primer lugar, el error para pocos puntos de malla (~ 30 con $h \sim 0.04$) es prácticamente el mismo a diferentes valores de tolerancia, siendo un valor relativamente alto ($\sim 10^{-3}$) pero esperado según el esquema

de diferenciación empleado. En la práctica no es recomendable ejecutar el código con pocos puntos de malla ($Np < 60$) pero se ha presentado como ejercicio puramente académico, así como tampoco es recomendable emplear una gran cantidad de puntos porque implica gran coste computacional, por ende, a menos que se requiera una mayor precisión, lo más eficiente es ejecutar el código con puntos de malla entre 100 y 120 y una tolerancia de 10^{-8} , de esta forma se logra una buena relación entre el tiempo de ejecución y la precisión obtenida. En este orden de ideas, la segunda observación que tiene lugar se asocia al hecho de que a medida que se aumentan los puntos de malla, existe una disminución del error, principalmente para tolerancias por debajo de 10^{-7} , ver fig. 11b, pero a partir de los 100 puntos de malla la reducción del error es poco representativo, es decir, a medida que se aumentan los puntos de malla, hay un cambio en la quinta o sexta cifra significativa del error. Cerca de los 150 puntos de malla, se esperan errores del orden de 10^{-5} , pero estos no se logran apreciar, ver Figura 11.b, lo cual puede ser un indicador de la limitación del código, donde los errores acumulados por redondeo o por el propio esquema de interpolación pueden estar afectando el error global de la solución numérica. En tercer y último lugar, se puede apreciar que no hay un cambio significativo en el comportamiento del error respecto a los valores de tolerancia presentados, por lo cual, se ratifica la idea de emplear 10^{-8} como valor de tolerancia apropiado ya que principalmente reduce los ciclos iterativos de convergencia, evitando así desgaste computacional innecesario.



Figura 11. Comportamiento del error global de la solución numérica como función del número de puntos a diferentes valores de tolerancia.

Todos estos resultados presentados dan un buen diagnóstico del código en general, que en conjunto con las respectivas observaciones y/o advertencias mencionadas, permiten dar paso a la verificación de la preservación de ciertos parámetros físicos para obtener las condiciones físicas propias de escenarios experimentales o la indagación de diferentes escenarios por explorar. La validación de este tópico se presenta en la siguiente sección y tiene como objetivo someter el código con parámetros experimentales y determinar si es capaz no sólo de preservar las cantidades físicas exigidas desde el algoritmo, sino reproducir valores característicos de estos sistemas.

6.3. Preservación de parámetros físicos

Ahora bien, en este punto una vez validado el comportamiento del error global del código, es prudente y necesario verificar que las soluciones arrojadas por el *solver* desarrollado pueden recrear escenarios físicos reales, puesto que con este fin se realizó este trabajo, para que en futuros proyectos, se apliquen estos resultados a simulaciones dinámicas y estudio del equilibrio en ge-

neral. Para lograr esta meta, en la sección 5.3 se introdujeron parámetros de ajuste; en particular se indicó cómo calcular o asignar valores a estos con tal fin. Ejemplo de ello, se introdujo P_a para preservar la presión en el eje magnético y α_g para la preservación de la corriente en el plasma. Con esto en mente, se realizó una comparación directa con los datos experimentales registrados en el dispositivo de confinamiento magnético tipo tokamak MAST (*Mega Ampere Spherical Tokamak*). Para ello se introdujeron en el código los parámetros geométricos propios del dispositivo y se alimentó el código con el valor esperado de campo magnético, presión en eje magnético y corriente de plasma. Los resultados de la simulación y el paralelo de comparación se muestran en las figuras 12 y 13, así como en la tabla 3.

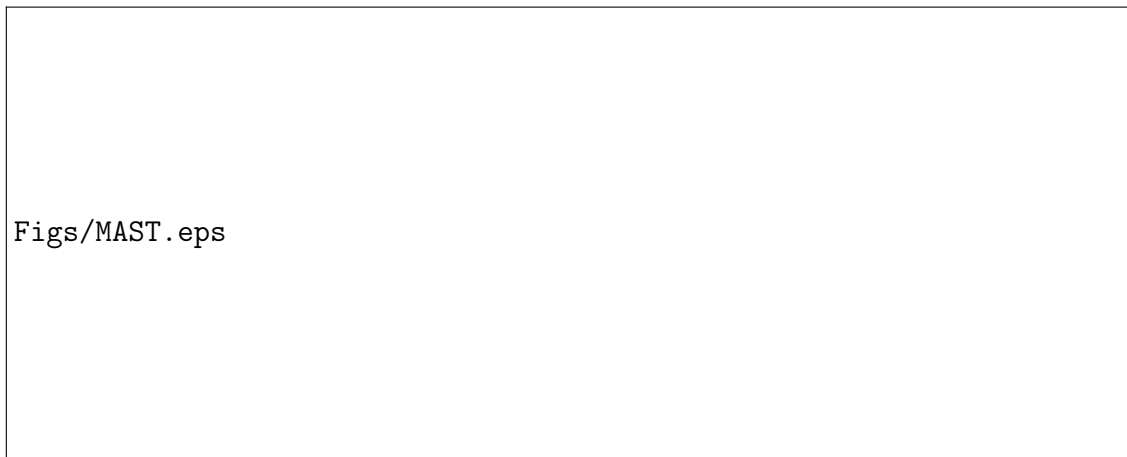


Figura 12. a) Perfiles de campo magnético B_r , B_ϕ y B_z , b) de presión y densidad de corriente a lo largo del eje radial sobre la región central de la columna de plasma obtenidos a través de la solución numérica con el código desarrollado empleando parámetros geométricos y cantidades físicas características de dispositivo MAST.

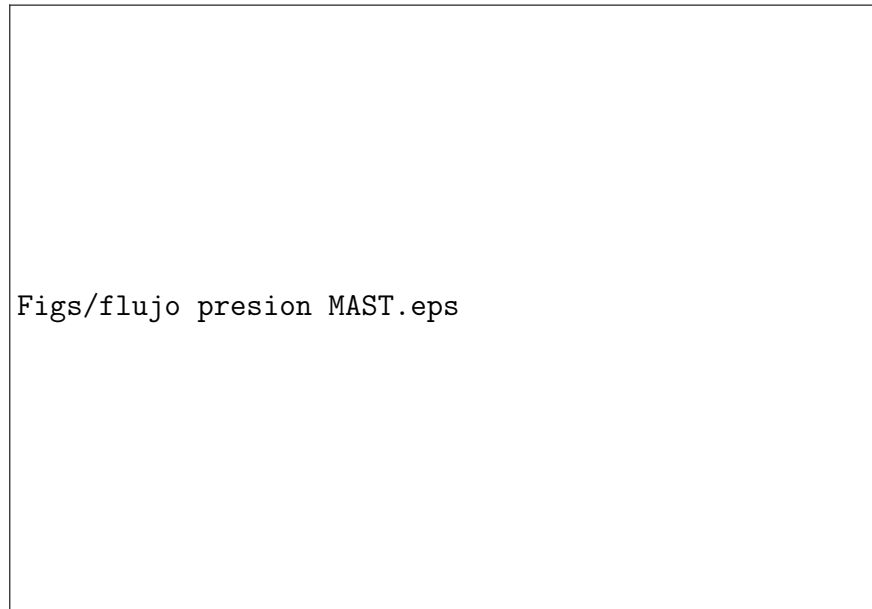


Figura 13. Perfiles de a) los isocontornos del flujo magnético poloidal y b) de presión en el plano poloidal rz obtenidos a través de la solución numérica con el código desarrollado empleando parámetros geométricos y cantidades físicas características de dispositivo MAST.

Parámetros	GS Solver	MAST
Radio mayor R_0 [m]	0.70	0.70
Radio menor a [m]	0.50	0.50
Elipticidad k	2.00	2.00
Triangularidad δ	0.30	0.30
Campo toroidal eje magnético B_ϕ [T]	0.62	0.60
Corriente toroidal eje magnético I_t [MA]	1.00	1.00
Presión en el eje magnético P_a [KPa]	30.00	30.00

Tabla 3

Comparación entre valores obtenidos a partir del código y los valores experimentales para el dispositivo MAST

En la Figura 12 es posible identificar que la componente toroidal del campo magnético B_ϕ decrece con el radio según la relación $1/r$ aproximadamente, lo cual es típico en este dispositivo, aún más, cuando su valor en la frontera interna, $r \sim 0.2\text{m}$, el campo es cercano a 2T y en la frontera

o borde exterior ($r \sim 1.15\text{m}$) $B_\phi \sim 0.2\text{T}$, lo cual coincide con valores registrados en la literatura. Un detalle a resaltar es que la presión en el eje magnético y la corriente en el plasma se satisfacen de forma muy precisa, lo cual es de esperarse según lo descrito en la sección 5.3, evidenciando así la correcta implementación de los algoritmos. Por su parte, se mencionó que el campo en el eje magnético no es preservado en la simulación, pero sí se pide como parámetro de entrada para asignar el valor numérico a g_a , y al final de la simulación el campo en el eje magnético estaría cercano al deseado; y este hecho se puede apreciar con total claridad en la tabla 3, donde el campo experimental es de 0.6T y el campo obtenido es de 0.62T aproximadamente. De acuerdo con esto, se puede evidenciar que los valores obtenidos mediante el *solver* desarrollado en este trabajo, recrea en muy buena medida el escenario típico del dispositivo planteado Ludwig (1997).

Otra observación importante es que las curvas de la Figura 12.b asociadas con los perfiles de densidad de corriente y presión, son similares en muchos aspectos a los obtenidos por Riaz Khan en su trabajo doctoral en el que simula la dinámica no lineal en estos dispositivos Riaz et al. (Year); Mizuguchi et al. (2005). Las discrepancias, asociadas en su mayoría con el perfil de J_ϕ , están justificadas por la selección de la función polinómica de $g(\psi_n)$, pues no son idénticas, adicionalmente, el perfil de presión sí es muy similar al registrado por Khan, ya que sí se empleó la misma función de presión y es este perfil muy adecuado para el estudio de inestabilidades de borde exterior, al tener un perfil aplanado en el centro de la columna de plasma. Este hecho en particular evidencia un acierto del código presentado en este trabajo al arrojar resultados similares no sólo a datos experimentales, si no similares a otros resultados basados en estudios computacionales.

Finalmente, con el ánimo de verificar la no existencia de monopolos magnéticos, prueba

muy común en estas simulaciones, se calculó la divergencia del campo magnético, la cual debe ser cero y de esta forma comprobar que se cumple la segunda ecuación de Maxwell, ec.(8). Los resultados se presentan en la Figura 14,

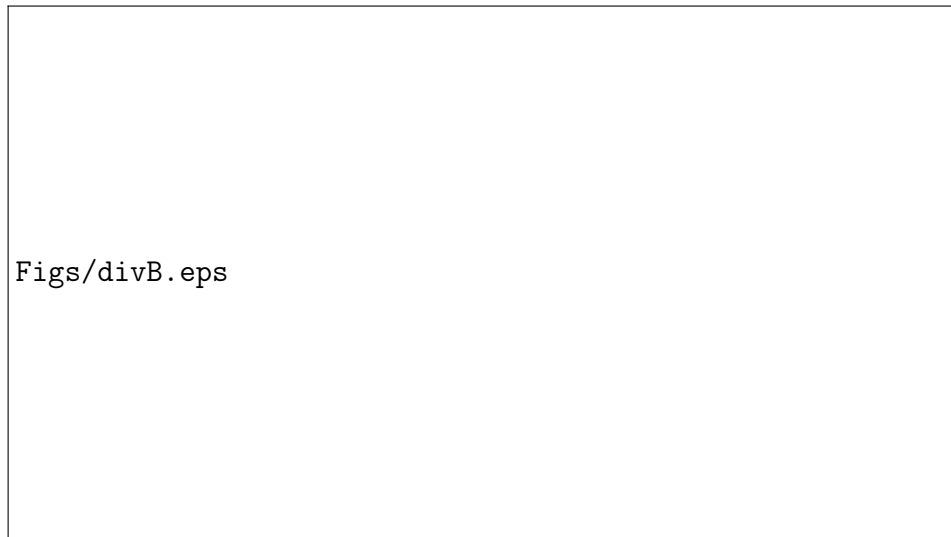


Figura 14. a) Divergencia del campo magnético dentro de al región de plasma y b) divergencia del campo magnético para $z = 0$.

que como es de esperarse, al estar obteniendo soluciones numéricas el cero perfecto en la divergencia del campo magnético es imposible de alcanzar; sin embargo, sí es posible notar que en toda la región de simulación de interés ó región interna del plasma, la divergencia del campo magnético es muy cercana al cero, tomando valores del orden de 10^{-15} . También se puede observar que en las cercanías de la separatriz o frontera del plasma se encuentran los puntos de malla con los valores más altos, indicando que quizá esto se deba principalmente al esquema de interpolación aplicado, pero dado que no son valores elevados respecto a valores en los demás puntos de malla, no es algo de preocupar, es esto sólo una observación. Como ya se mencionó, este resultado es positivo para la validación del código, ya que estos valores tan pequeños pueden ser

justificados como a errores de máquina y se pueda garantizar que la ecuación 8 se satisface en el *solver* desarrollado.

6.4. Corrimiento de Shafranov

Con el ánimo de poner a prueba la aplicabilidad del código desarrollado se realiza un breve estudio cualitativo del corrimiento de Shafranov, el cual se refiere al desplazamiento del eje magnético respecto al radio mayor. Realizar a profundidad este tipo de estudios permite encontrar los valores óptimos de triangularidad para mitigar el modo RWM(resistive wall mode) $n=0$ Song et al. (2021); Lee et al. (2017), y es por ello que se decide analizar de forma resumida el efecto de la triangularidad en el corrimiento de Shafranov. De este modo se obtuvo el equilibrio para dos configuración toroidales idénticas salvo sus valores de triangularidad, pues la primera configuración tendrá triangularidad positiva y la segunda triangularidad negativa.

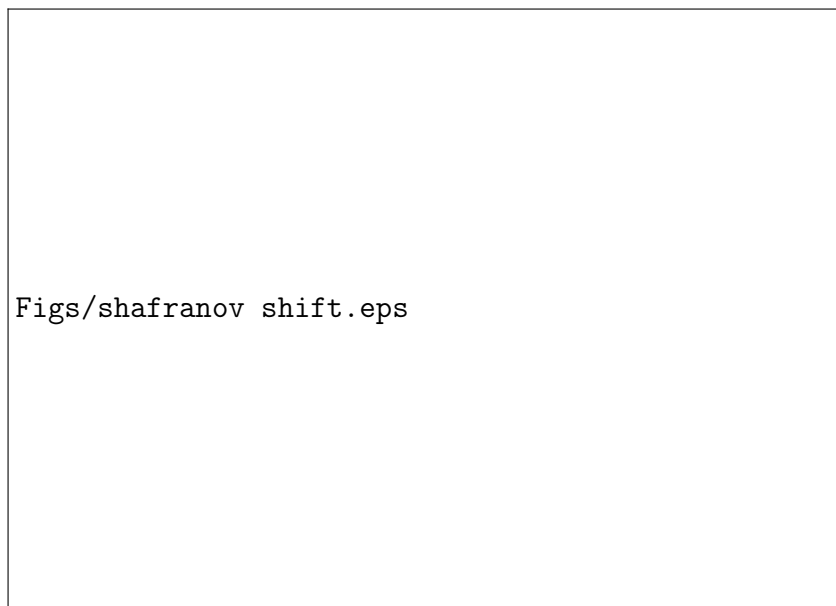


Figura 15. Corrimiento de Shafranov: a) las superficies de contorno de ψ muestran un mayor corrimiento para una triangularidad negativa. b) Comportamiento del flujo poloidal normalizado y la componente del campo B_ϕ sobre $Z = 0$. Los campos se superponen para ambas triangularidades.

En la figura 15.a se puede evidenciar cómo para la configuración con $\delta < 0$ el corrimiento de Shafranov es ligeramente más notorio respecto la configuración con $\delta > 0$. En adición, en la figura 15.b, se puede apreciar que la triangularidad no afecta significativamente el campo magnético, lo que puede dotar de una mayor estabilidad a las configuraciones con triangularidad negativa, $\delta < 0$, tal como se ha registrado en experimentos recientes Austin et al. (2019).

7. Conclusiones

- Los reactores de fusión termonuclear presentan unas ventajas claras en comparación con las formas tradicionales de obtención de energía, como una mayor eficiencia, menor generación de desechos radioactivos y mayor seguridad, entre otras; es por ello, que el estudio del plasma en estos dispositivos resulta fundamental para poder diseñar y construir futuros reactores que puedan suplir la demanda energética mundial. El punto de partida para esto es el estudio del plasma en equilibrio estático y estacionario, donde al usar el modelo magnetohidrodinámico para describir este sistema, surge la ecuación de Grad - Shafranov, la cual describe completamente el plasma bajo estas condiciones.
- En este trabajo se desarrolló un código que resuelve la ecuación de Grad - Shafranov con frontera fija, al emplear la técnica de discretización de diferencias finitas centradas de segundo orden junto con un esquema de interpolación para aquellos puntos de malla en los cuales no se puede aplicar la técnica numérica. Este código se validó por comparación directa con la solución de Solov'ev, una de las pocas soluciones analíticas que existen de la ecuación de Grad - Shafranov, donde se encontró que el error máximo es del orden de $\sim 10^{-4}$ al

usar una malla de ~ 110 puntos en r y ~ 110 puntos en z con una tolerancia de 10^{-8} , los cuales son los parámetros numéricos óptimos en cuanto a la relación de tiempo de cómputo y precisión. Cabe destacar que este error se puede reducir aumentando los puntos de malla y disminuyendo la tolerancia, sin embargo, aumentar mucho los puntos de malla ($Np > 150$) genera tiempos de cómputo extensos, superior a 20 minutos.

- También se puso a prueba la capacidad del código para determinar el equilibrio de sistemas experimentales. Para ello, se tomaron los parámetros geométricos y físicos del MAST (*Mega Ampere Spherical Tokamak*), se calculó el flujo poloidal y se encontraron los perfiles de presión, corriente y campo magnético. Estos valores obtenidos numéricamente se compararon con los valores experimentales, donde se encontró que el código reproduce en buena medida el sistema físico, puesto que el campo magnético experimental y la solución numérica difieren levemente, mientras que en la presión y corriente en el plasma hay control total gracias al algoritmo empleado.
- Finalmente, la última prueba a la que se sometió el código fue al cálculo de la divergencia del campo magnético, donde se encontró que esta divergencia es prácticamente nula, con lo cual, el código es consistente con la segunda ecuación de Maxwell asociada con la nulidad de la divergencia de campo magnético.
- En conclusión se realizó un código que resuelve la ecuación de Grad - Shafranov con frontera fija, dada por expresiones analíticas que permiten tener control total de la geometría del plasma (D - Shape), donde los resultados obtenidos fueron validados y son consistentes

con resultados analíticos y experimentales. Este trabajo, al dar la descripción del equilibrio permitirá posteriormente, como trabajo futuro, la simulación de la dinámica en el plasmas confinados magnéticamente en tokamaks para el estudio de la dinámica global e inestabilidades.

Referencias Bibliográficas

- Atanasiu, C., Günter, S., Lackner, K., and Miron, I. (2004). Analytical solutions to the grad-shafranov equation. *Physics of plasmas*, 11(7):3510–3518.
- Austin, M. E., Marinoni, A., Walker, M., Brookman, M., DeGrassie, J., Hyatt, A., McKee, G., Petty, C., Rhodes, T., Smith, S., et al. (2019). Achievement of reactor-relevant performance in negative triangularity shape in the diii-d tokamak. *Physical Review Letters*, 122(11):115001.
- Beidler, C. D. (2004). Advantages and disadvantages of stellarators. *Physics of Plasmas*, 11(5):2682–2688.
- Bhattacharjee, A. (2019). Hidden symmetries and fusion energy. .
- Boyd, T. M., Boyd, T., and Sanderson, J. (2003). *The physics of plasmas*. Cambridge university press.
- Burbidge, M., Burbidge, G., Fowler, W. A., and Hoyle, F. (1957). Synthesis of the elements in stars. *Reviews of Modern Physics*, 29(4):547.
- Cizek, J., Vilemova, M., Lukac, F., Koller, M., Kondas, J., and Singh, R. (2019). Cold sprayed tungsten armor for tokamak first wall. *Coatings*, 9(12):836.
- Eich, T., Abdullaev, S., Buechl, K., Carreras, B. A., Chernyshev, F. V., Connor, J. W., Cottrell, G. A., Dinklage, A., Fiedler, S., Grigull, P., and et al. (1993). Achievement of sustained net plasma heating in a tandem mirror reactor. *Nature*, 365(6448):333–335.

- Farnsworth, P. T. (1966). Electric discharge device for producing interactions between nuclei. US Patent 3,258,402.
- Freidberg, J. P. (2014). *Ideal MHD*. Cambridge University Press.
- González, A. O., Domingues, M., Mendes, O., Kaibara, M., and Prestes, A. (2015). Grad-shafranov reconstruction: Overview and improvement of the numerical solution used in space physics. *Brazilian Journal of Physics*, 45:493–509.
- Grad, H. and Shafranov, V. D. (1958). Magnetohydrodynamic equilibrium configurations with toroidal plasma currents. *Nuclear Fusion*, 1(3):211.
- Harms, A. A. (2002). *Principles of fusion energy*. Allied Publishers.
- Hazeltine, R. D. and Meiss, J. D. (2003). *Plasma confinement*. Courier Corporation.
- Helander, P., Beidler, C., Bird, T., Drevlak, M., Feng, Y., Hatzky, R., Jenko, F., Kleiber, R., Proll, J., Turkin, Y., et al. (2012). Stellarator and tokamak plasmas: a comparison. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(12):124009.
- Hou, Y., Kim, C. C., Zhu, P., Zou, Z., Hu, Y., Yan, X., and Team, N. (2019). Numerical study of transition between even and odd toroidal alfvén eigenmodes on east. *Physics of Plasmas*, 26(8):082505.
- I.E., T. (1959). Theory of the magnetic thermonuclear reactor, part i plasma physics and the problem of controlled thermonuclear reactions. p 3-19 (transl).

- Jardin, S. (2010a). *Computational methods in plasma physics*. CRC press.
- Jardin, S. C. (2010b). *Computational methods in plasma physics*.
- Jeon, Y. (2015). Development of a free boundary tokamak equilibrium solver (tes) for advanced study of tokamak equilibria. *Journal of the Korean Physical Society*, 67.
- Klinger, S., Alonso, A., Andreeva, T., Bird, T., Bosch, H. S., Bozhnikov, S., Burhenn, R., Butenschön, B., Cappa, A., Cseh, G., and et al. (2016). Overview on the first wendelstein 7-x high-performance operation campaign and comparison to the vm-plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 59(1):014002.
- Lee, J., Freidberg, J., Cerfon, A., and Greenwald, M. (2017). An analytic scaling relation for the maximum tokamak elongation against $n=0$ mhd resistive wall modes. *Nuclear Fusion*, 57:066051.
- Liu, S., Tang, Q., and Tang, X.-z. (2021). A parallel cut-cell algorithm for the free-boundary grad-shafranov problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 43(6):B1198–B1225.
- López, J., Orozco, E., and Dougar-Zhabon, V. (2019). Fixed boundary grad-shafranov solver using finite difference method in nonhomogeneous meshgrid. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1159, page 012017. IOP Publishing.
- Ludwig, G. O. (1997). Direct variational solutions of the tokamak equilibrium problem. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 39(12):2021.

- Matzen, M. K., Sinars, D. B., Cuneo, M. E., Slutz, S. A., Vesey, R. A., Herrmann, M. C., Porter, J. L., Rochau, G. A., Rovang, D. C., Savage, M. E., and et al. (2007). High yield inertial confinement fusion with plasma surrounding the laser entrance hole. *Physical Review Letters*, 98(25):255001.
- Miyamoto, K. (1997). *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Iwanami Book Service Center Tokyo.
- Miyamoto, K. (2005). *Plasma physics and controlled nuclear fusion*, volume 38. Springer Science & Business Media.
- Mizuguchi, N., Khan, R., and Hayashi, T. (2005). Nonlinear simulation of edge-localized mode in spherical tokamak. *IEEJ Transactions on Fundamentals and Materials*, 125(11):934–937.
- on Hidden Symmetries, S. C. and Energy, F. (2020). Empowering the future of fusion energy.
- Pfalzner, S. (2006). *An introduction to inertial confinement fusion*. CRC Press.
- Riaz, K. et al. (2006 (School Year)). *Simulation study on nonlinear dynamics of ballooning modes in a spherical tokamak*. PhD thesis, Department of Fusion Science, School of Physical Sciences The Graduate University for Advanced Studies, JAPAN.
- Rubbia, C. (1995). A comparison of the safety and environmental advantages of the energy amplifier and of magnetic confinement fusion. Technical report, .

- Sakharov, A. (1958). Fizika plasmy i problema upravlyaemykh termoyadernykh reaktsii(plasma physics and problems of controlled thermonuclear reactions).
- Shafranov, V. (1966). Plasma equilibrium in a magnetic field. *Reviews of plasma physics*, 2:103.
- Soloviev, L. (1968). On the equilibrium of a toroidal plasma. *Soviet Journal of Plasma Physics*, 4:274–279.
- Song, J., Paz-Soldan, C., and Lee, J. (2021). Impact of negative triangularity plasma shaping on the $n = 0$ resistive wall mode in a tokamak. *Nuclear Fusion*, 61(9):096033.
- Stangeby, P. C. et al. (2000). *The plasma boundary of magnetic fusion devices*, volume 224. Institute of Physics Pub. Philadelphia, Pennsylvania.
- Takeda, T. and Tokuda, S. (1991). Computation of mhd equilibrium of tokamak plasma. *Journal of computational physics*, 93(1):1–107.
- Weinberg, S. (1967). Inertial electrostatic confinement of ionized fusion gases. *Physical Review Letters*, 19(21):1264.
- Wesson, J. (1978). Hydromagnetic stability of tokamaks. *Nuclear Fusion*, 18(1):87.
- Wesson, J. (2004). *Tokamaks*. Oxford University Press, Oxford, UK, 3rd edition.