
**Algoritmo de Ligaduras de Dirac y Conteo del Número de Grados
de Libertad para la Teoría Completa de Maxwell-Proca en
Espacio-Tiempo Plano**

Jessica Andrea Hernández Sanguino

Trabajo de Grado para Optar el Título de Física

DIRECTOR:

Yeinzon Rodríguez García
Físico, M.Sc., Ph.D.

CODIRECTOR:

Luis Gabriel Gómez Díaz
Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga

2021

Dedicatoria

A mi madre. A Daniel y mis amigos Juliana, Ravelo y Fabian.

Agradecimientos

Agradecer a los docentes que contribuyeron en mi formación, en especial al doctor Yeinzon Rodríguez, quien orientó mi trabajo de investigación y me brindó valiosos conocimientos en mi desarrollo como profesional.

A la Universidad Industrial de Santander, por brindarme la oportunidad de desarrollarme en la ciencia, en el deporte y participar de actividades culturales, dando lugar a una formación integra a lo largo de mi carrera.

Al grupo de investigación, con quienes compartimos debates y discusiones de gran relevancia, ampliando mis conocimientos en distintas áreas e instruyéndome en mi formación como física. Especialmente al doctor Gabriel Gómez, quien también orientó mi trabajo de investigación y me ayudó en la aclaración de inquietudes.

A mi madre y mi familia materna por su constante apoyo y confianza en mí.

A Daniel por su apoyo incondicional, su compañía y confianza a lo largo de este proceso.

A mis amigos, Juliana, Ravelo y Fabian, por creer y confiar en mí, por su apoyo y las interesantes conversaciones que me han brindado.

Índice general

Introducción	9
1 Grados de libertad	14
1.1 Teorema espín-estadística	15
1.2 Invariancias	16
1.2.1 <i>Invariancia bajo el grupo de Poincaré</i>	16
1.2.2 <i>Invariancia bajo el grupo $U(1)$</i>	17
2 Algoritmo de Dirac	21
2.1 Análisis en el formalismo Lagrangiano	22
2.2 Análisis en el formalismo Hamiltoniano	33
3 Conteo del número de grados de libertad	38
Conclusiones	41
Referencias	43
Apéndices	47
A Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	47
B Ecuaciones de Euler-Lagrange con la matriz auxiliar	49
B.1 Nivel primario	49
B.2 Nivel secundario	49
C Identidades asociadas a campos de Maxwell	51
C.1 Identidades de <i>gauge</i>	51
C.2 Identidades de Bianchi	52
D Definiciones equivalentes del Hessiano secundario y ecuaciones de movimiento a segundo nivel	53

Índice de figuras

2.1	<i>Ligaduras primarias Lagrangianas</i>	26
2.2	<i>Definiciones de α y W</i>	32

Índice de tablas

1.1	<i>Clasificación de partículas según su momentum.</i>	17
2.1	<i>Ecuaciones formalismo Lagrangiano</i>	31
2.2	<i>Variables formalismo Hamiltoniano</i>	33
2.3	<i>Ligaduras de Dirac</i>	36

Resumen

TÍTULO: Algoritmo de ligaduras de Dirac y conteo del número de grados de libertad para la teoría completa de Maxwell-Proca en espacio-tiempo*.

AUTOR: Jessica Andrea Hernández Sanguino[†]

PALABRAS CLAVE: Campos vectoriales, algoritmo de Dirac, grados de libertad.

RESUMEN:

En la literatura se tiene registro del estudio de teorías de múltiples campos en donde se evidencia no solo la dinámica de estos sino también sus interacciones; sin embargo, no ha sido un tema que haya recibido mucha atención en la construcción de teorías alternativas de la gravedad, hasta hace pocos años. Adicionalmente, se encuentra que las propuestas realizadas en teorías con múltiples campos hasta ese momento fueron construidas con restricciones en las interacciones entre estos o solo permitiendo campos del mismo tipo. Debido a que no se tenía conocimiento de una teoría que incorporara la interacción entre campos de espín uno, masivos y sin masa, recientemente se inició la construcción de la teoría completa de Maxwell-Proca, teoría en la cual no solo se incluye la dinámica de los campos de Maxwell y los de Proca, sino que además, se tiene en cuenta la interacción entre estos. No obstante, su construcción trae consigo un procedimiento que exige, para lograr una adecuada descripción, evitar la presencia de inestabilidades y remover los grados de libertad no físicos que se puedan introducir a causa de la interacción entre los campos. Es este el motivo por el cual se hace imperante la aplicación del algoritmo de ligaduras de Dirac en la teoría completa de Maxwell-Proca, para garantizar la propagación del número de grados de libertad adecuados y, a partir de esto, encontrar las condiciones que se deben imponer sobre la teoría para lograr la descripción consistente con un sistema físico. Cabe aclarar que la teoría es construida en un espacio-tiempo de Minkowski y que su descripción es válida para un número cualquiera de campos interactuantes de Maxwell y de Proca.

*Trabajo de Grado

[†]Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Yeinzon Rodríguez García, Ph.D.

Abstract

TITLE: Dirac algorithm and counting of degrees of freedom for the complete Maxwell-Proca theory in flat spacetime*.

AUTHOR: Jessica Andrea Hernández Sanguino [†]

KEYWORDS: Vector fields, Dirac algorithm, degrees of freedom.

ABSTRACT:

Recently, theories based on multiple vector fields have been proposed, involving not only the dynamical character, as commonly demanded, but also the interaction between them; however, it is a topic that has not brought enough attention in the construction of alternative theories of gravity until a few years ago. Furthermore, in the construction of theories with multiple fields by that time, the interactions between the involved fields are restricted or just allowed between fields of the same type. Due to the lack of knowledge of a theory that introduces the interactions between massive and massless fields of spin one, the complete Maxwell-Proca theory was recently proposed. In this theory not only the dynamics of the Maxwell and Proca fields are included, as previously stated, but also the interactions between them. Nevertheless, it is important to keep in mind that such a procedure must guarantee the absence of instabilities and remove the non-physical degrees of freedom that can be introduced due to interactions between the fields. This is the reason why the application of the Dirac algorithm in the complete Maxwell-Proca theory is imperative to guarantee the propagation of the appropriate number of degrees of freedom and, from this, to find the conditions to be imposed on the theory to achieve the consistent description with a physical system. We emphasize that the theory is built on Minkowski spacetime and its description is valid for any number of interacting Maxwell and Proca fields.

*Bachelor Thesis

[†]Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Yeinzon Rodríguez García, Ph.D.

Introducción

*‘Science is not only a disciple of reason but, also, one of romance and passion’
Stephen Hawking.*

La curiosidad del hombre a lo largo de la historia lo ha conducido a relevantes hallazgos y a un entendimiento más profundo, claro y preciso de su entorno; persiguiendo constantemente la comprensión de lo que es la realidad. En la filosofía occidental encontramos la alegoría de la caverna de Platón en el séptimo libro de su obra la República, [Platón \(370 a.C.\)](#), la cual nos presenta unos prisioneros inmersos en una caverna cuyo campo de visión únicamente comprende una pared al final de la cueva. Justo detrás de ellos hay un muro, una hoguera y la salida que lleva al mundo exterior; sin embargo, ellos no tienen posibilidad de mover sus cabezas para otro lado, por lo tanto, no aprecian qué hay tras de ellos. La única realidad que ellos conocen son las sombras proyectadas en la pared que visualizan, las cuales corresponden a objetos que otras personas hacen pasar frente a la hoguera. Un día, uno de los prisioneros logra salir de la caverna y se percató que aquello que él conocía no era la realidad, sale de la ignorancia en la que ha vivido todos sus años y se da cuenta que la realidad comprende muchas más cosas. Él decide regresar con sus compañeros de la caverna para compartirles el conocimiento adquirido e instarlos a salir. A pesar de ello, es rechazado y burlado. A través de la alegoría de la cueva vemos que se presenta una discrepancia en el concepto que se tiene de la realidad según el conocimiento del hombre.

Un análisis factible de la alegoría exhorta a pensar en la necesidad de entender qué es lo real y qué no, indagando hasta qué punto se puede fiar el hombre de sus sentidos. Sin embargo, en el mundo de la ciencia no es posible fiarse solo de sus sentidos para construir una caracterización de los fenómenos, menos aún si se es un investigador teórico. En consecuencia, los académicos han desarrollado con el tiempo un concepto de realidad mediante el lenguaje preciso e inequívoco de las matemáticas, por medio del cual se conduzca a interpretaciones físicas acordes a un sistema físicamente posible o, dicho de otra forma, un sistema observable que tenga cabida en nuestro universo.

Es gracias a este deseo por entender y explicar los fenómenos de nuestro entorno que tuvieron lugar numerosas contribuciones en el área de la ciencia; como es el caso del ingenioso británico Isaac Newton, quien brindó un primer acercamiento a la comprensión de lo que es la gravedad y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre, estudios que presentó en el tercer tomo de su libro *Philosophiae naturalis principia mathematica*, [Newton \(1687\)](#). Siglos después, para ser exactos en la segunda mitad del siglo XIX, aparece en escena James Maxwell con su artículo *A dynamical theory of the electromag-*

netic field, Maxwell (1865), con el cual brindó una explicación unificada de la electricidad, el magnetismo y la luz, presentándolos como distintas manifestaciones de un mismo fenómeno, dando lugar a la creación de la teoría clásica de la radiación electromagnética. Esta teoría pasó a ser descrita posteriormente como una teoría de campos, donde la electrodinámica de Maxwell se expresa con campos vectoriales Abelianos de espín uno no masivos, Weinberg (1995).

Es así como fueron surgiendo y desarrollándose teorías que describen de manera correcta y precisa el comportamiento natural de distintos sistemas. Sin embargo, todas estas teorías, por más exitosas que sean, solo poseen cierto rango de aplicabilidad, es decir, ninguna de las teorías existentes corresponde a una teoría fundamental cuya formulación sea válida para cualquier escala. Es por ello que, inclusive, la teoría de la Relatividad General postulada por Albert Einstein entre 1915 y 1916, Einstein (1915, 1916), llega hasta cierta escala de validez determinada por la escala de Planck. Por otro lado, la Relatividad General ha sido probada a escalas del sistema solar y, recientemente, a escalas características del tamaño de objetos compactos, Abbott *et. al.* (2016). De otra parte, se tiene la presencia de singularidades[†] que no pueden ser explicadas por medio de la Relatividad General. Adicionalmente, surge también una incongruencia en su intento de dar explicación a la energía oscura, Ellis, Maartens, y MacCallum (2012); Perlov y Vilenkin (2017), siendo esta atribuida a una energía de vacío que se representa con la constante cosmológica, ya que el valor de la densidad de energía asociada a la constante cosmológica que se incluye en la Relatividad General es muy diferente al predicho teóricamente, Carroll (2001); aspectos que llevan a catalogar la Relatividad General como una teoría efectiva, Burgess (2004).

La búsqueda de una teoría más general se convierte en la cuna de exóticas y diversas teorías de gravedad modificada, entre las cuales tiene lugar la teoría de Proca generalizada. Para llegar a su formulación, se tiene como punto de partida la propuesta de Alexandru Proca, realizada en la primera mitad del siglo XX, con la cual se llegó a un modelo masivo del fotón a través de la ecuación de onda masiva relativista propuesta para un campo vectorial, Proca (1936, 1938); Proca y Goudsmit (1939). La postulación de esta teoría ha conducido, principalmente en los últimos años, a que tengan lugar varios intentos por conseguir la teoría de campos vectoriales masiva más general posible, llegando a la construcción de la teoría generalizada de Proca en 2014, Heisenberg (2014); Tasinato (2014). Esta también es conocida como la teoría de Galileones vectoriales y se encuentra relacionada con la construcción de Galileones escalares propuesta por Horndeski en 1974, Horndeski (1974)[‡], quien también propuso una teoría para Galileones vectoriales con simetría interna $U(1)$, Horndeski (1976).

Es importante tener claro que el primer paso para la formulación Lagrangiana adecuada que dé cuenta de los fenómenos observables es identificar los grados de libertad fundamentales. Es por esto que se debe contemplar la identificación de partículas elementales como represen-

[†]En el artículo Azhar y Namjoo (2021) se presenta una discusión en relación a las singularidades presentes en la teoría de la Relatividad General y teorías métricas de la gravedad.

[‡]La teoría escalar-tensor propuesta por Horndeski fue ignorada durante décadas y vino a ser redescubierta en 2009, Nicolis, Rattazzi, y Trincherini (2009).

taciones unitarias irreducibles del grupo de Lorentz-Poincaré[§], propuesta por [Wigner \(1939\)](#), así como tener presente las posibles invariancias que pueda exhibir la teoría. Otro aspecto fundamental es la cantidad de grados de libertad que se propagarían en la teoría según los posibles números cuánticos asociados a la partícula a partir del teorema espín-estadística, [Weinberg \(1995\)](#).

La teoría generalizada de Proca ha tenido una variedad de aplicaciones una vez implementado su acoplamiento con la gravedad, teniendo repercusión en campos como: objetos compactos, [Ajith, Saffer, y Yagi \(2020\)](#), energía oscura, [Gómez y Rodríguez \(2021\)](#), [Rodríguez y Navarro \(2018\)](#), [Geng et. al. \(2021\)](#), y contribuyendo en aliviar la tensión de Hubble, [De Felice, Geng, Pookillath, y Yin \(2020\)](#). Por otra parte, en trabajos llevados a cabo con la teoría generalizada de Proca donde intervienen más de un campo no se consideraron otras restricciones que afectaran el número de grados de libertad que propaga la teoría, como por ejemplo [Allys, Peter, y Rodríguez \(2016\)](#), [Beltrán Jiménez y Heisenberg \(2017\)](#). Es por esto que no se puede garantizar la ausencia de inestabilidades en ellos; sin embargo, hay casos donde ya se corrigió este aspecto, como el trabajo que se presenta en el artículo [Gallego Cadavid, Rodríguez, y Gómez \(2020\)](#).

De este modo, vemos cómo toman importancia los grados de libertad que describen a un sistema, ya que es con estos con los que se define la dinámica del sistema y, en consecuencia, la presencia de un grado de libertad que no concuerde con la descripción física de la partícula en el espacio-tiempo trabajado conlleva a la presencia de inestabilidades tipo *ghost* en la teoría, haciendo que el signo de la energía cinética sea erróneo y conduciendo a problemas en los estados energéticos del sistema, [Sbisa \(2014\)](#).

Sin embargo, las inestabilidades tipo *ghost* no son las únicas que pueden acarrear problemas para la teoría, ya que también se debe garantizar que sus ecuaciones de movimiento sean cuando mucho de segundo orden y así evitar la presencia de inestabilidades de Ostrogradsky, [Ostrogradsky \(1850\)](#). Estas últimas representan una ausencia de un estado base en la teoría, indicando que no se posee ni cota inferior ni cota superior en la energía del sistema, siendo esto una característica física inconsistente, ya que no se puede tener energía infinita. Se considera que esta condición impuesta por el teorema de Ostrogradsky en las ecuaciones de movimiento de las teorías Lagrangianas está relacionada con el hecho de que la naturaleza se describe con ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Como se mencionó con anterioridad, en la literatura se aprecia que las teorías de multicampos con interacciones han sido estudiadas, teniendo como resultado teorías donde solo se tiene interacción con campos de un mismo tipo, [Deffayet, Deser, y Esposito-Farese \(2010\)](#); [Rodríguez y Navarro \(2017\)](#), estando estas interacciones fuertemente restringidas en algunos casos. Es así que con el objetivo de permitir cualquier tipo de interacción entre los campos, los autores [Díez, Gording, Méndez-Zavaleta, y Schmidt-May \(2020a\)](#) y [Díez, Maier, Méndez-](#)

[§]En el artículo propuesto por [Cabaret, Grandou, Grange, y Perrier \(2021\)](#) se presenta una discusión muy interesante sobre lo que son partículas fundamentales; allí se puede apreciar la importancia de la simetría con respecto al grupo de Lorentz-Poincaré.

Zavaleta, y Tehrani (2020b) propusieron la teoría completa de Maxwell-Proca, la cual es construida en un espacio-tiempo de Minkowski con campos reales Abelianos de espín uno considerando los dos posibles casos, que posean o no masa.

En la teoría completa de Maxwell-Proca, no solo se describe la dinámica de los campos sino que también se incluyen todas las posibles interacciones entre estos, permitiendo a su vez que no haya restricción alguna en la cantidad de campos que intervengan de cada tipo (Maxwell o Proca). Debido a la presencia de dos campos diferentes, las interacciones que se pueden dar son de tres tipos, Maxwell-Maxwell, Proca-Proca y Maxwell-Proca. Es a causa de esa interacción entre campos masivos y sin masa que se pueden introducir grados de libertad no físicos en la teoría los cuales es necesario remover con el fin de obtener una teoría “saludable”.

Es en este punto donde entra a jugar un papel crucial el algoritmo de ligaduras propuesto por Paul Dirac, Dirac (1964), Blagojevic (2002), el cual desarrolló durante sus años de estancia en la universidad de Yeshiva en Nueva York en la década de los 60. Este método recientemente ha atraído la atención de numerosos teóricos, ya que permite encontrar las ligaduras asociadas a la teoría que se esté estudiando y así garantizar la propagación del número de grados de libertad adecuados y evitar la aparición de patologías. Otro de los beneficios que trae el implementar el algoritmo a una teoría es el hecho que permite la escritura de la misma en términos de corchetes de Poisson, brindando una primera aproximación a la cuantización de la teoría.

El algoritmo inicia con la densidad Lagrangiana que describe a la teoría en la cual, con el fin de garantizar la libertad de fantasmas, se impone una condición necesaria mas no suficiente sobre el Hessiano de las ecuaciones de movimiento dando lugar a una cierta cantidad de ligaduras. Luego se debe asegurar que dichas ligaduras se cumplan todo el tiempo, lo cual conduce a un segundo grupo de ecuaciones de movimiento, conocido como el segundo nivel del algoritmo, en donde nuevamente se garantiza la libertad de fantasmas con una segunda condición sobre el Hessiano del segundo nivel; este proceso se realiza iterativamente hasta llegar a un grupo de ecuaciones de movimiento sin ligaduras; dependiendo de la teoría se tendrá una cantidad distinta de niveles. Una vez finalizado el proceso iterativo del algoritmo se tendrá la cantidad de ligaduras del sistema para garantizar la ausencia de inestabilidades y la propagación del número de grados de libertad adecuados para la teoría.

Teniendo como base la teoría completa de Maxwell-Proca y los aspectos a contemplar para garantizar que sea una teoría que permita describir un sistema físico, con el presente trabajo se abordan todas las consideraciones a tener en cuenta para dejar libre de posibles inestabilidades a la teoría completa de Maxwell-Proca; de igual forma se presenta todo el procedimiento realizado sobre la teoría a partir del algoritmo de Dirac, presentando la forma de las ligaduras tanto para el formalismo Lagrangiano como para el Hamiltoniano realizando, finalmente, el conteo de grados de libertad incluyendo las ligaduras encontradas, con el fin de mostrar que, con la imposición de estas en la teoría se asegura la propagación de los grados de libertad físicos determinados para cada campo por el teorema espín-estadística. Es importante señalar que este trabajo de grado es una reproducción de los cálculos presentados en el artículo Díez, Gording, Méndez-Zavaleta, y Schmidt-May (2020a), para la adecuada

construcción de la teoría completa de Maxwell-Proca.

Convenciones: En el desarrollo del trabajo se considera un espacio-tiempo plano de cuatro dimensiones, con signatura positiva en la métrica $(-, +, +, +)$. Los índices espacio-temporales se denotan con letras griegas (μ, ν, \dots) , mientras que los índices latinos (i, j, \dots) representan las coordenadas espaciales. Para campos masivos se emplea la etiqueta (α, β, \dots) , mientras que para campos sin masa se usa $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots)$. La diferenciación entre un nivel y otro del algoritmo también se hace por medio de notación: en nivel primario no se usa distintivo alguno, pero en el nivel secundario y terciario las cantidades asociadas a cada uno se identificarán, respectivamente, por llevar \sim o \wedge en la parte superior.

Capítulo 1

Grados de libertad

*‘Equipped with his five senses, man explores the universe around him and calls the
adventure Science.’
Edwin Powell Hubble*

Con la finalidad de describir cualquier sistema es necesario identificar y especificar el número de variables independientes que se precisan para definir de forma única la posición del sistema físico clásico en estudio; dichas variables independientes son conocidas como los grados de libertad[†] y las relaciones entre estas variables y sus respectivas derivadas temporales conducen a las ecuaciones de movimiento de segundo orden[‡], las cuales son imprescindibles para entender y analizar la dinámica de un sistema físico, [Landau y Lifshitz \(1976\)](#).

Para alcanzar una descripción plena del sistema físico que se estudia es necesario tener en consideración las ligaduras que pueden estar presentes y limitan el movimiento, causando así modificaciones en la dinámica del mismo, [Goldstein, Poole, y Safko \(2001\)](#). A su vez, la existencia de ligaduras influye en la cantidad de grados de libertad de un sistema, conociendo a partir de la mecánica clásica que el conteo de ellos se define por medio de la expresión:

$$\eta = 3N - S, \tag{1.1}$$

siendo N el número de partículas que conforman el sistema, S el número de ecuaciones de ligaduras y el 3 corresponde a las dimensiones espaciales que se están trabajando.

Con el desarrollo de la teoría cuántica de campos el concepto de simetría pasó a desempeñar un rol fundamental, mostrando que estas teorías de campos exhiben invariancias con respecto a algún grupo de transformaciones de simetría locales, [Wipf \(1994\)](#). De esta manera, se hace evidente que la dinámica del sistema se podría describir con un número menor de variables en razón a que la simetría actúa como ligadura en la teoría. Por consiguiente, existirá un subconjunto de variables que resultan irrelevantes, haciendo que las ecuaciones de Euler-Lagrange no correspondan con la descripción física esperada; a estos se les conoce

[†]Una explicación más detallada con ejemplificaciones incluidas acerca de los grados de libertad se puede apreciar en la primera sección del artículo [Walker \(1940\)](#).

[‡]Cabe mencionar que existen teorías de gravedad modificada en las cuales las ecuaciones de movimiento pueden ser de más alto orden y aún así evadir inestabilidades; [Langlois \(2017\)](#), [Langlois y Noui \(2016\)](#).

como sistemas con ligaduras.

El hecho que una teoría contenga variables que no contribuyen en la determinación de la dinámica del sistema puede hacer que dicha teoría presente patologías, debido a que estaría propagando grados de libertad no físicos, conduciendo a inestabilidades taquiónicas, [Wolf y Lagos \(2019\)](#), y la aparición de *fantasmas*, [Sbisa \(2014\)](#). Es por esto que se busca librar a la teoría de cualquier tipo de “defectos” que generen problemas con el desarrollo, interpretación y funcionamiento de la misma.

Con la finalidad de obtener una teoría “saludable” que propague grados de libertad físicos surge la pregunta: ¿Cómo saber cuántos son los grados de libertad adecuados que debe tener la teoría? Para dar respuesta a esta pregunta nos apoyamos en el teorema espín-estadística, el cual no solo establece una relación entre el espín asociado a una partícula y su respectiva estadística, sino que también da luz en la determinación de la cantidad de grados de libertad necesarios en la teoría para describir un sistema físico.

1.1. Teorema espín-estadística

La teoría de Schrödinger es consistente ya sea con la estadística de Bose-Einstein o con la estadística de Fermi-Dirac y, por lo tanto, impide establecer una conexión directa entre el espín asociado a una partícula y la estadística que cumple. Sin embargo, no sucede lo mismo con la teoría cuántica de campos, la cual logró establecer una correspondencia entre el espín y la estadística que describen a la partícula, catalogando a este como uno de los mayores triunfos de la teoría, [Gross \(1999\)](#).

Por medio del teorema espín-estadística es posible llevar a cabo la clasificación de los bosones y los fermiones según las propiedades que manifiestan, siendo estos los dos tipos básicos de partículas elementales que existen en la naturaleza, [Streater y Wightman \(2000\)](#). El teorema postula, [Duck, Pauli, y Sudarshan \(1997\)](#):

Teorema: *Partículas idénticas con espín semientero satisfacen el principio de exclusión de Pauli y la estadística de Fermi-Dirac, por lo cual no se permite más de una partícula por estado cuántico; no ocurre lo mismo con partículas idénticas de espín entero, estas cumplen la estadística de Bose-Einstein, la cual permite un número cualquiera de partículas en cada estado cuántico.*

Adicionalmente, es posible apoyarse en el teorema para determinar los grados de libertad necesarios para describir un sistema físico, teniendo en cuenta el espín asociado a la partícula y las simetrías que posee; de esta forma se obtiene la expresión:

$$\eta = 2s + 1, \tag{1.2}$$

donde s representa el espín de la partícula.

Por consiguiente, la teoría completa de Maxwell-Proca se construye con un campo bosónico de espín igual a 1 y, por lo tanto, poseerá un número cuántico de espín equivalente a $m_s = -1, 0, 1$, cantidad de estados que concuerda con el número de grados de libertad obtenidos de la ecuación 1.2; sin embargo, teniendo en cuenta que se trata de una partícula sin masa cumplirá la simetría de *gauge*, haciendo que uno de los estados no exista, siendo este el estado $m_s = 0$. Así, el campo de Maxwell propagará dos grados de libertad los cuales corresponden a los dos estados de polarización transversales. Mientras que para el caso de un campo de Proca, debido al término masivo se tiene rompimiento de la simetría *gauge*, dando lugar a la propagación de un grado de libertad adicional, el cual concierne al estado longitudinal, Gross (1999).

1.2. Invariancias

Debido a que la teoría completa de Maxwell-Proca se describe en un espacio-tiempo de Minkowski, la cantidad de grados de libertad que se están propagando tanto de los campos de Maxwell como los de Proca es igual a cuatro, los cuales es sabido que se reducen debido a invariancias que presentan, y así llegan a coincidir con los estados que propaga cada campo según lo establecido por el teorema espín-estadística. Para esta teoría intervienen dos invariancias: en primer lugar tenemos la invariancia bajo las transformaciones del grupo de Poincaré, la cual se impone para los dos tipos de campos que forman la teoría; la otra es la invariancia bajo transformaciones del grupo $U(1)$ o invariancia de *gauge* que se cumple por los campos de Maxwell, como se mencionó anteriormente.

1.2.1. Invariancia bajo el grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré es un grupo de transformaciones continuas de la localización de eventos puntuales en el espacio-tiempo afín de Minkowski, el cual incluye las transformaciones de Lorentz, las rotaciones y las traslaciones, Gourgoulhon (2016). Si se quiere que la descripción brindada por una teoría concuerde con las observaciones, la teoría física ha de ser invariante bajo el grupo de Poincaré[†].

Las partículas elementales poseen propiedades cinéticas tales como la masa y el espín, las cuales deben ser descritas por cantidades invariantes bajo transformaciones relativistas, Ryder (1996). Es así como se introducen los invariantes de Casimir, teniendo la construcción de dos de ellos en el grupo de Poincaré. De estos, el primer invariante de Casimir C_1 está asociado con la masa y el segundo C_2 se relaciona con el espín de la partícula, siendo estos descritos, respectivamente, como:

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \quad (1.3)$$

$$C_2 = W^\mu W_\mu, \quad (1.4)$$

[†]En la sección IV del artículo Montesinos y Flores (2006) podemos ver cómo se aplica la invariancia de la acción de Proca bajo el grupo de Poincaré para determinar su tensor de energía-momento simétrico.

donde el generador de traslaciones es el cuadrimomentum P_μ y el pseudovector de Pauli-Lubanski representado como $W_\mu = -1/2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma}$, siendo $J^{\rho\sigma}$ el tensor de momento angular relativista y $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor de Levi Civita.

A partir de los invariantes de Casimir es posible llevar a cabo la caracterización de las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré, [Berenstein, Martínez, y Rodríguez \(1992\)](#), [Wigner \(1939\)](#), [Weinberg \(1995\)](#), obteniendo seis clases diferentes como se puede apreciar en la tabla 1.1.

Tabla 1.1

Clasificación de partículas según su momentum.

Características	Tipo de partícula
$p^2 = m^2 > 0$, $p^0 > 0$	Física masiva
$p^2 = m^2 > 0$, $p^0 < 0$	No es física
$p^2 = 0$, $p^0 > 0$	Física sin masa
$p^2 = 0$, $p^0 < 0$	No es física
$p^2 < 0$	Partículas virtuales
$p^\mu = 0$	Vacío

Nota. Tipos de partículas según la clasificación de Wigner, tomando como base los invariantes de Casimir.

De estos casos, los que resultan de mayor interés son los dos casos de partícula física, con y sin masa. En el caso con masa se tiene que $P^\mu P_\mu = m^2$ y $W^\mu W_\mu = m^2 s(s+1)$, siendo s el espín asociado a la partícula. Mientras que si nos enfocamos en la partícula física sin masa se tiene que $P^\mu P_\mu = 0$, $W^\mu W_\mu = 0$ y $P^\mu W_\mu = 0$, lo que indica que P^μ y W_μ deben ser proporcionales, i.e., $W^\mu = \lambda P^\mu$; en consecuencia, el estado de una partícula sin masa queda caracterizado por un número λ que posee dimensiones de momento angular y es conocido por el nombre de helicidad, tomando los valores $\lambda = \pm s$. Así para el caso del fotón cuyo espín es $s = 1$, se tendrán los estados de polarización circular derecha e izquierda debido a la helicidad $\lambda = \pm 1^\dagger$, [Ryder \(1996\)](#), [Berenstein, Martínez, y Rodríguez \(1992\)](#).

1.2.2. Invariancia bajo el grupo $U(1)$

La formulación relativista de la teoría de Maxwell conduce a la escritura compacta de las ecuaciones de Maxwell conocidas hoy en día, para lo cual es crucial estar familiarizado con la definición del tensor de Faraday en función del cuadripotencial A^ν :

[†]Se debe tener bien claro que la helicidad $\lambda = \pm 1$ quiere decir que toma los valores $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$, sin pasar por $\lambda = 0$. Lo anterior debido a que la helicidad toma los valores máximo y mínimo, mientras que los otros posibles estados son prohibidos, [Gross \(1999\)](#).

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.5)$$

ya que a partir de este y su respectivo dual, definido en función del tensor de Levi-Civita como

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (1.6)$$

las ecuaciones inhomogéneas y las homogéneas quedan descritas, respectivamente, por las expresiones

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (1.7)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.8)$$

en donde J^ν es la fuente de campo electromagnético, también conocida como la cuadracorriente y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. Se tiene que 1.7 corresponde a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para los campos, las cuales también se pueden obtener a partir de la formulación Lagrangiana del electromagnetismo con la acción descrita por:

$$S = \int \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right) d^4x. \quad (1.9)$$

Es evidente que la teoría es invariante bajo transformaciones de Lorentz teniendo en cuenta la forma de las ecuaciones. Adicionalmente, se aprecia que el Lagrangiano asociado a campos de Maxwell exhibe una invariancia bajo la transformación de *gauge* 1.10 cuando se tiene conservación de la cuadracorriente:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (1.10)$$

donde ϕ un campo escalar real arbitrario.

Así, sustituyendo la ecuación 1.5 en 1.7 se obtiene

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu, \quad (1.11)$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu) - \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu) = J^\nu, \quad (1.12)$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu. \quad (1.13)$$

Debido a que se busca que los campos queden únicamente especificados en cualquier lugar, se pasa al proceso conocido como fijación del *gauge* para remover la arbitrariedad inducida por la libertad de *gauge* 1.10. Así, se hace que A^μ satisfaga la condición del *gauge* de Lorenz[†]:

[†]El nombre del *gauge* usado en este caso es Lorenz, no Lorentz, debido al físico Danés Ludvig Valentin Lorenz, Gourgoulhon (2016).

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.14)$$

De este modo, con el *gauge* de Lorenz las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\square A^\nu = J^\nu, \quad (1.15)$$

notando que cuando se trate del vacío, la ecuación 1.15 se hace cero. Este resultado corresponde al caso de campos de Maxwell los cuales se asocian a partículas de espín uno sin masa; sin embargo, si se tiene en consideración el caso masivo, se llega a una generalización de las ecuaciones de Maxwell, las cuales quedan descritas por las ecuaciones de movimiento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (1.16)$$

La ecuación 1.16 es conocida como la ecuación de Proca y es la representación masiva para campos de espín entero igual a uno. Sustituyendo el tensor de Faraday en la ecuación de Proca se encuentra que el *gauge* de Lorenz ya no es solo una escogencia como con los campos de Maxwell sino que para campos de Proca este *gauge* pasa a ser una exigencia, dando como resultado

$$(\square + m^2)A^\nu = 0. \quad (1.17)$$

De lo expuesto anteriormente, salta a la vista la invariancia de *gauge* que poseen las ecuaciones de Maxwell, la misma que es rota por las ecuaciones de Proca debido al término masivo a pesar de cumplir la condición del *gauge* de Lorenz, que surge como una condición que se impone.

Una forma más directa de ver lo explicado previamente es aplicando la transformación de *gauge* 1.10 a los Lagrangianos de Maxwell y Proca, definidos respectivamente por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu. \quad (1.19)$$

Es importante mencionar que a partir de este punto en la notación empleada $A_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ se asocian a los campos de Maxwell y Proca, respectivamente, cuya definición es análoga a la del tensor de Faraday presentada en 1.5.

En el caso del Lagrangiano asociado a campos de Maxwell, al aplicar la transformación se obtiene

$$\mathcal{L}'_M = -\frac{1}{4}[\partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\phi) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\phi)][\partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu\phi) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu\phi)], \quad (1.20)$$

$$\mathcal{L}'_M = -\frac{1}{4}[\partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu\phi - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu\phi][\partial^\mu A^\nu + \partial^\mu\partial^\nu\phi - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu\partial^\mu\phi]. \quad (1.21)$$

A partir de la conmutatividad de las derivadas, lo cual es válido en espacio-tiempo plano, se tendrá que $\partial^\mu \partial^\nu = \partial^\nu \partial^\mu$, por lo cual se llega a

$$\mathcal{L}'_M = -\frac{1}{4}[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu][\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu], \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L}'_M = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M, \quad (1.24)$$

dejando en evidencia que el Lagrangiano para campos de Maxwell es invariante ante transformaciones de *gauge*.

De otra parte, aplicando la transformación al Lagrangiano que expresa la acción de Proca se tiene que

$$\mathcal{L}'_P = -\frac{1}{4}[\partial_\mu(B_\nu + \partial_\nu \phi) - \partial_\nu(B_\mu + \partial_\mu \phi)][\partial^\mu(B^\nu + \partial^\nu \phi) - \partial^\nu(B^\mu + \partial^\mu \phi)] - \frac{1}{2}m^2[B_\mu + \partial_\mu \phi][B^\mu + \partial^\mu \phi]. \quad (1.25)$$

Teniendo presente la propiedad conmutativa que se puede aplicar a las derivadas, es evidente la invariancia de *gauge* del primer término; sin embargo, no ocurre lo mismo con el segundo:

$$\mathcal{L}'_P = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) - \frac{1}{2}m^2[B_\mu B^\mu + B_\mu(\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi)B^\mu + (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)], \quad (1.26)$$

$$\mathcal{L}'_P = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{2}m^2[B_\mu(\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi)B^\mu + (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)], \quad (1.27)$$

$$\mathcal{L}'_P = \mathcal{L}_P - \frac{1}{2}m^2[B_\mu(\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi)B^\mu + (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)]. \quad (1.28)$$

Como $\mathcal{L}'_P \neq \mathcal{L}_P$, se tiene un rompimiento de la invariancia de *gauge*, lo cual ocurre debido a la presencia del término masivo en el Lagrangiano que describe campos de Proca. Es debido a esta característica que \mathcal{L}_P incorpora un grado de libertad adicional.

En virtud de lo anteriormente presentado se concluye que, para que la teoría completa de Maxwell-Proca corresponda a una teoría saludable y libre de inestabilidades, se debe garantizar, según dicta el teorema espín-estadística, que el número de grados de libertad propagados por los campos de Maxwell corresponda al número de estados de polarización del fotón, es decir, no puede propagar más de dos debido a sus invariancias con respecto a transformaciones de *gauge* y al grupo de Poincaré; entre tanto, para los campos de Proca se debe asegurar la propagación de tres grados de libertad, añadiendo así el modo longitudinal debido a la presencia de la masa que rompe una de las simetrías.

Capítulo 2

Algoritmo de Dirac

‘The reward of the young scientist is the emotional thrill of being the first person in the history of the world to see something or to understand something. Nothing compare with that experience.’
Cecilia Payne-Gaposchkin

En la teoría completa de Maxwell-Proca no solo se tienen en cuenta la contribución cinética de los campos sino también las contribuciones a causa de la interacción entre los campos presentes en la teoría. Es así que el Lagrangiano adecuado para describir la teoría es de la forma

$$\mathcal{L}_{MP} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{int} , \quad (2.1)$$

siendo la parte cinética expresada como

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^{(\bar{\alpha})} A_{(\bar{\alpha})}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^{(\alpha)} B_{(\alpha)}^{\mu\nu} . \quad (2.2)$$

En tanto que el término de interacción se construye teniendo en cuenta todas las posibles interacciones entre los campos y sus primeras derivadas. En este caso, se encontrarán Lagrangianos de tres tipos: Maxwell-Maxwell, Maxwell-Proca y Proca-Proca. Así, el segundo término de la ecuación 2.1 queda representado de manera general como

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}^{(AA)} + \mathcal{L}^{(AB)} + \mathcal{L}^{(BB)} . \quad (2.3)$$

Es a causa de considerar la interacción entre los campos que se presenta una discrepancia entre el número de grados de libertad que estaría propagando la teoría y aquellos físicamente relevantes. Es así que, con el objetivo de desarrollar una teoría “saludable”, se aplica la formulación canónica de Dirac, [Dirac \(1964\)](#), en la teoría completa de Maxwell-Proca.

Se toma una variedad diferenciable de Banach \mathcal{C} como el espacio de configuración de una teoría clásica de campo, cuyos puntos se etiquetan por M_o variables de campo reales. Las variedades de Banach son modeladas sobre espacios de Banach y son generalizaciones sencillas de variedades con dimensión finita, [Wipf \(1994\)](#).

Teniendo que para teorías locales la densidad Lagrangiana depende únicamente del campo y sus derivadas, el punto de partida será la acción cuya forma esquemática sea

$$S = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} d^{3+1}x \mathcal{L}, \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(Q^I, \dot{Q}^I). \quad (2.4)$$

En 2.4 las Q^I representan las variables de campo, donde $I = 1, \dots, M_o$ con $M_o = 4(N + M)$, siendo N y M la cantidad de campos de Maxwell y Proca, respectivamente. También es importante tener en cuenta que $\dot{Q}^I = \partial_0 Q^I$. A su vez, se debe tener presente que el índice I contiene los índices espacio-temporales e indica qué tipo de campo es, si es Maxwell o Proca. De este modo se tendrá que

$$Q^I = X_{\mu}^{(A)}$$

Así, se tendrá que las cuatro primeras componentes de Q^I corresponden a las cuatro componentes espacio-temporales asociados al primer campo como se presenta en el recuadro inferior. De este modo, al pasar a las siguientes cuatro componentes de I , se tendrán las componentes espacio-temporales del segundo campo y así sucesivamente, pasando al siguiente campo cada cuatro valores de I .

Q^I	Q^1	Q^2	Q^3	Q^4	Q^5	Q^6	Q^7	Q^8
$X_{\mu}^{(A)}$	X_0^1	X_1^1	X_2^1	X_3^1	X_0^2	X_1^2	X_2^2	X_3^2

2.1. Análisis en el formalismo Lagrangiano

En el proceso se encuentran las condiciones necesarias y suficientes para que el conteo de los grados de libertad propagados por la teoría coincida con los de la teoría auxiliar, esta última estando definida por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{aux}} := -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^{(\bar{\alpha})} A_{(\bar{\alpha})}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^{(\alpha)} B_{(\alpha)}^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} B_{\mu}^{(\alpha)} B_{(\alpha)}^{\mu}, \quad (2.5)$$

representando de este modo una teoría con N campos de Maxwell y M campos de Proca en donde, por simplicidad, se toma la misma masa no nula para todos los campos de Proca. El propósito es mostrar que las interacciones de los $N + M$ campos propuestos no introducen grados de libertad no físicos, en comparación con el Lagrangiano de la teoría auxiliar presentado en la ecuación 2.5.

La acción 2.4 se varía con respecto al tiempo y se le aplica el principio de acción estacionaria, obteniendo las ecuaciones de movimiento de la forma presentada en la ecuación 2.6, procedimiento que se puede ver en el apéndice A.

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^J = 0 . \quad (2.6)$$

Las anteriores ecuaciones pueden ser escritas de manera más compacta como

$$\alpha_I + W_{IJ} \ddot{Q}^J = 0 , \quad (2.7)$$

donde los parámetros empleados corresponden a

$$\alpha_I(Q, \dot{Q}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J , \quad (2.8)$$

y

$$W_{IJ}(Q, \dot{Q}) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} , \quad (2.9)$$

con W_{IJ} siendo una matriz simétrica de dimensión $M_o \times M_o$, la cual es conocida como la matriz Hessiana y es crucial al momento de evitar la inestabilidad de Ostrogradsky y todas las implicaciones que esta trae consigo para la teoría, aspectos que se pueden revisar en el artículo [Woodard \(2015\)](#). Luego entonces se impone la condición de degeneración definida en [2.10](#), con la finalidad de garantizar que la teoría sea saludable y las ecuaciones de movimiento sean cuando mucho de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_\mu^{(A)} \partial \dot{Q}_\nu^{(B)}} = 0. \quad (2.10)$$

La condición de degeneración [2.10](#) tiene una implicación sobre el Hessiano, pero dicha condición no se debe cumplir para todas las coordenadas espacio-temporales, de ser así el Hessiano sería una matriz de ceros. Entonces surge la pregunta ¿Sobre qué índices debería aplicarse la condición de degeneración? Antes de dar respuesta a esta interrogante es importante tener en cuenta que para propagar los grados de libertad adecuados, el sistema debe contener ligaduras y este tipo de sistemas se caracteriza por poseer un Hessiano singular que satisface la condición $|W_{IJ}| = 0$, [Heisenberg \(2014\)](#). Es decir, la matriz asociada al Hessiano no debe ser cero pero su determinante sí.

Considerando esto y que los grados de libertad que propagan los campos de Maxwell y Proca corresponden a grados espaciales, se obtiene que la condición de degeneración se aplica sobre la componente temporal, de la forma que se presenta a continuación:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_0^{(A)} \partial \dot{X}_\mu^{(B)}} \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.11)$$

donde el símbolo $\stackrel{!}{=}$ implica una exigencia. De esta forma, una fila de la matriz Hessiana se anularía y, debido a que se trabaja en espacio-tiempo plano, las derivadas conmutan y esto se refleja en la matriz Hessiana ya que se hace cero una fila y una columna. Una vez degenerada la matriz Hessiana, su rango es $\text{rank}(W_{IJ}) = 3(N + M)$, siendo este menor a la

dimensión de la matriz, en consecuencia su determinante se anula.

Debido a la condición 2.11, es apreciable que no todas las ecuaciones de movimiento presentadas en 2.7 son ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes. Solo $M_o - M_1$ ecuaciones son independientes, las restantes M_1 ecuaciones no involucran las aceleraciones \ddot{Q} . Estas son las relaciones entre las Q y las \dot{Q} . La cantidad de relaciones M_1 se determina sustrayendo el rango a la dimensión de la matriz Hessiana, como se presenta en la expresión 2.12:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \dim(W_{IJ}) - \text{Rank}(W_{IJ}) = 4(N + M) - 3(N + M), \\ M_1 &:= N + M. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Teniendo esto presente, la condición 2.11 se puede sintetizar escribiéndola de la forma $W_{IJ} = 0 \ \forall J$ y para los $I = 4z - 3$ con $z = 1, \dots, M_1$, con M_1 como se lee en la expresión 2.12.

En este punto, es posible notar que se tienen diferentes tipos de ecuaciones, las cuales se pueden clasificar a partir de las ecuaciones de movimiento 2.7. Para llevar a cabo esta división, primero se deben obtener los M_1 autovectores linealmente independientes asociados a la matriz Hessiana; encontrando estos autovectores, es posible realizar la distinción entre las ecuaciones que no dependen de las aceleraciones y las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

Partiendo de las ecuaciones

$$\alpha_I + W_{IJ}\ddot{Q}^J = 0, \quad (2.13)$$

para quitar el término que contiene las aceleraciones se multiplica por los vectores γ , de modo que se obtenga como resultado las expresiones

$$\gamma_a^I \alpha_I = 0. \quad (2.14)$$

Para cumplir la ecuación 2.14, se definen los vectores γ de tal forma que satisfagan

$$\gamma_a^I W_{IJ} = 0, \quad \gamma_a^I \gamma_I^b = \delta_a^b, \quad (2.15)$$

donde los índices corren de la forma

$$a = 1, \dots, M_1 \quad \text{con} \quad M_1 = N + M, \quad (2.16)$$

$$I, J = 1, \dots, M_o \quad \text{con} \quad M_o = 4(N + M). \quad (2.17)$$

Adicionalmente, se debe construir una matriz auxiliar M^{IJ} , que siempre existe y es únicamente determinada por las relaciones:

$$W_{IJ}M^{JK} - \delta_I^K + \gamma_I^a \gamma_a^K = 0, \quad (2.18)$$

$$M^{IJ}\gamma_J^a = 0. \quad (2.19)$$

Dicha matriz auxiliar corresponde a una buena definición debido a que rescata las expresiones 2.15 que es la forma en que se definen los vectores γ , y que dan lugar a las ligaduras. Para notar esto debemos multiplicar por la izquierda y por derecha por un vector γ la expresión 2.18, obteniendo los resultados presentados en 2.20 y 2.21. En estas expresiones se puede apreciar la implementación de las definiciones dadas en 2.15.

$$\begin{aligned} \gamma_a^I W_{IJ} M^{JK} &= \gamma_a^I \delta_I^K - \gamma_a^I \gamma_I^b \gamma_b^K \\ 0 M^{JK} &= \gamma_a^K - \delta_a^b \gamma_b^K \\ 0 &= \gamma_a^K - \gamma_a^K \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} W_{IJ} M^{JK} \gamma_K^a &= \delta_I^K \gamma_K^a - \gamma_I^b \gamma_b^K \gamma_K^a \\ W_{IJ} M^{JK} \gamma_K^a &= \gamma_I^a - \gamma_I^b \delta_b^a \\ W_{IJ} M^{JK} \gamma_K^a &= \gamma_I^a - \gamma_I^a \\ W_{IJ} M^{JK} \gamma_K^a &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

De esta última línea se concluye que

$$M^{JK} \gamma_K^a = 0, \quad (2.22)$$

resultado que es consecuencia de la definición atribuida a la matriz auxiliar, como se presentó en la ecuación 2.19.

Ahora, se procede a identificar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange asociadas al nivel primario, lo cual se hace multiplicando por derecha las ecuaciones 2.7 por $M^{IJ}W_{JK}$, implementando a su vez la matriz auxiliar previamente definida. Con esto, las ecuaciones de movimiento se escriben de la forma presentada en 2.23, procedimiento que se puede ver en el apéndice B.1.

$$(\ddot{Q}^J + \alpha_I M^{IJ})W_{JK} = 0. \quad (2.23)$$

Por el comportamiento que exhibe la matriz auxiliar M podemos apreciar que funciona como una matriz inversa especial[†] del Hessiano y que es, a su vez, la matriz fundamental en el desarrollo del trabajo, debido a que contribuye en la separación e identificación de los distintos tipos de ecuaciones que se tienen, lo cual da lugar a la clasificación de ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, identidades y ligaduras, ya que disocia aquellos grados de libertad que se resuelven dinámicamente de aquellos que están restringidos.

A pesar de que inicialmente se tienen tanto ecuaciones de movimiento como ecuaciones independientes de las aceleraciones todas en un solo grupo de M_o ecuaciones, con la implementación de la matriz auxiliar M es posible llevar a cabo una separación entre estas. Razón por la cual existirá un grupo no nulo de $M_o - M_1$ ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

[†]Se acuña el término “inversa especial” debido a que se trabaja con una matriz Hessiana singular, es decir, es una matriz no invertible.

de la forma 2.23, mientras que las restantes M_1 ecuaciones corresponden a relaciones entre las Q y sus velocidades, cuya forma es

$$\varphi_a := \gamma_a^I \alpha_I = 0 \quad \forall a. \quad (2.24)$$

A su vez, las ecuaciones 2.24 que son independientes de las aceleraciones se dividen en dos grupos según el tipo de campo. Uno de los grupos está asociado a los campos de Maxwell, dando lugar a una cantidad N de relaciones φ idénticamente cero:

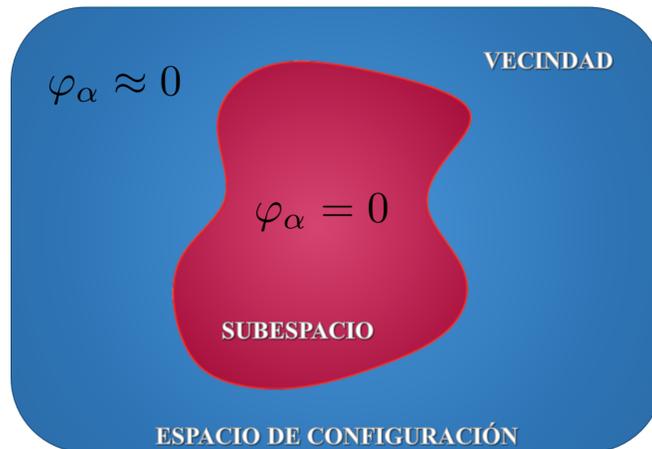
$$\varphi_{\bar{\alpha}} \equiv 0 \quad \forall \bar{\alpha} = 1, \dots, N. \quad (2.25)$$

Es apreciable el surgimiento de esta igualdad a cero debido a que al trabajar con los campos de Maxwell se tiene $\alpha_I = 0$ como se puede revisar en el apéndice C.1, surgiendo así las $g = N$ identidades de *gauge*. A su vez, debido a que los campos de Maxwell cumplen la relación de Bianchi, también se tienen $L_1 = N$ identidades de Bianchi de la forma presentada en el apéndice C.2.

El otro subgrupo de ecuaciones, que surgen de 2.24, está asociado a los campos de Proca y son las que dan lugar a las ligaduras primarias Lagrangianas. En este punto se emplea la notación \approx para representar las igualdades débiles, las cuales se usan para denotar las ligaduras que solo se cumplen en una región del espacio de configuraciones, mientras que las igualdades fuertes, que se representan con el símbolo $=$, se cumplen en todo el espacio. Tal como se aprecia en la figura 2.1, dependiendo de la región del espacio de configuraciones donde se estén evaluando las ligaduras primarias, estas vendrán descritas por igualdades débiles o fuertes. Asumir las ligaduras idénticamente nulas desde el comienzo conllevaría a una pérdida de información debido a que la dinámica del sistema se ve influenciada por la vecindad del subespacio, Espinoza (2011).

Figura 2.1

Ligaduras primarias Lagrangianas



Nota. Comportamiento que exhiben las ligaduras primarias Lagrangianas según la región del espacio de configuraciones donde se analicen.

Debido a esto, la adecuada representación de las ecuaciones 2.24 asociadas a los campos de Proca viene dada por

$$\varphi_\alpha \approx 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, M. \quad (2.26)$$

Para evitar que una solución que está en el subespacio cambie y ya no permanezca allí, se debe garantizar que su evolución en el tiempo sea débilmente cero; ya que las ligaduras solo funcionan si se tiene validez de ellas en todo el tiempo. Para asegurar que las ligaduras 2.26 se mantengan en el tiempo, se tiene la condición de consistencia $\dot{\varphi}_\alpha \approx 0$. Al aplicar esta condición sobre las ligaduras asociadas a los campos de Proca se obtiene como resultado

$$\dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial(\gamma_\alpha^I \alpha_I)}{\partial Q^J} \frac{dQ^J}{dt} + \frac{\partial(\gamma_\alpha^I \alpha_I)}{\partial \dot{Q}^J} \frac{d\dot{Q}^J}{dt} + \frac{\partial(\gamma_\alpha^I \alpha_I)}{\partial t}, \quad (2.27)$$

$$\dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial(\gamma_\alpha^I \alpha_I)}{\partial Q^J} \dot{Q}^J + \frac{\partial(\gamma_\alpha^I \alpha_I)}{\partial \dot{Q}^J} \ddot{Q}^J + \frac{\partial(\gamma_\alpha^I \alpha_I)}{\partial t}. \quad (2.28)$$

De las ecuaciones 2.23 se tiene que $\ddot{Q}^J = -\alpha_I M^{IJ}$ y sabiendo que la expresión para las ligaduras Lagrangianas primarias es $\varphi_\alpha = \gamma_\alpha^I \alpha_I$, se llega a

$$\dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial Q^J} \dot{Q}^J + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \dot{Q}^J} (-\alpha_I M^{IJ}) + \gamma_\alpha^I \frac{\partial \alpha_I}{\partial t}. \quad (2.29)$$

En esta parte, se aprecia con claridad que los vectores γ son constantes, en el caso contrario no se hubiesen podido extraer de la derivada temporal en el último término. Ahora, nos enfocamos en trabajar la derivada del último término de la expresión 2.29, para lo cual recordamos que α_I corresponde a 2.8; de esta forma la derivada de α_I con respecto al tiempo queda de la forma

$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{Q}^J \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} \right). \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial t} = \frac{\partial \dot{Q}^J}{\partial t} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} + \dot{Q}^J \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} \right). \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial t} = \ddot{Q}^J \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} + \dot{Q}^J \left[\frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^K + \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^K \partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^K \right] - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial Q^I} \dot{Q}^J + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial Q^I} \ddot{Q}^J \right]. \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial t} = \ddot{Q}^J \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial Q^I} \ddot{Q}^J + \dot{Q}^J \left[\frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^K + \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^K \partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^K - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial Q^I} \right]. \quad (2.33)$$

En esta última expresión se tienen en consideración dos cosas: en primer lugar, debido a que se está trabajando en espacio-tiempo plano, las derivadas pueden conmutar sin problema alguno, razón por la cual se tiene que $\partial \dot{Q}^J \partial Q^I = \partial Q^I \partial \dot{Q}^J$. En segundo lugar, vemos que los términos resaltados en violeta al interior de las llaves se pueden reescribir de tal suerte que se obtienen las ecuaciones de movimiento 2.6:

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^K + \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^K \partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^K - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} = \frac{\partial}{\partial Q^J} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^K + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^K \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^K - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I} \right]}_{=0}, \quad (2.34)$$

obteniéndose que la variación temporal de α_I está dada por

$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial t} = \ddot{Q}^J \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \right]. \quad (2.35)$$

Sustituyendo 2.35 en 2.29 se tiene que la condición de consistencia sobre las ligaduras Lagrangianas primarias da como resultado

$$\dot{\varphi}_\alpha = \underbrace{\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial Q^J} \dot{Q}^J - \alpha_I M^{IJ} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \dot{Q}^J}}_{\tilde{\alpha}_\alpha} + \gamma_\alpha^I \ddot{Q}^J \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \right]}_{\tilde{W}_{IJ}}, \quad (2.36)$$

donde \tilde{W}_{IJ} corresponde al Hessiano secundario asociado a las ecuaciones de movimiento de segundo nivel. Se aprecia que al exigir que las ligaduras Lagrangianas primarias se mantengan todo el tiempo, para todos los α , se da lugar al estudio del nivel secundario, surgiendo con la condición de consistencia M ecuaciones de movimiento secundarias:

$$\tilde{\alpha}_\alpha + \gamma_\alpha^I \ddot{Q}^J \tilde{W}_{IJ} \approx 0. \quad (2.37)$$

Como se muestra en el apéndice D, el Hessiano secundario también se puede escribir como

$$\tilde{W}_{\alpha\beta} := \gamma_\alpha^I \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{Q}^I}. \quad (2.38)$$

En consecuencia, es posible escribir las ecuaciones de movimiento a segundo nivel de la forma

$$\tilde{\alpha}_\beta + \ddot{Q}^I \gamma_I^\alpha \tilde{W}_{\alpha\beta} \approx 0. \quad (2.39)$$

De forma similar al nivel primario, no todas las ecuaciones de movimiento obtenidas son ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes; es decir, las ecuaciones 2.39 nuevamente se dividirán en distintos tipos de ecuaciones. Para lograr la clasificación de forma adecuada, se inicia analizando el Hessiano secundario. Ya que se debe garantizar la no propagación de grados de libertad fantasma en este nivel, la matriz Hessiana secundaria también se debe degenerar. En este caso, se tiene que es una matriz antisimétrica como se presenta en 2.40.

$$\tilde{W}_{IJ} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I \partial Q^J} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu^{(A)} \partial X_\nu^{(B)}} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\nu^{(B)} \partial X_\mu^{(A)}}. \quad (2.40)$$

La condición de degeneración se aplica sobre la derivada que contiene a la derivada de mayor orden; teniendo que el Hessiano secundario se interpreta como la resta de dos matrices, las dos deben cumplir con la degeneración. En consecuencia, la condición recae sobre $\mu = \nu = 0$, siendo la condición del Hessiano secundario de la forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_0^{(A)} \partial X_0^{(B)}} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_0^{(B)} \partial X_0^{(A)}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.41)$$

Con esto se tiene que la dimensión de la matriz Hessiana secundaria es igual a $4M$ y, una vez degenerada, su rango es $3M$; en consecuencia, se tendrá que la cantidad M_2 de relaciones que no involucren las aceleraciones será

$$M_2 := \dim(\widetilde{W}_{\alpha\beta}) - \text{Rank}(\widetilde{W}_{\alpha\beta}) = 4M - 3M, \quad (2.42)$$

$$M_2 := M. \quad (2.43)$$

Por el hecho de que en este nivel solo se está trabajando con ecuaciones asociadas a campos de Proca, no se tiene presencia de campos de Maxwell y, por lo tanto, no surgen identidades a nivel secundario, es decir, $L_2 = 0$. En vista de que las M_2 relaciones independientes de las aceleraciones contienen tanto las ligaduras como las identidades se encuentra que para segundo nivel habrán $K_2 = M$ ligaduras, a partir de $K_2 = M_2 - L_2 = M - 0$. Ahora, teniendo que a segundo nivel se obtuvo M ecuaciones 2.39 provenientes de las ligaduras Lagrangianas primarias, es posible determinar la cantidad de ecuaciones de Euler-Lagrange restando la cantidad de ecuaciones independientes de las aceleraciones a las M ecuaciones de movimiento obtenidas a segundo nivel. De esta forma, se deduce que no habrán ecuaciones de Euler-Lagrange a segundo nivel, o dicho de otra forma, todas las M ecuaciones 2.39 conducen a ligaduras Lagrangianas secundarias.

Ya que el algoritmo de ligaduras de Dirac es un método iterativo, el análisis a segundo nivel se desarrolla de manera análoga a como se hizo en el nivel primario; por lo tanto, también se definen unos vectores $\tilde{\gamma}$ y una matriz auxiliar \widetilde{M} para este nivel, como se puede apreciar a continuación, los cuales se distinguen de los definidos en el nivel anterior por la tilde en su notación.

$$\tilde{\gamma}_r^\alpha \widetilde{W}_{\alpha\beta} = 0, \quad \tilde{\gamma}_r^\alpha \tilde{\gamma}_\alpha^s = \delta_r^s, \quad (2.44)$$

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta} \widetilde{M}^{\beta\gamma} - \delta_\alpha^\gamma + \tilde{\gamma}_\alpha^r \tilde{\gamma}_r^\gamma = 0, \quad (2.45)$$

donde los índices corren de la forma

$$r = 1, \dots, M_2 \quad \text{con} \quad M_2 = M, \quad (2.46)$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, M. \quad (2.47)$$

Para apreciar cómo se modifican las ecuaciones de movimiento a segundo nivel presentadas en 2.39 con la implementación de la matriz auxiliar \widetilde{M} , se lleva a cabo el procedimiento análogo al desarrollado para el nivel anterior, como se puede ver en el apéndice B.2; teniendo que las ecuaciones a segundo nivel quedan reescritas de la forma

$$(\tilde{\alpha}_\alpha \widetilde{M}^{\alpha\beta} + \ddot{Q}^I \gamma_I^\beta) \widetilde{W}_{\beta\gamma} = 0. \quad (2.48)$$

De aquí se obtiene, por lo tanto, que $\ddot{Q}^I = -\tilde{\alpha}_\alpha \tilde{M}^{\alpha\beta} \gamma_\beta^I$.

Para identificar qué tipo de ligadura se tiene, se parte de la ecuación 2.39, de la cual es posible conocer que las M_2 relaciones secundarias independientes de las aceleraciones están dadas por

$$\phi_r := \tilde{\gamma}_r^\alpha \tilde{\alpha}_\alpha \approx 0, \quad (2.49)$$

siendo las ecuaciones 2.49 las ligaduras Lagrangianas secundarias. Es notable el hecho que ninguna de las ecuaciones 2.49 es idénticamente nula, lo cual implica y confirma que no se tiene la presencia de identidades a nivel secundario, así $L_2 = 0$; en consecuencia, se hace necesario exigir que estas ligaduras sean cero,

$$\phi_r \stackrel{1}{\approx} 0. \quad (2.50)$$

Se introduce el símbolo $\stackrel{1}{\approx}$ para indicar que las ligaduras secundarias generan un subespacio en el subespacio de las ligaduras primarias, es decir, la ligaduras secundarias ϕ se anulan en un subespacio $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_0$; de esta forma la igualdad débil se mantendrá para el subespacio \mathcal{C}_1 , no necesariamente en el subespacio \mathcal{C}_0 ni en todo el espacio \mathcal{C} .

Debido a que las ligaduras Lagrangianas secundarias deben permanecer en el subespacio definido, se debe garantizar que su evolución temporal sea débilmente cero, por lo tanto

$$\dot{\phi}_r \approx 0. \quad (2.51)$$

Exigiendo el cumplimiento de 2.51 se conduce al nivel terciario, donde se obtiene una cantidad de M ecuaciones de movimiento de la forma

$$\ddot{Q}^I \gamma_I^\alpha \tilde{\gamma}_I^r \widehat{W}_{rs} + \widehat{\alpha}_s = 0, \quad (2.52)$$

donde se identifica el nivel terciario con el gorro en la notación de los términos empleados para describir las ecuaciones a este nivel. Siendo \widehat{W}_{rs} y $\widehat{\alpha}_s$ definidos como 2.53 y 2.54, respectivamente

$$\widehat{W}_{rs} := \tilde{\gamma}_r^\alpha \gamma_\alpha^I \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{Q}^I}, \quad (2.53)$$

$$\widehat{\alpha}_s := -\tilde{\alpha}_\alpha \tilde{M}^{\alpha\beta} \gamma_\beta^I \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{Q}^I} - \alpha_I M^{IJ} \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{Q}^J} + \dot{Q}^I \frac{\partial \phi_s}{\partial Q^I}. \quad (2.54)$$

En este punto se encuentra que no se poseen ni ligaduras ni identidades, es decir, $K_3 = L_3 = 0$; esto indica que tampoco se tienen relaciones independientes de las aceleraciones, siendo $M_3 = 0$, dando como resultado que todas las ecuaciones 2.52 corresponden a ecuaciones de movimiento, señalando así la terminación del proceso iterativo para la teoría completa de Maxwell-Proca.

Los resultados obtenidos con el estudio realizado para el formalismo Lagrangiano se sintetizan en la tabla 2.1, donde M_o es el número de campos con el cual se inicia (equivalente

al número de ecuaciones 2.7 obtenidas al comenzar), g corresponde a las identidades de *gauge*, L representa las identidades de Bianchi, K son las ligaduras y M son las relaciones independientes de las aceleraciones.

Tabla 2.1*Ecuaciones formalismo Lagrangiano*

Tipo de ecuación \ Nivel	Primario	Secundario	Terciario
Euler-Lagrange	$M_0 - M_1 = 3(N + M)$	$K_1 - M_2 = 0$	$K_2 - M_3 = M$
Identidades	$g = N$ $L_1 = N$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$
Ligaduras	$K_1 = M$	$K_2 = M$	$K_3 = 0$

Nota. Resumen por niveles del número de ecuaciones de movimiento, identidades y ligaduras encontradas para la teoría completa de Maxwell-Proca en el formalismo Lagrangiano.

El hecho de que la teoría completa de Maxwell-Proca finalice en este nivel el algoritmo no implica que ocurra lo mismo con todas las teorías de campos. Algunas solo necesitan de la primera condición sobre el Hessiano 2.11, como lo es el caso de teorías donde se tienen múltiples campos de Maxwell y solo se considera un único campo de Proca, ya que estas satisfarán la condición secundaria 2.41 trivialmente. Un ejemplo de estas es la teoría generalizada de Proca, motivo por el cual autores como [Tasinato \(2014\)](#), [Beltrán Jiménez y Heisenberg \(2016\)](#), [Allys, Peter, y Rodríguez \(2016\)](#), [Heisenberg \(2014\)](#), llegaron a un resultado correcto a pesar de no haber tenido en consideración las ligaduras a segundo nivel.

Sin embargo, cuando se tiene una teoría con múltiples campos de Maxwell y múltiples campos de Proca, la condición primaria sobre el Hessiano 2.11 se hace necesaria mas no suficiente, exigiendo la adición de una segunda condición sobre el Hessiano secundario, presentada en 2.41. Este caso se puede apreciar en la teoría generalizada de Proca SU(2) donde inicialmente los autores [Allys, Peter, y Rodríguez \(2016\)](#) no tuvieron en cuenta las ligaduras secundarias, aspecto que fue corregido por [Gallego Cadavid, Rodríguez, y Gómez \(2020\)](#).

A partir de los resultados obtenidos, se intuye una relación directa entre la cantidad de niveles necesarios en el algoritmo y la cantidad de condiciones que surgen sobre la teoría de campos trabajada para que el sistema descrito sea físico.

Adicionalmente, a partir de los resultados obtenidos en el desarrollo expuesto a lo largo del capítulo, es posible distinguir un patrón en la definición de α y W en los diferentes niveles; dicho patrón se encuentra a medida que se aumenta de nivel en el algoritmo, iniciando desde el segundo nivel que es donde estos términos son escritos en función de las ligaduras como se puede apreciar en la figura 2.2.

Como se puede ver en la figura 2.2, a partir del segundo nivel que es donde se empiezan a definir α y W en función de la ligadura asociada al nivel anterior, es posible identificar el surgimiento de un patrón en dichas definiciones. Así, se pueden distinguir ciertos términos;

enfocándonos en el Hessiano vemos que este siempre corresponderá a la derivada de las ligaduras del nivel anterior con respecto a \dot{Q} y, a su vez, esta derivada irá multiplicada con un vector γ por cada nivel menor; es decir, en tercer nivel vemos que la derivada va multiplicada por un vector γ del nivel primario y otro del secundario. Ahora, analizando el término α se puede apreciar que hay un término “fijo” (recuadro naranja en la figura 2.2) que corresponde al producto de \dot{Q} con la derivada de la ligadura del nivel anterior con respecto a Q ; a partir del segundo nivel surge otro término (recuadro violeta en la figura 2.2) que se mantiene en cada iteración que corresponde al producto entre la derivada de la ligadura del nivel anterior con respecto a \dot{Q} y la equivalencia de \ddot{Q} a segundo nivel en términos de la matriz auxiliar de primer nivel que se obtiene de la ecuación 2.23. Adicionalmente, al llegar a tercer nivel surge un nuevo término (recuadro rojo en la figura 2.2) que es similar al anteriormente mencionado, con la diferencia que en este lo que multiplica la derivada es la expresión de \ddot{Q} a tercer nivel en términos de la matriz auxiliar de segundo nivel obtenida de la ecuación 2.48.

Figura 2.2*Definiciones de α y W*

$$\begin{array}{l}
 \text{Segundo Nivel} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \tilde{\alpha}_\alpha = -\alpha_I M^{IJ} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \dot{Q}^J} + \dot{Q}^J \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial Q^J} \\
 \tilde{W}_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^I \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{Q}^I}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Tercer Nivel} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \hat{\alpha}_s = -\tilde{\alpha}_\alpha \tilde{M}^{\alpha\beta} \gamma_\beta^I \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{Q}^I} - \alpha_I M^{IJ} \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{Q}^J} + \dot{Q}^I \frac{\partial \phi_s}{\partial Q^I} \\
 \hat{W}_{rs} = \tilde{\gamma}_r^\alpha \gamma_\alpha^I \frac{\partial \phi_s}{\partial \dot{Q}^I}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Nota. Identificación del patrón en las definiciones de α y W en cada nivel del algoritmo

Del comportamiento obtenido en las definiciones de α y W en el algoritmo, se puede deducir que por cada nivel que se aumente en el algoritmo, se incluirá en el Hessiano un vector γ del nivel anterior; entre tanto, para α surgirá un nuevo término que corresponde a la representación de \ddot{Q} asociada al nivel que se está estudiando. Una forma de compactar este patrón que surge en el algoritmo es como se presenta en las siguientes expresiones:

$$W^n = \left(\prod_{i=2}^n \gamma^{i-1} \right) \frac{\partial \rho^{(n-1)}}{\partial \dot{Q}}, \quad (2.55)$$

$$\alpha^n = \dot{Q} \frac{\partial \rho^{(n-1)}}{\partial Q} - \frac{\partial \rho^{(n-1)}}{\partial Q} \left(\sum_{i=2}^n (\alpha M)^{(n-1)} \gamma^{(n-2)} \right). \quad (2.56)$$

En estas expresiones, por simplicidad en la notación, se omiten los índices espacio-temporales y aquellos asociados al convenio de suma de Einstein; allí n indica el nivel en el cuál se está

trabajando, empezando desde $n = 2$; los vectores γ^n indican de qué nivel es el vector γ que interviene en la operación, en el caso de la teoría completa de Maxwell-Proca se tendrá que $\gamma^1 = \gamma_\alpha^I$ que es el vector de primer nivel, mientras que $\gamma^2 = \tilde{\gamma}_r^\alpha$ el cual corresponde al vector del segundo nivel. Las ligaduras están representada por ρ , donde la ligadura primaria sería $\rho^1 = \varphi_\alpha$ y la ligadura secundaria sería $\rho^2 = \phi_s$. Finalmente, se tienen los términos que corresponden a la representación de las \ddot{Q} en términos de la matriz auxiliar asociada al nivel anterior; en el caso del vector γ , cuando este tome un índice igual a cero se asumirá como resultado uno, así se tendrá $\gamma^0 = 1$, mientras que los demás índices indicarán el nivel del vector γ .

2.2. Análisis en el formalismo Hamiltoniano

Una vez determinadas las ligaduras Lagrangianas se quiere encontrar su equivalente en el formalismo Hamiltoniano, ya que son las ligaduras Hamiltonianas aquellas que corresponden a las ligaduras mencionadas en la formulación canónica de Dirac. Para realizar el paso del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano se emplea la transformada de Legendre, [Zia, Redish, y McKay \(2009\)](#), por medio de la cual se establece que la densidad Hamiltoniana es de la forma

$$\mathcal{H} := \dot{Q}^I P_I - \mathcal{L}(Q^I, \dot{Q}^I), \quad (2.57)$$

donde, \mathcal{H} depende de tres variables como se presenta en la tabla 2.2 y P_I contiene tanto los momentos asociados a campos de Maxwell como aquellos a campos de Proca, $\mathcal{P}_\mu^{\bar{\alpha}}$ y Π_μ^α , respectivamente. Esto es:

$$P_I = (\mathcal{P}_\mu^{(1)}, \dots, \mathcal{P}_\mu^{(N)}, \Pi_\mu^{(1)}, \dots, \Pi_\mu^{(M)}). \quad (2.58)$$

Tabla 2.2
Variables formalismo Hamiltoniano

	Variable	Espacio
Q^I	<i>Coordenadas Generalizadas</i>	\mathcal{C}
\dot{Q}^I	<i>Velocidades</i>	\mathcal{TC}
P^I	<i>Momentos</i>	$\mathcal{T}^*\mathcal{C}$

Nota. Clasificación de las variables que actúan en la densidad Hamiltoniana, así como los respectivos espacios de cada una.

Se denota un espacio $3M_\sigma$ -dimensional \mathbf{R} , el cual comprende los espacios \mathcal{C} , \mathcal{TC} y $\mathcal{T}^*\mathcal{C}$ siendo estos los asociados a cada variable, según se presenta en la tabla 2.2.

La densidad Hamiltoniana presenta una independencia con respecto a las \dot{Q} , cuando es restringida a un subespacio $\mathbf{R}^0 \subseteq \mathbf{R}$ definido a partir de 2.59. Apoyados en el teorema de función implícita, [Jittorntrum \(1978\)](#), el cual a su vez se basa del teorema de función inversa, [Clarke \(1976\)](#), se establece que una o más variables se pueden escribir en función de las otras y, particularmente, se tiene que las \dot{Q} se expresan en función de Q y P de la forma

$$P_I - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I} \approx 0. \quad (2.59)$$

Para la teoría completa de Maxwell-Proca solo una cantidad de $M_1 = N + M$ relaciones de la forma 2.59 son independientes. Estas corresponden a las ligaduras primarias de Dirac, definidas como se presenta a continuación:

$$\Psi_a := \gamma_a^I \left(P_I - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I} \right). \quad (2.60)$$

A partir de la definición 2.60, se encuentra que la forma de establecer una conexión entre las ligaduras primarias de Dirac y las cantidades Lagrangianas φ definidas en 2.24, es por medio de la variación temporal de las ligaduras primarias de Dirac, las cuales dan como resultado

$$\frac{\partial \Psi_a}{\partial t} = \gamma_a^I \left[\dot{P}_I - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^J \right) \right], \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \Psi_a}{\partial t} = \gamma_a^I \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^J \right], \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \Psi_a}{\partial t} = \underbrace{\gamma_a^I \alpha_I}_{\varphi_a} - \gamma_a^I \overrightarrow{W_{IJ}}^0 \ddot{Q}^J, \quad (2.63)$$

$$\dot{\Psi}_a \approx \varphi_a. \quad (2.64)$$

La igualdad débil en 2.64 indica que esto solo se cumple en el subespacio \mathbf{R}^0 . Al exigir que las ligaduras primarias de Dirac no evolucionen temporalmente se obtiene la relación con las identidades de Bianchi, las identidades de *gauge* y las ligaduras Lagrangianas primarias. Asimismo, imponer que $\dot{\Psi}_a \stackrel{!}{\approx} 0$ define un subespacio $\mathbf{R}^1 \subseteq \mathbf{R}^0$ en el formalismo Hamiltoniano.

Las ligaduras secundarias de Dirac χ_a están definidas como las $M_1 = N + M$ relaciones independientes entre las Q y las P que se anulan en el subespacio \mathbf{R}^1 , siendo estas expresadas como

$$\chi_a := \dot{\Psi}_a. \quad (2.65)$$

De aquí se observa que un subgrupo de M ligaduras secundarias de Dirac están relacionadas con las cantidades Lagrangianas ϕ definidas en 2.49, correspondencia que se da a partir de su evolución temporal, como se ve a continuación:

$$\dot{\chi}_r \approx \phi_r. \quad (2.66)$$

Las N ligaduras secundarias de Dirac restantes se hacen débilmente iguales a cero. Cuando se exige que las variaciones temporales de las ligaduras secundarias de Dirac 2.66 sean estables, se obtienen las ligaduras secundarias Lagrangianas.

Ya teniendo las ligaduras primarias y secundarias de Dirac, 2.60 y 2.65, se pasa a realizar la clasificación de estas entre las de primera clase y las de segunda clase. Para ello se hace uso del corchete de Poisson, el cual se define como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial Q^I} \frac{\partial g}{\partial P_I} - \frac{\partial f}{\partial P_I} \frac{\partial g}{\partial Q^I}. \quad (2.67)$$

Según la formulación canónica de Dirac, se debe tener presente que las ligaduras de primera clase serán aquellas cuyo corchete de Poisson se hace débilmente igual a cero con todas las ligaduras de Dirac; mientras que las de segunda clase no poseen dicha característica.

Con la finalidad de clasificar las ligaduras primarias de Dirac, en las de primera y segunda clase, se construye la matriz de corchetes de Poisson con estas ligaduras, siendo esta una matriz $2M_1 \times M_1$ como se puede apreciar a continuación:

$$\Delta := \begin{pmatrix} \{\Psi_1, \Psi_1\} & \{\Psi_1, \Psi_2\} & \dots & \{\Psi_1, \Psi_{M_1}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\Psi_{M_1}, \Psi_1\} & \{\Psi_{M_1}, \Psi_2\} & \dots & \{\Psi_{M_1}, \Psi_{M_1}\} \\ \{\chi_1, \Psi_1\} & \{\chi_1, \Psi_2\} & \dots & \{\chi_1, \Psi_{M_1}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\chi_{M_1}, \Psi_1\} & \{\chi_{M_1}, \Psi_2\} & \dots & \{\chi_{M_1}, \chi_{M_1}\} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Es notorio que para la teoría completa de Maxwell-Proca, el rango de la matriz equivale al número de campos de Proca $R = M$ y que, en consecuencia, refleja la naturaleza singular de la teoría, en la aproximación de Dirac-Bergmann, ya que $R < M_1$. Se pasa a definir dos grupos de combinaciones lineales de las ligaduras primarias de Dirac, el primero contiene $R = M$ elementos y el segundo contiene $S = N$ elementos:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Psi}_\alpha := \tilde{v}_\alpha^a \Psi_a, & \hat{\Psi}_{\bar{\alpha}} := \hat{v}_{\bar{\alpha}}^a \Psi_a. & (2.69) \\ \text{Proca} & \text{Maxwell} & \end{array}$$

En estas combinaciones lineales los parámetros \tilde{v}_α^a y $\hat{v}_{\bar{\alpha}}^a \in \mathbb{R}$, los cuales se pueden y deben escoger de tal forma que las nuevas definiciones $\tilde{\Psi}_\alpha$ y $\hat{\Psi}_{\bar{\alpha}}$ sean linealmente independientes. Es así que se obtienen las ligaduras $\hat{\Psi}$ que satisfacen la condición 2.70, logrando identificarlas como las ligaduras primarias de primera clase; mientras que las $\tilde{\Psi}$ son las ligaduras primarias de segunda clase.

$$\{\Psi_a, \hat{\Psi}_{\bar{\alpha}}\} \approx 0 \approx \{\chi_r, \hat{\Psi}_{\bar{\alpha}}\}. \quad (2.70)$$

Para la clasificación del nivel secundario de ligaduras se lleva a cabo un procedimiento similar al expuesto para las ligaduras primarias, con la diferencia que al definir la combinación lineal no solo se hace con respecto a todas las ligaduras secundarias de Dirac sino que también se tienen en cuenta las ligaduras primarias de segunda clase. De esta manera, la combinación lineal queda definida como

$$\chi'_a := J_a^b \chi_b + K_a^\alpha \tilde{\Psi}_\alpha, \quad (2.71)$$

con J_a^b y $K_a^\alpha \in \mathbb{R}$. Los parámetros J_a^b deben ser escogidos de tal forma que J sea una matriz no singular, es decir, que su determinante sea distinto de cero $\det(J) \neq 0$. En este punto, es posible formar dos grupos de combinaciones lineales de la forma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\chi}_\alpha := \tilde{\omega}_\alpha^a \chi'_a, & \hat{\chi}_{\bar{\alpha}} := \hat{\omega}_{\bar{\alpha}}^a \chi'_a. & (2.72) \\ \text{Proca} & \text{Maxwell} & \end{array}$$

El número de combinaciones $\hat{\chi}$ se denota por $m_2 (\leq M_1)$. En 2.72 se tiene que $\tilde{\omega}_\alpha^a$ y $\hat{\omega}_{\bar{\alpha}}^a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y se deben escoger de tal forma que $\hat{\chi}$ sean de primera clase, de tal forma que satisfagan 2.73.

$$\{\Psi_a, \hat{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \approx 0 \approx \{\chi_a, \hat{\chi}_{\bar{\alpha}}\}. \quad (2.73)$$

Así se tendrá que las restantes $M_1 - m_2$ ligaduras secundarias de Dirac $\tilde{\chi}$ se clasifican como de segunda clase.

De esta forma se llega a que para la teoría completa de Maxwell-Proca $m_2 = N$. En la tabla 2.3 se presentan de forma concisa los resultados obtenidos para el análisis llevado a cabo en el formalismo Hamiltoniano.

Tabla 2.3
Ligaduras de Dirac

	Primera Clase	Segunda Clase
Primarias	N	M
Secundarias	N	M
Total	$N_1 = 2N$	$N_2 = 2M$

Nota. Número de ligaduras Hamiltonianas presentes en la teoría completa de Maxwell-Proca con su respectiva clasificación según el algoritmo de Dirac.

Una forma de corroborar que los resultados obtenidos son correctos, es a partir de la construcción de la matriz $\bar{\Delta}$ de corchetes de Poisson de todas las ligaduras identificadas como de segunda clase 2.74, la cual no corresponderá a una matriz singular, es decir, poseerá un determinante diferente de cero. Cabe mencionar que $\bar{\Delta}$ siempre será una matriz cuadrada antisimétrica, cuya dimensión es determinada con la expresión $R + M_1 - m_2$, teniendo que para la teoría completa de Maxwell-Proca esto será igual a $2M$.

$$\bar{\Delta} := \begin{pmatrix} \{\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_1\} & \dots & \{\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_M\} & \{\tilde{\Psi}_1, \tilde{\chi}_1\} & \dots & \{\tilde{\Psi}_1, \tilde{\chi}_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\tilde{\Psi}_M, \tilde{\Psi}_1\} & \dots & \{\tilde{\Psi}_M, \tilde{\Psi}_M\} & \{\tilde{\Psi}_M, \tilde{\chi}_1\} & \dots & \{\tilde{\Psi}_M, \tilde{\chi}_M\} \\ \{\tilde{\chi}_1, \tilde{\Psi}_1\} & \dots & \{\tilde{\chi}_1, \tilde{\Psi}_M\} & \{\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_1\} & \dots & \{\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_M\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\tilde{\chi}_M, \tilde{\Psi}_1\} & \dots & \{\tilde{\chi}_M, \tilde{\Psi}_M\} & \{\tilde{\chi}_M, \tilde{\chi}_1\} & \dots & \{\tilde{\chi}_M, \tilde{\chi}_M\} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Por lo tanto, con el desarrollo del algoritmo de Dirac para la teoría completa de Maxwell-Proca, presentado a lo largo de este capítulo, se obtuvo la cantidad de ecuaciones de ligadura presentes en la teoría, llevando a cabo su respectiva clasificación tanto en el formalismo Lagrangiano como en el formalismo Hamiltoniano, resultados consolidados en las tablas 2.1 y 2.3. De este modo, solo resta proceder a realizar el conteo de grados de libertad de la teoría teniendo en consideración las ligaduras encontradas.

Capítulo 3

Conteo del número de grados de libertad

‘Everything is theoretically impossible, until it is done.’
Robert A. Heinlein

En vista de la gran importancia que poseen los grados de libertad en la descripción apropiada de un sistema físicamente posible se tiene que para analizar sistemas Lagrangianos singulares desde el punto de vista Hamiltoniano, se cuenta con el eficaz método propuesto por Dirac, [Dirac \(1964\)](#), por medio del cual, una vez conocidas las ligaduras que atañen a la teoría singular, estas se pueden emplear para conocer el número de grados de libertad que la misma propaga.

Sin embargo, como exponen los autores del artículo [Díaz, Higuita, y Montesinos \(2014\)](#), existe una forma de realizar el conteo de grados de libertad para partículas sin necesidad de conocer la representación Hamiltoniana de la teoría y esto es analizando el sistema que se estudia únicamente desde el marco Lagrangiano. Hecho que tiene cabida gracias a la relación que establecen los autores, entre los parámetros del formalismo Lagrangiano y los del formalismo Hamiltoniano. Años después, el resultado presentado por los autores fue generalizado a teorías de campos en [Díaz y Montesinos \(2018\)](#).

Por consiguiente, se parte del hecho que el número total de ligaduras Hamiltonianas debe coincidir con el número de ligaduras Lagrangianas l más identidades de *gauge* g , i.e.

$$N_1 + N_2 = l + g. \quad (3.1)$$

Ahora, teniendo en consideración que los generadores de *gauge* de la teoría desde el punto de vista Hamiltoniano (esto corresponde a las ligaduras de primera clase) deben estar relacionados con los parámetros de *gauge* y sus derivadas temporales, siendo estos denotados por e , se obtiene la equivalencia

$$N_1 = e. \quad (3.2)$$

Con esta expresión para las ligaduras de primera clase, es posible encontrar la definición de las ligaduras de segunda clase en términos de parámetros exclusivamente Lagrangianos, como se presenta en la ecuación:

$$N_2 = l + g - e. \quad (3.3)$$

Conociendo desde el formalismo Hamiltoniano que la ecuación propuesta por Dirac para conocer la cantidad de grados de libertad propagados es descrita en función del número de ligaduras de primera y segunda clase, a partir de la expresión:

$$\eta_{dof} = M_o - N_1 - \frac{N_2}{2}, \quad (3.4)$$

se pasa a sustituir en la ecuación 3.4 la equivalencia de las ligaduras de primera y segunda clase en términos de parámetros Lagrangianos, obteniéndose así la expresión 3.5 por medio de la cual es posible conocer la cantidad de grados de libertad en la teoría desde el formalismo Lagrangiano:

$$\eta_{dof} = M_o - \frac{1}{2}(l + g + e). \quad (3.5)$$

De este procedimiento se resaltan unos resultados más explícitos, como lo es la equivalencia de los parámetros Lagrangianos en términos del número de ligaduras Hamiltonianas:

$$l = N_1 + N_2 - N_1^{(p)}, \quad (3.6)$$

$$g = N_1^{(p)}, \quad (3.7)$$

$$e = N_1. \quad (3.8)$$

En estas expresiones N_1 y N_2 siguen representando las ligaduras de primera y segunda clase, mientras que el término $N_1^{(p)}$ corresponde al número de ligaduras primarias de primera clase.

Finalmente, habiendo expuesto las distintas formas equivalentes que se tienen para llevar a cabo el conteo de grados de libertad de una teoría singular, se opta por sustituir los resultados obtenidos en el capítulo anterior en la ecuación propuesta por Dirac 3.4. Para la teoría completa de Maxwell-Proca, según los resultados obtenidos del formalismo Hamiltoniano y que se presentan en la tabla 2.3, se tiene que

$$\eta_{dof} = 4(N + M) - 2N - \frac{2M}{2}, \quad (3.9)$$

$$\eta_{dof} = 4N + 4M - 2N - M, \quad (3.10)$$

$$\eta_{dof} = 2N + 3M. \quad (3.11)$$

Recordando que N representa el número de campos de Maxwell y M corresponde a la cantidad de campos de Proca, encontramos satisfactoriamente que al imponer sobre la teoría las ligaduras obtenidas con el formalismo canónico de Dirac, aquellos grados de libertad no físicos que se presentaban debido a la interacción entre los campos se suprimen, dando como resultado la propagación de dos grados de libertad por parte de los campos de Maxwell y tres grados de libertad en el caso de campos de Proca. Se da así cumplimiento a lo dictado por el teorema espín-estadística.

Un aspecto final a mencionar es que todos los resultados obtenidos en el desarrollo del trabajo, los cuales fueron realizado para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, se pueden generalizar a d dimensiones. Esto es, modificando la dimensión el espacio de configuraciones \mathcal{C} y observando que ahora la cantidad inicial de variables de campo pasará a ser $M_o = d(N+M)$. Adicionalmente, la cantidad adecuada en el conteo de grados de libertad quedará estipulada por la expresión:

$$\eta_{dof} = (d - 2)N + (d - 1)M. \quad (3.12)$$

Una aplicación y análisis del conteo de grados de libertad de la forma expuesta anteriormente se presenta en el artículo [Díez, Maier, Méndez-Zavaleta, y Tehrani \(2020b\)](#), donde no solo llevan a cabo una explicación en detalle del método trabajado, sino también presentan ejemplos de la aplicación del método para la teoría del electromagnetismo de Maxwell, la acción de Proca y la formulación de Palatini de la gravedad. Los resultados de estos ejemplos, a su vez, pueden ser empleados potencialmente para construir la base de una posible teoría de gravedad, por medio de la cual se logre un acople consistente de la teoría de Maxwell-Proca con la gravedad. Sin embargo, vale aclarar que la teoría generalizada de Proca y su versión SU(2) son pasos importantes en esta dirección, ya que son teorías modificadas de gravedad en donde se garantiza la propagación del número de grados de libertad adecuado en sus versiones en espacio-tiempo plano.

Conclusiones

La principal conclusión sobre el estudio de la aplicación del formalismo canónico de Dirac en la teoría completa de Maxwell-Proca en espacio-tiempo plano es la eliminación del número de grados de libertad no físicos introducidos por las interacciones entre los campos presentes en la teoría. De esta manera, corresponde con la descripción de una teoría “saludable” y librándola de inestabilidades, garantizando la propagación de la cantidad de grados de libertad adecuados para la representación de un sistema físico según lo establecido por el teorema espín-estadística para campos de espín uno con y sin masa.

Fue posible establecer las expresiones que definen a las ligaduras en cada nivel del algoritmo de Dirac, tanto para el formalismo Lagrangiano como para el formalismo Hamiltoniano, encontrando a su vez la conexión que existe entre las ligaduras Hamiltonianas con las ligaduras Lagrangianas y las identidades de Bianchi y de *gauge*.

Se precisaron las condiciones de degeneración necesarias sobre los Hessianos de cada nivel de la teoría para evitar la inestabilidad de Ostrogradsky y la propagación de grados de libertad no físicos que puedan potencialmente inducir otro tipo de patologías. De igual forma, se mostró la vital importancia que tuvieron en el desarrollo del trabajo las matrices auxiliares asociadas a cada nivel y definidas en términos de los Hessianos, ya que las mencionadas matrices M actúan como una inversa especial y dan lugar a la separación de los grados de libertad que se resuelven dinámicamente de aquellos que se encuentran restringidos.

Se llevaron a cabo un par de correcciones con respecto al artículo guía que se tomó para el desarrollo del trabajo. Desconociendo la fuente de error de los autores, se encontró una inconsistencia entre la definición de la matriz $\bar{\Delta}$ dada en el texto y su representación matricial presentada en la ecuación (A46) del artículo original. Es importante recordar que esta se emplea para corroborar el resultado final de la clasificación de las ligaduras de Dirac. La definición brindada en la lectura es correcta, sin embargo, al construir la matriz se percibe un error, posiblemente de digitación, en uno de los tipos de ligaduras empleadas en los corchetes de Poisson. Se tiene que la matriz es construida con los corchetes de Poisson de las ligaduras de segunda clase, razón por la cual el determinante de la misma debe ser distinto de cero; pero en la matriz que se presenta en el artículo están interviniendo las ligaduras primarias de segunda clase y las secundarias de primera clase, donde deberían ser las ligaduras primarias de segunda clase y las secundarias de segunda clase; tal como se expuso en la presente tesis.

Adicionalmente, otro error que se encontró en el documento original tiene una repercusión

más significativa en el trabajo. Aproximándose al final del apéndice A2 del artículo guía, cuando se define la cantidad m_2 , la cual denota el número de ligaduras de Dirac secundarias de primera clase, se menciona que esta es menor o igual al valor M_2 , el cual corresponde a la cantidad de relaciones de segundo nivel que no involucran las aceleraciones y que es igual al número de campos de Proca M presentes en la teoría. Sin embargo, tal como se mostró en la presente tesis, el número de ligaduras de Dirac secundarias de primera clase m_2 concuerda con el número de campos de Maxwell N que se involucran en la teoría. Así que tener $m_2 \leq M_2$ estaría imponiendo una condición sobre la cantidad de campos de Maxwell permitidos en la teoría, haciendo alusión a que esta debe ser menor al número de campos de Proca. Esto corresponde a un error ya que desde la construcción de la teoría y durante la aplicación del algoritmo se destaca que los resultados son válidos para cualquier cantidad de campos, tanto de Proca como de Maxwell. Este error también afecta la determinación de la dimensión de la matriz $\overline{\Delta}$, la cual es determinada como $R + M_2 - m_2$. Para evitar dichas incongruencias, la corrección a realizar es sustituir la cantidad M_2 en la sección mencionada, por la cantidad $M_1 = N + M$; haciendo esto, la dimensión de la matriz da como resultado el valor adecuado de $2M$ y no se impone restricción alguna sobre la cantidad de campos permitidos de cualquiera de las dos clases en la teoría completa de Maxwell-Proca.

Por otra parte, se destaca la importancia del método abordado en el desarrollo del trabajo, ya que la implementación del algoritmo de Dirac permite dar una descripción Hamiltoniana de cualquier sistema y, a su vez, permite llevar la teoría a términos de corchetes de Poisson, dando lugar de forma práctica a la subsecuente cuantización canónica, por medio de la cual se transforma la descripción diferencial de un sistema Hamiltoniano en una descripción con operadores, siendo este precisamente uno de los proyectos a futuro para llevar a cabo en el marco de la teoría completa de Maxwell-Proca.

Referencias

- Abbott *et. al.*, B. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116, 061102.
- Ajith, S., Saffer, A., y Yagi, K. (2020). Rotating black holes in valid vector-tensor theories after GW170817. *Physical Review D*, 102(6), 064031.
- Allys, E., Peter, P., y Rodríguez, Y. (2016). Generalized Proca action for an abelian vector field. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1602, 004.
- Allys, E., Peter, P., y Rodríguez, Y. (2016). Generalized SU(2) Proca theory. *Physical Review D*, 94(8), 084041.
- Azhar, F., y Namjoo, M. H. (2021). Spacetime singularities and a novel formulation of indeterminism. *arXiv preprint arXiv:2101.10887*.
- Beltrán Jiménez, J., y Heisenberg, L. (2016). Derivative self-interactions for a massive vector field. *Physics Letters B*, 757, 405-411.
- Beltrán Jiménez, J., y Heisenberg, L. (2017). Generalized multi-Proca fields. *Physics Letters B*, 770, 16–26.
- Berenstein, D., Martínez, R., y Rodríguez, J. A. (1992). Simetrías del espacio-tiempo. *MOMENTO*(7), 69–76.
- Blagojevic, M. (2002). *Gravitation and gauge symmetries*. IOP Publishing.
- Burgess, C. P. (2004). Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. *Living Reviews in Relativity*, 7(1), 1–56.
- Cabaret, D., Grandou, T., Grange, G., y Perrier, E. (2021). Elementary particles: What are they? Substances, elements and primary matter. *arXiv preprint arXiv:2103.05522*.
- Carroll, S. (2001). The cosmological constant. *Living Reviews in Relativity*, 4, 1.
- Clarke, F. (1976). On the inverse function theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 64(1), 97–102.
- De Felice, A., Geng, C.-Q., Pookkillath, M. C., y Yin, L. (2020). Reducing the H_0 tension with generalized Proca theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008,

038.

- Deffayet, C., Deser, S., y Esposito-Farese, G. (2010). Arbitrary p-form Galileons. *Physical Review D*, *82*(6), 061501.
- Díaz, B., Higuera, D., y Montesinos, M. (2014). Lagrangian approach to the physical degree of freedom count. *Journal of Mathematical Physics*, *55*(12), 122901.
- Díaz, B., y Montesinos, M. (2018). Geometric lagrangian approach to the physical degree of freedom count in field theory. *Journal of Mathematical Physics*, *59*(5), 052901.
- Díez, V. E., Gording, B., Méndez-Zavaleta, J. A., y Schmidt-May, A. (2020a). Maxwell-Proca theory: Definition and construction. *Physical Review D*, *101*(4), 045009.
- Díez, V. E., Maier, M., Méndez-Zavaleta, J. A., y Tehrani, M. T. (2020b). Lagrangian constraint analysis of first-order classical field theories with an application to gravity. *Physical Review D*, *102*(6), 065015.
- Dirac, P. A. M. (1964). Lectures on quantum mechanics. *Belfer Graduate School of Science*.
- Duck, I., Pauli, W., y Sudarshan, E. (1997). *Pauli and the spin-statistics theorem*. World Scientific.
- Einstein, A. (1915). Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse*, *25*, 844–847.
- Einstein, A. (1916). Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, *354*(7), 769–822.
- Ellis, G. F., Maartens, R., y MacCallum, M. A. (2012). *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press.
- Espinoza, V. M. T. (2011). *Cálculo variacional y sistemas con vínculos*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.
- Gallego Cadavid, A., Rodríguez, Y., y Gómez, L. G. (2020). Generalized SU(2) Proca theory reconstructed and beyond. *Physical Review D*, *102*(10), 104066.
- Geng *et. al.*, C.-Q. (2021). A dark energy model from generalized Proca theory. *Physics of the Dark Universe*, *32*, 100819.
- Goldstein, H., Poole, C. P., y Safko, J. (2001). *Classical mechanics* (Vol. 3). Addison-Wesley Reading, MA.
- Gómez, L. G., y Rodríguez, Y. (2021). Coupled multi-Proca vector dark energy. *Physics of the Dark Universe*, *31*, 100759.
- Gourgoulhon, É. (2016). *Special relativity in general frames*. Springer.
- Gross, F. (1999). *Relativistic quantum mechanics and field theory*. John Wiley & Sons.

- Heisenberg, L. (2014). Generalization of the Proca action. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1405, 015.
- Horndeski, G. W. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10, 363-384.
- Horndeski, G. W. (1976). Conservation of charge and the Einstein-Maxwell field equations. *Journal of Mathematical Physics*, 17, 1980-1987.
- Jittorntrum, K. (1978). An implicit function theorem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 25(4), 575-577.
- Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics: Volume 1* (Vol. 1). Butterworth-Heinemann.
- Langlois, D. (2017). Degenerate higher-order scalar-tensor (DHOST) theories. *52nd Rencontres de Moriond on Gravitation*, 221-228.
- Langlois, D., y Noui, K. (2016). Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1602, 034.
- Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 155, 459-512.
- Montesinos, M., y Flores, E. (2006). Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories obtained using only Noether's theorem. *Revista mexicana de física*, 52(1), 29-36.
- Newton, I. (1687). *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater.
- Nicolis, A., Rattazzi, R., y Trincherini, E. (2009). The Galileon as a local modification of gravity. *Physical Review D*, 79, 064036.
- Ostrogradsky, M. (1850). Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mémoires de l'Académie de Saint Pétersbourg*, 6, 385-517.
- Perlov, D., y Vilenkin, A. (2017). *Cosmology for the curious*. Springer.
- Platón. (370 a.C.) *Politeia*.
- Proca, A. (1936). Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, 7, 347-353.
- Proca, A. (1938). Théorie non relativiste des particules à spin entier. *Journal de Physique et le Radium*, 9, 61-66.
- Proca, A., y Goudsmit, S. (1939). Sur la masse des particules élémentaires. *Journal de*

- Physique et le Radium*, 10, 209–214.
- Rodriguez, Y., y Navarro, A. A. (2017). Scalar and vector galileons. *Journal of Physics: Conference Series*, 831(1), 012004.
- Rodríguez, Y., y Navarro, A. A. (2018). Non-abelian s-term dark energy and inflation. *Physics of the dark universe*, 19, 129–136.
- Ryder, L. H. (1996). *Quantum field theory*. Cambridge University Press.
- Sbisa, F. (2014). Classical and quantum ghosts. *European Journal of Physics*, 36(1), 015009.
- Streater, R. F., y Wightman, A. S. (2000). *PCT, spin and statistics, and all that* (Vol. 52). Princeton University Press.
- Tasinato, G. (2014). Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking. *Journal of High Energy Physics*, 1404, 067.
- Thorne, K. S., Misner, C. W., y Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Macmillan.
- Walker, H. M. (1940). Degrees of freedom. *Journal of Educational Psychology*, 31(4), 253.
- Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields* (Vol. 1). Cambridge University Press.
- Wigner, E. (1939). On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of mathematics*, 149–204.
- Wipf, A. (1994). Hamilton’s formalism for systems with constraints. *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, Springer, 22–58.
- Wolf, W. J., y Lagos, M. (2019). Cosmological instabilities and the role of matter interactions in dynamical dark energy models. *Physical Review D*, 100(8), 084035.
- Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8), 32243.
- Zia, R. K., Redish, E. F., y McKay, S. R. (2009). Making sense of the Legendre transform. *American Journal of Physics*, 77(7), 614–622.

Apéndice A

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Para determinar la estructura que poseen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se toma la acción con forma esquemática

$$S = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} d^{3+1}x \mathcal{L}. \quad (\text{A.1})$$

Se lleva a cabo la variación de la acción, a partir de lo cual se obtiene:

$$\delta S = \int_a^b [\mathcal{L}(Q + h, \dot{Q} + \dot{h}) - \mathcal{L}(Q, \dot{Q})] dt, \quad (\text{A.2})$$

$$\delta S = \int_a^b \left[h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} + \dot{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right] dt. \quad (\text{A.3})$$

Se pasa a integrar por partes el segundo término de la suma al interior de la integral en [A.3](#), obteniéndose

$$\int_a^b \dot{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} dt = h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \Big|_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) dt. \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando [A.4](#) en la ecuación [A.3](#) se llega a

$$\delta S = \int_a^b h \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right] dt + h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \Big|_a^b, \quad (\text{A.5})$$

teniendo en cuenta que por condiciones de frontera $h(b) = h(a) = 0$. Luego, se tiene en consideración, según el principio de mínima acción, que para que dicha acción corresponda a la descripción de una dinámica debe ser una acción estacionaria; de esta forma se llega a:

$$\delta S = \int_a^b h \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right] dt = 0. \quad (\text{A.6})$$

Por el lema fundamental del cálculo de variaciones se tiene que

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto, aplicando el lema a la expresión A.6 se llega a

$$\delta S = \int_a^b h \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right]}_{\text{Debe ser cero}} dt = 0. \quad (\text{A.8})$$

De esta manera, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = 0, \quad (\text{A.9})$$

procedimiento que se generaliza para todas las variables, teniendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Aplicando regla de la cadena al segundo término de la ecuación A.10 se obtiene una expresión equivalente de la forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \frac{\partial Q^J}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \frac{\partial \dot{Q}^J}{\partial t}, \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^J. \quad (\text{A.12})$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange quedan descritas como,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^J = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\underbrace{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} \dot{Q}^J}_{\alpha_I} + \underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \ddot{Q}^J}_{W_{IJ}} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$W_{IJ} \ddot{Q}^J + \alpha_I = 0. \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Ecuaciones de Euler-Lagrange con la matriz auxiliar

B.1. Nivel primario

A partir de la expresión que encontramos previamente para las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.7, se procede a multiplicar por la derecha por el término $M^{IJ}W_{JK}$, el cual contiene la matriz auxiliar que se introdujo anteriormente y que se encuentra en el cuerpo del documento.

$$\ddot{Q}^L W_{LI} M^{IJ} W_{JK} + \alpha_I M^{IJ} W_{JK} = 0. \quad (\text{B.1})$$

El producto resaltado es la definición de la matriz auxiliar presentada en la ecuación 2.18. A partir de esto, la ecuación B.1 se reescribe como

$$\ddot{Q}^L (\delta_L^J - \gamma_L^a \gamma_a^J) W_{JK} + \alpha_I M^{IJ} W_{JK} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$(\ddot{Q}^J - \ddot{Q}^L \gamma_L^a \gamma_a^J) W_{JK} + \alpha_I M^{IJ} W_{JK} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Recordando la definición de los vectores γ se tiene que $\gamma_a^J W_{JK} = 0$, obteniéndose

$$(\ddot{Q}^J + \alpha_I M^{IJ}) W_{JK} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Se encuentra así una forma de reescribir las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange en términos de la matriz auxiliar M . Este resultado se puede interpretar como un canjeo de manera conveniente de la matriz Hessiana con la matriz auxiliar.

B.2. Nivel secundario

En este caso, se toma la ecuación 2.39 y se multiplica por la derecha por el término $\widetilde{M}^{\alpha\beta} \widetilde{W}_{\beta\gamma}$ para obtener

$$\tilde{\alpha}_\alpha \widetilde{M}^{\alpha\beta} \widetilde{W}_{\beta\gamma} + \ddot{Q}^I \gamma_I^\sigma \widetilde{W}_{\sigma\alpha} \widetilde{M}^{\alpha\beta} \widetilde{W}_{\beta\gamma} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Allí, el producto resaltado corresponde a la definición de la matriz auxiliar a nivel secundario presentada en la ecuación 2.45, con lo cual se llega a

$$\tilde{\alpha}_\alpha \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{W}_{\beta\gamma} + \ddot{Q}^I \gamma_I^\sigma (\delta_\sigma^\beta - \tilde{\gamma}_\sigma^s \tilde{\gamma}_s^\beta) \tilde{W}_{\beta\gamma} = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\tilde{\alpha}_\alpha \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{W}_{\beta\gamma} + \ddot{Q}^I \gamma_I^\beta \tilde{W}_{\beta\gamma} - \ddot{Q}^I \gamma_I^\sigma \tilde{\gamma}_\sigma^s \tilde{\gamma}_s^\beta \tilde{W}_{\beta\gamma} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Teniendo presente la definición de los vectores $\tilde{\gamma}$, es apreciable que el último término de la ecuación anterior se anula debido a que el producto resaltado es igual a cero, dando como resultado

$$(\tilde{\alpha}_\alpha \tilde{M}^{\alpha\beta} + \ddot{Q}^I \gamma_I^\beta) \tilde{W}_{\beta\gamma} = 0. \quad (\text{B.8})$$

De esta forma, las ecuaciones de movimiento a segundo nivel quedan reescritas en términos de la matriz auxiliar \tilde{M} .

Apéndice C

Identidades asociadas a campos de Maxwell

Como se discutió en el primer capítulo del documento, los campos de Maxwell guardan ciertas simetrías, específicamente se caracterizan por ser invariantes bajo transformaciones de *gauge*; es debido a este aspecto que los campos de espín uno sin masa exhiben identidades que los campos de Proca no poseen.

C.1. Identidades de *gauge*

Cuando se trabaja con campos de Maxwell, el respectivo Lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}, \quad (\text{C.1})$$

donde $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ahora, se tiene presente que la expresión de los α es de la forma:

$$\alpha_I = \dot{Q}^J \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^I}, \quad (\text{C.2})$$

donde las Q^I representan los campos de la forma $Q^I = A_\mu^{(\bar{\alpha})}$, sabiendo que μ corre por los índices espacio-temporales y $\bar{\alpha} = 1, \dots, N$. Considerando esto, los α quedan expresados de la manera

$$\alpha^\nu = \dot{A}_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A_\mu \partial \dot{A}_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}. \quad (\text{C.3})$$

Así, sustituyendo el Lagrangiano se obtiene

$$\alpha^\nu = -\frac{\dot{A}_\mu}{4} \frac{\partial^2 (A_{\sigma\lambda} A^{\sigma\lambda})}{\partial A_\mu \partial \dot{A}_\nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial (A_{\sigma\lambda} A^{\sigma\lambda})}{\partial A_\nu}, \quad (\text{C.4})$$

de donde, al emplear la métrica de Minkowski para bajar los índices, se llega a

$$\alpha^\nu = -\frac{\dot{A}_\mu}{4} \eta^{\sigma\beta} \eta^{\lambda\gamma} \frac{\partial^2 (A_{\sigma\lambda} A_{\beta\gamma})}{\partial A_\mu \partial \dot{A}_\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\sigma\beta} \eta^{\lambda\gamma} \frac{\partial (A_{\sigma\lambda} A_{\beta\gamma})}{\partial A_\nu}. \quad (\text{C.5})$$

Debido al hecho de trabajar en espacio-tiempo plano, es posible intercambiar el orden de las derivadas:

$$\alpha^\nu = -\frac{\dot{A}_\mu}{4}\eta^{\sigma\beta}\eta^{\lambda\gamma}\frac{\partial}{\partial\dot{A}_\nu}\left[\frac{\partial(A_{\sigma\lambda}A_{\beta\gamma})}{\partial A_\mu}\right] + \frac{1}{4}\eta^{\sigma\beta}\eta^{\lambda\gamma}\frac{\partial(A_{\sigma\lambda}A_{\beta\gamma})}{\partial A_\nu}. \quad (\text{C.6})$$

Por lo tanto, aplicando la regla de derivación de un producto y la definición de $A_{\mu\nu}$ se tiene

$$\alpha^\nu = -\frac{\dot{A}_\mu}{4}\eta^{\sigma\beta}\eta^{\lambda\gamma}\frac{\partial}{\partial\dot{A}_\nu}\left[\frac{\partial(\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma)}{\partial A_\mu}A_{\beta\gamma} + A_{\sigma\lambda}\frac{\partial(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta)}{\partial A_\mu}\right] \quad (\text{C.7})$$

$$+ \frac{1}{4}\eta^{\sigma\beta}\eta^{\lambda\gamma}\left[\frac{\partial(\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma)}{\partial A_\nu}A_{\beta\gamma} + A_{\sigma\lambda}\frac{\partial(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta)}{\partial A_\nu}\right]. \quad (\text{C.8})$$

Es apreciable que todas las derivadas al interior de las llaves son nulas; por lo tanto, se obtiene que todos los α^ν , equivalentemente todos los α_I , son cero. Este hecho era de esperarse desde la definición de la teoría donde se establece la dependencia con los campos de Maxwell por medio del tensor de campo electromagnético. Es así que la invariancia bajo transformaciones de *gauge* de los campos de Maxwell queda contenida en los α_I dando lugar a las identidades de *gauge*. Cabe resaltar la independencia que exhiben las identidades de *gauge* con respecto al tipo de Hessiano que constituya a las ecuaciones de movimiento.

C.2. Identidades de Bianchi

Adicionalmente, es bien sabido que los campos de Maxwell satisfacen la identidad de Bianchi de la forma C.9, por medio de las cuales se deducen la ley de Gauss para el magnetismo y la ecuación de Maxwell-Faraday.

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Debido a la forma que poseen las ecuaciones de la teoría donde quedan contenidas las identidades de Bianchi 2.25, se percibe que las mencionadas identidades corresponden a proyecciones de las identidades de *gauge* en el kernel del Hessiano primario. Esto debido a que el kernel de una matriz es definido como todos los vectores que mapean al vector nulo, razón por la cual también se conoce al kernel como el espacio nulo asociado a la matriz, lo cual se evidencia claramente en la estructura de las identidades de Bianchi $\gamma_\alpha = 0$.

Además, una interpretación bastante ingeniosa de las identidades de Bianchi es presentada en el libro de Thorne, Misner, y Wheeler (1973). Allí, para el caso del electromagnetismo, se muestra que la conservación de la fuente J^ν en las ecuaciones 1.7, es decir $\partial_\nu J^\nu = 0$, se considera como una consecuencia del principio de desvanecimiento de la frontera de una frontera ($\partial\partial = 0$), aplicado al tensor de Faraday $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0\partial_\nu J^\nu = 0$, aspecto que se presenta y se discute en el capítulo quince del libro en mención.

Apéndice D

Definiciones equivalentes del Hessiano secundario y ecuaciones de movimiento a segundo nivel

Partiendo de la definición del Hessiano secundario en términos de derivadas de las ligaduras Lagrangianas primarias

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta} := \gamma_{\alpha}^J \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{Q}^J}, \quad (\text{D.1})$$

se procede a encontrar su expresión en términos de derivadas del Lagrangiano, para lo cual se sustituye la expresión de la ligadura φ y, por consiguiente, se realiza lo mismo con la expresión de α , obteniéndose así

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha}^J \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^J} (\gamma_{\beta}^I \alpha_I) = \gamma_{\alpha}^J \gamma_{\beta}^I \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^J} \left(\dot{Q}^K \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^I} \right). \quad (\text{D.2})$$

En este procedimiento se tuvo en cuenta el hecho de que los vectores γ son constantes, razón por la cual pueden extraerse con facilidad de una derivada; sin embargo, se debe ser cuidadoso en no intercambiar el orden de los vectores γ cuando hay un producto de por medio entre ellos ya que no conmutan por definición.

Luego, se aplica la derivada, llegando a

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha}^J \gamma_{\beta}^I \left[\delta_J^K \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} + \dot{Q}^K \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^J} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} \right) - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \right]. \quad (\text{D.3})$$

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha}^J \gamma_{\beta}^I \delta_J^K \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} - \gamma_{\alpha}^J \gamma_{\beta}^I \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} + \gamma_{\alpha}^J \gamma_{\beta}^I \dot{Q}^K \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^J} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} \right). \quad (\text{D.4})$$

En este punto, se tiene en cuenta que el vector γ por ser constante, puede introducirse en la derivada y también se recuerda que por trabajar en espacio-tiempo plano es posible conmutar las derivadas. Se procede ahora a analizar el último término de la expresión [D.4](#):

$$\gamma_\alpha^J \gamma_\beta^I \dot{Q}^K \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^J} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^K \partial \dot{Q}^I} \right) = \gamma_\alpha^J \dot{Q}^K \frac{\partial}{\partial Q^K} \left(\gamma_\beta^I \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^J \partial \dot{Q}^I} \right) \right) = \gamma_\alpha^J \dot{Q}^K \frac{\partial}{\partial Q^K} (\gamma_\beta^I W_{IJ}) \rightarrow 0 \quad (\text{D.5})$$

Se observa que, por la definición de los vectores *gamma*, el producto del vector con el Hessiano primario se hace nulo. Por lo tanto, se obtiene que el Hessiano secundario con índices griegos es igual a

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^J \gamma_\beta^I \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \gamma_\alpha^J \gamma_\beta^I \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} = \gamma_\alpha^J \gamma_\beta^I \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \right]. \quad (\text{D.6})$$

Ahora, el término en las ecuaciones de movimiento que contiene el Hessiano secundario se escribe como

$$\ddot{Q}^K \gamma_K^\alpha \widetilde{W}_{\alpha\beta} = \ddot{Q}^K \gamma_K^\alpha \gamma_\alpha^J \gamma_\beta^I \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \right] = \ddot{Q}^K \delta_K^J \gamma_\beta^I \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^J \partial \dot{Q}^I} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q^I \partial \dot{Q}^J} \right]. \quad (\text{D.7})$$

$$\ddot{Q}^K \gamma_K^\alpha \widetilde{W}_{\alpha\beta} = \ddot{Q}^J \gamma_\beta^I \widetilde{W}_{IJ}. \quad (\text{D.8})$$

De esta forma, queda mostrado que las ecuaciones de movimiento se pueden escribir de la forma presentada en D.9 o como se muestra en D.10, ya que son representaciones equivalentes.

$$\tilde{\alpha}_\beta + \ddot{Q}^I \gamma_I^\alpha \widetilde{W}_{\alpha\beta} \approx 0. \quad (\text{D.9})$$

$$\tilde{\alpha}_\beta + \ddot{Q}^J \gamma_\beta^I \widetilde{W}_{IJ} \approx 0. \quad (\text{D.10})$$