

**AUTOMATIZACIÓN DE ACTOS DE DEVOLUCION EN EL SOFTWARE  
CABRI LM**

**AUTORES**

**MARISOL RUEDA PUENTES  
ÁNGEL MIGUEL NIÑO NAVAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2013**

**AUTOMATIZACIÓN DE ACTOS DE DEVOLUCION EN EL SOFTWARE  
CABRI LM**

**MARISOL RUEDA PUENTES  
ÁNGEL MIGUEL NIÑO NAVAS**

**Trabajo de Grado para  
optener el título de  
Licenciado en Matemática**

**Director  
MARTIN EDUARDO ACOSTA  
Doctor en Educación Matemática**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2013**

# Dedicatoria

A Dios por brindarme sabiduría y entendimiento para culminar con éxito esta etapa importante de mi vida.

A mi madre Zunilda Puentes, a mi padre Roberto Rueda y a mi hermana Jackeline Andrea Caballero por su amor y apoyo incondicional durante toda mi carrera.

A Nelson Antonio Contreras por compartir su vida a mi lado y por su grandioso apoyo durante todos estos años.

Marisol Rueda Puentes

## Agradecimientos

Al grupo Edumat UIS-Matemática Recreativa, a quienes les debo gran parte de la motivación y conocimiento adquirido durante mi formación como licenciada, en especial al profesor Daniel Moreno Caicedo,

Al profesor Martin Eduardo Acosta por compartir su conocimiento y experiencias académicas, que sirvieron como guía para sacar adelante este proyecto y muchos más, Y finalmente a mis amigos y compañeros del CEMAT por su cariño y apoyo incondicional durante el desarrollo del proyecto, en especial a María Angélica T.

# Dedicatoria

Deseo ofrecer, este, mi sueño cumplido, a mi hija Daniela, quien es la razón de todos mis logros.

A mis padres, que desde el cielo fortalecen mis pasos.

A mis hermanos, quienes siempre han estado como un apoyo en el camino.

A mi adorada esposa, quien se convirtió en un apoyo constante en la última etapa de este sueño.

Y a todas las personas que siempre confiaron en mí.

Ángel Miguel Niño Navas

## Agradecimientos

Después de “culminar” esta etapa de mi vida, la cual representó múltiples desafíos, incertidumbres, enojos y aprendizajes, quiero manifestar mis agradecimientos a las personas que con su acompañamiento, colaboración y voz de aliento, permitieron vivir esta experiencia.

Al profesor Martín, por confiar en mí y darme la oportunidad de participar en esta investigación, además por su disposición, paciencia y afán de contribuir en nuestro aprendizaje, no solo académico sino también personal.

A mi compañera de proyecto de grado Marisol, quien con su paciencia, comprensión e intensidad para trabajar ha sido artífice en la culminación de mi sueño.

A Johanna Mendoza, Marcela Jaimes, Claudia Barajas, Michael Pérez y demás compañeros del Semillero Matemático por sus contribuciones, confianza y apoyo en los momentos difíciles de este sueño.

Al profesor Juan de Dios y la institución educativa Las Américas quienes con su disposición facilitaron la aplicación de este proyecto.

Al Grupo EDUMAT-UIS y compañeros de la Licenciatura que de una u otra manera apoyaron y aportaron en nuestro proceso de investigación. Y por último a todos aquellos que estuvieron presentes de una u otra forma, y que hicieron posible que esta ardua tarea fuera “por fin” una realidad.

A todos ustedes mil y mil gracias.

# Tabla de Contenido

<b>Introducción.....</b>	<b>17</b>
<b>1. Marco Teórico .....</b>	<b>20</b>
1.1 Empoderamiento.....	20
1.2. Empoderamiento y el subgrupo Semillero Matemático.....	21
1.3. Empoderamiento Matemático.....	22
1.4. Teoría de las Situaciones Didácticas.....	23
1.4.1 Aprendizaje por Adaptación.....	24
1.4.2. Situación Didáctica Vs Situación A-Didáctica.....	26
1.4.3. Devolución.....	28
1.4.4. Empoderamiento y la Teoría de Situaciones.....	32
1.5. Automatización de Actos de Devolución con Cabri LM.....	33
1.6 Matemática Recreativa.....	36
1.7. Criptoaritmética .....	37
1.8. Cuadrados Mágicos .....	38
1.9. Problema y Objetivos .....	38
1.9.1. Objetivo General.....	39
<b>2. Metodología .....</b>	<b>40</b>
<b>3. Análisis A Priori .....</b>	<b>42</b>
3.1. Análisis A-priori Taller de Cuadrados Mágicos .....	43
3.1.1. Descripción del Medio.....	43
3.1.2. Programación de los Actos de Devolución.....	45
3.2. Análisis A -priori Taller de Criptoaritmética .....	49
3.2.1. Descripción del Medio.....	49

3.2.2. Programación de los Actos de Devolución .....	52
<b>4. Análisis A Posteriori.....</b>	<b>56</b>
4.1. Análisis A-posteriori Cuadrados Mágicos .....	56
4.1.1. Hacer comprender el problema.....	57
4.1.2. Solicitar una estrategia de solución.....	58
4.1.3. Control de procesos intermedios.....	60
4.1.4. Solicitud de ayuda.....	64
4.1.5. Por Abstención .....	67
4.2. Análisis A-posteriori Criptoaritmética .....	71
4.2.1. Hacer comprender el problema.....	71
4.2.2. Control de procesos intermedios.....	73
4.2.3. Solicitud de ayuda.....	78
4.2.4. Por Abstención .....	80
<b>5. Conclusiones .....</b>	<b>83</b>
<b>Referencias Bibliográficas.....</b>	<b>86</b>



## Lista de figuras

Figura 1 <i>Aprendizaje por Adaptación</i> .....	24
Figura 2 Triángulo Didáctico (Brousseau, 2007. P.50).....	26
Figura 3. Situación Didáctica / Situación A-Didáctica.....	27
Figura 4 Actividad de Identificación de Figuras.....	34
Figura 5 Descripción Booleano.....	35
Figura 6 Historia Taller Cuadrados Mágicos.....	43
Figura 7 Condiciones Taller Cuadrados Mágicos.....	44
Figura 8 Curiosidades Taller Cuadrados Mágicos.....	44
Figura 9 Primera actividad Taller Cuadrados Mágicos.....	45
Figura 10 Historia Taller Criptoaritmética.....	49
Figura 11 Ejemplo Histórico Taller Criptoaritmética.....	50
Figura 12 Condiciones Taller Criptoaritmética.....	50
Figura 13 Primera actividad Taller Criptoaritmética.....	51
Figura 14 Carita feliz Taller Criptoaritmética.....	54
Figura 15 Carita Triste: Taller Criptoaritmética.....	55
Figura 16 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos1.....	58
Figura 17 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos2.....	59
Figura 18 Actividad N°1. Taller Cuadrado Mágicos3.....	60
Figura 19 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos4.....	61
Figura 20 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos5.....	61
Figura 21 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos6.....	62
Figura 22 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos7.....	63
Figura 23 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos8.....	63

Figura 24	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos9	65
Figura 25	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos10	65
Figura 26	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos11	65
Figura 27	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos12	66
Figura 28	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos13	66
Figura 29	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos14	67
Figura 30	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos15	68
Figura 31	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos16	68
Figura 32	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos17	68
Figura 33	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos18	69
Figura 34	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos19	69
Figura 35	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos20	70
Figura 36	Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos21	70
Figura 37	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética1	73
Figura 38	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética2	74
Figura 39	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética3	74
Figura 40	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética4	74
Figura 41	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética5	75
Figura 42	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética6	75
Figura 43	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética7	76
Figura 44	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética8	76
Figura 45	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética9	77
Figura 46	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética10	77
Figura 47	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética11	77
Figura 48	Actividad N°1. Taller Criptoaritmética12	78

Figura 49Actividad N°1. Taller Criptoaritmética13.....	79
Figura 50Actividad N°1. Taller Criptoaritmética14.....	79
Figura 51Actividad N°1. Taller Criptoaritmética15.....	81
Figura 52Actividad N°1. Taller Criptoaritmética16.....	81

## Resumen

**TITULO\*:** AUTOMATIZACIÓN DE ACTOS DE DEVOLUCION EN EL SOFTWARE CABRI LM

**AUTORES:** RUEDA PUENTES, Marisol y NIÑO NAVAS, Ángel Miguel\*\*

**PALABRAS CLAVE:** matemática recreativa, software dinámico, automatización de actos de devolución, análisis didáctico.

### DESCRIPCIÓN

Este trabajo se realizó mediante una investigación de tipo ingeniería didáctica, en la cual tratamos de adaptar actividades de matemática recreativa a través del software Cabri LM, intentando automatizar los actos de devolución: se refiere a la forma como el profesor interviene en la interacción del estudiante con el medio con el fin de garantizar la posibilidad de la validación; abordados por Guy Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas, lo anterior debe ser tenido en cuenta por el docente en las intervenciones que realice durante la clase como una reacción a una acción hecha por el estudiante, otorgando al estudiante la posibilidad de validar su conocimiento. Catalogamos estas actividades como una nueva opción para el docente en el aula de clase, de tal forma que los estudiantes aprendan y se diviertan con las matemáticas, rompiendo el mito de que la matemática es difícil y que no es para todos; a través del Empoderamiento Matemático. La experimentación nos permitirá prever un efecto positivo de la automatización de los actos de devolución, para esto será necesario realizarla con una cantidad apropiada de estudiantes, que permitan durante el desarrollo de las actividades recolectar los datos necesarios para confirmar los objetivos planteados en este trabajo.

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Dr. Martin Eduardo Acosta Gempeler

## Abstract

**TITLE\*:** AUTOMATION OF ACTS OF RETURN IN CABRI LM SOFTWARE

**AUTHORS:** RUEDA PUENTES, Marisol y NIÑO NAVAS, Ángel Miguel\*\*

**Keywords:** recreational mathematics, dynamic software, automating back actions, didactic analysis.

### DESCRIPTION

This work was performed by an investigation of teaching engineering, in which we try to adapt recreational mathematics activities through software Cabri LM, trying to automate back acts: refers to the way the teacher intervenes in student interaction with the environment in order to ensure the possibility of validation; addressed by Guy Brousseau's Theory of didactic situations, the above should be taken into account by the teacher in the interventions made during the class as a reaction to an action made by the student, giving the student the opportunity to validate their knowledge. Categorize these activities as a new option for the teacher in the classroom, so that students learn and have fun with math, breaking the myth that math is hard and not for everyone; through Empowerment math. The experiments allow us to predict a positive effect of automating back actions, for this will be necessary to do it with an appropriate amount of students, allowing for the development of data collection activities needed to confirm the goals outlined in this work.

---

\*Thesis

\*\*Faculty of Science. Bachelor of Mathematics. Dr. Martin Eduardo Acosta Gempeler

## Introducción

Con este trabajo se busca responder a algunas de las necesidades del grupo Edumat-UIS. El grupo Edumat-UIS es un grupo de investigación y extensión de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, cuenta con cuatro subgrupos: Semillero Matemático, Matemática Recreativa, Nuevas Tecnologías y Olimpiadas Matemáticas. Nosotros pertenecemos a los subgrupos de Semillero Matemático y Matemática Recreativa, y el director del trabajo de grado pertenece al subgrupo Nuevas Tecnologías. *El subgrupo de Semillero Matemático*, es un espacio en el que niños y jóvenes pueden aproximarse al conocimiento matemático a través de juegos, acertijos, materiales didácticos, Origami, resolución de problemas y uso de tecnologías computacionales; el propósito del Semillero Matemático es potenciar el desarrollo del pensamiento matemático de los niños y jóvenes a través de la exploración y profundización de diferentes situaciones problema. El subgrupo de *Matemática Recreativa* ha desarrollado una serie de actividades, tendientes a crear un ambiente rico que contribuya a despertar el interés y la curiosidad de docentes y estudiantes de educación preescolar, básica y media del área metropolitana, con la implementación del Calendario Matemático (creado por “Colombia Aprendiendo Proyecto Matemática Recreativa”). El subgrupo de *Nuevas Tecnologías* investiga y trabaja con tecnologías informáticas y computacionales como apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y las ciencias. Y por último el subgrupo de Olimpiadas Matemáticas espera generar un espacio permanente con actividades programadas a lo largo del año que puedan estimular el estudio de las matemáticas, ayudando a la formación de un pensamiento crítico y de un espíritu científico en los niños y jóvenes, así como al desarrollo de habilidades y destrezas que les permitirán un mejor desempeño en los ámbitos académico y social.

Los subgrupos de Matemática Recreativa, Nuevas Tecnologías y Semillero Matemático surgieron por la necesidad de cambiar la enseñanza de la Matemática en la educación tradicional, incluyendo las situaciones de Matemática Recreativa,

las TIC's y la Didáctica de la Matemática. Estos tienen una trayectoria de más de diez años en los que han desarrollado una práctica docente con un impacto positivo en las comunidades en las que trabajan. Sin embargo, en los últimos años se ha visto la necesidad de describir dichas prácticas y darles una fundamentación teórica, con el fin de transmitir las a las nuevas generaciones de profesores y difundirlas en la comunidad de educación matemática en general.

Ante esta necesidad, Pérez (2010), realizó su trabajo de grado alrededor de la noción de *Empoderamiento Matemático*<sup>3</sup> como objetivo de las prácticas del Semillero Matemático. Estableció criterios que debe seguir el profesor al momento de crear un taller lúdico y unos indicadores de tipo social e individual para identificar si un estudiante ha logrado el Empoderamiento Matemático o no. Estos indicadores establecidos por (Pérez 2010) para la realización de talleres han sido adoptados por Edumat-UIS para la capacitación de docentes y estudiantes. Por otra parte, el subgrupo de Nuevas Tecnologías ha venido diseñando en sus proyectos de investigación actividades didácticas que aprovechan el potencial del software de geometría dinámica para mejorar el aprendizaje de los estudiantes; como parte de ese trabajo, se investiga en las nuevas herramientas del software Cabri LM, que permiten automatizar procesos que antes eran exclusivos del profesor.

El presente proyecto busca responder a las necesidades de estos tres subgrupos del grupo Edumat-Uis: describir y fundamentar teóricamente la práctica de formación matemática de estudiantes y profesores por medio de actividades lúdicas, y aprovechar el potencial de las tecnologías computacionales para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, describir teóricamente las intervenciones del profesor, durante el desarrollo de actividades de Matemática Recreativa, que conducen a un Empoderamiento Matemático de los estudiantes, y automatizar esas intervenciones en el software Cabri LM.

---

3 se refiere a la adquisición, desarrollo y potenciación de destrezas, conceptos y estructuras conceptuales de la matemática y las estrategias generales de resolución de problemas (Bell et al. 1983).

Para lograr este objetivo nos basaremos en el *Empoderamiento Matemático* Ernest (2002) y en la Teoría de las Situaciones Didácticas Brousseau (2007), en especial, en el *Proceso de devolución*. La metodología que utilizaremos en nuestro proyecto de investigación es la Ingeniería Didáctica, que implica un proceso de planeación, experimentación y evaluación. Para la fase de experimentación, trabajamos con estudiantes de básica primaria en edades comprendidas entre los 9 y 10 años.

Nuestro trabajo está compuesto por cinco capítulos. En el primer capítulo MARCO TEÓRICO, exponemos el concepto de EMPODERAMIENTO MATEMÁTICO de Paul Ernest, la TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS de Guy Brousseau, y su relación con el uso del software Cabri LM. Con base en esas ideas teóricas, identificamos los actos de devolución como los criterios de intervención de los profesores en la actividad matemática de los estudiantes, con el fin de lograr el empoderamiento matemático y planteamos la posibilidad de automatizar algunos de ellos en el software Cabri LM.

En el segundo capítulo de METODOLOGÍA, especificamos las distintas fases de la ingeniería didáctica, y como se llevara a cabo nuestra investigación.

En el tercer capítulo ANALISIS A PRIORI, presentamos la planeación de los talleres incluyendo la automatización de los actos de devolución y la anticipación del comportamiento de los estudiantes.

En el cuarto capítulo ANALISIS A POSTERIORI, presentamos el análisis de los datos recogidos en la experimentación.

En el quinto capítulo CONCLUSIONES presentamos los resultados generales de nuestro trabajo y algunas proyecciones.

Finalmente, aparecen 1 DVDs anexos, cuyo contenido corresponde a las transcripciones de los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y sus respectivas grabaciones.



# 1. Marco Teórico

## 1.1 Empoderamiento

Antes de hablar del Empoderamiento Matemático como concepto orientador del trabajo del subgrupo Semillero Matemático, es necesario comprender el origen y el contexto del término *Empoderamiento*.

El término empoderamiento tiene su origen en la educación crítica de Paulo Freire y ha sido utilizado principalmente por activistas feministas y del desarrollo. Una definición corta de empoderamiento, presente en muchos documentos de Organizaciones No gubernamentales como DAWN (Alternativas de Desarrollo con las Mujeres para una Nueva Era ,1985), la ONU (organización de Naciones Unidas) y el Banco Mundial es la siguiente:

**Empoderamiento o apoderamiento**, se refiere al proceso por el cual las personas aumentan la fortaleza espiritual, política, social o económica de los individuos y las comunidades para impulsar cambios positivos de las situaciones en que viven. Generalmente implica el desarrollo en el beneficiario de una confianza en sus propias capacidades.

Parafraseando a Titi y Singh (1995), en un nivel más general, el origen de los movimientos de emancipación social, encarnan dos valores fundamentales en el empoderamiento: la equidad y la autonomía. La equidad busca la valoración de las personas sin importar las diferencias culturales, sociales o de género que presenten entre sí; históricamente, la preocupación por la equidad apareció en las luchas feministas que buscaban igualdad de condiciones con los hombres (DAWN, 1985). En el ámbito de la educación en general y de la educación matemática en particular, se han identificado prácticas discriminatorias contra las mujeres, las minorías étnicas y las clases desfavorecidas, por lo que la equidad se ha convertido en una preocupación mayor, y un objetivo político a nivel nacional e internacional. Por su parte, la autonomía se refiere a la capacidad de las personas

y de las comunidades de tomar decisiones libres sobre los aspectos que las afectan. Hoy en día por ejemplo, en Colombia se habla de la autonomía de los pueblos indígenas refiriéndose al derecho que tienen a organizarse comunitariamente y definir sus sistemas de educación, salud y justicia, independientemente del gobierno nacional (Canal 2007, p. 9). La autonomía es una condición indispensable para lograr la equidad, ya que las relaciones de dependencia implican una desigualdad de oportunidades. Por eso las organizaciones que trabajan por alcanzar una mayor igualdad de condiciones de vida de las poblaciones vulnerables, igualmente se preocupan por que dichas poblaciones desarrollen su autonomía.

En general el empoderamiento se refiere a todas las acciones encaminadas a alcanzar la equidad y la autonomía de los individuos y de las comunidades.

## **1.2. Empoderamiento y el subgrupo Semillero Matemático**

El subgrupo Semillero Matemático nació de la iniciativa de profesores y estudiantes de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, universidad pública, que tiene la vocación de proveer oportunidades de formación profesional y humana a todos los ciudadanos sin distinción de raza, confesión religiosa o nivel de ingreso. Desde sus inicios, el subgrupo ha trabajado con el firme convencimiento de que todas las personas tienen las capacidades necesarias para aprender matemáticas, y por lo tanto hay que buscar los medios adecuados para desarrollar esas capacidades. Además, el subgrupo Semillero Matemático, en todas sus actividades, busca activamente la autonomía de los estudiantes y el desarrollo de las habilidades de razonamiento matemático de los mismos, procurando brindarles oportunidades de descubrir y desarrollar sus capacidades personales y sociales. Por lo tanto podemos afirmar que las actividades del subgrupo Semillero Matemático están orientadas al desarrollo del empoderamiento matemático de los estudiantes que lo integran.

### 1.3. Empoderamiento Matemático

Paul Ernest (2002) explora el significado de empoderamiento en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, donde reconoce tres dominios diferentes del empoderamiento matemático: empoderamiento social, empoderamiento epistemológico y empoderamiento matemático.

“El *empoderamiento Social* a través de las matemáticas, se refiere a la habilidad de utilizar las matemáticas para mejorar las oportunidades de vida en el estudio y el trabajo, además para participar más plenamente en la sociedad a través de una ciudadanía crítica.

El *empoderamiento Epistemológico* se refiere a la potenciación del crecimiento de la persona, de su confianza, no sólo en el uso de las matemáticas sino también en un sentido personal de tener poder sobre la creación y la validación de los conocimientos.

El *empoderamiento Matemático* se refiere a la adquisición, desarrollo y potenciación de destrezas, conceptos y estructuras conceptuales de la matemática y las estrategias generales de resolución de problemas. De esta manera los estudiantes están en la capacidad de resolver diferentes tipos de situaciones problema, interpretando los elementos que aparecen inmersos en ellas, usando aquellos que necesita para llegar a una respuesta adecuada, descartando los que no son necesarios y aplicando de forma lógica los algoritmos que se necesitan para dar solución a una situación problema”.

Según Pérez (2010):

En todo este proceso de empoderamiento matemático se hace necesario que el estudiante no sólo ejercite la parte algorítmica y los métodos de solución de problemas, sino también que adquiera y desarrolle habilidades de lectura, escritura e interpretación del lenguaje matemático, acompañado de fluidez oral y escrita. Estas habilidades son necesarias en el momento de presentar una solución o una situación problema, de tal forma que ésta sea clara, precisa y que

pueda ser comprendida por quienes la toman. Además de esto, también forman parte esencial de todo este proceso las discusiones que puedan presentarse frente a las distintas opiniones, formas de solución de una situación y la posición que cada uno asuma frente a ella, ya sea para defenderla o para refutarla, siempre con argumentos lógicos o matemáticos claros.

En nuestro proyecto, consideramos que el estudiante logra un empoderamiento matemático cuando es capaz retomar decisiones por si mismo (autonomía) además de defender su posición argumentando con procesos lógicos y matemáticos ante sus compañeros (equidad) para llegar a la comprensión, desarrollo y solución de las situaciones planteadas. Desde este punto de vista, utilizaremos el empoderamiento matemático para identificar y describir las conductas de algunos profesores implicados que favorecen el desarrollo de la autonomía y la equidad entre los estudiantes, conductas que intentaremos automatizar en el software Cabri LM.

#### **1.4. Teoría de las Situaciones Didácticas**

Decidimos tomar como referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas porque pensamos que promueve la autonomía en el estudiante, que es uno de los dos ideales del empoderamiento matemático.

Desde nuestro punto de vista, una de las contribuciones fundamentales de la Teoría de las Situaciones Didácticas es la intención de promover en el estudiante el aprendizaje por adaptación. El concepto de aprendizaje por adaptación fue propuesto inicialmente por Piaget (1975), quien lo define como producto de las interacciones del sujeto con el medio en que vive.

Brousseau (2007) retoma este concepto de aprendizaje por adaptación y construye su Teoría de las Situaciones Didácticas basándose en él. A continuación definiremos el aprendizaje por adaptación con más detalle.

### 1.4.1 Aprendizaje por Adaptación

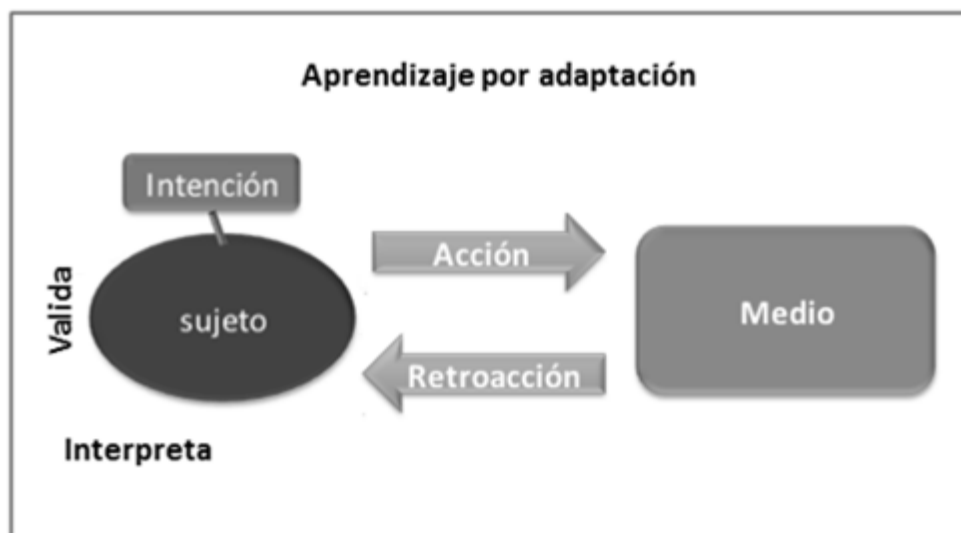
Según Margolinas (2009) el aprendizaje por adaptación se da cuando:

El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del estudiante, se mantiene por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

Para Acosta (2010) el motor del aprendizaje por adaptación:

Es el proceso de interacción del sujeto con un medio antagónico, que ilustramos en la siguiente figura:

Figura 1 *Aprendizaje por Adaptación*



El primer elemento de la interacción del sujeto con el medio es la intención. La intención del sujeto es el origen de toda la interacción, ya que es la que determina el propósito de las acciones posteriores y de sus correspondientes validaciones. La intención es un objetivo que se plantea el sujeto. Si no hay intención no puede haber aprendizaje por adaptación.

El segundo elemento de la interacción es la acción: el sujeto realiza una acción sobre el medio para alcanzar su intención.

El tercer elemento de la interacción es la retroacción, que es la forma como el medio reacciona a la acción del sujeto. También podemos decir que es el efecto observable que produce la acción del sujeto.

El cuarto elemento de la interacción es la interpretación: el sujeto percibe la retroacción que le ofrece el medio y le da un sentido. Este elemento es importante aunque generalmente se pasa por alto, pues si el sujeto no interpreta la retroacción del medio no podrá realizar la validación.

El quinto elemento de la interacción es la validación. El sujeto valida su acción; es decir, decide si esa acción le sirvió para alcanzar su intención o no. Si la validación es positiva (el sujeto decide que con esa acción alcanzó lo que se proponía), se producirá un refuerzo de la acción: el sujeto utilizará esa acción con mayor frecuencia y rapidez. Si la validación es negativa (el sujeto decide que con esa acción no alcanzó lo que se proponía), se producirá un cambio de acción.

El refuerzo de la acción y el cambio de acción son dos efectos observables del proceso de interacción del sujeto con el medio, y constituyen indicios de un aprendizaje por adaptación.

Es importante señalar que los únicos elementos de la interacción que son observables son la acción y la retroacción. Los demás elementos son hipotéticos y pueden deducirse a partir de la observación de las acciones, las retroacciones y los efectos de la validación (refuerzo o cambio de la acción).

La interacción del sujeto con el medio es cíclica, así que no hay que verla como un proceso que termina con la validación, sino que la validación conduce a un nuevo ciclo.

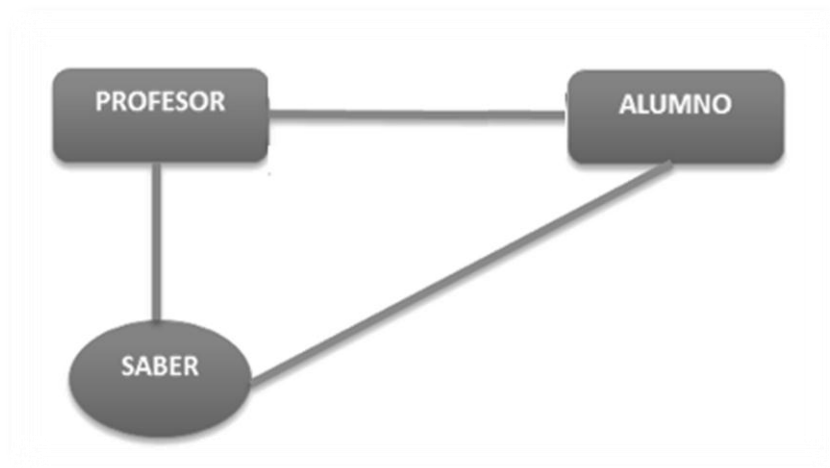
De los cinco elementos de la interacción el más importante desde el punto de vista didáctico, ya que es condición fundamental para el aprendizaje por adaptación, es la validación. Si el proceso de interacción no conduce a la validación de las acciones por parte del sujeto, no se produce un aprendizaje por adaptación.

Como veremos más adelante, utilizaremos este modelo de interacción para identificar elementos importantes del aprendizaje que podemos asociar a la interacción de los alumnos con el software Cabri LM, y para caracterizar y valorar las intervenciones del profesor en el proceso de solución de problemas.

#### 1.4.2. Situación Didáctica Vs Situación A-Didáctica

Para Brousseau (2007), en el aprendizaje por adaptación, que es resultado de la interacción del sujeto con el medio, no se considera el rol del profesor. Para incluir al profesor y su relación con el alumno, debemos considerar lo que la Teoría de las Situaciones Didácticas llama la Situación Didáctica. Una Situación Didáctica es aquella en la que intervienen tres elementos: un profesor, un saber y un alumno. El profesor tiene la intención (didáctica) de transmitir el saber al alumno; pero esto no es posible de manera directa. (Véase figura 1: Triángulo didáctico)

**Figura 2** Triángulo Didáctico (Brousseau, 2007. P.50)



Una hipótesis fundamental de la Teoría de las Situaciones Didácticas es la imposibilidad de transmitir de manera directa el saber al estudiante. Podemos decir que la TSD postula la imposibilidad de reducir el proceso de enseñanza a un proceso de comunicación. Así que el profesor, cuyo rol es transmitir el saber al estudiante, debe recurrir a una estrategia indirecta para lograr su objetivo. Esa estrategia indirecta consiste en crear las condiciones que posibiliten un aprendizaje por adaptación.

Podemos entonces incluir el esquema del aprendizaje por adaptación dentro del esquema de la situación didáctica, como ilustramos en el siguiente diagrama.

**Figura 3.** Situación Didáctica / Situación A-Didáctica



La Teoría de las Situaciones Didácticas llama Situación a-didáctica a aquella en la que se privilegia la interacción del sujeto con un medio, y es productora de un aprendizaje por adaptación (el adjetivo a-didáctica se refiere al hecho de que el medio no tiene una intención didáctica con respecto al sujeto). Así mismo, llama *conocimiento* a dicho aprendizaje producto de la interacción del sujeto con el medio. El conocimiento es entonces personal y contextualizado, ya que depende de una experiencia del sujeto en un contexto determinado. En la TSD la palabra conocimiento no es sinónimo de saber. El saber es impersonal y descontextualizado; no es el producto de una experiencia personal, sino de acuerdos sociales de la comunidad de sabios (por eso su nombre completo es el saber sabio), y se expresa en un lenguaje convencional.

Veamos entonces las relaciones entre la situación didáctica y la situación a-didáctica. Decíamos que el profesor prepara una situación a-didáctica, en la que se desarrolla la interacción del sujeto con un medio.



Para poner en marcha la situación a-didáctica, el profesor debe diseñar un problema, que será el que desencadene el proceso de interacción, y un medio (que determina qué acciones puede realizar el sujeto y qué acciones no puede realizar, y cuáles son las correspondientes retroacciones). El producto de esa situación a-didáctica es un conocimiento personal y contextualizado. Finalmente, el profesor explicita las relaciones entre el saber impersonal y descontextualizado con el conocimiento construido por los alumnos en la situación a-didáctica. Es lo que llama la TSD el proceso de institucionalización. El hecho de relacionar el saber que se desea enseñar con los conocimientos personales de los estudiantes hace que ese saber cobre sentido para los estudiantes, quienes pueden utilizar sus experiencias personales para ejemplificar ese saber.

#### **1.4.3. Devolución**

La estrategia de enseñanza propuesta por la TSD consiste entonces en preparar y hacer funcionar una situación a-didáctica y recuperar el conocimiento que construyen los estudiantes en la interacción con el medio para exponer el saber. El profesor tiene entonces un rol protagónico en la preparación de la situación a-didáctica (diseño del problema y del medio) y durante el proceso de institucionalización, pero tiene un rol limitado durante la situación a-didáctica. Esto no significa que el profesor esté ausente durante la situación a-didáctica; por el contrario, debe vigilar el proceso de interacción del sujeto con el medio para poder garantizar que se produzca el aprendizaje por adaptación. Pero sus intervenciones en el proceso de interacción podrían interrumpir los ciclos de interacción y en particular hacer inútil o innecesaria la validación, con lo cual se impediría un aprendizaje por adaptación.

El profesor debe evitar que sus intervenciones interrumpan el ciclo de interacción del sujeto con el medio, y por lo tanto debe abstenerse de: emitir juicios sobre el trabajo del alumno (esto está bien, esto está mal), que hacen innecesaria la validación, y en general de transmitir cualquier información al estudiante que lo conduzca a tomar decisiones basadas en la autoridad del profesor. Al proceso de

acompañamiento de la situación a-didáctica por parte del profesor se le denomina Proceso de devolución.

Como la meta del proceso de devolución es garantizar el aprendizaje por adaptación, y el elemento fundamental de ese aprendizaje por adaptación es la validación por parte del estudiante, podemos considerar la devolución y la validación como dos procesos paralelos, que corresponden al profesor y al estudiante respectivamente.

En nuestro proyecto no desarrollamos actividades de enseñanza propiamente, sino actividades de matemática recreativa, en las que se proponen a los estudiantes problemas que necesitan el aprendizaje o la utilización de estrategias matemáticas.

Siguiendo una idea de Margolinas (2009, Cap. 4), proponemos a continuación un análisis a-didáctico de la actividad de resolución de problemas, para identificar los elementos decisivos del aprendizaje por adaptación, basados en los dos procesos paralelos de validación y de devolución.

#### **1.4.3.1. El Proceso de validación**

Para Margolinas (2009), el proceso de validación se refiere a todos los elementos de interacción del sujeto con el medio que conducen a la posibilidad de la validación.

Proponemos los siguientes elementos:

- ✓ *Aceptar el problema.* El estudiante acepta la responsabilidad asignada por el profesor de resolver el problema.
- ✓ *Comprender el problema.* El estudiante lee, analiza e interpreta los requerimientos del problema.
- ✓ *Emplear una estrategia de solución.* Después de aceptar y comprender el problema, el estudiante pone en marcha una estrategia que lo ayude a llegar a

la solución del problema propuesto. Esta estrategia no puede reducirse a un proceso de azar o de ensayo y error.

- ✓ *Controlar los procesos intermedios.* Se refiere al control de los procedimientos matemáticos (algoritmos de cálculo por ejemplo) que debe realizar el estudiante como parte de la estrategia que decidió emplear. Es decir, buscar y corregir errores de procedimiento.
- ✓ *Validar la solución del problema.* El estudiante decide si la estrategia que llevó a cabo para solucionar el problema fue acertada o no, y así mismo la solución del problema.

#### **1.4.3.2. El proceso de devolución**

Para Margolinas (2009), el proceso de devolución se refiere a la forma como el profesor interviene en la interacción del estudiante con el medio con el fin de garantizar la posibilidad de la validación.

A esas intervenciones las llamaremos *Actos de Devolución*, que podemos clasificar en los siguientes tipos:

- ✓ *Hacer aceptar el problema.* El profesor le da al estudiante la responsabilidad de resolver el problema; es decir, que el estudiante sienta que tomar y resolver el problema es su deber y no es lícito que espere que el profesor o un compañero le muestren la solución.
- ✓ *Hacer comprender el problema.* El profesor brinda los medios por los cuales el estudiante podrá comprender el problema; es decir, le brinda la información necesaria y las condiciones de la actividad para que pueda llegar a resolverla. Si en cualquier momento de la resolución el profesor considera que el estudiante no ha comprendido el problema, le solicita revisar esa información.
- ✓ *Solicitar una estrategia de solución.* El profesor observa el comportamiento matemático del estudiante, y si considera que se limita a dar respuestas al azar le solicita justificar de manera razonada sus acciones.

- ✓ *Hacer controlar los procesos intermedios.* El profesor le pide al estudiante que controle los pasos que debe seguir para llegar a la solución del problema según la estrategia que haya decidido llevar a cabo.
- ✓ *Responder a una solicitud de ayuda del estudiante:* este acto de devolución es el más complejo, pues se trata de brindar ayuda sin interrumpir el proceso de validación. El profesor debe responder a la solicitud del estudiante para evitar que abandone el problema, pero la ayuda ofrecida debe elegirse cuidadosamente para evitar revelar la solución del mismo, e incitarlo a continuar trabajando.
- ✓ *Solicitar la validación.* El profesor le pide al estudiante que decida si la solución que planteó es válida o no, y si es el caso corregirla. Es decir, el estudiante debe explicar con sus palabras cual fue la forma en que solucionó el problema y decidir si está bien o mal, de acuerdo a su criterio.

Es importante resaltar que estos actos de devolución pueden llevarse a cabo mediante actos concretos como hablar con el estudiante, plantearle preguntas, etc., pero también mediante abstención de acciones: no emitir juicios sobre el trabajo del estudiante ('esto está bien', 'esto está mal'), no comunicar al estudiante la solución del problema ni las estrategias que conducen a ella, no responder a las solicitudes de los estudiantes que buscan evitar un proceso de reflexión para resolver el problema ("¿así voy bien?", "deme una pista"). Además, los actos de devolución enumerados no son necesariamente secuenciales; pueden ser necesarios en cualquier momento de la resolución del problema por parte del estudiante y están interrelacionados entre sí. Por ejemplo, al intervenir para hacer controlar los procesos intermedios, el profesor puede identificar fallas en la comprensión del problema y decidir reenviar a los estudiantes a la lectura del enunciado.

Si los Procesos de validación y de devolución se desarrollan de manera adecuada, el estudiante estará en capacidad de controlar sus procedimientos o estrategias y decidir si son adecuadas o no, y si el problema fue resuelto o no.

En la práctica normal de enseñanza, durante el proceso de resolución de problemas, los profesores en general buscan por una parte evitar que los estudiantes se equivoquen y por otra lograr que encuentren una solución. Estas dos preocupaciones conducen a intervenciones de su parte que interrumpen el proceso de validación, y por lo tanto las consideramos inadecuadas. Por ejemplo, si el profesor identifica un error de procedimiento y se lo señala al estudiante, este intentará corregirlo, pero no por haberlo identificado él mismo. Si el profesor emite un juicio (positivo o negativo) sobre el trabajo del estudiante, hace innecesaria la validación por parte del estudiante. Cuando el profesor sugiere una estrategia de solución, ante un bloqueo por parte del estudiante, también se impide el proceso de validación.

#### **1.4.4. Empoderamiento y la Teoría de Situaciones**

La Teoría de las Situaciones Didácticas busca que el estudiante esté en capacidad de decidir qué estrategia de solución utilizar y como controlarla para poder evaluar la solución del problema y estas características implican la autonomía del estudiante. Por lo tanto podemos afirmar que la Teoría de las Situaciones Didácticas promueve como valor *la autonomía* en el estudiante y de esta manera busca desarrollar el empoderamiento matemático. Por otra parte, gracias al análisis de la interacción y la identificación de los elementos que promueven esta autonomía, es una herramienta teórica para analizar los *actos de devolución* que promueven el empoderamiento matemático.

Así pues, el empoderamiento matemático propone de manera explícita los valores de la autonomía y la equidad, y la Teoría de las Situaciones Didácticas nos sirve para analizar los aspectos de la práctica docente que promueven o impiden el desarrollo de esos valores.

En conclusión, el subgrupo Semillero Matemático y Matemática Recreativa, proponen el Empoderamiento Matemático de los estudiantes mediante el desarrollo de actividades de resolución de problemas de Calendario Matemático, Matemática recreativa y utilizando software de matemáticas. Para lograr dicho

empoderamiento, los profesores deberían llevar a cabo actos de devolución adecuados que conduzcan a la autonomía de los estudiantes.

### 1.5. Automatización de Actos de Devolución con Cabri LM

El software Cabri LM comprende todas las funcionalidades de la geometría dinámica, junto con herramientas de trabajo aritmético y la posibilidad de programar retroacciones específicas a las acciones del usuario. Podemos describir Cabri LM como un editor de objetos matemáticos inteligentes<sup>4</sup>, junto con un editor de retroacciones y elementos que permiten la toma de decisiones. Estas características hacen posible que el sistema evalúe las acciones (respuestas) de los estudiantes, y proponga retroacciones diferentes según esa evaluación. En otras palabras, Cabri LM permite una representación informática de la actividad del estudiante y se pueden programar los actos de devolución de acuerdo con esas representaciones.

A continuación presentamos un ejemplo de objeto inteligente (el contenedor) y un ejemplo de retroacción programada con un elemento de decisión (booleano). Un contenedor es un rectángulo al cual se le pueden asociar otros objetos, de manera que cuando esos objetos asociados están dentro de él, puede contarlos. Además, puede rechazar de su interior los objetos que no le están asociados.

1. **Objeto Matemático:** Contenedor. En la *figura 4*, se pueden apreciar dos contenedores en la parte inferior de la hoja. Al contenedor de la derecha se le han asociado los trapecios que están dibujados en la parte superior y al de la izquierda las demás figuras. Si un estudiante arrastra un trapecio y lo suelta dentro del contenedor de la izquierda, el trapecio volverá a su posición original. Lo mismo sucederá si el estudiante arrastra un 'no-trapecio' y lo suelta dentro del contenedor de la derecha. Además, el software puede saber en todo momento cuantos trapecios hay dentro del contenedor de la derecha, y cuántos no-trapecios en el de la izquierda. Este

---

<sup>4</sup>objetos que comprenden un comportamiento matemático ya programado por el software.

dato puede usarse para programar una retroacción como lo explicamos a continuación.

- 2. Booleano:** Un booleano es una evaluación de una expresión aritmética que contiene '=', '<', 'y', 'o', 'no'. El software permite construir esas expresiones asociando esos signos a valores aritméticos calculados en la pantalla, y calcula automáticamente su valor: Falso o Verdadero. Luego se asocian acciones determinadas que se ejecutarán cuando la expresión cambie de Falso a Verdadero o viceversa. Continuando con el ejemplo anterior, cada contenedor sabe cuántas figuras de las que tiene asociadas están dentro de él. Así que pueden escribirse expresiones equivalentes a:  $\text{cardinalContenedor1}=2$ ,  $\text{cardinalContenedor2}=3$ . Inicialmente esos dos booleanos tendrán valor Falso, pues los contenedores están vacíos. Cuando el estudiante haya introducido todos los no-trapecios en el contenedor 1, el booleano cambiará de Falso a Verdadero, y a ese cambio se le asocia la acción de mostrar un 'visto bueno' y una 'carita feliz' (véase figura 5). Esa misma acción se asocia al cambio a Verdadero del segundo booleano.

Figura 4 Actividad de Identificación de Figuras

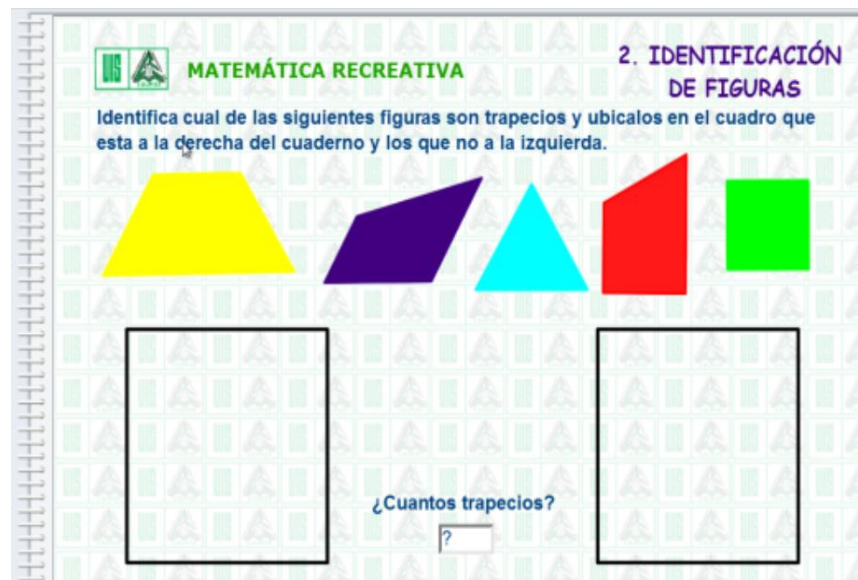
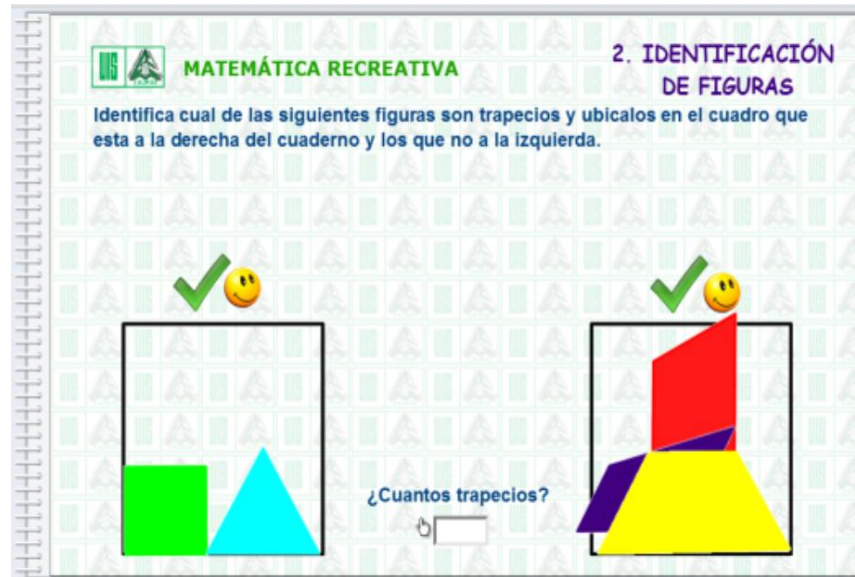


Figura 5 Descripción Booleano



Por otra parte, las actividades diseñadas con CabriLM constituirán el medio con el cual los estudiantes interactuarán para resolver los problemas propuestos. Por lo tanto, en el análisis de la interacción tendremos especialmente en cuenta las acciones que son posibles o imposibles, y las correspondientes retroacciones.

Los actos de devolución pueden programarse como retroacciones ante determinadas acciones del estudiante, utilizando los objetos inteligentes, los booleanos y las acciones. Por ejemplo, uno de los actos de devolución es hacer controlar los procesos intermedios en la solución de un problema. Como el software puede controlar el número de errores cometidos en la actividad, puede programarse una retroacción que consiste en mostrar una frase que le solicita al estudiante revisar sus operaciones (en el caso de una actividad aritmética) cuando ya ha acumulado más de dos errores.

Los actos de devolución automatizados serán entonces retroacciones del software que no se limitan a reaccionar a las acciones de los estudiantes, sino que proponen acciones nuevas para direccionar la interacción.



## 1.6 Matemática Recreativa

González, Espinoza, Monge (2003) denominan “Matemática Recreativa” a un campo de estudio de la matemática que no tiene tanto que ver con la idea tradicional que la mayoría de las personas tienen respecto a esta ciencia (formal, fría, y alejada de la realidad tangible del alumnado), sino que más bien encierra ideas de juegos y de retos mentales diferentes a quienes la enfrentan.

Por “Matemática Recreativa” se entiende una serie de actividades que, más que trabajar con la formulación de números y cálculos complejos al estilo de las clases tradicionales, promueven el ingenio a través de juegos, adivinanzas, reflexiones y otras más, cercanas a la actividad humana, y que presentan retos que llaman al cuestionamiento a las personas, expertos matemáticos o no, esto sin dejar de lado la creatividad, que según Nickerson (1998, p. 110). “... es el conjunto de capacidades y disposiciones que hacen que una persona produzca con frecuencia productos creativos”.

Algunos juegos y divertimentos tradicionales de la Matemática Recreativa son el Sudoku, el cuadrado mágico, las Criptoaritmética, el cubo de Rubik, el juego de Cram, el Tangram, el origami, 142857, el juego del oso, el timbiriche o juego de los cuadraditos, las poliformas, Pentominó, Cubo soma, Torres de Hanói, Acertijos, Juegos de lógica, El problema del trigo y el tablero de ajedrez,

Entre los personajes más destacados de la matemática recreativa tenemos a Martín Gardner, Yakov Perelman y Samuel Loyd.

En Colombia se destaca el grupo Colombia Aprendiendo que inicio en el año 1997 con un proyecto dirigido a toda la comunidad educativa y cuyo objetivo es la creación de un ambiente rico en matemáticas que contribuye a desmoronar el mito de la matemática escolar como materia “difícil”. En la actualidad más de 120 instituciones de diferentes partes del país se encuentran vinculadas a este

proyecto, y en el departamento de Santander es dirigido por el subgrupo Matemática Recreativa de la Universidad Industrial de Santander. Este dio el impulso para uno de nuestros objetivos: Adaptar actividades de Matemática Recreativa buscando automatizar los actos de devolución en el software Cabri LM, de allí se tomaron las actividades de Criptoaritmética y Cuadrados Mágicos, como las más apropiadas para ser adaptadas al software Cabri LM.

### **1.7. Criptoaritmética**

La Criptoaritmética es un arte que desempeñó un importante papel en el desenvolvimiento de la Historia. La Criptoaritmética no es más que un juego. No se sabe en qué época se inventó; pero los aficionados a las variedades comenzaron a interesarse por ellas en el Primer Congreso Internacional de Recreaciones Matemáticas, que se reunió en Bruselas en 1935.

Cripto viene del griego "criptus" que quiere decir oculto, escondido. La Criptoaritmética consiste en remplazar las cifras por letras en la transcripción de una operación de aritmética clásica, de una ecuación. El problema consiste en hallar las cifras que están "bajo las letras". Para complicar las cosas, en ciertos sitios se puede marcar simplemente el lugar de una cifra con un punto o un asterisco. En el caso extremo, sólo quedan asteriscos.

Es fácil ver que la Criptoaritmética es un procedimiento de cifrar por sustitución y que la clave es una regla matemática. Los enunciados Criptoaritmética son, a veces, seductores. Sus soluciones no presentan dificultades matemáticas; pero en cambio exigen numerosísimas hipótesis y, en consecuencia, cálculos largos y trabajosos que implican grandes riesgos de confusión.

Algunas de las actividades de Criptoaritmética que se automatizarán son de nuestra autoría, y otras fueron tomadas del grupo Colombia Aprendiendo de la ciudad de Bogotá.

## **1.8. Cuadrados Mágicos**

Para Acuña, Arellano, Barahona (2010), es interesante y entretenido tema que ha atraído la atención de muchos matemáticos y aficionados a la matemática, ha sido la construcción de cuadrados mágicos. Esta antigua entretención que data de más de 3000 años, se ha constituido en un pasatiempo y un desafío al ingenio y a la paciencia.

Los primeros cuadrados que fueron considerados mágicos, eran arreglos de los primeros  $n^2$  números naturales, sin repetir ninguno de estos números, dispuestos en las  $n^2$  casillas de un cuadrado de  $n$  filas y  $n$  columnas de tal manera que los números de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales suman el mismo número. El nombre de mágico se les atribuye debido a las entrañas e interesantes propiedades que poseen estos arreglos.

Las actividades de Cuadrados Mágicos que se automatizarán serán cuadrados mágicos de 3 filas y 3 columnas con número enteros, tomados de los Calendarios Matemáticos y Revistas de primaria de Colombia Aprendiendo.

## **1.9. Problema y Objetivos**

Uno de los objetivos de este proyecto es automatizar los actos de devolución en distintas actividades de solución de problemas. Los actos de devolución automatizados serán retroacciones del software que no se limitan a reaccionar a las acciones de los estudiantes, sino que proponen acciones nuevas para direccionar la interacción.

Basados en los referentes teóricos expuestos, podemos entonces formular el siguiente problema, que a través del trabajo realizado en los subgrupos de Semillero Matemático y Matemática Recreativa con estudiantes de quinto grado se ha identificado como lo que podría ser una innovación tecnológica y revolucionaria para el trabajo con actividades de Matemática Recreativa:

¿Cómo utilizar CabriLM para automatizar actos de devolución en actividades de Matemática Recreativa y Calendario Matemático, de manera que se favorezca el Empoderamiento Matemático de estudiantes de quinto grado?

Para dar respuesta a este problema, planteamos los siguientes objetivos:

### **1.9.1. Objetivo General**

Automatizar<sup>5</sup> actos de devolución en actividades de matemática recreativa utilizando el software Cabri LM y evaluar sus efectos en estudiantes de básica primaria.

#### **1.9.1.1. Objetivos Específicos**

- ✓ Definir los actos de devolución que pueden ser necesarios durante una situación de resolución de problemas de Cuadrados Mágicos y Criptoaritmética.
- ✓ Adaptar actividades de matemática recreativa buscando automatizar los actos de devolución con el software Cabri LM.
- ✓ Aplicar las actividades diseñadas en el software Cabri LM con un grupo de estudiantes de básica primaria.
- ✓ Analizar los actos de devolución automatizados en el aprendizaje de los estudiantes.

---

<sup>5</sup>Se define con la acción de programar los actos de devolución en el software Cabri LM para que se produzcan de manera automática.

## 2. Metodología

La metodología utilizada en este proyecto es la Ingeniería Didáctica, se desarrolla en tres fases que hemos denominado: Fase de diseño, Fase de Desarrollo y Fase de Conclusión. Estas fases inician con nuestro estudio sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Empoderamiento Matemático. A continuación describimos las actividades desarrolladas en cada una de las fases de nuestro trabajo

### ***Fase de Diseño:***

- ***Diseño y programación de los actos de devolución:*** Teniendo en cuenta la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Empoderamiento matemático, diseñamos dos actividades de Matemática Recreativa: Cuadrados Mágicos y Criptoaritmética, programadas con cinco actos de devolución los cuales esperamos que los estudiantes logren realizar ante una situación problema, argumentando sus acciones con procesos lógicos o matemáticos.
- ***Análisis a priori:*** Para cada taller realizamos un análisis a priori, donde intentamos predecir algunas posibles: acciones ejecutadas por los estudiantes, retroacciones causadas por el “medio” y señales de Empoderamiento Matemático que puedan darse durante el desarrollo del taller.
- ***Papel del profesor:*** Teniendo en cuenta que el estudiante en el desarrollo del taller logra un aprendizaje por adaptación, es importante reflexionar sobre las intervenciones adecuadas del profesor que para nosotros serán los actos de devolución programados en el software Cabri LM.

### ***Fase de Desarrollo:*** Aplicación de los talleres.

La situación fue desarrollada con 6 estudiantes de quinto grado de la institución educativa las Américas en edades comprendidas entre los 9 -10 años. Con ellos se desarrollaron las actividades diseñadas. La actividad se realizó en un

laboratorio de matemáticas, los estudiantes se organizaron por parejas, a cada pareja le correspondió un equipo dotado con el programa Cabri LM player y una carpeta de archivos electrónicos que contenía los talleres de Cuadrados Mágicos y Criptoaritmética. La intención con el desarrollo de esta aplicación, fue la de comprobar el funcionamiento de los actos de devolución programados y el Empoderamiento Matemático de cada estudiante.

**Fase de Conclusión:** Esta fase está conformada por tres aspectos, que a continuación describiremos:

- **Análisis a-posteriori:** Para cada actividad se ha realizado un análisis a-posteriori de la primera actividad de cada taller, donde se muestran las acciones ejecutadas por el estudiante, retroacciones causadas por el “medio” y señales de Empoderamiento Matemático, que se produjeron durante el desarrollo del taller. Se presentan aquí, algunas evidencias visuales de lo acontecido durante el desarrollo del taller con los estudiantes de quinto grado.

### 3. Análisis A Priori

Este capítulo responderá el objetivo principal del proyecto y para eso se presentará el análisis a priori de cada uno de los talleres. Se realizará el análisis de dos de los talleres diseñados: Cuadrado Mágico y Criptoaritmética.

En la programación de los talleres se tuvo en cuenta únicamente los siguientes actos de devolución:

- *Hacer comprender el problema:* Verificar que el estudiante lea, analice e intérprete los requerimientos del problema.
- *Solicitar una estrategia de solución:* Impedir que el estudiante busque una solución al azar.
- *Hacer controlar los procesos intermedios:* Verificar que el estudiante revise sus procedimientos en busca de errores y los corrija.
- *Responder a una solicitud de ayuda:* Proporcionar ayuda al estudiante, evitando interrumpir el proceso de validación.

Además, se tuvo en cuenta un acto de devolución por abstención que se define como la acción de evitar que el estudiante obtenga información que le permita encontrar la solución o sus errores sin realizar un proceso de razonamiento matemático.

Cada taller comprende una introducción, un primer ejercicio y una serie de ejercicios de dificultad variable. CabriLM utiliza la metáfora del cuaderno. Es decir, el estudiante visualiza páginas de cuaderno que puede pasar adelante o atrás. Para cada taller precisaremos el número de páginas que se presentan al estudiante (sin contar las páginas de ayuda o pistas). Además, dado que los actos de devolución son idénticos para todos los ejercicios, analizaremos únicamente el primer ejercicio de cada taller.

### 3.1. Análisis A-priori Taller de Cuadrados Mágicos

A continuación se describirá la programación para cada uno de los actos de devolución, con los cuales se espera lograr que los estudiantes reflexionen sobre sus acciones y que adquieran y desarrollen habilidades de lectura, escritura e interpretación del lenguaje matemático, acompañado de fluidez oral y escrita.

#### 3.1.1. Descripción del Medio

Este taller comprende 13 páginas. En las tres primeras se expone información sobre los cuadrados mágicos y las condiciones para solucionarlos. De la página 4 a la página 13 se presentan actividades en las que los estudiantes deben solucionar el cuadrado mágico. Las actividades varían dependiendo del valor de la suma mágica, no siempre los números a utilizar son consecutivos; además se presentan dos actividades con números enteros negativos los cuales funcionan de la misma forma.

Figura 6 Historia Taller Cuadrados Mágicos

Universidad Industrial de Santander

# Cuadrados Mágicos

¿Cuántas veces miraste un calendario?  
Supongo que muchísimas. Pero quizá nunca hayas reparado en algo muy especial.

Observa los sectores que tienen igual número de casillas por lado. Si sumamos los valores de las diagonales, ambas darán el mismo resultado.

DICIEMBRE						
Dom	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

¡El calendario escondía sus secretos!, ¿no?  
Elige los sectores que gustes y compruébalo.

A pesar de esta particularidad, un calendario no es tan maravilloso como un cuadrado mágico. ¿No sabes qué es?



Figura 7 Condiciones Taller Cuadrados Mágicos

Universidad Industrial de Santander

# Cuadrados Mágicos

Un **cuadrado mágico** es una cuadrícula de  $3 \times 3$ , o de  $4 \times 4$ , o de  $5 \times 5$ , etc., en la que se acomodan ciertos números que **cumplen** que la **suma** de cualquier renglón, la **suma** de cualquier columna y la **suma** de cualquiera de las dos diagonales es siempre la misma.

El **orden** de un cuadrado mágico es el número de renglones o el número de columnas que tiene. Así un cuadrado de  $3 \times 3$  se dice que es de orden **3**.

El valor que debe dar la suma en cada renglón, columna, diagonal se le llama **SUMA MÁGICA**.




Figura 8 Curiosidades Taller Cuadrados Mágicos


Universidad Industrial de Santander

# Cuadrados Mágicos

En un libro de **Henry E. Dudeney** encontramos este cuadrado mágico tan original que no podemos dejar de compartirlo.

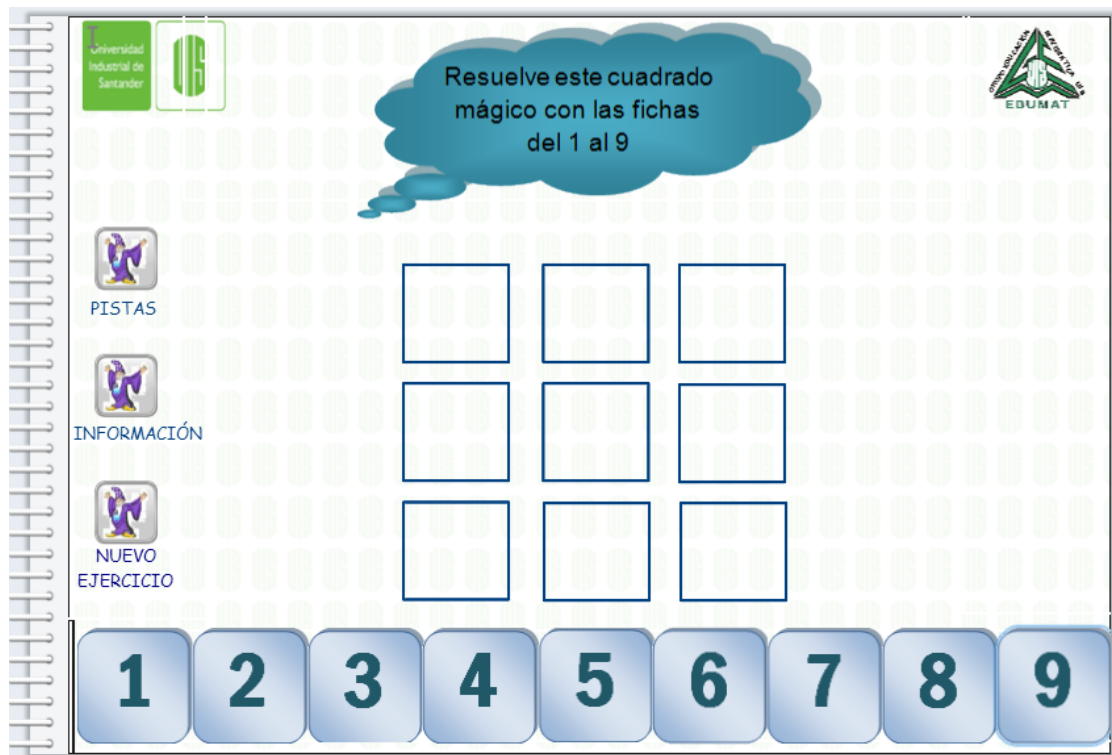
Como verás, la suma secreta es 179. Pero hay algo notable y simpático: si haces girar el cuadrado y lo colocas "cabeza abajo", el cuadrado mágico no varía y puede leerse igual!

11	77	62	29
69	22	17	71
27	61	79	12
72	19	21	67



En cada una de las páginas de actividades aparece una consigna con el planteamiento del problema ubicada en la parte superior central de la página; en la parte inferior de la página encontrará nueve fichas con los números que servirán para llenar el cuadrado, que se pueden arrastrar para soltarlos en las casillas; en el centro de la página encontrará nueve casillas organizadas en un arreglo de 3x3, donde se debe ubicar cada ficha en una casilla; si se intenta colocar una segunda ficha en una casilla, el software reaccionará regresando la segunda al lugar inicial (ver figura N°5).

Figura 9 Primera actividad Taller Cuadrados Mágicos



Por último encontrará en la parte izquierda de la página tres botones con los siguientes nombres: *PISTAS*, *INFORMACIÓN* y *NUEVO EJERCICIO*.

### 3.1.2. Programación de los Actos de Devolución

- ✓ **Hacer comprender el problema:** Al comienzo del taller se presentan dos páginas con la historia y curiosidades de los cuadrados mágicos y una página en la cual describe las condiciones que debe cumplir la solución de

un cuadrado mágico. Para evitar que el estudiante avance sin leer, el botón para pasar a la página siguiente sólo aparece cinco segundos después de abrir la página. Durante todo el taller el estudiante tendrá la oportunidad de acceder a la información en el momento que la necesite presionando el botón “*información*”, ya sea porque él lo decide o porque el software se lo sugiere<sup>6</sup>.

Al comenzar la actividad esperamos que el estudiante abra la página y en vista de que no pasa nada, solo tenga la opción de leer el texto presentado. Al terminar verá el botón para pasar a la página siguiente.

El estudiante podrá regresar a las páginas de información en todo momento para lograr la comprensión del problema. En particular, en los actos de devolución dos y tres, el software hará la sugerencia de volver a leer la información, y se espera que el alumno lo haga.

- ✓ **Solicitar una estrategia de solución:** Este acto de devolución se hace necesario cuando el estudiante no muestra una estrategia de solución clara, es decir intenta resolver el problema al azar. Para determinar, cuando un estudiante está respondiendo al azar utilizamos el número de fichas mal colocadas de la siguiente manera:
  - Cuando el estudiante haya colocado seis fichas que no cumplen con la suma mágica en ninguna fila, columna o diagonal, aparece: –“*¡Humm, tu estrategia parece no funcionar!*” *Utiliza las pistas o la información-* .
  - Cuando el estudiante haya colocado siete fichas que no cumplen con la suma mágica en ninguna fila, columna o diagonal, aparece: –“*¡Humm las cosas van muy mal, busca otra estrategia!*”- .
  - Si el estudiante coloca siete fichas y tiene solo una suma bien y pone una ficha más sin corregir por lo menos una de las sumas, aparece:–“*¡Humm,*

---

<sup>6</sup> En especial, si el software determina que el estudiante está llenando las casillas sin tener una estrategia matemática clara, le solicitará que lea la información o las pistas (Ver acto de devolución 2).

*tu estrategia parece no funcionar!” Utiliza las pistas o la información. Si pones una ficha más sin revisar los resultados, la actividad se reiniciará”-*

- Si el estudiante coloca una ficha más sin corregir uno de los errores, la actividad se reinicia.

Se piensa que los estudiantes podrán aceptar o no las dos primeras advertencias. Es decir, podrán decidir revisar la información y su estrategia de solución, o continuar llenando las casillas al azar. En cambio, ante el reinicio de la actividad deberán replantearse la situación o solicitar una explicación al profesor.

✓ **Hacer Controlar los procesos intermedios.** Este acto de devolución es necesario cuando el estudiante está aplicando una estrategia diferente al azar, pero su procedimiento no es correcto. En este caso, pensamos que el estudiante busca producir una suma mágica incorrecta, o busca la suma mágica correcta pero tiene errores operacionales. Al igual que en el segundo acto de devolución, se utilizarán el número de errores para diagnosticar esta situación de la siguiente manera:

- Si el estudiante ha ubicado siete o más fichas y tiene tres o cuatro sumas mágicas correctas, el software le mostrará el mensaje – *“Vas mejorando, pero estás cometiendo algunos errores, revisa algunas sumas, recuerda las condiciones de la actividad”-*,
- Si tiene cinco o seis sumas mágicas bien, el software le mostrará el siguiente mensaje - *¡Vamos, ánimo, ya casi! Solo revisa algunas sumas-*,
- Cuando tenga siete sumas correctas el software le mostrará el siguiente mensaje -*¡Qué bien te falta poco!*

Esperamos que los estudiantes tengan dos tipos de comportamiento: hacer caso omiso de los mensajes de advertencia que el software les muestra, o buscar los errores.

✓ **Responder a una solicitud de ayuda.** Durante toda la actividad está disponible el botón Pistas, que lo llevará a la ayuda disponible para el

problema. Al ser oprimido el botón Pistas se le mostrará un mensaje al estudiante advirtiéndole que el uso de las pistas tiene un costo; el estudiante puede en este momento renunciar a la ayuda; la decisión de ponerle un costo a las ayudas se tomo para evitar que los estudiantes intentarán rendirse ante un primer error o ante la no comprensión del problema. Consideramos dos tipos de ayuda: 1) cómo encontrar la suma mágica y2) identificar errores. Cada vez que decidan utilizar la ayuda, se les preguntará si saben el valor de la suma mágica. Si responden negativamente aparecerá la ayuda 1); si responden positivamente, aparece la ayuda 2).

- 1) Cómo encontrar la suma mágica: Aparece una página en la que se le explica que debe organizar los dígitos en orden ascendente en las casillas del Cuadrado Mágico y la suma de los números de una de las diagonales es la suma mágica.

Esperamos que los estudiantes utilicen esta ayuda para encontrar el valor de la suma mágica y resolver los distintos cuadrados mágicos.

- 2) Identificar los errores. Aparece una página que le indicará en qué fila o en qué columna hay un error de suma. Una vez regrese a la pantalla de la actividad encontrará una flecha de color verde que le indicará la fila o la columna donde está el error.

Esperamos que los estudiantes al utilizar esta ayuda puedan identificar con más precisión los errores que han cometido en la solución del cuadrado mágico y los corrijan.

- ✓ **Abstención,** este acto de devolución se hace necesario cuando el estudiante intenta sacarle información al software para solucionar la actividad presentada (el cuadrado mágico); en este caso el software no le mostrará la información que él requiere. En particular, pensamos que los estudiantes pueden tratar de utilizar los mensajes de error para identificar

los errores sin realizar razonamientos matemáticos. Para evitar que esta estrategia conduzca al éxito, los mensajes de error sólo aparecerán cuando se detecten dos o más errores.

### 3.2. Análisis A -priori Taller de Criptoaritmética

A continuación describiremos la programación para cada uno de los actos de devolución, con los cuales se espera lograr que los estudiantes reflexionen sobre sus acciones y que adquieran y desarrollen habilidades de lectura, escritura e interpretación del lenguaje matemático, acompañado de fluidez oral y escrita.

#### 3.2.1. Descripción del Medio

Este taller comprende 13 páginas. En las tres primeras se expone información sobre la Criptoaritmética y las condiciones para solucionarlos. En la cuarta página se presenta una primera actividad en el que los estudiantes deben llenar la Criptoaritmética siguiendo las condiciones establecidas. En las páginas 5 a 13 se presentan diferentes Actividades que varían de acuerdo al número de soluciones posibles.

Figura 10 Historia Taller Criptoaritmética





Figura 11 Ejemplo Histórico Taller Criptoaritmética

**MATEMÁTICA RECREATIVA**

Un derrochador estudiante inglés le envía a su padre un telegrama en el que discretamente le comunica cuánto dinero necesita. El telegrama dice:

$$\begin{array}{r} \text{S END} \\ + \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

No se sabe si el padre le envió o no el dinero solicitado, pero... ¿de cuánto se trataba?

Se trata aquí de una adición en la cual los dígitos han sido reemplazados por letras, correspondiendo a letras iguales, dígitos iguales y a letras diferentes, dígitos diferentes.

El objetivo es la reconstrucción completa de la adición original, realizando un análisis lógico y detallado, en el que se utilizan propiedades de los números al ser adicionados.

Figura 12 Condiciones Taller Criptoaritmética

**MATEMÁTICA RECREATIVA**

# Reglas.

1. Realizar la operación indicada de forma correcta.
2. A cada letra diferente, corresponde un valor diferente.
3. A letras iguales les corresponden valores iguales.
4. La primera cifra de cada número no puede ser cero.
5. Los valores que se utilizan son los números dígitos.

En cada una de las páginas de las actividades aparece lo que se muestra en la figura 13:

Figura 13 Primera actividad Taller Criptoaritmética



Un mensaje con el planteamiento del problema ubicado en la parte superior central de la página; en la parte inferior central de la página encontrará veinte fichas con los dígitos del cero al nueve cada una con dos fichas, que se pueden arrastrar para soltarlas en las casillas; en el centro de la página encontrará casillas organizadas en un arreglo de suma, donde se debe ubicar cada ficha en una casilla; si se intenta colocar una segunda ficha en una casilla, el software reaccionará regresando la segunda al lugar inicial.

Por último encontrará en la parte derecha de la página cuatro botones con los siguientes nombres *REINICIAR*, *INFORMACIÓN*, *PISTAS* y *SALIR DE LA ACTIVIDAD*. Además encontrara en la parte izquierda central unos botones del cero al nueve los cuales llamamos *DIGITOS UTILIZADOS*, donde el estudiante podrá marcar que dígitos ha utilizado, para facilitar la resolución de la Criptoaritmética.



### 3.2.2. Programación de los Actos de Devolución

- ✓ **Hacer comprender el problema:** Al comienzo del taller se presentan dos páginas con la historia y curiosidades de la Criptoaritmética y una página que describe las condiciones que debe cumplir para llegar a la solución de una Criptoaritmética. Para evitar que el estudiante avance sin leer, el botón para pasar a la página siguiente sólo aparece cinco segundos después de abrir la página. Durante todo el taller tendrá la oportunidad de acceder a la información en el momento que la necesite presionando el botón “*Información*”, ya sea porque él lo decide o porque el software se lo sugiere.

Esperamos que los estudiantes lean la información y las condiciones del taller antes de pasar a la primera actividad propuesta.

- ✓ **Solicitar una estrategia de solución:** *Esperamos que los estudiantes estén bien familiarizados con el algoritmo de la suma, creemos que intentarán llenar las casillas haciendo referencia a dicho algoritmo, y no intentarán llenarlas al azar. Por eso no programamos este acto de devolución.*
- ✓ **Hacer Controlar los procesos intermedios:** Este acto de devolución es necesario cuando el estudiante está cometiendo errores de procedimiento. En este caso, pensamos que el estudiante conoce las condiciones y trata de cumplirlas, pero comete errores de suma. Si el estudiante ha ubicado fichas en las casillas cometiendo errores que no cumplen las condiciones del problema, el software reconocerá tres tipos de errores, mostrando los siguientes mensajes respectivamente:
  - **Error en la operación:** el software tomará como error en la operación, cuando al estar ubicadas dos fichas tales que se encuentran en la misma posición en el Sistema de Numeración Decimal (unidades, decenas, centenas y unidades de mil, etc.) la ficha que se pone en la misma posición como resultado es

incorrecta. Al cometer este tipo de error el software mostrará el aviso –“*Revisa algunas sumas, tienes aún errores*”-.

- **Error a letras iguales valores diferentes** El software tomará como error cuando el estudiante ha ubicado fichas de valores diferentes en casillas correspondientes a letras iguales. Al cometer este tipo de error el software mostrará el aviso –“*Revisa que las letras iguales tengan valores iguales*”-
- **Error a letras diferentes valores iguales.** El software tomará como error cuando el estudiante ha ubicado fichas de valores iguales en casillas correspondientes a letras diferentes. Al cometer este tipo de error el software mostrará el aviso –“*Revisa que las letras diferentes tengan valores diferentes*”-

El software sólo mostrará el o los avisos correspondientes, cuando el estudiante tenga dos errores o más, ya sean del mismo tipo o de diferente tipo. Esto para evitar que el estudiante logre sacarle información al software, así podremos contralar el acto de devolución por “abstinencia”

Esperamos que los estudiantes lean los mensajes mostrados por el software reflexionando sobre sus procedimientos y así corrijan sus errores para poder encontrar la solución de la actividad.

- ✓ **Responder a una solicitud de ayuda:** Durante toda la actividad está disponible el botón Pistas, que lo llevará a la ayuda disponible para la actividad. Al ser oprimido el botón Pistas le mostrará un mensaje al estudiante advirtiéndole que el uso de las pistas tiene un costo; el estudiante puede en este momento renunciar a la ayuda o utilizarla.

Consideramos tres tipos de pistas que se mostraran de acuerdo a los errores cometidos por los estudiantes: 1) Cuando hay errores de operación se indica la posición del error como en el siguiente ejemplo: “Verifica la suma de las unidades”, 2) cuando hay errores en los valores de las letras iguales o diferentes, se indica la

letra donde está el error; por ejemplo, “Las letras S deben tener el mismo valor”,  
3) cuando hay errores como a letras diferentes valores iguales, se indica la letra donde está el error; por ejemplo, “El valor de T se está repitiendo con el valor de otra letra”.

Esperamos que los estudiantes utilicen esta ayuda en caso que no ser capaces de encontrar los errores en la solución de la Criptoaritmética propuesta.

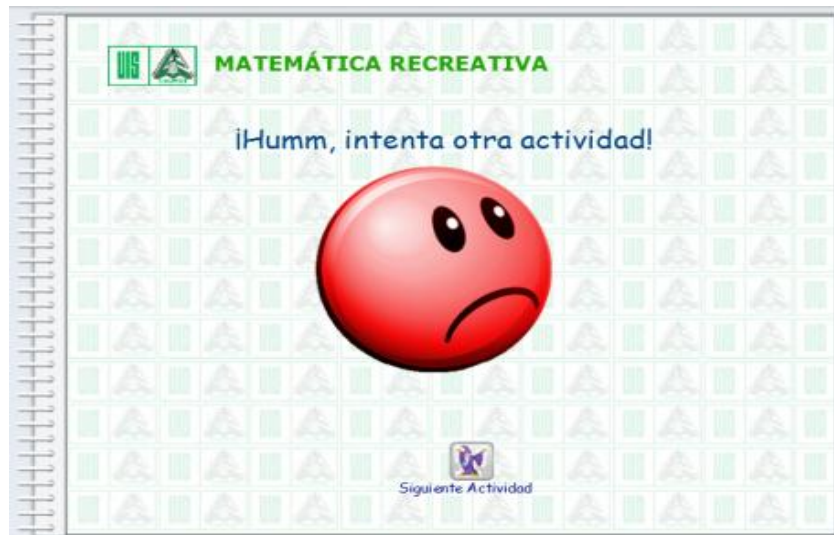
En cada taller de Criptoaritmética y Cuadrado Mágico, cuando el estudiante logre encontrar la solución de la actividad que está realizando, el software congelará el movimiento de las fichas y mostrará en la pantalla una carita feliz con el puntaje obtenido (véase Figura 14).

**Figura 14** Carita feliz Taller Criptoaritmética



En el caso contrario, si el estudiante no logra encontrar la solución de la actividad y agotó los 100 puntos utilizando las pistas que se le suministran, el software dará por terminada la actividad enviándolo a una página donde encontrará el aviso – “¡Humm, intenta otra actividad!”-, una carita triste que se moverá de izquierda a derecha y el botón SIGUIENTE ACTIVIDAD, que como su nombre lo indica lo llevará a una página donde encontrara otra actividad de Cuadrado Mágico o Criptoaritmética para resolver, según sea el taller. (Véase figura 15)

Figura 15 Carita Triste: Taller Criptoaritmética



## 4. Análisis A Posteriori

Para el análisis a-posteriori se utilizarán las siguientes convenciones:

- ✓ El texto que se encuentre entre paréntesis (), corresponde a las acciones que se observan en la pantalla.
- ✓ El texto que se encuentre entre comillas "", corresponde a las palabras de los estudiantes o del profesor según el caso.
- ✓ El texto que se encuentre en letra *Itálica* o *cursiva*, corresponde a los mensajes de información o advertencia leídos por los estudiantes.
- ✓ El texto entre guiones - - corresponde a comentarios del observador.

Identificaremos a los estudiantes que participaron en los talleres de la siguiente forma:

- Pareja1, conformada por el Sujeto A1 (SA1) y Sujeto B1 (SB1)
- Pareja2, conformada por el Sujeto A2 (SA2) y Sujeto B2 (SB2)
- Pareja3, conformada por el sujeto A3 (SA3) y Sujeto B3 (SB3)

De la misma manera, cuando se hable de profesor (P) se estará haciendo referencia a cualquiera de los profesores en formación Marisol Rueda Puentes y Ángel Miguel Niño Navas quienes en la aplicación de los talleres asumieron el rol de profesores.

En las transcripciones se utilizará la siguiente notación, [A.1.1.1.2; L.22], A.1.1.1.2 que significa Anexo 1.1.1.2 y L.5 línea 5.

Los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes de quinto grado, así como las transcripciones de los mismos se pueden ver en el DVD anexo.

### 4.1. Análisis A-posteriori Cuadrados Mágicos

En el análisis a posteriori presentaremos el trabajo realizado por los estudiantes, específicamente sus comportamientos ante las retroacciones del software, para cada acto de devolución, mostrando cómo fue empoderamiento matemático.

#### 4.1.1. Hacer comprender el problema

##### 4.1.1.1. Análisis de lo observado Pareja 1

El inicio del taller no se dio como se esperaba puesto que mientras el profesor estaba dando las indicaciones del trabajo en parejas, en la pantalla apareció la flecha (en la parte inferior derecha de color verde) para pasar a la siguiente página, provocando que los estudiantes no realizaran la lectura de forma inicial como se tenía previsto que lo hicieran. Así SA1 pasa rápidamente sin leer y comienza a resolver el problema al azar, es decir sin saber qué condiciones debe cumplir para solucionar el cuadrado mágico. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A1.1.1.]

Para iniciar el estudiante SA1 hace clic en el botón de información que lleva a la segunda página de historia. Posteriormente el otro compañero lee el enunciado como sigue:

SB1: (lee) “Un cuadrado mágico es una cuadrícula de 3 x 3, o de 4 x 4, o de 5 x 5, etc., en la que se acomodan ciertos números que cumplen que la suma de cualquier renglón, la suma de cualquier columna y la suma de cualquiera de las dos diagonales es siempre la misma. El orden de un cuadrado mágico es el número de renglones o el número de columnas que tiene. Así un cuadrado de 3 x 3 se dice que es de orden 3. El valor que debe dar la suma en cada renglón, columna, diagonal se le llama SUMA MÁGICA” [L:21]

SB1: “¡Ay por fin! Deje la historia, Deje la historia. (Lee) En un libro de Henry E. Dudeney encontramos este cuadrado mágico tan original que no podemos dejar de compartirlo. Como verás, la suma secreta es 179. Pero hay algo notable y simpático: si haces girar el cuadrado y lo colocas "cabeza abajo", ¡el cuadrado mágico no varía y puede leerse igual!, mire esto (pasa el mouse sobre la imagen del cuadrado que aparece en la parte inferior central de la pantalla, ver figura 3) ¿Puede leerse igual?” [L:23]

SB1: “¿Ahora qué toca hacer?” [L: 25]

SA1: “vamos mirando y pistas, vamos bien, hasta el momento vamos bien” (ubica la ficha N°1 en la primera fila primera columna y da clic al botón pistas donde le sale un mensaje que dice No has cometido errores. Continúa, seguidamente da clic en el botón regresar) [L:26]

SB1: “¡La suma secreta!, tiene que darnos una suma secreta” [L: 27]

Aunque SA1 le sugiere todo el tiempo hacer la lectura de la información para poder saber cómo solucionar el cuadrado mágico, SB1 la ignora y realiza acciones sin saber el objetivo del taller; por estas acciones se desencadena el acto de devolución “control de procesos intermedios” donde el software les muestra el siguiente mensaje *¡Qué bien! te falta poco*, al ver esto SB1 se preocupa y decide tomar el mouse para ir a la información a leer y enterarse de qué se trata la actividad de cuadrados mágicos. En este hecho identificamos que la estrategia de ocultar la flecha para pasar a la página siguiente al inicio del taller no funcionó como se esperaba puesto que los estudiantes no se percataron de su ausencia al iniciar el taller, y su acción al verla fue dar clic y pasar de una vez a la actividad sin leer y comprender las condiciones de solución que tiene un cuadrado mágico.

En conclusión este acto de devolución “hacer comprender el problema”, no se anticipó de la mejor forma, puesto que

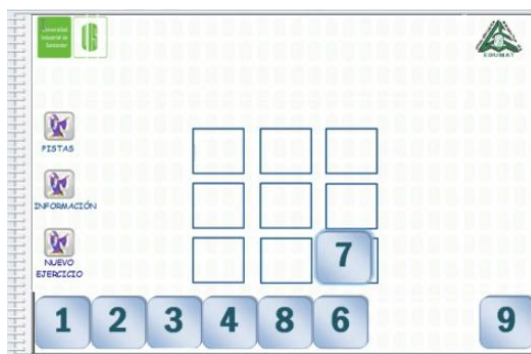
#### **4.1.2. Solicitar una estrategia de solución**

##### **4.1.2.1. Análisis de lo observado Pareja 2**

SA2 y SB2 al iniciar la actividad tuvieron dificultad en encontrar la estrategia adecuada de solución porque al leer la información no la comprendieron. Pero al ir explorando la actividad SB2 se dio cuenta que ubicar las fichas sin ninguna regla no los ayudaría a resolver el problema y que por eso la actividad se reinició. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.1.2.1]

SA2:(coge la ficha N°7 y la ubica en la tercera fila tercera columna, inmediatamente el software reinicia la actividad) “¿Qué paso?”—se les reinicia la actividad, por no percatarse de los mensajes que les muestra el software-[L.54]

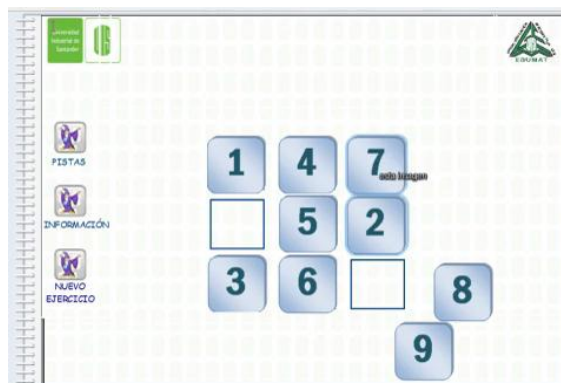
**Figura 16** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos1



SA2: (hace clic en el botón ir a pistas, inmediatamente aparece un mensaje que dice ¿conoces la suma mágica? Y dos opciones de respuesta 1) SI y 2) NO) –deciden dar clic en la opción 1) SI y seguir las indicaciones que allí les dan; después de esto regresan a la actividad-[L.83]

SB2:“ahh ya se acá, acá un tres acá un tres” –se refiere a que ubique la ficha N°3 en la tercera fila tercera columna- “la suma debe ser 15” [L.107]

**Figura 17** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos2



En lo observado, SA2, tuvo muchas dificultades para comprender las condiciones de la actividad, aun así persistió y al finalizar el taller comprendió como resolver un cuadrado mágico. En conclusión podemos afirmar que anticipamos correctamente las conductas de los estudiantes para este segundo acto de devolución “Solicitar una estrategia de solución”, porque todos inicialmente utilizaron el azar como estrategia de solución dando paso a los mensajes programados en el software, en los que se le pide al estudiante cambiar la estrategia y/o buscar ayuda para encontrarla.



Los estudiantes SA1, SB1 y SB2 mostraron aprendizaje al finalizar el taller ya que reconocieron que para poder solucionar un cuadrado mágico debían utilizar una estrategia adecuada en la que se respetaran las condiciones dadas y no una al azar que no lo hiciera. Por lo tanto concluimos que estos estudiantes han comenzado su proceso para lograr el Empoderamiento Matemático, pues han hecho la comprensión y el análisis de la situación planteada en búsqueda de una estrategia adecuada.

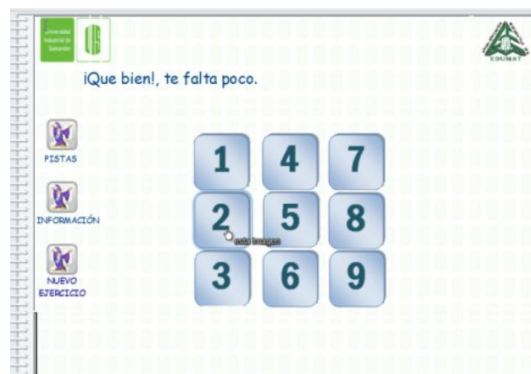
### 4.1.3. Control de procesos intermedios

#### 4.1.3.1. Análisis de lo observado Pareja 1

El estudiante SB1 a través de los mensajes que el software le mostró, se dio cuenta que la ubicación que le estaba dando a las fichas no era la correcta y que debía corregir las sumas que estaban mal para poder seguir adelante con su estrategia y así solucionar el cuadrado mágico. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.1.3.1].

SB1: (Ubica las fichas de menor a mayor de izquierda a derecha por columnas, inmediatamente aparece un mensaje: ¡Que bien!, te falta poco.) “que bien te falta poco” [L.38]

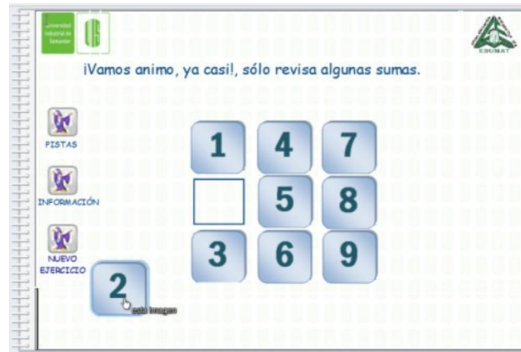
Figura 18 Actividad N°1. Taller Cuadrado Mágicos3



SA1: “Dele pistas”[L.39]

SB1: (Coge la ficha N°2 y la retira del arreglo, inmediatamente le sale un mensaje: ¡Vamos animo, ya casi!, sólo revisa algunas sumas –al verlo decide ponerla de nuevo en su ubicación- coge la ficha N°2 y la ubica en la segunda fila primera columna, inmediatamente el software muestra el mensaje: ¡Que bien!, te falta poco) [L.40]

**Figura 19** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos4



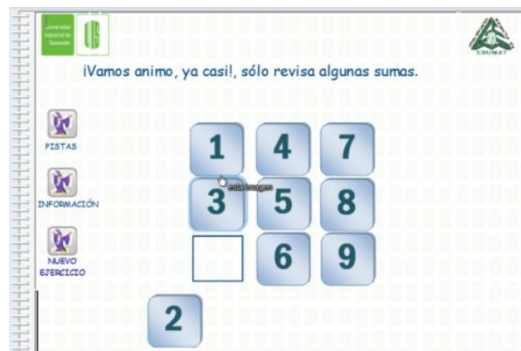
SA1: “Dele pistas” [L.41]

SB1:(Hace clic en el botón pistas, y este le muestra un mensaje: *Si utilizas una pista perderás 10 puntos, recuerda que el puntaje total es 100*, hace clic en el botón regresar que lo lleva de nuevo a la actividad) [L.42]

SA1: “Es el nueve” [L.43]

SB1:“No, el dos, ahí el nueve está bien” (coge la ficha N°2 y la retira del arreglo) “tres más seis nueve, más nueve” (coge la ficha N°3 y la ubica en la segunda fila primera columna, inmediatamente el software le muestra el mensaje: *¡Vamos animo, ya casi!, sólo revisa algunas sumas*) “Ahí, da la misma suma” –señala con el mouse la primera columna-[L.44]

**Figura 20**Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos5



A pesar que SA1, no comprende con exactitud las acciones de SB1, ayudó leyendo los mensajes que aparecían y dio ideas para la solución, que en algún

momento fueron de ayuda para SB1. En lo observado, concluimos que funcionó este acto de devolución porque se logró por medio de los mensajes que los estudiantes revisaran sus procesos intermedios y los corrigieran, para poder llegar a encontrar la solución adecuada del cuadrado mágico. Además de incitar al estudiante a cambiar su forma de resolver un problema cambiando sus procesos para llegar a la solución del mismo.

#### **4.1.3.2. Análisis de lo observado Pareja 2**

Los estudiantes, a pesar de saber el valor de la suma mágica, no logran resolver el cuadrado mágico, pero mediante los mensajes que el software les mostró por los errores que cometieron, lograron corregirlos y seguir adelante con su estrategia. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.1.3.2]

SA2: (Coge la ficha N°8 y la ubica en la primera fila segunda columna).[L.63]

**Figura 21** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos6]



SB2: “No, espere, (lee) Que bien te falta, poco”[L.64]

SA2: “Mire, uno y cuatro, cinco, y siete, doce” -realiza la suma de la segunda fila del arreglo-[L.65]

SB2: “Espere, espere cinco, tres, dos son diez, no da quince... Ash también nos quedó mal” -realiza la suma de la tercera fila del arreglo- -se quedan pensando un minuto-[L.66]

SA2: “Quitemos entonces el ocho y el tres... acá el ocho y...” (Cambia la posición de las fichas ocho y tres como lo muestra la figura 22) [L.67]

**Figura 22** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos7

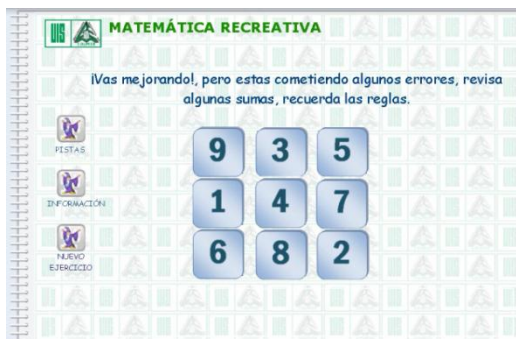


SB2: “Espere, ocho, dos, diez y cinco, si está bien, está bien” -se refiere a que el resultado de la suma de la tercera fila le da quince-[L.68]

SA2: “pero acá nueve y tres doce y seis dieciocho, no sirve” [L.69]

SB2: (toma la ficha que representa el número seis y la ubica en la casilla que falta por llenar, como lo muestra la figura 23). [L.72]

**Figura 23** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos8



SA2: (lee) “Vas mejorando pero estas cometiendo algunos errores, revisa algunas sumas recuerda las reglas”. [L.73]

SB2: “Espere, espere, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete”. -suma la primera columna-[L.74]

SA2: “¿diecisiete? ¡Ja! más bien dieciséis”. [L.75]

SB2: “quite este” -se refiere a la ficha N°5-[L.76]

Durante la sesión el estudiante SA2 se mostró molesto porque se le asignó un compañero para trabajar el taller, pero a medida que fueron compartiendo cedió y fue capaz de trabajar en conjunto con SB2, logrando terminar con éxito el taller, puesto que SB2 insistió en poner en práctica los mensajes que el software les

mostro y en realizar acciones en el cuadrado mágico con coherencia y no al azar, como lo pretendió en algún momento hacer SA2.

Concluimos que este acto de devolución funcionó correctamente con las conductas de los estudiantes, porque mediante los mensajes mostrados corrigieron los errores que tenían en el arreglo del cuadrado mágico, y fueron autónomos en su búsqueda, siendo este uno de aspectos importantes para llegar al Empoderamiento Matemático.

#### **4.1.4. Solicitud de ayuda**

##### ***4.1.4.1. Análisis de lo observado Pareja 2***

SB2 decidió utilizar la ayuda (pistas) al observar que no podían resolver el cuadrado mágico, aunque su compañero no quisiera hacerlo, le insistió hasta que este cedió a dar clic en el botón pistas y así poder encontrar el valor de la suma mágica. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.1.4.1]

SA2: (Hace clic en el botón pistas, inmediatamente el software lo lleva a la página de pistas donde hay un mensaje que dice Si utilizas una pista perderás 10 puntos, recuerda que el puntaje total es 100, Puntaje 100 puntos y dos botones, 1) Ir a las pistas y 2) Regresar).[L.81]

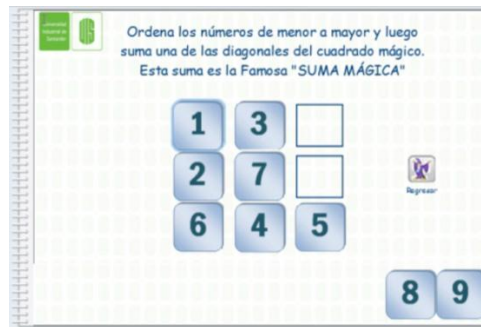
SB2: "Ir a las pistas, coloque pistas, ¡coloque pistas, al menos para que nos ayude!".[L.82]

SA2: (hace clic en el botón ir a pistas, inmediatamente le aparece un mensaje que dice ¿conoces la suma mágica? Y dos opciones de respuesta 1) SI y 2) NO).[L.83]

SB2: "Espere, ¿qué está haciendo? No ve que escucho que era de menor a mayor"[L.96]

SA2: (coge la ficha N°4 y la ubica en la tercera fila segunda columna, coge la ficha N°5 y lo ubica en la tercera fila tercera columna, coge la ficha N°7 y la ubica en la segunda fila segunda columna, coge la ficha N°3 y la ubica en la primera fila segunda columna, como se muestra en la figura 24)[L.97]

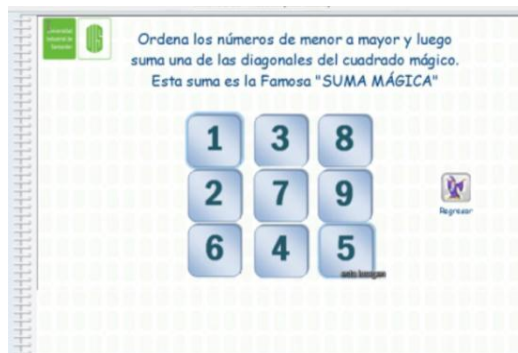
**Figura 24** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos9]



SB2: "¿Que está haciendo?"[L.98]

SA2: (coge la ficha N°8 y la ubica en la primera fila tercera columna, coge la ficha N°9 y la ubica en la segunda fila tercera columna, como se muestra en la figura 25)[L.99]

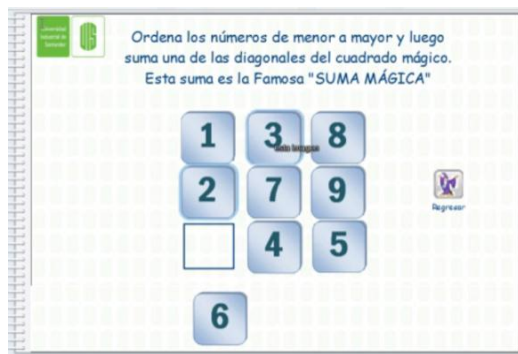
**Figura 25** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos10]



SB2: "Muestre, espere, preste. El tres va acá" –Refiriéndose que la ficha N°3 debe ir en la tercera fila primera columna-.[L.100]

SA2: (Coge la ficha N°6 y la retira del arreglo, luego coge la ficha N°3 y la ubica en la tercera fila primera columna, como se muestra en la figura 26)[L.101]

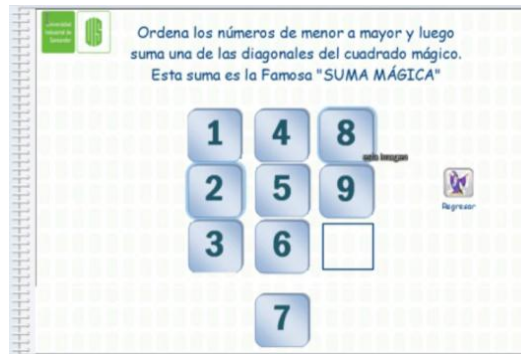
**Figura 26** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos11]



SB2: "Mire ésta acá"[L.102]

SA2: (Coge la ficha N°4 y la ubica en la primera fila segunda columna, coge la ficha N°5 en la segunda fila segunda columna, coge la ficha N°6 y la ubica en la tercera fila segunda columna, como se muestra en la figura 27)[L.103]

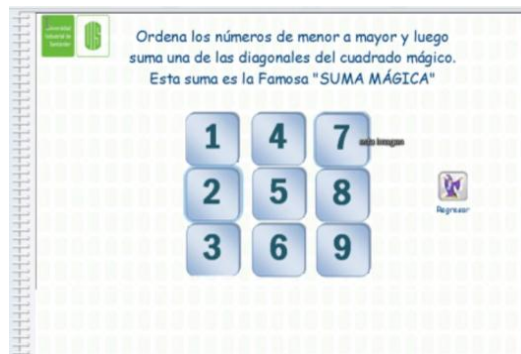
**Figura 27**Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos12



SB2: "No baje el" –Se refiere a que cambien de posición la ficha N°9 y no la ficha N°8- [L.104]

SA2: (Coge la ficha N°8 y la retira del arreglo, coge la ficha N°9 y la ubica en la tercera fila tercera columna, coge la ficha N°8 y la ubica en la segunda fila tercera columna, coge la ficha N°7 y la ubica en la primera fila tercera columna, como se muestra en la figura 28 – pasados 30 segundos- da clic en el botón regresar).[L.105]

**Figura 28**Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos13



Concluimos que este acto de devolución se anticipó correctamente, porque se logró el objetivo: Brindar ayuda al estudiante en el momento que éste decidiera tomarla; teniendo en cuenta que no sería fácil obtenerla. Así logramos que los estudiantes estén en iguales condiciones para llegar a la solución, pues sabemos que no todos tienen las mismas habilidades a la hora de enfrentarse a una

situación problema. Así aseguramos que exista “equidad”, parte fundamental del Empoderamiento Matemático.

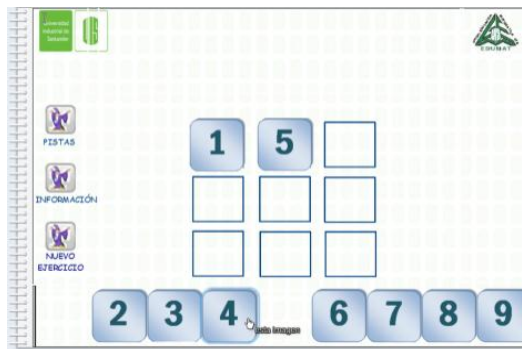
#### 4.1.5. Por Abstención

##### 4.1.5.1. Análisis de lo observado Pareja 1

La estrategia con la que comienza SA1 no es un razonamiento matemático, pero aun así intenta resolver la actividad con esta, tratando de sacarle información al software. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.1.5.1]

SB1: “Eh, pongamos las fichas ahí” – se refiere al arreglo de 3x3 -. (Véase figura 29) [L.1]

Figura 29 Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos14



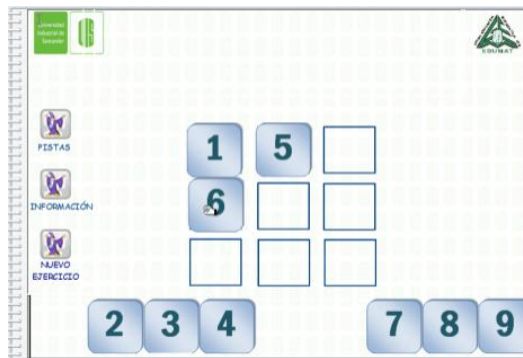
SA1: “Vamos bien, cada número miramos” (ubica la ficha N°5 y la ubica en la primera fila segunda columna, seguidamente oprime el botón pistas donde le sale un mensaje que dice No has cometido errores. Continua) “porque acá no nos van a informar estás mal, cada número vamos mirando a ver si nos va quedando bien. Listo”. [L.2]

SB1: “Eh, bueno como usted diga porque como usted fue el que entendió más voy a seguirlo. Pero no me vaya a contradecir y no me vaya a alzar la voz porque eso lo detesto”. [L.3]

SA1: “Muy bien” (coge la ficha N°6 y la ubica en la segunda fila primera columna y da clic al botón pistas donde le sale un mensaje que dice No has cometido errores. Continúa, seguidamente da clic en el botón regresar, como se muestra en la figura 30) – está tratando de obtener información del software sobre los errores sin tener que hacer un razonamiento lógico y matemático-. [L.4]

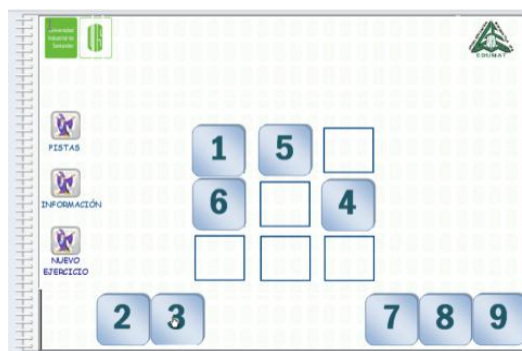


**Figura 30** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos15]



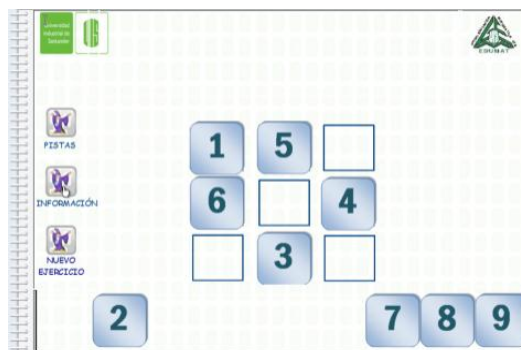
SA1: (Coge la ficha N°4 en la segunda fila tercera columna y da clic al botón pistas donde le sale un mensaje que dice No has cometido errores. Continua, seguidamente da clic en el botón regresar, como se muestra en la figura 31).[L.5]

**Figura 31** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos16]



SA1: (Ubica la ficha N°3 en la tercera fila segunda columna y da clic al botón pistas donde le sale un mensaje que dice No has cometido errores. Continua, como se muestra en la figura 32).[L.6]

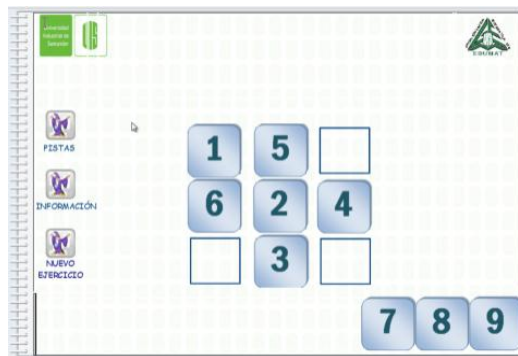
**Figura 32** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos17]



SB1: "Venga pero usted ¿por qué pone los números así?".[L.7]

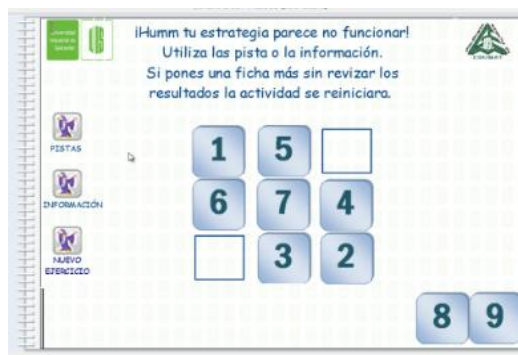
SA1: (Hace clic en el botón información y da clic en las flechas ubicadas en la parte inferior derecha hasta llegar de nuevo a la actividad; - Sin leer-. Ubica la ficha N°2 en la segunda fila segunda columna, da clic al botón pistas que lo lleva a otra página donde le sale un mensaje *Si utilizas una pista perderás 10 puntos, recuerda que el puntaje total es 100, da clic en regresar*) “los estoy poniendo así o sea yo tengo una suma; ya es que lo que pasa es que no me la sé bien porque, por eso lo estoy poniendo a la loca; porque o sea yo ya me sé la suma pero no me la sé bien ¿Si me entiende? Esta no va ahí” (Véase la figura 33) - como no obtuvo el letrero “No has cometido errores”, piensa que la última ficha está mal ubicada, por esto el software le advierte que debe cambiar la estrategia -. [L.8]

**Figura 33** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos18



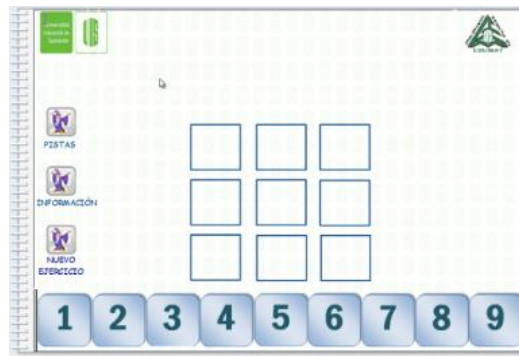
SA1: (Coge la ficha N°7 y la ubica en la segunda fila segunda columna, inmediatamente le sale un mensaje que dice *¡Hum tu estrategia parece no funcionar! Utiliza las pistas o la información. Si pones una ficha más sin revisar los resultados la actividad se reiniciará;* como se muestra en la figura 34). [L.12]

**Figura 34** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos19



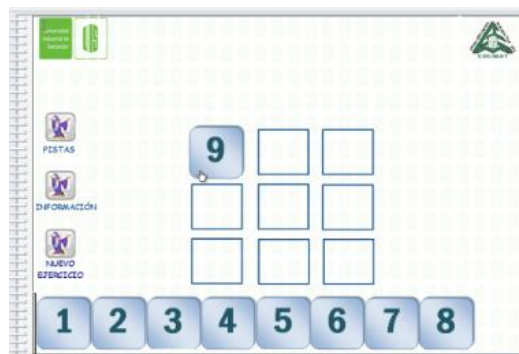
SA1: “Ahora entonces uno más tres, cuatro... ¡Ay no, reinició! ¿Profesor que paso? ¡¿Por qué se reinició?!” (Véase la figura 35). [L.30]

**Figura 35** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos20



SA1:-Deciden después cambiar la estrategia por otra que tampoco fue la más adecuada- “Silencio, silencio, nos copian, jejeje. Ahh ya sé; ahora suman catorce” (coge la ficha N°9 y la ubica en la primera fila primera columna, como se muestra en la figura 36). [L.34]

**Figura 36** Actividad N°1. Taller [Cuadrado Mágicos21



SB1:-A partir de este momento SB1 toma el mouse y empieza a llenar las casillas del arreglo buscando que la suma sea quince en fila, columna y diagonal- (hace clic en el boton información) “no, pero esa es la información”. [L.35]

En lo anterior podemos observar que funcionó el acto de devolución “Solicitar una estrategia de solución” tal y como lo habíamos programado. Aunque SB1 en ningún momento de la actividad enuncia una estrategia de solución pero sí deja ver con sus acciones que comprende el desarrollo de la actividad, además identifica a través de los mensajes del software que la estrategia de SA1 no es la adecuada y por esto decide tomar el mouse y continuar la solución de la actividad.

En conclusión podemos decir que fue bien anticipado este acto de devolución por abstención, ya que hizo que los intentos de SA1 por sacarle información al

software fueran fallidos haciendo que SB1 interviniera y tomara el mouse para desarrollar la actividad, aunque nunca enunció una estrategia, comprendió el objetivo del problema y ayudó a SA1 a comprender las condiciones de solución del problema.

## **4.2. Análisis A-posteriori Criptoaritmética**

En el análisis a posteriori presentaremos el trabajo realizado por los estudiantes, específicamente sus comportamientos ante las retroacciones del software, para cada acto de devolución.

### **4.2.1. Hacer comprender el problema**

#### **4.2.1.1. Análisis de lo observado en la Pareja 3**

Los estudiantes, a pesar de haber leído inicialmente toda la información, no comprendieron correctamente las condiciones del taller, así que hicieron clic en el botón información para poder volver a leer las condiciones del problema. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.2.1.1]

SB3: "Información ¿será?". [L.22]

SA3: (Hace clic en el botón información). [L.23]

SB3: "No, eso ya lo leímos" -se refiere a la primera página presentada de la historia, ya que este botón le muestra la información desde ahí-. [L.24]

SA3: (Pasa rápidamente a la tercera página y lee las condiciones de nuevo) "Reglas, 1. Realizar la operación indicada de forma correcta. 2. A cada letra diferente, corresponde un valor diferente. 3. A letras iguales les corresponden valores iguales. 4. La primera cifra de cada número no puede ser cero. 5. Los valores que se utilizan son los números dígitos". [L.25]

SB3: "¿No se deben repetir el número de las letras?". [L.26]

SA3: "Aja, cada letra tiene su número y si son iguales pues el mismo número. Así dice ahí" -Refiriéndose a lo leído en la información-. [L.27]

En lo observado concluimos que esta pareja utilizó y comprendió de forma adecuada la información de la Criptoaritmética, es decir fue anticipado correctamente el acto de devolución “hacer comprender la información”.

#### **4.2.1.2. Análisis de lo observado en la Pareja 1**

Al inicio del taller los estudiantes leyeron completamente la información pero al terminarla y pasar a la actividad no la pusieron en práctica porque no lograron comprenderla. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.2.1.2].

SB1: “Pues vea, cinco y tres, esos son, hay que ponerlo acá para hacer la suma, además como también nos da diez pues ahí lo ponemos”-cuando dice acá se refiere al arreglo de la suma que representa la Criptoaritmética-. [L.35]

SA1: “Si, pero qué hay que hacer, ahí no nos dicen”. [L.36]

SA1: “Dígitos utilizados, estos son los dígitos que se supone debemos utilizar (pasa el cursor sobre la columna de los dígitos que está ubicada en la parte lateral izquierda) “esta imagen, esta imagen tres más dos cinco”-cuando pasa el cursor sobre la imagen de la Criptoaritmética aparece el letrero ‘esta imagen’-. [L.40]

SB1: “Entonces ¿cuál utilizamos? el tres el dos y el cinco”. [L.41]

SA1: “No, porque no hemos hecho la suma ¿Recuerda? Y decía que cada letra tiene un valor correspondiente y que a letras diferentes valores diferentes y que a letras iguales valores iguales”. [L.42]

SB1: “Y que no puede ser cero, o sea no lo podemos utilizar”. [L.43]

SA1: “Tres más dos cinco ¿Cómo hacemos ahí?”. [L.46]

SB1: “¡Ay mire! Aquí es con letras T-R-E-S-D-O-S tres más dos igual C-I-N-C-O cinco”. [L.47]

SA1: “Si, pero ¿Cómo hacemos para las letras?”. [L.48]

SB1: “Si, ¿Cómo hacemos para las letras? Profesor ¿cómo hacemos con las letras?”. [L.49]

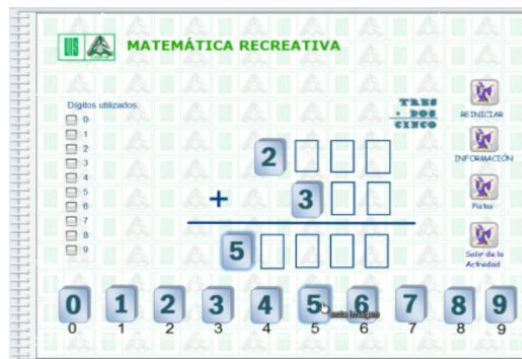
P: “Hay que leer. ¿Leyeron?”. [L.50]

SA1: “No, espere mejor la información, ahí nos van a decir” (hace clic en el botón información).[L.53]

SA1: “Entonces acá: (lee) *a cada letra diferente, corresponde un valor diferente, a letras iguales les corresponden valores iguales. La primera cifra de cada número no puede ser cero y los valores que se utilizan son los números dígito*” (hace clic para pasar a la página siguiente).[L.55]

SB1: “Espere, ponga el dos el dos y el cinco acá y el tres” (toma el mouse y pone las fichas como muestra la figura 37). [L.56]

**Figura 37** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética1



SA1: “Bueno la T la C la D son diferentes ahora ¿Qué número será S?”[L.57]

En lo observado concluimos que esta pareja, SA1 utilizó y comprendió de forma adecuada la información para comenzar a buscar una estrategia de solución de la Criptoaritmética, mientras que SB1 no comprendió el objetivo de la misma. Por lo tanto sólo SA1 comenzó el camino para lograr el Empoderamiento Matemático.

#### **4.2.2. Control de procesos intermedios**

##### **4.2.2.1. Análisis de lo observado en la Pareja 1**

Los estudiantes SA1 y SB1, leen el mensaje “*Revisa que las letras iguales tengan valores iguales*” que el software les muestra al dar dos valores diferentes a la misma letra. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este acto de devolución [A.1.2.2.1]

SB1: “¿Cómo así, en esa actividad que tenemos que hacer?”.[L.1]

SA1: (Coge la ficha N°3 y N°4, y las ubica en las decenas del primer sumando y del segundo sumando respectivamente, inmediatamente el software muestra el siguiente mensaje “Revisa que las letras iguales tengan valores iguales”).[L.2]

**Figura 38** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética2

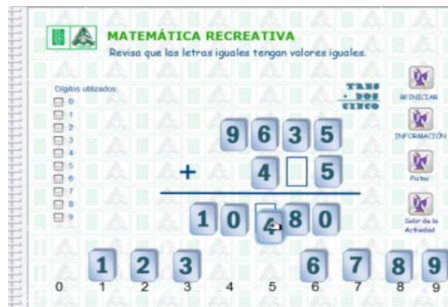


SA1: (Lee) “Revisa que las letras iguales... aaah SB1”. [L.3]

SB1: “Recuerde lo que dice la actividad 1”. [L.4]

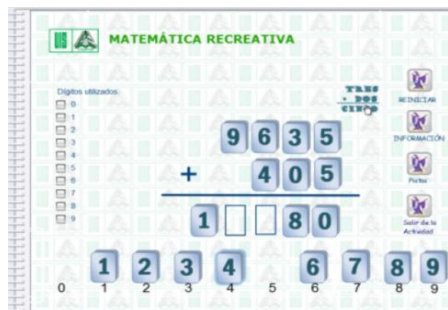
SA1: “Ahí está, ahí está SB1” (Retira la ficha N°4).[L.5]

**Figura 39** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética3



SB1: “Si la O equivale a cero, pues entonces necesitamos este cero acá” (Coge la ficha N°0 y lo ubica en las decenas del segundo sumando, como se muestra en la figura 40).[L.6]

**Figura 40** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética4



SA1: “Porque las letras iguales tienen el mismo valor”. [L.7]

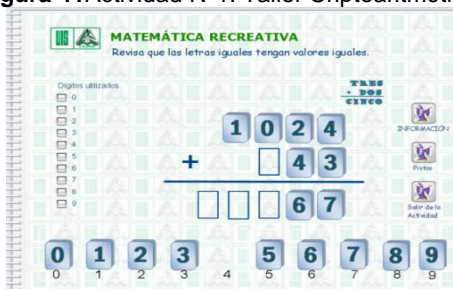
En conclusión la programación de este acto de devolución fue muy acertada, pues los estudiantes al leer los mensajes pudieron encontrar y corregir por sí mismos los errores que tenían en la organización de las fichas en el arreglo.

#### 4.2.2.2. Análisis de la Pareja 3

Los estudiantes SA3 y SB3 han iniciado la resolución de la actividad sin tener claras las condiciones del problema. Inicialmente el software les muestra el mensaje “*Revisa que las letras iguales, tengan valores iguales*”), el cual no leen. A continuación se muestra

SA3:Espérese, dos y cuatro, seis (Coge las fichas N°4 y N°6 las ubica en las decenas del segundo sumando y en las decenas del resultado respectivamente inmediatamente aparece el aviso “*Revisa que las letras iguales, tengan valores iguales*”, como se muestra en la figura 41).[L.16]

Figura 41 Actividad N°1. Taller Criptoaritmética5



Al ubicar dos fichas más en el arreglo, el software les muestra un nuevo mensaje “*Recuerda que a letras iguales valores iguales y a letras diferentes valores diferentes*” (línea 17, Véase anexo B).

SA3:“Cero y cinco, cinco” (Coge las fichas N°5 y las ubica en las centenas del segundo sumando y las centenas del resultado, inmediatamente aparece el mensaje “*recuerda que a letras iguales valores iguales y a letras diferentes valores diferentes*, como se muestra en la figura 42).[L.17]

Figura 42 Actividad N°1. Taller Criptoaritmética6

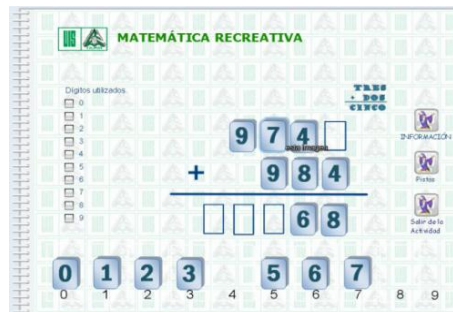




SB3: “No, no puede ser” –Dice esto por el mensaje “*recuerda que a letras iguales valores iguales y a letras diferentes valores diferentes-*. “¡Aaah!, estas dos son iguales, porque mire S y S”. (Señala con el mouse la ficha N°4 y la N°3).[L.18]

SB3: (Coge el mouse. Retira la ficha N°2 y ubica la ficha N°4 que se encontraba en las unidades del primer sumando a las decenas de este, como se muestra en la figura 43).[L.34]

**Figura 43** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética7



SB3: “¿O será cinco, no?” (Retira la ficha N°7).[L.35]

SA3: “E, igual, espere, no haga nada espere”.[L.36]

SB3: “Acá, aaah, espere que ya entendí” (Coge la ficha N°2 y la ubica en la posición de las unidades del primer sumando, como se muestra en la figura 44) –Aparece el aviso “Revisa algunas sumas, tienes aun errores”-.[L.37]

**Figura 44** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética8



SA3: “No, le quedo mal”, -dijo esto al observar el aviso- [L.38]

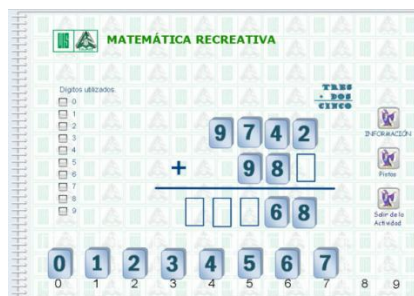
SB3: (Coge la ficha N°7 y la ubica en las centenas del primer sumando, inmediatamente el software les muestra el mensaje: “*Revisa algunas sumas, tienes aun errores*”, como se muestra en la figura 45) “tiene que dar un número...” [L.39]

**Figura 45** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética9



SA3: “Espere, espere, tranquilo” –Coge el mouse- (Retira ficha N°4, como se muestra en la figura 46).[L.40]

**Figura 46** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética10



SB3: “Solamente hay un cuatro. No SA3, no puede ser cuatro, porque solamente hay un cuatro”. [L.41]

SA3: “Ya lo sé, déjeme” (Retira la ficha N°2 ubicada en las unidades del primer sumando, y la reemplaza por la ficha N°8, inmediatamente aparece el aviso” revisa que las letras diferentes tengan valores diferentes, como se muestra en la figura 47). [L.42]

**Figura 47** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética11



SB3: “Y ocho no puede ser, ash” –Dice esto al observar el aviso-. “SA3, pero déjeme”. [L.43]

SA3: (Coge la ficha N°1 y la ubica en las decenas del resultado, como muestra la figura 48).[L.47]

**Figura 48** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética12



En conclusión la programación de este acto de devolución fue muy acertada para esta pareja, pues SA3 al leer los mensajes logró encontrar y corregir los errores que tenían en el arreglo, por el contrario SB3 presentó dificultades para comprender lo que sucedió en la actividad.

Al realizar el análisis de lo sucedido con la Pareja 1 y la Pareja 3, podemos evidenciar que las diferentes intervenciones que programamos por medio de los mensajes para este acto de devolución, fueron tomados de manera adecuada por las parejas y cumplieron con el objetivo de lograr controlar los procesos que realizaban los estudiantes en un momento apropiado y así poder continuar con su estrategia para llegar a la solución de la actividad logrando que el estudiante sea autónomo en la búsqueda de los errores para lograr un Empoderamiento Matemático.

#### **4.2.3. Solicitud de ayuda**

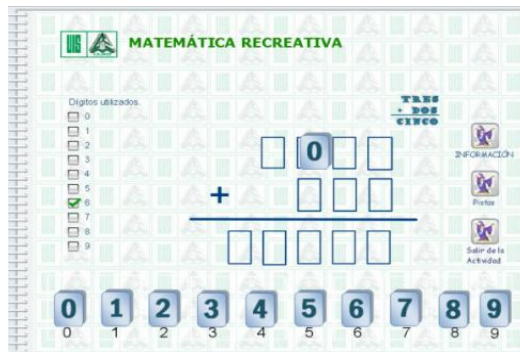
##### **4.2.3.1. Análisis de lo observado en la Pareja 3**

Los estudiantes SA3 y SB3, después de haber realizado la lectura de la información que se le suministraba en la parte inicial del taller, comienzan a solucionar la primera actividad haciendo la lectura de la consigna con el planteamiento del problema y sonrían cuando leen “TRES MÁS DOS, CINCO”; A continuación observan el botón de ayuda, e inmediatamente lo oprimen para ir allí. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.2.3.1]

**SA3:** (Hace clic en el botón Pistas, inmediatamente el software le muestra un mensaje que dice: *No has cometido ningún error. ¡Continúa!*, -al parecer lee en silencio- hace clic en el botón regresar, lo lleva inmediatamente a la actividad).[L.3]

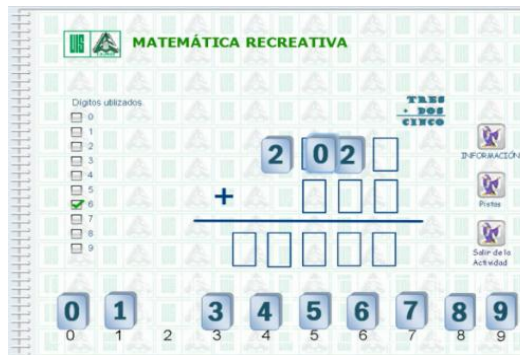
**SB3:** (Coge la ficha 0 que había ubicado en las unidades de mil del primer sumando y la ubica en la posición de las centenas del primer sumando, como se muestra en la figura 49). [L.13]

**Figura 49** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética13



**SB3:** (Coge las fichas N°2, y las ubica en las centenas del primer sumando y en las unidades de mil del mismo, como se muestra en la figura 50). [L.14]

**Figura 50** Actividad N°1. Taller Criptoaritmética14



**SB3:** “Ver pistas” (hace clic en el botón pistas, inmediatamente el software le muestra un mensaje que dice: Si utilizas una pista perderás 10 puntos, recuerda que el puntaje total es 100 puntos).[L.15]

**SA3:** “¿Ir a pistas?”.[L.16]

**SB3:** “Si” (hace clic en el botón Ir a las Pistas, inmediatamente el software le muestra un mensaje que dice: - El valor de T se está repitiendo con el valor de otra letra -Al parecer leen la información mentalmente-, da clic en el botón regresar).[L.17]

Reaccionando esta vez el software con el siguiente mensaje “*El valor de T se está repitiendo con el valor de otra letra*”; Cuando los estudiantes realizan la lectura, SA3 queda confundido con el mensaje, pero SB3 que al parecer si lo comprendió le dice que deben cambiar el valor de T, así cambian el valor de T y continúan con la actividad.

Las parejas 1 y 2 no utilizaron las ayudas pues cada vez que decidían utilizarla, se cohibían porque el software les descontaba 10 puntos de los 100 que valía la actividad.; esto nos llevaría a pensar que tal vez se perdió este acto de devolución programado, pero por el contrario, esto se hizo para que los estudiantes encontraran el error por sí mismos sin necesidad de ayudas, y que sólo las utilizaran cuando realmente las necesitaran, como se evidenció en el análisis de la pareja 3, quienes inicialmente no comprendían lo que debían realizar pero con la ayuda comenzaron a organizar una estrategia de solución. El utilizar o no utilizar la pista hizo que los estudiantes realizaran un análisis de lo que estaba sucediendo en la actividad y entendieran que debían buscar los errores por sus propios medios, logrando así autonomía en ellos para llegar al empoderamiento matemático.

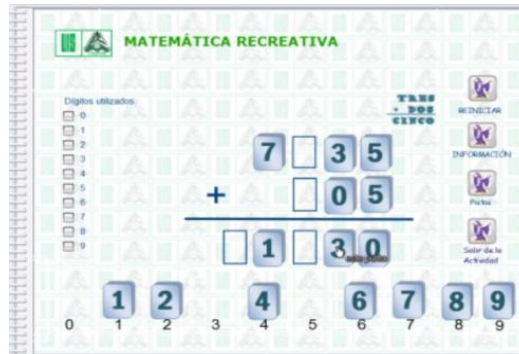
#### **4.2.4. Por Abstención**

##### **4.2.4.1. Análisis de lo observado en la Pareja1**

Los estudiantes SA1 y SB1, después de 16 minutos de comenzada la actividad, aún no han logrado encontrar su solución y empiezan a creer que al ubicar una ficha en el arreglo e ir a revisar las pistas van a lograr que el software les diga a cada movimiento si lo están haciendo bien o mal. La siguiente transcripción da cuenta de lo que hicieron los estudiantes, para este primer acto de devolución [A.1.2.4.1.]

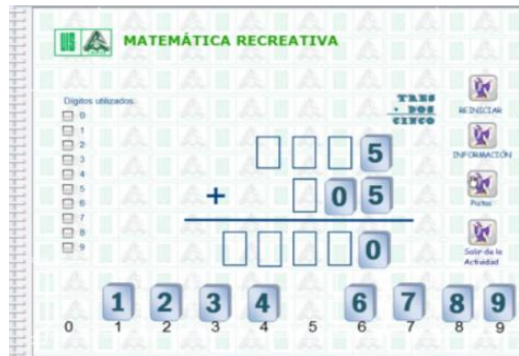
SA1: “El tres, ese tres no es”. [L.1]

Figura 51 Actividad N°1. Taller Criptoaritmética 15



SA1: "A ver, quitemos todos los números para ver, a ver si vamos bien" (Retira las dos fichas N°3, la N°7 y la N°1). [L.2]

Figura 52 Actividad N°1. Taller Criptoaritmética 16



SA1: (hace clic en el botón Pistas, inmediatamente el software los lleva a otra página y les muestra el mensaje *No has cometido ningún error. ¡Continúa!*).[L.3]

SA1: "¡No has cometido ningún error...!" [L.4]

SB1: "Entonces ya sabemos que ya es un cero, ya, esos ceros no los movamos". –Ellos llegan a esta conclusión por el mensaje mostrado por el software-[L.5]

SA1: (Da clic en el botón Regresar, inmediatamente regresa a la actividad).[L.6]

SA1: "Entonces pongámosle diferentes números para saber qué número es, ¿le parece?" - Susurra-[L.7]

SB1: "Si, si, si, si, colóquelos, colóquelos" -Susurra-[L.8]

El acto de devolución por abstención se da cuando el estudiante intenta sacarle información al software y este no se la da; por lo visto en la experimentación la programación de este acto funcionó porque no dejó que los estudiantes

encontraran la solución de la Criptoaritmética realizando esta acción, pero también encontramos que el hecho de que ellos creen que está bien la ubicación de las fichas cuando está mal es algo que debemos corregir o decirles a ellos la forma en la que el software trabaja para que lo tengan en cuenta. Esto hizo que los estudiantes optaran por una estrategia adecuada y no continuaran con estrategias al azar.

## 5. Conclusiones

Las actividades diseñadas y programadas en el software Cabri LM son hasta ahora las primeras de su tipo, lo cual nos lleva dejar abierta una mejora en su diseño y programación para su futura aplicación en los estudiantes de básica primaria. Consideramos que nuestro trabajo ofrece a la comunidad educativa los siguientes aportes:

El primer aporte de nuestro trabajo a la problemática planteada de lograr el empoderamiento matemático por medio de actividades de matemática recreativa, consiste en la caracterización de los actos de devolución como intervenciones del profesor que conducen a una validación por parte del estudiante, y por lo tanto aumentan su autonomía. Igualmente, caracterizamos algunas intervenciones del profesor que impiden la validación por parte del estudiante, y por lo tanto se consideran inadecuadas para desarrollar el empoderamiento matemático.

El segundo aporte lo constituyen los 6 talleres diseñados, en los cuales intentamos operacionalizar las ideas teóricas expuestas, en concreto automatizar actos de devolución para lograr una mayor autonomía de los estudiantes. Si bien durante la experimentación identificamos aspectos particulares que deben modificarse para optimizar el impacto en el aprendizaje de los estudiantes, consideramos que pueden utilizarse con éxito en grupos escolarizados o como actividades extraescolares. El análisis general de estos 6 talleres (que para el presente texto decidimos limitar a dos de ellos) nos permitió no solo identificar mejoras que podemos aportar al diseño de los talleres, sino una mejor comprensión del marco teórico y su articulación con la implementación de las actividades.

El tercer aporte lo constituyen los análisis a priori y a posteriori, como ejemplos de herramientas analíticas para identificar los elementos de la interacción de los estudiantes con el software que permiten concluir que se favorece o no el empoderamiento matemático de los mismos.



Una consecuencia del contraste del análisis a posteriori con el análisis a priori, es la identificación de la dificultad que muestran los estudiantes en la comprensión de los problemas. Los talleres estaban organizados de manera secuencial, presentando primero las informaciones necesarias para la comprensión del problema, y luego el problema en sí. Vemos que los estudiantes buscaron enfrentarse primero con el problema, sin hacerse una idea clara de lo que se esperaba que hicieran. Es decir, intentaron comprender el problema directamente en la interacción con el mismo, o simplemente buscaron la respuesta acertada sin comprender. Incluso en los casos en los que los estudiantes leyeron la información antes de comenzar la solución de los problemas, constatamos que sólo lograron la comprensión después de enfrentarse al problema y regresar al texto a buscar la información. Este hecho señala la necesidad de replantear la forma como se automatizó el acto de devolución 'hacer comprender el problema'.

Otro elemento que surgió del análisis fue la identificación de algunos estudiantes que de manera persistente intentan 'encontrar' la solución sin realizar un proceso de razonamiento; simplemente buscan intentar todas las posibilidades, o tratan de encontrar información directa en el software sobre los errores cometidos ('escribo una respuesta, busco un mensaje de error'). Hacemos la hipótesis que este comportamiento es una consecuencia de las estrategias de aprendizaje desarrolladas por las tecnologías informáticas, en las cuales se privilegia el ensayo/error. Pensamos que esta problemática es una oportunidad de investigación sobre los problemas de aprendizaje asociados al uso de la tecnología, y las estrategias adecuadas para superarlos.

Consideramos nuestro trabajo como un primer esfuerzo de automatizar actos de devolución en las actividades de matemática recreativa, que necesariamente tiene limitaciones, pero que abrió perspectivas interesantes para el desarrollo de la Educación Matemática y el uso de las tecnologías computacionales. El software CabriLM, al posibilitar la representación informática del trabajo del estudiante y la programación flexible de las retroacciones, genera oportunidades de automatizar

acciones que antes eran exclusivas del profesor. Esta nueva situación requiere un estudio cuidadoso para determinar las ventajas y desventajas para el aprendizaje de los estudiantes. Nuestra experimentación nos permite prever un efecto positivo de la automatización de los actos de devolución, pero es necesario hacer estudios con un mayor número de estudiantes.

## Referencias Bibliográficas

- Acosta, M. (2010).** *Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica.* (ed.) Encuentro colombiano de Matemática Educativa (p. 132-142). Santa fé de Bogotá. Grupo Edumat-UIS.
- Ballesteros, I & Rojas, D. (2011).** *Análisis de la implementación de las actividades para la conceptualización de área del rectángulo en el grado séptimo con la mediación del programa Cabri Geometry,* p. 16-17). Trabajo de grado.
- Bell, a. W. Küchemann, D & Costello, J (1983)** *A review of research in mathematical education: part A, teaching and learning, nfer-nelson, Windsor.*
- Brousseau, G. (2007).** *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas,* libros del zorzal, buenos aires argentina.
- Ernest, P. (2002)** *Empowerment in mathematics education.* University of Exeter, United Kingdom.
- Margolinas, C. (1993).** *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas.* Publicaciones UIS 2009.
- Monroy, L. &Rueda, K. (2009).** *Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa Cabri Geometry.*

- Panizza, M. (2004).** Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En Zubiría, Hilda. De la epistemología al constructivismo, el constructivismo en la psicología y la educación, el constructivismo y sus pioneros, en el constructivismo en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el siglo xxi, editorial Plaza y Valdes, España.
- Pérez, M. (2010).** Estudio sobre el impacto de la metodología del semillero matemático del estudiante.
- Ramírez, M. (2010).** El Cabri Elem como herramienta para la enseñanza del movimiento de rotación en el plano.
- Reyes, A. & Gómez, P. (2010).** Una mirada teórica sobre la conceptualización de la traslación de sexto grado a través de un aprendizaje por adaptación.
- Singh, N.C. & Vangile Titi (1995)** Empowerment: towards sustainable development. Zed books: London. 198 pages
- Trujillo D. Wills E. Canal M.(2007).** Incidencia en el empoderamiento a comunidades atendidas por organizaciones de desarrollo y paz en Colombia. ISSN: 1690-6268. Ed: CafV.5 fasc.1 p.25 – 62.