

**APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV PARA EL ANALISIS Y
PRONOSTICO DE SERIES DE TIEMPO**

CARLOS ANDRÉS ACEVEDO BELTRAN

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICO MECANICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA**

2011

**APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV PARA EL ANALISIS Y
PRONOSTICO DE SERIES DE TIEMPO**

CARLOS ANDRÉS ACEVEDO BELTRAN

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
INGENIERO INDUSTRIAL**

Director de proyecto

CARLOS EDUARDO DÍAZ BOHÓRQUEZ

Ingeniero Industrial

Codirector(a) de proyecto

María Eugenia Serrano Acevedo

Licenciada en Matemáticas

Msc en Enseñanza de las Matemáticas-Msc. En Ciencias Económicas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MÉCANICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA**

2011

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	14
1.1 ANTECEDENTES	14
1.2 PROBLEMA	15
1.3 JUSTIFICACIÓN	15
1.3.1 Magnitud del Problema	15
1.3.2 Trascendencia del Problema	16
1.4 PROYECTOS RELACIONADOS	16
1.5 OBJETIVOS	17
1.5.1 Objetivo General	17
1.5.2 Objetivos Específicos	17
1.6 HIPÓTESIS	18
1.7 ALCANCE DEL TRABAJO	18
2. MARCO TEORICO Y CONCEPTUAL	20
2.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS	20
2.2 CADENAS DE MARKOV	21
2.2.1 Clasificación de Estados en una Cadena de Markov	23
2.2.1.1 Estados Recurrentes y Estados Transitorios.	23
2.2.2 Pronósticos a largo plazo con cadenas de Markov de orden uno	23
2.2.3 Probabilidades de estado estable de una cadena de Markov	24
2.3 CADENAS DE MARKOV DE ORDEN SUPERIOR	25
2.3.1 Proposición 1:	27
2.3.2 Estimación de Parámetros	29
2.3.3 Formulación de Programación Lineal para la Estimación de λ_i	30

2.4 APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV EN LA REALIZACIÓN DE PRONÓSTICOS	33
2.4.1 Newsboy's Problem	33
2.4.2 Predicción en Páginas Web	34
2.5 MODELOS DE FORMULACIÓN ESTADÍSTICOS	35
2.5.1 Propiedad de primer orden	35
2.5.2 Propiedad de orden superior	35
2.6 SERIES DE TIEMPO	36
2.6.1 Componentes de una Serie de Tiempo	37
2.6.1.1 Tendencia.	37
2.6.1.2 Componente Cíclico.	37
2.6.1.3 Componente Estacional.	37
2.6.1.4 Componente Aleatorio.	37
2.6.2 Técnicas de Pronósticos con Series de tiempo	37
2.6.2.1 Técnicas de pronóstico para datos estacionarios.	38
2.6.2.2 Técnicas de pronóstico para datos con una tendencia.	38
2.6.2.3 Técnicas de pronóstico para datos con estacionalidad.	38
2.6.2.4 Técnicas de pronóstico para series cíclicas.	39
2.6.3 Medición del Error en el Pronóstico	39
2.6.3.1 Desviación absoluta de la media (DAM).	40
2.6.3.2 Error medio cuadrado (EMC).	40
2.6.3.3 Porcentaje de error medio absoluto (PEMA).	40
2.6.3.4 Porcentaje medio de error (PME).	41
2.6.4 Medición de la Precisión del Pronóstico	41
3. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN	42
3.1 ANÁLISIS ESTADÍSTICOS DE LAS SERIES	42
3.1.1 Análisis de la serie de Precios del Café	42
3.2 APLICACIÓN DEL MODELO DE CADENAS DE MARKOV DE PRIMER ORDEN	45

3.2.1 Aplicación del Modelo de Cadenas de Markov de Primer Orden para la serie de Precios del Café:	46
3.2.1.1 Pronósticos en el corto plazo.	47
3.2.1.2 Pronósticos en el largo plazo.	50
3.2.2 Aplicación del Modelo de Cadenas de Markov de Orden Superior:	52
3.2.2.1 Aplicación del modelo con $m=10$ y $n=2$ para la serie de Precios del Café:	52
3.2.2.2 Aplicación del modelo con $m=10$ y $n=3$ para la serie de Precios del Café:	56
3.2.2.3 Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=2$ para la serie de Precios del Café:	58
3.2.2.4. Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=3$ para la serie para precios del Café:	59
3.2.2.5 Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=4$ para la serie de Precios del Café:	60
3.2.2.6 Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=5$ para la serie de Precios del Café:	61
3.3 OBTENCIÓN DE PRONÓSTICOS CON OTROS MODELOS	62
3.4 COMPARACIÓN DE LOS MODELOS	62
4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES:	64
BIBLIOGRAFIA	66
ANEXOS	68

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Información Básica de la serie de Precios del Café	42
Tabla 2. Pronósticos a corto plazo con cadenas de Markov de Primer Orden	48
Tabla 3. Pronósticos a corto plazo a través de media móvil con un retraso	49
Tabla 4. Errores de pronóstico obtenidos con los modelos de Markov de primer orden y el modelo de media móvil con un rezago	50
Tabla 5. Pronósticos a largo plazo con el modelo de Markov de primer orden	51
Tabla 6. Pronóstico del precio del café con cadenas de Markov de orden 2	56
Tabla 7. Pronósticos a corto plazo del precio del café con cadenas de Markov de orden 3 con 10 estados	57
Tabla 8. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 2 y 5 estados	58
Tabla 9. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 3 y 5 estados	59
Tabla 10. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 4 y 5 estados	60
Tabla 11. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 5 y 5 estados	61
Tabla 12. Valores de los errores para cada uno de los modelos analizados	62

LISTA DE GRAFICOS

	Pág.
Gráfico 1. Comportamiento de la serie de precios del café	43
Gráfico 2. Correlograma de la serie de precios del Café	44
Gráfico 3. Análisis de Tendencia para la serie de precios del Café	45

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO 1. SERIE DE TIEMPO DE PRECIOS DEL CAFÉ COMPRENDIDO ENTRE 6 DE ENERO DE 2010 Y EL 27 DE OCTUBRE DE 2010	68
ANEXO 2. CLASIFICACIÓN EN ESTADOS DE LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ	69
ANEXO 3. MATRICES DE FRECUENCIAS PARA DE LA SERIE PRECIOS DEL CAFÉ CON M=10	70
ANEXO 4. MATRICES DE TRANSICIÓN DE LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ CON M=10	71
ANEXO 5. PRONÓSTICOS CON PROMEDIOS MÓVILES	72
ANEXO 6. PRONOSTICOS CON EL METODO DE ATENUACION DOBLE	78
ANEXO 7. PARAMETROS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS PARA OBTENER LOS PRONOSTICOS DE LA SERIE PRECIOS DEL CAFÉ CON M=5	79

RESUMEN

TITULO: APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV PARA EL ANALISIS Y PRONOSTICO DE SERIES DE TIEMPO*

AUTOR: CARLOS ANDRES ACEVEDO BELTRAN**

PALABRAS CLAVES: Procesos Estocásticos; series de tiempo; cadenas de Markov de primer orden; cadenas de Markov de orden superior; pronósticos.

DESCRIPCIÓN

Este proyecto busca analizar la factibilidad del uso de cadenas de Markov de primer orden y de orden superior para realizar pronósticos de series de tiempo específicamente tomando en cuenta una serie de precios, con lo cual se desea analizar la viabilidad de poder utilizar otro método alternativo a los conocidos hoy en día, todo esto con el fin de contar con mas herramientas al momento de realizar un pronóstico veraz y reducir el riesgo presente en la toma de decisiones ya sea de tipo empresarial o inversionista.

Para el desarrollo de este proyecto se recolectaron los datos correspondientes a los precios del Café registrados desde Enero hasta Mayo del presente año. Con estos datos en primer lugar se analizaron los componentes estadísticos y el respectivo comportamiento de la serie, luego se clasificaron por rangos los cuales formaron los respectivos estados de la cadena de Markov y a continuación se aplicaron los modelos de primer orden y de orden superior de Markov para obtener los respectivos pronósticos, luego se halló la precisión de estos valores de pronóstico y se aplicaron las respectivas mediciones del error, simultáneamente se utilizaron los métodos de media móvil y de atenuación exponencial para hacer la respectiva comparación con los modelos de Markov para analizar la efectividad de estos modelos frente a otros modelos de pronóstico de uso común.

Al final se puede observar que tanto el modelo de primer orden como el de orden superior presentan un buen comportamiento al hacer los respectivos pronósticos en el corto plazo frente a los otros modelos comparados, teniendo en cuenta que la serie de precios presentó un comportamiento tendencial.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ingenierías Físico – Mecánicas, Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Director: Carlos Eduardo Diaz Bohorquez, Co- Director. Maria Eugenia Serrano Acevedo

ABSTRACT

TITLE: APPLICATION OF MARKOV CHAINS TO ANALYZE AND FORECAST TIME SERIES*

AUTHOR: CARLOS ANDRES ACEVEDO BELTRAN**

KEY WORDS: Stochastic processes, time series, first order discrete time Markov Chains, Higher order Markov Chains, forecast.

DESCRIPTION

This project seeks to analyze the feasibility of using Markov chains of first order and higher order to carry out forecasts of time series specifically taking into account a range of prices, wherewith is desired to analyze the viability of using an alternative method different to those well-known today, all this in order to have more tools at the time of carrying out an accurate prognosis and reducing the risk involved in making decisions either for business or investments.

For the development of this project data for coffee prices recorded from January to May of this year were collected. With these data, we first analyzed the statistical components and the corresponding behavior of the series, then the data were classified in ranges which formed the respective states of the Markov chain and after that the Markov models of first order and higher order were applied for the respective forecasts, then the accuracy of these forecasts values was found and the respective measurement error methods were applied, simultaneously moving average and exponential smoothing methods were used to make the comparison with the respective Markov models to analyze the effectiveness of these models compared to other forecasting models in common use.

At the end you can see that both the first-order model and the higher order model have a good performance when making the respective forecasts in a short term versus the other models compared, considering that the price series presented a trend behavior.

* Graduation Project

** Faculty of Engineering Physics - Mechanics, School of Industrial and Business Director: Carlos Eduardo Bohorquez Diaz, Co-Director. Maria Eugenia Serrano Acevedo

INTRODUCCIÓN

En el mundo actual, el manejo de pronósticos tiene gran importancia para disminuir el riesgo cuando se tiene que tomar decisiones importantes en el ámbito empresarial e inversionista. En varios departamentos de una empresa se hace necesario el uso de estos como herramienta fundamental para el funcionamiento corporativo, ejemplo de estos son: el departamento de compras, de manufactura y de ventas, ya sea con el propósito de determinar volúmenes de ventas, compras, nivel de operación, demandas, o con otros propósitos un poco menos comunes como planes para desarrollar plantas nuevas, elaboración de nuevos productos, nuevos métodos de ensamble o planes de financiamiento.

Es vital tener en cuenta que muchos aspectos empresariales no se deben dejar al azar ni se debe confiar en la intuición; realizar pronósticos es una tarea que puede representar una gran ayuda en toda decisión que se deba tomar bajo riesgo, ya que todo lo demás depende de la buena información histórica que se posea, de la evolución del mercado y de la elección de un buen método de pronóstico, los cuales pueden resultar muy útiles y pueden determinar la detección de un fenómeno, ya sea positivo o negativo, a tiempo para convertirlo en una ventaja o en una desventaja de la empresa.

En el presente proyecto se desea analizar la factibilidad de la utilización de modelos basados en cadenas de Markov para realizar pronósticos, por un lado se tiene en cuenta los ya muy bien conocidos y utilizados modelos de primer orden y por otro lado se utiliza un nuevo modelo basado en cadenas de Markov de orden superior con los cuales se realizan los respectivos pronósticos de una serie de precios del Café.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES

Como antecedente para el desarrollo del presente trabajo de investigación, se puede citar un artículo denominado "Application of Markov Chains to Analyze and Predict the Time Series" (1) donde Tie Liu propone un modelo matemático para analizar series de tiempo a través de cadenas de Markov para poder pronosticar el precio de la carne en un supermercado en la ciudad de AnKang (China), lo cual se logra de manera satisfactoria. Para lograr realizar esta investigación fue necesario llevar una serie de datos históricos de los precios de la carne durante un tiempo determinado, luego se realizó una clasificación de esta serie de datos en estados para poder analizarlo como una cadena de Markov teniendo en cuenta el siguiente marco teórico:

Considerando un modelamiento de series de tiempo X_t a través de una cadena de Markov de primer orden teniendo K estados $E = \{1, 2, \dots, K\}$. Una cadena de Markov discreta de primer orden tiene K estados que satisfacen la siguiente relación:

$$P X_{t+1} = i_{t+1} \quad X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t = P X_{t+1} = i_{t+1} \quad X_t = i_t$$

donde X_t es el estado de una serie de tiempo en el tiempo t e $ij \in E$. Las probabilidades condicionales

$$P X_{t+1} = i_{t+1} \quad X_t = i_t$$

son llamadas las probabilidades de transición de un paso de la cadena de Markov. La matriz $P = (p_{ij})_{k \times k}$ es llamada la matriz de transición de un paso. Se puede notar que los elementos de la matriz P satisfacen las siguientes dos propiedades

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in E \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1^1 \quad \forall i \in E$$

entonces un modelo de primer orden de cadenas de Markov

$$x_{t+1} = Px_t$$

es construido para observar las series de tiempo (1).

Por otro lado propone un modelo de cadenas de Markov de orden superior con el cual asegura que se pueden realizar pronósticos con gran precisión, este modelo se analiza y se aplica más adelante, teniendo en cuenta el enfoque que le dieron otros autores.

1.2 PROBLEMA

Son muchos los métodos utilizados para hacer análisis y pronósticos de series de tiempo, sin embargo en muchos casos no se logra obtener un pronóstico satisfactorio, por lo cual es de suma importancia investigar otro modelo basado en Cadenas de Markov para verificar su eficacia y dado que sea efectivo poder establecer una nueva alternativa para analizar y pronosticar series de tiempo.

1.3 JUSTIFICACIÓN

1.3.1 Magnitud del Problema

El mundo actual demanda una mayor precisión y eficiencia en muchos aspectos de los procesos que se llevan a cabo, específicamente dentro del ámbito económico y financiero se desea obtener mayores rentabilidades asegurando

¹ Esta notación corresponde a la utilizada en este proyecto, sin embargo la notación original del documento citado corresponde a: $\sum_{i=1}^k p_{ij} = 1 \quad \forall j \in E$

un menor riesgo, lo cual es un reto que demanda para toda clase de empresas e inversionistas tener conocimiento y hacer uso de modelos econométricos y matemáticos para realizar pronósticos y de esta manera asegurar un menor riesgo en las operaciones que desean realizar; sin embargo, en muchas ocasiones no se logran obtener valores satisfactorios, lo que ha ocasionado grandes pérdidas económicas para muchas empresas e inversionistas, por lo tanto, si no se prueban nuevos modelos aplicando otra serie de conocimientos relativos a los procesos estocásticos como puede ser el uso de las Cadenas de Markov para analizar y predecir series de tiempo, no se podrá avanzar en el intento de obtener otro tipo de modelo que pueda ser utilizado para realizar este tipo de pronósticos.

1.3.2 Trascendencia del Problema

En la presente investigación se desea analizar la efectividad de la aplicación del modelo de cadenas de Markov de primer orden y de orden superior para realizar pronósticos de precios y/o ventas, con el fin de definir si se puede implementar como una metodología alternativa para realizar pronósticos de series de tiempo, lo cual puede ser de gran trascendencia para todo tipo de empresas e inversionistas ya que si se logra comprobar que el modelo es efectivo y confiable se podrá contar con una nueva herramienta para hacer pronósticos lo cual puede significar la obtención de una gran rentabilidad y/o utilidad a cambio de un menor riesgo en la realización de toda clase de operaciones donde se hace necesario la obtención de algún tipo de pronóstico.

1.4 PROYECTOS RELACIONADOS

Otro modelo el cual involucra el uso de Cadenas de Markov es el modelo “switching” de Hamilton, con el cual se hizo un análisis de la evolución de la inflación trimestral en Colombia (2). En este artículo se expone la necesidad de

usar este modelo debido a que según los autores la metodología de Box-Jenkins estima parámetros invariantes a través del tiempo y por lo tanto su aplicación solo es apropiada para series de tiempo estacionarias en su periodo completo de estudio; por lo tanto se hace necesario trabajar con un método donde se pueda modelar una serie que exhibe, durante dicho periodo, cambios en la varianza y/o en la media, los cuales definen subperiodos específicos que pueden estar relacionados con eventos de carácter económico, y una solución a este problema es la aplicación del modelo “switching” de Hamilton, donde tales cambios de régimen o del estado de la naturaleza se consideran a través de Cadenas de Markov y de distribuciones mixtas de probabilidad.

Por otro lado se han trabajado muchos modelos basados en Cadenas de Markov para modelar muchos sistemas como sistemas de colas (3) y en (4), sistemas de inventarios (5) y sistemas de manufactura (6). De igual manera sobre modelamiento de series de tiempo se puede encontrar en (7), y (8)

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Objetivo General

Analizar la factibilidad de la aplicación de Cadenas de Markov para realizar pronósticos a través del análisis de series de tiempo.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Profundizar la revisión bibliográfica sobre las aplicaciones de Cadenas de Markov en la realización de pronósticos.
- Seleccionar una o varias series de tiempo y analizar su comportamiento.

- Construir la matriz de transición para cada una de las series y analizar la eficacia del modelo en pronósticos en el corto plazo.
- Establecer las propiedades de estado estable para cada una de las series y analizar la eficacia del modelo en el largo plazo.
- Medir la eficacia del modelo a través de la estimación del error de la estimación y compararlo frente a otros modelos de pronóstico.

1.6 HIPÓTESIS

La aplicación de Cadenas de Markov en el análisis y pronóstico de series de tiempo es una metodología alternativa con la cual se pueden realizar pronósticos con buena exactitud y confiabilidad.

1.7 ALCANCE DEL TRABAJO

En la presente investigación se desea hacer una recopilación de series de tiempo en las cuales se analizarán sus componentes estadísticos, luego se hará una clasificación de éstas en estados para posteriormente obtener la matriz de transición de la cual se podrán obtener los respectivos pronósticos en el corto y largo plazo, por último se aplica una metodología donde se evalué el error de pronóstico y se hará una comparación con algún otro método de pronóstico para poder establecer la efectividad del modelo.

De acuerdo a lo anterior, los resultados y productos a entregar al término del presente trabajo de investigación son:

- Recopilación de datos de precios o ventas de algunos productos del mercado colombiano y/o internacional.

- Aplicación de diferentes pruebas estadísticas, para determinar la naturaleza de la serie a estudiar.
- Aplicación del modelo a las series estudiadas con sus respectivos resultados.
- Evaluación de los resultados con otros métodos de pronóstico.
- Artículo publicable en una revista colombiana.

2. MARCO TEORICO Y CONCEPTUAL

2.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Según Hillier y Lieberman (2010) un proceso estocástico se puede definir como una colección indexada de variables aleatorias X_t , donde el índice t toma valores de un conjunto T dado y que el interés de los procesos estocásticos es describir el comportamiento de un sistema en operación, durante algunos periodos. También afirma que un proceso estocástico tiene la siguiente estructura:

El estado actual del sistema puede estar en una de $M + 1$ categorías mutuamente excluyentes llamadas **estados**. Por conveniencia en la notación, estos estados se etiquetan $0, 1, 2, \dots, M$. La variable aleatoria X_t representa el *estado del sistema* en el tiempo t , de manera que sus únicos valores posibles son $0, 1, \dots, M$. El sistema se observa en puntos del tiempo dados, etiquetados $t = 0, 1, 2, \dots$ así, el proceso estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \dots$ proporciona una representación matemática de cómo evoluciona el estado del sistema físico. (9)

Lo anterior hace referencia a procesos estocásticos de *tiempo discreto* con *espacio de estados finito*.

2.2 CADENAS DE MARKOV

Según Hillier y Lieberman (2010) se dice que todo proceso estocástico $\{X_t\}$ que cumple con la siguiente **propiedad markoviana** esencial se puede denominar como una cadena de Markov:

$$P(X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t = i),$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$, y toda sucesión $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$. [1]

Lo que quiere decir esta propiedad markoviana es “ que la probabilidad condicional de cualquier evento futuro dados cualquier evento pasado y el estado actual $X_t = i$, es *independiente* del evento pasado y sólo depende del estado actual del proceso”. (9)

Las probabilidades condicionales $P(X_{t+1} = j | X_t = i)$ para una cadena de Markov se llaman **probabilidades de transición** (de un paso). Si para cada i y j ,

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i), \text{ para toda } t = 1, 2, \dots, \quad [2]$$

Entonces se dice que las probabilidades de transición (de un paso) son *estacionarias*. Así, tener **probabilidades de transición estacionarias** implica que las probabilidades de transición no cambian con el tiempo. La existencia de probabilidades de transición (de un paso) estacionarias también implica que, para cada i, j y n ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$P(X_{t+n} = j | X_t = i) = P(X_n = j | X_0 = i), \quad [3]$$

Para toda $t = 0, 1, \dots$. Estas probabilidades condicionales se llaman **probabilidades de transición de n pasos**.

Así, las probabilidades de transición de n pasos $p_{ij}^{(n)}$ son simplemente la probabilidad condicional de que el sistema se encuentre en el estado j justo después de n pasos (unidades de tiempo), dado que comenzó en el estado i en cualquier tiempo t . Cuando $n = 1$, observe que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^2$.

Como las $p_{ij}^{(n)}$ son probabilidades condicionales, deben ser no negativas y, como el proceso debe hacer una transición a algún estado, deben satisfacer las propiedades

$$P_{ij}^{(n)} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } j; n = 0, 1, 2, \dots \quad [4]$$

y

$$\sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} = 1, \text{ para toda } i; n = 0, 1, 2, \dots \quad [5]$$

Una notación conveniente para representar las probabilidades de transición de n pasos es la forma matricial:

$$P^{(n)} = \begin{matrix} & p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{matrix} \quad [6]$$

Se puede observar que la probabilidad de transición en un renglón y columna dados es para la transición del estado en ese renglón al estado en la columna. Cuando $n=1$, el superíndice n no se escribe y se hace referencia a ésta como la *matriz de transición* (9).

² Para $n = 0$, $p_{ij}^{(0)}$ es $P\{X_0 = j | X_0 = i\}$, que es igual a 1 cuando $i = j$ y es 0 cuando $i \neq j$

2.2.1 Clasificación de Estados en una Cadena de Markov

Se dice que el estado j es accesible desde el estado i si $P_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna $n > 0$. (Recordando que $P_{ij}^{(n)}$ es solo la probabilidad condicional de llegar al estado j después de n pasos, si el sistema está en el estado i). Entonces, que el estado j sea accesible desde el estado i significa que es posible que el sistema llegue eventualmente al estado j si comienza en el estado i . En general, una condición suficiente para que *todos* los estados sean accesibles es que exista un valor de n para el que $P_{ij}^{(n)} > 0$ para todo i y j . (9)

2.2.1.1 Estados Recurrentes y Estados Transitorios. Un estado se llama estado **transitorio** si, después de haber entrado a este estado, el proceso *nunca* regresa a él. Por consiguiente, el estado i es transitorio si y sólo si existe un estado j ($j \neq i$) que es accesible desde el estado j , pero no viceversa, esto es, el estado i no es accesible desde el estado j (9).

Se dice que un estado es **recurrente** si, después de haber entrado a este estado, el proceso *definitivamente regresará* a ese estado. Por consiguiente, un estado es recurrente si y sólo si no es transitorio j (9).

2.2.2 Pronósticos a largo plazo con cadenas de Markov de orden uno

Las cadenas de Markov pueden ser representadas a través de notación vectorial definiendo vectores aleatorios ($N \times 1$), X_t , cuyos elementos son ceros a excepción del j -ésimo, el cual es igual a uno si el régimen en el tiempo t es j , así:

$$X_t = (0, 0, \dots, 0, \underset{j\text{-ésimo}}{1}, 0, \dots, 0)$$

para $s_t = j$. El j -ésimo elemento de X_{t+1} es una variable aleatoria que alcanza el valor de uno con probabilidad p_{ij} si $s_t = i$, es decir:

$$E X_{t+1} S_t = i = \begin{matrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{iN} \end{matrix} \quad [7]$$

en forma general [7] puede ser expresado como sigue :

$$E X_{t+1} X_t = P X_t \quad [8]$$

así, la anterior ecuación representa en forma vectorial a una cadena de Markov de orden uno, el resultado consignado en [8] implica que :

$$X_{t+1} = P X_t + v_{t+1} \quad [9]$$

Donde: $v_{t+1} \equiv x_{t+1} - E X_{t+1} X_t \quad [10]$

como se observa, la ecuación [9] corresponde a un modelo de vectores autorregresivos de orden uno para X_t . Bajo el esquema de vectores autorregresivos de orden uno se tiene que:

$$X_{t+m} = v_{t+m} + P v_{t+m-1} + P^2 v_{t+m-2} + \dots + P^{m-1} v_{t+1} + P^m X_t \quad [11]$$

por consiguiente el pronóstico m períodos adelante para X_t es:

$$E X_{t+m} X_t = P^m X_t \quad [12]$$

De esta forma, las probabilidades de transición m períodos adelante para una cadena de Markov se determinan a partir de la matriz resultante del producto m veces de la matriz de transición P por sí misma. (2)

2.2.3 Probabilidades de estado estable de una cadena de Markov

Según (2) si el interés se centra en la determinación de las expectativas incondicionales sobre los vectores X_t , es necesario considerar una clase especial de cadenas de Markov denominadas ergódicas ya que en la determinación de dicha expectativa se requiere del vector de probabilidades ergódicas, π , el cual se define como el vector propio de P asociado al valor propio unitario ($P\pi = \pi$). Para una cadena de Markov ergódica con matriz de transición P se tiene que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^m = \pi 1' \quad \text{Donde } 1' = (1, 1, \dots, 1)' \quad [13]$$

Reemplazando [13] en [12], cuando m tiende a infinito, se encuentra que el pronóstico de largo plazo para una cadena de Markov ergódica es igual al vector de probabilidades ergódicas e independiente del estado en que se encuentra el proceso en el momento (t), es decir:

$$E X_{t+m} | X_t = P^m X_t \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pi \quad [14]$$

por consiguiente, la expectativa incondicional de X_t es también igual al vector de probabilidades ergódicas, así :

$$E X_{t+m} | X_t = \pi \quad [15]$$

2.3 CADENAS DE MARKOV DE ORDEN SUPERIOR

Raftery (10) propuso un modelo de cadenas de Markov de orden superior el cual envuelve solo un parámetro adicional por cada rezago extra. El modelo puede ser escrito de la siguiente forma:

$$P X_t = k_0 X_{t-1} = k_1, \dots, X_{t-n} = k_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i q k_0 k_i \quad [16]$$

Donde $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $Q = [q_{ij}]$ es una matriz de transición cuyas columnas suman uno, tal como

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i} \leq 1, \quad k_0, k_i \in u \quad [17]$$

Donde $u = \{1, 2, \dots, m\}$ donde m es finito y son las posibles categorías o estados de la serie de datos a analizar.

De acuerdo a lo anterior notamos que [16] puede ser reescrita como:

$$X_{t+n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q X_{t+n+1-i} \quad [18]$$

Después Ching extendió el modelo de Raftery a un modelo más general de Markov de orden superior a través de permitir que Q variara con diferentes colas o rezagos, asumiendo que los pesos λ_i son no negativos tal como:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad [19]$$

Usando [19] y la realidad de que Q es una matriz de transición de probabilidad, notamos que cada entrada de X_{t+n+1} está entre 0 y 1, y la suma de todas las entradas es igual a uno. En este modelo se generalizó el modelo de Raftery de la siguiente forma:

$$X_{t+n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X_{t+n+1-i} \quad [20]$$

El número total de parámetros independientes en el nuevo modelo es de $0 \leq n + nm^2$. Notamos que si $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ entonces [20] es justamente el modelo

de Raftery en [19] . En este nuevo modelo se asume que X_{t+n+1} depende sobre X_{t+i} ($i = 1, 2, \dots, n$) a través de la matriz Q_i y los pesos λ_i . (11)

2.3.1 Proposición 1:

Si Q_n es irreducible y $\lambda_n \geq 0$ tal como

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Entonces el modelo en [20] tiene una distribución estacionaria \mathbf{X} cuando $t \rightarrow \infty$ independientemente de los vectores de estado inicial X_0, X_1, \dots, X_{n-1} . La distribución estacionaria \mathbf{X} es la única solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$I - \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \mathbf{X} = 0 \quad y \quad \mathbf{1}^T \mathbf{X} = 1$$

Donde I es la matriz identidad de $m \times m$ (m es el número posible de estados tomados por cada dato) y $\mathbf{1}$ es un m -vector de unos.

En la prueba se dejó a $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{X}_{t+n+1}, \mathbf{X}_{t+n}, \dots, \mathbf{X}_{t+2}$ sea un $nm \times 1$ vector. Entonces podemos escribir $\mathbf{Y}_{n+1} = R\mathbf{Y}_n$ donde:

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1 Q_1 & \lambda_2 Q_2 & \dots & \lambda_{n-1} Q_{n-1} & \lambda_n Q_n \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad [21]$$

Es una matriz cuadrada de $nm \times nm$. A través del teorema de Perron-Frobenius se puede mostrar que bajo las suposiciones en la proposición, todos los

eigenvalores de R se encuentran en el intervalo $[0, 1]$ y hay exactamente un eigenvalor igual a uno.

Esto implica que $\lim_{s \rightarrow \infty} R \dots R = \lim_{s \rightarrow \infty} R^s = VU^T$. Por consiguiente se tiene $\lim_{s \rightarrow \infty} Y_{s+n+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} R^s Y_{n+1} = V U^T Y_{n+1} = \alpha V$.

Donde α es un valor positivo porque $Y_{n+1} \neq \mathbf{0}$ y es no-negativo. Esto implica que X_s también tiende a ser una distribución estacionaria cuando s tiende a infinito.

Por lo tanto se tiene $\lim_{s \rightarrow \infty} X_{s+n+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X_{s+n+1-i}$ y por consiguiente tenemos $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X$. El vector de distribución estacionaria X satisface:

$$I - \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{1}^T X = 1 \quad [22]$$

La restricción de normalización es necesaria mientras la matriz $I - \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i$ tiene un espacio vacío unidimensional. Se puede aclarar que el modelo [20] es un modelo estacionario si este tiene una distribución estacionaria (11).

Lo anterior corresponde para el modelo de Ching, sin embargo en este proyecto se desea trabajar con la extensión de este modelo lo cual implica cambiar las siguientes restricciones:

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Por

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i}^{(i)} \leq 1, \quad k_0, k_i \in \mathcal{u} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

Se espera que este nuevo modelo pueda tener una mejor precisión cuando se utilice con un apropiado orden, a continuación se da una condición necesaria para que el nuevo modelo sea estacionario:

Proposición 2

Suponiendo que $\{X_n, n \in N\}$ es definido por [20] donde las restricciones $0 \leq \lambda_i \leq 1$ son reemplazadas por

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i}^i \leq 1$$

entonces el modelo [20] tiene una distribución estacionaria \mathbf{X} cuando cuando $t \rightarrow \infty$ independientemente de los vectores de estado inicial X_0, X_1, \dots, X_{n-1} .

La distribución estacionaria \mathbf{X} es la única solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$I - \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \mathbf{X} = 0 \quad y \quad \mathbf{1}^T \mathbf{X} = 1$$

(12).

2.3.2 Estimación de Parámetros

Para estimar la matriz Q_i , teniendo en cuenta a Q_i como la i ésima matriz de transición de la secuencia de datos $\{X_t\}$. Dada la secuencia de datos $\{X_t\}$, podemos contar la frecuencia de transición $f_{jk}^{(i)}$ en la secuencia del estado k al estado j en el i ésimo paso. Con lo anterior podemos construir la i ésima matriz de transición para la secuencia $\{X_t\}$ de la siguiente forma:

$$F^{(i)} = \begin{matrix} f_{11}^{(i)} & \cdots & f_{m1}^{(i)} \\ f_{12}^{(i)} & & f_{m2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1m}^{(i)} & \cdots & f_{mm}^{(i)} \end{matrix} \quad [23]$$

Según (11), de $F^{(i)}$ podemos obtener las estimaciones para $Q_i = q_{kj}^{(i)}$ tal como sigue:

$$Q_i = \begin{matrix} q_{11}^{(i)} & \dots & q_{m1}^{(i)} \\ q_{12}^{(i)} & & q_{m2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{1m}^{(i)} & \dots & q_{mm}^{(i)} \end{matrix}$$

$$\text{donde } q_{kj}^{(i)} = \begin{matrix} \frac{f_{kj}^i}{\sum_1^m f_{kj}^i} & \text{si } \sum_1^m f_{kj}^i \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix} \quad [24]$$

2.3.3 Formulación de Programación Lineal para la Estimación de λ_i

Suponiendo que la Proposición 1 es correcta, entonces esta nos da una suficiente condición para que la secuencia X_s sea convergente a una distribución estacionaria X . Entonces X puede ser estimada de la secuencia observada X_s computando la proporción de ocurrencias de cada estado en la secuencia, esto lo denotamos por \bar{X} . De [22] podemos esperar que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \bar{X} \approx \bar{X} \quad [25]$$

Para estimar los parámetros $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ se procede de la siguiente forma: en vista de [25] podemos considerar el siguiente problema de optimización

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \bar{X} - \bar{X} \quad \infty = \min_{\lambda} \max_k \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \bar{X} - \bar{X}_k \quad [26]$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ y } 0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i}^{(i)} \leq 1, k_0, k_i \in \mathcal{U}$$

Aquí \cdot_k denota la k-ésima entrada del vector. Vemos que el anterior problema de optimización puede ser reformulado como un problema de optimización lineal.

$$\min_y w \quad [27]$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{r} w \\ w \\ \vdots \\ w \\ w \\ w \\ \vdots \\ w \\ w \end{array} \geq \begin{array}{r} \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \\ \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \end{array} \begin{array}{r} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array},$$

$$w \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \text{y } 0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i}^{(i)} \leq 1, \quad k_0, k_i \in \mathcal{U}$$

Instantáneamente de resolver un problema de min-max, se puede formular el siguiente problema de optimización

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X - X_{k_1} = \min_{\lambda} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X - X_k \quad [28]$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ y } 0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i}^{(i)} \leq 1, k_0, k_i \in \mathcal{U}$$

Con lo anterior se puede proponer el siguiente problema de programación lineal:

$$\min_{\lambda} \sum_{k=1}^m w_k \quad [29]$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \geq \mathbf{X} - Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array},$$

$$\begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \geq -\mathbf{X} + Q_1 \mathbf{X} Q_2 \mathbf{X} \cdots Q_n \mathbf{X} \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array},$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad y \quad 0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{k_0 k_i}^{(i)} \leq 1, \quad k_0, k_i \in u$$

En este problema de programación lineal, el número de variables es igual a n y el número de restricciones es igual a

$$2m^{n+1} + 2m + 1 \quad [30]$$

De acuerdo a todo lo anterior se podría establecer el método de predicción tal como sigue; dados los vectores de estado $X_i, i = t - n, t - n + 1, \dots, t - 1$, entonces la distribución de probabilidad por estados en el tiempo t puede ser estimada a través de:

$$X_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i X_{t-i} \quad [31]$$

Donde se tomaría la predicción de acuerdo al estado que obtenga la mayor probabilidad (12).

2.4 APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV EN LA REALIZACIÓN DE PRONÓSTICOS

Varios autores hacen gran referencia a la aplicación de modelos de pronósticos que hacen uso de cadenas de Markov y entre los usos más comunes tenemos:

2.4.1 Newsboy's Problem

Newsboy's Problem es un clásico problema muy bien conocido en la ciencia de la administración, el cual se describe a continuación. Un joven vende periódicos cada mañana; hay costos asociados a cada periódico que se deja de vender en el día (costo excedente) y a cada demanda insatisfecha (costo de escasez). El objetivo es encontrar el tamaño óptimo de pedido bajo una distribución estacionaria de probabilidad de la demanda. Este simple modelo puede ser generalizado para aplicaciones prácticas en planeación de producción. Por ejemplo, en la predicción de demandas de productos, las cuales son clasificadas en varios estados, tales como, muy alto volumen de ventas, alto volumen de ventas, volumen estándar de ventas, bajo volumen de ventas y muy bajo volumen de ventas. El proceso de encontrar el óptimo volumen de producción es una generalización del clásico Newsboy's Problem. La secuencia del volumen de demanda en el tiempo t forma una secuencia categórica o serie de tiempo. El modelo de cadenas de Markov de orden superior provee un método natural para capturar la dinámica de la demanda, por lo tanto, el modelo de cadenas de Markov de orden superior puede ser muy útil en la obtención de políticas óptimas de producción para minimizar el promedio del costo de producción a largo plazo (13)

2.4.2 Predicción en Páginas Web

El Internet proporciona un rico entorno a los usuarios para recuperar información muy valiosa. Sin embargo, es fácil para un usuario perderse en el océano de la información. Una forma de ayudarlo con su necesidad de información es predecir el futuro de una solicitud y usar la predicción para hacer recomendación. Los sistemas de recomendación responden en un modelo de predicción para hacer inferencias sobre los intereses de los usuarios haciendo recomendaciones. Ejemplos de ello son el sistema WebWatcher y el sistema Letzia. Una predicción precisa potencialmente puede reducir tanto los tiempos de acceso de los usuarios como el tráfico de red cuando la recomendación se maneja correctamente. En este apartado, se utiliza un modelo de orden superior de cadenas de Markov para explotar la información de los registros del servidor web para la predicción de las acciones del usuario.

El modelo de orden superior de la cadena de Markov se basa en un archivo de registro del servidor web. Se examina el archivo para ser pre-procesado en un conjunto de sesiones de usuario. Cada sesión está indizada por un ID de usuario único y hora de inicio. Cada sesión es una secuencia de peticiones donde cada solicitud corresponde a una visita a una página web. Se representa a cada solicitud como un estado. Luego, cada sesión es una secuencia de datos categóricos. Por otra parte, se denota cada página Web (estado) por un entero (12).

Por otro lado también se hace referencia del uso de cadenas de Markov de orden superior en el ajuste de datos observados y aplicación para diseños de turbinas de viento, al igual que en el alineamiento de secuencias en el análisis del ADN, lo cual consiste en buscar patrones en una gran secuencia de ADN (12).

2.5 MODELOS DE FORMULACIÓN ESTADÍSTICOS

La selección de un modelo apropiado es un factor importante para el éxito y hay muchos modelos bien conocidos para modelar secuencias de datos numéricos, tal como el modelo de autorregresión (AR) y el modelo de media móvil (MA). A continuación se hará una breve descripción de la formulación de estos dos modelos:

2.5.1 Propiedad de primer orden

Inicialmente, el supuesto básico de este modelo es que el presente está totalmente explicado por el primer tiempo de retraso ($t-1$).

El modelo AR(1) asume que la media así como la varianza de la secuencia de datos es constante. Entonces, la propiedad de primer orden es definida por una relación lineal entre el valor obtenido en el tiempo $t+1$ y el valor obtenido en el tiempo t . La igualdad se lleva a cabo mediante la adición del ruido blanco en la ecuación. El ruido blanco es utilizado para explicar cualquier ruido que se produzca en el tiempo t .

Para el modelo MA(1) la relación de primer retraso en los datos puede ser explicada por dos variables independientes al azar con media de cero en tiempo t y el tiempo $t+1$ respectivamente. Esto es, el valor tomado por el tiempo $t+1$ puede ser expresado por la combinación lineal de dos variables independientes al azar en el tiempo t y en el tiempo $t+1$ respectivamente (13).

2.5.2 Propiedad de orden superior

Si la secuencia de datos contiene propiedad de orden superior. Se puede creer que un modelo de primer orden no es suficiente para capturar toda la información

de los datos esenciales. Por lo tanto, es necesario extender la idea de propiedad de primer orden y desarrollar modelos de orden superior.

El modelo de autorregresión $AR(n)$ es usado para manejar secuencia de datos de propiedad de enésima orden. La relación de orden superior es expresada como una relación lineal entre el valor obtenido en el tiempo $t+1$ y el valor obtenido en el tiempo $t-j$ con algunos ruidos blancos, donde $j=0, 1, \dots, n-1$.

En el modelo de la media móvil, la extensión del modelo $MA(1)$ es $MA(n)$, la propiedad de orden superior es capturada con un conjunto de variables independientes aleatorias, esto asume que el valor obtenido en el tiempo $t+1$ es igual a la combinación lineal de variables aleatorias independientes del tiempo t al tiempo $t-n+1$.

En general el modelo de autorregresion y el modelo de media móvil son muy son muy efectivos y eficientes en el manejo de secuencias de datos numéricos con dominios infinitos. Especialmente para secuencias de datos después del primer y segundo proceso estacionario.

Para las secuencias de datos categóricos, los modelos de cadenas discretas de Markov son los modelos más usados popularmente. La razón es probablemente que la propiedad de Markov es más bien simple, porque hace una interpretación natural y relajada de la independencia de los parámetros (13).

2.6 SERIES DE TIEMPO

“Una serie de tiempo consta de datos que se reúnen, registran u observan sobre incrementos sucesivos de tiempo” (14 p. 98)

2.6.1 Componentes de una Serie de Tiempo

Según Hanke (1996), para analizar series de tiempo se puede utilizar el método de descomposición clásica, el cual se basa en la suposición de que se pueden descomponer en componentes como tendencia, ciclo, estacionalidad e irregularidad y una predicción se hace mediante la combinación de las proyecciones de cada componente individual. A continuación según Hanke se da un breve concepto acerca de cada componente:

2.6.1.1 Tendencia. “La tendencia de una serie de tiempo es el componente de largo plazo que representa el crecimiento o disminución en la serie sobre un periodo amplio”.

2.6.1.2 Componente Cíclico. “El componente cíclico es la fluctuación en forma de onda alrededor de la tendencia”.

2.6.1.3 Componente Estacional. “El componente estacional es un patrón de cambio que se repite a sí mismo año tras año”.

2.6.1.4 Componente Aleatorio. “El componente aleatorio mide la variabilidad de las series de tiempo después de retirar los otros componentes”.

2.6.2 Técnicas de Pronósticos con Series de tiempo

Es importante reconocer que un factor que influye en la selección de una técnica de pronóstico consiste en la identificación y comprensión de patrones históricos en los datos; por lo anterior si se logran reconocer patrones de tendencia, cíclicos o estacionales, entonces se podrán seleccionar las técnicas con la capacidad de utilizar eficazmente estos patrones (14 p. 115).

2.6.2.1 Técnicas de pronóstico para datos estacionarios. Recordando que una serie estacionaria es aquella cuyo valor promedio no varía a través del tiempo y que esta situación se presenta cuando los patrones de demanda que influyen sobre la serie son relativamente estables, es por esto que el pronóstico de series estacionarias comprende el uso de la historia disponible de las series para estimar su valor promedio, el cual se convertirá en el pronóstico de valores futuros.

Dado lo anterior, las técnicas que se podrían utilizar en series estacionarias son los métodos no formales, los métodos de promedio simple y los métodos de promedios móviles, atenuación exponencial y de Box- Jenkis es (14 p. 115)

2.6.2.2 Técnicas de pronóstico para datos con una tendencia. Se dice que una serie de tiempo tiene una tendencia si su valor promedio varía a través del tiempo, entonces se espera que aumente o disminuya durante el periodo para que se desee el pronóstico, además es común que las series económicas contengan una tendencia. Dado lo anterior, las técnicas que se pueden utilizar para pronosticar series con tendencia son promedio móvil lineal, atenuación exponencial lineal de Brown, atenuación exponencial lineal de Holt, atenuación exponencial cuadrática de Brown, regresión simple, modelo de Gompertz, curvas de crecimiento y modelos exponenciales (14 p. 116)

2.6.2.3 Técnicas de pronóstico para datos con estacionalidad. El desarrollo de una técnica de pronóstico estacional comprende la selección de un método multiplicativo o uno de adición y estimar índices estacionales a partir de la historia de la serie, los cuales se usan después para incorporar la estacionalidad al pronóstico o para eliminar tales efectos de los valores observados. Las técnicas utilizadas para pronosticar series estacionales son descomposición clásica, Census II, atenuación exponencial de Winter, regresión múltiple de series de tiempo y métodos de Box-Jenkis (14 p. 116)

2.6.2.4 Técnicas de pronóstico para series cíclicas. Recordando que el efecto cíclico se define como la fluctuación en forma de onda alrededor de la tendencia, además los patrones cíclicos tienden a repetirse en los datos cada dos, tres o más años, por lo tanto es difícil establecer un modelo para estos patrones cíclicos, ya que no son estables. Las técnicas utilizadas para pronosticar series cíclicas son la descomposición clásica, los indicadores económicos, los modelos econométricos, la regresión múltiple y los métodos de Box-Jenkis (14 p. 117).

2.6.3 Medición del Error en el Pronóstico

Según Hanke (1996) se han ideado diversos métodos para resumir los errores generados por una técnica particular de pronóstico y la mayoría de estas mediciones implican promediar alguna función de la diferencia entre el valor real y su valor de pronóstico, y esta diferencia entre valores observados y los valores de pronóstico se denominan residuales.

Para calcular el error o residual de cada periodo de pronóstico se utiliza la siguiente ecuación:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t \quad [32]$$

donde

e_t = error del pronóstico en el periodo t .

Y_t = valor real en el periodo t .

\hat{Y}_t = valor del pronóstico en el periodo t .

Hanke propone los siguientes métodos para evaluar cualquier tipo de técnica de pronóstico:

2.6.3.1 Desviación absoluta de la media (DAM). Este método mide la precisión de un pronóstico mediante el promedio de la magnitud de los errores de pronóstico y es de gran utilidad cuando se desea medir el error de pronóstico en las mismas unidades de la serie original. La siguiente ecuación muestra cómo se calcula la DAM:

$$DAM = \frac{\sum_{t=1}^n |Y_t - \hat{Y}_t|}{n} \quad [33]$$

2.6.3.2 Error medio cuadrado (EMC). En este método cada error o residual se eleva al cuadrado y luego estos valores se suman y se divide entre el número de observaciones; por lo tanto se penalizan los errores mayores de pronóstico ya que se eleva cada uno al cuadrado, lo cual es importante porque en ocasiones es preferible una técnica que produzca errores moderados a otra que por lo regular tenga errores pequeños, pero que ocasionalmente arroje algunos en extremo grandes; su respectiva ecuación es:

$$EMC = \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n} \quad [34]$$

2.6.3.3 Porcentaje de error medio absoluto (PEMA). El PEMA se calcula encontrando el error absoluto en cada período, el cual se divide entre el valor real observado para ese periodo y luego promediando estos errores absolutos de porcentaje. Este método indica qué tan grandes son los errores de pronóstico comparados con los valores reales de la serie, de igual manera se puede utilizar el PEMA para comparar la precisión de la misma u otra técnica sobre dos series completamente diferentes, la siguiente ecuación muestra como se calcula el PEMA:

$$PEMA = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{|Y_t - \hat{Y}_t|}{Y_t}}{n} \quad [35]$$

2.6.3.4 Porcentaje medio de error (PME). Este método se aplica para determinar si un método de pronóstico está sesgado (pronóstico consistentemente alto o bajo) y se calcula encontrando el error en cada período, dividiéndolo entre el valor real de ese periodo y promediando después estos porcentajes de error. Si un enfoque de pronóstico no está sesgado, se producirá un porcentaje cercano a cero. Si el resultado es un porcentaje negativo grande, el método de pronóstico está sobrestimando de manera consistente, si por lo contrario es un porcentaje positivo grande, el método de pronóstico esta subestimando en forma consistente; la siguiente ecuación muestra cómo se calcula el PME:

$$PME = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}}{n} \quad [36]$$

2.6.4 Medición de la Precisión del Pronóstico

Para medir la precisión del pronóstico se utiliza la medición r que se define como:

$$r = \frac{\sum_{t=1}^T \delta_t}{T} \quad [37]$$

Donde $\delta_t = \begin{matrix} 1; & \text{si } X_t = \hat{X}_t \\ 0; & \text{Otro caso} \end{matrix}$

T es el total de datos de la secuencia (11)

3. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 ANÁLISIS ESTADÍSTICOS DE LAS SERIES

Para hacer el respectivo análisis del modelo de pronóstico a través de cadenas de Markov se utilizó la serie de tiempo de la evolución de los precios del café la cual se encuentra en el anexo 1 a la cual se aplicaron los siguientes análisis estadísticos:

3.1.1 Análisis de la serie de Precios del Café

Los datos de esta serie se encuentran en el Anexo 1, donde se puede observar que hay un total de 107 datos y que el valor mínimo de la serie es de US\$ 2,74/libra y el valor máximo es de US\$ 3,32/libra. A través de Excel se calculó el promedio con un valor de US\$ 2,98/libra y la respectiva desviación estándar con valor de 0,14, la siguiente tabla resume la información básica de la serie.

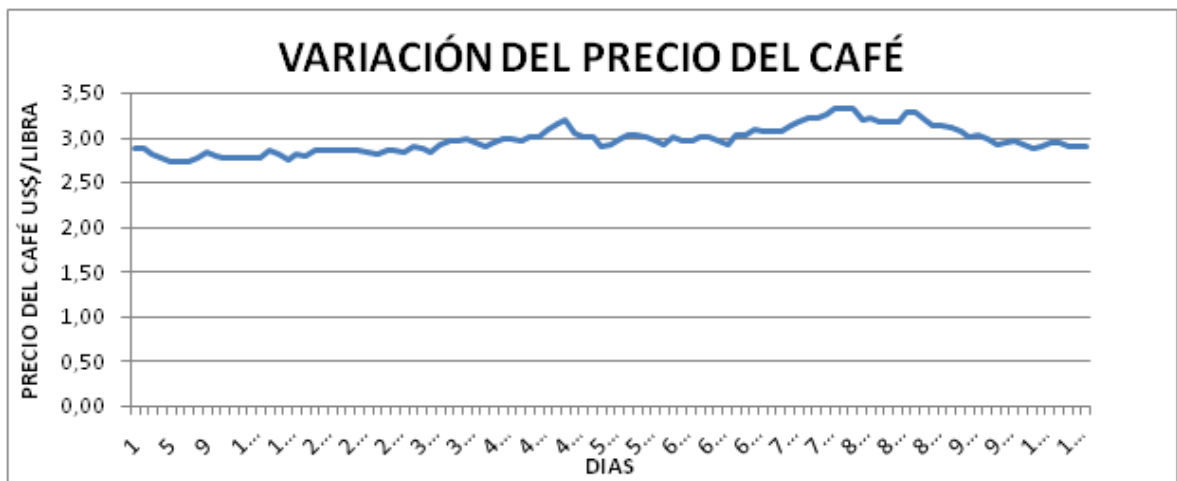
Tabla1. Información Básica de la serie de Precios del Café

Total Datos	107
Valor Mínimo	2,74 US\$/lb
Valor máximo	3,32 US\$/lb
Rango	0,58 US\$/lb
Promedio	2,98 US\$/lb
Desviación Estándar	0,14

Fuente: Autor

En la siguiente gráfica se muestra la evolución de los precios del café comprendidos entre el periodo del 3 de enero de 2011 y el 31 de mayo de 2011.

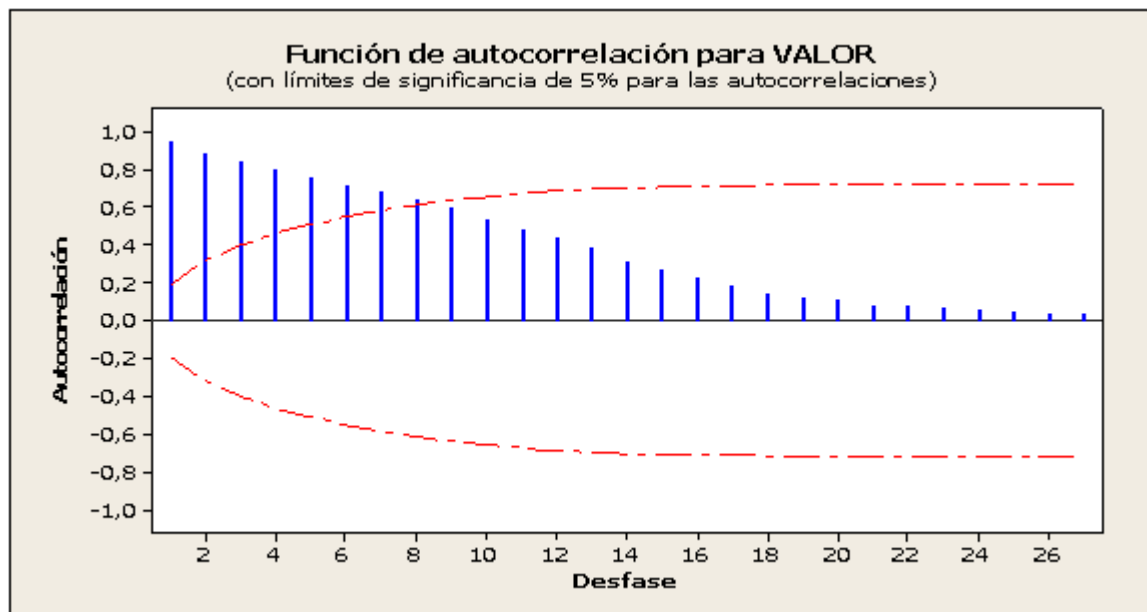
Gráfico 1. Comportamiento de la serie de precios del café



Fuente: autor

En esta gráfica se puede observar que el comportamiento de la serie es estable y no está sujeta a grandes variaciones lo cual podría dar un indicio de que la serie puede ser estacionaria o tener una tendencia lineal, sin embargo para comprobar esto se hace necesario realizar el correlograma y analizar el comportamiento de los coeficientes de autocorrelación de la serie y poder establecer que comportamiento presentan los datos.

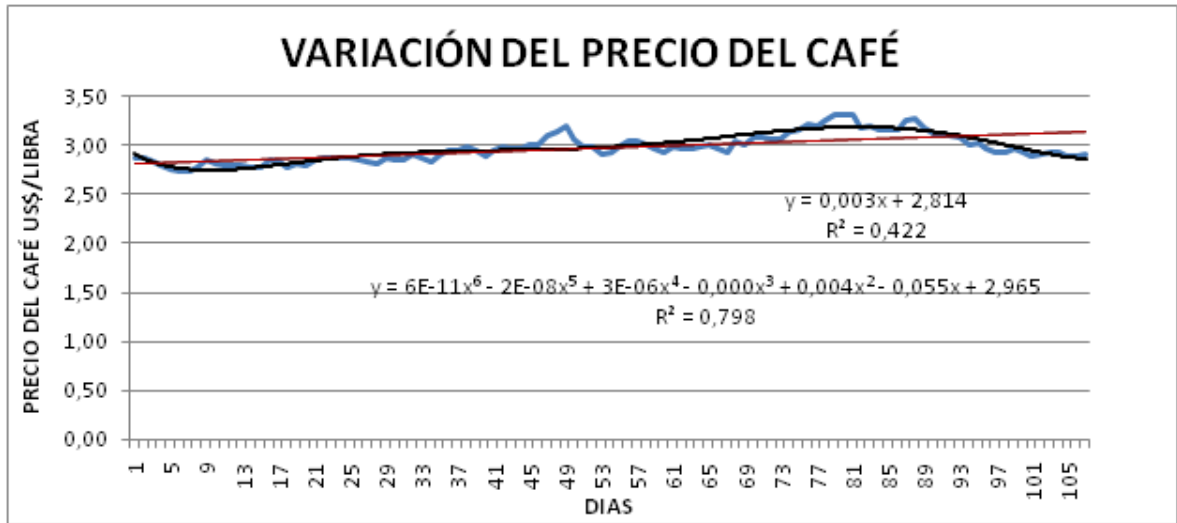
Gráfico 2. Correlograma de la serie de precios del Café



Fuente: autor

En esta gráfica se puede observar que los coeficientes de correlación son bastante diferentes de cero para los primeros retrasos de tiempo y además van cayendo a cero de forma gradual a medida que se va aumentando el número de retrasos, por lo tanto, se puede concluir que esta serie de datos tiene tendencia la cual se va a analizar en la siguiente gráfica.

Gráfico 3. Análisis de Tendencia para la serie de precios del Café



Fuente: autor

Para la regresión lineal el valor de R^2 es de 0,42 mientras que la polinómica de grado 6 el valor de R^2 es de 0,79, la respectiva ecuación es $y = 6E - 11x^6 - 2E - 08x^5 + 3E - 06x^4 - 0,0002x^3 + 0,0049x^2 - 0,0559x + 2,9651$, con esta ecuación la variable tiempo explica el 79,8 % de la varianza de la variable de precio del café.

3.2 APLICACIÓN DEL MODELO DE CADENAS DE MARKOV DE PRIMER ORDEN

Para realizar la aplicación del modelo de pronósticos con cadenas de Markov de primer orden se realizó la programación de este modelo en Matlab lo cual permitió la simplificación de los cálculos manuales y en Excel en donde resulta ser más complejo.

Aplicando este modelo bajo la programación que se realizó en Matlab lo primero que se tiene que hacer es determinar el número de estados con el cual se va a

trabajar, y esto se establece teniendo en cuenta el rango entre el valor mínimo y el valor máximo de la serie, además vale la pena precisar que a mayor número de estados disminuye la diferencia entre los rangos establecidos para cada estado permitiendo encontrar un pronóstico con mayor exactitud.

Una vez identificado cual es el valor mínimo y el valor máximo de la serie y establecido el número de estados con el cual se desea trabajar se procede a introducir estos valores a medida que los va pidiendo el programa al igual que el vector de datos de la serie; al final y teniendo en cuenta la ecuación [8] el programa arroja el vector de pronóstico x en el cual están establecidas las probabilidades de posible ocurrencia de un evento de acuerdo a cada estado establecido. Con este vector se puede definir como pronóstico los valores comprendidos en el rango del estado que tenga el mayor valor de probabilidad.

3.2.1 Aplicación del Modelo de Cadenas de Markov de Primer Orden para la serie de Precios del Café:

Como el valor máximo de esta serie es de 3,32 US\$/lb y el valor mínimo es de 2,74 US\$/lb, hay un rango de 0,58 US\$/lb, se escogió un rango de 0,05 US\$/lb para cada estado, y se trabajó con diez estados los cuales tienen los siguientes rangos en US\$/lb:

Estado 1: [2,74 – 2,79]

Estado 2 [2,80 – 2,85]

Estado 3: [2,86 - 2,91]

Estado 4: [2,92 – 2,97]

Estado 5: [2,98 – 3,03]

Estado 6: [3,04 – 3,09]

Estado 7: [3,10 – 3,15]

Estado 8: [3,16 – 3,21]

Estado 9: [3,22 – 3,27]

Estado 10: [3,28 – 3,33]

La representación de la serie de datos a través de estados se encuentra en el anexo 2.

3.2.1.1 Pronósticos en el corto plazo. Para hacer un pronóstico a corto plazo se necesita tener la matriz de transición P y el vector de condición inicial que para la aplicación son las siguientes:

Figura 1. Matriz de Transición P

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0,727 & 0,182 & 0,091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0,300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0,300 & 0,300 & 0,300 & 0,100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,263 & 0,579 & 0,158 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,158 & 0,474 & 0,316 & 0,053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,063 & 0,375 & 0,375 & 0,125 & 0,063 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,444 & 0,444 & 0,111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,167 & 0,5 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,111 & 0,111 & 0,444 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,333 & 0 & 0,667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Fuente: autor

$$x_t = 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

Para construir el vector de condiciones iniciales se tuvo en cuenta el último dato de la serie el cual corresponde al precio de 2,91 US\$/lb del día 31 de mayo de 2011 este dato se ubica en el estado 3.

El programa arroja el siguiente vector de pronóstico:

$$x_{t+1} = 0 \ 0,26 \ 0,58 \ 0,16 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

Este vector de probabilidades presenta el mayor valor de probabilidad en el estado 3, esto quiere decir que el rango de precio el cual puede estar el precio del

café el día 01 de Junio de 2011 estará entre 2,86 US\$/lb y 2,91 US\$/lb; verificando el listado de precios del anexo 1 se observa que el día 01 de Junio de 2011 el precio del café estuvo en 2,89 US\$/lb, para lo cual se verifica el pronóstico realizado a través del modelo de Markov de orden uno.

La siguiente tabla muestra los valores obtenidos aplicando el modelo de Markov para pronósticos a corto plazo:

Tabla 2. Pronósticos a corto plazo con cadenas de Markov de Primer Orden

Día de Pronóstico	Valor Real (US\$/lb)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$/lb)
1-jun-11	2,89	3	3	2,885
2-jun-11	2,86	3	3	2,885
3-jun-11	2,92	4	3	2,885
6-jun-11	2,92	4	4	2,945
7-jun-11	2,92	4	4	2,945
8-jun-11	2,95	4	4	2,945
9-jun-11	2,95	4	4	2,945
10-jun-11	2,97	4	4	2,945
13-jun-11	2,99	5	4	2,945
14-jun-11	2,99	5	5	3,005
15-jun-11	2,98	5	5	3,005
16-jun-11	2,95	4	5	3,005
17-jun-11	2,92	4	4	2,945
20-jun-11	2,79	1	4	2,945
22-jun-11	2,80	2	1	2,765
23-jun-11	2,79	1	1	2,765
24-jun-11	2,81	2	1	2,765

Fuente: autor

Para analizar la precisión de los pronósticos con el modelo de Markov de Primer orden se aplicó la ecuación [37] y se obtuvo un valor r de 0,64 que constituye

un buen nivel de precisión, este valor, indica que de cada 100 pronósticos realizados 64 serian acertados a través del modelo de Markov de primer orden.

Para el modelo de media móvil, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3. Pronósticos a corto plazo a través de media móvil con un retraso

Dia de Pronóstico	Valor Real (US\$/lb)	Valor de Pronóstico (US\$/lb)
31-may-11	2,91	
1-jun-11	2,89	2,91
2-jun-11	2,86	2,89
3-jun-11	2,92	2,86
6-jun-11	2,92	2,92
7-jun-11	2,92	2,92
8-jun-11	2,95	2,92
9-jun-11	2,95	2,95
10-jun-11	2,97	2,95
13-jun-11	2,99	2,97
14-jun-11	2,99	2,99
15-jun-11	2,98	2,99
16-jun-11	2,95	2,98
17-jun-11	2,92	2,95
20-jun-11	2,79	2,92
22-jun-11	2,80	2,79
23-jun-11	2,79	2,80
24-jun-11	2,81	2,79

Fuente: autor

Para hacer la comparación de los modelos calculamos los errores obtenidos a través de las ecuaciones [33], [34], [35] y [36] que corresponden a los valores de los errores DAM, EMC, PEMA Y PME de los dos modelos; para el modelo de Markov la media utilizada en el cálculo de los errores fue el valor medio del intervalo de pronóstico.

El cuadro comparativo de los errores se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 4. Errores de pronóstico obtenidos con los modelos de Markov de primer orden y el modelo de media móvil con un rezago

MODELO	REZAGOS	DAM	EMC	PEMA	PME
MARKOV	1	0,03	0,003	1,18%	-0,26%
MEDIA MOVIL	1	0,02	0,003	0,86%	-0,22%

Fuente: autor

No hay diferencias significativas al hacer la comparación entre los dos modelos, con una pequeña diferencia se tiene que con el modelo de media móvil de un rezago se obtienen mejores pronósticos que con modelo de cadenas de Markov de primer orden en el corto plazo.

3.2.1.2 Pronósticos en el largo plazo. Teniendo en cuenta las expectativas condicionales de que el precio del 31 de mayo de 2011 fue de de 2,91 US\$/lb (estado 3), aplicando la ecuación [12] y trabajando con la matriz P de la figura 1, se obtienen los siguientes pronósticos a largo plazo:

Tabla 5. Pronósticos a largo plazo con el modelo de Markov de primer orden

Día de Pronóstico	Valor Real (US\$/lb)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico
1-jun-11	2,89	3	3
2-jun-11	2,86	3	3
3-jun-11	2,92	4	3
6-jun-11	2,92	4	3
7-jun-11	2,92	4	3
8-jun-11	2,95	4	3
9-jun-11	2,95	4	1
10-jun-11	2,97	4	1
13-jun-11	2,99	5	1
14-jun-11	2,99	5	1
15-jun-11	2,98	5	1
16-jun-11	2,95	4	1
17-jun-11	2,92	4	1
20-jun-11	2,79	1	1
22-jun-11	2,80	2	1
23-jun-11	2,79	1	1
24-jun-11	2,81	2	1

Fuente: autor

Calculando la precisión de estos pronósticos a largo plazo obtenidos con el modelo de Markov de Primer Orden se tiene un valor de r igual a 0,23 lo cual nos indica que la precisión del pronóstico es baja y poco confiable.

3.2.2 Aplicación del Modelo de Cadenas de Markov de Orden Superior:

Para obtener las matrices de transición de orden n se hizo la programación en Matlab, para los λ_i , se hizo la solución del respectivo problema de programación lineal utilizando la herramienta "Solver" de Excel.

A medida que iba creciendo el orden de la cadena de Markov, se aumentaba la complejidad del problema a resolver debido a que las restricciones y los parámetros se hacían cada vez mayores.

La notación definida en esta ocasión corresponde a m para indicar los estados y n para indicar el orden de Markov.

A continuación se muestran los resultados de dos de las pruebas realizadas con 10 estados para segundo y tercer orden:

3.2.2.1 Aplicación del modelo con $m=10$ y $n=2$ para la serie de Precios del Café:

Las matrices de frecuencia $F^{(i)}$, se encuentran en el anexo 3

Las matrices de transición Q_i se encuentran en el anexo 4

Se obtuvo el vector de distribución estacionaria que representa la proporción de la ocurrencia de cada estado en la secuencia, los respectivos valores de este vector en este caso son:

$X = [0,1028 \quad 0,0935 \quad 0,1869 \quad 0,1776 \quad 0,1495 \quad 0,0841 \quad 0,0561 \quad 0,0841 \quad 0,0280$
 $0,0374]$

Se procedió a encontrar los parámetros λ_i y se planteó el siguiente problema de programación lineal de acuerdo a [29]

$$\min_{\lambda} \sum_{k=1}^{10} w_k \quad [38]$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{10} \end{matrix} \geq \mathbf{X} - \begin{matrix} Q_1 \mathbf{X} \\ Q_2 \mathbf{X} \end{matrix} \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix}, \quad [39]$$

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{10} \end{matrix} \geq -\mathbf{X} + \begin{matrix} Q_1 \mathbf{X} \\ Q_2 \mathbf{X} \end{matrix} \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix},$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall_i \quad 40, \quad \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1 \quad 41, \quad y \quad 0 \leq \sum_{i=1}^2 \lambda_i q_{k_0 k_i}^i \leq 1,$$

$$k_0, k_i \in \mathcal{u} \quad [42]$$

Para obtener las restricciones es un proceso un poco complejo ya que reemplazando en cada una de estas tendríamos un total de 2031 restricciones procediendo de la siguiente manera:

En [39] se debe cumplir que cada valor w_i es mayor o igual al producto de restarle a cada componente del vector \mathbf{X} el componente del resultante de la multiplicación de $\lambda_i Q_i \mathbf{X}$, por otro lado cada valor de w_i debe ser mayor o igual al producto de sumarle a cada componente del vector $-\mathbf{X}$ el componente del resultante de la multiplicación de $\lambda_i Q_i \mathbf{X}$, todo lo anterior quedaría de la siguiente forma:

Desarrollando el producto de $\lambda_i Q_i \mathbf{X}$ obtenemos los siguientes vectores:

$$\lambda_1 Q_1 X = [0,1028\lambda_1 \quad 0,0959\lambda_1 \quad 0,1830\lambda_1 \quad 0,1790\lambda_1 \quad 0,1495\lambda_1 \quad 0,0841\lambda_1 \\ 0,0561\lambda_1 \quad 0,0841\lambda_1 \quad 0,0280\lambda_1 \quad 0,0374\lambda_1]$$

$$\lambda_2 Q_2 X = [0,1049\lambda_2 \quad 0,0987\lambda_2 \quad 0,1744\lambda_2 \quad 0,1807\lambda_2 \quad 0,1516\lambda_2 \quad 0,0841\lambda_2 \\ 0,0561\lambda_2 \quad 0,0841\lambda_2 \quad 0,0280\lambda_2 \quad 0,0374\lambda_2]$$

Por lo tanto para expresar:

$$w_1 \geq X - \lambda_1 Q_1 X - \lambda_2 Q_2 X \quad \text{quedaría de la siguiente forma:}$$

$$w_1 \geq 0,1028 - 0,1028\lambda_1 + 0,1049\lambda_2$$

Y para el caso de $w_1 \geq -X + \lambda_1 Q_1 X + \lambda_2 Q_2 X$, sería de la siguiente forma:

$$w_1 \geq -0,1028 + 0,1028\lambda_1 + 0,1049\lambda_2$$

De igual forma se procede con las demás componentes hasta w_{10} , por lo tanto en este proceso se generan 20 restricciones.

En el caso de [40] se debe establecer que cada variable w_i debe ser igual o mayor que cero, lo cual genera 10 restricciones.

En el caso de [41] se debe establecer que la suma de λ_1 y λ_2 debe ser igual a uno, esto solo genera una sola restricción.

En el caso de [42] es la restricción más compleja que existe ya que dependiendo del número de estados y el orden de Markov genera $2m^{n+1}$ restricciones, es decir que en este caso se generan 2000 restricciones y la forma como se aplican estas restricciones consiste en combinar la suma de los productos $\lambda_i q_{k_0 k_i}^i$, donde $q_{k_0 k_i}^i$ puede ser cualquier valor de la probabilidad de un paso de un estado a otro

expresados en las matrices Q_1 y Q_2 , estas restricciones se sacan por estados de acuerdo a la siguiente forma:

Estado 1:

$$0 \leq \lambda_1 q_{11}^1 + \lambda_2 q_{11}^2 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_1 q_{21}^1 + \lambda_2 q_{21}^2 \leq 1, \dots \dots 0 \leq \lambda_1 q_{110}^1 + \lambda_2 q_{110}^2 \leq 1;$$

Así sucesivamente se trabaja para cada uno de los estados y por cada estado saldrían 200 restricciones para tener al final un total de 2000 restricciones.

Después de introducir cada una de las restricciones y aplicando la opción de “Adoptar modelo lineal” dada en las opciones de “ Solver” se obtienen los respectivos valores de los λ_i los cuales son:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0$$

Para obtener el pronóstico para el día 01 de Junio de 2011 se reemplaza en [31]:

$$X_{108} = 1Q_1X_{107} + 0Q_2X_{106} = Q_1X_{107}$$

Con lo cual se obtiene el siguiente vector de pronóstico:

$$X_{108} = 3E - 16 \quad 0,2632 \quad 0,5789 \quad 0,1579 \quad 3E - 16 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

En este vector se puede ver que el mayor valor de probabilidad se encuentra en el estado 3, es decir, que el rango de pronóstico sería entre 2,86 US\$/lb y 2,91 US\$/lb y el valor real fue de 2,89 US\$/lb con lo cual se puede comprobar que el pronóstico es acertado.

Se sigue el mismo procedimiento anterior para obtener los siguientes pronósticos:

Tabla 6. Pronóstico del precio del café con cadenas de Markov de orden 2

Día de Pronóstico	Valor Real (US\$/lb)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$/lb)
1-jun-11	2,89	3	3	2,885
2-jun-11	2,86	3	3	2,885
3-jun-11	2,92	4	3	2,885
6-jun-11	2,92	4	4	2,945
7-jun-11	2,92	4	4	2,945
8-jun-11	2,95	4	4	2,945
9-jun-11	2,95	4	4	2,945
10-jun-11	2,97	4	4	2,945
13-jun-11	2,99	5	4	2,945
14-jun-11	2,99	5	5	3,005
15-jun-11	2,98	5	5	3,005
16-jun-11	2,95	4	5	3,005
17-jun-11	2,92	4	4	2,945
20-jun-11	2,79	1	4	2,945
22-jun-11	2,80	2	1	2,765
23-jun-11	2,79	1	1	2,765
24-jun-11	2,81	2	1	2,765

Fuente: autor

Calculando el valor r para este modelo se obtiene un valor de 0,64. Se verifica que este modelo queda igual al del modelo de orden uno y esto se da porque el valor de λ_2 es igual a 0.

3.2.2.2 Aplicación del modelo con $m=10$ y $n=3$ para la serie de Precios del Café: Para realizar esta prueba se obtuvieron 3 matrices las cuales se pueden ver en el anexo 4 y para hallar los valores de los λ_i se aplicó la ecuación [26] donde se desarrolló un modelo de programación lineal el cual constaba de más de veinte mil restricciones, los respectivos pronósticos se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 7. Pronósticos a corto plazo del precio del café con cadenas de Markov de orden 3 con 10 estados

Día de Pronóstico	Valor Real (US\$/lb)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$/lb)
1-jun-11	2,89	3	3	2,885
2-jun-11	2,86	3	3	2,885
3-jun-11	2,92	4	3	2,885
6-jun-11	2,92	4	4	2,945
7-jun-11	2,92	4	4	2,945
8-jun-11	2,95	4	4	2,945
9-jun-11	2,95	4	4	2,945
10-jun-11	2,97	4	4	2,945
13-jun-11	2,99	5	4	2,945
14-jun-11	2,99	5	5	3,005
15-jun-11	2,98	5	5	3,005
16-jun-11	2,95	4	5	3,005
17-jun-11	2,92	4	4	2,945
20-jun-11	2,79	1	4	2,945
22-jun-11	2,80	2	1	2,765
23-jun-11	2,79	1	1	2,765
24-jun-11	2,81	2	1	2,765

Fuente: autor

Como se puede ver no representa ninguna variación respecto al modelo de $n=2$ y $n=1$ por lo tanto tendríamos el mismo valor de r que el obtenido en los dos modelos anteriores.

Para seguir analizando con valores de n mayores a tres y con diez estados representó un pequeño inconveniente, ya que en el caso de $n=4$ se generaron más de doscientas mil restricciones lo cual no podía resolver la función "Solver de Excel" por lo tanto se replanteó el problema pero ahora con solo cinco estados para poder analizarlo con mas periodos de rezago.

3.2.2.3 Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=2$ para la serie de Precios del Café:

Los respectivos rangos de los nuevos estados al replantear este análisis quedarían con los siguientes valores dados en US\$/lb:

Estado 1: [2,74 – 2,85]

Estado 2 [2,86 – 2,97]

Estado 3: [2,98 - 3,09]

Estado 4: [2,92 – 2,97]

Estado 5: [2,98 – 3,03]

Al realizar los respectivos pronósticos siguiendo el procedimiento expuesto en el numeral (3.2.2.1.) se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 8. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 2 y 5 estados

Fecha	valor real (US\$)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$)
1-jun-11	2,89	2	2	2,915
2-jun-11	2,86	2	2	2,915
3-jun-11	2,92	2	2	2,915
6-jun-11	2,92	2	2	2,915
7-jun-11	2,92	2	2	2,915
8-jun-11	2,95	2	2	2,915
9-jun-11	2,95	2	2	2,915
10-jun-11	2,97	2	2	2,915
13-jun-11	2,99	3	2	2,915
14-jun-11	2,99	3	2	2,915
15-jun-11	2,98	3	2	2,915
16-jun-11	2,95	2	2	2,915
17-jun-11	2,92	2	2	2,915
20-jun-11	2,79	1	2	2,915
22-jun-11	2,80	1	2	2,915
23-jun-11	2,79	1	2	2,915

24-jun-11	2,81	1	2	2,915
-----------	------	---	---	-------

Fuente: autor

El valor de r es igual a 0,59 que representa una buena medida de precisión aunque es más baja comparada con el caso analizado del modelo de segundo orden con diez estados.

3.2.2.4. Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=3$ para la serie para precios del Café: Los respectivos valores de pronósticos obtenidos fueron:

Tabla 9. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 3 y 5 estados

Fecha	valor real (US\$)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$)
1-jun-11	2,89	2	2	2,915
2-jun-11	2,86	2	2	2,915
3-jun-11	2,92	2	2	2,915
6-jun-11	2,92	2	2	2,915
7-jun-11	2,92	2	2	2,915
8-jun-11	2,95	2	2	2,915
9-jun-11	2,95	2	2	2,915
10-jun-11	2,97	2	2	2,915
13-jun-11	2,99	3	2	2,915
14-jun-11	2,99	3	3	3,035
15-jun-11	2,98	3	3	3,035
16-jun-11	2,95	2	3	3,035
17-jun-11	2,92	2	2	2,915
20-jun-11	2,79	1	2	2,915
22-jun-11	2,80	1	1	2,795
23-jun-11	2,79	1	1	2,795
24-jun-11	2,81	1	1	2,795

Fuente: autor

El valor de r para este modelo es de 0,82, representa un mayor grado de precisión que con el caso analizado de segundo orden.

3.2.2.5 Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=4$ para la serie de Precios del Café: Los respectivos valores de pronóstico en este caso fueron:

Tabla 10. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 4 y 5 estados

Fecha	valor real (US\$)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$)
1-jun-11	2,89	2	2	2,915
2-jun-11	2,86	2	2	2,915
3-jun-11	2,92	2	2	2,915
6-jun-11	2,92	2	2	2,915
7-jun-11	2,92	2	2	2,915
8-jun-11	2,95	2	2	2,915
9-jun-11	2,95	2	2	2,915
10-jun-11	2,97	2	2	2,915
13-jun-11	2,99	3	2	2,915
14-jun-11	2,99	3	3	3,035
15-jun-11	2,98	3	3	3,035
16-jun-11	2,95	2	3	3,035
17-jun-11	2,92	2	2	2,915
20-jun-11	2,79	1	2	2,915
22-jun-11	2,80	1	1	2,795
23-jun-11	2,79	1	1	2,795
24-jun-11	2,81	1	1	2,795

Fuente: autor

El valor de r es de 0,82, representa el mismo grado de precisión que con el anterior caso.

3.2.2.6 Aplicación del modelo con $m=5$ y $n=5$ para la serie de Precios del Café:

Tabla 11. Pronósticos a corto plazo de Precios del Café con cadenas de Markov de orden 5 y 5 estados

Fecha	valor real (US\$)	Estado del Valor Real	Estado de Pronóstico	Valor Promedio de Pronóstico (US\$)
1-jun-11	2,89	2	2	2,915
2-jun-11	2,86	2	2	2,915
3-jun-11	2,92	2	2	2,915
6-jun-11	2,92	2	2	2,915
7-jun-11	2,92	2	2	2,915
8-jun-11	2,95	2	2	2,915
9-jun-11	2,95	2	2	2,915
10-jun-11	2,97	2	2	2,915
13-jun-11	2,99	3	2	2,915
14-jun-11	2,99	3	3	3,035
15-jun-11	2,98	3	3	3,035
16-jun-11	2,95	2	3	3,035
17-jun-11	2,92	2	2	2,915
20-jun-11	2,79	1	2	2,915
22-jun-11	2,80	1	1	2,795
23-jun-11	2,79	1	1	2,795
24-jun-11	2,81	1	1	2,795

Fuente: autor

El valor de r es de 0,82, representa el mismo grado de precisión que con el anterior caso y esto se da debido a que en el caso del orden 3, 4 y 5 el mayor valor de los valores de los parámetros λ_i recae sobre el valor de λ_1 , y significa que solo están teniendo en cuenta el periodo anterior, mientras que en el caso del orden 2 el mayor valor recae sobre λ_2 , y significa que está teniendo en cuenta lo que aconteció dos periodos anteriores.

3.3 OBTENCIÓN DE PRONÓSTICOS CON OTROS MODELOS

Para comparar con otros métodos de pronóstico se eligieron los métodos de promedio móvil y el método de Atenuación exponencial doble o Método de Brown cuyos respectivos valores de los pronósticos se encuentran en los anexos 5 y 6.

3.4 COMPARACIÓN DE LOS MODELOS

Los valores de los respectivos errores hallados para cada uno de los modelos se encuentran en la siguiente tabla:

Tabla 12. Valores de los errores para cada uno de los modelos analizados

MODELO	REZAGOS	DAM	EMC	PEMA	PME
MARKOV DE ORDEN SUPERIOR	2	0,06	0,005	1,93%	-0,37%
	3	0,04	0,003	1,28%	-0,33%
	4	0,04	0,003	1,28%	-0,33%
	5	0,04	0,003	1,28%	-0,33%
MEDIA MOVIL	2	0,032	0,002	1,12%	-0,33%
	3	0,04	0,003	1,38%	-0,45%
	4	0,046	0,004	1,59%	-0,59%
	5	0,04	0,002	1,42%	-1,42%
ATENUACION EXPONENCIAL DOBLE		0,061	0,005	2,08%	0,66%

Fuente: autor

Con estos valores se puede observar que el modelo de media móvil con dos retrasos representa la mejor alternativa teniendo en cuenta los valores de los errores obtenidos bajo este modelo, sin embargo cabe destacar que a medida que aumenta el número de rezagos en el modelo de media móvil aumenta el valor de los errores, mientras que en el modelo de Markov estos disminuyen; por otro lado haciendo la comparación con el método de atenuación exponencial doble el cual

es un modelo utilizado para hacer pronósticos con series con comportamiento tendencial, se observa que el modelo de Markov presenta menores valores de error lo que lo convierte en una buena alternativa para seguir trabajando y analizando este modelo para convertirlo en una técnica de uso común y confiable para realizar pronósticos con cualquier tipo de datos.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES:

Durante el desarrollo del presente trabajo de investigación se realizaron diferentes pruebas con el objetivo de analizar y verificar la efectividad de utilizar los modelos de cadenas de Markov de primer orden y de orden superior en la realización de pronósticos utilizando series de precios. De acuerdo a las diferentes pruebas realizadas a través del análisis y realización de pronósticos de la serie de precios del Café se pueden considerar las siguientes conclusiones:

- No se considera como método confiable la utilización del modelo de Markov de orden uno para realizar pronósticos a largo plazo.
- A medida que va aumentando el orden de Markov, va mejorando en la precisión de los pronósticos realizados.
- No se obtuvieron diferencias significativas al hacer la comparación de los errores del modelo de Markov de orden superior con los errores del modelo de media móvil y presentó un mejor comportamiento que el modelo de atenuación exponencial doble.

Este análisis representa la introducción de un modelo nuevo y desconocido en nuestro medio como es el modelo de cadenas de Markov de orden superior para hacer pronósticos de series de tiempo, se hizo una prueba piloto con la serie de precios del café que tenía un comportamiento tendencial polinómico y se obtuvieron buenos resultados a pesar de que este modelo está básicamente formulado para trabajar series de tiempo con datos de demandas y de comportamiento estacionario, por lo tanto y haciendo la comparación con otros modelos diseñados para pronósticos de series con tendencia se puede establecer que este modelo puede dar buenos resultados de acuerdo a la cantidad de

estados y al número de rezagos que se tengan en cuenta, por lo cual representa una nueva alternativa para seguir investigando y utilizando este modelo para pronosticar series de diferentes tipos de datos que representen características diferentes a la serie de datos utilizada en esta investigación.

BIBLIOGRAFIA

1. **Liu, Tie.** Canadian Center Of Science and Education. *ccsenet*. [Online] Mayo 2010. [Cited: Agosto 25, 2010.] <http://www.ccsenet.org/journal/index.php/mas/article/viewFile/6040/4874>.
2. **Melo, Luis Fernando and Misas, Martha.** Banco de la Republica de Colombia. [Online] Octubre 1997. [Cited: Diciembre 4, 2010.] <http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra086.pdf>.
3. **Ching, W.** *Iterative Methods for Queuing and Manufacturing Systems*. Londres : Springer, 2001.
4. **Sharma, O.** *Markovian Queues*. New York : Ellis Horwood, 1995.
5. **Nahmias, S.** *Production and Operation Analysis*. Chicago : McGraw Hill International., 1997.
6. **Buzacott, J. Shanthikumar, J.** *Stochastic Models of Manufacturing Systems*. New Jersey : International ed. Prentice-Hall, 1993.
7. **Ching, W., Fung, E., Ng, M.** *A multivariate Markov chain model for categorical data sequences and its applications in demand predictions*. s.l. : IMA J. Manage. Math., 2002.
8. **MacDonald, I. Zucchini, W.** *Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series*. Londres : Chapman & Hall, 1997.
9. **Hillier, Frederick S and Lieberman, Gerard J.** *Investigación de Operaciones*. Mexico : McGraw-Hill, 2010.
10. **Raftery, Adian E.** Jstor. [Online] 1985. [Cited: 01 30, 2011.] <http://www.jstor.or/>.
11. **Waiki Ching, Michael K. Ng, & Shuquin Zhang.** SpringerLink. [Online] 2005. [Cited: 01 12, 2011.] <http://www.springerlink.com/content/l98428r62258r677/>.

12. **Waiki-Ching and Ng., Michael K.** Springer. [Online] 2006. [Cited: Abril 4, 2011.] <http://www.springerlink.com/content/k38501/front-matter.pdf>.
13. **Fung, Siu - Leung.** Hong Kong University Theses Online. [Online] 06 25, 2010. [Cited: 5 25, 2011.] http://sunzi.lib.hku.hk/hkuto/agreement_form.jsp.
14. **Hanke, Jhon E.** *Pronósticos en los Negocios*. Mexico : Prentice Hall, 1996.
15. **Raftery, Adrian E.** Jstor. [Online] octubre 14, 2003. [Cited: 02 15, 2011.] <http://www.jstor.or/> .

ANEXOS

ANEXO 1. SERIE DE TIEMPO DE PRECIOS DEL CAFÉ COMPRENDIDO ENTRE 3 DE ENERO DE 2011 Y EL 24 DE JUNIO DE 2011

Fecha	Precio (US\$/lb)	Fecha	Precio (US\$/lb)	Fecha	Precio (US\$/lb)	Fecha	Precio (US\$/lb)
3-ene-11	2,88	16-feb-11	2,88	1-abr-11	3,01	17-may-11	2,93
4-ene-11	2,88	17-feb-11	2,84	4-abr-11	2,97	18-may-11	2,94
5-ene-11	2,83	18-feb-11	2,92	5-abr-11	2,93	19-may-11	2,97
6-ene-11	2,79	21-feb-11	2,96	6-abr-11	3,04	20-may-11	2,93
7-ene-11	2,75	22-feb-11	2,96	7-abr-11	3,02	23-may-11	2,89
10-ene-11	2,74	23-feb-11	2,99	8-abr-11	3,09	24-may-11	2,91
11-ene-11	2,74	24-feb-11	2,95	11-abr-11	3,08	25-may-11	2,94
12-ene-11	2,78	25-feb-11	2,90	12-abr-11	3,07	26-may-11	2,94
13-ene-11	2,85	28-feb-11	2,95	13-abr-11	3,07	27-may-11	2,90
14-ene-11	2,81	1-mar-11	2,99	14-abr-11	3,14	30-may-11	2,90
17-ene-11	2,79	2-mar-11	2,98	15-abr-11	3,17	31-may-11	2,91
18-ene-11	2,79	3-mar-11	2,97	18-abr-11	3,22	1-jun-11	2,89
19-ene-11	2,79	4-mar-11	3,01	19-abr-11	3,21	2-jun-11	2,86
20-ene-11	2,78	7-mar-11	3,01	20-abr-11	3,26	3-jun-11	2,92
21-ene-11	2,78	8-mar-11	3,10	21-abr-11	3,32	6-jun-11	2,92
24-ene-11	2,86	9-mar-11	3,15	22-abr-11	3,32	7-jun-11	2,92
25-ene-11	2,83	10-mar-11	3,20	25-abr-11	3,32	8-jun-11	2,95
26-ene-11	2,77	11-mar-11	3,06	26-abr-11	3,19	9-jun-11	2,95
27-ene-11	2,82	14-mar-11	3,00	27-abr-11	3,21	10-jun-11	2,97
28-ene-11	2,80	15-mar-11	3,00	28-abr-11	3,17	13-jun-11	2,99
31-ene-11	2,86	16-mar-11	2,91	29-abr-11	3,17	14-jun-11	2,99
1-feb-11	2,87	17-mar-11	2,93	2-may-11	3,17	15-jun-11	2,98
2-feb-11	2,87	18-mar-11	2,99	3-may-11	3,27	16-jun-11	2,95
3-feb-11	2,87	21-mar-11	3,04	4-may-11	3,28	17-jun-11	2,92
4-feb-11	2,87	22-mar-11	3,04	5-may-11	3,19	20-jun-11	2,79
7-feb-11	2,86	23-mar-11	3,01	6-may-11	3,13	22-jun-11	2,80
8-feb-11	2,84	24-mar-11	2,97	9-may-11	3,13	23-jun-11	2,79
9-feb-11	2,82	25-mar-11	2,93	10-may-11	3,11	24-jun-11	2,81
10-feb-11	2,87	28-mar-11	3,00	11-may-11	3,08		
11-feb-11	2,86	29-mar-11	2,97	12-may-11	3,01		
14-feb-11	2,85	30-mar-11	2,97	13-may-11	3,03		
15-feb-11	2,91	31-mar-11	3,00	16-may-11	2,98		

Fuente: <http://xn--cafcolumbiano-dhb.com/index.php/indicador-diario-de-precios-del-cafe/>

ANEXO 2. CLASIFICACIÓN EN ESTADOS DE LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ

2.1. Para $m=10$

3	3	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1
1	1	1	3	2	1	2	2	3	3	3	3
3	3	2	2	3	3	2	3	3	2	4	4
4	5	4	3	4	5	5	4	5	5	7	7
8	6	5	5	3	4	5	6	6	5	4	4
5	4	4	5	5	4	4	6	5	6	6	6
6	7	8	9	8	9	10	10	10	8	8	8
8	8	9	10	8	7	7	7	6	5	5	5
4	4	4	4	3	3	4	4	3	3	3	

2.2. Para $m=5$

2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
2	3	2	2	2	3	3	2	3	3	4	4
4	3	3	3	2	2	3	3	3	3	2	2
3	2	2	3	3	2	2	3	3	3	3	3
3	4	4	5	4	5	5	5	5	4	4	4
4	4	5	5	4	4	4	4	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

**ANEXO 3. MATRICES DE FRECUENCIAS PARA DE LA SERIE PRECIOS DEL
CAFÉ CON M=10**

$$F^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 11 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$F^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

**ANEXO 4. MATRICES DE TRANSICIÓN DE LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ
CON M=10**

Q_1										
	0,727	0,182	0,091	0	0	0	0	0	0	0
	0,300	0,300	0,300	0,100	0	0	0	0	0	0
	0	0,263	0,579	0,158	0	0	0	0	0	0
	0	0	0,158	0,474	0,316	0,053	0	0	0	0
=	0	0	0,063	0,375	0,375	0,125	0,063	0	0	0
	0	0	0	0	0,444	0,444	0,111	0	0	0
	0	0	0	0	0	0,167	0,5	0,333	0	0
	0	0	0	0	0	0,111	0,111	0,444	0,333	0
	0	0	0	0	0	0	0	0,333	0	0,667
	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5
	0,546	0,364	0,091	0	0	0	0	0	0	0
	0,300	0,100	0,500	0,100	0	0	0	0	0	0
	0,111	0,278	0,333	0,167	0,111	0	0	0	0	0
	0	0	0,211	0,316	0,368	0,105	0	0	0	0
$Q_2 =$	0	0	0,125	0,5	0,125	0,125	0,125	0	0	0
	0	0	0	0,111	0,333	0,333	0,111	0,111	0	0
	0	0	0	0	0,167	0,333	0,167	0,167	0,167	0
	0	0	0	0	0,111	0	0,111	0,444	0,111	0,222
	0	0	0	0	0	0	0	0,333	0,333	0,333
	0	0	0	0	0	0	0,25	0,5	0	0,250

ANEXO 5. PRONÓSTICOS CON PROMEDIOS MÓVILES

5.1 PRONÓSTICOS CON MEDIA MÓVIL CON DOS REZAGOS PARA LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ:

Tabla 1. Pronóstico del precio del café utilizando el promedio móvil con dos retrasos

Dia de Pronostico	Valor Real	Valor de Pronostico
30-may-11	2,90	
31-may-11	2,91	
1-jun-11	2,89	2,91
2-jun-11	2,86	2,90
3-jun-11	2,92	2,88
6-jun-11	2,92	2,89
7-jun-11	2,92	2,92
8-jun-11	2,95	2,92
9-jun-11	2,95	2,94
10-jun-11	2,97	2,95
13-jun-11	2,99	2,96
14-jun-11	2,99	2,98
15-jun-11	2,98	2,99
16-jun-11	2,95	2,99
17-jun-11	2,92	2,97
20-jun-11	2,79	2,94
22-jun-11	2,80	2,86
23-jun-11	2,79	2,80
24-jun-11	2,81	2,80

Fuente: autor

Los respectivos valores de los errores, se observan en la siguiente tabla:

Tabla 2. Errores del pronóstico precio del café utilizando el promedio móvil con dos retrasos

DAM	EMC	PEMA	PME
0,032	0,002	1,12%	-0,33%

Fuente: autor

La DAM indica que cada pronóstico está desviado en promedio de 0,03 U\$/lb. El EMC de 0,00 y el PEMA de 1,15% se compararán con el EMC y el PEMA de los obtenidos con los pronósticos del modelo de orden 2 de Markov. Por último un bajo PME de -0.37% indica que la técnica no está desviada, ya que es un valor cercano a cero, lo cual quiere decir que la técnica no sobrestima ni subestima en forma consistente el precio diario del café.

5.2 PRONÓSTICOS CON MEDIA MÓVIL CON TRES REZAGOS PARA LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ:

Tabla 3. Pronóstico del precio del café utilizando el promedio móvil con tres retrasos

Dia de Pronostico	Valor Real	Valor de Pronostico
27-may-11	2,90	
30-may-11	2,90	
31-may-11	2,91	
1-jun-11	2,89	2,90
2-jun-11	2,86	2,90
3-jun-11	2,92	2,89
6-jun-11	2,92	2,89
7-jun-11	2,92	2,90
8-jun-11	2,95	2,92
9-jun-11	2,95	2,93
10-jun-11	2,97	2,94
13-jun-11	2,99	2,96
14-jun-11	2,99	2,97
15-jun-11	2,98	2,98
16-jun-11	2,95	2,99
17-jun-11	2,92	2,97
20-jun-11	2,79	2,95
22-jun-11	2,80	2,89
23-jun-11	2,79	2,84
24-jun-11	2,81	2,79

Fuente: autor

Tabla 4. Errores del pronóstico precio del café utilizando el promedio móvil con tres retrasos

DAM	EMC	PEMA	PME
0,040	0,003	1,38%	-0,45%

Fuente: autor

5.3 PRONÓSTICOS CON MEDIA MÓVIL CON CUATRO REZAGOS PARA LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ:

Tabla 5. Pronóstico del precio del café utilizando el promedio móvil con cuatro retrasos

Día de Pronóstico	Valor Real	Valor de Pronóstico
26-may-11	2,94	
27-may-11	2,90	
30-may-11	2,90	
31-may-11	2,91	
1-jun-11	2,89	2,91
2-jun-11	2,86	2,90
3-jun-11	2,92	2,89
6-jun-11	2,92	2,90
7-jun-11	2,92	2,90
8-jun-11	2,95	2,91
9-jun-11	2,95	2,93
10-jun-11	2,97	2,94
13-jun-11	2,99	2,95
14-jun-11	2,99	2,97
15-jun-11	2,98	2,98
16-jun-11	2,95	2,98
17-jun-11	2,92	2,98
20-jun-11	2,79	2,96
22-jun-11	2,80	2,91
23-jun-11	2,79	2,87
24-jun-11	2,81	2,83

Fuente: autor

Los respectivos valores de los errores serian:

Tabla 6. Errores del pronóstico precio del café utilizando el promedio móvil con cuatro retraso

DAM	EMC	PEMA	PME
0,046	0,004	1,59%	-0,59%

Fuente: autor

5.3 PRONÓSTICOS CON MEDIA MÓVIL CON CINCO REZAGOS PARA LA SERIE DE PRECIOS DEL CAFÉ

Tabla 7. Pronóstico del precio del café utilizando el promedio móvil con cinco retrasos

Dia de Pronostico	Valor Real	Valor de Pronostico
25-may-11	2,94	
26-may-11	2,94	
27-may-11	2,90	
30-may-11	2,90	
31-may-11	2,91	
1-jun-11	2,89	2,92
2-jun-11	2,86	2,91
3-jun-11	2,92	2,89
6-jun-11	2,92	2,90
7-jun-11	2,92	2,90
8-jun-11	2,95	2,90
9-jun-11	2,95	2,91
10-jun-11	2,97	2,93
13-jun-11	2,99	2,94
14-jun-11	2,99	2,96
15-jun-11	2,98	2,97
16-jun-11	2,95	2,98
17-jun-11	2,92	2,98
20-jun-11	2,79	2,97
22-jun-11	2,80	2,93
23-jun-11	2,79	2,89
24-jun-11	2,81	2,85

Fuente: autor

Los respectivos errores fueron:

Tabla 8. Errores del pronóstico precio del café utilizando el promedio móvil con cinco retrasos

DAM	EMC	PEMA	PME
0,040	0,002	1,42%	-1,42%

Fuente: autor

ANEXO 6. PRONOSTICOS CON EL METODO DE ATENUACION DOBLE

Tabla 9. Pronóstico del precio del café utilizando el Método de Atenuación doble

Dia de Pronostico	Valor Real	Valor de Pronostico
1-jun-11	2,89	2,90
2-jun-11	2,86	2,90
3-jun-11	2,92	2,90
6-jun-11	2,92	2,90
7-jun-11	2,92	2,89
8-jun-11	2,95	2,89
9-jun-11	2,95	2,89
10-jun-11	2,97	2,89
13-jun-11	2,99	2,89
14-jun-11	2,99	2,88
15-jun-11	2,98	2,88
16-jun-11	2,95	2,88
17-jun-11	2,92	2,88
20-jun-11	2,79	2,87
22-jun-11	2,80	2,87
23-jun-11	2,79	2,87
24-jun-11	2,81	2,87

Fuente: autor

Tabla 10. Errores del pronóstico precio del café utilizando el Método de Atenuación doble

DAM	EMC	PEMA	PME
0,061	0,005	2,08%	0,66%

Fuente: autor

ANEXO 7. PARAMETROS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS PARA OBTENER LOS PRONOSTICOS DE LA SERIE PRECIOS DEL CAFÉ CON M=5

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las pruebas, cada fecha con los estudios a diferentes ordenes de Markov.

FECHA: 1 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1316	0	0	0
	0,2381	0,6842	0,28	0	0
	0	0,1842	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1892	0	0	0
	0,3333	0,5135	0,44	0	0
	0	0,2973	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1389	0	0	0
	0,2857	0,6111	0,36	0	0
	0	0,2222	0,44	0,4	0
	0	0,0278	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1714	0	0	0
	0,3333	0,6	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,2	0,44	0,4	0
	0	0,0286	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1765	0	0	0
	0,4286	0,5	0,32	0,2	0
	0	0,2941	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0294	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19626168	0,36448598	0,23364486	0,14018692	0,06542056
---	------------	------------	------------	------------	------------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,9615E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,1892	0,5135	0,2973	0	0
----	--------	--------	--------	---	---

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

y1	0,81493915
y2	0
y3	0,18506085

Vector de pronóstico:

Xt	0,13	0,67	0,19	0,01	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

y1	0,90867674
y2	2,0195E-28
y3	0
y4	0,09132326

Vector de pronóstico:

Xt	0,14	0,68	0,19	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Vector estacionario:

X	0,19626168	0,36448598	0,23364486	0,14018692	0,06542056
---	------------	------------	------------	------------	------------

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector de pronóstico:

Xt	0,14	0,68	0,19	0,00	0
----	------	------	------	------	---

FECHA: 2 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1282	0	0	0
	0,2381	0,6923	0,28	0	0
	0	0,1795	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1842	0	0	0
	0,3333	0,5263	0,44	0	0
	0	0,2895	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1351	0	0	0
	0,2857	0,6216	0,36	0	0
	0	0,2162	0,44	0,4	0
	0	0,027	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1667	0	0	0
	0,3333	0,6111	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1944	0,44	0,4	0
	0	0,0278	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1714	0	0	0
	0,4286	0,5143	0,32	0,2	0
	0	0,2857	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0286	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19444444	0,37037037	0,23148148	0,13888889	0,06481481
---	------------	------------	------------	------------	------------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,1842	0,5263	0,2895	0	0
----	--------	--------	--------	---	---

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

y1	0,81493915
y2	0
y3	0,18506085

Vector pronóstico:

Xt	0,129	0,679	0,186	0,005	0,000
----	-------	-------	-------	-------	-------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

y1	0,90867674
y2	2,0195E-28
y3	0
y4	0,09132326

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,68	0,18	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,68	0,18	0,00	0
----	------	------	------	------	---

FECHA: 3 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,125	0	0	0
	0,2381	0,7	0,28	0	0
	0	0,175	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1795	0	0	0
	0,3333	0,5385	0,44	0	0
	0	0,2821	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1316	0	0	0
	0,2857	0,6316	0,36	0	0
	0	0,2105	0,44	0,4	0
	0	0,0263	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1622	0	0	0
	0,3333	0,6216	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1892	0,44	0,4	0
	0	0,027	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1667	0	0	0
	0,4286	0,5278	0,32	0,2	0
	0	0,2778	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0278	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19266055	0,37614679	0,2293578	0,13761468	0,06422018
---	------------	------------	-----------	------------	------------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,1795	0,5385	0,2821	0	0
----	--------	--------	--------	---	---

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,81493915
λ_2	0
λ_3	0,18506085

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,69	0,18	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,09132326

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,69	0,18	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,13	0,69	0,18	0,00	0
-------	------	------	------	------	---

FECHA: 4 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,122	0	0	0
	0,2381	0,7073	0,28	0	0
	0	0,1707	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,175	0	0	0
	0,3333	0,55	0,44	0	0
	0	0,275	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1282	0	0	0
	0,2857	0,641	0,36	0	0
	0	0,2051	0,44	0,4	0
	0	0,0256	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1579	0	0	0
	0,3333	0,6316	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1842	0,44	0,4	0
	0	0,0263	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1622	0	0	0
	0,4286	0,5405	0,32	0,2	0
	0	0,2703	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,027	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19	0,38	0,23	0,14	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,175	0,55	0,275	0	0
----	-------	------	-------	---	---

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,68	0,19	0,01	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

X_t	0,13	0,70	0,17	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,13	0,70	0,17	0,00	0
-------	------	------	------	------	---

FECHA: 5 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,119	0	0	0
	0,2381	0,7143	0,28	0	0
	0	0,1667	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1707	0	0	0
	0,3333	0,561	0,44	0	0
	0	0,2683	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,125	0	0	0
	0,2857	0,65	0,36	0	0
	0	0,2	0,44	0,4	0
	0	0,025	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1538	0	0	0
	0,3333	0,641	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1795	0,44	0,4	0
	0	0,0256	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1579	0	0	0
	0,4286	0,5526	0,32	0,2	0
	0	0,2632	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0263	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19	0,39	0,23	0,14	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,1707	0,561	0,2683	0	0
----	--------	-------	--------	---	---

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,69	0,18	0,01	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,70	0,17	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,71	0,17	0,00	0
----	------	------	------	------	---

FECHA: 6 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1163	0	0	0
	0,2381	0,7209	0,28	0	0
	0	0,1628	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1667	0	0	0
	0,3333	0,5714	0,44	0	0
	0	0,2619	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,122	0	0	0
	0,2857	0,6585	0,36	0	0
	0	0,1951	0,44	0,4	0
	0	0,0244	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,15	0	0	0
	0,3333	0,65	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,175	0,44	0,4	0
	0	0,025	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1538	0	0	0
	0,4286	0,5641	0,32	0,2	0
	0	0,2564	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0256	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19	0,39	0,22	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,17	0,56	0,27	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,69	0,18	0,01	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

Xt	0,13	0,70	0,17	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,71	0,16	0,00	0
----	------	------	------	------	---

FECHA: 7 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1136	0	0	0
	0,2381	0,7273	0,28	0	0
	0	0,1591	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1628	0	0	0
	0,3333	0,5814	0,44	0	0
	0	0,2558	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,119	0	0	0
	0,2857	0,6667	0,36	0	0
	0	0,1905	0,44	0,4	0
	0	0,0238	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1463	0	0	0
	0,3333	0,6585	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1707	0,44	0,4	0
	0	0,0244	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,15	0	0	0
----	--------	------	---	---	---

	0,4286	0,575	0,32	0,2	0
	0	0,25	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,025	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,19	0,40	0,22	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,16	0,58	0,26	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,71	0,17	0,01	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,72	0,16	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,12	0,72	0,16	0,00	0
----	------	------	------	------	---

FECHA: 8 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1111	0	0	0
	0,2381	0,7333	0,28	0	0
	0	0,1556	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1591	0	0	0
	0,3333	0,5909	0,44	0	0
	0	0,25	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1163	0	0	0
	0,2857	0,6744	0,36	0	0
	0	0,186	0,44	0,4	0
	0	0,0233	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1429	0	0	0
	0,3333	0,6667	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1667	0,44	0,4	0
	0	0,0238	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1463	0	0	0
	0,4286	0,5854	0,32	0,2	0
	0	0,2439	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0244	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,40	0,22	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,16	0,59	0,25	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,11	0,73	0,16	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

X_t	0,11	0,73	0,16	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,11	0,73	0,16	0,00	0
-------	------	------	------	------	---

FECHA: 9 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1087	0	0	0
	0,2381	0,7391	0,28	0	0
	0	0,1522	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1556	0	0	0
	0,3333	0,6	0,44	0	0
	0	0,2444	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1136	0	0	0
	0,2857	0,6818	0,36	0	0
	0	0,1818	0,44	0,4	0
	0	0,0227	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1395	0	0	0
	0,3333	0,6744	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1628	0,44	0,4	0
	0	0,0233	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1429	0	0	0
	0,4286	0,5952	0,32	0,2	0
	0	0,2381	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0238	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,41	0,22	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,15	0,59	0,26	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

Xt	0,11	0,72	0,16	0,01	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

Xt	0,11	0,73	0,15	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,11	0,73	0,15	0,00	0
----	------	------	------	------	---

FECHA: 10 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1064	0	0	0
	0,2381	0,7234	0,28	0	0
	0	0,1702	0,64	0,1333	0
	0	0	0,08	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1522	0	0	0
	0,3333	0,587	0,44	0	0
	0	0,2609	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1111	0	0	0
	0,2857	0,6667	0,36	0	0
	0	0,2	0,44	0,4	0
	0	0,0222	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1364	0	0	0
	0,3333	0,6591	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,1818	0,44	0,4	0
	0	0,0227	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1395	0	0	0
	0,4286	0,5814	0,32	0,2	0
	0	0,2558	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0233	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	0	1	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,41	0,22	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,15	0,59	0,26	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

Xt	0,04	0,41	0,49	0,06	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

X_t	0,02	0,35	0,56	0,07	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_{t-5}	0	1	0	0	0
-----------	---	---	---	---	---

FECHA: 11 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1064	0	0	0
	0,2381	0,7234	0,2692	0	0
	0	0,1702	0,6538	0,1333	0
	0	0	0,0769	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1489	0	0	0
	0,3333	0,5745	0,44	0	0
	0	0,2766	0,4	0,2667	0
	0	0	0,16	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1087	0	0	0
	0,2857	0,6522	0,36	0	0
	0	0,2174	0,44	0,4	0
	0	0,0217	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1333	0	0	0
	0,3333	0,6444	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,2	0,44	0,4	0
	0	0,0222	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1364	0	0	0
	0,4286	0,5682	0,32	0,2	0
	0	0,2727	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0227	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	0	1	0	0
Xt-1	0	0	1	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,40	0,23	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,00	0,44	0,40	0,16	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	0,65406977
λ_2	0
λ_3	0,34593023

Vector pronóstico:

X_t	0,04	0,40	0,50	0,06	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,82627737
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,17372263

Vector pronóstico:

X_t	0,02	0,33	0,57	0,07	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,01	0,30	0,61	0,07	0
-------	------	------	------	------	---

FECHA: 12 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1064	0	0	0
	0,2381	0,7234	0,2593	0	0
	0	0,1702	0,6667	0,1333	0
	0	0	0,0741	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1489	0	0	0
	0,3333	0,5745	0,4231	0	0
	0	0,2766	0,4231	0,2667	0
	0	0	0,1538	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1064	0	0	0
	0,2857	0,6383	0,36	0	0
	0	0,234	0,44	0,4	0
	0	0,0213	0,16	0,3333	0,7143
	0	0	0,04	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1304	0	0	0
	0,3333	0,6304	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,2174	0,44	0,4	0
	0	0,0217	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1333	0	0	0
	0,4286	0,5556	0,32	0,2	0
	0	0,2889	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0222	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	0	1	0	0
Xt-2	0	0	1	0	0
Xt-1	0	0	1	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,40	0,24	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,00	0,44	0,40	0,16	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,00	0,26	0,67	0,07	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

Xt	0,00	0,26	0,67	0,07	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,01	0,29	0,63	0,07	2,8159E-13
----	------	------	------	------	------------

FECHA: 13 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1064	0	0	0
	0,2381	0,7234	0,2857	0	0
	0	0,1702	0,6429	0,1333	0
	0	0	0,0714	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1489	0	0	0
	0,3333	0,5745	0,4444	0	0
	0	0,2766	0,4074	0,2667	0
	0	0	0,1481	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1064	0	0	0
	0,2857	0,6383	0,3846	0	0
	0	0,234	0,4231	0,4	0
	0	0,0213	0,1538	0,3333	0,7143
	0	0	0,0385	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1277	0	0	0
	0,3333	0,6383	0,32	0,0667	0
	0,0476	0,2128	0,44	0,4	0
	0	0,0213	0,2	0,2	0,8571
	0	0	0,04	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1304	0	0	0
	0,4286	0,5652	0,32	0,2	0
	0	0,2826	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0217	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	0	0	0
Xt-4	0	0	1	0	0
Xt-3	0	0	1	0	0
Xt-2	0	0	1	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,40	0,24	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,00	0,44	0,41	0,15	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,11	0,72	0,17	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

X_t	0,11	0,72	0,17	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,10	0,69	0,19	0,02	0,00365293
-------	------	------	------	------	------------

FECHA: 14 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1042	0	0	0
	0,2381	0,7292	0,2857	0	0
	0	0,1667	0,6429	0,1333	0
	0	0	0,0714	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1489	0	0	0
	0,3333	0,5745	0,4643	0	0
	0	0,2766	0,3929	0,2667	0
	0	0	0,1429	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1064	0	0	0
	0,2857	0,6383	0,4074	0	0
	0	0,234	0,4074	0,4	0
	0	0,0213	0,1481	0,3333	0,7143
	0	0	0,037	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1277	0	0	0
	0,3333	0,6383	0,3462	0,0667	0
	0,0476	0,2128	0,4231	0,4	0
	0	0,0213	0,1923	0,2	0,8571
	0	0	0,0385	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1277	0	0	0
	0,4286	0,5745	0,32	0,2	0
	0	0,2766	0,4	0,2667	0,1429
	0	0,0213	0,2	0,2667	0,7143
	0	0	0,08	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	0	1	0	0
Xt-4	0	0	1	0	0
Xt-3	0	0	1	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	0	1	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,18	0,41	0,23	0,13	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,15	0,57	0,28	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,10	0,73	0,17	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

Xt	0,10	0,73	0,17	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,09	0,69	0,19	0,02	0,00351595
----	------	------	------	------	------------

FECHA: 15 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7619	0,1224	0	0	0
	0,2381	0,7143	0,2857	0	0
	0	0,1633	0,6429	0,1333	0
	0	0	0,0714	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1667	0	0	0
	0,3333	0,5625	0,4643	0	0
	0	0,2708	0,3929	0,2667	0
	0	0	0,1429	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1064	0,0357	0	0
	0,2857	0,6383	0,3929	0	0
	0	0,234	0,3929	0,4	0
	0	0,0213	0,1429	0,3333	0,7143
	0	0	0,0357	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1277	0,037	0	0
	0,3333	0,6383	0,3333	0,0667	0
	0,0476	0,2128	0,4074	0,4	0
	0	0,0213	0,1852	0,2	0,8571
	0	0	0,037	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1277	0,0385	0	0
	0,4286	0,5745	0,3077	0,2	0
	0	0,2766	0,3846	0,2667	0,1429
	0	0,0213	0,1923	0,2667	0,7143
	0	0	0,0769	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	0	1	0	0
Xt-4	0	0	1	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	0	1	0	0	0
Xt-1	1	0	0	0	0

Vector estacionario:

Xt	0,70	0,25	0,04	0,02	0,00337896
----	------	------	------	------	------------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,17	0,56	0,27	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,76	0,24	0,00	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

Xt	0,76	0,24	0,00	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,70	0,25	0,04	0,02	0,00337896
----	------	------	------	------	------------

FECHA: 16 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7727	0,1224	0	0	0
	0,2273	0,7143	0,2857	0	0
	0	0,1633	0,6429	0,1333	0
	0	0	0,0714	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6667	0,1837	0	0	0
	0,3333	0,551	0,4643	0	0
	0	0,2653	0,3929	0,2667	0
	0	0	0,1429	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,125	0,0357	0	0
	0,2857	0,625	0,3929	0	0
	0	0,2292	0,3929	0,4	0
	0	0,0208	0,1429	0,3333	0,7143
	0	0	0,0357	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1277	0,0714	0	0
	0,3333	0,6383	0,3214	0,0667	0
	0,0476	0,2128	0,3929	0,4	0
	0	0,0213	0,1786	0,2	0,8571
	0	0	0,0357	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1277	0,0741	0	0
	0,4286	0,5745	0,2963	0,2	0
	0	0,2766	0,3704	0,2667	0,1429
	0	0,0213	0,1852	0,2667	0,7143
	0	0	0,0741	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	0	1	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	0	1	0	0	0
Xt-2	1	0	0	0	0
Xt-1	1	0	0	0	0

Vector estacionario:

Xt	0,71	0,26	0,02	0,00	3,1615E-14
----	------	------	------	------	------------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,67	0,33	0,00	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

Xt	0,77	0,23	0,00	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

X_t	0,77	0,23	0,00	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,71	0,26	0,02	0,00	3,1615E-14
-------	------	------	------	------	------------

FECHA: 17 DE JUNIO

Matrices de transición:

Q1	0,7826	0,1224	0	0	0
	0,2174	0,7143	0,2857	0	0
	0	0,1633	0,6429	0,1333	0
	0	0	0,0714	0,6667	0,4286
	0	0	0	0,2	0,5714

Q2	0,6818	0,1837	0	0	0
	0,3182	0,551	0,4643	0	0
	0	0,2653	0,3929	0,2667	0
	0	0	0,1429	0,4667	0,5714
	0	0	0	0,2667	0,4286

Q3	0,7143	0,1429	0,0357	0	0
	0,2857	0,6122	0,3929	0	0
	0	0,2245	0,3929	0,4	0
	0	0,0204	0,1429	0,3333	0,7143
	0	0	0,0357	0,2667	0,2857

Q4	0,619	0,1458	0,0714	0	0
	0,3333	0,625	0,3214	0,0667	0
	0,0476	0,2083	0,3929	0,4	0
	0	0,0208	0,1786	0,2	0,8571
	0	0	0,0357	0,3333	0,1429

Q5	0,5714	0,1277	0,1071	0	0
	0,4286	0,5745	0,2857	0,2	0
	0	0,2766	0,3571	0,2667	0,1429
	0	0,0213	0,1786	0,2667	0,7143
	0	0	0,0714	0,2667	0,1429

Vectores de rezago:

Xt-5	0	1	1	0	0
Xt-4	0	1	0	0	0
Xt-3	1	0	0	0	0
Xt-2	1	0	0	0	0
Xt-1	1	0	0	0	0

Vector estacionario:

X	0,20	0,40	0,23	0,12	0,06
---	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 2

Variables:

λ_1	1,0733E-15
λ_2	1

Vector pronóstico:

Xt	0,68	0,32	0,00	0,00	0,00
----	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 3

Variables:

λ_1	1
λ_2	0
λ_3	6,1889E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,78	0,22	0,00	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 4

Variables:

λ_1	0,99962625
λ_2	2,0195E-28
λ_3	0
λ_4	0,00037375

Vector pronóstico:

X_t	0,78	0,22	0,00	0,00	0,00
-------	------	------	------	------	------

Orden de Markov (n)= 5

Variables:

λ_1	0,90867674
λ_2	0
λ_3	7,0397E-12
λ_4	0,09132326
λ_5	4,2666E-13

Vector pronóstico:

X_t	0,72	0,25	0,02	0,00	3,0463E-14
-------	------	------	------	------	------------