

PROPORCIONALIDAD SIMPLE: ESTRATEGIAS  
UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO

LUZ JHOANNA PRIETO MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2009

PROPORCIONALIDAD SIMPLE: ESTRATEGIAS UTILIZADAS  
POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO

LUZ JHOANNA PRIETO MARTÍNEZ

Trabajo de grado para obtener el título de  
Licenciada en matemáticas

Director:  
Ph.D.Gabriel Yáñez Canal

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2009

*A Dios por permitirme culminar mi carrera.*

*A mi madre por su apoyo incondicional.*

*A Julián por su amor y por su motivación.*

*A mi hijo Alan por ser el motor de mi vida.*

*A todos los estudiantes participantes de esta investigación.*

## RESUMEN

**TÍTULO:** PROPORCIONALIDAD SIMPLE: ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO\*

**AUTORA:** PRIETO MARTÍNEZ, Luz Jhoanna\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Proporcionalidad simple - Estrategias – Caracterización.

### DESCRIPCIÓN:

La proporcionalidad es vista desde muchos campos como un concepto potente que encierra un sin número de aplicaciones. Sin embargo, muchas veces el tratamiento que se le da en la escuela es puramente mecánico y la resolución de problemas de este tipo se da por procesos como el de la regla de tres; Así mismo, las aplicaciones que en la escuela se dan como ejemplos y ejercicios son poco contextualizados dando como resultado poco interés de los estudiantes hacia los ejercicios.

Ante este enfoque es natural preguntarse por el cómo están analizando los estudiantes los problemas de proporcionalidad y qué estrategias usan para resolverlos. Se aplicaron dos test diagnósticos sobre proporcionalidad a 400 estudiantes, de los cuales se tomo una muestra de 20 para analizarlos cualitativamente. Los aspectos que se tuvieron en cuenta fueron la caracterización de las situaciones, las diversas formas de asumir la proporcionalidad y los razonamientos que exigían cada una de ellas.

Este estudio muestra que las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes están dadas por el uso de operadores escalares, la regla de tres simple, los repartos proporcionales, la regla de tres compuesta, y el método de reducción a la unidad.

El trabajo realiza aportes en la enseñanza que debe impartir el profesor en cuanto a la proporcionalidad pues permite identificar cuáles son las dificultades que se presentan cuando se encamina a los estudiantes a utilizar estrategias que solo conllevan a la mecanización y que por el contrario no permiten encontrar las relaciones entre magnitudes.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Licenciatura en Matemáticas – Director: Ph. D. YÁÑEZ CANAL, Gabriel

## Resume

**Title:** Simple proportionalities strategies used by students of right grade\*

**Author:** Prieto Martinez, Luz Jhoanna\*\*

**Key Words:** Simple Proportionalities – strategies- Characterization

### Description

Proportionalities are considered as a powerful concept from many fields in which they find a number of applications. However, treatment often given to it by educational institutions is purely mechanical and to solve such problems the rule of three is widely used; Likewise, applications that occur in school as examples and exercises are not contextualized therefore students do not feel attracted to this type of exercises.

Given this approach is natural to wonder how students are analyzing the problems of proportionality and the strategies used to solve them. Two proportionalities diagnostic tests were applied to four hundred students, from who twenty were taken as the sample group to be analyzed qualitatively, the aspects which were taken into account were the characterization of the situation, different ways to assume the proportionalities and the reasoning that involved each one of them.

This research shows that the solving strategies used by the students are given by the use of scalar operator, compound cross multiplication, and unit reduction method.

The research provides contributions to the instruction that the teacher should impart in relation with proportion because it allows to identify which are the difficulties when students are led to use strategies which only lead to mechanization instead of using strategies which permit them to find relationship between the amounts.

---

\* Grade Work

\*\* Faculty of Sciences – School mathematics – Licenciante in Mathematics. Ph.D. YÁÑEZ CANAL, Gabriel

## **Contenido**

PRESENTACIÓN .....	1
1    CAPÍTULO 1 .....	4
1.1    ESTUDIOS PREVIOS.....	4
2    CAPÍTULO 2.....	11
2.1    MARCO CONCEPTUAL.....	11
3    CAPÍTULO 3.....	21
3.1    CARACTERIZACIÓN DE LAS SITUACIONES .....	21
4    CAPÍTULO 4.....	28
4.1    ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN.....	28
4.1.1    OPERADORES ESCALARES: LA ESTRATEGIA MÁS USADA... 29	
4.1.2    LA REGLA DE TRES: UNA APLICACIÓN DE LARGA TRADICIÓN .....	44
4.1.3    EL CONTEXTO Y EL USO DE CIFRAS SENCILLAS FACILITAN LOS REPARTOS PROPORCIONALES. ....	54
4.1.4    REGLA DE TRES COMPUESTA: UN ALGORITMO POCO COMPRENDIDO. ....	60
CONCLUSIONES .....	74
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	79
ANEXOS.....	81

## **Tabla Anexos**

Anexo 1. Test diagnóstico No. 1 sobre proporcionalidad

Anexo 2. Test diagnóstico No. 2 sobre proporcionalidad

# PRESENTACIÓN

La proporcionalidad es vista desde muchos campos como un concepto potente que encierra un sin número de aplicaciones. Sin embargo, muchas veces el tratamiento que se le da en la escuela es puramente mecánico y la resolución de problemas de este tipo se ve muy arraigado por procesos como el de la regla de tres, una estrategia numérica muy usada en este tipo de situaciones. Así mismo, las aplicaciones que en la escuela se dan como ejemplos y ejercicios son poco contextualizados y de muy poco atractivo para los estudiantes.

Ante este enfoque es natural preguntarse por el cómo están analizando los estudiantes los problemas de proporcionalidad y qué estrategias usan para resolverlos. Ese es el objetivo de este trabajo de investigación: Analizar las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de proporcionalidad, para así caracterizarlas teniendo en cuenta las diversas formas de asumir la proporcionalidad.

Consecuente y fundamentada en el estudio de artículos relacionados con el tema y algunos libros que tratan el tema de la proporcionalidad, elaboré dos tests diagnósticos en los que se involucran situaciones que tienen que ver con proporcionalidad simple y algunas de sus aplicaciones.

De este modo, la investigación fue aplicada en tres colegios oficiales (mixtos<sup>1</sup>) con 239 estudiantes en total y tres privados (uno femenino y los otros dos mixtos) con 161 estudiantes en total, en las ciudades de Floridablanca y Bucaramanga del Departamento de Santander, para un total de 400 estudiantes.

---

<sup>1</sup> Cuando hablo de mixtos me refiero a que en estos colegios estudian niños y niñas.

Los test fueron aplicados en cada colegio entre los meses de julio y agosto del 2006. El grado escogido fue octavo (con estudiantes cuyas edades oscilan entre 13 y 15 años) pues se requería que los estudiantes ya hubieran estudiado el tema. Este tema de estudio se encuentra ubicado en los grados sexto y séptimo de la educación básica secundaria, de acuerdo a lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Antes de aplicar el test a cada grupo, realicé una breve presentación en la que les conté a los estudiantes de que se trataba mi proyecto de grado y la colaboración que de ellos requería, solicitando el dejar consignados explícitamente todas las operaciones que requirieran para la solución de cada situación propuesta. El tiempo asignado para la prueba fue de 50 minutos por test y fueron aplicados en dos días diferentes; Estuve acompañándolos en este tiempo pero solo intervine para aclarar palabras o frases, y en ningún momento para guiar las respuestas de los estudiantes, ya que no era el objetivo de la investigación.

Aunque las pruebas fueron aplicadas a 400 estudiantes, se seleccionaron sólo veinte de ellas -aquellas en donde se pudo observar una mayor explicación en cada unos de los procedimientos realizados al resolver cada situación- para el análisis cualitativo de cada test.

Finalmente, la presente relatoría se encuentra organizada de la siguiente manera:

Capítulo uno: ESTUDIOS PREVIOS, en donde muestro algunas de las investigaciones realizadas en torno a la proporcionalidad, que fueron un soporte para el desarrollo de este trabajo.

Capítulo dos: MARCO CONCEPTUAL, en donde expongo la importancia y el interés que ha despertado el estudio acerca de la proporcionalidad - considerada por los profesores de matemáticas como una de las nociones

básicas en la enseñanza y de difícil conceptualización- en las diferentes investigaciones llevadas a cabo en el campo de la Didáctica de la Matemática.

En el Capítulo tres: CARACTERIZACIÓN DE LAS SITUACIONES se explica cada test en forma general, relatando las diversas formas de asumir la proporcionalidad y los problemas propuestos.

En el Capítulo cuatro, ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN, realizo un análisis cualitativo de las estrategias más utilizadas por los estudiantes para resolver las situaciones de proporcionalidad dadas y se exponen las conclusiones obtenidas para el tratamiento de cada una de las situaciones planteadas. Dichas estrategias fueron clasificadas de la siguiente forma:

1. Operadores escalares: La estrategia más usada
2. La regla de tres: Una aplicación de larga tradición
3. El contexto y el uso de cifras sencillas facilitan los repartos proporcionales.
4. Regla de tres compuesta: un algoritmo poco comprendido.

Finalizo el documento con el capítulo cinco: CONCLUSIONES, seguido de las referencias bibliográficas y algunos anexos.

# 1 CAPÍTULO 1

## 1.1 ESTUDIOS PREVIOS

Antes de empezar este trabajo, revisé y analicé diversos artículos y estudios realizados alrededor de la proporcionalidad: la metodología para su enseñanza, los obstáculos más comunes en su aprendizaje, el abordaje en el aula, etc. En dicha revisión observé una gran preocupación por el manejo de los conceptos de razón y proporción, así como el de sus aplicaciones en las diferentes ciencias –en especial en física, química y astronomía.

A continuación detallo algunos de los trabajos que considero aportaron más en este estudio.

Dentro del programa de pregrado de la Universidad Industrial de Santander resalto el siguiente trabajo de grado:

- *Resolución de problemas: propuesta para el aprendizaje de conceptos de razón y proporción en estudiantes de sexto grado*, elaborada por Edwin Villamizar Ruiz en 1999. En esta propuesta el autor buscó desarrollar mediante una metodología activa, que el estudiante de sexto grado “hiciera matemáticas”, resaltando la utilidad en su vida cotidiana y sintiera placer al trabajar dentro y fuera del aula; con esta metodología, construyó el concepto de razón y proporción.

Para ello realizó tres actividades diagnósticas y propuso 10 talleres de los cuales aplicó cuatro.

Las actividades diagnósticas permitieron que los estudiantes plantearan razones en diferentes contextos (éxito en la germinación de semillas, relación entre la cantidad de estudiantes de sexo femenino y masculino del colegio y semejanza de figuras geométricas). Al notar la dificultad en el análisis y comparación de magnitudes, el autor diseñó unos talleres en los cuales el estudiante evidenció el manejo de la escala en la construcción de un plano del colegio, comparación de figuras (ampliadas y reducidas en tamaño) y de acuerdo a estas actividades, los estudiantes lograron identificar cuándo dos magnitudes presentaban proporcionalidad.

Y propuestas de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, como son:

- *Propuesta pedagógica para la conceptualización de razón y proporción*, trabajo elaborado por Emperatriz Sandoval Pacheco en 1996. En esta propuesta la autora buscó una alternativa en la enseñanza del concepto de razón y proporción en quinto de primaria a través de unas secuencias de clases intencionalmente dirigidas. El objetivo de estas actividades era que el estudiante construyera el concepto por medio de actividades lúdicas y con la metodología de resolución de problemas en situaciones del contexto familiar y social de los estudiantes. Ella trabajó con un grupo de 16 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 9 y 10 años. La autora planteó 9 situaciones didácticas, las cuales permitieron que los niños concluyeran que “cuando se comparan números se pueden establecer las razones” y que “cuando dos razones son iguales se tiene una proporción” (Sandoval, 1996). De la misma manera lograron trabajar algunas propiedades de las proporciones.
- *Propuesta pedagógica para la conceptualización de razón y proporción*, elaborado por Bernardo Alarcón Castillo en 1997. En esta propuesta el

autor realizó un estudio y análisis de las concepciones de estudiantes de quinto de primaria sobre razón y proporción, y a su vez una secuencia de clases que permitiera su comprensión. El objetivo de estas actividades era que el estudiante construyera los conceptos de razón y proporción. Los contextos utilizados fueron cantidades utilizadas en una receta de cocina (se les pedía que ellos hallaran la cantidad necesaria para más, y menos, personas), semejanza de figuras, perímetro de figuras. El autor concluyo, que: “(1) *Los estudiantes tienen clara la idea del factor amplificador el doble, el triple, etc.* (2) *Los niños relacionan que la cantidad de ingredientes necesaria para una receta varía según la cantidad de personas; a menos personas menos ingredientes y a más personas más ingredientes.* (3) *Las actividades que no manejan números enteros les cuesta más trabajo.* Y, (4) *Utilizan intuitivamente el concepto de proporción*” (Alarcón, 1997).

- *Propuesta metodológica para la interpretación y aplicación del concepto de proporcionalidad en las magnitudes físicas*, elaborado por Fabio Gustavo Correa González en 1996. En este trabajo el autor buscó que los estudiantes de décimo grado asociaran los conceptos de magnitudes directas e inversamente proporcionales al campo de la física. Los recursos utilizados fueron actividades de laboratorio y talleres de clase. En la actividad de inducción se hicieron prácticas sencillas de laboratorio y las situaciones didácticas se desarrollaron mediante el planteamiento de problemas físicos. Las situaciones planteadas se encaminaron a que los estudiantes encontraran diferentes relaciones (número de pesas y alargamiento del resorte, medida del resorte después de estirado, distancia recorrida por un auto en diferentes tiempos, entre otros); estas situaciones dieron lugar a encontrar que en estas situaciones se dan los diferentes tipos de proporcionalidad (directa, inversa y lineal) o en otros casos no había proporcionalidad (Área de un cuadrado y longitud de su lado).

Así mismo, expongo algunas propuestas analizadas para este estudio, que han abordado el tema de la proporcionalidad simple:

♦ Carretero (1989, p. 86) realizó un estudio basado en el campo conceptual<sup>2</sup> que constituyen las situaciones de proporción simple, proporción simple compuesta y proporción doble (solo trataré lo que se refiere a proporción simple y simple compuesta ya que proporción doble no hace parte de mi investigación). La autora exploró el efecto de la estructura multiplicativa –proporción simple– en situaciones problemas que requerían de una o varias multiplicaciones y divisiones.

En dicha investigación se realizaron tres experiencias en las cuales se aplicaron cinco problemas que tenían la estructura de isomorfismo de medidas<sup>3</sup>, de los cuales dos se resolvían mediante la multiplicación y tres mediante la división. A su vez dos problemas que tenían la estructura de proporción simple compuesta y que se resolvían mediante la multiplicación.

Las variables que la autora quiso controlar en la investigación son de orden matemático, en cuanto al efecto de las diferentes estructuras multiplicativas antes mencionadas; también controló una variable de orden lingüístico con la intervención de dos expresiones de cantidad “tres veces más” y “tres veces menos”.

Las particularidades encontradas en este trabajo son:

- a. A mayor edad del estudiante se observan mejores resultados; también se observó que la diferencia es más notable entre los

---

<sup>2</sup> Por “Campo Conceptual” se entiende el conjunto de problemas y situaciones en el que el tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de diferente tipo, pero en estrecha interconexión (Vergnaud, 1981b citado por Carretero, 1989, p. 86).

<sup>3</sup> El isomorfismo de medidas o estructura simple será tratado en el capítulo 2.

grados tercero y cuarto de primaria, a medida que aumenta el número de operaciones a realizar aumentan las dificultades.

- b. Los procedimientos más utilizados por los estudiantes son siempre aquellos “*que están favorecidos por el orden de presentación de los datos numéricos en los enunciados*”.
- c. Los procedimientos <<puramente numéricos<sup>4</sup>>> no se utilizan.
- d. En cuanto a los problemas donde interviene un operador escalar, la variable lingüística <<tres veces más>> es interpretada como <<tres de más>> o <<tres más>>, lo que muestra la ambigüedad de la expresión lingüística << tres veces más que >> ya que el error más frecuente es la interpretación aditiva de la relación escalar.
- e. En cuanto a los procedimientos de éxito, en los tres niveles escolares de los estudiantes, el procedimiento más utilizado es aquel donde *los niños reconocen desde un principio que la situación requiere una o dos operaciones de división (según el tipo de problema)*. Sin embargo si *la dificultad de la estructura multiplicativa y el número de operaciones aumentan estos procedimientos desaparecen* (Carretero, 1989, p. 94).

Destaco también el estudio hecho por Llinares y Sánchez (1992, p. 37) en relación a tareas de proporcionalidad numérica. Esta investigación está basada en las teorías que sustentan el aprendizaje desde la instrucción: “El aprendizaje desde la instrucción puede llegar a ser comprendido al considerar la forma en que ésta cambia los procesos cognitivos usados por los estudiantes para resolver determinadas tareas y dotar de significado a las nociones”.

En síntesis la evolución que se dio en las estrategias, se caracterizó por ser eficaz ya que permitió encaminar a los estudiantes hacia la comprensión de

---

<sup>4</sup> Es decir donde se combinan datos sin tener en cuenta el tipo de magnitud referente a cada uno de los números utilizados en el cálculo.

las relaciones de proporcionalidad numérica, enfrentándose a las tareas instruccionales desde sus propios puntos de vista. Además, la verbalización de las estrategias empleadas en su resolución les permitió la reconceptualización.

Los autores afirman que se dio un cambio en los procesos cognitivos de los estudiantes, ya que ellos readaptaron las estrategias empleadas teniendo en cuenta las características estructurales de cada situación, dando lugar a los <<saltos cualitativos<sup>5</sup>>>. Y sugieren que el problema, desde la perspectiva del vínculo entre el aprendizaje y la instrucción sigue abierto, se necesitan más estudios que impliquen diferentes contextos, magnitudes, clase de razones empleadas y modificación de la presentación de las tareas.

Finalmente, presento un resumen del trabajo que más me aportó en la realización de los test y el posterior análisis de los respectivos resultados:

- *Proporcionalidad directa La forma y el número*, elaborado por María Luisa Fiol y Josep M. Fortuny en 1990. Los autores plantean una propuesta didáctica para trabajar el concepto de proporcionalidad a partir de nociones geométricas, la manipulación de material y el trabajo en grupo. La propuesta está dividida en 8 talleres divididos en dos bloques que corresponden a la introducción y a las aplicaciones. En la introducción partieron del análisis de figuras geométricas (rectángulos) llegando al concepto de semejanza; se trabajó con fracciones equivalentes, con una aproximación de la función lineal y se verificaron algunas propiedades de la proporcionalidad. En las aplicaciones se estudiaron porcentajes, cambios de escala, construcción de figuras

---

<sup>5</sup> Los saltos cualitativos se dan cuando usan varias estrategias; por ejemplo la denominada <<modelo numérico>>, luego, pasa por el proceso de <<construyendo la respuesta>> (usando dobles y mitades) al coordinar las diferencias constantes, y finalmente emplea el <<isomorfismo aditivo>>, los operadores escalares y funcionales que permiten aproximarlos a las bases del futuro algoritmo de la regla de tres (Linares y Ciscar, 1992, p. 46).

planas semejantes, densidad, longitudes y peso en el mundo de Gulliver. En los resultados encontrados algunos estudiantes reconocen que los incrementos de largo y ancho son siempre iguales (en la construcción de rectángulos semejantes), aplican el método numérico de multiplicar en cruz; así como también al utilizar el método de la gráfica de la función lineal para resolver problemas de porcentajes, lo hacen de una forma más segura ya que dicho método no implica cálculos numéricos.

Teniendo en cuenta los trabajos que aportaron a este estudio, es importante mirar desde que grados se empieza a impartir la enseñanza de la proporcionalidad, cómo se da la adquisición de la noción de proporcionalidad y cómo se han clasificado las diversas estrategias usadas en la resolución de problemas de proporcionalidad.

## 2 CAPÍTULO 2

### 2.1 MARCO CONCEPTUAL

*“El pensamiento numérico implica reconocer que con frecuencia existen diferentes estrategias de solución para un problema dado. Cuando una estrategia inicial parece ser improductiva, la respuesta apropiada es formular y aplicar una estrategia alternativa. Esta tendencia a dedicarse a un problema explorándolo de diversas maneras permite comparaciones de diferentes métodos antes de hacer un juicio definitivo o dedicarse a una sola estrategia. (Lineamientos Curriculares, Ministerio de Educación Nacional MEN, pág.36)”*

En la teoría matemática y en diversas aplicaciones en las que algunas veces se refieren a determinación de constantes, índices antropométricos, económicos, cálculos astronómicos, entre otros, se muestra la razón y la proporción como conceptos potentes, con un amplio espectro de aplicabilidad y de gran importancia en la matemática, por ello, su introducción en las matemáticas escolares desde los primeros grados y en varios grados de escolaridad.

La enseñanza de la proporcionalidad se inicia en el quinto grado de primaria y se continúa en los primeros grados de la secundaria. Se toma como punto de partida el concepto de razón, que luego es usado para introducir el de proporción, y finalmente se muestran aplicaciones de la proporción mediante situaciones problema. La organización escolar de la proporcionalidad se caracteriza, según Obando (2005, p. 48), por no exponer la relación entre multiplicación y proporcionalidad y por mostrar la proporcionalidad al margen del estudio de las magnitudes y de la covariación entre magnitudes. De ahí se deriva una separación entre la proporcionalidad y las funciones.

La metodología empleada en su enseñanza muchas veces se ve marcada por el uso indiscriminado de procesos o algoritmos mecánicos. Fiol (1990) considera que por el contrario, el concepto de proporcionalidad debe partir de la visualización del espacio real o de conceptos cotidianos como cambios de monedas, cambios de escalas, cuantificación de mezclas, determinación de índices, etc.

En la escuela se estudia proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa y proporcionalidad compuesta. Estos tres casos de proporcionalidad se presentan a través de las reglas de tres simple directa, simple inversa y compuesta, respectivamente, las cuales, según Obando *“constituyen una estrategia algorítmica aritmética para la solución de problemas. Y al no abordar problemas de variación, podría pensarse que [los docentes] no tienen conciencia de la importancia que la noción de variación tiene para el proceso de conceptualización de los conceptos relativos a los diferentes tipos de proporcionalidad”*. (Obando, 2005 pág. 48)

Varias investigaciones, Ben Chaim y otros (1998) señalan que aunque “la habilidad para razonar proporcionalmente se desarrolla en alumnos de 5º a 8º grado” según el currículo de NCTM, “relativamente pocos alumnos de grados altos tienen la habilidad para usar el razonamiento proporcional de manera consistente”. De igual forma Ruiz y Massieu() mencionan a Mellar (1991) quien observó en su investigación que los estudiantes de niveles superiores al trabajar con problemas de proporcionalidad, se encuentran con deficiencias en este campo, ya que muchos de sus sujetos recurrieron a la suma, de manera incorrecta, como una estrategia que les permitiera llegar a una solución.

Dichas investigaciones han mostrado, que la adquisición de las destrezas del razonamiento proporcional no son del todo satisfactorias en la población en general. García (1999, p.33) considera que el razonamiento proporcional

*“está relacionado con la resolución de problemas cuya estructura matemática corresponde a la estructura de proporcionalidad”. Y que en su resolución, el estudiante “transita desde la comprensión cualitativa del enunciado, pasa a lo cuantitativo, establece relaciones multiplicativas en y entre espacios de medida con los operadores funcionales y/o escalares y da sentido a la solución”<sup>6</sup>. Estas destrezas se desarrollan más lentamente de lo que se cree; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Hoffer (1988), citado por Godino (2002, p.19) afirma que “estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado”.*

Desde la década de los años ochenta hasta ahora, se han realizado estudios, cuyos objetivos han sido conocer cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas que tienen que ver con proporcionalidad.

Estas estrategias han sido caracterizadas teniendo en cuenta diversos aspectos, entre ellos:

- *“Desde el **punto de vista epistemológico** se ha pasado de considerar el razonamiento proporcional como una manifestación de una estructura cognitiva global, a un trabajo más diferenciado centrado en el estudio de los procedimientos usados de forma espontánea por los estudiantes en la resolución de diversos problemas. Esto ha llevado a estudiar las soluciones dadas por los estudiantes desde un punto de vista epistemológico (Piaget, 1955) y desde un **punto de vista de la educación matemática** (Karplus, 1977, Hart, 1983, etc) a estudiar sus estrategias de resolución sean éstas correctas o no, y las variables que intervienen en esta resolución”<sup>7</sup>.*

---

<sup>6</sup> García (1999, p. 33)

<sup>7</sup> Fiol y Fortuny (1990, p. 10)

Autores como Tournaire y Pulos (1985), mencionados por Fernández (2001), han hecho investigaciones teniendo en cuenta las actuaciones de los estudiantes y las variables que afectan a las actuaciones de los estudiantes. En cuanto a las actuaciones de los estudiantes, han sido clasificadas en: estrategias correctas o satisfactorias, estrategias incorrectas o no satisfactorias y la categorización de actuaciones de acuerdo a un mayor o menor uso del razonamiento proporcional.

Estos autores consideran que las estrategias correctas más usadas son **las multiplicativas y las de construcción progresiva** “building up”. En las multiplicativas, *“los estudiantes relacionan los datos multiplicativamente de dos formas: una en la que relación la establecen entre el antecedente y el consecuente de una razón y la extienden a la otra, y otra en la que la relación la establecen en los productos cruzados”*<sup>8</sup>.

Fernández (2001, p.65) muestra otra forma de caracterizar las estrategias multiplicativas -en las cuales se tiene en cuenta la naturaleza de las cantidades que relacionan los estudiantes o cómo relacionan los datos del problema. Si los problemas son de tasa (rate), tanto si se trata de comparación de razones como de valor pedido, algunos autores, (Verghnaud, 1983,1988; Karplus et. Al., 1983b; Hart, 1988) identifican dos tipos de estrategia para su resolución:

- Si los estudiantes relacionan multiplicativamente cantidades homogéneas en un sistema o espacio de medida (utilizan razones internas), entonces el método lo denominan **“escalar”** o **“en”**.

---

<sup>8</sup> Fernández (2001) Precursores del Razonamiento Proporcional, Tesis no publicada, Valencia.

- Si las relaciones las establecen entre cantidades de distinta naturaleza o de distintos sistemas (utilizan razones externas), entonces el método lo denominan “**funcional**” o “entre”<sup>9</sup>.

Por su parte, Obando (2005) considera que estas estrategias están inmersas en la estructura multiplicativa que compone a la proporcionalidad, pues “*hace referencia a todas aquellas situaciones en las que se involucra una multiplicación, una división o la combinación de las dos*” (Obando, 2005, p. 31).

La estructura multiplicativa es definida por Carretero (1989, p. 86) como “*el campo o espacio conceptual en el que el tratamiento de las situaciones problemas presentadas al estudiante suponen nociones, relaciones, representaciones y operaciones diferentes, pero en estrecha conexión*”. Por ejemplo, se destacan algunos conceptos importantes como lo son la noción de proporción simple, las operaciones de multiplicación y división, entre otros. Estos conceptos contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional,

Obando, además explica que en cuanto a la multiplicación -a diferencia de lo que se cree y como se presenta en el sistema educativo- “*esta no es una relación ternaria sino cuaternaria en la que están cuatro magnitudes en juego*” (Obando, 2005, p. 32). Es decir, por ejemplo, en un problema como este: Una pesa de mantequilla cuesta \$450, ¿cuánto cuestan tres pesas de mantequilla? La relación sería:

$$1 \rightarrow 450$$

$$3 \rightarrow x$$

---

<sup>9</sup> Fernández (2001, p. 67) Precursores del Razonamiento Proporcional, Tesis no publicada, Valencia

y no como suele hacerse:  $450 \times 3 = 1.350$  o,  $3 \times 450 = 1.350$ . Obando afirma que esto se presenta porque no se hace explícita la relación entre la unidad y el valor de la unidad, lo cual no deja ver la relación de proporcionalidad implícita. De la misma manera “*cuando el problema se presenta como la suma  $450 + 450 + 450$  se está escondiendo la relación de proporcionalidad; esta forma en un principio sirve como una iniciación de lo que significa la multiplicación pero no muestra lo subyacente a las estructuras multiplicativas*”. (Obando 2005,p.32).

Para cualquier valor a y b, se tendría la estructura que menciona Vergnaud (1984), citado por García (1990, p. 18) la **estructura de proporción simple** “*es siempre una relación entre magnitudes o números, que viene dada por una función lineal cuya constante de proporcionalidad establece la relación entre las magnitudes o números correspondientes*”.

La proporción simple es analizada desde la estructura de **isomorfismo de medidas o estructura simple**, en donde intervienen *dos variables de dimensión diferente o dos <<espacios de medidas>>  $M_1$  y  $M_2$ , donde el uno depende linealmente del otro*

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{/c} & \\
 M_1 & \xrightarrow{\times c} & M_2 \\
 \\ 
 1 & \rightarrow & a \\
 \times b \downarrow & & \downarrow \times b \\
 b & \rightarrow & x
 \end{array}$$

Donde b es un operador escalar mientras que c es un operador funcional.

Carretero (1989, p. 86) señala que existen dos tipos de razonamiento o de relaciones matemáticas posibles: el uso de un operador escalar b, o el de un operador <<funcional>> xc para la multiplicación y que actúa como función inversa para la división / c.

Obando explica el caso general, que se da cuando ninguno de los cuatro términos corresponde con la unidad:

En este caso, la proporcionalidad simple directa se puede representar o modelar por una función tal que:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \rightarrow & f(x) = k \bullet x \end{array}$$

donde  $k$  es la llamada constante de proporcionalidad. Esto es, una función lineal. Esta función cumple con las siguientes propiedades:

1.  $f(x) + f(y) = f(x + y)$
2.  $f(\lambda \bullet x) = \lambda \bullet f(x)$

El estudio de los problemas de proporcionalidad simple directa a partir de la función lineal que la modela, y de sus propiedades, es generalmente pasado por alto en la escuela, y se simplifica su tratamiento a partir del uso de la regla de tres simple directa. En este tipo de problemas se trata de averiguar un valor desconocido dados tres valores. El siguiente diagrama representa un modelo de una situación típica en las cual está subyacente la proporcionalidad simple directa:

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ a & \rightarrow & f(a) \\ b & \rightarrow & f(b) \end{array}$$

Su solución pasa bien por un análisis escalar (analizando las relaciones entre las cantidades del mismo espacio de medida) o por uno funcional (analizando las relaciones entre las cantidades correspondientes de un espacio de medida al otro)<sup>10</sup>.

Un análisis escalar implica reconocer que si  $b = \lambda \bullet a$  entonces  $f(b) = \lambda \bullet f(a)$ . En este caso  $\lambda$  es un número racional y no tiene unidades<sup>11</sup>. Por su parte, un análisis funcional implica el reconocer que si  $a = \lambda \bullet f(a)$  entonces

---

<sup>10</sup> Lo cual desde ningún punto de vista implica que primero halla que enseñar la función lineal a los alumnos para que puedan resolver problemas de proporcionalidad directa, sino por el contrario, desde aquí se puede construir una aproximación bastante interesante para su estudio.

<sup>11</sup> Se hace uso de la segunda propiedad antes descrita.

$b = \lambda \cdot f(b)$ , o lo que es lo mismo, si  $\lambda \cdot a = f(a)$  entonces  $\lambda \cdot b = f(b)$ <sup>12</sup>. En este caso  $\delta$  es un número racional con unidades<sup>13</sup>, y es el inverso multiplicativo de la constante de proporcionalidad, o la constante misma. (Obando, 2005, p. 37)

Por otra parte, si se tiene en cuenta la estructura de los problemas de proporcionalidad García (1999) menciona a Vergnaud (1984), quien realiza aportes acerca de la estructura de los problemas de proporcionalidad, entre ellos, menciona el esquema de los problemas de proporcionalidad múltiple. Dicho esquema se caracteriza porque un espacio de medida  $M_3$  es proporcional a dos espacios de medida diferentes  $M_1$  y  $M_2$ . Este esquema está modelado por una función bilineal de la siguiente forma (García y Serrano, 1999, p. 20):

$$\begin{array}{l} F: M_1 \times M_2 \rightarrow M_3 \\ a \rightarrow b \\ c \rightarrow d \end{array}$$

La función bilineal  $F$  es  $F: M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$  y cumple que:

1.  $F(m_1 + m_2, n) = F(m_1, n) + F(m_2, n)$
2.  $F(m, n_1 + n_2) = F(m, n_1) + F(m, n_2)$
3.  $F(p \cdot m, q \cdot n) = p \cdot q \cdot F(m, n)$

Veamos el siguiente ejemplo propuesto por (García, p. 87) en el que se involucran tres magnitudes y se analiza la situación aplicando la propiedad 3 antes mencionada: Un carpintero para hacer 200 sillas ha tardado 15 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas al día ha de trabajar para hacer 240 sillas en 18 días?

Aquí se establecen las siguientes convenciones para resolver esta situación:

---

<sup>12</sup> Se hace uso de la definición de función dada antes.

<sup>13</sup> Un caso particular de este tipo de números se da en física o en química al trabajar con factores de conversión para la transformación de unidades.

Sea S el número de sillas, H el número de horas y D el número de días y sea las siguientes aplicaciones lineales: la función que relaciona el número de sillas y el número de horas, es decir, la función que va de D en S; y a su vez la función que relaciona el número de horas y el número de sillas, es decir, la función que va de H en S; entonces existe una aplicación bilineal  $F: D \times H \rightarrow S$  que cumplen la condición 3 antes mencionada; es decir, para cualesquiera  $r, t \in R, h_1 \in H, d_1 \in D, F(r \cdot d_1, t \cdot h_1) = r \cdot t \cdot F(d_1, h_1)$

$F(15,8) = 200$ , Entonces  $15 \cdot 8 \cdot F(1,1) = 200$ . De esta forma,  $F(1,1) = \frac{200}{120}$

$F(18, x) = 240$ , entonces  $18 \cdot x \cdot F(1,1) = 240$ . De esta forma,  $18 \cdot x \cdot \frac{200}{120} =$

240 , luego  $x = 8$ , tendrá que trabajar 8 horas diarias.

Así mismo, García (1999) menciona que dentro de la clasificación que hace Vergnaud (1984) acerca de las estructuras de los problemas de proporcionalidad también existen los correspondientes a la *comparación de ratas o razones*, cuyo esquema viene dado como sigue:

$$\begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ a & b \end{array} \qquad \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ c & d \end{array}$$

¿Cuál de las ratas es mayor?

¿Cuál de las ratas  $\frac{c}{a}$  o  $\frac{d}{b}$  es mayor?

Por ejemplo: María compra ocho discos de computador en \$5500. Luego vende tres de estos discos en \$2000. ¿Obtuvo utilidad en esta operación?

En este caso se debe identificar la rata o razón como un todo, es decir,  $5500/8 = 687,5$  comparado con  $2000/3 = 666,7$  indicando así que no obtuvo utilidad.

De Prada (1990) concuerda también con la existencia de la función bilineal y la plantea para magnitudes. Él considera que la proporcionalidad compuesta (caso de más de dos magnitudes) “es una aplicación multilineal de un conjunto de un número finito de magnitudes en una magnitud determinada”,

es decir, que conserva la linealidad en cada una de las magnitudes. Además verifica que las condiciones 1 y 2 (a la vez) propuestas por García y Serrano (1999) son equivalentes a la 3 por lo que es suficiente con que se verifique una de ellas.

De los estudios de estos autores podemos concluir que el pensamiento proporcional, por una parte, se encuentra enmarcado en el tratamiento de las estructuras multiplicativas, que comprende el isomorfismo de medidas, la proporcionalidad compuesta y doble; por otra parte, los repartos proporcionales y la relación entre magnitudes, entre otros.

Se hace necesario manejar de otra forma aquellos problemas cuya estructura multiplicativa está dada por el isomorfismo de medidas o estructura simple, de manera que se haga explícito la relación entre la unidad y el valor de la unidad, y en el caso general permita identificar la relación de proporcionalidad. Una forma útil a la hora de abordar dichos problemas podría ser aquella en donde se enfatice en el análisis escalar o funcional de los dos espacios de medida.

Teniendo en cuenta la clasificación de estrategias hechas por estos autores, desarrollé las preguntas de cada ítem atendiendo a la estructura del problema y de esta manera elaboré los dos test diagnósticos. A continuación presento los referentes que tuve en cuenta para cada pregunta.

# 3 CAPÍTULO 3

## 3.1 CARACTERIZACIÓN DE LAS SITUACIONES

En este capítulo se explica cada test en forma general relatando el propósito de cada situación y las posibles formas de asumir la resolución de los problemas de proporcionalidad según las estrategias anteriormente mencionadas.

En la creación de los Test 1 y 2 (véase los Anexos 1 y 2) sobre proporcionalidad tuve en cuenta aspectos como el contexto de las situaciones y conceptos relacionados con la razón, la proporción, proporción simple, proporcionalidad compuesta, repartos proporcionales y aplicaciones de la proporcionalidad. Para la creación de cada prueba tuve en cuenta los *Estándares Curriculares* (MEN, 2003) referentes al pensamiento variacional y los estudios relacionados con la estructura que compone a la proporcionalidad.

Se asignó un tiempo de 50 minutos para el desarrollo de las situaciones de cada test (cinco en cada uno). En cada test se les solicitó a los estudiantes que justificaran sus respuestas para identificar las estrategias que utilizaron al abordar cada situación.

La relación que se da entre la multiplicación y la proporcionalidad se trabaja implícitamente desde el tercer grado de primaria, de ahí que situaciones como: Juan compra 1 chocolatina en \$250, cuánto cuestan 6 chocolatinas, son familiares para los estudiantes, lo que sucede es que muchas veces no

se le da el enfoque que permita establecer la relación entre la unidad y el valor de la unidad, porque se ha venido trabajando como una relación ternaria y no cuaternaria, lo cual no permite ver la proporcionalidad implícita.

Situaciones de este tipo requieren de operaciones básicas como la multiplicación y la división. Este tipo de situaciones están inmersas dentro de las **estructuras multiplicativas**. Este referente lo tuve en cuenta para crear las situaciones 1 y 2 del test 1 y la situación 4 del test 2.

En la situación 1 del test 1:

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900, ¿cuánto cuesta libra y media?

se muestra una relación entre la compra de un artículo de la cotidianidad y el precio del mismo. El dominio numérico son los números naturales, en cuanto al precio del azúcar; y los racionales en cuanto a la cantidad de azúcar (una y media).

En la situación 4 del Test 2:

4. Un Arquitecto cobró \$7'850.000 por el proyecto de una zona industrial de 5 instalaciones iguales. En otra ocasión un inversionista le propuso que le realizará un proyecto similar al anterior, pero con 10 instalaciones. ¿Cuánto tuvo que pagar al arquitecto el inversionista?

se relaciona el número de instalaciones y el costo de la instalación. El dominio numérico en la situación dada son los números naturales. El hecho de que se haya dado el costo de 5 instalaciones y no el de una, me permitiría observar si los procedimientos utilizados tienden más al uso de operadores escalares o funcionales, a la aplicación de la regla de tres o el de reducción primero a la unidad.

El mismo análisis puede aplicarse para la situación 2 del Test 1.

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

En esta situación el contexto lo da la altura de un poste y su respectiva sombra. El dominio numérico son los naturales. En este caso la incógnita se encuentra en el espacio de salida, y se ha colocado intencionalmente para observar si los estudiantes al comparar las magnitudes que intervienen recurren a *la estrategia aditiva incorrecta*, es decir, si solo observan las diferencias entre la longitud del poste y su sombra o la superan y aplican el operador escalar, el operador funcional o aplican el algoritmo de la regla de tres.

También planteé una situación modelada mediante una tabla, ya que considero que este es otro tipo de representación que permite hacer evidente la proporcionalidad. Un ejemplo de ello se da en la situación 3 que propuse en el Test 1. En esta se pretendía observar si los estudiantes aplicaban alguna de las estrategias de tipo de estructura multiplicativa y las utilizaban para completar correctamente los datos que faltaban en la tabla que relacionaba la longitud de una varilla y la longitud de su sombra.

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
6	24
8	
	40
14	56

b) Si la longitud de la varilla es  $a$ , ¿cuánto mide la longitud de la sombra?

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$ , ¿cuánto mide la longitud de la varilla?

Además, quería mirar si después de la interacción que propiciaría el relacionar la longitud  $a$  con su sombra, los estudiantes generalizarían la situación para cualquier valor de la longitud de la varilla, y encontrarían la longitud de la sombra. Así, el dominio numérico de las magnitudes en la situación es el conjunto de los números naturales (más precisamente el subconjunto de los números pares); la constante que relacionaba la longitud de la varilla y la longitud de la sombra es el operador funcional 4.

En los test también involucré aplicaciones de la proporcionalidad caracterizadas porque se analiza el cómo varían dos o más magnitudes en función de otra y que generalmente son tratadas cuando se da el tema de proporcionalidad compuesta:

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Kilómetros caminando 10 horas diarias. ¿Cuántos Kilómetros recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

Esta situación corresponde a la primera del Test 2, aquí las magnitudes que se involucran son: número de días, kilómetros recorridos y horas diarias. Teniendo en cuenta el cambio en las magnitudes, se cumple que si el atleta camina menos horas, recorre menos kilómetros y, a su vez, si camina menos días, recorre menos kilómetros. El análisis correspondiente para esta situación, basado en lo que propone De Prada (1990) sería:

Sea  $F: D \times H \rightarrow K$ , donde D es el número de días, H el número de horas y K el número de kilómetros recorridos.

$$F(25, 10) = 300$$

$$25 \cdot 10 \cdot F(1 \text{ día}, 1 \text{ hora}) = 300 \text{ km} \text{ Entonces } F(1 \text{ día}, 1 \text{ hora}) = \frac{300}{250} \text{ km} = \frac{6}{5} \text{ km}$$

$$F(15, 8) = x$$

$$15 \cdot 8 \cdot F(1, 1) = x \text{ Entonces } 15 \cdot 8 \cdot \frac{6}{5} = x \Rightarrow x = \frac{720}{5} = 144, x = 144.$$

Y en la situación 2 del test 2 en la que se requiere hallar los kilogramos producidos en una granja dado el área de siembra y el número de trabajadores:

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75 kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

Las magnitudes que se involucran allí son: área de siembra, kilogramos producidos y número de trabajadores. Teniendo en cuenta el cambio en las magnitudes, se cumple que si hay más trabajadores aumenta la producción y si aumenta el área de siembra aumenta los kilogramos obtenidos en la producción.

Además, propuse tres situaciones que tienen que ver con repartos proporcionales: las situaciones 4 y 5 del Test 1, y la situación 3 del Test 2.

4. La construcción de un puente cuesta \$32.000.000 El estado subsidia el 40% de los gastos. Los dos pueblos comunicados por el puente tienen que pagar el resto de manera proporcional al número de habitantes, que son 1000 y 1500 respectivamente. Calcula la cantidad que debe pagar cada pueblo.

Con esta situación pretendí observar si los estudiantes realizaban repartos proporcionales entre las tres partes que intervienen (el estado, el pueblo de 1.000 y el de 1.500 habitantes). Para ello era necesario que supieran hallar el porcentaje de una cantidad así como identificar que el total es al 100%, y que este se debía distribuir: 40% para el estado y el 60% para los pueblos, sin olvidar la cantidad de habitantes, por lo que al pueblo de 1.500 habitantes le corresponde aportar más que al pueblo de 1.000 habitantes.

En la situación 5 del Test 1 se plantea el caso de la apertura de un negocio en el que los socios invierten un capital. Los estudiantes debían plantear una ecuación de primer grado con una incógnita ya que se les preguntaba el beneficio o ganancia que obtenía después de un año. En este caso era necesario tener en cuenta que no todos habían colocado la misma cantidad, y que lo que aportaron dos de los socios estaba en función de lo que aportó un tercero. Esta situación requiere del manejo de solución de ecuaciones con una incógnita y es más compleja que las demás situaciones:

5. Juan, Sofía y Pablo fundaron un negocio de manera que Juan tiene el doble de capital invertido que Sofía y Sofía los  $\frac{3}{4}$  de Pablo. Al cabo de un año han obtenido un beneficio de \$720.000. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?

Con la situación 3 del Test 2 pretendía observar si los estudiantes podían realizar repartos de una cantidad de caramelos de acuerdo al aporte que habían hecho cada uno de los amigos; las magnitudes que intervienen son la

cantidad de caramelos y el precio del total de caramelos. El dominio numérico son los naturales, cantidades pequeñas que son cotidianas en las relaciones de compra de artículos

**3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1.000, \$1.500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?**

Finalmente, en la situación 5 del Test 2, incluí una situación en la que hace una comparación de razones. El contexto lo dan las anotaciones hechas por tres jugadores después de un partido.

En ella se requiere que los estudiantes realicen comparaciones entre los jugadores, mediante la razón entre el total de lanzamientos y los lanzamientos convertidos, de los lanzamientos convertidos y el total de lanzamientos o mediante porcentajes. Veamos a continuación la situación:

5. La siguiente tabla muestra la efectividad en los lanzamientos de 3 jugadores después de un partido de baloncesto.

Jugador	Lanzamientos convertidos	Total de Lanzamientos
A	10	20
B	8	24
C	14	30

¿Cuál de los tres jugadores es el más efectivo? ¿Por qué?

En general en los test busqué que hubiera diversidad en cuanto los contextos así como en las estructuras de los problemas, partiendo de la estructura de proporcionalidad simple hasta la compuesta. También, involucré situaciones de porcentaje y repartos proporcionales. Dichos problemas obtuvieron variadas estrategias las cuales son relatadas y analizadas haciendo la

triangulación entre los resultados obtenidos, los aportes de los autores anteriormente mencionados y mi punto de vista.

## 4 CAPÍTULO 4

### 4.1 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

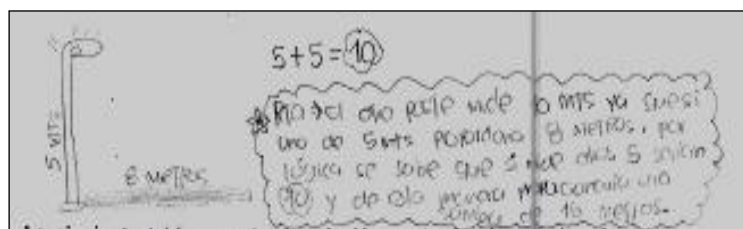
Para el tratamiento de cada una de las situaciones planteadas, las estrategias encontradas fueron clasificadas de la siguiente forma:

1. Operadores escalares: La estrategia más usada
2. La regla de tres: Una aplicación de larga tradición
3. El contexto y el uso de cifras sencillas facilitan los repartos proporcionales.
4. Regla de tres compuesta: un algoritmo poco comprendido.

Esta clasificación se obtuvo al identificar que en los problemas inmersos en la estructura multiplicativa la estrategia más usada es la de los operadores escalares. A su vez la regla de tres es uno de los algoritmos con más representatividad y uso en los problemas de valor pedido.

Por otra parte, también pude observar que el uso de cifras sencillas y el contexto favorecen un mejor desempeño a la hora de realizar repartos proporcionales. Por último quise abarcar el contexto que se enmarca en los problemas que se adjudican a la regla de tres compuesta, teniendo en cuenta que el tratamiento que se le da en su mayoría es algorítmico y no del todo comprendido.

#### 4.1.1 OPERADORES ESCALARES: LA ESTRATEGIA MÁS USADA



Dentro de las estrategias más usadas por los estudiantes, encontré que el uso de los operadores escalares es muy marcado, recurriendo a las multiplicaciones y divisiones por escalar para dar solución a las situaciones propuestas.

Observemos algunas de estas soluciones:

En la pregunta 1 del test 1 -donde se requiere determinar el costo de una cantidad de cierto producto dado el costo de la unidad- Yuleidy responde:

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

$$\begin{array}{r} 450 \overline{) 900} \\ \underline{900} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 900 \div 2 \\ \underline{450} \end{array}$$

\$ 1.350 = Libras y medias de Azúcar.

Cuando dice que es libra y media se refiere que la media es la mitad de la libra, así sumando el valor de cada peso se da la respuesta del valor total.

Situación 1 del test 1, Yuleidy, Julio de 2006

Podemos ver que ella inicialmente divide por 2 para determinar el costo de la media libra y luego suma este resultado (el costo de media libra de azúcar) con el de una libra y de esta manera calcula el costo requerido.

El mismo razonamiento hace Yesika:

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

1LB = \$900  
 1/2 = \$450

$$\begin{array}{r} 900/2 \\ \underline{180} \\ 1450 \end{array}$$
 → \$900 se divide entre 2 nos da el resultado que es \$450

$$\begin{array}{r} \$450 \\ + \$900 \\ \hline \$1350 \end{array}$$
 \$450 es lo que cuesta la media LB y ahora se suma con \$900 que es lo que vale la libra y el resultado es 1350 que es lo que cuesta la LB 1/2.

Situación 1 del test 1, Yesika, Julio de 2006

Ambas explican el porqué de sus operaciones, “450 es lo que cuesta la media y ahora se sumaría \$900 que es lo que vale la libra y el resultado es \$1350 que es lo que cuesta una libra y media”; de esta manera muestran que comprenden muy bien que si la cantidad aumenta, el precio también aumenta.

En el caso de Bryan, él realiza el mismo proceso, pero además expone el resultado en términos del número  $1\frac{1}{2}$ :

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

$$\begin{array}{r} 900/2 \\ \underline{180} \\ 1450 \end{array}$$
 1 libra vale 900  
 1/2 libra vale 450

$$\begin{array}{r} 900 \\ + 450 \\ \hline 1350 \end{array}$$
 por tanto 1 libra 1/2 vale 1350

Libra y media cuesta 1350

Situación 1 del test 1, Bryan, Julio de 2006

Bryan no hace el producto de  $900 \times 1\frac{1}{2}$  directamente, sino que aplica propiedad distributiva  $900\left(1 + \frac{1}{2}\right)$  transformando el producto de  $900\left(\frac{1}{2}\right)$  en la división de \$900 entre dos, y luego suma los \$900 de una libra. Al respecto Ruiz (2003) menciona que el uso de este tipo de estrategias es bastante común, por ejemplo, en la investigación realizada por Hart (1988) sobre proporcionalidad, se evidenció que un gran número de estudiantes

resolvieron los problemas sin la implementación de la multiplicación (llevándola a sumas) y que evadían la manipulación de las fracciones.

Muy pocos estudiantes hicieron uso del operador escalar  $\frac{3}{2}$  como expresión

fraccionaria del mixto  $1\frac{1}{2}$ . Este proceso es de mayor complejidad, ya que se

requiere transformar la cantidad *una y media* (número mixto) en un operador

racional y razonar así: “como una libra de azúcar cuesta 900 entonces  $\frac{3}{2}$

de libra de azúcar costaba  $\frac{3}{2} \times 900$  igual a 1350”.

<i>Cantidad de Azúcar</i>	→	<i>Precio</i>
1	→	900
$\times 1\frac{1}{2} \downarrow$		$\downarrow \times 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	→	x

Manuel, por ejemplo, hace uso de este escalar, pero no lo utiliza en forma fraccionaria. Primero calculó el costo de media libra y luego lo multiplicó por tres.

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

$$\begin{array}{r} 11 \\ 900 \overline{) 2} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 18 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 00 \end{array}$$

la libra y media (1 1/2) vale 1.350.00 m/c

$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 3 \\ \hline 1350 \end{array}$$

Situación 1 del test 1, Manuel, Julio de 2006

Jhon hace un análisis similar:

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

B1 = 1350 cuesta la libra y media

$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 3 \\ \hline 1350 \end{array}$$

Situación 1 del test 1, Jhon, Julio de 2006

Carretero (1989) menciona que este proceso hace parte de la estrategia escalar, pues “se establece la relación entre dos magnitudes de un mismo espacio de medida” en este caso tres medias libras de azúcar cuestan más que una.

Al solucionar la pregunta 2 del test 1 también es notoria el uso de los operadores escalares. En esta situación se solicitaba hallar la altura de un poste (dando su sombra y la altura y sombra respectiva de otro poste en ese mismo instante).

Revisemos la solución que plantea Bryan:

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

$$\frac{5}{8} \times \frac{x}{16} = \frac{5}{8} \frac{10}{16}$$

Mide 10 metros porque 16 es el doble de 8  
Y 10 es el doble de 5

Situación 2 del test 1, Bryan Julio de 2006

Bryan explica que como la sombra del segundo poste es el doble del primero, entonces la altura también lo es. Podemos notar además que inicialmente plantea razones y forma una proporción.

Igual justificación plantea Daniel

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

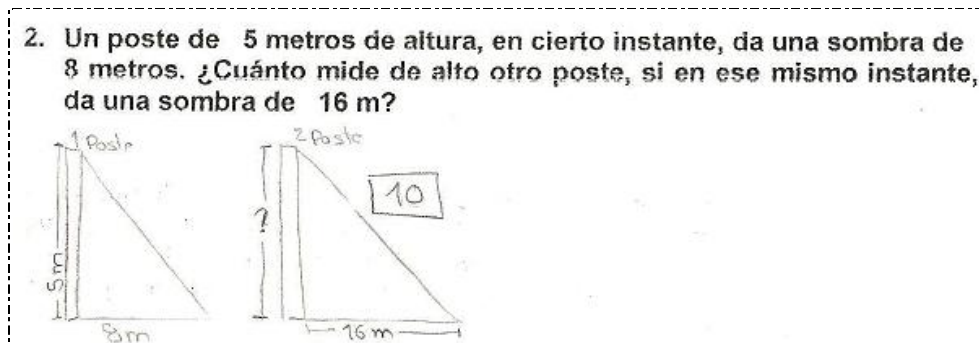
(plata mide 10 metros)

Justificación: Porque En ese instante la sombra da exactamente 16 m, lo que sería el doble de la sombra del otro poste.

Utilizé: multiplicación

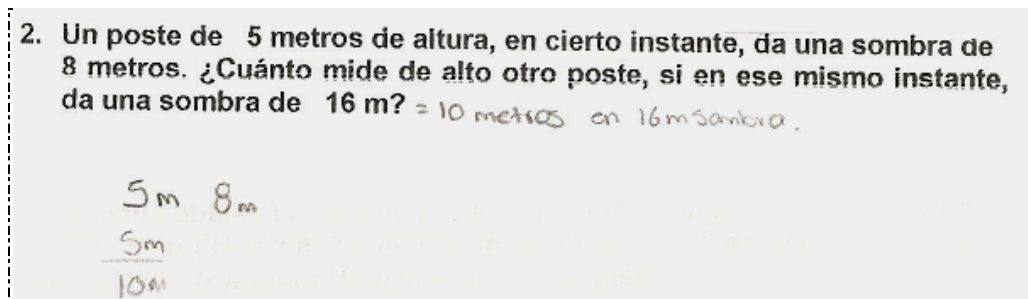
Situación 2 del test 1, Daniel, Julio de 2006

Walter, se ayuda mediante el dibujo de dos triángulos semejantes y concluye que la altura para el segundo triángulo es 10m -no deja rastro de alguna otra operación.



Situación 2 del test 1, Walter, Julio de 2006

Por su parte, Yesika realiza lo siguiente:



Situación 2 del test 1, Yesika, Julio de 2006

El análisis hecho por Yesika es el sumar otro poste de la misma altura al primer poste y así consigue que la altura sea 10m, pero no explicita nada acerca de lo que sucede con la sombra. Esta estrategia también es mencionada por Llinares (1992) -y que Hart (1981) denomina como un “*modelo numérico*” en donde en el primer espacio de medidas se suma la constante +5, mientras que en el segundo se suma +8.

Yuleidy, muestra más explícitamente el análisis que hace,

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

Si 8 es la mitad de 16, entonces será el doble de lo que mide el poste de la sombra que mide 8 metros

$$\frac{5 \times}{2}$$

10 metros, es la respuesta. lo que mide el poste de 16 mts de altura.

Situación 2 del test 1, Yuleidy, Julio de 2006

Ella realiza un análisis escalar, primero con la relación que se da en la longitud de la sombra y luego con la relación de la altura del poste. Utiliza – aunque no lo escriba de forma fraccionaria- el operador escalar  $\frac{1}{2}$ : examina que como la sombra de un poste es la mitad de la del otro, entonces la altura será el doble de lo que mide el poste, es decir 10 m.

Descubre que es posible manejar los dos operadores el de  $\frac{1}{2}$  o el doble, simultáneamente. Al respecto, Obando (2005) afirma que esto hace parte del análisis escalar, pues reconoce que el operador escalar  $\frac{1}{2}$  transforma 16m de sombra en 8m, y que por tanto al multiplicar a  $5m \times 2$  se obtiene la altura para un poste de 16 m, que es 10m.

Altura	→	Sombra
5	→	8
$\times 2 \downarrow$		$\uparrow / \frac{1}{2}$
x	→	16

Otro caso donde se hace presente el uso de operadores escalares y funcionales, es el que se da en el llenado de tablas.

En la situación 3 del test 1, en la que se requería completar una tabla de doble entrada que relacionaba la longitud de una varilla y su sombra, dados

algunos valores para la longitud de la varilla y otros para la sombra, se observaron los siguientes procedimientos:

Bryan establece la relación funcional entre la longitud de la varilla y su sombra, y consigue la generalización, *para cualquier valor a, la sombra mide 4a*, y también aplica el operador funcional  $\div 4$ .

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

$2 \times 4 = 8$   
 $6 \times 4 = 24$   
 $8 \times 4 = 32$   
 $10 \times 4 = 40$   
 $14 \times 4 = 56$

En la época del día la sombra de la varilla mide 4 veces que la varilla.

b) Si la longitud de la varilla es a ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

La longitud de la sombra mide  $4a$  porque es 4 veces la longitud de la varilla.

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

La longitud de la varilla es  $a$  porque:

$$\frac{4a}{4} = a$$

porque la varilla mide 4 veces menos que la sombra.

Situación 3 test 1, Bryan, julio de 2006

María, muestra un dominio de la utilización de operadores escalares en la solución de la situación dada. Por un lado encuentra que la longitud de la

varilla aumenta de dos en dos, mientras que la longitud de la sombra aumenta de ocho en ocho. A su vez reconoce el operador funcional y lo aplica en la generalización (para las preguntas b y c del mismo ítem):

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

*Handwritten notes in the table: "va de 2 en 2" next to the first column, and "va de 8 en 8" next to the second column.*

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra? mide 4 veces  $a$   
 $a \times 4 = 4a$

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?  
 $4a \text{ se } \div \text{ por } 4 \text{ y da } a$

Situación 3 test 1, María, julio de 2006

Sandra al igual que María también es explícita en cuanto a las operaciones que usa y señala que como la varilla va aumentando de a dos, para obtener la longitud de la sombra, multiplica la longitud de la varilla por 4. De la misma manera lo hace para un valor  $a$ , y también usa el operador  $\div 4$  para encontrar la altura dada cualquier sombra. “Me parece que por lógica la longitud de la varilla va aumentando 2, y a la longitud de la varilla se le multiplica para que de longitud de la sombra”; a su vez para el ítem b analiza: “porque según el ejercicio anterior se multiplica por 4 para sacar la sombra entonces multiplique por 4 da  $4a$ ”. En el ítem c dice: “a la sombra se le divide 4” por lo que su respuesta es  $a$ .

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

Justificación: Me parece que por lógica la longitud de la varilla va aumentando 2, y a la longitud de la varilla se multiplica 4 para que de la longitud de la sombra

utilize = multiplicación

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

$4a$

Justificación: Por  $a$  según el ejercicio anterior se multiplica por 4 para sacar la sombra entonces multiplico  $4 \cdot a$  y da  $4a$

utilize = multiplicación

c) Si la longitud de la sombra mide  $1a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

$a$

Justificación: a la sombra se le divide 4

utilize = división

Situación 3 test 1, Sandra, julio de 2006

En el caso de Anderson, él completa correctamente la tabla y encuentra que la relación funcional está dada por el operador  $\times 4$ ,

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

Todas se multiplican por 4

sin embargo cuando se le pide dar una expresión general que muestre dicha relación, tan solo propone un ejemplo que ya está dado en la tabla; al parecer no hay un dominio en el manejo de variables, lo que no le permite realizar una generalización.

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

$12 = 48$

se sigue la secuencia de la longitud de la varilla y se multiplica por 4

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

Situación 3 test 1, Anderson, julio de 2006

De igual forma, Fabian señala que en la longitud de la varilla todos los números son pares y que estos los multiplica por 4. Pero en el momento de plantear alguna generalización, solo retoma uno de los valores dados en la tabla, cuando la varilla mide 4 y a esta le corresponde 16 de sombra,

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica como se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

la hice así porq' para q' la longitud de la sombra fuera 8 entonces como 2 es la longitud de la varilla multiplica la longitud de la varilla q' son pares todos por 4 para q' la longitud de la sombra también fuera par

Situación 3 test 1, Fabian, julio de 2006

En cuanto a la pregunta c, plantea la expresión  $4a = 32$  y la solución que le da a esta ecuación es errada ya que recurre a la multiplicación y no a la división por 4.

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

longitud de la varilla  $a = 4 \Rightarrow 4 \times 4 = 16$  es la longitud de la sombra

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

longitud de la sombra  $= 4a = 32 \Rightarrow 32 \times 4 = 128$  es la longitud de la varilla

Situación 3 test 1, Fabian, julio de 2006

Jeferson, completa bien la tabla, pero no explica cuál es la relación que usa; cuando se le pregunta que pasa para cualquier valor él retoma uno de las alturas dadas en la tabla y no llega a la generalización;

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

La longitud de la varilla es 8m la longitud de la sombra es de 32m

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

Si la longitud de la sombra es 48m la longitud de la varilla es de 12m.

Situación 3 test 1, Jeferson, julio de 2006

Yuleidy, en cambio compara el valor de la longitud de la varilla y su sombra y señala que la relación es “el 2 es 4 veces igual al 8”,

3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
4	16
6	24
8	32
10	40
12	48
14	56

Viendo el primer ejemplo nos damos cuenta que el #2 comparado con el #8, el 2 es 4 veces  $\neq$  a el 8. Así, conseguimos la secuencia de acuerdo con los otros números.

Al parecer lo que quería decir, era que la longitud de la sombra era cuatro veces la longitud de la varilla. Muestra una comprensión de la relación que se pedía analizar, aunque no usa la expresión correcta. De ahí que logre llegar a una generalización:

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

longitud varilla = 4 veces dando el valor de la longitud de la sombra

Conclusión:

$$a \times 4 = \text{Longitud de sombra} = 4a$$

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

longitud sombra = 4 - que la longitud de la varilla

$$4a \div 4 = \text{Longitud de la varilla} = a$$

Situación 3 test 1, Yuleidi, julio de 2006

En cuanto a la formulación de una generalización para cualquier longitud de la varilla pocos estudiantes logran comprender estas preguntas. Se pudo observar que:

- a. Comprenden que la longitud de la sombra, está dada por el escalar el cuádruple, por ende es  $4a$ , pero no comprenden la pregunta b que se refiere al operador inverso del cuádruple, multiplicar por  $\frac{1}{4}$  ó dividir por 4, pues cuando se les pregunta por la longitud de la varilla, si la sombra mide  $4a$ , responde que es  $4a \times 4$ . Hay dificultad con el uso de operadores escalares fraccionarios.

b) Si la longitud de la varilla es a ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

longitud d  
varilla  $a = 4 = 4 \times 4 = 16$  es la longitud de la sombra

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

longitud  
de la sombra  $= 4a = 32 = 32 \div 4 = 8$  es la longitud de la varilla

- b. Realizan los dos análisis escalares, en donde usan el escalar  $\times 4$  y el escalar  $\times \frac{1}{4}$ , que aunque no es usado explícitamente, dividen por 4 para hallar el valor de la longitud de la sombra.

b) Si la longitud de la varilla es a ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

longitud varilla = 4 veces dando el valor de la longitud de la sombra

Conclusión:

$a \times 4 = \text{longitud de sombra} = 4a$

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

longitud sombra = 4 - que la longitud de la varilla

$4a \div 4 = \text{longitud de la varilla} = a$

En general en las situaciones analizadas se muestra que el uso de operadores escalares está marcado porque:

- Hay más facilidad, en el uso de operadores escalares naturales, que en el de operadores fraccionarios. De ahí los resultados encontrados en la situación 2 del test 1 comparado con la situación 1.

- Hay dificultad en transformar un número mixto en un operador fracción, los estudiantes muestran falencias en las operaciones con números mixtos.
- El uso de operadores escalares, no se da de forma explícita sino que se muestra acompañado de su aritmética inherente como lo menciona García (2005), multiplicaciones y divisiones.
- La situación de llenado de tablas tuvo éxito, tal vez por el uso de operadores escalares naturales y pequeños, el uso de operadores funcionales se muestran muy poco y solo los estudiantes que usan estos, son los que pueden llegar a una generalización de la situación, para cualquier valor de longitud del poste, dar una sombra dada.
- El uso de operadores funcionales no se da, es el gran ausente en las estrategias usadas por los estudiantes. Una estrategia que no fue dada por ningún estudiante o no se mostró algún proceso que se pueda relacionar con esta, es el análisis funcional, que según Obando (2005) estaría dado a través, del planteamiento de una relación entre los dos espacios de medida. Por ejemplo, en la situación 1 del test 1, la estrategia sería

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{x \frac{1}{900}} & \\
 \text{Libras de azúcar} & \xrightarrow{x \cdot 900} & \text{precio} \\
 1 & \rightarrow & 900 \\
 \frac{3}{2} & \rightarrow & x
 \end{array}$$

Implica reconocer que la multiplicación de  $\frac{3}{2}$  por  $f(1)$ , produce el valor de  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  y que esto es posible gracias al reconocimiento de la igualdad

$$\frac{900}{1} = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}},$$

lo cual es equivalente a que

$$\frac{3}{2} \times f(1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 900 \times \frac{3}{2} = 1.350 .$$

(Es decir, reconocer a  $f(1)$  como el valor de la constante de proporcionalidad).

- En general, no se observa un dominio aún del significado y tratamiento de variables.

#### 4.1.2 LA REGLA DE TRES: UNA APLICACIÓN DE LARGA TRADICIÓN

*“La importancia escolar de la regla de tres es de sobra conocida por sus aplicaciones, en la enseñanza tiene una larga tradición, pues es considerada como la culminación de los aprendizajes aritméticos elementales. Además, está ligada a los problemas de estructura multiplicativa”*

Bernardo Gómez Alfonso, Universidad de Valencia.

Desde la época de Euclides, la regla de tres ha estado relacionada con los conceptos de la teoría de las razones y proporciones. Gómez explica el porqué de su nombre:

*“Dícese regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se halla en tal proporción con el tercero*

*como el segundo con el primero. (Gómez, B, Universidad de Valencia)”*

Desde hace muchos años, la enseñanza de estos problemas los ha ubicado en un bloque de contenidos al final de la aritmética. Primero se desarrolla la teoría de las razones y proporciones y después se estudian éstas con ejemplos prácticos que se agrupan bajo distintos nombre, entre ellos el de la regla de tres simple, usada generalmente para hallar el cuarto proporcional conocidos los otros tres.

Esta estrategia fue de las más usadas por los estudiantes, sea posible su uso o no su aplicación. El uso de esta estrategia se hace de forma indiscriminada por los estudiantes, como un proceso mecánico que no permite ver cuáles son las relaciones existentes; muchos estudiantes sólo la utilizan en vía de la mecanización más no del entendimiento del porqué de dichos procesos.

Esto obedece a la facilidad en la aplicación del algoritmo, como lo mencionan Godino y otros (2002), que *“aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división para el tercero, con frecuencia muchos estudiantes manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo que están haciendo”* (Godino y Otros, pág. 13, 2002)

Las soluciones dadas por los estudiantes usando la regla de tres se hacen presentes en varias situaciones. Por ejemplo en la situación 2 del test 1:

Deicy plantea la correspondencia entre las dos magnitudes, la altura de un poste y su sombra, así:

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

5 metro  $\rightarrow$  8 metros de sombra  
 $X \rightarrow$  16 metros de sombra

$$\frac{5 \cdot 16}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

10 metros mide el poste de altura

Situación 2 del test 1, Deicy, julio de 2006

Y lo resuelve mediante la multiplicación de dos de los tres números y la división por un tercero. Sin embargo no hay un análisis de cómo es la correspondencia entre la altura y la sombra (si ésta es directa o inversamente proporcional).

Karen procede de la misma manera que Deicy:

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

1 = 5m altura = Sombra 8m  
 2 = " " = Sombra 16m

$$\frac{16 \times 5}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

PTA: el otro poste mide 10m

Situación 2 del test 1, Karen, julio de 2006

Jeferson, aunque no muestra el tradicional algoritmo de forma explícita, realiza el siguiente análisis: “si un poste de 5m da sombra de 8m, entonces una sombra de 16m es un poste de x, se multiplica 5m por 16m, eso es igual a 80 entre 8, es igual a 10m”

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m? 10m mide el poste

5m  $\rightarrow$  8 sombra  
 $X \rightarrow$  16 sombra

Se un poste de 5 metros da sombra de 8m  
 $\rightarrow$  una sombra de 16m es un poste de X  
 se  $X \cdot 5m \times 16m$  sombra  $= 80$  entre 8 = 10m

Situación 2 del test 2, Jeferson, julio de 2006

También se da el caso de Fabián, quien sin plantear la regla de tres, recurre al proceso usado por los otros estudiantes para resolver la situación:

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

6 x  
5 =  
8 0 8  
0 5 10

m f de = 10 m

Situación 2 del test 2, Fabián, julio de 2006

En la situación 4 del test 2 también se hizo presente el uso de la regla de tres. Deicy, usa la regla de tres, sin embargo no realiza un análisis de cómo cambian las magnitudes o qué tipo de proporcionalidad se está dando ahí.

4. Un Arquitecto cobró \$7'850.000 por el proyecto de una zona industrial de 5 instalaciones iguales. En otra ocasión un inversionista le propuso que le realizará un proyecto similar al anterior, pero con 10 instalaciones. ¿Cuánto tuvo que pagar al arquitecto el inversionista?

7'850.000 cobró un Arquitecto  
5 instalaciones  
10 instalaciones

7850.000 5  
x 10

$\frac{7850.000 \times 10}{5} = \frac{78500000}{5} = 15.700.000$

el arquitecto tuvo que pagar 15.700.000

Situación 4 del test 2, Deicy, julio de 2006

Karen lo resuelve de forma similar así: Multiplica por 10 y luego divide por 5, para encontrar que el costo de 10 instalaciones es de 15.700.000

4. Un Arquitecto cobró \$7'850.000 por el proyecto de una zona industrial de 5 instalaciones iguales. En otra ocasión un inversionista le propuso que le realizará un proyecto similar al anterior, pero con 10 instalaciones. ¿Cuánto tuvo que pagar al arquitecto el inversionista?

$$7'850.000 \quad 5$$

$$10$$

$$10 \times 7'850.000 = 78.500.000 \div 5 = 15.700.000$$

Rta: 15.700.000.

Situación 4 del test 2, Karen, julio de 2006

Al respecto Fernández (2001, pág. 66) menciona que el uso de los productos cruzados no implica el razonamiento proporcional por sí mismo y que prefiere considerarlo como *un método para resolver problemas de proporciones* y no como una estrategia para resolver un problema en el que esté involucrado un razonamiento proporcional.

En cambio que Yuleidy realiza lo que se conoce como reducción a la unidad, pues primero transforma el precio de 5 instalaciones en el de una, dividiendo por 5, luego multiplica por el número de instalaciones.

4. Un Arquitecto cobró \$7'850.000 por el proyecto de una zona industrial de 5 instalaciones iguales. En otra ocasión un inversionista le propuso que le realizará un proyecto similar al anterior, pero con 10 instalaciones. ¿Cuánto tuvo que pagar al arquitecto el inversionista?

$$7'850.000 \quad 5$$

$$0 \quad \underline{1570.000}$$

↓  
Cada instalación

$$1570.000 \times 10$$


---

Rta = 15'700.000 en inversionista.

Situación 4 del test 2, Yuleidy, julio de 2006

De la misma manera Jeimy también usa este proceso de reducción a la unidad, ella dice *“dividendo \$7.850.000 entre 5 me da el precio de una, es*

decir \$1.570.000; como son 10 instalaciones, se multiplica este valor por 10, es decir, 15.700.000”

4. Un Arquitecto cobró \$7'850.000 por el proyecto de una zona industrial de 5 instalaciones iguales. En otra ocasión un inversionista le propuso que le realizará un proyecto similar al anterior, pero con 10 instalaciones. ¿Cuánto tuvo que pagar al arquitecto el inversionista?

$7'850.000 \div 5 = 1'570.000 \rightarrow$  valor de cada instalación  
 $1'570.000 \times 10 = 15'700.000$

R/A: Se puede hacer este ejercicio de 2 maneras, tomando lo que cuestan las 5 instalaciones y multiplicarlo por 2 o como yo lo hice que es dividiendo  $7'850.000$  en 5 y eso me daría el precio de cada una de las instalaciones que sería  $1'570.000$  y como ahora es para construir 10 instalaciones multiplico esa cantidad por 10 para darme un total de  $15'700.000$  que sería el costo de las 10 instalaciones.

Situación 4 del test 2, Jeimy, julio de 2006

En los problemas de repartos proporcionales:

En la situación 3 del test 2 en la que se requería repartir una cantidad de caramelos de acuerdo a lo que cada persona había aportado también algunos estudiantes tienden a usar la regla de tres, por ejemplo, Karen realiza lo siguiente:

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

60	\$	$1000 \times 60 = 60.000 \div 3000 = 20$
60	$\begin{matrix} 3000 \\ 1000 \end{matrix}$	
60	$\begin{matrix} 3000 \\ 1500 \end{matrix}$	$1600 \times 60 \div 3000 = 30$
60	$\begin{matrix} 3000 \\ 500 \end{matrix}$	$500 \times 60 \div 3000 = 10$

P/A:  $\begin{matrix} \$1500 \rightarrow 30 \text{ dulces} \\ \$1000 \rightarrow 20 \text{ dulces} \\ \$500 \rightarrow 10 \text{ dulces} \end{matrix}$

Situación 3 del test 2, Karen, julio de 2006

Karen establece la correspondencia entre la cantidad de caramelos y el costo, planteando una regla de tres para cada uno de las personas que aportó.

Por su parte, Sandra plantea proporciones, y encuentra para cada uno de los aportes dados por los amigos cuánto le corresponde a cada uno.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

$$\frac{x}{1000} \cdot \frac{60}{3000} = \boxed{120} \rightarrow \text{Al q' dio 1000}$$

$$\frac{x}{1500} \cdot \frac{60}{3000} = \boxed{30} \rightarrow \text{Al q' dio 1500}$$

$$\frac{x}{500} \cdot \frac{60}{3000} = \boxed{10} \rightarrow \text{Al q' dio 500}$$

R/A = El q' pago 500 le tocan 10 al q' pago 1000 - 20  
 Y el que pago 1500 30 caramelos!

Situación 3 del test 2, Sandra, julio de 2006

Y cuando le corresponde hacer un reparto en la situación 4 del test 1, realiza un planteamiento correcto y su desarrollo le permite dar solución a una parte del problema dado, pues obtiene dos de los tres repartos que debía realizar.

4. La construcción de un puente cuesta \$32.000.000 El estado subsidia el 40% de los gastos. Los dos pueblos comunicados por el puente tienen que pagar el resto de manera proporcional al número de habitantes, que son 1000 y 1500 respectivamente. Calcula la cantidad que debe pagar cada pueblo.

$$\frac{x}{40} \cdot \frac{32.000.000}{100} = 128.000.000 \rightarrow \text{lo q' el estado subsidia}$$

$$\frac{1000}{x} \cdot \frac{2500}{128.000.000} = \boxed{512.000.000} = \text{le toca pagar el pueblo con 1000 habitantes}$$

Situación 4 del test 1, Sandra, julio de 2006

Fernández (2001) menciona que Tournaire y Pulos (1985) consideran que esta estrategia correcta se encuentra dentro de las estrategias multiplicativas, en esta los estudiantes relacionan los datos multiplicativamente, en este caso, establecen una relación entre el antecedente y el consecuente de una razón y la extienden a la otra.

Por otra parte, también encontré que algunos estudiantes hacen uso de la regla de tres de forma mecánica, no realizan ningún análisis para poder establecer relaciones entre las magnitudes que intervienen por lo que sus soluciones no son correctas.

Por ejemplo, María hace el siguiente planteamiento:

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

$$\begin{array}{r} 1L = 900 \\ x = 100k \\ \hline x = \frac{900 \times 100k}{1L} \\ = 900 \end{array}$$

RESPUESTA- Se multiplica 100L = 100 kilos  
Y ESA ES LA RESPUESTA

Situación 1 del test 1, María, Julio de 2006

Ella plantea la siguiente relación “1 libra cuesta 900, cuánto cuestan 100k”, este planteamiento no es correcto porque está mezclando las dos magnitudes, además el despeje tampoco es correcto lo que lo lleva a una respuesta equivocada.

También se da el caso de Andrés quien plantea la regla de tres haciendo uso de números decimales, sin embargo la respuesta obtenida no corresponde a la solución correcta lo que lo lleva a dar la respuesta que cuesta 13.5 por libra.

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

$$\begin{array}{r} 1Lb = 900 \\ 1.5Lb = x \\ \hline x = \frac{1Lb \times 900}{1.5Lb} \\ = 13.5 \times 1Lb \end{array}$$

$x = 13.5Lb$

Situación 1 del test 1, Andrés, Julio de 2006

Deicy al igual que los anteriores estudiantes plantea la regla de tres, solo que usa números racionales, sin embargo no la resuelve correctamente, en el procedimiento utilizado se muestra que no hay un dominio en el manejo de operaciones con números racionales.

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?

1 libra  $\rightarrow$  900.  $X = \frac{1\frac{1}{2} \times 900}{1}$   $X = \frac{1 \cdot \frac{1 \times 1800}{2}}{1}$   $X = \frac{1 \cdot \frac{1800}{2}}{1}$

$1\frac{1}{2}$  libra  $\rightarrow$  X

$X = \frac{1 \cdot \frac{1800}{2}}{\frac{1}{2}}$   $X = 1 \cdot \frac{1800}{2}$   $X = 900$

Situación 1 del test 1, Deicy, Julio de 2006

Para la situación 3 del test 1, Deicy usa la regla de tres en los ítems b, c, sin embargo aunque el procedimiento utilizado para dar solución es correcto, el planteamiento de los valores no corresponde y además hay errores en la simplificación de fracciones.

b) Si la longitud de la varilla es a ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

1a  $\rightarrow$  X  $\frac{8 \cdot 1a}{2a} = \frac{8a}{2a} = 4a$

2a  $\rightarrow$  8

la longitud de la sombra es 4a

c) Si la longitud de la sombra mide 4a ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

X  $\rightarrow$  4a  $\frac{2 \cdot 4a}{8a} = \frac{8a}{8a} = 1a$

2a  $\rightarrow$  8a

Situación 3 (ítem b, c) del test 1, Deicy, Julio de 2006

Andrés usa la regla de tres para dar solución a la situación 2 del test 1, planteando una relación entre la equivalencia entre metros y centímetros, que no se pedía, de aquí obtiene una equivalencia correcta, sin embargo cuando se refiere a los 8 metros no es correcta, este proceso no le permite resolver la situación dada.

2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?

$$\frac{5 \text{ m}}{8 \text{ m}} = \frac{x}{100 \text{ cm}}$$

$$x = \frac{5 \text{ m} \times 100 \text{ cm}}{8 \text{ m}} = 500 \text{ cm}$$

$$\frac{8 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = \frac{x}{500 \text{ cm}}$$

$$x = \frac{500 \text{ cm} \times 8 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 4000 \text{ m}$$

Situación 2 del test1, Andrés, Julio de 2006

En general el uso de la regla de tres se ve caracterizado por:

- Algunos estudiantes relacionan los datos multiplicativamente estableciendo una relación entre el antecedente y el consecuente de una razón y extendiéndola a la otra.
- El uso de esta estrategia, la regla de tres, se hace de forma indiscriminada por los estudiantes, como un proceso mecánico no realizan ningún análisis para poder establecer relaciones entre las magnitudes que intervienen por lo que sus soluciones no son correctas. Este tratamiento no les permite ver cuáles son las relaciones existentes de ahí que muchos estudiantes sólo la utilizan en vía de la mecanización más no del entendimiento del porqué de dichos procesos.
- En el procedimiento utilizado para dar solución a la regla de tres planteada se nota mucha dificultad en el manejo de operaciones con números racionales o decimales.
- Por otra parte, el método de reducción a la unidad en ocasiones también es usado por los estudiantes.
- Es un procedimiento que se aplica en la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y en el que se requiere hallar el cuarto.

- Es aplicada de forma indiscriminada en situaciones en la que es necesaria o impertinente, por lo que no permite evidenciar la posibilidad del uso del operador escalar o funcional, así como tampoco que el operador funcional es la constante de proporcionalidad.
- El hecho de que un estudiante domine este procedimiento no quiere decir que necesariamente este realizando un razonamiento proporcional.
- Concuerdo con Godino y Batanero (2002) en cuanto a que los métodos mecánicos del tipo de “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional, por lo que no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

#### **4.1.3 EL CONTEXTO Y EL USO DE CIFRAS SENCILLAS FACILITAN LOS REPARTOS PROPORCIONALES.**

“La estructura numérica de un problema puede ser utilizada para jerarquizar una serie de tareas atendiendo a su dificultad en relación con el razonamiento proporcional”  
(Fernández, 2001, pág.73)

Teniendo en cuenta que muchos investigadores proponen diferentes estructuras para los problemas de proporcionalidad, elementos como el contexto y el uso de cifras sencillas facilitan de cierta forma que los estudiantes realicen repartos proporcionales.

Al respecto Chaim y Otros (1998) citan a Tournaire y Pulos (1995) quienes mencionan que la variabilidad en el desempeño sobre el razonamiento

proporcional depende de un número de factores relacionados con el contexto y la estructura numérica de los problemas de proporcionalidad. De ahí que por ejemplo, entre las variables del contexto están la familiaridad del mismo, así como entre los factores de la estructura numérica están la presencia de razones enteras, el orden y la complejidad numérica.

Es el caso de la situación 3 del test 2 en la que se requiere hallar la cantidad de caramelos que le corresponde a cada persona dado que aportaron diferentes cantidades de dinero.

Se da el caso de Anderson quien, responde correctamente pero no muestra ningún proceso realizado que le halla permitido llegar a dicha respuesta.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

1000 = 20 caramelos  
1500 = 30 caramelos  
500 = 10 " "

Situación 3 test 2, Anderson, julio de 2006

Bryan, de la misma manera realiza repartos correctamente, pero no deja rastro de operación alguna.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

60

Al que dió 1500 le dan 30  
Al que dió 1000 le dan 20  
Al que dió 500 le dan 10

Situación 3 test 2, Bryan, julio de 2006

Otros estudiantes, en cambio utilizan la estrategia llamada reducción a la unidad, Por ejemplo: Deicy halla el costo de un caramelo y luego divide el aporte de cada una de las personas entre el costo unitario para hallar cuántos caramelos le corresponden a cada uno.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

$$\begin{array}{r} 3000 \overline{) 150} \\ 000 \underline{-50} \end{array}$$
 So vale cada caramelo

$$\begin{array}{r} 1500 \overline{) 150} \\ 000 \underline{-30} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \overline{) 50} \\ 000 \underline{-10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 20} \\ 000 \underline{-20} \end{array}$$

1. el que dio 1000 le toca 20 caramelos
2. el segundo, el que dio 1500 le toca 30 caramelos
3. el que dio 500 le toca 10 caramelos

Situación 3 test 2, Deicy, julio de 2006

Al igual Jeferson, también calcula el costo de un caramelo, solo que lo hace mediante la multiplicación, “un número que multiplicado por 60 le de 3000”, pues escribe 50, verifica la multiplicación y luego calcula cuánto le corresponde a cada uno dependiendo del aporte dado.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

al que dio

$500 = 10$   
 $1500 = 30$   
 $1000 = 20$

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 150} \\ 000 \underline{-20} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 50 \\ \hline 300 \\ 3000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \overline{) 150} \\ 000 \underline{-30} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \overline{) 50} \\ 000 \underline{-10} \end{array}$$

Situación 3 test 2, Jeferson, julio de 2006

Veamos el caso de Jeimy, ella explica, “Primero hay que buscar el costo de cada caramelo y eso me dio \$50, entonces se toma ese precio y sea divide por las cantidades que cada uno da de dinero”, finalmente ella obtiene que son 30 caramelos para el de 1500, 20 caramelos para el de 1000 y 10 caramelos para el de 500.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

$3000 \div 60 = 50$  ← costo de cada caramelo  
 $1500 \div 50 = 30$   
 $1000 \div 50 = 20$   
 $500 \div 50 = 10$

Rta: A la persona que invirtió \$1000 se le deben dar 20, a la que dio 1500 le deben dar 30 caramelos y a la que dio \$500 le deben dar 10, primero hay que buscar el costo de cada caramelo y eso me dio \$50 entonces se toma ese precio y se divide por las cantidades que cada uno dio de dinero.

Situación 3 test 2, Jeimy, julio de 2006

Sandra por su parte hace otro planteamiento, ella plantea proporciones entre las magnitudes que intervienen, cuántos caramelos le corresponden al que dio 1000 si 60 caramelos costaron 3000; ella da la respuesta correcta sin mostrar el proceso que utilizó para dar solución a dichas proporciones:

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

$\frac{x}{1000} \cdot \frac{60}{3000} = 20 \rightarrow$  Al q' dio 1000  
 $\frac{x}{1500} \cdot \frac{60}{3000} = 30 \rightarrow$  Al q' dio 1500  
 $\frac{x}{500} \cdot \frac{60}{3000} = 10 \rightarrow$  Al q' dio 500

Rta = El q' pago 500 le tocan 10 al q' pago 1000 - 20 y el que pago 1500 30 caramelos!

Situación 3 test 2, Jeimy, julio de 2006

También se da el caso de una estudiante que en un principio no realiza una interpretación correcta sobre la frase “cantidad de caramelos por precio” de ahí que haya multiplicado la cantidad de caramelos por el precio, al parecer cree que ese es el costo de un caramelo; sin embargo luego cae en cuenta del error y calcula correctamente el precio de un caramelo, es decir 50, nuevamente cae en el error e iba a multiplicar el dinero aportado por el valor de un caramelo, tacha esta operación y cae en cuenta de nuevo de su error,

finalmente calcula lo que le corresponde a cada persona según el aporte hecho.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

$$\begin{array}{r} 3.000 \times \\ \hline 60 \\ \hline \$180.000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \times \\ \hline 60 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \times \\ \hline 60 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \times \\ \hline 60 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \mid 60 \\ 0 \mid 20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \mid 60 \\ 0 \mid 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \mid 60 \\ 0 \mid 10 \\ \hline \end{array}$$

Rta = Caramelos al 1<sup>er</sup>, Caramelos al 2<sup>do</sup>, Caramelos al 3<sup>er</sup>

Situación 3 test 2, Jeimy, julio de 2006

Por otra parte, se presenta el caso de aquellos estudiantes que no realizan repartos de forma exitosa, por ejemplo, Diego comete un error en su análisis pues aunque calcula el valor de un caramelo, halla la razón que le corresponde a cada persona haciendo el cociente entre lo que aportó la persona y la cantidad de caramelos total, por lo que obtiene que el que aportó \$1000 debe recibir 16 caramelos, el que aporoto \$1500 recibe 15 caramelos y el que aporoto \$500 recibe 8 caramelos; ni siquiera tiene en cuenta que al hacer la repartición de esta manera la suma de la cantidad de caramelos repartidos no coincide con el total de caramelos que es 60, pues si sumamos sería  $25+16+8=49$ , lo cual no corresponde.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

$$\begin{array}{r} 3000 \mid 60 \\ 000 \mid 50 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \mid 60 \\ 400 \mid 16 \\ 40 \mid \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \mid 60 \\ 300 \mid 25 \\ 00 \mid \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \mid 60 \\ 20 \mid 8 \\ \hline \end{array}$$

Rta = A) por pago \$1500 le toca de 25  
 B) " " \$1000 le toca de 16  
 C) " " \$500 le toca de 8

Thalia, es otra estudiante que no realiza repartos correctamente, ella no tiene en cuenta el dinero aportado, sino solo la cantidad de caramelos y personas, ella reparte equitativamente, a todos por igual, por lo que concluye que cada uno debe recibir 20 caramelos.

3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?

de a 20 a cada uno, por que  $60 = 20 + 20 + 20 = 60$   
entonces son 3 personas sería de a 20 caramelos

Situación 3 test 2, Thalia, julio de 2006

En general, el uso del contexto y el uso de cifras sencillas en situaciones de reparto está dado porque:

- La presencia de razones enteras facilita llegar a la respuesta, en este caso realizar los repartos de forma proporcional al dinero aportado.
- Dentro de las estrategias utilizadas por los estudiantes se dan aquellas que están acompañadas de la aritmética inherente en este tipo de problemas como lo son la multiplicación y división para aquellos que no plantean proporciones y por otra parte, para los que lo hacen muestran un dominio del manejo de la resolución de proporciones.
- También se hace presente el uso de la estrategia reducción a la unidad, pues los estudiantes la utilizan para hallar el valor de un caramelo y de acuerdo a ello realizan los respectivos repartos.

- Por otra parte, también se da el caso de estudiantes que no muestran una apropiación del concepto de reparto proporcional, pues a pesar de la familiaridad con el contexto y las razones enteras no establecen ninguna diferencia para el que aporta más dinero, por lo que le hacen corresponder la misma cantidad de caramelos a cada persona.

Se hace necesario plantear un enfoque que permita que los estudiantes analicen con éxito este tipo de situaciones en la que se requiere hacer repartos proporcionales.

Otra de las categorías que analice tiene que ver con las situaciones que se adjudican a la regla de tres compuesta, teniendo en cuenta que el tratamiento que se le da en su mayoría es algorítmico y no del todo comprendido.

#### **4.1.4 REGLA DE TRES COMPUESTA: UN ALGORITMO POCO COMPRENDIDO.**

A lo largo de la enseñanza de la proporcionalidad se ha visto como el tratamiento de la regla de tres compuesta se utiliza cuando se estudian problemas de proporcionalidad en los que se relacionan tres o más magnitudes; está se clasifica como regla de tres compuesta directa o inversa dependiendo del cambio que se dé en las magnitudes. En cuanto a la regla de tres compuesta directa, Obando (p. 57) menciona que se pueden plantear tres tipos de problemas: dadas cinco cualquiera de las cantidades se pide hallar la otra; dadas dos de las relaciones hallar la relación faltante, y dadas dos relaciones, dos cantidades hallar la relación faltante y las otras cantidades.

En este estudio se plantearon dos problemas de proporcionalidad compuesta en los que se quiere observar que estrategia utilizan en los problemas que dadas cinco cualesquiera de las cantidades, se pide hallar la otra.

Un ejemplo de ello es la situación 1 del test 2 en la que se requiere analizar el cambio que se da en tres magnitudes, días, kilómetros y horas diarias; Dentro de las estrategias utilizadas por los estudiantes encontré:

Aquellos que olvidan un dato, solo observan la relación entre dos magnitudes y olvidan la tercera magnitud; veamos el caso de María quien establece una proporción entre la magnitud kilómetros y las horas diarias recorridas.

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$$\frac{300}{10 \text{ horas}} = \frac{x}{8} = \frac{300 \times 8}{10} = 240 \text{ recorre}$$

Situación 1 del test 2, María , Julio de 2006

María plantea una proporción entre los kilómetros recorridos y la cantidad de horas diarias caminadas por el atleta, establece la razón de kilómetros por hora y encuentra que caminando 8 horas diarias recorrerá 240 kilómetros dado que en 10 horas recorre 300 kilómetros, pero, no tiene en cuenta la variación entre el número de días que camina, pues esta disminuye.

En cambio, Deicy, halla la cantidad de kilómetros recorridos teniendo en cuenta sólo 2 de las tres magnitudes, por lo que obtiene que en 15 días recorre 120 kilómetros caminando 8 horas diarias, pero no tiene en cuenta las cantidades que las relacionan con las otras razones dadas.

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$$\begin{array}{r} 15 \times \\ 8 \\ \hline 120 \end{array}$$

RTA = en 15 días caminando  
 8 horas diarias 120 km.

Situación 1 del test 2, Deicy Carreño

Al igual que la estudiante anterior, Fabian también realiza un análisis similar, pues halla la razón entre los kilómetros recorridos y los días, por lo que obtiene que es 12, este valor lo multiplica por el número de horas que son 10, lo curioso es que lo ratifica realizando otra operación que lo lleva a la misma respuesta, número de días por horas diarias, al parecer esto le permite concluir que lo que recorrió son 120km. Pero, no está estableciendo una relación de proporcionalidad entre las magnitudes, no está analizando el cambio que se da en las magnitudes.

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$$\begin{array}{r} 300 \div 25 \\ 050 \overline{) 1500} \\ 00 \overline{) 1200} \\ \hline 120 \text{ km} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \times \\ 8 \\ \hline 120 \text{ km} \end{array}$$

el atleta recorrió en 15 días caminando  
 8 horas diarias 120 km

Situación 1 del test 2, Fabian Morales

Dentro de las estrategias utilizadas, también se hizo presente aquella en la que el planteamiento de las tres razones se hace de forma incorrecta. Plantean las tres razones pero la solución dada no corresponde a la respuesta correcta. Por ejemplo, Bryan plantea las proporciones bajo el enfoque de regla de tres compuesta; en el momento de darle solución se equivoca, esto se debe a que multiplica directamente el número de días por el número de horas diarias  $25 \times 10 = 250$  horas;  $15 \times 8 = 120$ .

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$\frac{25}{15} \quad \frac{300}{X} \quad \frac{10}{8}$   
 $\frac{8}{24}$   
 $\frac{25}{10} = 2.5$   
 $250 \text{ hrs}$   
 $\frac{300}{25} = 12 \text{ kms al día}$   
 $\frac{15}{8} = 1.875$   
 Recorre 120 kms por hora

Situación 1 del test Bryan de Jesús Parra

Sin embargo no establece una relación entre estas dos razones, a su vez intenta relacionar las 250 horas con la razón entre kilómetros y días que obtiene al dividir 300 entre 25, pero al final no lo hace y concluye que la solución es 120 km.

Otro caso es el de Jeferson, quien plantea una correspondencia entre magnitudes, días con días, horas con horas y kilómetros con kilómetros; sin embargo halla número de días por horas obteniendo 250 km y luego intenta hallar la razón entre kilómetros y días sin llevarlo a feliz término pues no concluye nada.

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

25 días                      15 días  
 300 Km                      8 horas.  
 $\frac{25}{10} = 2.5$   
 $250$   
 $\frac{300}{18} = 16.67$

Situación 1 del test 2, Jeferson Díaz

Por otra parte, Karen plantea la relación entre tres magnitudes, y establece la relación de dos formas; en la primera establece la incógnita como la

segunda razón y en la segunda forma la deja como la tercera razón, seguidamente toma dos de las tres magnitudes: días y kilómetros recorridos lo que le permite concluir que recorre 180 km en 15 días,

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

Días	Km	H.	Días	Horas	Km
25	300	10	25	10	300
15	X	8	15	8	.

Días	km
25	300
15	X

Res: 180 km.

Situación 1 del test 2, Karen Reyes

pero no tiene para nada en cuenta el cambio en la magnitud horas, de ahí que no planteé la otra proporción posible; esta estrategia permite ver la dificultad que existe en el manejo de situaciones de proporcionalidad compuesta, no existe del todo comprensión de las relaciones que se dan en este tipo de problemas.

Otra de las estrategias utilizadas, es aquella en la que se hallan las razones entre las magnitudes, sin embargo no se da el uso del planteamiento de razones ni proporciones explícitamente, sino que utilizan su aritmética inherente. Veamos el caso de Karen quien lo resuelve así:

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$300 \text{ Km} = 25 \text{ d} = 10 \text{ horas}$

$12 \text{ Km por día} = 10 \text{ horas diarias}$

$1^{\text{a}} \text{ recorre } 1.2 \text{ Km}$

$9.6 = \text{En } 8 \text{ horas diarias}$

Res: Se recorre **14.4 Km** en 15 días caminando 8 horas diarias

300	25
0.50	12
00	

$12 \div 10 = 1.2 \text{ Km}$

La estudiante halla el cociente entre kilómetros y días, obtiene que son 12 km por día, luego halla el cociente entre el valor obtenido y las horas diarias que equivale a 1.2 km por hora, seguidamente multiplica por el número de horas para obtener 9.6 km en 8 horas diarias, finalmente lo multiplica por el número de días que son 15 por lo que obtiene que en 15 días caminando 8 horas diarias recorre 144 km, que es la respuesta correcta. Se nota una buena comprensión y manejo de las relaciones que intervienen.

Un análisis similar es el que utilizan Sandra, Yesica y Yuleidy quienes haciendo uso de la matemática inherente, multiplicaciones y divisiones concluyen correctamente que son 144 km lo que recorre el atleta en 15 días y caminando 8 horas diarias, cabe resaltar la comprensión de las relaciones dadas y el buen manejo en la operatividad y manejo de los números racionales expresado en decimales.

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$300 \text{ Km} \div 25 = 12 \div 10 = 1.2 \text{ km por hora}$

$1.2 \times 8 = 9.6 \times 15 = 144$  - En 15 días

Resp = 144 km recorre en los 15 días

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$$\begin{array}{r} 300 \overline{) 25} \\ 0 \overline{) 12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 10} \\ 0 \overline{) 1,2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \underline{8} \\ 9,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,6 \\ \underline{15} \\ 144 \text{ km} \end{array}$$
 Rta: Recorrió 144 Km caminando.

Situación 1 del test 2, Yesica, julio de 2006

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias.  
 ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?

$$\begin{array}{r} 300 \overline{) 25} \\ 60 \overline{) 12} \end{array} \rightarrow \text{Km diarios}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 10} \\ 20 \overline{) 1,2} \end{array} \rightarrow \text{Km por hora}$$

$$\begin{array}{r} 1,2 \times \\ \underline{8} \\ 9,6 \rightarrow \text{Km diarios} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,6 \times \\ \underline{15} \\ 144 \end{array}$$
 Rta = El atleta recorrió 144 Km caminando.

Situación 1 del test 2, Yuleidy, julio de 2006

Estrategias similares a las ya mencionadas son las que se evidencian en la solución de la situación 2 del test 2. En esta situación se debía hallar los kilogramos producidos dado que el área de siembra se triplica y el número de trabajadores aumenta.

Por ejemplo, se da el caso del estudiante Bryan, quien para dar solución a la situación 2 del test 2 relaciona los kilogramos sembrados con el área de siembra, reconoce que esta se triplica por lo que multiplica la cantidad de kilogramos por 3, obteniendo 225 kg, a su vez multiplica por 10, observa que la magnitud “trabajadores” aumento, su diferencia entre el número de trabajadores es 10, y si esta aumenta en 10, la producción de kilogramos también por lo que obtiene 2250, sin embargo su respuesta es 225 kg, al parecer no tiene en cuenta la última operación lo que lo lleva a una respuesta errada.

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 3 \\ \hline 225 \\ \times 10 \\ \hline 2250 \end{array}$$

Harina 225 Kg

Situación 2 del test 2, Bryan de Jesús Parra

Cabe notar, que se hacen operaciones sin mencionar las magnitudes, predomina la operatividad lo que no le permite hacer un análisis correcto sobre los cambios que se dan en las magnitudes y como estas están relacionadas.

La estudiante Deicy, plantea una regla de tres simple en la que relaciona el área de siembra y la cantidad de kilogramos, la cual resuelve por el proceso muy conocido para dar solución a una regla de tres, como el producto en cruz; se observa que la estudiante tiene en cuenta que el área se triplica pero, olvida que el número de trabajadores aumenta por lo que la producción debería aumentar. esto no le permite llegar a la respuesta correcta.

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 75 \text{ Kg} \\ 3 \rightarrow X \end{array} \quad \frac{75 \times 3}{1} = \frac{225}{1} = 225$$

225 kg produce

Situación 2 del test 2, Deicy Carreño

Al igual que la anterior estudiante, karen por su parte, establece la relación que cómo el área se triplica, la cantidad de kilogramos sembrados también, además realiza un reparto proporcional de la cantidad de trabajadores pues dice que para cada área deberían ser 6 trabajadores, al parecer divide la cantidad de trabajadores que es 18 entre cada área, de ahí que diga: “ y para cada área se dividirían en 6 trabajadores”

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 3 \\ \hline 225 \end{array}$$
 Kg de hortalizas se van a recoger  
 y para cada área se dividirían en 6 trabajadores

Situación 2 del test 2, Karen , julio de 2006

Thalia realiza el mismo procedimiento que Karen para llegar a la respuesta, pero no tiene en cuenta el cambio que se da en la magnitud cantidad de trabajadores, ni como esta relacionado con las otras dos magnitudes.

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

$$\begin{array}{r} 75 \text{ kg} \\ \times 3 \\ \hline \text{kg } 225 \end{array}$$
 RTA: producimos 225 kg. hortalizas

Situación 2 del test 2, Thalia Contreras

En las estrategias encontradas, utilizadas por los estudiantes para resolver este problema note que cuando los cambios que se dan en una magnitud están escritos por medio de una expresión como “ se triplica”, algunos estudiantes no la tienen en cuenta y mucho menos logran expresarla

matemáticamente. Veamos el caso de Jeferson quien establece correctamente una regla de tres simple para la cantidad de kilogramos y la cantidad de trabajadores, la solución dada responde al hecho si el área de siembra se mantuviera constante, pero en este caso no es así, Jeferson olvida que el área de siembra se triplica o no lo tiene en cuenta.

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

75 kg — 8 trab.  
~~X~~ — 18 trab.

75 kg  
 18 t

600  
 75  
 1350 18  
 168,75

65  
 780  
 49

Respuesta 168,75 kg

Situación 2 del test 2, Jeferson Díaz

Un análisis similar realiza Jhon, quien resuelve el problema por medio de multiplicaciones y divisiones, cabe notar que cuando resuelve la división no considera necesario terminarla, es decir expresarla con decimales por lo que concluye que la cantidad de kilogramos producidos es 168 kg, una vez más este estudiante no tiene en cuenta el área se ha triplicado.

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

Solución

$$\begin{array}{r}
 B/- \quad 75 \\
 \times 18 \\
 \hline
 540 \\
 1500 \\
 \hline
 1350 \quad | \quad 8 \\
 55 \quad | \quad 168 \\
 70 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

168 kilogramos

Situación 2 del test 2, Jhon vasquez

María, por otra parte plantea proporciones al igual que Jeferson, obteniendo que 8 es a 75 como 18 es a x, la incógnita, la resuelve correctamente obteniendo que x es igual a 168.75kg, sin embargo no tiene en cuenta la otra magnitud, el área, y el cambio que esta tuvo, el área se triplica.

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

contra lo 10 trabajadores

$$\frac{8}{75} \rightarrow \frac{18}{x} \quad \frac{75 \cdot 18}{8} = 168,75 \text{ kg producen 18 trabajadores}$$

Situación 2 del test 2, María Rodríguez

Un ejemplo del buen manejo de las razones lo muestra Yeimi, quien realiza el siguiente análisis,

$$75 \div 8 = 9.375, \quad 9.375 \times 18 = 168.75 \quad 168.75 \times 3 = 506.25$$

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

$$75 \div 8 = 9,375$$

$$9,375 \times 18 = 168,75$$

$$168,75 \times 3 = 506,25$$

RTA: Producirá 506,25 kg por que tomamos la cantidad que se producía con 8 trabajadores y la dividimos, después esa cantidad la multiplicamos por la nueva cantidad de trabajadores y eso nos da la cantidad que producen. Pero como se triplico el terreno se multiplica por 3 y eso nos da la cantidad que se produce ahora.

Situación 2 del test 2, Jeimy Pinzon

Al dividir 75 entre 8, esta hallando la razón entre kilogramos y trabajadores, cuánto produce cada trabajador, luego lo multiplica por 18 porque el número de trabajadores aumenta a 18, y finalmente lo multiplica por 3 teniendo en cuenta que el área se triplica. Esta estudiantes muestra un buen dominio en el manejo de razones así como de la operatividad que está implícita en ellas, esto le permite resolver correctamente la situación planteada.

A su vez, también encontré un estudiante que reduce un problema de proporcionalidad compuesta a un planteamiento de regla de tres simple, veamos:

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

Granja de hortalizas produce 75 kg laborando 8 trabajadores.

$$\begin{array}{r} 75 \text{ kg} \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$$

$$18 \times 75 = 1,350 \div 6 = 168,75 \times 3 = 506,25$$

RTA: producirá 506,25

Situación 2 del test 2, Karen Reyes

Karen, plantea una regla de tres simple que relaciona la magnitud kilogramos y trabajadores, ella la resuelve correctamente obteniendo que los kilogramos producidos son 168.75, y luego lo multiplica por 3, pues identifica que si el área se triplica la producción de hortalizas también, por lo que obtiene que se producen 506.25kg en total. Muestra un buen manejo en la operatividad de la regla de tres, que acompañado del análisis de cómo están cambiando las magnitudes le permite llegar a la respuesta correcta.

Por otra parte, también note que algunos estudiantes no interpretan cómo están cambiando las magnitudes ni como se relacionan, por ejemplo Fabian, realiza operaciones entre diferentes magnitudes:

2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?

$$\begin{array}{r} 75 \\ 13 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 254 \\ 18 \\ \hline 200 \\ 25 \\ \hline 450 \text{ kg} \end{array}$$

Si aumentaron el área de siembra y aumentaron los trabajadores se recogerán 450kg

Situación 2 del test 2, Fabian , julio de 2006

halla el cociente entre cantidad de kilogramos y la nueva área de siembra, este valor lo multiplica por 18 que son el número de trabajadores, dado que este aumento, sin embargo no tiene en cuenta que estos no están directamente relacionados sino que son inversamente proporcionales, de ahí que obtenga que son 450kg, lo cual es errado, dado que olvida una de las 5 cantidades que intervienen, y es que en un principio la cantidad de trabajadores era 8.

En general las estrategias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidad compuesta se caracterizan porque:

- Cuando se introducen frases como “el área se triplica” pocos estudiantes logran interpretar el operador escalar 3, lo que no les permite resolver con éxito la situación dada.
- Observé que en los problemas donde se tienen 5 cantidades y se pide hallar la otra, los estudiantes tienden a reducirlo a un problema con dos magnitudes, olvidando la relación que existe con la tercera magnitud.
- Algunos estudiantes logran plantear su solución utilizando el método de reducción a la unidad, lo cual les simplifica los procesos, esto les permite relacionarlos mucho más fácilmente con los cambios que se dan en una tercera magnitud, ya sea que aumente o disminuya.
- Muchos de los estudiantes prefieren resolver este tipo de problemas haciendo uso de las razones, lo hacen utilizando los procesos matemáticos que están implícitos, como lo son multiplicaciones, divisiones, manejo de los números racionales (expresados como un decimal).
- No hay un total dominio del manejo y planteamiento de la regla de tres compuesta, pues muestra que cuando se quiere resolver situaciones de proporcionalidad compuesta, sino se tiene un total dominio de la variación entre las magnitudes, en este procedimiento predomina la operatividad, muchas veces sin sentido.

## CONCLUSIONES

La proporcionalidad es considerada como una de las temáticas con mayor dificultad a lo largo del tratamiento que se le da en sus años escolares; además, hace parte del pilar que encaminará a los estudiantes hacia el desarrollo del razonamiento proporcional, como Obando (2005) lo menciona. El razonamiento proporcional está estrictamente relacionado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de razonamiento cualitativo como cuantitativo.

Por tal razón, este trabajo quiso revisar cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes de octavo grado en la solución de situaciones de proporcionalidad. De este modo, después de aplicar los test diagnósticos, se encontró que las estrategias utilizadas por los estudiantes se caracterizaron por el uso de operadores escalares, la regla de tres, el método de reducción a la unidad, y la regla de tres compuesta.

En el uso de operadores escalares hay mayor inclinación cuando estos son naturales –más precisamente, en situaciones donde intervienen dos magnitudes y en el llenado de tablas– que en el de operadores fraccionarios pues, por ejemplo, una de las dificultades que se observó en las actividades fue la de transformar un número mixto en un operador fracción ya que los estudiantes mostraron dificultades en el dominio de las operaciones con números mixtos.

Además, como lo menciona García (2005), el uso de operadores escalares no se da de forma explícita sino que se muestra acompañado de su aritmética inherente multiplicaciones y divisiones.

En cuanto al uso de operadores funcionales que, según Obando (2005), está dado a través del planteamiento de una relación entre dos espacios de medida; este caso no se dio en la actividad matemática realizada por los estudiantes pues ninguno mostró algún proceso que se pudiera relacionar con esta, el análisis funcional.

De otra parte, no se observó dominio del significado y tratamiento de variables; pues por ejemplo en la situación 3 del test 1, muy pocos estudiantes lograron obtener una expresión que relacionará la variabilidad entre la altura de un poste y su sombra; para cualquier valor “a” de la altura del poste, la sombra era el cuádruple de la longitud del poste, es decir, la sombra es “ $s = 4a$ ”.

Otra de las estrategias utilizadas fue el uso de la regla de tres: esta se hizo explícita cuando algunos estudiantes relacionaron los datos multiplicativamente estableciendo una relación entre el antecedente y el consecuente de una razón y extendiéndola a la otra. A su vez, el uso de la regla de tres, se hizo de forma indiscriminada en situaciones en la que no era necesaria o resultaba impertinente por lo que, esto a su vez, no permitió evidenciar la posibilidad del uso del operador escalar o funcional, así como tampoco que el operador funcional es la constante de proporcionalidad. De ahí que los estudiantes, lo usaran como un proceso mecánico sin realizar análisis alguno para poder establecer relaciones entre las magnitudes que intervienen por lo que sus soluciones a las situaciones planteadas fueron incorrectas.

Por otra parte, al emplear esta estrategia no era posible ver las relaciones existentes entre las magnitudes que intervenían, por tal razón muchos estudiantes la usaron sin dar importancia a la comprensión del por qué de dichos procesos, solo inducidos por el hecho que este procedimiento se aplica en la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se

conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y en el que se requiere hallar el cuarto. Por ende, el hecho que manejen el algoritmo no implica que estén realizando un razonamiento proporcional.

De este modo, tal cual lo afirman Godino y Batanero (2002) y según lo observado, se puede decir que los métodos mecánicos del tipo de “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional, por lo que estos deben introducirse cuando los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

Otro de los métodos utilizados por los estudiantes fue el que se conoce como “método de reducción a la unidad” el cual fue usado en ocasiones por los estudiantes para dar solución a situaciones donde intervienen dos magnitudes. Algunos estudiantes lograron extender este método a tres magnitudes pues les simplificó los procesos y les permitió relacionarlos más fácilmente con los cambios que se daban en la tercera magnitud según el comportamiento proporcional a que hubiera lugar en la situación.

Ahora, en el trabajo con repartos proporcionales, el uso del contexto y el uso de cifras sencillas favorece el manejo de las situaciones en las cuales estos están implicados porque al ser pequeñas las cantidades que se manejen y familiar el contexto de trabajo, los estudiantes resuelven con más éxito este tipo de problemas ya fuera usando el planteamiento de razones, o mediante multiplicaciones y divisiones, de ahí que la presencia de razones enteras facilita realizar los repartos de forma proporcional.

En contraste, dentro de la muestra hubo estudiantes que no dieron luces de no evidenciar los repartos proporcionales a pesar de encontrarse ante contextos familiares las razones enteras pues no establecieron ninguna

diferencia para el que aporta más o menos, por lo que le hicieron corresponder la misma cantidad a cada persona.

En los problemas de proporcionalidad compuesta en los que se involucraron cinco cantidades y se pidió hallar la otra se notó, por un lado, que pocos estudiantes lograron establecer relaciones entre tres magnitudes; los que lo hicieron se apoyaron en el planteamiento de la regla de tres compuesta o reduciendo el problema a uno en el que intervinieran dos magnitudes mediante el planteamiento de la regla de tres simple. Sin embargo, este no siempre fue llevado a feliz término pues, al simplificar el problema, olvidaron la relación que existe con la tercera magnitud.

En cuanto a la regla de tres compuesta, no hubo dominio en su planteamiento ya que no lograron establecer la variación entre las magnitudes; en este procedimiento predominó la operatividad y la relación de cantidades sin sentido.

Según los resultados mostrados y con el propósito de favorecer la comprensión del concepto de proporcionalidad en los estudiantes se hace necesario plantear un enfoque en la enseñanza que les permita analizar las magnitudes haciendo uso de los operadores escalares y funcionales; a su vez favorecer espacios en el aula que les permita a los estudiantes comprender los repartos proporcionales, actividad matemática necesaria – como las demás temáticas de proporcionalidad que se condensan en la matemática financiera– imprescindible para la vida ya que, por ejemplo, tarde o temprano por lo menos uno de los estudiantes de nuestros salones deberá pasar por una oficina bancaria para firmar un préstamo o una hipoteca o quizás tomé la iniciativa de crear empresa... *¿cómo manejar la relación de lo aportado con lo que es justo que merezca de las ganancias?*

Finalmente, la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad requiere muchos cambios en el enfoque utilizado a la hora de llevar dicho concepto al aula pues el reto está encaminado a buscar un camino diferente que no lleve a la mecanización de procesos sino al análisis de las magnitudes que intervienen en dichas situaciones.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carreño Z, J. (2007). Pensamiento variacional: De la proporcionalidad directa simple a la noción de de función lineal de la forma  $f(x) = kx$ . Tesis Especialización Universidad Industrial de Santander.

Carretero de Oleza, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. Anuario de Psicología Núm. 42 (3)

Chaim,D; Fey, J y otros. (1998). El razonamiento proporcional en alumnos de 7º grado con diferentes experiencia curriculares, *Educational Studies in Mathematics* 36, (p. 247-273). ABSTRACT Recuperado 26 de diciembre de 2008, tomado de <http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/proporcionalidadchaim.pdf>

De León, H. Fuenlabrada, I (1996) Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. Revista Mexicana de Investigación Educativa. Vol 1, núm 2 p.p. 268-282

De León P, H. (1998). Procedimientos de niños de primaria en problemas de reparto. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, ISSN 1665-2436, Vol. 2, N°. 1, 1999, pp. 5-28 Recuperado 30 de enero de 2009, de <http://www.clame.org.mx/relime/19990101.pdf>

De Prada Vicente, M. (1990). Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad Editorial Librería Agora, Málaga pp. 114-121. No publicado.

Fernández, A. (2001). Precusores del razonamiento Proporcional: Un estudio con estudiantes de primaria. Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Fiol, M.; Fortuny J. (1990). Proporcionalidad directa. La forma y el número. Editorial Síntesis, S.A. pp.117-180

García O, G; Camelo, F. (2005). ¿Cómo podemos utilizar las matemáticas formales para analizar las soluciones de los estudiantes? Hacia la construcción de modelos de comprensión y competencias. (Documento Borrador).

García O, G., Obando Z, G. (2005). Educación matemática: formar ciudadanos Estándares básicos de Competencias en Matemáticas, Bogotá.

García O, G. Serrano, C. (1999). La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural 1 ed. Santa Fé de Bogotá, D.C., Grupo Editorial Gaiaa, Colección: Cuadernos de Matemática Educativa No. 3 pp. 17-26

Gómez, B. La regla de tres Did. Mat. U. Valencia. 1. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV del IPN. de México. Recuperado 26 de diciembre de 2008, de [http://www.matedu.cinvestav.mx/conferencias/la\\_regla\\_de\\_3.ppt](http://www.matedu.cinvestav.mx/conferencias/la_regla_de_3.ppt)

Llinares, S. y Sánchez, V. (1992). *El aprendizaje desde la instrucción. La evolución de las estrategias personales en tareas de proporcionalidad numérica*. Enseñanza de las Ciencias, vol. 10, No 1, pp.37-48.

Obando Z, G. (2005) Documento académico para solicitud de ascenso en el escalafón docente de la Universidad de Antioquia. No publicado pp. 29-37.

# ANEXOS

## ANEXO 1. Test diagnóstico No. 1 sobre proporcionalidad

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO II  
TEST DIAGNÓSTICO No. 1 SOBRE PROPORCIONALIDAD

El test que contestarás a continuación es sobre situaciones relacionadas con la proporcionalidad. Contesta las preguntas justificando tus respuestas (escribe las operaciones que realizaste y los comentarios que consideres necesarios).

1. Si una libra de azúcar cuesta \$900 ¿cuánto cuesta libra y media?
2. Un poste de 5 metros de altura, en cierto instante, da una sombra de 8 metros. ¿Cuánto mide de alto otro poste, si en ese mismo instante, da una sombra de 16 m?
3. La siguiente tabla muestra la relación entre las longitudes de unas varillas y las longitudes de su sombra.

a) Completa y explica cómo se ha hecho.

Longitud de la Varilla	Longitud de la Sombra
2	8
6	24
8	40
14	56

b) Si la longitud de la varilla es  $a$  ¿Cuánto mide la longitud de la sombra?

c) Si la longitud de la sombra mide  $4a$  ¿Cuánto mide la longitud de la varilla?

4. **La construcción de un puente cuesta \$32.000.000 El estado subsidia el 40% de los gastos. Los dos pueblos comunicados por el puente tienen que pagar el resto de manera proporcional al número de habitantes, que son 1000 y 1500 respectivamente. Calcula la cantidad que debe pagar cada pueblo.**

5. **Juan, Sofía y Pablo fundaron un negocio de manera que Juan tiene el doble de capital invertido que Sofía, y Sofía los  $\frac{3}{4}$  de Pablo. Al cabo de un año han obtenido un beneficio de \$720.000. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?**

## ANEXO 2. Test diagnóstico No 2. Sobre proporcionalidad

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO II  
TEST DIAGNÓSTICO No. 2 SOBRE PROPORCIONALIDAD

El test que contestarás a continuación es sobre situaciones relacionadas con la proporcionalidad. Contesta las preguntas justificando tus respuestas (escribe las operaciones que realizaste y los comentarios que consideres necesarios).

1. En 25 días un atleta recorrió 300 Km. caminando 10 horas diarias. ¿Cuántos Km. recorrió en 15 días caminando 8 horas diarias?
2. Una granja de hortalizas con un área determinada produce 75kg de hortalizas laborando 8 trabajadores. Si el dueño de la granja triplica el área de siembra y aumenta el número de trabajadores a 18. ¿Cuántos kilogramos producirá?
3. Tres amigos compran 60 caramelos por \$3000. Si el aporte de cada uno fue de \$1000, \$1500, \$500 respectivamente ¿Dé a cuántos caramelos le toca a cada uno?
4. Un Arquitecto cobró \$7'850.000 por el proyecto de una zona industrial de 5 instalaciones iguales. En otra ocasión un inversionista le propuso que le realizará un proyecto similar al anterior, pero con 10 instalaciones. ¿Cuánto tuvo que pagar al arquitecto el inversionista?
5. La siguiente tabla muestra la efectividad en los lanzamientos de 3 jugadores después de un partido de baloncesto.

Jugador	Lanzamientos convertidos	Total de Lanzamientos
A	10	20
B	8	24
C	14	30

¿Cuál de los tres jugadores es el más efectivo? ¿Por qué?