LA TOPOLOGÍA COMPACTA ABIERTA EN LOS GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS

MARÍA DEL PILAR BAUTISTA NIÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

LA TOPOLOGÍA COMPACTA ABIERTA EN LOS GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS

MARÍA DEL PILAR BAUTISTA NIÑO

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi mamá, Elisa Niño, a mis hermanas y a Luna por su apoyo incondicional durante la carrera. Al profesor Carlos Uzcátegui por su maravillosa manera de enseñar y por brindarme la oportunidad de lograr este trabajo de grado bajo su orientación. Igualmente al profesor Rafael Isaacs por sus clases y sus previos sensacionales y demás profesores que fueron parte de mi formación académica. A mis amigos, en especial a Natali por las risas y los momentos compartidos y a Emmanuel, quien siempre estuvo a mi lado.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: LA TOPOLOGÍA COMPACTA ABIERTA EN LOS GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS *

AUTOR: MARÍA DEL PILAR BAUTISTA NIÑO **

PALABRAS CLAVE: GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS, TOPOLOGÍA COMPACTA ABIERTA, GRUPOS TOPOLÓGICOS, ESPACIO DE CANTOR, TOPOLOGÍA.

DESCRIPCIÓN: Un *grupo topológico* es un grupo dotado de una topología de tal manera que las operaciones del grupo, multiplicación e inversión, son continuas. En este trabajo nos enfocamos en $\mathcal{H}(X)$ el grupo de los autohomeomorfismos de X. Estudiamos la *topología compacta abierta* y diversos ejemplos de grupos de homeomorfismos con la topología producto que nos permiten concluir la relevancia de la *topología compacta abierta* en $\mathcal{H}(X)$, destacando el interesante contraejemplo que se da con el grupo de homeomorfismos del espacio de Cantor.

En la primera parte, se proporciona la teoría necesaria de topología general, el concepto de grupo topológico y algunas representaciones usuales del espacio de Cantor y sus propiedades. En la segunda parte, definimos la topología compacta abierta que da estructura de grupo topológico al grupo de autohomeomorfismos de X cuando X es un espacio compacto de Hausdorff. Finalmente, exponemos los ejemplos que estudiamos, incluido el ejemplo de la Proposición 2.4.2 el cual se desarrolló de manera independiente y del que no sabemos si ya existía alguna referencia. Estos ejemplos nos permiten concluir por qué resulta más útil dotar a $\mathcal{H}(X)$ con la topología compacta abierta que con la topología producto, pues para X compacto de Hausdorff, con la primera obtenemos grupos topológicos mientras que con la topología producto eso no ocurre necesariamente.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE COMPACT OPEN TOPOLOGY ON HOMEOMORPHISM GROUPS *

AUTHOR: MARÍA DEL PILAR BAUTISTA NIÑO **

KEYWORDS: HOMEOMORPHISM GROUPS, COMPACT OPEN TOPOLOGY, TOPOLOGICAL GROUPS, CANTOR SPACE, TOPOLOGY.

DESCRIPTION: A topological group is a group endowed with a topology such that the group operations, multiplication and inversion, are continuous. In this work, our focus is on $\mathcal{H}(X)$ the autohomeomorphism group of X. We study the compact open topology and provide multiple examples of homeomorphism groups with the product topology, which allow us to conclude the significance of the compact open topology on $\mathcal{H}(X)$. We highlight the interesting counterexample that arises with the homeomorphism group of the Cantor space.

In the first part, we provide the necessary theory of general topology, introduce the concept of a topological group and present some typical representations of the Cantor space along with its properties. In the second part, we define the compact open topology that gives a topological group structure to the homeomorphism group of X when X is a Hausdorff compact space. Finally, we present the examples we have studied, including the example of Proposition 2.4.2 which was developed independently and for which we are unsure if any reference already exist. These examples lead us to conclude why equipping $\mathcal{H}(X)$ with the compact open topology is more advantageous than using the product topology. This is particularly true for a Hausdorff compact space X, where with the former, we obtain the desired topological group structure, while with the latter, this outcome is not necessarily guaranteed.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Un *grupo topológico* es un grupo dotado de una topología de tal manera que las operaciones del grupo, multiplicación e inversión, son continuas. La definición formal de grupo topológico la propuso Schreier en *Abstrakte kontinuierliche Gruppen* (1925). Por otro lado, F. Leja en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* (1927) da la definición en términos de espacios topológicos. Sin embargo, la noción de este concepto ya estaba presente en el desarrollo de los grupos de Lie.

Nos enfocaremos en el grupo $\mathcal{H}(X)$ de los autohomeomorfismos de X, esto es, de las funciones que van de X en sí mismo que sean biyectivas, continuas y cuyas inversas también sean continuas. Sobre $\mathcal{H}(X)$ se pueden definir varias topologías: la topología producto o de convergencia puntual, la topología de convergencia uniforme en el caso de que X sea métrico compacto y la topología compacta abierta. Siendo esta última, como veremos, una de las más importantes.

La *topología compacta abierta* fue definida y estudiada por Ralph H. Fox en su artículo *On Topologies for Function Spaces* (1945) y por Richard F. Arens en su artículo *A Topology for Spaces of Transformations* (1946) que fue desarrollado a partir de una parte de su tesis doctoral, la cual fue orientada por Garrett Birkhoff.

El primer objetivo de este trabajo es mostrar que $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico con la topología compacta abierta cuando X es un espacio compacto de Hausdorff. Cuando X es métrico esta topología coincide con la topología uniforme. Esto naturalmente sugiere la pregunta de por qué no se usa la topología puntual. El segundo objetivo es presentar ejemplos concretos de espacios para los cuales $\mathcal{H}(X)$ no es un grupo topológico con la topología puntual, en especifico cuando X es métrico compacto. Iniciamos estudiando un ejemplo propuesto en el libro de Nicolas Bourbaki [1] que muestra que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ no es grupo topológico con la topología producto. En un principio creíamos que el espacio que buscábamos era el intervalo unitario $[0, 1]$, pero no es así, pues mostraremos que la topología puntual es igual a la topología uniforme en $\mathcal{H}([0, 1])$. Este ejemplo no sabemos si ya era conocido en la literatura. Estudiando el trabajo de Jan J Dijkstra [2] pudimos conseguir la respuesta a nuestro problema ya que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es el espacio de Cantor,

[1] Nicolas BOURBAKI. *General Topology. Part 2. Elements of mathematics*. Addison-Wesley, 1966.

[2] Jan J DIJKSTRA. “On Homeomorphism Groups and the Compact-Open Topology”. En: *The American Mathematical Monthly* 112.10 (2005), págs. 910-912.

no es grupo topológico con la topología producto. Este ejemplo es aun mas interesante pues, como lo demuestran en el articulo, $\mathcal{H}(\mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\})$ no es grupo topológico con la topología compacta abierta. Es decir, cuando pasamos a espacios localmente compactos no es cierto, en general, que su grupo de autohomeomorfismos sea topológico con la topología compacta abierta. Sin embargo, un resultado de Arens (que no demostramos en este trabajo) indica que si X es un espacio localmente compacto de Hausdorff y localmente conexo, entonces $\mathcal{H}(X)$ es grupo topológico con la topología compacta abierta.

En la primera sección de este trabajo se proporciona la teoría necesaria de topología general, el concepto de grupo topológico y algunas representaciones usuales del espacio de Cantor y sus propiedades. En la segunda sección, definimos la topología compacta abierta que da estructura de grupo topológico al grupo de autohomeomorfismos de X cuando X es compacto de Hausdorff. Finalmente, exponemos los ejemplos que estudiamos, incluido el ejemplo de la Proposición 2.4.2 el cual se desarrolló de manera independiente y del que no sabemos si ya existía alguna referencia. Estos ejemplos nos permiten concluir por qué resulta más útil dotar a $\mathcal{H}(X)$ con la topología compacta abierta que con la topología producto, pues para X compacto de Hausdorff, con la primera obtenemos grupos topológicos mientras que con la topología producto eso no ocurre necesariamente.

1. Preliminares

En este capítulo recordamos algunos resultados de Topología general, la definición de grupo topológico y algunos ejemplos, que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. En la parte final de este capítulo mostramos algunas representaciones del conjunto de Cantor y sus propiedades relevantes como por ejemplo ser métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

1.1. Topología General

En esta sección definimos la notación que se va a usar y algunos resultados clásicos de Topología general.

Dados dos espacios topológicos X y Y definimos $C(X, Y)$ como el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. Además, si X es compacto y Y es métrico podemos definir una métrica, llamada **métrica uniforme**, en $C(X, Y)$ de la siguiente manera

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

En este caso, denotaremos por τ_∞ a la topología inducida por esta métrica y la llamaremos la **topología uniforme**.

A continuación dos resultados clásicos sobre conjuntos compactos cuyas demostraciones se encuentran en la Proposición 6.12 y la Proposición 6.13 de [3], respectivamente.

Proposición 1.1.1. *Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es un compacto.*

Proposición 1.1.2. *Cada subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Recordemos que cuando X es un espacio topológico y $x \in X$ decimos que una familia $\mathcal{B}_x$ de conjuntos de X es una **base de vecindades** de x si para todo $N \subseteq X$ con $x \in N^\circ$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B^\circ \subseteq B \subseteq N$. Además, si cada $x \in X$ admite una base de vecindades compactas, diremos que X es **localmente compacto**.

Proposición 1.1.3. *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Entonces todo abierto de X es localmente compacto de Hausdorff.*

---

[3] Élder CAMARGO Javier y VILLAMIZAR. *Topología General*. Ediciones UIS, 2020.

En la siguiente proposición es fundamental la hipótesis de K compacto, pues si K fuera únicamente cerrado entonces ya no se cumpliría.

Proposición 1.1.4. *Sean (X, τ) un espacio localmente compacto de Hausdorff, U abierto y K compacto tal que $K \subseteq U$, entonces existe un abierto V tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Sea $x \in K$. Entonces, $x \in U$ y por la compacidad local de X existe W_x abierto tal que

$$x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U.$$

Por lo tanto, podemos cubrir a K por medio de estos conjuntos abiertos, es decir,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} W_x.$$

Como K es compacto, existen $x_1, \cdots, x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{W_{x_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}} \subseteq U.$$

Tome $V = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ y queda demostrada la proposición. $\square$

El siguiente lema corresponde al Teorema 3.9 de [3] y estaremos recurriendo frecuentemente a él.

Lema 1.1.5. *Sean X un espacio topológico, A y B subespacios de X tales que $X = A \cup B$ y $f : X \to Y$ una función. Si $f|_A : A \to Y$ y $f|_B : B \to Y$ son continuas y A y B son ambos cerrados, o ambos abiertos, entonces f es continua.*

Demostración. Suponga que A y B son cerrados en X. Sea C un cerrado en Y. Como $f|_A$ es continua, $f|_A^{-1}(C)$ es cerrado en A y dado que A es cerrado en X, entonces $f|_A^{-1}(C)$ también es cerrado en X. De igual manera, se obtiene que $f|_B^{-1}(C)$ es cerrado en X. Así, $f|_A^{-1}(C) \cup f|_B^{-1}(C)$ es cerrado en X. Además, $f|_A^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A$ y $f|_B^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap B$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f|_A^{-1}(C) \cup f|_B^{-1}(C) &= (f^{-1}(C) \cap A) \cup (f^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= f^{-1}(C) \end{aligned}$$

y f es continua. $\square$

La siguiente proposición es el ejercicio 4 de la Sección 3.2.1 de [3] que nos ayudará después a probar que el espacio de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es métrico.

Proposición 1.1.6. *Sea* $\{(X_n, d_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *una familia numerable de espacios métricos con* $d_n(\cdot,\cdot) \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Entonces, d *es una métrica para* $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *y la topología generada por la métrica* d *es igual que la topología producto, es decir,* $\tau_d = \tau_p$*.*

Demostración. Veamos que d verifica las cuatro condiciones de distancia o métrica.

1. Como d_n es la métrica en X_n, entonces $d_n(x_n, y_n) \geq 0$. Luego $\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \geq 0$, lo cual implica que
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \geq 0.$$

2. Observe que $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} = 0$ para todo n. Esto es, si $d_n(x_n, y_n) = 0$ para todo n, lo cual sólo ocurre si $x_n = y_n$ para todo n, es decir, si $x = y$. En conclusión,
$$d(x,y) = 0 \text{ si, y sólo si, } x = y.$$

3. Note que $d_n(x_n, y_n) = d_n(y_n, x_n)$ para todo n. Entonces,
$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(y_n, x_n)}{2^n} \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

4. Sabemos que cada d_n, por ser métrica, cumple que
$$d_n(x_n, y_n) \leq d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_n(x_n,z_n)+d_n(z_n,y_n))}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n(x_n,z_n)}{2^n} + \frac{d_n(z_n,y_n)}{2^n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,z_n)}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(z_n,y_n)}{2^n} \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}
$$

Así, se ha demostrado que d es métrica.

Ahora veamos que $\tau_d \subseteq \tau_p$. Sea $x \in X$ y $r > 0$. Observe que,

$$
d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1
$$

ya que $d_n(x_n,y_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $x_n, y_n \in X_n$. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. Como $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$
\begin{aligned}
|S_n - 1| < \frac{r}{2} &\Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right| < \frac{r}{2} \\
&\Leftrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right| < \frac{r}{2}.
\end{aligned}
$$

Sea

$$
V = \bigcap_{i=1}^{N} \pi_i^{-1} \left(B_i \left(x_i; \frac{2^i r}{2N} \right) \right).
$$

Es claro que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots) \in V$. Si $y \in V$, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$
\pi_i(y) = y_i \in B_i \left(x_i; \frac{2^i r}{2N} \right)
$$

esto es,

$$
d_i(y_i, x_i) < \frac{2^i r}{2N}.
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
d(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&< \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} + \frac{r}{2} \\
&< \sum_{i=1}^{N} \frac{2^i r}{2N} \frac{1}{2^i} + \frac{r}{2} \\
&< \sum_{i=1}^{N} \frac{r}{2N} + \frac{r}{2} \\
&< N\frac{r}{2N} + \frac{r}{2} = r.
\end{aligned}
$$

Es decir, $y \in B_d(x;r)$. Por lo tanto, $V \subseteq B_d(x;r)$ y $B_d(x;r) \in \tau_p$.

Finalmente, probemos que $\tau_p \subseteq \tau_d$. Sean $x \in X$, $j \in \mathbb{N}$ y $r > 0$. Tome $U = \pi_j^{-1}(B(x_j;r))$. Sea $y \in B_d(x; \frac{r}{2^j})$. Entonces

$$
d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} < \frac{r}{2^j}
$$

En particular,

$$
\frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j} < \frac{r}{2^j}
$$

De lo cual se obtiene que

$$
d_j(x_j,y_j) < r.
$$

Esto es, $y \in U$. De este modo, $B_d(x; \frac{r}{2^j}) \subseteq U$ y $U \in \tau_d$. De esta forma, queda demostrado que $\tau_d = \tau_p$. $\square$

Recordemos que un espacio topológico X es **totalmente disconexo** si se cumple que todo conexo de X consta de un único punto. Por ejemplo, los espacios discretos y la recta de Sorgenfrey son totalmente disconexos. Como mostraremos que el espacio de Cantor es totalmente disconexo mencionaremos algunos resultados necesarios. El teorema que sigue hace referencia al Teorema 9.28 de [3] y afirma que el producto de espacios totalmente disconexos es totalmente disconexo.

Teorema 1.1.7. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es totalmente disconexo si, y sólo si, X_α es totalmente disconexo, para cada*

$\alpha \in \mathcal{A}$.

Demostración. Suponga que existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que X_{α_0} no es totalmente disconexo, es decir, existe un conexo C en X_{α_0} con más de un punto. Sean $x \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ y

$$C' = \{z \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \mid \pi_\alpha(z) = \pi_\alpha(x), \text{ para todo } \alpha \neq \alpha_0 \text{ y } \pi_{\alpha_0}(z) \in C\}.$$

Observe que

$$\pi_{\alpha_0}|_{C'} : C' \to C$$

es un homeomorfismo. Entonces, C' es un conexo con más de un punto y $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ no es totalmente disconexo. Recíprocamente, si D es un subconjunto conexo de $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ entonces $\pi_\alpha(D)$ es conexo en X_α, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, por la continuidad de la funciones proyección. Como X_α es totalmente disconexo, $\pi_\alpha(D)$ sólo tiene un punto, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, D tiene solamente un punto y $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es totalmente disconexo.

□

1.2. Grupos Topológicos

Los grupos topológicos son la combinación de grupos y espacios topológicos donde la continuidad de las operaciones de grupo es la que conecta estas dos estructuras y se definen como sigue.

Definición 1.2.1. *Un grupo topológico es un grupo G dotado de una topología tal que las operaciones de grupo*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas.

Según sea el caso, a veces resultará más conveniente usar la siguiente equivalencia.

Proposición 1.2.2. *G es grupo topológico si, y sólo si, la función*

$$\begin{aligned} \psi : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Suponga que G es grupo topológico. Sean $(x, y) \in G \times G$ y V abierto en G tal que $xy^{-1} \in V$. Como la multiplicación μ es continua, existen abiertos $U_1, U_2 \subseteq G$ tales que $(x, y^{-1}) \in U_1 \times U_2$ y $\mu(U_1 \times U_2) \subseteq V$. Dado que la función inversión también es continua, existe algún abierto $U_3 \subseteq G$ tales que $y \in U_3$ y $(U_3)^{-1} \subseteq U_2$. Por lo tanto, si $(a, b) \in U_1 \times U_3$ entonces $(a, b^{-1}) \in U_1 \times U_2$ luego $ab^{-1} \in V$. En consecuencia, ψ es continua. Por otro lado, suponga que ψ es continua. Si fijamos $x = e$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \psi|_{\{e\}\times G} : \{e\} \times G &\longrightarrow G \\ (e, y) &\longmapsto y^{-1} \end{aligned}$$

es continua, lo cual implica que la función inversión también lo es. De modo que, sólo falta ver que la multiplicación es continua. Sean $(x, y) \in G \times G$ y V abierto en G tal que $xy \in V$. Por la continuidad de ψ existen abiertos $U_1, U_2 \subseteq G$ tales que $(x, y^{-1}) \in U_1 \times U_2$ y $\psi(U_1 \times U_2) \subseteq V$. Luego por la continuidad de la función inversión existe algún abierto $U_3 \subseteq G$ tal que $y \in U_3$ y $(U_3)^{-1} \subseteq U_2$. Si $(a, b) \in U_1 \times U_3$ entonces $(a, b^{-1}) \in U_1 \times U_2$ luego $\psi((a, b^{-1})) = ab \in V$. En consecuencia, la multiplicación es continua. Por lo tanto, las operaciones de grupo de G son continuas, es decir, G es grupo topológico. $\square$

Para todo grupo topológico G, la traslación a izquierda

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

y la traslación a derecha

$$\begin{aligned} R_g : G &\to G \\ x &\mapsto xg \end{aligned}$$

son funciones biyectivas continuas; además $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ también son funciones continuas, en consecuencia se tiene que L_g y R_g son homeomorfismos. Por lo tanto, una propiedad notable de los grupos topológicos es la simetría de su topología, es decir, si U es una vecindad del elemento identidad e entonces $L_g(U)$ es una vecindad de g homeomorfa a U. Veamos algunos ejemplos de grupos topológicos.

Ejemplo 1.2.3. *Cualquier grupo con la topología discreta es un grupo topológico.*

Ejemplo 1.2.4. $(\mathbb{R}^n, +)$ *es un grupo topológico con la topología estándar de* $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Veamos que

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ (x,y) &\longmapsto x-y\end{aligned}$$

es continua. Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Si $(x',y') \in B(x;\frac{r}{2}) \times B(y;\frac{r}{2})$ entonces

$$\begin{aligned}d(x-y,x'-y') &= \left(\sum_{j=1}^{n}((x_j-y_j)-(x'_j-y'_j))^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}((x_j-x'_j)-(y_j-y'_j))^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= d(x-x',y-y')\\ &\leq d(x-x',0)+d(y-y',0)\\ &= d(x,x')+d(y,y')\\ &< \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r.\end{aligned}$$

Es decir, $x'-y' \in B(x-y;r)$. Por lo tanto, ψ es continua y $(\mathbb{R}^n,+)$ grupo topológico. □

Ejemplo 1.2.5. $(\mathbb{R}^+,\cdot)$*, el grupo multiplicativo de los números reales positivos es un grupo topológico con la topología usual de* $\mathbb{R}^+$.

Demostración. Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y $\epsilon > 0$. Tome $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2y}$ y $\delta_2 = \frac{\epsilon}{2(x+\delta_1)}$. Sea $(x',y') \in B(x;\delta_1) \times B(y;\delta_2)$. Entonces

$$\begin{aligned}|xy-x'y'| &= |xy-x'y+x'y-x'y'|\\ &\leq |y(x-x')|+|x'(y-y')|\\ &= y|x-x'|+x'|y-y'|\\ &< y\delta_1+(x+\delta_1)\delta_2\end{aligned}$$

pues $|x-x'| < \delta_1$ por tanto $x' < x+\delta_1$. Luego, reemplazando δ_1 y δ_2, obtenemos

$$|xy-x'y'| < \epsilon.$$

En consecuencia, la multiplicación es continua. Note que la función inversión también es continua.
Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad, tomamos $0 < \epsilon < \frac{1}{x}$. Sea $x' \in$

$\left(\frac{x}{1+x\epsilon}, \frac{x}{1-x\epsilon}\right)$. Entonces

$$\frac{1-x\epsilon}{x} < \frac{1}{x'} < \frac{1+x\epsilon}{x},$$

esto es,

$$\frac{1}{x} - \epsilon < \frac{1}{x'} < \frac{1}{x} + \epsilon.$$

Luego

$$-\epsilon < \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} < \epsilon,$$

es decir,

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, tenemos la continuidad de la función inversión y concluimos que $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ es grupo topológico. □

Ejemplo 1.2.6. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$*, el grupo multiplicativo de los números complejos es un grupo topológico con la topología usual de* $\mathbb{C}$.

La proposición que sigue afirma que la propiedad de ser grupo topológico se hereda a los subgrupos.

Proposición 1.2.7. *Los subgrupos de un grupo topológico son grupos topológicos.*

Demostración. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces las operaciones de grupo en H son las restricciones de las operaciones de grupo en G. Dado que la restricción de una función continua es continua, podemos concluir que H es grupo topológico. □

Usando la proposición anterior podemos obtener más ejemplos, en particular al aplicarlo a $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ obtenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.8. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$*, el grupo multiplicativo de los números complejos con módulo* 1 *es un grupo topológico con la topología heredada de* $\mathbb{C}$.

El teorema a continuación se encuentra en [4], Teorema 2.1.23, y con él obtenemos que el toro es grupo topológico.

Teorema 1.2.9. *Sea* $\{G_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ *una familia de grupos topológicos. Entonces* $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ *es grupo topológico con las operaciones de grupo componente a componente y la topología producto.*

[4] Thomas BRAY. *An Introduction to Topological Groups.* URL: https://carleton.ca/math/wp-content/uploads/BrayThomas-An_Introduction_to_Topological_Groups-HonoursProject.pdf.

Demostración. De la teoría de grupos sabemos que $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ es un grupo, por lo tanto, basta mostrar la continuidad de las operaciones de grupo. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea μ_α la multiplicación en G_α, i_α la función inversión en G_α y π_α la función proyección de $\prod_{\gamma\in\mathcal{A}} G_\gamma$ en G_α, es decir, si $f \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ entonces

$$\pi_\alpha(f) = f(\alpha).$$

Para mostrar que la multiplicación μ en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ es continua vamos a probar que si (f_λ, g_λ) es una red en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha \times \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ convergente a (f,g) entonces $\mu((f_\lambda, g_\lambda)) = f_\lambda g_\lambda \to fg$. Es suficiente mostrar que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $f_\lambda(\alpha)g_\lambda(\alpha) \to f(\alpha)g(\alpha)$. Pero

$$f_\lambda \to f \quad \text{y} \quad g_\lambda \to g,$$

luego, por la continuidad de π_α,

$$f_\lambda(\alpha) \to f(\alpha) \quad \text{y} \quad g_\lambda(\alpha) \to g(\alpha).$$

Se sigue de la continuidad de la multiplicación μ_α que

$$f_\lambda(\alpha)g_\lambda(\alpha) \to f(\alpha)g(\alpha).$$

Por lo tanto, μ es continua. Ahora veamos que la función inversión es continua. Sea (f_λ) una red en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ convergente a f. Como antes es suficiente mostrar que $f_\lambda(\alpha)^{-1} \to f(\alpha)^{-1}$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Pero

$$f_\lambda(\alpha) \to f(\alpha)$$

y por la continuidad de i_α se sigue que

$$f_\lambda(\alpha)^{-1} \to f(\alpha)^{-1}.$$

Entonces, la función inversión es continua y $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ es grupo topológico.

□

1.3. Espacio de Cantor

El espacio de Cantor es ampliamente mencionado en Topología por ser el ejemplo o contraejemplo perfecto en numerosas situaciones, esto debido a sus distintivas propiedades que mostraremos a continuación.

Definición 1.3.1. *Sea* $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$*, donde* $\{0,1\}$ *tiene la topología discreta. Este espacio producto se conoce como espacio de Cantor.*

Otra forma de denotar al espacio de Cantor es $2^{\mathbb{N}}$ y su representación gráfica consiste de todas las ramas infinitas del árbol binario.

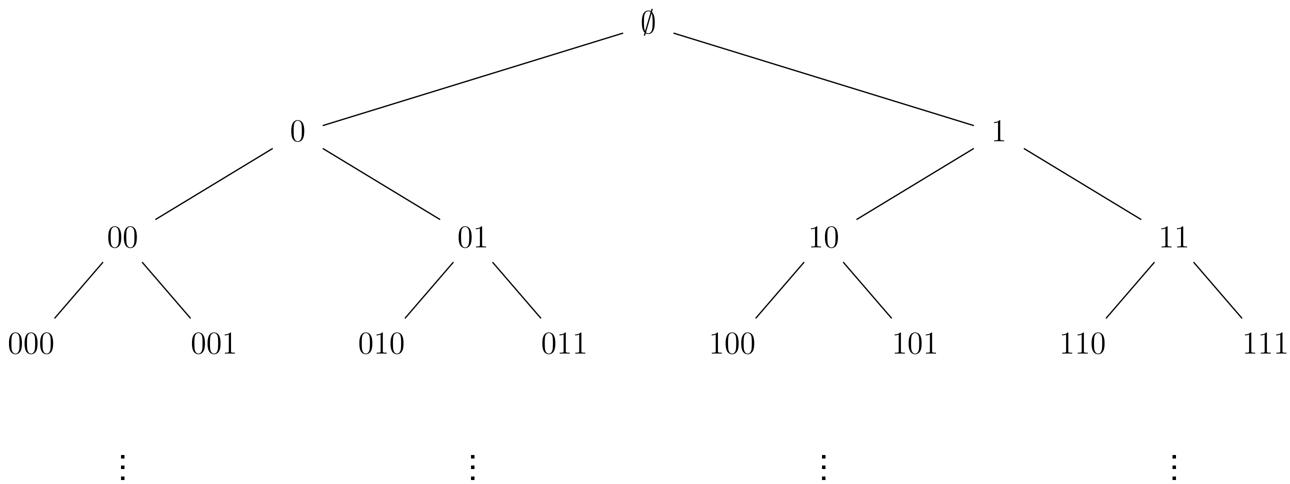

Figura 1.1: Árbol binario.

Igualmente podemos representar al conjunto de Cantor de forma geométrica en el intervalo cerrado $[0,1]$ de la recta real. Si dividimos un intervalo en tres subintervalos de igual longitud, el subintervalo abierto de la mitad es al que llamaremos tercio medio. Sea C_1 el conjunto que se obtiene al remover el tercio medio de $C_0 = [0,1]$, es decir,

$$\begin{aligned} C_1 &= [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{aligned}$$

Luego, defina C_2 como el conjunto que se obtiene al remover los respectivos tercios medios de $[0, \frac{1}{3}]$ y de $[\frac{2}{3}, 1]$, es decir,

$$\begin{aligned} C_2 &= \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \setminus \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)\right) \cup \left(\left[\frac{2}{3}, 1\right] \setminus \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right) \\ &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

y se continúa recursivamente removiendo los tercios medios de cada uno de los 2^k

intervalos cerrados que definen a C_k para definir a C_{k+1}. Sea

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Por la forma en que se construye, a este conjunto se le llama El conjunto ternario de Cantor. En la siguiente figura se muestran los primeros siete pasos de su construcción.

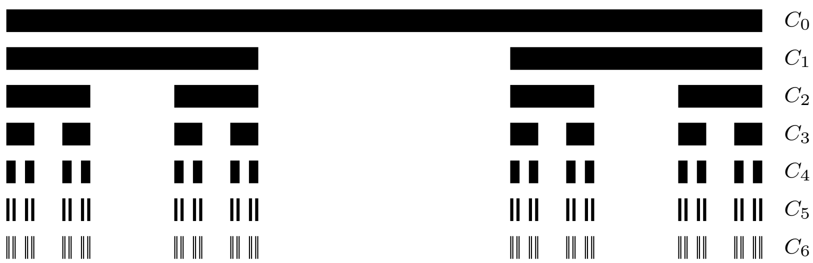

Figura 1.2: Conjunto ternario de Cantor.

La siguiente proposición corresponde al Ejercicio 2 de la Sección 3.2.1 de [3], y la usaremos para construir una base de vecindades para los elementos de $\mathcal{C}$.

Proposición 1.3.2. *Sea $x \in \mathcal{C}$. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos*

$$[x_1x_2\ldots x_k] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \mid y_i = x_i \textit{ para todo } i \in \{1, 2, \cdots k\}\}.$$

Entonces $\mathcal{B}_x = \{[x_1x_2\ldots x_k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de x.

Demostración. Sea $N \subseteq \mathcal{C}$ tal que $x \in N^\circ$. Entonces existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y abiertos U_i de $\{0, 1\}$, con $i \in \{1, 2, \cdots n\}$ tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{a_i}^{-1}(U_i) \subseteq N^\circ.$$

Mostraremos primero que

$$[x_1x_2\ldots x_{a_n}] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{a_i}^{-1}(U_i).$$

En efecto, si $y \in [x_1x_2\ldots x_{a_n}]$, se tiene que $y_i = x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, a_n\}$, en particular, $y_{a_i} = x_{a_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y como $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{a_i}^{-1}(U_i)$, entonces $y \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{a_i}^{-1}(U_i)$. Además,

$$[x_1x_2\ldots x_{a_n}] = \bigcap_{i=1}^{a_n} \pi_i^{-1}(\{x_i\})$$

es abierto y es claro que

$$x \in [x_1 x_2 \dots x_{a_n}] \subseteq N.$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades de x. $\square$

Ahora veremos algunas propiedades del espacio de Cantor, que es uno de los principales ejemplos en el desarrollo de este trabajo.

Proposición 1.3.3. *$\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es métrico compacto.*

Demostración. Por la Proposición 1.1.6, $\mathcal{C}$ es métrico y por el Teorema de Tychonoff es compacto, pues $\{0,1\}$ es compacto. $\square$

Cantor introdujo la definición de conjunto perfecto que se da a continuación.

Definición 1.3.4. *Un espacio topológico X se dice perfecto, si no tiene puntos aislados.*

Proposición 1.3.5. *$\mathcal{C}$ es perfecto.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}^d$ el conjunto de puntos límites de $\mathcal{C}$. Note que $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ es cerrado pues cada C_k es cerrado por ser una unión finita de intervalos cerrados. Por lo tanto, $\mathcal{C}^d \subseteq \mathcal{C}$. Sólo falta demostrar que todo punto en $\mathcal{C}$ es punto límite. Sea $x \in \mathcal{C}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$x \in C_k$$

y

$$\begin{aligned} C_k &= I_{k1} \cup I_{k2} \cup \cdots \cup I_{k(2^k)} \\ &= \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{kj} \end{aligned}$$

donde cada I_{kj} es un intervalo cerrado de longitud $\frac{1}{3^k}$. Como $x \in C_1$, entonces $x \in I_{11}$ o $x \in I_{12}$. Sea

$$I_1 \in \{I_{11}, I_{12}\}$$

el intervalo en el cual está x. Note que $C_2 \cap I_1$ es la unión de dos intervalos cerrados tal que x está en alguno de ellos. Tome x_1 como el punto final del intervalo que no contiene a x, de esta manera garantizamos que $x_1 \neq x$. Además $x_1 \in \mathcal{C}$ por ser un punto extremo de uno de los intervalos que generan a C_2 y

$$|x_1 - x| \leq \frac{1}{3}$$

dado que $x, x_1 \in I_1$. Ahora, tome

$$I_2 \in \{I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}\}$$

tal que $x \in I_2$. Observe $C_3 \cap I_2$ es la unión de dos intervalos cerrados tal que x está en alguno de ellos. Sea x_2 el punto final del intervalo que no contiene a x, por tanto, $x_2 \neq x$. También se tiene que $x_2 \in \mathcal{C}$ por ser un extremo de uno de los intervalos que generan a C_3 y

$$|x_2 - x| \leq \frac{1}{3^2}$$

pues $x, x_2 \in I_2$. Continuando inductivamente, encontramos un sucesión $(x_n)_n \subseteq \mathcal{C}$ tal que $x_n \neq x$ para todo n y

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{3^n},$$

esto es,

$$x_n \to x.$$

En consecuencia $x \in \mathcal{C}^d$ y se tiene que $\mathcal{C}$ es un conjunto perfecto.

□

Para concluir esta sección, vamos a mostrar que el espacio de Cantor es totalmente disconexo como fue mencionado anteriormente.

Proposición 1.3.6. *$\mathcal{C}$ es totalmente disconexo.*

Demostración. Dado que $\{0, 1\}$ es un espacio discreto, es totalmente disconexo. Entonces se sigue que $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es totalmente disconexo por el Teorema 1.1.7. □

2. Grupos de homeomorfismos

En este capítulo mostraremos los resultados centrales de nuestro trabajo. Si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{H}(X)$ denotará el grupo de autohomeomorfismos de X.

Comenzaremos definiendo la topología compacta abierta y algunos resultados necesarios sobre ella. Luego se muestra que $\mathcal{H}(X)$ es grupo topológico con esta topología cuando X es un espacio compacto de Hausdorff, este resultado fue dado a conocer por el matemático Richard F. Arens. Por otro lado, cuando X es métrico compacto la topología compacta abierta coincide con la topología uniforme (ver el Teorema 2.1.4), sin embargo, daremos una demostración alternativa de que $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico con la topología uniforme.

Además se dan ejemplos concretos que muestran porqué no se usa la topología producto en el grupo $\mathcal{H}(X)$. Empezando con $X = \mathbb{R}^2$ mostramos (tomado del libro de Nicolas Bourbaki [1]) que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ no es un grupo topológico con la topología producto, pues la función composición no resulta continua. En un principio, pensamos que algo similar ocurriría en $[0, 1]$, pero no es así, pues $\mathcal{H}([0, 1])$ es un grupo topológico con la topología producto, que resulta ser igual a la topología uniforme. Este resultado no sabemos si era conocido en la literatura. Finalmente analizaremos el espacio de Cantor $\mathcal{C}$. Siguiendo lo presentado en el articulo de Jan J Dijkstra [2], mostraremos que si $X = \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathcal{H}(X)$ no es grupo topológico con la topología compacta abierta. Seguidamente, veremos que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ no es grupo topológico con la topología producto y por último mencionamos otro teorema de Arens.

2.1. La topología compacta abierta

En esta sección asumiremos que X y Y son espacios de Hausdorff y empezamos el estudio de la topología compacta abierta que es fundamental para los resultados principales de este trabajo.

Definición 2.1.1. *La topología compacta abierta en el conjunto $C(X, Y)$ de las funciones continuas de X a Y es definida como sigue. Para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, establecemos*

$$\langle A; B\rangle = \{f \in C(X, Y) \mid f(A) \subseteq B\}.$$

La topología compacta abierta es la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \{\langle K; V\rangle \mid K \subseteq X \text{ es compacto y } V \subseteq Y \text{ es abierto }\}.$$

Se sigue de la definición que la topología compacta abierta es más fina que la topología de convergencia puntual.

Ejemplo 2.1.2. *Si X es un espacio discreto, entonces los subconjuntos compactos de X son los subconjuntos finitos. Por lo tanto, la topología compacta abierta en $C(X, Y) = Y^X$ es la topología producto.*

Observe que la siguiente proposición también se puede deducir del hecho de que la topología producto en $C(X, Y)$ sea Hausdorff y esté contenida en la topología compacta abierta.

Proposición 2.1.3. *El espacio $C(X, Y)$ con la topología compacta abierta es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean $f, g \in C(X, Y)$ tales que $f \neq g$. Es claro que existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Además, note que $\{x\} \subseteq X$ es compacto y como Y es Hausdorff, existen U, V abiertos tales que $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $f \in \langle\{x\}; U\rangle$, $g \in \langle\{x\}; V\rangle$ y $\langle\{x\}; U\rangle \cap \langle\{x\}; V\rangle = \emptyset$. □

El siguiente teorema fue tomado de [5], Teorema 46.8.

Teorema 2.1.4. *Sean (X, d_X) un espacio métrico compacto y (Y, d_Y) un espacio métrico. Entonces la topología compacta abierta en $C(X, Y)$ coincide con la topología inducida por la métrica uniforme.*

Demostración. Denotemos por τ a la topología compacta abierta y por τ_∞ a la topología uniforme. Primero mostremos que τ_∞ es más fina que τ. Sean $\langle A; B\rangle$ un elemento subbásico de τ y $f \in \langle A; B\rangle$. Como f es continua y A es compacto entonces $f(A)$ es compacto. Sea

$$\epsilon = \text{ínf}\{d_Y(f(a), y) \mid a \in A,\ y \in Y \setminus B\}.$$

Observe que si $\epsilon = 0$ existen $x_n \in f(A)$ y $y_n \in Y \setminus B$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$d_Y(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$$

[5] James R MUNKRES. *Topología*. 2.ª ed. Pearson/Prentice-Hall, 2002.

y por la compacidad de $f(A)$, existe una subsucesión convergente (x_{n_s}) de (x_n). Sea $x \in f(A)$ tal que $x_{n_s} \to x$. Como $d_Y(x_{n_s}, y_{n_s}) \to 0$ se tiene que $y_{n_s} \to x$, entonces $x \in Y \setminus B$, puesto que B es abierto. Por lo tanto, $x \in f(A) \cap (Y \setminus B) = \emptyset$, de lo cual podemos concluir que $\epsilon > 0$. Ahora, note que para todo $a \in A$,

$$B_Y(f(a); \epsilon) \subseteq B, \tag{2.1}$$

ya que si existen $a \in A$ y $y \in Y \setminus B$ tales que $y \in B_Y(f(a); \epsilon)$ entonces $d_Y(f(a), y) < \epsilon$ lo cual contradice que ϵ es el ínfimo. Finalmente, $B_\infty(f; \epsilon) \subseteq \langle A; B\rangle$. Puesto que, si $g \in B_\infty(f; \epsilon)$ se sigue inmediatamente que $d_Y(f(x), g(x)) < \epsilon$, para todo $x \in X$. En particular, para todo $a \in A$

$$d_Y(f(a), g(a)) < \epsilon,$$

equivalentemente,

$$g(a) \in B_Y(f(a); \epsilon)$$

y por (2.1), obtenemos que $g(A) \subseteq B$. Es decir, $g \in \langle A; B\rangle$ y concluimos la primera parte de nuestra prueba. En seguida probamos que τ es más fina que τ_∞. Sean $f \in C(X, Y)$, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad de f existe un abierto $V_x \subseteq X$ tal que $x \in V_x$ y

$$f(V_x) \subseteq B_Y\left(f(x); \frac{\epsilon}{4}\right).$$

Sea $U_x = B_Y(f(x); \frac{\epsilon}{3})$. Note que su diámetro no es mayor que $\frac{2\epsilon}{3}$ y además $f(\overline{V_x}) \subseteq U_x$, pues

$$\begin{aligned}
f(\overline{V_x}) &\subseteq \overline{f(V_x)} \\
&\subseteq \overline{B_Y\left(f(x); \frac{\epsilon}{4}\right)} \\
&= B_Y\left[f(x); \frac{\epsilon}{4}\right] \\
&\subseteq U_x.
\end{aligned}$$

Como X es compacto y $X \subseteq \bigcup_{x\in X} V_x$, existen $x_1, \cdots, x_n \in X$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Ahora, defina

$$S = \langle \overline{V_{x_1}}; U_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \overline{V_{x_n}}; U_{x_n}\rangle$$

donde, $\overline{V_{x_i}}$ es compacto por la Proposición 1.1.1, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es claro que $f \in S$, veamos que $S \subseteq B_\infty(f;\epsilon)$. Sea $g \in S$. Entonces $g(\overline{V_{x_i}}) \subseteq U_{x_i}$ y $f(\overline{V_{x_i}}) \subseteq U_{x_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon,$$

para todo $x \in \overline{V_{x_i}}$ y para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto,

$$d_Y(f(x), g(x)) < \epsilon,$$

para todo $x \in X$, ya que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{V_{x_i}}$. Entonces, $g \in B_\infty(f;\epsilon)$. En conclusión, hemos demostrado que $\tau = \tau_\infty$.

$\square$

El teorema a continuación fue tomado de [6], Proposición 2.6.

Teorema 2.1.5. *Sean X, Y y Z espacios de Hausdorff y Y un espacio localmente compacto. Entonces la función composición*

$$\begin{aligned} c : C(X,Y) \times C(Y,Z) &\longrightarrow C(X,Z) \\ (f,h) &\longmapsto h \circ f \end{aligned}$$

es continua respecto a la topología compacta abierta.

Demostración. Suponga que $f \in C(X,Y)$, $h \in C(Y,Z)$ y que $h \circ f \in \langle K; W \rangle \subseteq C(X,Z)$. Tome $U = h^{-1}(W)$. Como U es abierto de Y y $f(K) \subseteq U$, por la Proposición 1.1.4 existe un abierto V tal que

$$f(K) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Por tanto,

$$f \in \langle K; V \rangle, \quad h \in \langle \overline{V}; W \rangle \quad \text{y} \quad c(\langle K; V \rangle \times \langle \overline{V}; W \rangle) \subseteq \langle K; W \rangle.$$

De lo cual concluimos, que c es continua en (f,h). $\square$

---

[6] Linus KRAMER. *Locally Compact Groups and Lie groups*. URL: `https://www.uni-muenster.de/AGKramer/content/ch2.pdf`.

2.2. $\mathcal{H}(X)$ con X métrico compacto

El siguiente teorema se le atribuye al matemático Richard F. Arens quién fue el primer matemático en estudiar a profundidad la topología compacta abierta.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Entonces el grupo $\mathcal{H}(X)$ es topológico con la topología compacta abierta.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.5, tenemos que la función composición es continua, pues compacidad implica compacidad local. Únicamente falta probar que la función inversión es continua. Sea $h \in \langle K; W \rangle$, donde K es compacto y W es abierto en X. Esto es, $h(K) \subseteq W$, lo que es equivalente a

$$X \setminus W \subseteq X \setminus h(K).$$

Como $X \setminus h(K) = h(X \setminus K)$, pues h es biyección, tenemos

$$h^{-1}(X \setminus W) \subseteq X \setminus K,$$

esto es, $h^{-1} \in \langle X \setminus W; X \setminus K \rangle$. Observe que en general hemos probado que

$$inv^{-1}(\langle K; W \rangle) = \langle X \setminus W, X \setminus K \rangle,$$

donde inv es la función inversión. Por lo tanto, inv es continua y así, $\mathcal{H}(X)$ es grupo topológico con la topología compacta abierta. $\square$

Ahora se da una demostración alternativa cuando X es métrico compacto, aunque este caso ya se encuentre en el teorema anterior. Cabe resaltar que esta demostración se da únicamente respecto a la topología uniforme y por eso se ha enunciado así el teorema, adicionalmente se usa la invarianza de la métrica uniforme demostrada en el Lema 2.2.2.

Lema 2.2.2. *Si X es métrico acotado entonces la métrica uniforme en $\mathcal{H}(X)$ es invariante por la derecha bajo la composición. Esto es, si $f, g, h \in \mathcal{H}(X)$ entonces*

$$d_\infty(f \circ g, h \circ g) = d_\infty(f, h).$$

Demostración. Sean $f, g, h \in \mathcal{H}(X)$, entonces

$$d_\infty(f \circ g, h \circ g) = \sup_{x \in X}\{d_X(f(g(x)), h(g(x)))\}$$

y por la sobreyectividad de g obtenemos

$$d_\infty(f \circ g, h \circ g) = \sup_{y \in X}\{d_X(f(y), h(y))\}$$

ya que para todo $y \in X$ existe $x \in X$ tal que $g(x) = y$. $\square$

Teorema 2.2.3. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces $\mathcal{H}(X)$ es grupo topológico con la topología uniforme.*

Demostración. Primero se va a mostrar que la función composición c de $\mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X)$ en $\mathcal{H}(X)$ es continua. Sean $f, g \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Teniendo en cuenta que f es una función continua sobre un espacio métrico compacto, se tiene que f es uniformemente continua. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$, entonces

$$d_X(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Sean $f' \in B_\infty(f; \frac{\epsilon}{2})$ y $g' \in B_\infty(g; \delta)$. En consecuencia,

$$d_X(f(x), f'(x)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in X \tag{2.3}$$

y

$$d_X(g(x), g'(x)) < \delta \quad \forall x \in X.$$

Por lo tanto, por (2.2)

$$d_X(f(g(x)), f(g'(x))) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in X. \tag{2.4}$$

Finalmente, observe que

$$d_X(f(g(x)), f'(g'(x))) \leq d_X(f(g(x)), f(g'(x))) + d_X(f(g'(x)), f'(g'(x))).$$

Luego, por (2.3) y (2.4),

$$d_X(f(g(x)), f'(g'(x))) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así, queda demostrado que

$$c\left(B_\infty\left(f; \frac{\epsilon}{2}\right) \times B_\infty\left(g; \delta\right)\right) \subseteq B_\infty(f \circ g; \epsilon).$$

Es decir, la función composición c es continua.

Ahora queda probar que la función inversión es continua. Sea $f \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Luego, por la continuidad uniforme de f^{-1}, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$, se obtiene que

$$d_X(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \epsilon. \tag{2.5}$$

Sea $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que $d_\infty(f, g) < \delta$. Entonces,

$$d_X(f(x), g(x)) < \delta \quad \forall x \in X$$

y de este modo, por (2.5),

$$d_X(x, f^{-1}(g(x))) = d_X(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(g(x))) < \epsilon \quad \forall x \in X.$$

Equivalentemente,

$$d_\infty(id_X, f^{-1} \circ g) < \epsilon$$

donde id_X es la función identidad en X. Por el Lema 2.2.2

$$d_\infty(id_X, f^{-1} \circ g) = d_\infty(g^{-1}, f^{-1}) = d_\infty(f^{-1}, g^{-1}).$$

En resumen, dados $f \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$ se halló un $\delta > 0$ tal que si $d_\infty(f, g) < \delta$ entonces $d_\infty(f^{-1}, g^{-1}) < \epsilon$. Esto es, la función inversión es continua en f. □

2.3. El grupo $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$

En esta sección veremos que el espacio de autohomeomorfismos del plano real $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \subseteq (\mathbb{R}^2)^{(\mathbb{R}^2)}$ no es grupo topológico con la topología producto. Este resultado es el ejercicio 14 de la página 330 del libro de Nicolas Bourbaki [1].

Proposición 2.3.1. $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *no es grupo topológico en la topología producto.*

Demostración. Considere las sucesiones de homeomorfismos

$$u_n((x, y)) = \left(x, y + \frac{2}{2n+1}\right) = (x, y) + \left(0, \frac{2}{2n+1}\right)$$

y

$$v_n((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } y \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ (x + (n+1)(2n+1)y - (2n+1), y), & \text{si } y \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{2n+1}\right] \\ (x - n(2n+1)y + (2n+1), y), & \text{si } y \in \left[\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Observe que u_n al ser una función lineal, cumple con ser homeomorfismo, para todo

$n \in \mathbb{N}$. Es importante mencionar que

$$v_n\left(\left(x, \frac{2}{2n+1}\right)\right) = \left(x+1, \frac{2}{2n+1}\right).$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Note que v_n es biyectiva pues si $y \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, tome el mismo par ordenado (x,y), éste es el único tal que $v_n((x,y)) = (x,y)$. Por otro lado, si $y \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{2n+1}\right]$ existe un único

$$x' = x - (n+1)(2n+1)y + (2n+1)$$

tal que $v_n((x',y)) = (x,y)$ y si $y \in \left[\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n}\right]$ existe un único

$$x' = x + n(2n+1)y - (2n+1)$$

tal que $v_n((x',y)) = (x,y)$. Por lo tanto, v_n es biyectiva. Ahora se quiere verificar que v_n es continua. Sean

$$A = \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} \setminus \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right)$$

y

$$B = \mathbb{R} \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

Tanto A como B son cerrados y $v_n|_A : A \to \mathbb{R}^2$ es continua, ya que es la función identidad. Por el Lema 1.1.5, faltaría ver que $v_n|_B : B \to \mathbb{R}^2$ es continua. Observe que

$$B = \left(\mathbb{R} \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{2n+1}\right]\right) \cup \left(\mathbb{R} \times \left[\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n}\right]\right).$$

Por tanto, aplicando nuevamente el Lema 1.1.5, obtenemos que $v_n|_B$ es continua pues v_n restringida a $\mathbb{R} \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{2n+1}\right]$ es continua por ser una función lineal, igual que v_n restringida a $\mathbb{R} \times \left[\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Entonces, v_n es continua.
Análogamente se prueba la continuidad de la función inversa v_n^{-1} que está dada por:

$$v_n^{-1}((x,y)) = \begin{cases} (x,y), & \text{si } y \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ (x-(n+1)(2n+1)y + (2n+1), y), & \text{si } y \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{2n+1}\right] \\ (x + n(2n+1)y - (2n+1), y), & \text{si } y \in \left[\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Así, v_n es un homeomorfismo del plano real $\mathbb{R}^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \\ (u, v) &\longmapsto v \circ u \end{aligned}$$

no es continua. Primero veremos que

$$(u_n, v_n) \to (id, id),$$

donde id es la función identidad. Fijemos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $y \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$v_n((x, y)) = (x, y), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]$, tome $N = m + 1$ y como $y > \frac{1}{n}$ para todo $n > N$, entonces

$$v_n((x, y)) = (x, y), \quad \forall n > N.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} v_n((x, y)) = (x, y).$$

Por otra parte,

$$\lim_{n \to \infty} u_n((x, y)) = \lim_{n \to \infty} \left(x, y + \frac{2}{2n+1}\right) = (x, y).$$

De esta manera,

$$(u_n, v_n) \to (id, id).$$

Observe que

$$(v_n \circ u_n)((x, 0)) = v_n(u_n((x, 0))) = v_n\left(\left(x, \frac{2}{2n+1}\right)\right) = \left(x + 1, \frac{2}{2n+1}\right)$$

entonces al tomar el límite

$$\lim_{n \to \infty} (v_n \circ u_n)((x, 0)) = (x + 1, 0).$$

En conclusión, $(u_n, v_n) \to (id, id)$ pero $v_n \circ u_n \not\to id$. Por lo tanto, la función composición no es continua. $\square$

2.4. El grupo $\mathcal{H}([0,1])$

A continuación probamos que la topología producto resulta ser igual a la topología uniforme en el espacio $\mathcal{H}([0,1]) \subseteq [0,1]^{[0,1]}$ y así podemos concluir que es grupo topológico con la topología producto. Por otra parte, en la siguiente sección, también mostraremos que $\mathcal{H}(2^{\mathbb{N}})$ no es grupo topológico con la topología producto. No sabemos si estos dos resultados ya eran conocidos en la literatura. Las pruebas que presentamos son originales.

Una propiedad a destacar es que las funciones que pertenecen a $\mathcal{H}([0,1])$ son estrictamente monótonas. Además, según el comportamiento de la función en los puntos extremos, podemos determinar que tipo de función monótona es; $h(0)=0$ si, y sólo si, h es creciente, y, $h(0)=1$ si, y sólo si, h es decreciente.

Teorema 2.4.1. *En $\mathcal{H}([0,1])$ la topología producto y la topología inducida por la métrica uniforme coinciden. Esto es,*

$$(\mathcal{H}([0,1]),\tau_p) = (\mathcal{H}([0,1]),\tau_\infty)\,.$$

Demostración. Primero veamos que $\tau_p \subseteq \tau_\infty$. Sean

$$\begin{aligned} U &= \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(U_i) \\ &= \{g \in \mathcal{H}([0,1]) \mid g(x_i) \in U_i, \text{ para todo } i \in \{1,\dots,n\}\} \end{aligned}$$

en τ_p, donde U_i es un conjunto abierto de $[0,1]$ y $x_i \in [0,1]$, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ y $f \in U$. Ya que $f(x_i) \in U_i$ y U_i es abierto, existe $\epsilon_i > 0$ tal que

$$(f(x_i)-\epsilon_i), f(x_i)+\epsilon_i) \subseteq U_i, \text{ para todo } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\}$. De lo anterior, se sigue que

$$(f(x_i)-\epsilon, f(x_i)+\epsilon) \subseteq U_i, \text{ para todo } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Sea $g \in B_\infty(f;\epsilon)$. Entonces $|f(x)-g(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [0,1]$. De manera que

$$|f(x_i)-g(x_i)| < \epsilon,$$

esto es,

$$g(x_i) \in (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon) \subseteq U_i,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. En consecuencia, $g \in U$ y podemos concluir que $U \in \tau_\infty$. Ahora veamos que $\tau_\infty \subseteq \tau_p$. Sean $f \in \mathcal{H}([0,1])$ y $0 < \epsilon < 1$. Observe que f es estrictamente monótona, sin pérdida de generalidad suponga que es creciente. Sean

$$x_1 = 0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

tales que para todo $j \in \{1, \cdots, n-1\}$

$$0 < f(x_{j+1}) - f(x_j) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.6}$$

Sean

$$\begin{aligned} V &= \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}\left(\left(f(x_i) - \frac{\epsilon}{3}, f(x_i) + \frac{\epsilon}{3}\right)\right) \\ &= \left\{h \in \mathcal{H}([0,1]) \mid h(x_i) \in \left(f(x_i) - \frac{\epsilon}{3}, f(x_i) + \frac{\epsilon}{3}\right),\ \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\right\} \end{aligned}$$

y $g \in V$. Entonces

$$g(0) \in \left(f(0) - \frac{\epsilon}{3}, f(0) + \frac{\epsilon}{3}\right) = \left(0 - \frac{\epsilon}{3}, 0 + \frac{\epsilon}{3}\right)$$

lo cual implica que $g(0) = 0$, es decir g es creciente. Sea $x \in [0,1]$. Entonces existe $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ tal que

$$x_j \leq x \leq x_{j+1}.$$

Denotaremos por U_j y U_{j+1} a los siguientes intervalos abiertos

$$U_j = \left(f(x_j) - \frac{\epsilon}{3}, f(x_j) + \frac{\epsilon}{3}\right) \text{ y } U_{j+1} = \left(f(x_{j+1}) - \frac{\epsilon}{3}, f(x_{j+1}) + \frac{\epsilon}{3}\right).$$

Observe que

$$U_j \cup U_{j+1} = \left(f(x_j) - \frac{\epsilon}{3}, f(x_{j+1}) + \frac{\epsilon}{3}\right)$$

y

$$U_j \cap U_{j+1} = \left(f(x_{j+1}) - \frac{\epsilon}{3}, f(x_j) + \frac{\epsilon}{3}\right). \tag{2.7}$$

Como g es creciente tenemos que $g(x_j) \leq g(x) \leq g(x_{j+1})$ y $g \in V$ entonces

$$f(x_j) - \frac{\epsilon}{3} < g(x_j) < f(x_j) + \frac{\epsilon}{3}$$

y

$$f(x_{j+1}) - \frac{\epsilon}{3} < g(x_{j+1}) < f(x_{j+1}) + \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto,

$$f(x_j) - \frac{\epsilon}{3} < g(x_j) \leq g(x) \leq g(x_{j+1}) < f(x_{j+1}) + \frac{\epsilon}{3}.$$

De donde concluimos que $g(x) \in U_j \cup U_{j+1}$. Por otro lado, de (2.6) y (2.7) se obtiene que

$$[f(x_j), f(x_{j+1})] \subseteq U_j \cap U_{j+1}$$

y como f es creciente, tenemos que $f(x) \in [f(x_j), f(x_{j+1})]$. Por lo tanto, dado que $f(x), g(x) \in U_j \cup U_{j+1}$ concluimos que

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon$$

pues la longitud del intervalo abierto $U_j \cup U_{j+1}$ es menor a ϵ. Como el x tomado fue arbitrario, podemos afirmar que $g \in B_\infty(f; \epsilon)$. Por lo tanto, $B_\infty(f; \epsilon) \in \tau_p$. Esto concluye que ambas topologías en $\mathcal{H}([0,1])$ coinciden. $\square$

Una consecuencia directa del teorema anterior es:

Proposición 2.4.2. $\mathcal{H}([0,1])$ *es grupo topológico con la topología producto.*

Demostración. Por el Teorema 2.4.1, sabemos que en $\mathcal{H}([0,1])$ la topología producto y la topología uniforme son iguales y por el Teorema 2.2.3, concluimos $\mathcal{H}([0,1])$ es grupo topológico con la topología producto. $\square$

2.5. El espacio de Cantor y sus contraejemplos

Sabemos que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ es grupo topológico con la topología compacta abierta (ver el Teorema 2.2.3). En esta sección veremos que si a $\mathcal{C}$ le quitamos el cero, entonces $\mathcal{H}(\mathcal{C}\backslash\{\mathbf{0}\})$ no es grupo topológico. Esto quiere decir que si pasamos de un espacio métrico compacto a uno que es métrico localmente compacto, el grupo de autohomeomorfismos del espacio puede perder la estructura de grupo topológico.

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \{c \in \mathcal{C} \mid c_1 = \cdots = c_n = 0\} \text{ y } V_n = \{c \in \mathcal{C} \mid c_1 = \cdots = c_n = 1\}.$$

Estos conjuntos son abiertos y cerrados en el espacio de Cantor $\mathcal{C}$. Son abiertos por ser elementos de la base de la topología producto

$$U_n = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\{0\}) \text{ y } V_n = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\{1\})$$

y son cerrados porque el complemento de U_n

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \setminus U_n &= \{c \in \mathcal{C} \mid c_i = 1 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

es abierto por ser unión de elementos de la base de la topología producto. De igual forma el complemento de V_n es abierto

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \setminus V_n &= \{c \in \mathcal{C} \mid c_i = 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

Además, por la Proposición 1.3.2, $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades de la sucesión que sólo tiene ceros **0** $= (0, 0, 0, \dots)$ y $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades de la sucesión que tiene únicamente unos **1** $= (1, 1, 1, \dots)$.

Lema 2.5.1. *Defina, para todo* $n \geq 1$*,*

$$h_n(x) = \begin{cases} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x_{n+2}, \dots), & \textit{si } x \in U_{n+1} \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 1, x_{n+2}, \dots), & \textit{si } x \in U_n \setminus U_{n+1} \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0, x_{n+1}, \dots), & \textit{si } x \in V_n \\ x, & \textit{si } x \in \mathcal{C} \setminus (U_n \cup V_n). \end{cases}$$

Es decir,

$$h_n((\underbrace{0,\dots,0}_{n+1},x_{n+2},\dots)) = (\underbrace{0,\dots,0}_{n},x_{n+2},\dots)$$
$$h_n((\underbrace{0,\dots,0}_{n},1,x_{n+2},\dots)) = (\underbrace{1,\dots,1}_{n},1,x_{n+2},\dots)$$
$$h_n((\underbrace{1,\dots,1}_{n},x_{n+1},\dots)) = (\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,x_{n+1},\dots)$$
$$h_n(x) = x \text{ *en cualquier otro caso.*}$$

Entonces h_n es un autohomeomorfismo del espacio de Cantor $\mathcal{C}$.

Demostración. Primero observe que

$$h_n(U_{n+1}) = U_n,\ h_n(U_n \setminus U_{n+1}) = V_{n+1},\ h_n(V_n) = V_n \setminus V_{n+1}$$

y

$$h_n|_{\mathcal{C}\setminus(U_n\cup V_n)} = id_{\mathcal{C}\setminus(U_n\cup V_n)}.$$

Para ver que h_n es homeomorfismo, es suficiente probar que $h_n|_{U_n\cup V_n}$ es homeomorfismo pues $h_n|_{\mathcal{C}\setminus(U_n\cup V_n)} = id_{\mathcal{C}\setminus(U_n\cup V_n)}$.

Veamos que $h_n|_{U_n\cup V_n}$ es biyección. Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones distintas en $U_n \cup V_n$.

- Si $x \in U_n$ y $y \in V_n$ es inmediato que $h_n(x) \neq h_n(y)$ pues $h_n(x) \in U_n \cup V_{n+1}$ y $h_n(y) \in V_n \setminus V_{n+1}$.
- Si $x, y \in V_n$, sea $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$. Note que $k \geq n+1$. Entonces por definición de h_n, $h_n(x) \neq h_n(y)$ pues difieren al menos en la posición $k+1$.
- Suponga que $x, y \in U_n$. Si $x \in U_{n+1}$ y $y \in U_n \setminus U_{n+1}$ entonces $h_n(x) \neq h_n(y)$ pues $h_n(x) \in U_n$ y $h_n(y) \in V_{n+1}$. Por otro lado, si $x, y \in U_{n+1}$ o $x, y \in U_n \setminus U_{n+1}$, entonces $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$ y $k \geq n+2$. Por lo tanto, $h_n(x) \neq h_n(y)$ porque difieren en las posiciones $k-1$ y k, respectivamente.

En consecuencia, $h_n|_{U_n\cup V_n}$ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, sea $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_n \cup V_n$.

- Si $y \in U_n$ entonces tome $x = (\underbrace{0,\dots,0}_{n+1},y_{n+1},\dots)$.

- Suponga que $y \in V_n$. Si $y \in V_{n+1}$, sea $x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, y_{n+2}, \ldots)$ y si $y \in V_n \setminus V_{n+1}$ entonces tome $x = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, y_{n+2}, \ldots)$.

Por definición de h_n, $h_n(x) = y$ en todos los casos. Por lo tanto, $h_n|_{U_n \cup V_n}$ es sobreyectiva. Para ver que $h_n|_{U_n \cup V_n}$ es continua, lo haremos por partes probando que $h_n|_{U_{n+1}}$, $h_n|_{U_n \setminus U_{n+1}}$ y $h_n|_{V_n}$ son continuas, pues $U_{n+1}, U_n \setminus U_{n+1}$ y V_n son abiertos y aplicando el Lema 1.1.5 se tendría la continuidad de $h_n|_{U_n \cup V_n}$.

- Sea $V = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(W_j)$ abierto en $\mathcal{C}$ con $V \subseteq U_n$. Si existe $m \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x_m \notin \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned} h_n|_{U_{n+1}}^{-1}(V) &= \bigcap_{j=1, j\neq m}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(W_j) \cap \pi_{n+1}^{-1}(\{0\}) \cap \pi_{x_m+1}^{-1}(W_m) \\ &= \bigcap_{j=1, j\neq m}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(\{0\}) \cap \pi_{n+1}^{-1}(\{0\}) \cap \pi_{x_m+1}^{-1}(W_m). \end{aligned}$$

  Entonces $h_n|_{U_{n+1}}^{-1}(V)$ es abierto. En consecuencia, $h_n|_{U_{n+1}}$ es continua.

- Sea $V = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(W_j)$ abierto en $\mathcal{C}$ con $V \subseteq V_{n+1}$. Si existe $m \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x_m \notin \{1, \ldots, n\}$ y si existe $m' \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x_{m'} = n + 1$, entonces

$$\begin{aligned} h_n|_{U_n \setminus U_{n+1}}^{-1}(V) &= \bigcap_{j=1, j\neq m,m'}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(\{0\}) \cap \pi_{m'}^{-1}(W_{m'}) \cap \pi_{x_m}^{-1}(W_m) \\ &= \bigcap_{j=1, j\neq m,m'}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(\{0\}) \cap \pi_{n+1}^{-1}(\{1\}) \cap \pi_{x_m}^{-1}(W_m). \end{aligned}$$

  Entonces $h_n|_{U_n \setminus U_{n+1}}^{-1}(V)$ es abierto. Por lo tanto, $h_n|_{U_n \setminus U_{n+1}}$ es continua.

- Sea $V = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(W_j)$ abierto en $\mathcal{C}$ con $V \subseteq V_n \setminus V_{n+1}$. Si existe $m \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x_m \notin \{1, \ldots, n\}$ y si existe $m' \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x_{m'} = n + 1$, entonces

$$\begin{aligned} h_n|_{V_n}^{-1}(V) &= \bigcap_{j=1, j\neq m,m'}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(W_j) \cap \pi_{x_m-1}^{-1}(W_m) \\ &= \bigcap_{j=1, j\neq m,m'}^{k} \pi_{x_j}^{-1}(\{1\}) \cap \pi_{x_m-1}^{-1}(W_m). \end{aligned}$$

  Entonces $h_n|_{V_n}^{-1}(V)$ es abierto. Luego, $h_n|_{V_n}$ es continua.

Finalmente, la inversa de $h_n|_{U_n \cup V_n}$ está dada por

$$h_n|_{U_n \cup V_n}(x) = \begin{cases} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, x_{n+2}, \dots), & \text{si } x \in U_n \\ (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 1, x_{n+2}, \dots), & \text{si } x \in V_{n+1} \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, x_{n+2}, \dots), & \text{si } x \in V_n \setminus V_{n+1} \end{cases}$$

y su continuidad se prueba exactamente igual a la de $h_n|_{U_n \cup V_n}$, por lo tanto la omitimos. En conclusión h_n es un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$, para todo $n \geq 1$.

□

Proposición 2.5.2. *Sean **0** $= (0, 0, 0, \dots)$ la sucesión de sólo ceros y $X = \mathcal{C} \setminus \{$**0**$\}$. Entonces, $\mathcal{H}(X)$ no es grupo topológico en la topología compacta abierta.*

Demostración. Definamos una sucesión $(h_n)_{n \geq 1}$ de autohomeomorfismos de $\mathcal{C}$, como sigue

$$h_n(x) = \begin{cases} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x_{n+2}, \dots), & \text{si } x \in U_{n+1} \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 1, x_{n+2}, \dots), & \text{si } x \in U_n \setminus U_{n+1} \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0, x_{n+1}, \dots), & \text{si } x \in V_n \\ x, & \text{si } x \in \mathcal{C} \setminus (U_n \cup V_n). \end{cases}$$

Por el Lema 2.5.1 sabemos que cada h_n es en efecto un autohomeomorfismo del espacio de Cantor. Es importante resaltar que todo h_n fija a **0**, es decir,

$$h_n(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

esto implica que cada h_n restringido a $X = \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ es un homeomorfismo de X. Afirmamos que en la topología compacta abierta de $\mathcal{H}(X)$,

$$h_n|_X \to id_X$$

pero

$$(h_n|_X)^{-1} \not\to id_X.$$

Para la primera afirmación, sean $K \subseteq X$ compacto y $W \subseteq X$ abierto tales que $id_X \in$

$\langle K; W\rangle$, es decir, $id_X(K) = K \subseteq W$. Como $K \subseteq \mathcal{C}$ es compacto y **0** $\in \mathcal{C} \setminus K$, existe $m \geq 1$ tal que **0** $\in U_m$ y $U_m \subseteq \mathcal{C} \setminus K$.

- Supongamos primero que **1** $\in X \setminus K$. Entonces existe $n \geq 1$ tal que $V_n \cap K = \emptyset$. Luego, si $l \geq m, n$, se tiene que $U_l \subseteq U_m$ y $V_l \subseteq V_n$. Por lo tanto,

  $$U_l \cap K = \emptyset \text{ y } V_l \cap K = \emptyset.$$

  De este modo, $h_l|_K = id_K$, esto es, $h_l|_X \in \langle K; W\rangle$.

- Suponga ahora que **1** $\in K$ y sabemos que $K \subseteq W$. Entonces existe $n \geq 1$ tal que $V_n \subseteq W$. En consecuencia, para $l \geq m, n$ tenemos que

  $$U_l \cap K = \emptyset$$

  y

  $$h_l|_{K \setminus V_l} = id_{K \setminus V_l}, \quad h_l(V_l) = V_l \setminus V_{l+1} \subseteq V_l \subseteq V_n \subseteq W,$$

  de donde obtenemos que $h_l|_X \in \langle K; W\rangle$.

Por lo tanto, $h_n|_X \to id_X$. Por otro lado, por definición de cada h_n

$$h_n|_X(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 1, \ldots) = \mathbf{1}, \tag{2.8}$$

es decir,

$$\mathbf{1} \in h_n|_X(U_n).$$

Lo cual implica que la sucesión $(h_n|_X^{-1}(\mathbf{1}))_{n\geq 1}$ no converge en la topología puntual. Por lo tanto, tampoco converge en la topología compacta abierta. En conclusión, $(h_n|_X)^{-1} \not\to id_X$.

□

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ no es grupo topológico respecto a la topología producto. De esta manera, el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es un ejemplo de un espacio métrico compacto tal que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ no es grupo topológico con la topología producto.

Proposición 2.5.3. $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ *no es grupo topológico con la topología producto.*

Demostración. Considere la sucesión de homeomorfismos $(h_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ definida en el Lema 2.5.1. De la demostración de la Proposición 2.5.2, hemos visto que

$$h_n|_X \to id_X$$

con la topología compacta abierta, donde $X = \mathcal{C} \setminus \{0\}$. Debido a que la topología compacta abierta es más fina que la topología producto, obtenemos que

$$h_n|_X \to id_X$$

con la topología producto. Y como $h_n(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo n, es claro que $h_n(\mathbf{0}) \to \mathbf{0}$. Entonces, en $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, $h_n \to id$ con la topología producto. Pero por (2.8)

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbf{0},$$

es decir, $h_n^{-1}(\mathbf{1}) \not\to \mathbf{1}$. Por lo tanto, la función inversión no es continua y $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ no es grupo topológico con la topología producto. $\square$

La proposición 2.5.2 nos permite concluir que no se puede debilitar la condición de compacidad a compacidad local en el primer teorema de Arens que mencionamos (Teorema 2.2.3). Sin embargo, si tenemos un espacio de Hausdorff, localmente compacto y además, localmente conexo, el siguiente teorema, también de Arens, nos afirma que su grupo de autohomeomorfismos es grupo topológico respecto a la topología compacta abierta.

Teorema 2.5.4. *Sea X un espacio de Hausdorff, localmente compacto y localmente conexo. Entonces $\mathcal{H}(X)$ dotado con la topología compacta abierta es grupo topológico.*

La demostración de este teorema se puede leer en el Corolario 2.17 de [6]. Además, note que con este teorema $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ es grupo topológico con la topología con la compacta abierta, el cual recordemos que no lo es con la topología producto (Proposición 2.3.1).

Bibliografía

BOURBAKI, Nicolas. *General Topology. Part 2. Elements of mathematics*. Addison-Wesley, 1966 (vid. págs. 8, 24, 30).

BRAY, Thomas. *An Introduction to Topological Groups*. URL: https://carleton.ca/math/wp-content/uploads/BrayThomas-An_Introduction_to_Topological_Groups-HonoursProject.pdf (vid. pág. 18).

CAMARGO Javier y VILLAMIZAR, Élder. *Topología General*. Ediciones UIS, 2020 (vid. págs. 10-12, 14, 21).

DIJKSTRA, Jan J. "On Homeomorphism Groups and the Compact-Open Topology". En: *The American Mathematical Monthly* 112.10 (2005), págs. 910-912 (vid. págs. 8, 24).

KRAMER, Linus. *Locally Compact Groups and Lie groups*. URL: https://www.uni-muenster.de/AGKramer/content/ch2.pdf (vid. págs. 27, 41).

MUNKRES, James R. *Topología*. 2.ª ed. Pearson/Prentice-Hall, 2002 (vid. pág. 25).