RAÍCES DE POLINOMIOS Y MATRICES CIRCULANTES

ROGER WILLIAM ARDILA MONTERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

RAÍCES DE POLINOMIOS Y MATRICES CIRCULANTES

ROGER WILLIAM ARDILA MONTERO

Monografía presentada para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director
EDILBERTO JOSÉ REYES GONZÁLEZ, M.Sc.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

RESUMEN

TÍTULO: RAÍCES DE POLINOMIOS Y MATRICES CIRCULANTES*

AUTOR: ROGER WILLIAM ARDILA MONTERO**

PALABRAS CLAVES: Matrices circulantes, Formulas Cardano-Tartaglia, Formula de Ferrari, Ecuaciones Polinomiales .

DESCRIPCIÓN: En esta monografía se presenta una comparación entre métodos tradicionales (Cardando-Tartaglia y Ferrari) y el método de matrices circulantes para encontrar soluciones a ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto orden en una variable con sus respectivas deducciones. Además este trabajo muestra como el método de matrices circulante teóricamente es un excelente método para el cálculo de raíces de ecuaciones polinomiales de orden n en una variable.
Esta monografía se compone de cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan algunos conceptos básicos sobre álgebra lineal (teoremas, definiciones, ejemplos) para el desarrollo de este trabajo. El segundo capítulo se presenta brevemente la historia de las formulas de Cardano-Tartaglia y Ferrari para la encontrar soluciones a ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto orden con sus respectivas deducciones.
En el tercer capítulo se definen y se estudian las propiedades básicas e importantes de las matrices circulantes para obtener las soluciones de ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto orden en una variable. Finalmente se da el método para hallar las raíces para de ecuaciones polinomiales con coeficientes reales, de tercer y cuarto orden y se describe el método teóricamente para hallar las raíces de cualquier polinomio en una variable con coeficientes reales.
En el cuarto capítulo se desarrolla el objetivo principal de este trabajo que consiste en usar lo desarrollado en los capítulos anteriores para obtener las raíces de polinomios en una variable mediante las propiedades de las matrices circulantes y se desarrollan ejemplos.

*Dr. Edilberto José Reyes González, Director del Trabajo de Grado.

**Programa de Licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

ABSTRACT

TITLE: ROOTS OF POLYNOMIALS AND CIRCULANT MATRICES*

AUTHOR: ROGER WILLIAM ARDILA MONTERO**

KEYWORDS: Circulant matrices, Cardano-Tartaglia Formulas, Ferrari Formula,Polynomial Equations.

DESCRIPTION: This monograph presents a comparison between traditional methods (Cardando-Tartaglia and Ferrari) and circulant matrices method, in order to find solutions for polynomial (third and fourth grade) equations in one variable with their respectives deductions. Furthermore this work presents how circulant matrices methods theorically are an excellent method to calculate the roots to polynomials equations (n grade) in one variable.

This monograph is composed by four chapters. First chapter presents some basic concepts regarding to lineal algebra (theorems, definitions, examples) for development of this work. The second chapter presents a brief history of the Cardano-Tartaglia and Ferrari formulas to find solutions to polynomial equations (third and fourth grade) with their respective deductions.

Third chapter defines and discusses the basic and important properties of circulant matrices to obtain solutions of polynomial equations (Third and fourth grade) in a variable. Finally there is the method for finding the roots of polynomial equations with real coefficients, third and fourth order and describes the theoretical method to find the roots of any polynomial in one variable with real coefficients.

In the fourth chapter develops the main objective of this work is to use as developed in previous chapters to obtain the roots of polynomials in one variable by the properties of circulant matrices and develop examples.

*Dr. Edilberto José Reyes González, Undergraduate Dissertation Director.

**Undergraduate Program of Licentiate in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios
ha escrito el universo.
Galileo Galilei

Agradecimientos

Agradezco a mi Dios todo poderoso por darme fuerza para poder enfrentar todas las dificultades que se presentan en la vida.

A mis padres Esperanza Montero y Rafael Ardila por su esfuerzo y gran apoyo incondicional en cada uno de mis proyectos.

A mi Hermano Rafael G. Ardila por su colaboración y cariño.

A mi Novia Leidy Lizarazu por su gran su amor y ayuda en todos estos años de acompañamiento.

Al profesor EDILBERTO REYES por su gran orientación y colaboración en el desarrollo de este trabajo.

A mi Amigo Luis Antonio Gómez por toda sus enseñanzas recibidas.

Tabla de Contenido

Introducción

Desde tiempos remotos, y como parte esencial de su propio desarrollo evolutivo, el hombre ha procurado entender los diferentes aspectos que forman parte de su vida cotidiana. Todo esto con el propósito de favorecer tanto su forma de vida como la de los miembros de su comunidad. Muchos de estos problemas tienen un carácter lineal, es decir, pueden plantearse mediante algunas ecuaciones polinomiales y sus métodos de solución.
En este trabajo de grado se exploran los métodos utilizados por grandes matemáticos (Cardano-Tartaglia y Ferrari) que a través de la historia han planteado para dar soluciones a las ecuaciones polinomiales especialmente a las ecuaciones de tercer y cuarto grado. A demás se plantea un método interesante llamado matrices circulantes el cual proporciona una hermosa unidad de soluciones a ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto grado. También se mostraran ideas interesantes entre las matrices y los polinomios.
El presente trabajo ha sido dividido atendiendo a criterios temáticos más que cronológicos, brindándole un mayor valor a las ideas que a las fechas. Así,en el primer capítulo se presentan los preliminares que contienen conceptos básicos del algebra lineal para el desarrollo de este trabajo.
En el segundo capítulo se incluyen algunos antecedentes históricos de los sistemas de ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto grado y sus métodos de resolución de la mano de matemáticos italianos (Cardano-Tartaglia y Ferrari).
El tercer capítulo definiremos una matriz circulante y sus propiedades.
En el último capítulo de este trabajo se muestra como el método de matrices circulantes es utilizado para encontrar las raíces de un polinomio de tercer y cuarto grado en una forma más sencilla de recordar, también presentaremos algunos resultados importantes y ejemplos sobre el tema. Por último comentarios finales y conclusiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados básicos que se necesitan para desarrollar el tema central de este trabajo. Estos resultados son conocidos y por eso algunos de ellos se presentan sin demostración, aunque se indica donde se pueden encontrar. Como el tema fundamental del trabajo son las raíces de los polinomios en una variable necesitamos el siguiente teorema cuya demostración se encuentran en casi todo libro de variable compleja.

Teorema 1.1 (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio en una variable de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n-raíces(reales o complejas)*

1.1. Raíces n-ésimas de un numero complejo

Sea $z \in C$, $z = re^{i\theta}$. Si u es una raíz n-ésima de z entonces $u^n = z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi k)}$ Siendo k un entero, Luego

$$u = [re^{i(\theta+2\pi k)}]^{1/n} \ , \ con \ \ k \in Z$$

entonces

$$u = [r^{1/n}e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}] \ , \ con \ \ k \in Z$$

Si para cada $k \in Z$,

$$u_k = r^{1/n}e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}} = r^{1/n}e^{\frac{i\theta}{n}}e^{\frac{i2\pi k}{n}}$$

entonces,

$$u_k = r^{1/n} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{i2\pi k}{n}} = u_0 e^{\frac{i2\pi k}{n}}$$

Fácilmente se verifica que $u_0 = u_n$, $u_1 = u_{n+1}$, $u_2 = u_{n+2}$, ... , $u_{n-1} = u_{2n-1}, \ldots$
Por lo tanto se tiene el siguiente resultado,

Teorema 1.2. *$z = re^{i\theta}$ tiene exactamente raíces n-ésimas que son*

$$u_k = r^{1/n} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{i2\pi}{n}} = u_0 e^{\frac{i2\pi k}{n}} \qquad con \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Haciendo $w_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}}$, las raíces n-ésimas de $z = re^{i\theta}$ son $u_k = u_0 w_k$, $\;k = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Raíces n-ésimas de la unidad

Para $z = 1$, tenemos que $|z| = r = 1$ y $\theta = Arg \;\; z = 0$, $u_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n} = 1$, luego las raíces n-ésimas de la unidad son

$$w_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}} \quad con \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Los siguientes ejemplos son útiles un poco más adelante.
Raíces cúbicas de la unidad

Ejemplo 1.1. *Calcular las raíces cubicas de la unidad*

Solución . Para $n = 3$, las raíces cubicas de la unidad son

$$w_k = e^{\frac{i2\pi k}{3}}; k = 0, 1, 2$$

Es decir,

$$w_0 = 1,$$

$$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Fácilmente se verifica que $w_1^2 = w_2$ y $w_1^3 = 1$, luego w_1 genera cíclicamente las raíces cúbicas de 1.

Gráficando las raíces cúbicas de la unidad en el plano complejo, y uniendo los puntos correspondientes a las raíces se obtiene un triángulo equilátero

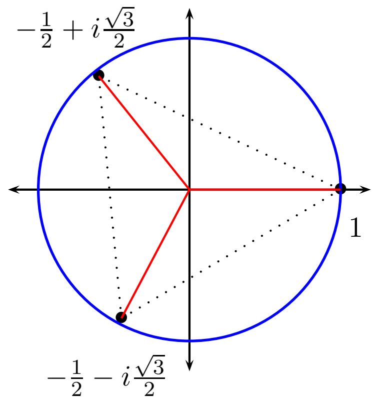

Figura 1.1: Raíces cúbicas de la unidad en el plano complejo(Triángulo equilátero).

$\square$

Raíces cuartas de la unidad

Ejemplo 1.2. *Calcular las raíces cuartas de la unidad para n=4.*

Solución . Para $n = 4$ las raíces cuartas de la unidad son

$$w_k = e^{\frac{i2\pi k}{4}}; k = 0, 1, 2, 3.$$

Es decir que:

$$w_0 = 1,$$

$$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{4}} = e^{i\pi/2} = 1,$$

$$w_2 = e^{\frac{i\pi 4}{4}} = w_1^2 = -1,$$

$$w_3 = e^{\frac{i6\pi}{4}} = w_1^3 = -i,$$

nuevamente se observa que w_1 genera cíclicamente las raíces cuartas de la unidad. También gráficando las raíces cuartas de la unidad en el plano complejo, y uniendo los puntos correspondientes a las raíces se obtiene un cuadrado.

$\square$

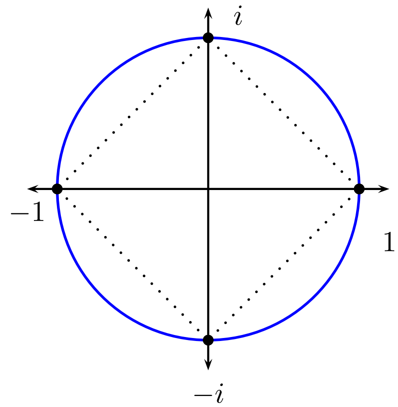

Figura 1.2: Raíces cuartas de la unidad en el plano complejo (Cuadrado).

Los ejemplos anteriores muestran que las raíces cúbicas y las raíces cuartas de la unidad forman en cada caso con el producto usual de números complejos un grupo cíclico. Veamoslo en general.

Teorema 1.3. *Las raíces n-ésimas de la unidad* $w_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}}$ *con* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$*, con el producto usual de números complejos forman un grupo cíclico.*

Demostración. 1. Consideremos w_k, w_l con $k, l \in \{0, 1, 2, \ldots (n-1)\}$ entonces

$$w_k \cdot w_l = e^{i2\pi k/n} \cdot e^{i2\pi l/n} = e^{\frac{i2\pi}{n}(k+l)} \quad \textit{donde} \quad 0 \leq k+l \leq 2n-1$$

Si $0 \leq k+l < n$ entonces $w_k \cdot w_l = w_{k+l}$,

y si $n \leq k+l \leq 2n-1 = n+(n-1)$ entonces $k+l = n+p$,

donde $p \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$,

luego

$$w_k \cdot w_l = e^{\frac{i2\pi}{n}(k+l)} = e^{\frac{i2\pi}{n}(n+p)} = e^{i2\pi} \cdot e^{i2\pi p/n} = 1 \cdot e^{i2\pi p/n} =$$

$$= e^{i2\pi p/n} = w_p \in A_n.$$

2. Como $A_n \subseteq \mathbb{C}$ entonces el producto de números complejos restringido a A_n hereda las propiedades asociativa y conmutativa.

3. Dado que $w_0 = 1$ y para todo complejo z, $1 * z = z * 1 = z$, entonces w_0 es la identidad de $(A_n, *)$.

4. Dado que $w_0 * w_0 = 1$ entonces $w_0^{-1} = w_0$.
Si $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ y $w_k \cdot w_{n-k} = e^{\frac{i2\pi k}{n}} e^{\frac{i2\pi(n-k)}{n}} = e^{\frac{i2\pi n}{n}} = e^{i2\pi}$,luego

$$w_k^{-1} = w_{n-k} \in A_n.$$

Hasta aquí hemos probado que $(A_n, *)$ es un grupo (más aún, es conmutativo).Se mostrará a continuación que es cíclico
Sea $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, entonces $w_k = e^{\frac{2\pi ki}{n}} = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k = (w_1)^k$ entonces $w_k \in < w_1 >$, luego $< w_1 >= A_n$.

$\square$

1.2. Algunas definiciones y propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^n$

Las siguientes definiciones y resultados sobre vectores en $\mathbb{R}^n$ se encuentran en el de cálculo T.M. Apóstol

Definición 1.1 (Conjunto ortogonal)**.** *Se dice que un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vectores-n es ortogonal si dos vectores distintos cualesquiera en el son ortogonales. Esto quiere decir que*

$$v_i \cdot v_j = 0 \;\; si \;\; i \neq j.$$

Definición 1.2 (Conjunto ortonormal)**.** *Se dice que un conjunto de vectores es ortonormal si es ortogonal y esta formado por vectores unitarios. Así $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$*

$$v_i \cdot v_j = 0 \;\; si \;\; i \neq j \;\; and \;\; \|v_i\| = 1, \;\; i = 1, \ldots, k.$$

Teorema 1.4. *Cualquier conjunto ortogonal* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *de vectores-n distintos de cero es linealmente independiente*

1.3. Algunas definiciones y resultados sobre matrices

Los siguientes resultados sobre matrices se pueden encontrar en cualquier libro de álgebra lineal.

Teorema 1.5. *Si las columnas de una matriz* $A_{m\times n}$ *forman un conjunto ortogonal, entonces* $A^T A$ *es una matriz diagonal* $n \times n$.

Teorema 1.6. *Una matriz cuadrada* A *es ortogonal si y solo si*

$$A^T A = I \quad es \quad decir \quad A^{-1} = A^T.$$

Definición 1.3 (Matriz Hermitiana)**.** *Sea* A *una matriz cuadrada.* A *es hermitiana si se cumple la igualdad* $\overline{A^T} = A$.

Teorema 1.7. *La diagonal principal de una matriz hermitiana esta formada por números reales.*

Teorema 1.8. *Los valores propios de una matriz hermitiana son todos reales.*

Definición 1.4 (Matriz Unitaria)**.** *Una matriz cuadrada* A *es unitaria si* $\overline{A^T} = A^{-1}$.

Definición 1.5 (Matriz normal)**.** *Una matriz* A *es normal si* $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$.

Definición 1.6 (Valores y Vectores propios)**.** *Sea* A *una matriz* $n \times n$*. un vector* v *distinto de cero es un eigenvector de* A *si para cierto escalar* λ,

$$Av = \lambda v$$

El escalar λ *(que puede ser cero) se llama eigenvalor de* A *correspondiente a (o asociado con) el eigenvector* v.

Teorema 1.9. *Sea A una matriz cuadrada.*

1. Un escalar λ es un eigenvalor de A si y solo si

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

2. Un vector v es un eigenvector de A correspondiente a un eigenvalor λ si y solo si v es una solución no trivial del sistema.

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Capítulo 2

Sobre las fórmulas de Cardano-Tartaglia

En este capítulo se presenta brevemente la historia de las fórmulas de Cardano-Tartaglia, para hallar las raíces de las ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto grado y la deducción a dichas fórmulas.

2.1. Aspectos historicos

Los primeros elementos de lo que hoy conocemos como álgebra fueron encontrados en un documento matemático antigüo llamado el papiro de Rhin que se conserva en el museo British. Los babilónicos sabían como resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, usando completación de cuadrados, ecuaciones cubicas y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Por ejemplo para la ecuación general de primer grado

$$ax + b = 0, a \neq 0$$

conocían que su solución es $x = -b/a$.
Por otro lado las soluciónes de la ecuación de segundo grado eran conocidas en la antigüedad , allí fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría, y la solución de dichas ecuaciones fue introducida en europa por el matemático Abraham Bar Hiyya. La deducción de la fórmula $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ se obtiene completando cuadrados y su solución muy bien conocida es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para los matemáticos italianos las ecuaciones de tercer y cuarto grado requerían consideraciones muy profundas, dicho principio se solucionó en el renacimiento por el Scipio del Ferro. Del Ferro, siguiendo la construmbre de su tiempo, no publicó sus propios descubrimientos, pero lo comunicó a uno de sus Discípulos. Después de la muerte de Scipio del Ferro, éste discípulo desafío en competencia a Tartaglia, uno de los grandes matemáticos italianos de ese tiempo. Tartaglia aceptó el desafío. Cada uno depositó en casa de un notario una lista de treinta problemas y una suma de dinero. Aquel que, en cuarenta días, hubiese resuelto el mayor número de problemas sería declarado vencedor y se embolsaría el dinero.
En todos los problemas de Del Fiore intervenían ecuaciones de tercer grado. Tartaglia los resolvió en pocos días. Del Fiore no pudo hacerlo con ninguno de los propuestos por su adversario. Tartaglia declarado vencedor, rechazó el dinero, no quiso aceptar nada de un mal jugador, todos esperaban que publicase el método que le había permitido ganar con tanta facilidad, pero Tartaglia no dio a conocer su método.
Un profesor de física y matemática llamado Cardano se puso en contacto con Tartaglia cuando tuvo conocimiento de su gran éxito. Le presionó a lo largo de mucho tiempo para que le revelará sus fórmulas, cosa que Tartaglia no hizo. Cardano fue más inquisitivo. Trampas, ruegos, engaños, hasta amenazas. Tartaglia finalmente accedió , pero con la condición de que Cardano mantuviera su método en secreto, pero él no lo hizo rompió su promesa y publicó resultado de Tartaglia en su obra **El gran arte** (Ars Magna). La fórmula para la solución de una ecuación cúbica desde entonces ha sido llamada la fórmula de Cardano, aunque sería correcto llamarla fórmula de Tartaglia.
Dada la ecuación cúbica general

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0, \tag{2.1}$$

Puede ser reducida mediante la sustitución

$$y = x - a/3.$$

a una ecuación cúbica de la forma

$$x^3 + px + q = 0$$

La solución dada por Cardano de la primera es

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{2.2}$$

Cardano había ido más lejos que Tartaglia en su *Ars magna* que Tartaglia. No sólo había dado las fórmulas de éste último, que no eran válidas más que para ciertas ecuaciones particulares, sino que proporcionaba otras. Por ejemplo, fue el primero en presentar la solución completa de la ecuación de tercer grado. Se supo por él que la ecuación de tercer grado era resoluble por radicales. En el *Ars magna* había otro resultado fabuloso. También la ecuacion de cuarto grado se resolvía por radicales. A pesar de

sus esfuerzos, el descubrimiento no era ni de Tartaglia ni de Cardano, sino de Ludovico Ferrari. Ludovico Ferrari fue contratado como empleado por Cardano, ante el interés que demostraba por su trabajo, Cardano le autorizó a seguir sus cursos. Ludovico los siguió con tanto aprovechamiento que sobrepasó a su maestro. Ludovico se alineó con Cardano en el combate que le enfrentaba a Tartaglia. Hubo terribles disputas entre los dos, de las que Ferrari salio victorioso.
La solución de la ecuación de cuarto grado también era resoluble por radicales y se basaba en la solución preliminar de la ecuación cúbica. Dada la ecuación general de cuarto grado

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

La solución dada por Ferrari se obtiene de la solución de las ecuaciones

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_o}{2} = \alpha x + \beta,$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_o}{2} = -\alpha x - \beta,$$

donde α y β dependen de los coeficientes de la ecuación.

2.2. Deducción de las fórmulas de Cardano-Tartaglia

La ecuación general de tercer grado en una variable se puede representar de la forma

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0, \tag{2.3}$$

la cual se reduce fácilmente a una ecuación de tercer grado de la forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2.4}$$

mediante la sustitución $y = x - a/3$, en efecto:

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = x^3 - 3x^2\frac{a}{3} + 3x\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ax^2 - \frac{2a^2}{3}$$
$$+ \frac{a^3}{3} + bx - \frac{ab}{3} + c.$$

Si $p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right)$, y $q = \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$ obtenemos la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

Haciendo $x = u + v$ en esta última ecuación, obtenemos que:

$$(u + v)^3 + p\,(u + v) + q = 0,$$

y por lo tanto

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0, \tag{2.5}$$

Imponiendo la condición $3uv + p = 0$, esta última ecuación se reduce a

$$u^3 + v^3 = 0 \tag{2.6}$$

Elevando al cubo la condición impuesta a la ecuación (2.5) se tiene que

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \tag{2.7}$$

reemplazando $u^3 = -\frac{p^3}{27v^3}$ en la condición obtenemos la ecuación

$$v^6 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

haciendo $z = v^3$ y por el teorema de la ecuación cuadrática obtenemos

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

desarrollando por la fórmula usual, tenemos que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

y de (2.4) obtenemos

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

por lo tanto

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{2.8}$$

Luego

$$y = x + \frac{a}{3} = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{2.9}$$

es una solución de la ecuación cúbica dada inicialmente. Por lo anterior tenemos que

Teorema 2.1 (Cardano-Tartaglia)**.** *Una raíz del polinomio $y^3 + ay^2 + by + c$ es*

$$y = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

donde $p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right)$, $q = \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$.

Ejemplo 2.1. *Hallar una solución de la ecuación*

$$y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 0$$

Solución. Es fácil observar que en esta ecuación 1 y -1 no son raíces, y por lo tanto esta ecuación no tiene soluciones racionales. Del teorema anterior, tenemos que

$$a = -3, \quad b = -3, \quad c = -1.$$

De donde $p = -6$ y $q = -6$

Por lo tanto $y = 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ es solución de la ecuación dada.

Verifiquémoslo:
si $y = 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$, entonces

$$\begin{aligned} y^3 - 3y^2 - 3y - 1 &= \left(1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)^3 - 3\left(1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)^2 - 3\left(1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) - 1 \\ &= 19 + 12\sqrt[3]{4} + 15\sqrt[3]{2} - 15 - 9\sqrt[3]{4} - 12\sqrt[3]{2} - 3 - 3\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1 \\ &= 19 + 12\sqrt[3]{4} - 12\sqrt[3]{4} + 15\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2} - 19 = 0. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2. *Hallar una solución de la ecuación*

$$y^3 - 2y^2 - 28y - 49 = 0 \tag{2.10}$$

Solución. Aplicando el teorema (2.1) tenemos que:

$$a = -2, \quad b = -28, \quad c = -49.$$

De donde $p = -\frac{88}{3}$ y $q = -\frac{1843}{27}$

Por lo tanto $y = 7$ es solución de la ecuación $y^3 - 2y^2 - 28y - 49 = 0$

Como se puede verificar fácilmente. □

2.3. Deducción de las fórmula de Ferrari

La ecuación general de cuarto grado en una variable se puede representar de la forma

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{2.11}$$

Reescribiendo (2.10) se tiene

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d.$$

Completando un cuadrado en la parte izquierda de la ecuación anterior se obtiene

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = \frac{a^2x^2}{4} - bx^2 - cx - d,$$

luego

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d, \tag{2.12}$$

sumando los términos $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$ a ambos lados de la ecuación (2.12) obtenemos un cuadrado perfecto en términos de y.

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \tag{2.13}$$

En la parte derecha de la ecuación (2.13) se tiene un trinomio cuadrático en x, cuyos coeficientes dependen de y. Seleccionaremos y tal forma que este trinomio sea el cuadrado de un binomio de primer grado $\alpha x+\beta$. Para que el trinomio cuadrático Ax^2+Bx+C sea el cuadrado del binomio $\alpha x + \beta$ es suficiente que $B^2 - 4AC = 0$, en tal caso

$$Ax^2 + Bx + C = \left(\sqrt{A}x + \sqrt{C}\right)^2.$$

Luego tenemos que $\alpha = \sqrt{A}$, $\beta = \sqrt{C}$.
Por lo tanto si seleccionamos y tal que

$$\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0$$

De (2.13)obtenemos una ecuación de tercer grado en y

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)\,y - \left[d\left(a^2 - 4b\right) + c^2\right] = 0 \tag{2.14}$$

Resolviendo esta ecuación por cualquier método conocido (Cardano-Tartaglia) encontramos α y β en términos de los coeficientes de la ecuación y de las soluciones de la ecuación (2.14). Es decir

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_0} \quad , \quad \beta = \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - d} \tag{2.15}$$

donde y_0 es una solución de la ecuación (2.14).
De la ecuación (2.13) obtenemos

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2}\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2 \tag{2.16}$$

de donde

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_o}{2} = \alpha x + \beta$$

y

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_o}{2} = -\alpha x - \beta$$

Desarrollando estas dos ecuaciones podemos encontrar todas las soluciones de la ecuación de cuarto grado dada.
Resumiendo tenemos que:

Teorema 2.2 (Ferrari)**.** *Las raíces del polinomio* $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ *son las soluciones de las ecuaciones*

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_o}{2} = \alpha x + \beta$$

y

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_o}{2} = -\alpha x - \beta$$

donde $\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_0}$, $\beta = \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - d}$ *,y* y_0 *es una solución de la ecuación*

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - [d(a^2 - 4b) + c^2] = 0.$$

Ejemplo 2.3. *Hallar las soluciones de la ecuación*

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0, \tag{2.17}$$

es decir las raíces del polinomio

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6, \tag{2.18}$$

Solución. Del teorema anterior(Ferrari) tenemos que $a = -4$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 6$ luego

$$\alpha = \sqrt{\frac{16}{4} - 2 + y_0} \quad , \quad \beta = \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - 6}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + \frac{y_0}{2} &= \alpha x + \beta, \\ x^2 - 2x + \frac{y_0}{2} &= -\alpha x - \beta, \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde y_0 es una solución de la ecuación

$$y^3 - 2y^2 - 28y - 49 = 0.$$

Una solución de esta ecuación se obtuvo en el ejemplo (2.2). Luego podemos tomar $y_0 = 7$. Así las ecuaciones se transforman en

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + \frac{7}{2} &= 3x + \frac{5}{2}, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{2} &= -3x - \frac{5}{2}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = 3,$$

$$x_2 = 2,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

Notese que x_3, x_4 son raíces cubicas de la unidad según el ejemplo (1.2) del primer capítulo.

Verifiquemos por ejemplo que $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$. satisface la ecuación.

Como $x^3 = 1$, tenemos que

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = x\left(x^3\right) - 4\left(x^3\right) + 2x^2 + x + 6,$$

y como $x^3 = 1$, tenemos que :

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = x - 4 + 2x^2 + x + 6 = 2x^2 + 2x + 2.$$

Reemplazando $x = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ en la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 2 &= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2, \\ &= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}i}{4} - \frac{3}{4}\right) - 1 - \sqrt{3}i + 2, \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}i}{4}\right) - 1 - \sqrt{3}i + 2 = -1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i + 2 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Matrices circulantes

En la primera parte de este capítulo se definen y estudian las propiedades básicas de las matrices circulantes. Se presentan luego las propiedades importantes de las matrices circulantes y especialmente las propiedades que nos permiten obtener las soluciones de las ecuaciones polinomiales (raíces de polinomios) en una variable.
Finalmente se da el método para hallar las raíces de los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales, de tercer y cuarto grado y se describe el método para teóricamente hallar las raíces de cualquier polinomio en una variable con coeficientes reales.

Definición 3.1 (Matrices circulantes)**.** *Si A es una matriz de la forma*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

decimos que A es una matriz circulante de orden n.

Para $n = 3$ y $n = 4$ las matrices circulantes son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Nótese que una matriz circulante es cuadrada y que la matriz queda completamente determinada si se conoce la primera fila, ya que cada fila es un desplazamiento cíclico en una posición de la fila anterior.Tambien podemos observar que los elementos en cada diagonal son constantes. En lo que sigue todas las matrices que se consideran son matrices reales. Si A es una matriz circulante de orden n cuya primera fila es $a_1, \quad a_2 \quad \ldots, a_n$ la denotamos simplemente por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

También notamos C_n al conjunto de todas las matrices circulantes de orden n.

Si A y B son matrices circulantes del mismo tamaño (orden n) es fácil verificar con ejemplos que la suma, el producto por número real o complejo, el producto de matrices, la transpuesta y la inversa son matrices circulantes, por ejemplo:

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces por cálculo directo se tiene que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

y si α es un número real cualquiera se tiene que:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & \alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 3\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/18 & 7/18 & 1/18 \\ 1/18 & -5/18 & 7/18 \\ 7/18 & 1/18 & -5/18 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.1. *Las matrices circulantes de orden n forman un sub-espacio vectorial*

Demostración. Note que C_n es $no-vac\grave{i}o$, ya que la matriz nula es una matriz circulante. Se probará que C_n es cerrado para la suma y el producto por un escalar.

prueba. Sean $A, B \in C_n$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_n & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_n & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_n & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_1 + b_1 & \dots & a_{n-1} + b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 + b_2 & a_3 + b_3 & \dots & a_1 + b_1 \end{pmatrix} \in C_n$$

Claramente la última matriz obtenida es una matriz circulante luego la suma se matrices circulante es una matriz circulante.

Si α es un escalar entonces

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_n \\ \alpha a_n & \alpha a_1 & \dots & \alpha a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_2 & \alpha a_3 & \dots & \alpha a_1 \end{pmatrix}$$

Claramente se puede observar que la multiplicación de una matriz circulante por un escalar es una matriz circulante. Por lo tanto las matrices circulantes forman un subespacio vectorial.

□

□

La siguiente definición equivalente de matrices circulantes nos permite demostrar fácilmente que el producto y la inversa de matrices circulantes es circulante.

Definición 3.2. *Sea $A = [a_{i,j}]$ una matriz cuadrada de orden n , A es circulante si y solo si, $a_{i+1,j+1} = a_{i,j}$ para $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ donde $a_{n+1,j} = a_{1,j}$ y $a_{i,n+1} = a_{i,1}$*

Convención

$$c_{i,0} = c_{i,n} \tag{3.1}$$

$$c_{0,j} = c_{n,j} \tag{3.2}$$

Teorema 3.2. *Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices circulantes entonces $AB = [c_{ij}]$ es una matriz circulante.*

Demostración. 1. Sea $AB = [c_{ij}]$ donde $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

Se mostrará que $C_{i+1,j+1} = C_{i,j}$ entonces para $i \neq n$ y $j \neq n$ tenemos que:

$$c_{i+1,j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,k} b_{k,j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k-1} b_{k-1,j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} b_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k} b_{k,j} + a_{i,o} b_{0,j} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k} b_{k,j} + a_{i,n} b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = c_{i,j}.$$

2. Se mostrará que $C_{n,j} = C_{1,j+1}$ entonces para $i = n$ y $j \neq n$ tenemos que:

$$c_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k+1} b_{k+1,j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k+1} b_{k+1,j+1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_{1,k} b_{k,j+1} =$$
$$= \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1,k} b_{k,j+1} \right) + a_{1,n+1} b_{n+1,j+1} = \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1,k} b_{k,j+1} \right) + a_{1,1} b_{1,j+1} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,j+1} \right) = c_{1,j+1}.$$

3. Se mostrará que $C_{i,n} = C_{i+1,1}$ entonces para $i \neq n$ y $j = n$ tenemos que:

$$c_{i,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,k+1} b_{k+1,n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,k+1} b_{k+1,1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_{i+1,k} b_{k,1} =$$
$$= \left(\sum_{k=2}^{n} a_{i+1,k} b_{k,1} \right) + a_{i+1,n+1} b_{n+1,1} = \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1,k} b_{k,j+1} \right) + a_{i+1,1} b_{1,1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,k} b_{k,1} = c_{i+1,1}.$$

4. Se mostrará que $C_{n,n} = C_{1,1}$ entonces para $i = n$ y $j = n$ tenemos que:

$$\begin{aligned} c_{n,n} &= \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k+1} b_{k+1,n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k+1} b_{k+1,1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_{1,k} b_{k,1} = \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1,k} b_{k,1} \right) + a_{1,n+1} b_{n+1,1} = \left(\sum_{k=2}^{n} a_{1,k} b_{k,j+1} \right) + a_{1,1} b_{1,1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,1} = c_{1,1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el AB es circulante.

$\square$

Teorema 3.3. *Si A es una matriz circulante invertible entonces su inversa es una matriz circulante*

Demostración. 1. Como A es invertible entonces existe una matriz X tal que

$$AX = I,$$

donde,

$$X = [x_{i,j}]$$

.

Sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y para $i = i$ entonces los elementos $(i, i), (i + 1, i + 1)$ de AX deben ser iguales a 1, es decir

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,k} x_{k,i+1}, \tag{3.3}$$

y como A es circulante entonces

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k-1} x_{k,i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} x_{k+1,i+1} = a_{i,0} x_{1,i+1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k} x_{k+1,i+1},$$

por (3.3)tenemos

$$1 = a_{i,n}x_{n+1,i+1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}x_{k+1,i+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{k+1,i+1}$$

Por lo tanto $x_{k,i} = x_{k+1,i+1}$

2. Para $i \neq j$ entonces los elementos $(i,j),(i+1,j+1)$ de AX deben ser iguales a 0, es decir

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,k}x_{k,j+1}, \tag{3.4}$$

y como A es circulante entonces

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k-1}x_{k,j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k}x_{k+1,j+1} = a_{i,0}x_{1,j+1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}x_{k+1,j+1}.$$

Por (3.4) tenemos

$$0 = a_{i,n}x_{n+1,j+1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}x_{k+1,j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{k+1,i+1},$$

por lo tanto $x_{k,i} = x_{k+1,j+1}$.

$\square$

No es difícil observar que si $A = [a_0 \quad a_1 \quad \ldots a_{n-1}]$ es una matriz circulante.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $v = (1, \ 1, \ \ldots, 1)^t$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})$.
De manera natural podemos preguntarnos por todos los valores propios de una matriz circulante y sus correspondientes vectores propios (Espacios propios). Para resolver estas inquietudes veamos inicialmente algunos ejemplos:

Ejemplo 3.1. *Hallar los valores propios de la siguiente matriz circulante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. El polinomio característico de A es

$$det(A - xI) = \begin{vmatrix} 0-x & 1 & 2 \\ 2 & 0-x & 1 \\ 1 & 2 & 0-x \end{vmatrix} = x^3 - 6x - 9$$

Los valores propios de A son

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = (-3 - 3\sqrt{3}i)/2 = 3(-1 - \sqrt{3}i)/2$$
$$x_3 = (-3 + 3\sqrt{3}i)/2 = 3(-1 + \sqrt{3}i)/2)$$

Observando detenidamente los valores propios de A y recordando el ejemplo de las raíces cubicas de la unidad tenemos que:

$$x_1 = 3,$$
$$x_2 = 3w_1,$$
$$x_3 = 3w_2,$$

y desarrollando la ecuación $(A - xI)v = 0$, obtenemos vectores propios para cada valor propio de A.

para x_1 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para x_2 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2+\sqrt{3}i/2 \\ -1/2-\sqrt{3}i/2 \end{pmatrix}$$

para x_3 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2-\sqrt{3}i/2 \\ -1/2+\sqrt{3}i/2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Se puede observar que los valores propios para la matriz A de este ejemplo se pueden expresar como $a+b+c$, $a+bw_1+cw_1^2$, $a+bw_2+cw_2^2$ donde $a=0$, $b=1$ y $c=2$ son los elementos de la primera fila de la matriz circulante A, es decir

$$\begin{aligned} 3 &= 0+1+2, \\ -3/2-\sqrt{3}i/2 &= 0+1\left(-1+i\sqrt{3}/2\right)+2\left(-1+i\sqrt{3}/2\right)^2, \\ -3/2+\sqrt{3}i/2 &= 0+1\left(-1-i\sqrt{3}/2\right)+2\left(-1-i\sqrt{3}/2\right)^2, \end{aligned}$$

y los vectores propios como $(1,1,1)$,$(1,w_1,w_1^2)$,$(1,w_2,w_2^2)$ donde, $w_1=-1/2+\sqrt{3}i/2$ y $w_2=-1/2-\sqrt{3}i/2$, donde w son raíces cúbicas de la unidad.

Veamos otro ejemplo, esta vez para una matriz circulante de orden 4 es decir

Ejemplo 3.2. *Hallar los valores propios de la siguiente matriz circulante*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. El polinomio característico de A es

$$det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1-x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 16x.$$

Los valores propios de A son

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2i, \quad x_3 = -2i, \quad x_4 = 0$$

y desarrollando la ecuación $(A - xI)v = 0$, obtenemos los vectores propios para cada valor propio.

para x_1 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para x_2 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

para x_3 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

para x_4 un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Se puede observar que los valores propios para la matriz A de este ejemplo se pueden expresar como $(a+b+c+d)$, $(a+bw_1+cw_1^2+dw_1^3)$, $(a+bw_2+cw_2^2+dw_2^3)$,$(a+bw_3+cw_3^2+dw_3^3)$ y los vectores propios como $(1,1,1,1)$,$(1,w_1,w_1^2,w_1^3)$,$(1,w_2,w_2^2,w_2^3)$,$(1,w_3,w_3^2,w_3^3)$ donde $w_1 = -1/2+\sqrt{3}i/2$ y $w_2 = -1/2-\sqrt{3}i/2$, donde w son raíces cuartas de la unidad.

En general por cálculo directo se verifica que:

Teorema 3.4. *si* $A = [a_0, a_1, ..., a_{n-1}]$ *es una matriz circulante, entonces los valores propios de A son:*

$$(a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}),$$

$$\left(a_0 + a_1 w_1 + ... + a_{n-1} w_1^{n-1}\right),$$

$$\left(a_0 + a_1 w_{n-1} + ... + a_{n-1} w_{n-1}^{n-1}\right),$$

y los vectores propios correspondientes son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_2^{n-1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ w_{n-1} \\ \vdots \\ w_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donde $w_0 = 1$,w_1,. . .,w_{n-1} son las raíces n-simas de la unidad.

3.1. Una matriz circulante especial W

Para las matrices cuadradas de orden 4, una matriz circulante especial es la matriz

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que W es solamente la matriz identidad con la primera fila movida a la última fila. Fácilmente se puede verificar que

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, W^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$aI + bW + cW^2 + dW^3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

y luego W genera el álgebra de las matrices circulantes de orden 4 y de (3.5) tenemos que $\{W^0, W^1, W^2, W^3\}$, es linealmente independiente y por lo tanto una base del espacio vectorial de las matrices circulantes de orden 4.
Veamos esto en forma general.
Para las matrices cuadradas de orden n consideramos la matriz circulante especial W, es decir

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que W se puede escribir en la forma

$$W = \begin{pmatrix} e_2^t \\ e_3^t \\ \vdots \\ e_{n-1}^t \\ e_1^t \end{pmatrix}$$

o en la forma $W = [e_n, \ \ e_1, \ \dots \ e_{n-1}]$ donde e_i es el i-ésimo vector coordenado unitario de $\mathbb{R}^n$ y en el primer caso representa una fila de W mientras que en el segundo es una columna. Usando esta notación tenemos que:

$$W = [e_n \ \ e_1 ... \ \ e_{n-1}]$$

Para $j = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$We_j = \begin{cases} e_n, & \text{si } \ j = 1 \\ e_{j-1}, & \text{si } \ j \neq 1 \end{cases}$$

Luego

$$W^2 = W[e_n \ \ e_1 \ \ ...e_{n-1}] = [We_n \ \ We_1 \ \ ...We_{n-1}] = [e_{n-1} \ \ e_n \ \dots \ e_{n-2}],$$

$$\begin{aligned} W^3 &= WW^2 = W[e_{n-1} \ \ e_n \ \dots \ e_{n-2}] = [We_{n-1} \ \ We_n \ \dots \ We_{n-2}], \\ &= [e_{n-2} \ \ We_{n-1} \ \dots \ We_{n-3}]. \end{aligned}$$

Inductivamente si

$$W^k = [e_{n-k+1} \ \ e_{n-k+2} \ \dots \ e_{n-k}],$$

entonces

$$\begin{aligned} W^{k+1} &= W^k \ \ W = W^k \left[e_n \ \ e_1 \ \ ... \ \ e_{n-1}\right], \\ &= [W^k e_n \ \ e_1 \ \ ... \ \ e_{n-1}], \\ &= \left[e_{n-k} \ \ e_{n-k+1} \ \ ... \ \ e_{n-k-1}\right], \\ &= \left[e_{n-k-1+1} \ \ e_{n-k+1-1+1} \ \ ... \ \ e_{n-k-1-1+1}\right], \\ &= \left[e_{n-(k+1)+1} \ \ e_{n-(k+1)+2} \ \ ... \ \ e_{n-(k+1)}\right]. \end{aligned}$$

Proposición 3.1. *Haciendo $k = n$, se tiene que $W^n = I$*

Demostración.

$$W^n = [e_{n-n+1} \ \ e_{n-n+2} \ \ \dots e_{n-n+n}] = [e_1 \ \ e_2 \ \ \dots e_n] = I = W^0.$$

□

Proposición 3.2. *Sea $B_{cir} = \{W^0, W^1, W^2, \dots W^{n-1}\}$ entonces B_{cir} es una base de las matrices circulantes de orden n.*

Demostración. Si $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ son n-números reales entonces note que:

$$a_0 I + a_1 W + ... + a_{n-1} W^{n-1} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + a_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

□

De la igualdad anterior se puede deducir que toda matriz circulante es una combinación lineal de los elementos de B_{cir}, además B_{cir} es linealmente independiente ya que si la combinación lineal de los elementos de B_{cir} produce la matriz nula entonces cada uno de los coeficientes deben ser cero.

3.2. Diagonalización de la matriz circulante especial W

Teorema 3.5. *W es una matriz ortogonal*

$$W = \begin{pmatrix} e_2^t \\ e_3^t \\ \vdots \\ e_n^t \\ e_1^t \end{pmatrix}, W = [e_n, \;\; e_1, \; \dots \; e_{n-1}]$$

Demostración. Note que la sucesión de filas o columnas de la matriz W forman un conjunto ortonormal de vectores en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto la matriz W es ortogonal. □

Teorema 3.6. *Los valores propios de W son las raíces n-ésimas de la unidad*

Demostración. Sea $p(\lambda) = det[W - \lambda I]$ el polinomio característico de W, entonces

$$p(\lambda) = det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la primera columna se tiene

$$p(\lambda) = -\lambda det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\lambda & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

y como las ultimas dos matrices son triangulares, tenemos que

$$\begin{aligned} p(\lambda) = det(W - \lambda I) &= -\lambda(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1}(1)^{n-1}, \\ &= (-\lambda)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n(\lambda^n) + (-1)^n(-1), \\ &= (-1)^n[\lambda^n - 1]. \end{aligned}$$

Luego, $p(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda^n - 1 = 0$, esto, si y solo si $\lambda^n = 1$, luego λ es una raíz n-ésima de la unidad.

□

Teorema 3.7. *Si v es un valor propio de W entonces el vector* $(1, v, v^2, \dots, v^{n-1})$ *es un vector propio asociado a v*

Demostración. Dado que v es un valor propio de W por el teorema anterior es una raíz n-ésimas de la unidad luego $v^n = 1$ y , es decir $Wu_k = \omega^k u_k$ con $K = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, luego

$$W\begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \vdots \\ v^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \vdots \\ v^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ \vdots \\ v^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ \vdots \\ v^{n-1} \\ v^n \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \vdots \\ v^{n-1} \end{pmatrix}$$

□

Si v es un valor propio de W entonces $v^n = 1$ y como las raíces de la unidad con el producto usual de números complejos forman un grupo cíclico generado por $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. se tiene que $v = e^{2\pi ki/n}$ para algún $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Esto es, todo valor propio de W es una potencia de $\omega = e^{\frac{2\pi}{i}n}$, luego los valores propios de W son $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ y los vectores propios correspondientes son

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{2(n-1)} \end{pmatrix}, ..., u_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{n-1} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.8. *sea* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ *y* $Q = [u_0 \;\; u_1 \;\; \dots \;\; u_{n-1}]$ *entonces* $WQ = QD$

Demostración. Nótese que las columna j de D es w^{j-1}, luego

$$\begin{aligned} WQ &= W\left[u_0 \;\; u_1 \;\; \dots \;\; u_{n-1}\right], \\ &= \left[Wu_0 \;\; Wu_1 \;\; \dots \;\; Wu_{n-1}\right], \\ &= \left[\omega_0 u_0 \;\; \omega u_1 \;\; \dots \;\; \omega_n u_{n-1}\right]. \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
QD &= Q\left[\omega_0 e_1 \quad \omega_1 e_2 \quad \dots \quad \omega_{n-1}e_{n-1}\right],\\
&= \left[Q\omega_0 e_1 \quad Q\omega_1 e_2 \quad \dots \quad Q\omega_{n-1}e_{n-1}\right],\\
&= \left[\omega_0 Q e_1 \quad \omega_1 Q e_2 \quad \dots \quad \omega_{n-1}Qe_{n-1}\right],\\
&= \left[\omega_0 u_0 \quad \omega u_1 \quad \dots \quad \omega_n u_{n-1}\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $WQ = QD$ □

Teorema 3.9. *$Q/\sqrt{n}$ es una matriz unitaria.*

Demostración. Se debe demostrar que $(Q/\sqrt{n})^{-1} = (Q/\sqrt{n})^*$.

Esto es lo mismo que mostrar que $Q^{-1} = Q^*/n$.

$$\begin{aligned}
(Q^*/n)Q &= \ 1/n\,[Q^*Q]\,\frac{1}{n}\left[\left(\overline{Q}\right)^T Q\right]\\
&= 1/n\left[\begin{bmatrix} \overline{\nu_0} & \overline{\nu_1} & \cdots & \overline{\nu_{n-1}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_{n-1} \end{bmatrix}\right],\\
&= \ 1/n\begin{bmatrix} \overline{\nu_0}^t \\ \overline{\nu_1}^t \\ \vdots \\ \overline{\nu_{n-1}}^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_{n-1} \end{bmatrix},\\
&= 1/n\begin{bmatrix} \overline{\nu_0}^t\nu_0 & \overline{\nu_0}^t\nu_1 & \cdots & \overline{\nu_0}^t\nu_{n-1} \\ \overline{\nu_1}^t\nu_0 & \overline{\nu_1}^t\nu_1 & \cdots & \overline{\nu_1}^t\nu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\nu_{n-1}}^t\nu_0 & \overline{\nu_{n-1}}^t\nu_1 & & \overline{\nu_{n-1}}^t\nu_{n-1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Sea $X = [x_{kj}] = \begin{bmatrix} \overline{\nu_0}^t \nu_0 & \overline{\nu_0}^t \nu_1 & \cdots & \overline{\nu_0}^t \nu_{n-1} \\ \overline{\nu_1}^t \nu_0 & \overline{\nu_1}^t \nu_1 & \cdots & \overline{\nu_1}^t \nu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\nu_{n-1}}^t \nu_0 & \overline{\nu_{n-1}}^t \nu_1 & & \overline{\nu_{n-1}}^t \nu_{n-1} \end{bmatrix}$.

Luego $x_{kj} = \overline{\nu_{k-1}}^t \ \nu_{j-1}$.

Si $k = j, x_{kk} = \overline{\nu_{k-1}}.\nu_{k-1} = \|\nu_{k-1}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \left(w^{k-1}\right) \\ \left(w^{k-1}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(w^{k-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \underbrace{1+1+1+\cdots 1}_{n-veces} = n.$

si $k \neq j$, $x_{kj} = \overline{\nu_{k-1}} \cdot \nu_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{w^{k-1}} \\ \left(\overline{w^{k-1}}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(\overline{w^{k-1}}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ w^{j-1} \\ \left(w^{j-1}\right)^2 \\ \vdots \\ \left(w^{j-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix} = 1 + \overline{w^{k-1}}.w^{j-1} +$
$+ \left(\overline{w^{k-1}}.w^{j-1}\right)^2 + \cdots + \left(\overline{w^{k-1}}.w^{j-1}\right)^{n-1}$.

Como $\omega = e^{i2\pi/n}$ entonces $\overline{\ w^{k-1}}.w^{j-1} = \left(e^{-i2\pi/n}\right)^{k-1} \left(e^{i2\pi/n}\right)^{j-1} = \left(e^{i2\pi/n}\right)^{[j-1-(k-1)]}$
$= \left(e^{i2\pi/n}\right)^{[j-k]}$.

Sea $r = \left(e^{i2\pi/n}\right)^{[j-k]} = \left(e^{i2\pi}\right)^{[(j-k)/n]}$.

Note que $r \neq 1$, ya que de lo contrario $j-k$ debería ser un múltiplo entero de n lo cual es falso puesto que $j \neq k$, y además, como $0 \leq j \leq n-1$ y $0 \leq k \leq n-1$, se tiene $-(n-1) \leq j-k \leq n-1$. entonces $x_{kj} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \qquad = \frac{1-r^n}{1-r} \ = 0$; ya que $r^n = \left(e^{i2\pi}\right)^{[j-k]} = cos\left(2\pi\left[j-k\right]\right) + isen\left(2\pi\left[j-k\right]\right) = 1$.

Entonces

$$(Q^*/n)Q = (1/n)X = (1/n)\begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} = I$$

por lo tanto $Q^*/n = Q^{-1}$.

□

Teorema 3.10. *W es diagonalizable unitariamente.*

Demostración.

$$\begin{aligned} &WQ = QD, \\ &W = QDQ^{-1}, \\ &W = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}Q\ D\ Q^{-1}, \\ &W = \frac{Q}{\sqrt{n}}\ D\ \sqrt{n}Q^{-1}, \\ &W = \frac{Q}{\sqrt{n}}\ D\ \left(\frac{Q}{\sqrt{n}}\right)^{-1}, \\ &W = \frac{Q}{\sqrt{n}}\ D\ \left(\frac{Q}{\sqrt{n}}\right)^{*}. \end{aligned}$$

Note que $W^k = (\frac{Q}{\sqrt{n}})D^k(\frac{Q}{\sqrt{n}})^*$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 3.11. *Toda matriz circulante es diagonalizable.*

Demostración. Sea C una matriz circulante, luego se puede expresar como una combinación lineal de B_{cir} esto es:

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k W^k,$$
$$C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{Q}{\sqrt{n}}\right) D^k \left(\frac{Q}{\sqrt{n}}\right)^*,$$
$$C = \left(\frac{Q}{\sqrt{n}}\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\right) \left(\frac{Q}{\sqrt{n}}\right)^*.$$

□

Note que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$ es una combinación lineal de matrices diagonales y por lo tanto es una matriz diagonal, y como $Q/\sqrt{n}$ es unitario entonces C es diagonalizable unitariamente.

Definición 3.3. *si C es una matriz circulante de $n \times n$, usamos la primera fila $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$ para definir el polinomio*

$$q\,(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

que llamamos polinomio asociado a la matriz circulante.

Como se vio en el teorema

Si $C = [a_0 \;\; a_1 \;\; \ldots \;\; a_{n-1}]$ es entonces una matriz circulante entonces

$C = a_0 W^0 + a_1 W + \ldots + a_{n-1} W^{n-1}$ por lo tanto tenemos que:

Teorema 3.12. *Si $C = [a_0 \;\; a_1 \;\; \ldots \;\; a_{n-1}]$ es una matriz circulante entonces $C = q(W)$. Recíprocamente si $q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$ entonces $q(W)$ es una matriz circulante.*

Demostración. Sea

$$q(W) = a_0 I + a_1 W + a_2 W^2 + \cdots + a_{n-1} W^{n-1} =$$

$$= a_0 \begin{bmatrix} e_1^t \\ e_2^t \\ \vdots \\ e_{n-1}^t \\ e_n^t \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} e_2^t \\ e_3^t \\ \vdots \\ e_n^t \\ e_1^t \end{bmatrix} + \ldots + a_{n-1} \begin{bmatrix} e_n^t \\ e_1^t \\ \vdots \\ e_{n-2}^t \\ e_{n-1}^t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \in C_n$$

Recíprocamente

$$C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} e_1^t \\ e_2^t \\ \vdots \\ e_{n-1}^t \\ e_n^t \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} e_2^t \\ e_3^t \\ \vdots \\ e_n^t \\ e_1^t \end{bmatrix} + \ldots + a_{n-1} \begin{bmatrix} e_n^t \\ e_1^t \\ \vdots \\ e_{n-2}^t \\ e_{n-1}^t \end{bmatrix} =$$

$$= a_0 I + a_1 W + a_2 W^2 + \cdots + a_{n-1} W^{n-1} = q(W).$$

$\square$

Teorema 3.13. *Toda matriz circulante $C = q\,(W)$ es diagonalizable por Q.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
q(W)Q &= q(W)[u_0\ u_1 \dots u_{n-1}] \\
&= [q(W)u_0\ q(W)u_1 \dots q(W)u_{n-1}] \\
&= [q(\omega^0)u_0\ q(\omega^1)u_1 \dots q(\omega^{n-1})u_{n-1}] \\
&= [q(\omega^0)Qe_1\ q(\omega^1)Qe_2 \dots q(\omega^{n-1})Qe_n] \\
&= [Qq(\omega^0)e_1\ Qq(\omega^1)e_2 \dots Qq(\omega^{n-1})e_n] \\
&= Q[q(\omega^0)e_1\ q(\omega^1)e_2 \dots q(\omega^{n-1})e_n] \\
&= QD^*
\end{aligned}$$

donde $D^* = \begin{pmatrix} q(\omega_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\omega_1) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(\omega_{n-1}) \end{pmatrix}$ por lo tanto D^* es diagonal.

$\square$

Capítulo 4

Raíces de polinomios y matrices circulantes

En este capítulo se desarrolla el objetivo principal de este trabajo que consiste en usar lo desarrollado en los capítulos anteriores para obtener las raíces de los polinomios en una variable mediante propiedades de las matrices circulantes.

Si $C = [a_0 \;\; a_1 \;\; \dots \;\; a_{n-1}]$ es una matriz circulante.
$q(t) = a_0 + a_1 t + \; \dots + \; a_{n-1}t^{n-1}$ es el polinomio asociado y ω es una raíz n-ésima de la unidad, se tiene que

$$q(\omega) = a_0 + a_1\omega + \; \dots + \; a_{n-1}\omega^{n-1},$$

y este valor es un valor propio de $C = [a_0 \;\; a_1 \;\; \dots \;\; a_{n-1}]$ de acuerdo con el teorema (3.4) del capitulo anterior y por lo tanto $q(\omega)$ es una raíz del polinomio característico de C.

Teorema 4.1. *Sea $C = [a_0 \;\; a_1 \;\; \dots \;\; a_{n-1}]$ una matriz circulante de orden n, $q\,(t)$ el polinomio asociado a C y $p\,(t) = det\,(tI - C)$ el polinomio característico de C. Entonces las raíces de $p\,(t)$ son*

$$q(w_0), \quad q(w_1), \quad \dots, \quad q(w_{n-1}),$$

donde $w_0, \;\; w_1, \;\; \dots, \;\; w_{n-1}$ son las raíces n-ésimas de la unidad.

Como se vio en la primera parte de este trabajo las raíces n-simas de la unidad forman un grupo multiplicativo cíclico generado por $w = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, por lo tanto el teorema anterior se puede enumerar así:

Teorema 4.2. *Si $C = [a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_{n-1}]$ una matriz circulante de orden n, $q(t)$ el polinomio asociado a C y $p(t) = det(tI - C)$ el polinomio característico de C.*

Las raíces de $p(t)$ son

$$q(\omega_1), \quad q(\omega_1^2), \quad \ldots, \quad q(\omega_1^{n-1}), \quad q(\omega^n) = q(1)$$

donde $\omega_1 = e^{\frac{i2\pi}{n}}$ genera las raíces n-ésimas de la unidad.

El último teorema nos permite teóricamente hallar las raíces de cualquier polinomio en una variable con coeficientes reales. Basta dado el polinomio construir una matriz circulante tal que $p(t) = det(tI - C)$.
Veamoslo especialmente para polinomios de tercer y cuarto grado.
Hallemos inicialmente los polinomios caracteristicos de las matrices circulantes de tercer y cuarto orden.

4.1. Polinomio característico de una matriz circulante de orden 3

Dado un polinomio de tercer grado $p(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ y una matriz circulante de orden 3,

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico de C es

$$det(tI - c) = \begin{vmatrix} t-a & -b & -c \\ -c & t-a & -b \\ -b & -c & t-a \end{vmatrix} = (t-a)^3 - b^3 - c^3 - 3bc\,(t-a),$$

$$= t^3 - 3at^2 + \left(3a^2 - 3bc\right)t - a^3 - b^3 - c^3 + 3abc.$$

Igualando con el polinomio dado inicialmente tenemos el siguiente sistema

$$-3a = \alpha,$$

$$\left(3a^2 - 3bc\right) = \beta,$$

$$-a^3 - b^3 - c^3 + 3abc = \gamma.$$

4.2. Polinomio característico de una matriz circulante de orden 4

Dado un polinomio de cuarto grado $p(t) = t^4 + \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$ y una matriz circulante de orden 4, entonces

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico de C es

$$det\,(tI - C) = \begin{vmatrix} t-a & -b & -c & -d \\ -d & t-a & -b & -c \\ -c & -d & t-a & -b \\ -b & -c & -d & t-a \end{vmatrix} =$$

$$= (t-a)^4 - \left(4bd + 2c^2\right)(t-a)^2 - 4c(b^2 + d^2)\,(t) + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

$$= t^4 - 4at^3 + \left(6a^2 - 4bd - 2c^2\right)t^2 + \left(8abd - 4a^3 - 4b^2c - 4cd^2 + 4ac^2\right)t$$

$$+ a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 4a^2bd + 4ab^2c + 4acd^2 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4bc^2d$$

Igualando con el polinomio dado inicialmente tenemos el siguiente sistema

$$-4a = \alpha,$$

$$\left(6a^2 - 4bd - 2c^2\right) = \beta,$$

$$\left(8abd - 4a^3 - 4b^2c - 4cd^2 + 4ac^2\right) = \gamma,$$

$$a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 4a^2bd + 4ab^2c + 4acd^2 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4bc^2d = \delta.$$

Note que si $a = 0$ en el polinomio dado inicialmente, el término cúbico se elimina por lo tanto la matriz circulante es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{pmatrix}$$

donde la diagonal principal son ceros, por lo tanto su polinomio característico es:

$$det\,(tI - C) = \begin{vmatrix} t & -b & -c & -d \\ -d & t & -b & -c \\ -c & -d & t & -b \\ -b & -c & -d & t \end{vmatrix} =$$

$$= t^4 - \left(4bd + 2c^2\right)t^2 - 4c\left(b^2 + d^2\right)t + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

Igualando con el polinomio dado inicialmente sin término cúbico tenemos el siguiente sistema

$$\left(4bd + 2c^2\right) = -\beta$$

$$4c\left(b^2 + d^2\right) = -\gamma$$

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = \delta$$

Donde este nuevo sistema de ecuaciones es un poco mas fácil de desarrollar.
Veamos ahora unos ejemplos

Ejemplo 4.1. *Hallar las raíces del polinomio de tercer grado* $t^3 - 3t^2 - 3t - 1$

Solución. Como vimos anteriormente el polinomio característico de una matriz circulante de orden 3 es

$$det(tI - c) = \begin{vmatrix} t-a & -b & -c \\ -c & t-a & -b \\ -b & -c & t-a \end{vmatrix} = t^3 - 3at^2 + \left(3a^2 - 3bc\right)t - a^3 - b^3 - c^3 + 3abc.$$

Igualando con el polinomio dado inicialmente tenemos el siguiente sistema, donde

$$\alpha = -3, \quad \beta = -3, \quad \gamma = -1.$$

Se tiene que:

$$-3a = -3,$$

$$\left(3a^2 - 3bc\right) = -3,$$

$$-a^3 - b^3 - c^3 + 3abc = -1,$$

Resolviendo los sistemas obtenemos los valores de a,b y c.

$$a = 1,$$

$$b = \sqrt[3]{2},$$

$$c = \sqrt[3]{4},$$

Construimos el polinomio $q(t) = 1 + \sqrt[3]{2}t + \sqrt[3]{4}t^2$.

Reemplazando en $q(t)$ las raíces cúbicas de la unidad obtenemos las raíces del polinomio

$$q(1) = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

$$q(\omega), q(\overline{\omega}) = [2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \pm i\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})]/2.$$

$\square$

Ejemplo 4.2. *Hallar las raíces del polinomio de cuarto grado*

$$t^4 - 4t^3 + 2t^2 + t + 6 \ (1)$$

Solución. Como vimos anteriormente el polinomio característico de una matriz circulante de orden 4 es

$$det\,(tI-C)=\begin{vmatrix} t-a & -b & -c & -d \\ -d & t-a & -b & -c \\ -c & -d & t-a & -b \\ -b & -c & -d & t-a \end{vmatrix}=$$

$$=t^4-4at^3+\left(6a^2-4bd-2c^2\right)t^2+\left(8abd-4a^3-4b^2c-4cd^2+4ac^2\right)t$$

$$+\,a^4-b^4+c^4-d^4-4a^2bd+4ab^2c+4acd^2-2a^2c^2+2b^2d^2-4bc^2d$$

Igualando con el polinomio dado inicialmente tenemos el siguiente sistema, donde

$$\alpha=-4,\quad \beta=2,\quad \gamma=1,\quad \delta=6,$$

$$-4a=4,$$

$$\left(6a^2-4bd-2c^2\right)=2,$$

$$\left(8abd-4a^3-4b^2c-4cd^2+4ac^2\right)=1,$$

$$a^4-b^4+c^4-d^4-4a^2bd+4ab^2c+4acd^2-2a^2c^2+2b^2d^2-4bc^2d=6.$$

Resolviendo los sistemas obtenemos los valores de a, b ,c y d.

$$a=1,$$

$$b = -\frac{1}{4} - \sqrt{3},$$

$$c = \frac{3}{2},$$

$$d = -\frac{1}{4} + \sqrt{3}.$$

Reemplazando las raíces de la unidad en el polinomio $q\,(t)$ obtenemos las cuatro las raíces del polinomio dado inicialmente.

$$q(1) = b + c + d + 1 = 2,$$

$$q(1) = -b + c - d + 1 = 3,$$

$$q(1) = -c + i(b - d) + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

$$q(1) = -c - i(b - d) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Conclusiones

1. Los métodos de Cardano-Targlaia y Ferrari son muy útiles para la solución de ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto orden,pero estos métodos son desconocidos, ya que sus fórmulas son muy extensas y de difícil memorización.

2. El método de matrices circulantes teóricamente se puede aplicar de manera general para cualquier polinomio de grado n, como vimos en el último capítulo para el polinomio de orden 3 no es complicado el cálculo de su polinomio característico y su sistema de ecuaciones. Pero para los grados de orden mayor o igual a cuatro es tedioso el cálculo de sus polinomios característicos y el de la solución de su sistema de ecuaciones.

3. Este trabajo muestra interesantes conexiones entre los polinomios y las matrices para facilitar el cálculo de sus raíces.

Bibliografía

[1] Dan Kalman and James E. White. *Polynomial Equations and Circulant Matrices*. The American Mathematical Monthly , 1989.

[2] Robert M. Gray. *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*. Stanford University Stanford 94305, USA .

[3] George Nakos. *Algebra Lineal con Aplicaciones*. Thomson Editores, S.A. de C.V, 1999.

[4] Kolmogorov. Mathematics its Content, Methods, and Meaning. Editorial Board, 1956.