Estudio dinámico de las secciones cónicas como lugares geométricos: Una propuesta para favorecer las habilidades del proceso de representación

Trabajo de grado

María José Barrera Amado y Yurley Viviana Pinto Vargas

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial De Santander
Facultad de ciencias
Escuela de matemáticas
Licenciatura en matemáticas
Bucaramanga
2023

Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

Título: Estudio dinámico de las secciones cónicas como lugares geométricos: Una propuesta para favorecer las habilidades del proceso de representación.

Autores: María José Barrera Amado y Yurley Viviana Pinto Vargas[1]

Palabras clave: Geometría analítica, secciones cónicas, habilidades, proceso de representación y Geogebra.

Descripción:

La investigación aquí documentada, se centra en el desarrollo de habilidades del proceso de representación mediante la enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos, utilizando GeoGebra. Para hacer ello, se implementa una secuencia didáctica conformada por tres talleres en el colegio técnico Vicente Azuero con estudiantes de décimo grado, utilizando la estrategia metodológica del "experimento de enseñanza" y, se valora la misma mediante los datos recopilados a través de diferentes medios como videograbaciones, diario de campo, transcripciones y registros de actividad en GeoGebra.

En cuanto a los resultados obtenidos, se destaca que en el taller de la elipse se identifican diversas interpretaciones y enfoques por parte de los estudiantes, así, como dificultades que son superadas gradualmente, entre ellas se enfatiza en los obstáculos iniciales con la comprensión del problema y el uso de conceptos geométricos y algebraicos. No obstante, se observa un progreso en la construcción del concepto de elipse mediante el desarrollo de habilidades del proceso de representación, que van desde el reconocimiento hasta la transformación de registros. Análogamente con el taller de la hipérbola, se logran mejoras en términos de habilidades y superación de dificultades iniciales. En lo referente al último taller, no se logra abordar debido a limitaciones de tiempo, pero se realiza un análisis de objetivos y posibles acciones esperadas de los docentes y alumnos.

En síntesis, a pesar de los desafíos en la implementación, la secuencia didáctica logra favorecer las habilidades del proceso de representación con las cónicas estudiadas, demostrando su efectividad. Se sugiere considerar el diseño didáctico completo y explorar otros estándares de proceso en futuras investigaciones, como la resolución de problemas, el razonamiento y prueba, la

[1] Facultad de ciencias, Escuela de matemáticas, director PhD. Jorge Enrique Fiallo.

comunicación y las conexiones, según los estándares establecidos por los principios y estándares de la educación matemática (NCTM).

Abstract

Title: Dynamic study of conic sections as geometric sections: A proposal to favor the skills of the representation process.

Authors: María José Barrera Amado y Yurley Viviana Pinto Vargas[2]

Key Words: Analytic geometry, conic sections, skills, representation process and GeoGebra.

Description:

The research presented here focuses on the development of presentation process skills through the teaching of conic sections as geometric sections using GeoGebra. To do so, a didactic sequence consisting of three workshops was implemented at Colegio Técnico Vicente Azuero with 10th grade-students using a methodological strategy called "teaching experiment" and evaluating it though data collected using different means such as video recording, field journals, transcriptions, and GeoGebra activities logs.

In regard to the results obtained, it is important to point out the workshop related to ellipses several interpretations and approaches were identified by the students as well as difficulties that were gradually overcome, including initial difficulties with understanding problems and the use of geometrical and algebraic concepts. Nevertheless, progress in the construction of the concept of ellipse through the development of skills in the representation process which goes from recognition to transformation records. Similarly, with the hyperbola workshop, improvement in terms of abilities and improvement of initial difficulties were achieved. In reference to the last workshop, it was not possible to work on it due to time limitations, but an analysis of objectives and possible expected outcomes by teachers and students was carried out.

In summary, regardless of the challenges in the implementation, didactic sequence manages to promote process skills with the studied conics, showing its effectiveness. It is suggested that complete didactic design like problem-solving, reasoning and proof, communication and connections be considered for future research. According to the standards established by the National Council of Mathematics Teacher (NCTM).

[2] Science faculty, Math school, director PhD. Jorge Enrique Fiallo.

Agradecimientos

El agradecimiento de este proyecto va dirigido primeramente a Dios por habernos acompañado y guiado a lo largo de nuestra carrera, por brindarnos sabiduría para alcanzar nuestros logros y ser nuestra fortaleza en los momentos de debilidad.

Al colegio técnico Vicente Azuero, sus directivos y profesores, especialmente el docente Edgar Colvia quien nos acompañó durante todo este proceso y depositó su confianza en nuestras habilidades de enseñanza.

Asimismo, agradecemos a nuestro director Jorge Fiallo con quien atravesamos este maremagnum de emociones, experiencias y conocimientos que se consolidaron en este fructuoso escrito.

A nuestros familiares y amigos, especialmente a Margareth Amado Morales y Laura Padilla, quienes con su consejo y ayuda potenciaron los resultados de esta investigación.

Por último, agradecemos a la Universidad Industrial de Santander por el nivel de exigencia con el que nos formaron para hacernos unas profesionales competentes.

“El único modo de hacer un gran trabajo es amar lo que haces”
Steve Jobs

Introducción

Múltiples revistas de investigación neurocientífica mencionan que la educación debe tener en cuenta algunas consideraciones de carácter epistémico que atañen al funcionamiento cerebral del ser humano. En particular, Dzib-Goodin (2013) reitera que las capacidades humanas dependen de la "arquitectura de redes neuronales", es decir, de las conexiones que genera el sujeto entre conceptos, mediados, por aquello que lo rodea.

Lo anterior señala implícitamente la importancia de interconectar conceptos generando relaciones que faciliten la arquitectura de las redes neuronales. La academia posee un término que preserva estas características de conexión conocido como interdisciplinariedad. Autores como Van der Linde (2014) y Ojeda (2014) afirman que la interdisciplinariedad puede verse como una estrategia pedagógica que permite el diálogo y la colaboración entre dos o más disciplinas para conseguir un nuevo conocimiento. De esta manera, entendiendo la disciplina como aquel campo de indagación que posee un objeto particular de estudio con un bagaje de conocimientos determinados (teorías, conceptos, lenguajes, métodos, etc.) (López, 2013), podemos considerar el álgebra y la geometría como dos disciplinas diferentes.

La geometría analítica vincula estas ramas de las matemáticas previamente mencionadas de manera interdisciplinaria asociando n-uplas de números con puntos y ecuaciones con figuras (Ciccioli y Sgreccia, 2016). Así, recogiendo lo mencionado en los párrafos anteriores, dentro de un contexto matemático, la geometría analítica promueve la arquitectura de redes neuronales que contribuyen al proceso de aprendizaje (Dzib-Goodin, 2013).

Ahora bien, esta rama de las matemáticas ha tenido múltiples exponentes a lo largo de la historia desde el siglo XVII comenzando con René Descartes. Sin embargo, investigaciones como las de Ciccioli y Sgreccia (2016) revelan tácitamente que los profesores aún no hacen uso de la geometría analítica de manera competente[3], pues presenta una propuesta para enseñar a los docentes a implementar en sus clases este ámbito de las matemáticas que tiene más de tres siglos de existencia.

Lo precedente revela que aún existen óbices para implementar la geometría analítica en el aula. Esto lo reitera la investigación de Arellano y Oktaç (2009) en donde a partir de preguntas a un determinado grupo de estudiantes encuentra que los mismos poseen dificultades al asociar los registros gráficos con los algebraicos. El escollo en relacionar distintas representaciones fue estudiado por Duval (2004) en su teoría sobre los registros semióticos. De allí, el ministerio de educación (MEN) considerando esta teoría, crea una propuesta que pretende incorporar la tecnología en el aula mediante un software de geometría dinámica.

La propuesta nos hace reflexionar acerca de la implementación y estudio de las nuevas tecnologías en el aula, pues estas se han incrementado desde la aparición de la pandemia COVID-19. Por este hecho, consideramos que los docentes en matemáticas ya no pueden impartir conocimientos de vigencia limitada, en lugar de ello es necesario que consideren la puesta en práctica de softwares que promuevan el aprendizaje por competencias.

Este tipo de aprendizaje pretende que el alumno pueda poner en práctica lo que aprende. Por esta razón, se indaga acerca de una creación matemática interesante que tiene aplicación en la vida real y posee cierta dificultad didáctica que se puede solventar con ayuda de la geometría analítica y un software dinámico: las secciones cónicas.

[3] El término competente se asocia a lo que los estándares básicos (EBC) de competencia definen como “COMPETENCIA”. Es decir, “saber hacer en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes.” (EBC, 2006, p.12)

Las cónicas poseen múltiples representaciones que describen el comportamiento de estos objetos matemáticos; esta descripción se puede dar de manera geométrica o algebraica. Para efectos de este trabajo investigativo, prima la representación de las cónicas como lugar geométrico, pero también se consideran las ecuaciones resultantes del proceso de exploración con dichos objetos de estudio. De este modo, el propósito del presente trabajo se centra en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica en GeoGebra que promueve el desarrollo de las habilidades del proceso de representación.

1. Planteamiento del Problema

Dentro del campo didáctico de las matemáticas se estudian las dificultades que generan las ramas que la comprenden tales como el álgebra, la geometría, la aritmética, etc. Estas investigaciones muestran que las primeras, encierran la mayor parte de las dificultades que presentan los estudiantes y los docentes. Esto debido al alto nivel de rigidez y abstracción de conceptos sobresalientes en estas áreas.

Para validar este argumento debemos hablar de estas dos ramas y especificar las dificultades a las cuales nos referimos.

En lo referente a la geometría, se puede definir como un campo multidimensional de las matemáticas, ya que comprende una estrecha relación con diferentes ciencias tales como la física, biología, geografía, sociales, entre otros. Ello hace que adquiera mayor riqueza a la hora de ser enseñada como un concepto contextualizado de actividades cercanas a la vida diaria de los alumnos.

Lo anterior es afirmado por los lineamientos curriculares, quienes mencionan que la "geometría constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación" (MEN, 1998). En otras palabras, el enfoque principal de la geometría radica en el desarrollo de la percepción espacial, la capacidad de visualización y abstracción, la habilidad para establecer conjeturas y generalizaciones de relaciones geométricas entre figuras y el potencial para argumentar y explicar dichos hechos. Sin embargo, las investigaciones revelan que existen diversas dificultades en la aprehensión de conceptos claves en dicho campo. Esto lo ratifica Duval (2001) citado por Murillo (2020) al afirmar que:

> Uno de los principales problemas de la enseñanza de la geometría es la inhabilidad para hacer que la mayoría de los estudiantes logren saltar la brecha que existe entre el proceso discursivo natural (comunicación ordinaria realizada a través de la descripción, explicación, argumentación) y el proceso discursivo teórico que es realizado a través de la deducción (p.23).

Es decir, la geometría presenta múltiples dificultades vinculadas a la percepción visual que surgen a partir del alto nivel de complejidad de los conceptos que se engloban en dicho componente. De allí, sobresalen la baja o casi nula comprensión del lenguaje matemático, la memorización de distintas notaciones, el aprendizaje a corto plazo y la limitación de estrategias para resolver problemas. Siendo una posible causal la manera de enseñar, ya que las clases tradicionales que prevalecen en la escuela, sólo tienen presente los elementos teóricos sin considerar contextos que potencien la deducción, abstracción y generalización.

Ahora bien, en lo que respecta al ámbito algebraico de las matemáticas Castro (2012) ratifica que existen al menos 3 razones por las cuales se complejiza el aprendizaje y enseñanza de la misma, obstaculizando el desarrollo de la autonomía en el estudiantado. La primera es de tipo cognitivo pues el acto de generalizar y usar símbolos supone una dificultad cerebral. La segunda es de tipo social pues el álgebra tiene una estigmatización negativa creada colectivamente con el pasar de los años. Finalmente, la tercera es de tipo didáctica ya que los métodos o estrategias para enseñar álgebra son extraídos e impartidos tal cual lo dictaminan los decimonónicos libros.

Según investigaciones realizadas en la Universidad Veracruzana citados en Escalante y Cuesta (2012), al escudriñar en el primer motivo se pueden extraer tres resultados que corroboran la dificultad para generalizar en álgebra. En primer lugar, se encuentra la expresión de una idea en lenguaje natural al lenguaje algebraico. En segundo lugar, está la expresión de concepciones geométricas al lenguaje algebraico y finalmente, el conocimiento en forma de tabla o gráfica a una ecuación algebraica. Esto conlleva a particularizar el álgebra como un lenguaje que describe acciones y relaciones entre cantidades, lo cual impide la comprensión flexible de los conceptos que abarca el álgebra.

Así mismo, al considerar el ámbito matemático que abarca estas dos ramas se vislumbra una realidad análoga. Pues, en lo que concierne a la geometría analítica se evidencian problemas en el reconocimiento de las cónicas como lugares geométricos, en la identificación y descripción de sus elementos peculiares, así como en la relación entre los parámetros de la ecuación, la representación gráfica y la modelación de fenómenos reales.

Calderon y Peñuela (2013) ratifican lo previamente dicho cuando dicen que “el panorama no deja de ser desalentador en cuanto a la metodología de su enseñanza y los propósitos de la misma que no van más allá del acercamiento algebraico de las cónicas en particular” (p.273). Es decir, la geometría analítica continuamente se ha venido enseñando de manera netamente tradicional y lineal en los respectivos contextos institucionales, dejando a un lado los objetivos que le conciernen. En otras palabras, los aspectos metodológicos empleados por los docentes de matemáticas están limitados por la construcción de las secciones cónicas en papel milimetrado para luego desarrollar ejercicios de manera algorítmica a partir de las ecuaciones algebraicas generales o canónicas y algunos elementos que están presentes en cada una de estas (elipse, parábola e hipérbola).

Aunado a lo anterior, Ramírez (2013) y Pérez y Arrieche (2009) citados en Beltrán (2019) mencionan que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas prevalecen diferentes tipos de errores y dificultades tanto de tipo cognitivo como didáctico. Algunos de ellos están relacionados con el déficit en la comprensión de conceptos geométricos y algebraicos básicos (noción de perpendicularidad, transformaciones, mediatriz, distancia, punto medio y entender la variable como fórmula, entre otros). Seguido de problemas en la ejecución de cálculos numéricos en el conjunto de los números reales (adición, multiplicación, división, sustracción, potenciación y radicación) y en el uso de la simbología (uso de variables x o y).

De esta manera, se encuentran problemas en la representación gráfica de cada sección cónica y en la identificación de los elementos característicos de cada una de estas a partir de sus diferentes representaciones. En términos generales, los estudiantes presentan cierta dificultad a la hora de percibir las cónicas no solo como un conocimiento netamente matemático, es decir, no logran establecer relación de las cónicas con la aplicación de las ciencias.

A partir de lo antes mencionado, se logran identificar diversas técnicas que facilitan el trabajo al abordar conceptos de la geometría analítica como lo es el uso de GeoGebra, un software matemático, interactivo y didáctico que incorpora la geometría, aritmética, álgebra y cálculo. De este modo, dicho recurso hará parte de la solución del problema de investigación, pues las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto al campo de la geometría analítica radica en el reconocimiento de las secciones cónicas como lugares geométricos, así como en la identificación y descripción de sus elementos, en el reconocimiento y manipulación de la relación existente entre los parámetros de la ecuación y la representación gráfica, y en el escrutinio de la eficiencia que tienen estas para modelar fenómenos reales (Jarero y Tuyub, 2013). Así, recogiendo lo anterior, el manejo de la representación en el plano cartesiano y las ecuaciones algebraicas correspondientes a lugares geométricos conocidos permiten una mejor comprensión del objeto matemático.

A partir de esto, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué habilidades del proceso de representación se pueden favorecer con la enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos desde una perspectiva dinámica mediada por GeoGebra?

2. Objetivos de investigación

2.1 Objetivo general

Diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica en GeoGebra enfocándose al desarrollo de las habilidades del proceso de representación.

2.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión bibliográfica que permita dar cuenta de las investigaciones que reporta la literatura acerca de las secciones cónicas y las habilidades del proceso de representación.
- Diseñar una unidad de enseñanza dinámica que gire en torno al desarrollo de habilidades del proceso de representación de las secciones cónicas en GeoGebra.
- Implementar las actividades del diseño didáctico a estudiantes de décimo grado del Instituto Técnico Vicente Azuero.
- Caracterizar las habilidades del proceso de representación favorecidas por la implementación de la secuencia didáctica en GeoGebra.

3. Antecedentes

Ahora bien, teniendo presente el cauce que sigue la investigación en aras de atender sus objetivos se presenta la revisión de la literatura. Esta permite enmarcar el estudio en relación con las investigaciones que se han adelantado en los contextos internacional y nacional respecto a las secciones cónicas. Además, se presenta una pequeña síntesis de lo que el currículo nacional busca para la enseñanza del objeto matemático en cuestión y finalmente, se expone un documento que da cuenta de las habilidades en el proceso de representación.

3.1 Las cónicas dentro del currículo nacional

La normativa colombiana (MEN, 2006) plantea una enseñanza de las secciones cónicas de manera interdisciplinaria. En otras palabras, busca estudiarlas desde lo gráfico hasta lo algebraico, generando conexiones que permitan identificar y usar en diferentes contextos estos cortes longitudinales entre un plano y un cono. No obstante, el cumplimiento de este propósito se da por secciones, es decir, a lo largo de la educación media prima el enfoque geométrico de las cónicas y en la educación superior el enfoque se vuelve netamente algebraico.

Documentos como los estándares (MEN, 2006) y algunas revistas de educación matemática justifican esta afirmación previamente descrita. Dentro de los estándares el enfoque geométrico se vislumbra en los siguientes ítems:

- Identificar visual, gráfica y algebraicamente algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

• Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.

• Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras (p.88).

Esto deja dos aspectos claros, en primer lugar, revela la poca importancia que se le da a la visión de la cónica como lugar geométrico, pues en la descripción de estos indicadores lo gráfico se estudia únicamente a partir del plano cartesiano. En segundo lugar, a pesar de que el primer y último estándar descrito plantean un acercamiento gráfico y algebraico, el énfasis que denotan los indicadores fuera del papel no deja entrever ni el carácter analítico ni el geométrico- analítico.

Beltrán (2019) menciona que el tiempo que los docentes emplean en la enseñanza de las secciones cónicas es insuficiente por lo cual el discurso se relega a una breve explicación de fórmulas que se consolidan en la realización de un seriado de ejercicios en donde sólo se deben realizar pequeñas sustituciones para determinar una ecuación o función (según sea el caso). De allí, que lo algebraico no se desarrolle como se desea, dejando de lado la relación entre las propiedades geométricas y analíticas del objeto matemático estudiado.

Así mismo, Pérez y Montiel (2018) sostienen que la aprobación en los cursos de geometría analítica depende principalmente de la percepción analítica. Ello se da porque existe una alta exigencia en cuanto al dominio algebraico, pero no se detalla en el geométrico, negando así la "naturaleza geométrica de la cónica" (p. 1489). En otras palabras, este sentido geométrico que deberían tener las secciones cónicas, se relega a una ilustración o bosquejo gráfico.

3.2 Estudios de las secciones cónicas en matemática educativa

3.2.1 A nivel internacional

La literatura muestra que se han realizado una gran cantidad de trabajos relacionados a la enseñanza de secciones cónicas, tanto en programas de pregrado como a nivel de maestría incluso a nivel de doctorado se encuentran resultados interesantes. Un ejemplo de ello, data de la investigación realizada por Ramírez (2013) en la que parte de un análisis epistemológico de las cónicas para luego presentar un abordaje desde la tecnología. El escrito finaliza con el análisis de un texto académico con recomendaciones hechas por el autor.

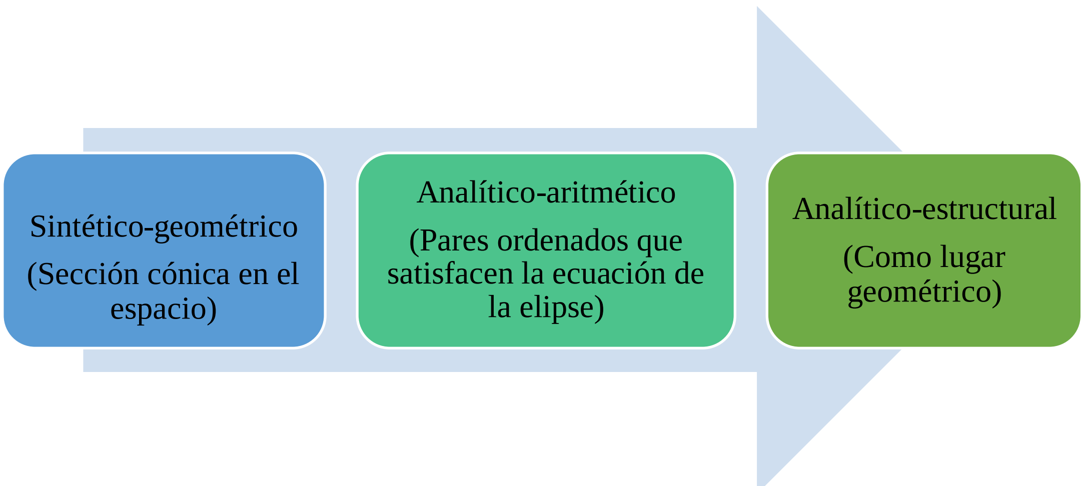
Siguiendo con la investigación de manera más minuciosa, dentro del capítulo dos se presenta un recorrido geométrico, algebraico y geométrico-analítico de las secciones cónicas. Aquí se describen de manera detallada las construcciones de cada una como lugar geométrico relacionándolas con las propiedades (geométricas y algebraicas) mientras las compara con diversos apartados de libros académicos. Cabe resaltar que la investigación aquí datada usa estos resultados y los incorpora dentro del planteamiento del diseño al esquematizar una secuencia que da cuenta de la relación entre las representaciones.

Ramírez (2013) destaca que el abordaje de las secciones cónicas como lugar geométrico es apropiado para los grados de educación media y responde a lo propuesto por el ministerio, lo cual reitera la pertinencia de la creación de una secuencia como la descrita en este estudio. Asimismo, resalta que el uso de las TIC con programas como GeoGebra y Winplot permite el aprendizaje constructivista dejando que el estudiante explore, realice hipótesis y edifique su propio conocimiento. Finalmente, con la revisión de los libros de texto constata que el paso de una interpretación geométrica de las cónicas a una algebraica, y viceversa, se da de manera constante.

Otro estudio de la misma índole es escrito por Ricaldi (2017), quien se enfoca en la enseñanza de la elipse y propone una secuencia de actividades para abordarla teniendo presente el entorno virtual de GeoGebra. Para hacerlo recurre a la epistemología del concepto y a herramientas de orden teórico, como la teoría de las situaciones didácticas, para justificar la secuencia planteada. Del primer referente destaca las diferentes concepciones de la elipse como se ilustra en la siguiente imagen:

Figura 1

Algunas concepciones de la elipse



Nota. Concepciones matemáticas de la elipse en un proceso de transformación del conocimiento. Tomado de *Ricaldi (2017, p. 1468.)*

Se considera pertinente el énfasis en este dato, ya que ilustra lacónicamente la evolución de este objeto matemático tanto históricamente como curricular. Puesto que parte de un sentido geométrico atraviesa el algebraico y finaliza con una visión más propia de la geometría analítica, lo cual se tiene presente al momento de realizar la secuencia didáctica.

En concordancia con lo expuesto por Ramírez, Herrera (2018) reitera en su investigación la importancia de trabajar las secciones cónicas como lugares geométricos resaltando el dominio aritmético y el geométrico, así como el proceso de representación.

A partir de ello, se diseñan una serie de actividades para la construcción, determinación de ecuaciones y solución de problemas de las secciones cónicas. Todo ello, atendiendo a las fases de enseñanza del modelo Van Hiele y al uso del software de geometría dinámica GeoGebra. Esto con el fin de potenciar el tratamiento metodológico y didáctico de la geometría analítica plana.

En dicha investigación el autor destaca la función de la exploración, manipulación y el planteamiento de conjeturas a partir de los resultados matemáticos obtenidos con el uso de GeoGebra. De esta manera logra generar un aprendizaje significativo de las secciones cónicas considerando los siguientes aspectos: Identificación visual del lugar geométrico a partir de su forma, uso del arrastre, discurso dinámico y el efecto del uso de los deslizadores.

De manera general, esta investigación trabaja cada una de las secciones cónicas teniendo en cuenta la construcción, ecuación canónica, ecuación ordinaria y problemas relativos de cada una de las secciones, aportando a este trabajo una serie de actividades y posibles secuencias que se debe seguir para trabajar el objeto de estudio.

Ahora bien, hasta el momento las investigaciones aquí revisadas hacen uso de la tecnología para enseñar el objeto matemático en cuestión. Sin embargo, existen múltiples resultados que incorporan el material concreto, un ejemplo de ello es lo realizado por Bartolini Bussi (2005) documentado en Vargas (2021), este hace uso de “máquinas matemáticas” para consolidar el concepto en cuestión.

El escrito menciona que esto se dio durante la realización de una sesión de clase. En esta el maestro comienza ambientando históricamente la “necesidad de reconstruir un profundo significado geométrico de las relaciones algebraicas entre las coordenadas que representan las cónicas en el plano cartesiano” (Bartolini Bussi, 2005, p. 44), para llevar a cabo el propósito hace uso de la máquina matemática que se ilustra en la figura 2.

Figura 2

Ejemplo de una máquina matemática.

Nota. Construcción de una elipse a partir de la teoría de Menecmo. Tomado de *Vargas (2021, p.37).*

Vargas (2021) expresa que se dio un trabajo cooperativo por grupos. Uno de ellos conformado por cuatro estudiantes manejaba el artefacto y los demás realizaban procedimientos geométricos y analíticos en papel sin tener en cuenta el plano cartesiano, lo cual permitió el desarrollo geométrico- analítico de las cónicas.

3.2.2 A nivel nacional

Siguiendo con la línea que se llevaba (sobre resultados con materiales concretos) se encuentra lo presentado por Quintero y Aragón (2017), quienes buscaban implementar diferentes tecnologías[4] con el ánimo de enseñar las secciones cónicas. Para lograr este objetivo, fundamentados en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, diseñan una sesión de actividades que involucran el uso de tres tecnologías (plastilina, doblado de papel y GeoGebra). Cabe aclarar que las tecnologías plastilina y doblado se usan paulatinamente según el avance de los estudiantes, y de manera simultánea se da una interacción con GeoGebra. Por lo tanto, este

[4] El término tecnología para Quintero y Aragón (2017) se define como un potenciador de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, facilita la resolución de problemas situados en contextos cercanos al estudiante. Finalmente, se aclara que la tecnología se encuentra dotada de múltiples representaciones que van desde artefactos como el papel y el lápiz hasta objetos tecnológicos como el computador.

software actúa de dos formas: como un medio de interacción entre el conocimiento y el aprendiz (característica propia de la teoría de las situaciones didácticas), y como una actividad en sí misma.

La actividad con la plastilina pretendía dar una introducción de las secciones cónicas como los cortes longitudinales de un cono, para así proseguir con la actividad del doblado de papel en donde se detalla más a fondo cada sección junto con sus propiedades. Finalmente, la actividad de GeoGebra pretendía recoger lo realizado en las demás actividades. Para hacerlo, se plantearon preguntas guía que los alumnos debían analizar para recoger las propiedades de las cónicas como lugares geométricos. Sin embargo, los autores revelan que, por cuestiones de tiempo, la revisión de esta actividad no fue posible debido a que los estudiantes no tenían suficiente conocimiento sobre el software lo que ralentizó la práctica educativa.

Al igual que varios investigadores aquí mencionados incluyendo las del presente escrito, Quintero y Aragón (2017) destacan la utilidad de los softwares para promover el aprendizaje autónomo del estudiantado, así como el uso de diversas tecnologías. De este modo, resaltan que el manejo del tiempo es esencial en la práctica al igual que la revisión de los materiales a usar pues, la falta de verificación de algunos objetos repercutió de manera negativa en la realización de las actividades.

De lo anterior, el estudio aquí expuesto tiene presente las conclusiones descritas, así como el uso otorgado a GeoGebra (como actividad y como mediador del conocimiento). Además, se considera lo mencionado respecto al desconocimiento de los estudiantes (en GeoGebra) para no repetir los mismos contratiempos. Ello se evidencia más adelante en la selección de la institución y grupo sobre el que se efectuarán las actividades diseñadas.

Retornando a los aportes con tecnología digital se tiene lo documentado por Acevedo (2019) quien pretende valorar la eficacia de los cursos en línea abierta masiva (MOOC[5]) con un enfoque socioconstructivista en la enseñanza de la elipse. Ello lo hace bajo cobijo de teorías como los niveles de Van Hiele, el aprendizaje basado en problemas, la teoría socioconstructivista planteada por Vygotski y el enfoque TPACK (Technology, Pedagogy and Content Knowledge).

Teniendo presentes los referentes teóricos se crea una secuencia didáctica que consta de seis sesiones. Es pertinente tener presente estas subdivisiones ya que se desarrollan de manera análoga en la secuencia del trabajo aquí ilustrado (bajo las fases propuestas en el marco teórico).

En la primera sesión se da un sondeo de los conocimientos previos que presentan los estudiantes (es necesario aclarar que los discentes ya habían visto la cónica elipse en su institución). Con el análisis realizado en un formulario de Google se abre paso a la sesión dos en donde se introduce un problema de la vida real que se discute en un foro virtual (herramienta del MOOC) con ayuda de preguntas guía y videos informativos alusivos al problema “motivador”.

La tercera sesión guía a los estudiantes para que generen la construcción de la elipse mediante la visualización de videos y discusiones en foros grupales. Así, se da cabida a la sesión cuatro en donde se conceptualizan los elementos de la elipse como lugar geométrico y se comienza a deducir la ecuación. De esta manera, la quinta sesión culmina con este proceso de deducción de la ecuación y da comienzo a la sesión seis en la cual se plantean dos situaciones con aplicaciones en la vida real para que los estudiantes ejerciten lo aprendido.

En lo que alude a las conclusiones obtenidas que resultan de interés para el escrito se tiene que los problemas promueven el aprendizaje autónomo y cooperativo. Por otra parte, el uso de las

[5] “Según Dave Cormier un curso en línea abierta masiva (MOOC) está destinado a la participación ilimitada y acceso abierto a través de la web. Los MOOC, además de los materiales de un curso tradicional, como son los vídeos, lecturas y cuestionarios, proporcionan foros de usuarios interactivos que ayudan a construir una comunidad para los estudiantes, profesores y los teaching assistants” (Acevedo, 2019, p.39-40)

MOOC permitió ver el avance en tiempo real de los alumnos, así como el amplio alcance que tienen las herramientas virtuales para la comunicación y consolidación de saberes.

Bajo el mismo sentido virtual de la tecnología, Fernández (2011) diseña una serie de actividades desde la Teoría de las situaciones didácticas (TSD) y la micro-ingeniería didáctica para el estudio de las secciones cónicas en un ambiente de geometría dinámica (AGD). Para ello, plantea la construcción de estas curvas desde lo puntual hasta lo global atendiendo a lo que propone el dinamismo: iniciar trabajando con problemas geométricos para luego pasar de la geometría al álgebra, generando así, la noción de lugar geométrico.

A partir de esto, el autor busca trabajar en cada una de las dificultades vistas en la revisión bibliográfica encontrada y sigue una estructura desde las dimensiones histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica con el fin de atender los objetivos que propone. De esta manera, en cuanto a lo histórico-epistemológico se logran vislumbrar los estudios que se han llevado a cabo acerca de las secciones cónicas en el transcurso de los años y los aportes generados por ello. En lo cognitivo, plantea las construcciones geométricas como punto de relación entre la caracterización puntual y global en la representación de las cónicas. Así, con lo que atañe a lo didáctico genera un análisis exhaustivo de libros de textos universitarios, tomando la TSD como referente principal y los lugares geométricos como gestores de enseñanza, todo esto, mediante “Cabri Geometre II plus”.

En relación con este trabajo, Fernández propone trabajar el objeto de estudio a partir de la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, lo cual se encuentra ligado a los aportes de Ricaldi (2017). Ello permite atender las diferentes dificultades que se presentan por parte de los alumnos al enfrentarse con este objeto matemático, teniendo en cuenta el uso de herramientas pertenecientes a la geometría dinámica como es el caso de Cabri o GeoGebra.

Siguiendo esta misma línea, Murillo (2020) busca desarrollar un objeto de aprendizaje para la enseñanza de las secciones cónicas en donde se logren articular los conceptos matemáticos, las distintas representaciones y sus aplicaciones. Todo ello, teniendo en cuenta la teoría de registros semióticos y sistemas de representación de Raymond Duval y el modelo ADDIE (Análisis, diseño, desarrollo, implementación y evaluación).

Este trabajo se desarrolló en tres momentos: diseño y aplicación del instrumento de nociones previas, identificando así, los obstáculos epistemológicos de aprendizaje; diseño y elaboración de objeto de aprendizaje y, por último, la implementación y análisis en el aula.

La investigación arrojó como resultado algunas de las dificultades presentadas por los alumnos antes y después de la implementación. Entre ellas está el paso de una representación a otra (gráfica a una analítica y analítica a una verbal), la diferenciación entre cónicas, la interpretación contextual de los problemas y la construcción de estas cónicas partiendo de propiedades o elementos dados.

Se considera acentuar en este producto, pues, los resultados permiten un análisis a priori de lo que las investigadoras podrían vislumbrar al efectuar las actividades a los estudiantes.

Finalmente, un documento que recoge gran parte de las investigaciones aquí descritas es el expuesto por Beltrán (2019) cuyo objetivo consiste en caracterizar el diseño de actividades para enseñar las cónicas mediante la resolución de problemas. Ello lo hace bajo la revisión de múltiples documentos sobre las secciones cónicas (tanto de carácter didáctico como epistemológico), apoyándose en la teoría de las situaciones didácticas y el enfoque de la ingeniería didáctica.

Beltrán (2019) menciona que gran parte de los documentos revisados en el análisis centran su interés en el aprendizaje algebraico de las cónicas. Lo anterior conlleva a la exclusión de elementos geométricos propios del objeto matemático en estudio, lo cual obstaculiza el paso de una representación a otra.

Ello se considera como punto de partida al desarrollar la planeación de la secuencia expuesta en este documento ya que la investigación aquí presentada comparte las mismas ideas y pretende implementar un enfoque holístico que abarque las dimensiones geométricas y algebraicas de las cónicas. Adicionalmente se tienen presentes las indicaciones desplegadas por Beltrán (2019) para realizar una buena actividad que permita el aprendizaje significativo, contextualmente enriquecido y autónomo. Estas se describen a manera de lista, así:

- La revisión bibliográfica (a nivel didáctico, epistemológico y poblacional) es esencial para encontrar, analizar y comparar información teórica.
- La cantidad de actividades debe ponerse en consideración pues la falta o exceso de las mismas pueden obstaculizar el cumplimiento de los objetivos planteados.
- Las actividades deben dar cuenta del paso entre la representación geométrica y la algebraica.
- "Todas las actividades deben estar estructuradas considerando cuatro aspectos: objetivo de la actividad, descripción de la actividad, consideraciones hacia las variables didácticas necesarias y requerimientos mínimos para considerar que una actividad se encuentra realizada completamente (evaluación de la actividad)" (Beltrán, 2019, p.125)
- Es de vital importancia tener un objetivo claro que permita definir el camino a seguir por el docente y los alumnos.

3.3 Estudio con respecto al proceso de representación

Rueda (2016) en su investigación pretende dar respuesta al objetivo de caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a los procesos de representación de fenómenos de variación. Para ello, se basa en las actividades propuestas en el curso de pre-cálculo, propuesto por Fiallo y Parada (2014), dirigido a estudiantes de primer ingreso de las carreras de Ingenierías y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander (UIS). Esto, atendiendo a los tres aspectos fundamentales propuestos por Rueda (2016) que van desde la ambientación de los objetos matemáticos a partir de problemas contextualizados, la exploración de fenómenos variacionales con ayuda de las TIC (GeoGebra principalmente), hasta la comunicación e interpretación dada por los estudiantes a los fenómenos de variación.

Lo anterior, se tiene en cuenta ya que los documentos educativos de matemáticas tanto a nivel nacional como internacional hacen énfasis en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas, razonamiento, modelación, comunicación o representación. Sin embargo, en las instituciones de educación básica y media la enseñanza se centra en el aprendizaje de contenidos y algoritmos.

Rueda (2016) logra identificar las cinco habilidades que se habían visualizado desde un análisis a priori (o enfoque teórico) tales como reconocimiento, interpretación, construcción, transformación y coordinación de las representaciones de los objetos matemáticos. Estas se tienen presentes dentro del marco teórico ya que el autor menciona que estas permiten vislumbrar el progreso paulatino en la representación del objeto matemático en un entorno dinámico que suscita la variación.

De esta manera, la investigación de este autor ofrece diferentes aportes a nuestra investigación, pues trabaja aspectos como el proceso de representación donde se vislumbran las habilidades cognitivas que se deben tener en cuenta a la hora de analizar las actividades y resultados del proyecto.

4. Marco Teórico

Con el ánimo de ser lacónicos en la presentación de los trabajos realizados por múltiples autores que fundamentan o aportan en esta investigación, se describe en primer lugar el objeto de estudio y se desarrollan conceptualmente las herramientas que se tienen presentes en este.

4.1 Secciones cónicas

Partiendo de un análisis epistemológico, según lo mencionado en Pérez y Montiel (2018) y Lugo (2014), se vislumbra la procedencia de las secciones cónicas desde el siglo IV a.C. Esta nace como fruto de la resolución planteada por Menecmo a uno de los tres problemas clásicos de la antigua matemática griega, el "problema Deliano" o "problema de la duplicación del cubo". Con el vocablo actual, la descripción de este decimonónico dilema se resumiría a decir que "Dado un cubo de arista a, construir usando sólo regla y un compás, la arista x de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo dado"(Contreras y Pino, 2002, p.14).

La solución a esta incógnita abre paso al descubrimiento de algunos lugares geométricos entre los cuales se encuentran las secciones cónicas. Pues, Menecmo en uno de sus múltiples intentos encuentra que las generatrices de un cono circular respecto a un plano que no pasa por el vértice de dicho cono, genera ciertos "lugares geométricos"[6] en sus intersecciones. Para deducir ello hace uso de conceptos como proporcionalidad, recta, perpendicular, ángulos, traslaciones y

[6] "Desde la geometría analítica un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos *(x, y)* en el plano, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una propiedad geométrica, que puede estar dada por una ecuación *f (x, y) =0*, se conoce como lugar geométrico o gráfica de la ecuación" (Lehmann, 2002 citado por Fernández, 2011, p.114).

rotaciones, media geométrica, entre otros. Finalmente, cabe resaltar que algunos autores citados en Lugo (2014) mencionan que la solución al problema Deliano por Menecmo solo involucra la parábola y la hipérbola rectangular, sin llegar a trabajar con la elipse.

Años después, Apolonio de Perga mediante la superposición de dos o un único cono, estudia el objeto matemático expuesto previamente. En otras palabras, teniendo en cuenta que la elipse, parábola e hipérbola eran determinadas como secciones de conos circulares de diferente tipo (cuyo ángulo fuera agudo, obtuso o recto), este matemático logra demostrar que a partir de un mismo cono se pueden obtener las tres secciones. Esto teniendo en cuenta que el ángulo formado entre el plano de sección y el eje del cono varía. Es por ello que, según Lugo (2014) “Apolonio fue el primer geómetra que mostró que las propiedades de estas curvas se mantienen, independientemente de las características del cono a considerar” (p.9) y no bastando con ello da el nombre de las tres secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola).

Inspirado por los sucesos anteriores y otros estudios, Descartes se interesa por la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas de las secciones cónicas como lugares geométricos, dando origen a la geometría analítica. Cabe destacar que, este suceso se origina a partir de la solución planteada por dicho matemático al problema de Pappus (encontrar el lugar geométrico generado a partir de cuatro rectas y cuatro ángulos dados), logrando así, el tratamiento algebraico de las secciones cónicas, todo ello, según lo expuesto en Pérez y Montiel (2018).

De manera sintetizada, el desarrollo del concepto de las secciones cónicas desde la historia ha sido fundamentado a través de una serie de nociones, pues, inicialmente se planteó mediante secciones de un cono, luego como un lugar geométrico teniendo en cuenta ciertas características definidas por las propiedades focales o foco directriz, para finalmente ser representado como una ecuación algebraica de segundo grado. Dicho de otra manera, desde la historia se establece una equivalencia del concepto de las secciones cónicas como las curvas determinadas por la intersección entre un cono circular y un plano, y la definición en la cual se considera la razón entre las distancias focales y cualquier punto de la curva, con lo cual se determina la ecuación generada a partir de dichos lugares geométricos.

El análisis epistemológico permite vislumbrar el proceso que ha atravesado este objeto de estudio para consolidar su definición como se conoce actualmente. Ahora bien, para efectos de la investigación, se definen de manera más detallada cada una de las secciones cónicas teniendo en cuenta su definición, elementos y ecuaciones, así:

Tabla 1

Definición, ecuación y elementos de las secciones cónicas

Sección cónica	Definición	Elementos	Ecuación
Elipse	Una elipse es un lugar geométrico en el cual todos los puntos de un plano cuya distancia a dos puntos fijos (llamados focos F y F') tienen una suma constante. González, Paniagua y Patiño (2008, p.25)	*Focos:* Puntos fijos de la elipse. *Eje focal:* Recta que une los focos. *Centro:* Punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos. *Vértices:* Puntos de intersección de la elipse con los ejes.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
Parábola	Una parábola es el lugar geométrico de un punto	*Eje Focal:* Recta que pasa por el foco y el vértice.	$x^2=4py$ $y^2=4px$

	que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, llamada directriz, situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano, llamado foco, y que no pertenece a la recta. González, Paniagua y Patiño (2008, p.19)	*Foco (F):* Punto fijo como se indica en la definición. *Directriz:* es la recta fija tenida en cuenta en la definición. *Vértice (V):* Punto de intersección del eje focal con la parábola. *Distancia focal (p):* Distancia desde el vértice al foco y del vértice a la directriz.	
Hipérbola	Una hipérbola es un conjunto de puntos con coordenadas en un plano cartesiano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos colineales en el plano es constante. González, Paniagua y Patiño (2008, p. 31)	*Focos:* Puntos fijos de los que se habla en la definición. *Eje focal o eje mayor:* Recta sobre la cual están ubicados los focos. *Centro:* Punto medio entre los focos ubicado sobre el eje focal. *Vértices:* Punto donde la hipérbola interseca el eje focal. *Eje conjugado:* Recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Nota. Esta tabla muestra la definición, elementos y ecuación canónica para cada una de las secciones cónicas.

Una vez explorado el objeto matemático de interés, se deben finiquitar las herramientas con las cuales se estudia el mismo. Para ello se comienza con una descripción de lo que el escrito entiende como proceso de representación para así dar paso a las fases de análisis con las que se valora la eficacia del diseño en términos teóricos.

4.2 Proceso de representación

El estándar de representación es un proceso que ha sido empleado tanto en psicología como en la didáctica de las Matemáticas con el fin de describir la actividad cognitiva y las formas de expresión de los alumnos ante diferentes objetos matemáticos. De esta manera, en los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2003) el enfoque de representación hace parte tanto de un proceso como de un producto puesto que da cuenta de un concepto o relación matemática y a su vez de la manera en la que este se consolida como un objeto matemático.

A partir de ello, el NCTM (2003) propone que los programas de enseñanza matemática entre sus objetivos deben tener en cuenta la creación y uso de múltiples representaciones para planificar, inspeccionar y transmitir ideas matemáticas, así como la selección, aplicación y traducción de representaciones con el ánimo de solventar problemas, y el uso de representaciones que permitan modelar e interpretar fenómenos en diferentes áreas del saber.

Así, los estudiantes han de implementar el estándar al resolver problemas e investigar ideas matemáticas. Esto implica un potenciamiento en la comprensión y resolución de problemas, proporcionándoles modos útiles de registrar un método de solución y de comunicación a los demás.

Teniendo presente lo anterior, se recalca la importancia de presentar a los alumnos “oportunidades no sólo de aprender las formas convencionales de representación, sino también de construir, perfeccionar y usar sus propias representaciones como herramientas para apoyar el aprendizaje y hacer matemáticas” (NCTM, 2003, p.72). De manera implícita se expresa que la enseñanza de las matemáticas, desde los grados más primitivos, se encuentra dotada de representaciones que van desde lo pictórico hasta lo abstracto. De allí, que sirva como instrumento mediador de construcción, apoyo y perfeccionamiento de la educación matemática.

En pocas palabras, el proceso de representación contribuye a la arquitectura de redes neuronales puesto que permite a los alumnos organizar, crear y reflexionar sobre aspectos propios de las matemáticas mediante conexiones entre las representaciones concretas[7] y sus respectivos objetos abstractos.

4.3 Habilidades del proceso de representación

Con el fin de identificar las habilidades que se pueden potenciar mediante el proceso de representación de manera más precisa mediados por el software dinámico GeoGebra, es necesario definir el concepto de habilidades cognitivas. Para ello, se tendrá en cuenta lo mencionado por Rueda (2016):

> Consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado. De la misma forma consideramos habilidad cognitiva las acciones que un individuo puede desarrollar para interactuar con un objeto que él mismo puede identificar como objeto de estudio (p. 29).

Es decir, las habilidades de tipo cognitivo les permiten a los estudiantes comprender, almacenar, organizar y transformar información con el fin de crear nuevos productos en relación

[7] Para efectos del estudio las “representaciones concretas” son herramientas que permiten un acercamiento a aquellos objetos intangibles (en un principio) a través de manipulaciones físicas o mentales. Un ejemplo de manipulación física sería el estudio de la cardinalidad en los primeros años, mediante el agrupamiento de tapitas de gaseosa. Y finalmente, un ejemplo (más general) de manipulación mental se daría al hacer uso de conceptos previos para abordar una nueva temática.

con la formulación de generalizaciones, realización de acciones, resolución de problemas y la construcción de un aprendizaje significativo.

En este sentido, para favorecer el proceso de representación en la enseñanza de las secciones cónicas como lugar geométrico, es importante identificar las habilidades o actividades cognitivas que están en relación con dicho proceso. Para ello, se tienen en cuenta las propuestas por Rueda (2016) en un ambiente tecnológico, debido a que deja entrever de manera implícita el tratamiento dinámico del objeto matemático en cuestión.

Duval (2004), citado en Rueda (2016), expone tres habilidades cognitivas fundamentales: la formación de representaciones, el tratamiento de representaciones y la conversión entre representaciones[8]. Aunado a ello, habla de una actividad conceptual superior (coordinación) en donde se dinamiza el proceso de representación permitiendo el paso de una representación a otra de manera articulada. Ahora bien, en lo tocante a las representaciones se usarán las cinco descritas de manera breve en la tabla 2.

[8] i) La formación de representaciones: Se da mediante la selección de un conjunto de caracteres pertenecientes a un registro semiótico particular, ya sea esta formación para expresar una representación mental o para evocar un objeto real.

ii) El tratamiento de representaciones: Es la transformación de una representación inicial en un registro particular, que provee una representación final en el mismo registro de representación.

iii) La conversión de representaciones: Se refiere a la transformación de una representación en un registro particular, obteniendo una representación final en un registro de representación diferente al de la representación inicial (Rueda, 2016, p.40)

Tabla 2.

Registros de representación

Registro de representación	**Definición**
Registro simbólico motriz	Conjunto de marcas perceptibles sensitivamente con las que se realizan transformaciones (de las representaciones dadas) mediante acciones motrices.
Registro del lenguaje natural	Son aquellas representaciones que se dan en forma de enunciados problema u oraciones y esquemas o tablas resumen.
Registro aritmético	Son aquellas representaciones numéricas que dan cuenta de las características de un objeto matemático.
Registro algebraico	Son aquellas representaciones en las que el lenguaje simbólico (lenguaje matemático formal) es usado para dar cuenta de las características de un objeto matemático.
Registro tabular	Este tipo de representación hace parte del lenguaje simbólico, pero se esquematiza en una tabla.
Registro gráfico	Como registro gráfico se consideran los gráficos cartesianos.

Nota. En la tabla se muestran el registro de representación junto a su definición. Adaptado de Rueda (2016, p.36-59).

Fundamentado en lo descrito por Duval (2004), Rueda (2016) plantea cinco habilidades del proceso de representación que permiten valorar el alcance de las actividades aquí planteadas. La primera refiere al reconocimiento de las representaciones de los objetos matemáticos, la que sigue atañe a la interpretación de estas representaciones, así mismo, la tercera alude a la construcción de las representaciones sobre un objeto matemático, la cuarta apunta a la transformación de representaciones y finalmente la quinta expone la coordinación entre estas representaciones de objetos matemáticos.

4.3.1 Reconocer representaciones de los objetos matemáticos

Rueda (2016) menciona que se pueden reconocer representaciones de objetos matemáticos de dos maneras distintas: por percepción familiar o como "producto de un análisis del contexto que conlleve a procesos más elaborados como la generación de candidatos" (p. 42). En otras palabras, el reconocimiento de un objeto matemático nace de la familiarización que se tenga con el mismo, o de la manipulación contextual ligada al objeto.

De este modo, el reconocimiento como habilidad atañe a las acciones que realiza el individuo (verbales, escritas o gestuales) para determinar (por asociación o recuperación de contexto de codificación) las representaciones asociadas a un objeto matemático previamente expuesto.

4.3.2 Interpretar representaciones de los objetos matemáticos

Acogiendo lo descrito por Rueda (2016) esta habilidad alude a las acciones que realiza el estudiante una vez que reconoce la representación del objeto matemático (en cualquiera de sus registros de representación: gráfico, algebraico, entre otros). Estas acciones refieren a la inferencia, toma de decisiones, comunicación o argumentación con el fin último de solventar algún dilema planteado que involucre situaciones de cambio y variación.

4.3.3 Construir representaciones de los objetos matemáticos

Para Rueda (2016) esta habilidad consiste en crear algo nuevo, partiendo de una representación (en cualquiera de los registros: algebraico, tabular, entre otros). Sin embargo, puede pensarse en ello como una transformación de la representación inicial pero el autor aclara que la construcción no siempre corresponde al mismo objeto expuesto inicialmente. Además, reitera que Duval (2004) considera esto bajo el nombre de "representaciones puente" o "representaciones intermediarias" y otras expresiones mixtas que se obtienen por combinaciones de dos registros.

4.3.4 Transformar representaciones de los objetos matemáticos

"La transformación de representaciones como habilidad, comprende las acciones que un individuo realiza sobre una representación inicialmente dada para obtener una nueva representación ya sea en el mismo registro o en un registro diferente, siendo que estas nuevas representaciones conserven parte o todo el contenido de la representación inicial (Duval, 2004)" (Rueda, 2016; p. 46)

Así mismo, el autor distingue dentro de las transformaciones varios tipos de tratamientos[9] y conversiones[10]. Con la intención de ser breves y concisas la información de los tratamientos se presenta en forma de tabla en donde se especifica y ejemplifica cada tratamiento.

Tabla 3.

Tratamiento de representaciones de objetos matemáticos

Tratamiento de representaciones	Definición	Ejemplo en el presente proyecto
Tratamiento en el registro simbólico motriz	Consiste en realizar algún gesto que describa el comportamiento de un objeto matemático habiendo especificado previamente gestos relacionados al objeto mismo u otro al que se encuentre relacionado.	Un ejemplo de ello bajo el contexto de esta investigación puede darse cuando un alumno realice con sus manos un bosquejo en el aire que represente la elipse, o la parábola, incluso la hipérbola.

[9] Tratamiento se refiere a "cualquier transformación de la representación inicial del objeto matemático cuando dicha transformación produce una representación en el mismo registro que la representación inicial." (Rueda 2016, p.46)

[10] Conversión es cualquier transformación de la representación inicial del objeto matemático cuando dicha transformación produce una representación en un registro diferente al de la representación inicial. Es de notar que existen grandes diferencias en realizar una transformación de conversión de un registro A a un registro B y hacer una transformación de conversión en el sentido inverso. (Rueda 2016, p.50)

Tratamiento en el registro del lenguaje natural	Consiste en extraer información de un enunciado verbal para determinar una representación eficaz.	Un ejemplo puede darse en la fase 2 (de investigación) cuando se les pida a los estudiantes compartir sus hipótesis, este tendrá que buscar la mejor manera de comunicarse, valiéndose de alguna representación si es el caso.
Tratamiento en el registro aritmético	Consiste en hacer uso de valores numéricos para solventar un ejercicio o problema.	Esto podría ser ilustrado por algún estudiante cuando detalle en la propiedad principal de la elipse, por ejemplo. El alumno puede realizar ejemplos numéricos que cumplan con la propiedad d+e=2a.
Tratamiento en el registro algebraico	Consiste en hacer uso de reglas o propiedades algebraicamente válidas para solventar un ejercicio o problema.	Ello puede verse ejemplificado cuando el estudiante se enfrenta a la formulación de la ecuación que determina cada una de las cónicas.
Tratamiento en el registro tabular	Consiste en realizar interpretaciones acerca de la información presentada en forma tabular	Particularmente en el caso de la elipse, el estudiante puede hacer uso del plano cartesiano para tabular puntos clave de esta cónica y así determinar por ejemplo la simetría que posee respecto a sus ejes.
Tratamiento en el registro gráfico	Consiste en interpretar y extrapolar lo vislumbrado en el registro gráfico.	Un ejemplo de ello puede darse con la hipérbola, en el caso donde un estudiante partiendo del primer tramo de la hipérbola pueda sospechar o dar hipótesis del segundo trazo.

Nota. Descripción y ejemplificación de los tratamientos en los diferentes registros de representaciones. Adaptado de Rueda (2016, p.46-50).

4.3.5 Coordinar representaciones de los objetos matemáticos

Rueda (2016) afirma, bajo las ideas de Duval (2004), que la coordinación de representaciones le permite al estudiante acceder al objeto matemático representado. Así mismo tiene conocimiento de la diferencia que existe entre el objeto y su representación. De este modo, cuando el individuo coordina representaciones puede extractar información de cada representación que tenga el objeto y así usarla para resolver problemas.

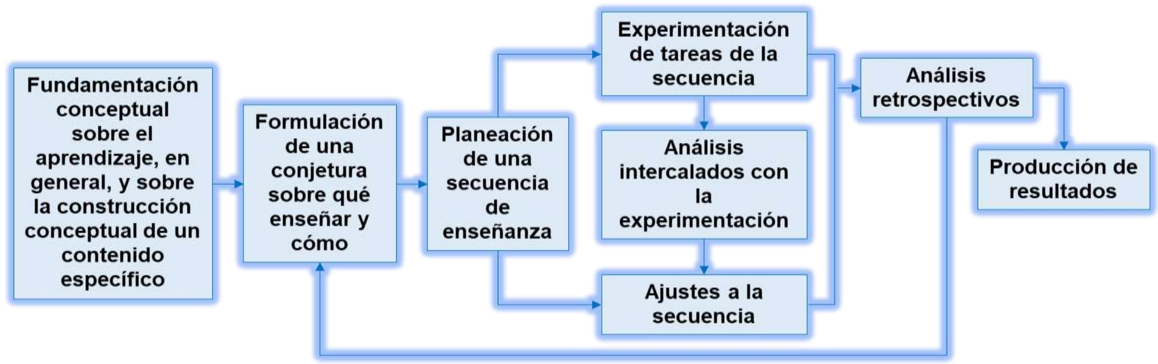
5. Metodología

Este capítulo pretende ilustrar el camino a seguir en aras de cumplir con el objetivo de investigación. El estudio aquí reportado sigue la estrategia investigativa conocida bajo el nombre de experimento de enseñanza[11]. Siguiendo lo propuesto por (Camargo, 2021) el plan de ejecución para este tipo de estrategia se sintetiza en la Figura 3. Con el ánimo de ser lacónicas se siguen estas etapas allí descritas de manera que en la caracterización del estudio se expone la fundamentación conceptual y la formulación de la conjetura, así como la planeación general de la investigación. Del mismo modo, al tener presente la estrategia de experimento de enseñanza se diseñan capítulos posteriores en donde se destaca un diseño experimental producto de las modificaciones realizadas al diseño general. Estos cambios se documentan en una serie de etapas (experimentación, análisis, ajustes y producción de resultados) consideradas en Camargo (2021).

[11]Según lo expuesto en Camargo (2021) esta estrategia de investigación "consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico" (p.86). Además, el fin último de esta estrategia está en el monitoreo y documentación de los avances que tienen los estudiantes en cuanto a construcción de conocimientos.

Figura 3.

Experimento de enseñanza



Nota. Pasos a seguir en un experimento de enseñanza, tomado de *Camargo (2021)*

5.1 Caracterización del estudio

Como ya se mencionó, el estudio sigue el experimento de enseñanza como estrategia investigativa. Esta se efectúa en el Colegio Técnico Vicente Azuero con estudiantes de décimo grado, para encaminar a los mismos en el aprendizaje de las secciones cónicas como lugares geométricos. Este aprendizaje adquirido se valora con ayuda de las habilidades de representación propuestas en el marco teórico que se van adquiriendo paulatinamente al realizar las actividades regidas por las fases de enseñanza propuestas más adelante en la sección 5.2.

Bajo este orden de ideas, la aproximación investigativa contribuye al objetivo del estudio ya que pretende recolectar información directa de la experiencia que tienen los estudiantes con las cónicas. Ello lo hace posible debido a que la metodología constituye un puente entre la teoría y la práctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, produciendo de esta manera resultados de investigación relevantes. De manera general, un experimento de enseñanza se basa en una secuencia didáctica que unifica los actores implicados de manera holística.

Lo anterior deja entrever que cada participante dentro del aula de clase tiene un papel en específico con el cual se debe desempeñar. El profesor, en primer lugar, debe promover la interacción social entre sus estudiantes permitiendo así que ellos generen su propio conocimiento. Así mismo, los alumnos deben estar comprometidos con la intención del profesor de generar un ambiente discursivo en donde se promueva el aprendizaje. Finalmente, existe el papel de investigador u observador quien registra los sucesos vistos en clase. Es necesario aclarar que las autoras de este escrito participan como investigadoras y profesoras, además el profesor encargado del curso también participa como un observador.

Se considera que el estudio aquí expuesto sirve como contexto para la realización de un experimento de enseñanza debido a que pretende involucrar a los alumnos en el proceso de representación de las secciones cónicas mientras construye paulatina y colectivamente el significado de las representaciones que en últimas hacen alusión al objeto de estudio. Esta construcción se realiza modificando reiterativamente el diseño inicial de acuerdo a las necesidades observadas en el aula. Por cuestiones de tiempo, en esta investigación se realiza una prueba piloto[12] con personas fuera de la investigación tales como estudiantes y profesores de otras instituciones para realizar los respectivos cambios al diseño de actividades. Es necesario mencionar que estas modificaciones se discuten en conjunto (las profesoras investigadoras y el director de la investigación), durante las reuniones semanales programadas para hacer seguimiento a este trabajo de investigación.

[12] Díaz (2020) menciona que este tipo de pruebas se define según el contexto investigativo. En este caso, cuando se habla de prueba piloto se refiere a

"un estudio pequeño o corto de factibilidad o viabilidad, conducido para probar aspectos metodológicos de un estudio de mayor escala, envergadura o complejidad. La naturaleza de estos estudios es evitar la aparición de un defecto que sería nefasto en un estudio posterior que es costoso en recursos. La definición permite inferir que no deberían diseñarse para responder preguntas o hipótesis de investigación, sino para responder preguntas de métodos específicos, es decir, evaluar la adecuación de los métodos y procesos, lo que evitará iniciar investigaciones de mayor escala sin un conocimiento o certeza del funcionamiento de los métodos que se proponen" (p. 2)

En suma, el experimento de enseñanza se propuso con el objetivo de valorar qué habilidades de representación se promueven al construir las secciones cónicas como lugares geométricos desde la resolución de problemas. Ello debido a que se considera pertinente dar un abordaje de este objeto matemático desde una perspectiva geométrico-analítica que permita establecer conexiones entre conceptos generando así la adquisición de competencias establecidas dentro de los estándares colombianos.

5.2 Diseño general de la investigación

En consonancia con la meta del estudio, el diseño experimental se centra en el registro de las acciones efectuadas por las profesoras y los estudiantes, asociado con el proceso de representación. Para valorar ello se debe revisar holísticamente la planeación de la secuencia de enseñanza enfocada en la conjetura previamente planteada acerca del qué se debe enseñar y cómo hacerlo. De allí se hace necesario destacar el abolengo de la secuencia, la valoración de los roles de los participantes y las herramientas de recolección de datos.

5.2.1 Construcción de la secuencia

En primer lugar, se realiza un análisis de la literatura bajo el enfoque didáctico de las matemáticas sobre las secciones cónicas y el proceso de representación. Con esta acción se pretende indagar en las diferentes investigaciones que han tratado el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las secciones cónicas. Aunado a ello se considera el propósito de estudiar y analizar, en los escritos encontrados, las habilidades que promueve el proceso de representación en el abordaje de un objeto matemático.

Esta fase también sirvió para determinar el marco teórico y el apartado de antecedentes ya que la búsqueda arrojó resultados interesantes que dieron cuenta del objetivo planteado y brindaron un cimiento sobre el cual se construyó la secuencia didáctica. Este diseño contiene actividades que permiten analizar las habilidades adquiridas con el proceso de representación.

En segundo lugar, se diseña un test de conocimientos previos, necesarios para abordar las secciones cónicas. Esta prueba se crea con el propósito de indagar acerca del nivel de conocimientos que tienen los estudiantes antes de participar en las actividades que plantea este estudio. Cabe resaltar que esta acción va de la mano con el diseño de actividades que permitan suplir las falencias vislumbradas dentro del test.

5.2.2 Acciones de las investigadoras/profesoras

Para desarrollar las habilidades de representación de las distintas cónicas previamente abordadas se tendrán presentes las fases propuestas por Fiallo y Parada (2018). Estas se rigen bajo la idea del aprendizaje constructivista, pues se plantean problemas[13] que paulatinamente generan conocimiento a partir de la experiencia propia. Para estructurar la adquisición de conocimientos por parte de los alumnos se plantean cinco fases que no son de jerárquico cumplimiento, es decir, que no se presentan siempre en el mismo orden. Brevemente estas se titulan como: información y exploración libre, socialización de los resultados obtenidos (puesta en común), exploración dirigida, explicación y tarea retadora.

La fase de información y exploración libre es un exordio sobre la temática a tratar ya que en esta se da a conocer el problema a trabajar en clase, pretendiendo que el estudiante se acerque intuitivamente a la solución sin otra herramienta adicional a los conocimientos previos. Con ello, se busca que los discentes sientan la necesidad de usar nuevos conceptos y reforzar los previamente

[13]La presente investigación considera el término de “problema” como aquella situación que inicialmente no posee una solución explícita o un camino de solución. Es necesario aclarar que dicha situación no debe estar necesariamente inmersa dentro de un contexto cotidiano o literalmente expresado.

vistos para abordar el dilema propuesto. En lo que refiere al papel del profesor, este debe identificar los posibles escollos que presente el estudiantado.

En lo que atañe a la socialización de los resultados obtenidos, es un espacio donde los alumnos comunican y discuten lo encontrado en su análisis. La tarea del profesor consiste en promover la participación de los estudiantes disponiendo de las respuestas poco acertadas para motivar la necesidad de plantear una solución matemáticamente correcta.

La siguiente fase se fundamenta en la mayéutica puesto que aquí el estudiante, con ayuda de un archivo en GeoGebra, es guiado mediante preguntas para resolver el problema inicialmente propuesto. Este puede plantear y refutar conjeturas, encontrar posibles respuestas e incluso justificar matemáticamente lo hallado. Aunado a ello, se promueve la arquitectura de redes neuronales ya que los estudiantes pueden establecer conexiones entre los conceptos trabajados y las representaciones allí vislumbradas (algebraica, numérica, gráfica, entre otras).

Tanto en la explicación como en la socialización de resultados se suscita a la participación, pero en este caso se profundiza un poco más ya que se debaten, reflexionan y discuten las ideas encontradas y refinadas por los alumnos de manera individual o grupal generando así, la construcción de conocimiento.

La tarea retadora, como su nombre lo indica, supone un reto para los estudiantes pues se pretende que el conocimiento previamente instaurado sea la base para seguir edificando sobre el tópico a tratar. De allí que, la misma tenga un carácter exigente y no mecánico "en cuanto al uso del conocimiento conceptual y procedimental, para elaborar nuevas estrategias que lo conduzcan a la solución del problema" (Fiallo y Parada, 2018, p.61).

5.2.3 Acciones del estudiante

Con el fin de favorecer el proceso de representación bajo el enfoque de la enseñanza de secciones cónicas como lugares geométricos, se tendrán en cuenta las habilidades de representación planteadas por Rueda (2016) destacando las acciones que deben realizar los estudiantes en cada una de ellas según el objeto de estudio a tratar.

En primer lugar, se considera que el estudiante *reconoce representaciones de objetos matemáticos* cuando logra distinguir, a partir del problema planteado, la sección cónica en exploración ya sea de manera geométrica, escrita, verbal, gestual o algebraica.

Luego de reconocer el objeto matemático el alumno debe *interpretar las representaciones de los objetos matemáticos.* Lo anterior lo hace a partir de la construcción del lugar geométrico obtenido del problema inicial, propuesto para cada una de las secciones cónicas, el alumno en este camino de solución debe realizar múltiples interpretaciones de manera escalonada y consecutiva todo el tiempo. Un posible ejemplo de ello se da para el caso de la elipse en donde el alumno puede hallar una o más razones que le permitan intuir que la suma de las distancias de un punto sobre el lugar geométrico a los dos focos es mayor que la distancia entre estos. Adicionando a lo expuesto previamente, el estudiante también debería lograr una mejor interpretación de las secciones cónicas manipulando las vistas que ofrece el software GeoGebra mediante deslizamientos, arrastres, registros en la hoja de cálculo, etc.

En tercer lugar, el eje recae en el hecho de potenciar la habilidad de *construir representaciones de los objetos matemáticos*. Ello consiste en crear algo nuevo, partiendo de una representación, por lo tanto, algunas de las acciones más destacadas en esta habilidad es que a partir del lugar geométrico hallado desde el problema inicial, el estudiante construya la representación algebraica de cada una de las secciones cónicas. Esto teniendo en cuenta que durante el proceso se constituyen otras acciones como la construcción de la expresión algebraica que representa la distancia de dos puntos según cada lugar geométrico, entre otras presentes en la habilidad de interpretación del objeto matemático en cuestión.

Como cuarto aspecto, la habilidad de *transformar representaciones de los objetos matemáticos* comprende las acciones que el alumno realiza sobre la representación inicial de cada una de las secciones cónicas para obtener la representación algebraica constituyéndose como un lugar geométrico a partir de tratamientos o conversiones expuestos en el marco teórico. Además de esto, es importante que la nueva representación obtenida conserve parte o todo el contenido de la representación inicial.

En este sentido las acciones que se vislumbran en los estudiantes son determinar la expresión algebraica a partir de los datos involucrados tanto en el problema inicial como en la representación gráfica inicial, expresar en lenguaje natural la relación entre los dos tipos de representación (gráfica inicial y algebraica obtenida), determinar las propiedades propias tanto de la representación inicial como de la obtenida, convertir los gestos en representación natural de las matemáticas, obtener a partir de una representación algebraica una representación geométrica, entre otros. Todo esto se realiza con el fin de que el estudiante obtenga las herramientas suficientes para formalizar las propiedades propias de cada sección cónica.

Finalmente, la habilidad *coordinar representaciones de los objetos matemáticos* surge a partir de las acciones involucradas en el potenciamiento de las habilidades antes mencionadas, ya que, a partir de estas, el alumno formaliza los conceptos involucrados en la representación de cada sección cónica como lugar geométrico, identificando propiedades que le permitirán solucionar las tareas retadoras que se proponen para cada sección. Además, con ello da cuenta de lo que sucede al realizar diferentes movimientos con respeto a los puntos involucrados en las representaciones iniciales, permitiendo que desde la tarea retadora halle puntos, establezca relaciones entre los elementos, entre otros, es decir, aplica los conocimientos obtenidos para dar solución a nuevos problemas propuestos.

5.2.4 Herramientas de recolección de datos

En relación con el objetivo del estudio, al ser un experimento de enseñanza el análisis está centrado en registrar aquello que dicen o hacen tanto las docentes como los estudiantes, asociado a la actividad de representación. Para ello, se tendrán en cuenta diferentes recursos que permiten la recolección de datos como registros de videograbaciones con sus respectivas transcripciones, diario de campo, registros de la actividad matemática de los estudiantes en GeoGebra y en las hojas que se les otorga y finalmente, el registro de las planeaciones de las clases. En este sentido, para cada uno de los instrumentos se detalla información acerca de la definición y la importancia de tenerlos en cuenta en la presente investigación.

5.2.4.1. Videograbaciones de clase. Son grabaciones que se realizan con cámaras portátiles de vídeo durante las sesiones de clase con los estudiantes. Estas videograbaciones junto a sus transcripciones permiten que las investigadoras al realizar un análisis de la clase den cuenta de acciones que no se tuvieron en cuenta durante la sesión en cuanto a las habilidades de representación como el lenguaje gestual, la argumentación oral, las participaciones en los momentos de discusión entre alumnos y docentes, entre otros. Todo ello, teniendo como enfoque principal el objetivo de la investigación el cual se encuentra en dirección al favorecimiento de las habilidades de representación.

5.2.4.2 Diario de campo. Es una herramienta que utilizan los investigadores para realizar anotaciones durante la ejecución de sus proyectos. Este recurso se realiza a partir de las observaciones de las clases registrando aquellos hechos que son susceptibles de ser interpretados durante el análisis de las sesiones. En este recurso se plantean situaciones consideradas importantes en cuanto a las participaciones, contratiempos, entre otros, los cuales como investigadoras logramos percibir de manera inmediata durante la clase.

5.2.4.3 Registro de actividades en GeoGebra y material escrito. Este recurso hace referencia a los resultados obtenidos de las actividades propuestas a los alumnos tanto en el libro de GeoGebra como en las actividades que se deben realizar cálculos en una hoja de papel. Estos registros permiten dar cuenta de las habilidades geométricas, analíticas o algebraicas que se presentan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas como lugares geométricos.

5.2.4.3 Registro de las planeaciones de clase. Hace referencia a las secuencias de actividades previstas para la ejecución de la propuesta de investigación. Con este registro, al estar en la fase del análisis de los resultados damos cuenta hasta qué punto se lograron las actividades y que modificaciones se realizaron con respecto a lo planeado, siendo considerado un aspecto fundamental en la investigación.

6. Diseño experimental de la secuencia didáctica

El diseño de la secuencia didáctica se estructura por talleres individuales para cada sección cónica.

6.1. Taller 1: Elipse

Las actividades diseñadas en este taller pretenden favorecer las habilidades del proceso de representación de la elipse entre las que se destacan principalmente las de carácter algebraico, numérico y gráfico. De manera general se busca que los estudiantes mediante la manipulación del software GeoGebra conciban la elipse como lugar geométrico y de allí deduzcan su representación algebraica atravesando por un análisis guiado de la cónica.

El núcleo del taller es el problema inicial, este punto de partida marca el camino de solución en el que paulatinamente el estudiante adquiere herramientas para acercarse por medio de las representaciones al objeto en estudio: la elipse.

A continuación, se presenta la estructura del taller a manera de tabla en la que se consideran las fases propuestas por Fiallo y Parada (2018), las actividades y el objetivo de las mismas. Ello acompañado de una descripción del papel que juega cada uno de los roles implicados, investigador/docente y estudiantes (Ver en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/vtumuu7w)

Tabla 4.

Taller 1: Elipse

Fase	Actividad	Propósito
Información y exploración libre	Se presenta al estudiante el problema inicial: *"Dados dos puntos fijos A y B, construya 20 puntos* $(N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{20})$ *de tal manera que la suma de las distancias entre estos puntos con respecto a A y B se mantenga constante"* ***Posible habilidad:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático".*	Se busca que el estudiante acuda a sus presaberes y explore el problema para tratar de darle solución. Para esta exploración se le da la opción de trabajar con GeoGebra o a lápiz y papel. Sin embargo, al estar planteado como problema se pretende que no logre visualizar un camino de solución de manera inmediata.
Socialización	Discusión de las hipótesis planteadas	Este espacio se abre con el ánimo de

de los resultados obtenidos	por los estudiantes respecto al problema dado inicialmente. ***Posible habilidad:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático".*	indagar en las concepciones, dificultades e ideas que tienen los estudiantes al abordar el problema. Por ejemplo, se puede encontrar que el estudiante X concibe la construcción como un dibujo sin características y no como el producto de una representación que cumple con determinadas propiedades. Nota: Se tiene presente que en esta fase los estudiantes pueden tener dificultades en la comprensión del enunciado del problema.
Exploración dirigida 1	**Tarea 1** Se presenta al estudiante el problema acompañado de la vista gráfica de GeoGebra y orientaciones tanto escritas como verbales. Las escritas se mencionan a modo de ítem mientras que las verbales se señalan en paréntesis: 1. ¿Qué significa que los puntos A y B se mantengan fijos? 2. ¿A qué distancias se refiere el enunciado del problema? (Sugerencia 1: Coloque un punto C diferente de A y B, suponga que este hace parte del conjunto de puntos pedido y analice nuevamente el enunciado)	El objetivo de esta tarea es encaminar al estudiante en la comprensión inicial del problema y al uso recursivo de habilidades de representación. La primera pregunta tiene como propósito que el alumno vea un punto de partida para interpretar el enunciado. En segundo lugar, la condición de ser puntos fijos debería interpretarse gráficamente como dos puntos que mantienen su distancia. Se considera necesario el énfasis en esta cuestión ya que al estar en un ámbito dinámico se pueden generar interpretaciones erróneas debido a la opción de arrastre que tiene el software.

(Sugerencia 2: Usando la herramienta segmento marque las distancias a las que se refiere el enunciado)

Teniendo presente las distancias comprendidas entre cada punto construido con respecto a A como a B, responda:

3. ¿A qué se refiere el enunciado cuando se indaga por "la suma constante de las distancias"? Justifica

(Sugerencia 3: Coloque un punto D diferente a los puntos anteriores, repita el proceso que realizó con el punto C y analice nuevamente el enunciado)

4. ¿Cómo podemos verificar que la suma de esas distancias pedidas es constante?

Posibles habilidades:

“Reconocimiento de representación del objeto matemático”

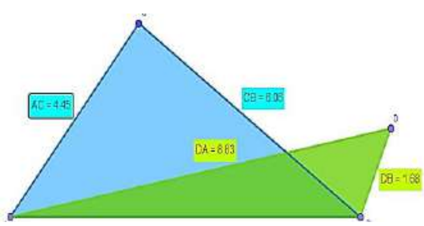
“Interpretación de representaciones del objeto matemático”

“Construcción de representaciones del objeto matemático”.

La segunda pregunta busca que el estudiante enfatice en las distancias a las que se refiere el problema. Ello debido a que al apoyarse de una vista gráfica la única distancia que conciben inicialmente es la de los puntos dados A y B.

Teniendo esto en cuenta se realizan dos sugerencias de manera verbal encaminadas a la solución de esta segunda cuestión. Esto debido a que puede presentarse la situación en donde un estudiante conciba que las distancias de las que habla el problema son aquellas comprendidas entre un par de puntos del conjunto $(N_1, N_2, \ldots, N_{20})$.

La tercera pregunta quiere dar por sentada la comprensión del enunciado ya que en esta se enfatiza en la suma constante de las distancias que previamente determinó. Esta se acompaña de una sugerencia que permite detallar en esta característica de manera gráfica ya que con la pregunta y sugerencias anteriores el estudiante sólo ve las distancias relacionadas con un solo punto, al abordar otro adicional se pretende que note el sentido de “la suma constante”

<table>
<tr>
<td></td>
<td>que caracteriza a la definición de la elipse como lugar geométrico.
Finalmente, con la tercera y cuarta orientación escrita se pretende que el alumno mida esas distancias implicadas y con ello haga uso de una representación numérica característica de la elipse. La pregunta final encamina al estudiante nuevamente en la idea de construir y no sólo representar de manera gráfica el enunciado. Aquí se les recordará que los puntos C y D no hacen parte de este conjunto de puntos pedidos ya que al arrastrarlos ya no cumplen las condiciones dadas.</td>
</tr>
<tr>
<td>Tarea 2
Note que los puntos C y D cumplen con la condición del problema inicial, analice:
Figura 4.
Actividad tarea 2, elipse


Nota. Ejemplos gráficos de dos puntos que cumplen la condición inicial del problema de la elipse.
1. ¿Qué características tienen estos</td>
<td>Una vez comprendido el enunciado del problema, se da inicio a la actividad dos cuyo objetivo principal apunta a la concepción de la elipse como un lugar geométrico.
Con la primera pregunta se quiere que el alumno note que estos triángulos implicados tienen siempre un lado común $(\overline{AB})$. Además, deben darse cuenta que el perímetro de los triángulos es el mismo. Sin embargo, considerando la generalidad de esta pregunta se concibe una pregunta auxiliar que da cuenta de esta</td>
</tr>
</table>

triángulos formados?

(¿Qué nos podría garantizar que la suma de los lados es constante para cada triángulo formado?).

Teniendo en cuenta la respuesta anterior, analiza:

2. Si la distancia AB es de 6 unidades y el perímetro de los triángulos resultantes es de 20 unidades completa la tabla de la derecha y coloca estos valores en las casillas de la izquierda para ver gráficamente los puntos generados. (ver Figura 4).

3. ¿Qué figura crees que se forme al unir los 20 puntos construidos?

4. ¿Cómo podríamos construir 100, 1000, o 10000 puntos con esta característica?

Posibles habilidades:

“Reconocimiento de representación del objeto matemático”

“Interpretación de representaciones del objeto matemático”

“Construcción de representaciones del objeto matemático”

“Transformación de representaciones del objeto matemático”.

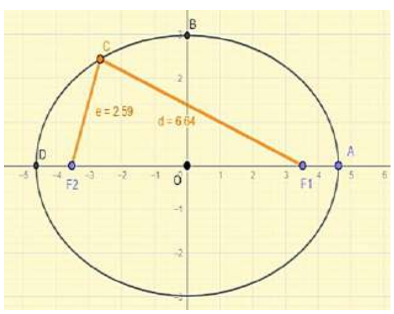
longitud.

Seguido a esto, se propone una orientación que contiene una tabla y un applet con el cual el estudiante puede dar nociones acerca del lugar geométrico que va a resultar, así como hacer uso de representaciones tabulares y gráficas. Esta noción se concreta con la pregunta procedente en la que se busca que el estudiante trate de bosquejar mediante cualquier representación (gestual, gráfica o verbal) la elipse.

Finalmente, la cuarta pregunta se plantea para que el estudiante sienta la necesidad de realizar la construcción de este lugar geométrico, pero considerando un enfoque más algebraico.

Explicación 1	Una vez conceptualizada la elipse como lugar geométrico se definen los elementos de la misma y se da formalmente el nombre a la cónica. Ello se realiza mediante una representación estática de la elipse mediada por una presentación en diapositivas. La explicación comienza pidiendo a los alumnos que expresen lo encontrado en las tareas anteriores. De allí, se mencionan de manera general las características generales de la elipse (curva plana, cerrada y simétrica respecto a dos ejes perpendiculares entre sí) con ayuda de los estudiantes. Luego, se resalta que hasta el momento han explorado esta cónica como un lugar geométrico aclarando que un lugar geométrico es un conjunto de puntos (x, y) que cumplen una cierta propiedad que únicamente poseen dichos puntos. Por ejemplo, el círculo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un cierto punto denominado centro; la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento (Tinoco, 2018). Con esta ejemplificación realizada se vuelve a recordar la definición de la	El objetivo de esta fase es formalizar los elementos de la elipse, así como el nombre de este objeto matemático en estudio. Esta socialización es el primer paso para que los estudiantes se adentren en la deducción de la ecuación canónica de la elipse. Cabe resaltar que el estudio de los elementos de manera dinámica lo hacen los estudiantes de forma activa por lo cual esta explicación aún no da cuenta de este dinamismo.

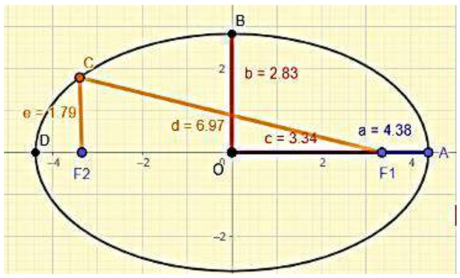
	elipse y se procede con la descripción de sus elementos. En primer lugar, se define el punto centro y los focos. De allí se destacan los vértices y covértices junto con las longitudes que determinan (eje mayor y eje menor). Finalmente, se habla de la distancia focal. Cabe aclarar que todo ello se realiza a partir de ejemplos para generalizar los nombres de las magnitudes en cuestión con los nombres de a, b y c respectivamente. ***Posibles habilidades:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"* *"Interpretación de representaciones del objeto matemático"*	
Exploración dirigida 2	**Tarea 3 (Parte 1)** El applet muestra en el plano cartesiano, el lugar geométrico de todos los puntos C, cuya suma de distancia a los puntos F1 y F2 es constante. Este lugar geométrico se llama ELIPSE. 1. Arrastre los puntos **C**, **F1** y **A**; una vez hecho esto explore y analice qué varía y que no (variantes e invariantes) entre los elementos de la elipse y el plano cartesiano (ver Figura 5).	El propósito general de la tarea consiste en que el estudiante analice las características y relaciones de los elementos que componen una elipse desde diversas representaciones (partiendo principalmente de las gráficas hasta las algebraicas). La primera actividad proporciona al estudiante un medio de exploración en el que identifica qué valores permanecen constantes y cuales

	Posibles habilidades: *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”* *“Construcción de representaciones del objeto matemático”* *“Transformación de representaciones del objeto matemático”.* **Figura 5.** *Actividad tarea 3, elipse*  *Nota.* Representación geométrico-algebraica de la elipse.	varían. El valor de A determina la dimensión de la elipse (debido a que la construcción del applet deja el valor de B dependiente de A por lo cual no se hace necesario el arrastre de este punto). Con el arrastre del punto C los estudiantes, dentro de una representación gráfico/numérica, pueden observar la variabilidad de los valores e y d independientemente de donde se encuentre el punto A o los focos. Finalmente, con los puntos focales pueden notar variaciones respecto a la forma de la elipse, pues entre más corta sea la distancia focal más redondeada será la representación gráfica de la elipse.
Explicación 2	Una vez explorados los elementos de manera dinámica se discute con los estudiantes acerca de lo encontrado con preguntas del tipo: ¿Qué ocurrió al arrastrar el punto C? ¿Qué valores se mantuvieron constantes y cuáles variaron?, de manera análoga se procede con los demás puntos	El objetivo de esta explicación es concretar las observaciones de los estudiantes de manera colectiva. La fase pretende recolectar el mayor número posible de observaciones e hipótesis de los estudiantes respecto a características físicas de la elipse enriqueciendo de esta manera la

	indagando en las características que logran destacar. Además, se realizan aclaraciones en lo que respecta a la notación algebraica para que den cabida al segundo paso con el ánimo de deducir la ecuación canónica de la elipse. ***<u>Posibles habilidades:</u>*** *<u>"Reconocimiento de representación del objeto matemático"</u>* *<u>"Interpretación de representaciones del objeto matemático"</u>*	representación gráfica, gestual y verbal del alumnado.
Exploración dirigida 3	**Tarea 3 (Parte 2)** Teniendo en cuenta que $\lvert\underline{OA}\rvert = a$;$\lvert\underline{OB}\rvert = b$; $\lvert\underline{OF1}\rvert = c$; $\lvert\underline{F2P}\rvert = d$; $\lvert\underline{F1P}\rvert = e$, conteste las siguientes preguntas: 1. $d + e =$? 2. $b^2 + c^2 =$? Nota: En esta actividad los estudiantes pueden interactuar con el applet ya que con cada respuesta incorrecta se dan retroacciones que permiten al estudiante acercarse a la respuesta desde diferentes representaciones.	El propósito principal de esta tarea consiste en identificar algebraicamente con ayuda de representaciones numéricas, gráficas, algebraicas y escritas que la suma de las distancias entre los puntos que conforman la elipse y sus focos es constante, y el valor de esa constante es 2a. Así mismo, se pretende que den cuenta de manera análoga que existe una relación pitagórica entre la semidistancia focal, el valor del semieje mayor y el semieje menor. Cabe resaltar que para llegar a estas respuestas el estudiante tiene la posibilidad de realizar múltiples

Figura 6.

Actividad tarea 3 parte 2, elipse



Nota. Representación geométrico-algebraica con todos sus elementos.

Para la primera pregunta las retroacciones dadas son:

- Lleve el punto P hasta el punto D o A. Compare el valor de la suma d+e con cualquier valor de a y escribe la suma en términos de a.
- Compare el valor de la suma d+e con el valor de a ¿Qué relación hay entre d+e y a para cualquier a?
- Abra la vista “Hoja de Cálculo” y compare los valores de la suma de d+e (Columna C) con el valor de a (Columna D). Mueva el punto A y P y compare ¿Qué relación existe?

Para la segunda pregunta la retroacción es:

intentos y de ellos recibe interacciones del applet que guían paulatinamente al mismo hacia la solución.

- Lleve el punto C hasta el punto B. ¿Qué relación existe entre los segmentos a, b y c? Escriba la suma de los cuadrados de b y c en términos de a.
- Compare la suma de los cuadrados de b y c con a. Escriba a qué es igual la suma de los cuadrados de b y c en términos de a.

Posibles habilidades:

“Reconocimiento de representación del objeto matemático”

“Interpretación de representaciones del objeto matemático”

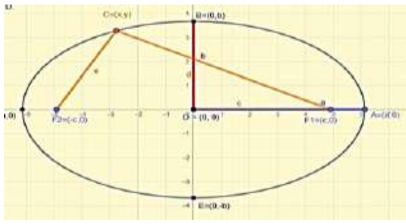
“Construcción de representaciones del objeto matemático”
“Transformación de representaciones del objeto matemático”
“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.

Tarea 4 (parte 1)

1. Utilice las propiedades dadas de la elipse y algunas reglas algebraicas para deducir la siguiente fórmula de la elipse con centro (0,0), focos F1 y F2, semieje mayor a y semieje menor b.

Finalmente, con esta actividad se busca que el estudiante deduzca la ecuación canónica de la elipse.

Es necesario enfatizar que la actividad brinda la ecuación resultante (o la ecuación a la que deben llegar) ya que el objetivo de

	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ **Figura 7.** *Actividad tarea 4, elipse*  *Nota.* Representación geométrico-algebraica de la elipse. Realice a lápiz y papel los procedimientos algebraicos, teniendo en cuenta las propiedades métricas y geométricas de la elipse y pegue el enlace de la imagen de su hoja de trabajo en la casilla de respuestas. ***Posibles habilidades:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”* *“Construcción de representaciones del objeto matemático”* *“Transformación de representaciones del objeto matemático”* *“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.*	este trabajo investigativo consiste en indagar en las habilidades del proceso de representación por lo cual se valoran los procedimientos (principalmente algebraicos) que efectúan los estudiantes para llegar a la solución del problema planteado inicialmente. Puesto que es con la ecuación que realmente se construyen los 20 puntos pedidos inicialmente.
Exploración	**Tarea 4 (parte 2)**	Con la actividad anterior es muy

dirigida 4	Para deducir la ecuación es necesario analizar la definición desde un sentido algebraico, ya hemos explorado su representación geométrica y textual. 1. Interprete la definición de la elipse de manera algebraica (Sugerencia: Use la notación vista en las tareas 3 y 4 y enfóquese en la condición que hace que estos puntos pedidos sean una elipse) *Dados dos puntos fijos A y B, construya 20 puntos* $(N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{20})$ *de tal manera que la suma de las distancias entre estos puntos con respecto a A y B se mantenga constante.* Para hallar la longitud de un segmento horizontal o vertical en el plano cartesiano sólo debemos “contar cuadros”. Sin embargo, para encontrar la longitud de un segmento con orientación diagonal dentro del plano cartesiano no solo basta con contar. ¿Cómo se puede determinar la longitud de un segmento con orientación diagonal?) (Use el applet para dar respuesta a la pregunta anterior) (Como la ecuación resultante es $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, use procedimientos	probable que los estudiantes no logren realizar la deducción de la ecuación. Es por ello que se plantea una “actividad auxiliar” que apunta al mismo objetivo de la anterior, pero posee más instrucción.

	algebraicos para simplificarlo a la siguiente expresión $\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$) (Haciendo uso de la propiedad pitagórica y el resultado anterior deduzca la ecuación canónica de la elipse)	
Explicación 3	Una vez que los estudiantes hayan realizado procedimientos algebraicos para determinar la ecuación se socializa con el grupo los resultados encontrados a partir de la participación activa mediada por orientaciones que indaguen sobre los pasos a tener en cuenta al determinar la ecuación. ***Posibles habilidades:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”.*	Este espacio tiene como propósito concretar la indagación de la precedente orientación dirigida. Se quiere valorar la habilidad de coordinación de representaciones (algebraica y geométrica). Aunado a ello se pretende socializar en grupo con el ánimo de que cada estudiante verifique y/o conozca el proceso de deducción de la ecuación partiendo de su representación geométrica.
Exploración dirigida 5	**Tarea 5** Con ayuda del applet deduzca diferentes propiedades de la elipse. 1. ¿Qué sucede si a<b? ¿Qué sucede con los focos? 2. La ecuación de la elipse vertical está	El objetivo de esta actividad recae en el hecho de que los estudiantes exploren y comprendan diferentes propiedades de la sección cónica elipse. En primer lugar, se busca que

dada por

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (*)$$

Compare las características de esta ecuación (*) con la ecuación de la elipse encontrada y socializada en grupo.

3.Arrastra los deslizadores a y b y responde:

a) ¿Qué sucede cuando la distancia focal es grande?

b) ¿Qué sucede cuando la distancia focal es pequeña?

c) ¿Qué sucede cuando la distancia focal es nula?

4. ¿La circunferencia es una elipse? Justifica tu respuesta

5.¿Qué características destacas de la circunferencia?

6. A partir de la ecuación de la elipse deduzca la ecuación de la circunferencia dada por $x^2+y^2=r^2$.

Posibles habilidades:

“Reconocimiento de representación del objeto matemático”

“Interpretación de representaciones del objeto matemático”

“Construcción de representaciones del objeto matemático”

el estudiante con las dos primeras cuestiones analice las características geométricas y algébricas de la elipse orientada de manera vertical. Para ello, de manera particular, en la primera pregunta el estudiante debe observar que cuando a<b se obtiene una elipse vertical en la cual los focos estarán ubicados sobre el eje y.

Con la segunda actividad los estudiantes deberían notar que esta suma de fracciones tiene una característica especial. Esa es que el denominador del cuadrado de la x es siempre el eje mayor de la elipse.

Con la tercera pregunta se busca que el estudiante de cuenta de lo que formalmente se conoce como excentricidad de la elipse. En esta intervienen factores como la distancia focal. Del ítem a el alumno puede notar que entre mayor sea la distancia focal más “achatada” será la elipse. Con los ítems b y c encontrará que la cercanía de los focos transforma paulatinamente la cónica hasta hacerla una circunferencia cuando la distancia se hace cero, es decir, cuando los focos coinciden en un mismo punto, se obtendrá como

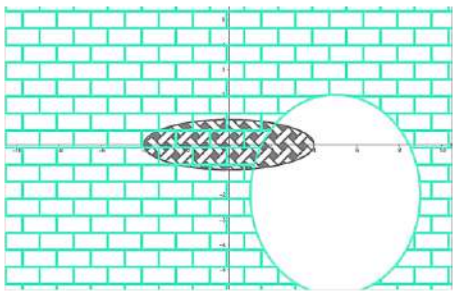
	“Transformación de representaciones del objeto matemático” *“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.*	resultado una circunferencia. Con la cuarta pregunta se quiere que el estudiante usando la definición de la elipse en cualquiera de sus representaciones (gráfica, algebraica, numérica) logre argumentar que la circunferencia es un tipo de elipse ya que cumple con la definición. En otras palabras, la circunferencia es un caso particular de la elipse. Así mismo, en la pregunta cinco los alumnos deben dar cuenta de propiedades con respecto a la relación entre a, b y c. De ello, se destaca que a=b y que la distancia c=0 ya que los focos coinciden en un mismo punto. Siguiendo con esta línea, la sexta indagación quiere que los estudiantes hallen de la expresión algebraica de la elipse la ecuación de la circunferencia a partir de procedimientos aritméticos. De allí, la ecuación resultante será $x^2 + y^2 = r^2$, esto debido a que r=a y en las preguntas anteriores encontraron que a=b.
Tarea retadora	¡Evaluemos lo aprendido! Oprime el botón TAPA y utiliza las propiedades geométricas y algebraicas	Esta actividad tiene como objetivo que el estudiante determine la ecuación de la elipse cuando el centro es diferente a (0,0).

en la fórmula dada para tapar con la elipse gris el HUECO elíptico blanco.

Escriba la ecuación en su hoja de trabajo y a continuación de clic en el botón HUECO.

Figura 8.

Actividad tarea retadora, elipse



Nota. Representación gráfica de la tarea retadora de la cónica elipse.

Escriba los valores de h, k, a y b, en las casillas correspondientes para transformar la elipse gris en la elipse blanca para tapar el hueco.

Una vez hecho ello, escriba la nueva ecuación de la elipse y compare con la inicial. ¿Qué transformaciones se hicieron?

¿Cuáles son las coordenadas de los focos del hueco?

Posibles habilidades:

Con la primera tarea el estudiante obtiene posibles recursos que le permiten llegar a generalizar propiedades para dar solución a las siguientes tareas. En esta tarea el estudiante realiza diferentes transformaciones a la elipse ara lograr obtener la elipse correspondiente a la del hueco.

El propósito de la tarea dos consiste en que el estudiante escriba la fórmula general de la elipse con centro diferente a (0,0) en términos de h. k, a y b. Aunado a ello, se quiere ver la justificación que los alumnos realizan teniendo en cuenta la exploración en la tarea 1, destacando que los alumnos deben dar cuenta que el centro de la elipse tiene como coordenadas (h,k)

Para la tarea 3 el objetivo recae en el hecho de que el estudiante represente de manera escrita las diferentes transformaciones y exploración que realizó en el applet con respecto a h, k, a y b. De esta manera para h deben ver el movimiento vertical y para k el movimiento horizontal del centro de la elipse. Así mismo, que a es el valor

“Reconocimiento de representación del objeto matemático” *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”* *“Construcción de representaciones del objeto matemático”* *“Transformación de representaciones del objeto matemático”* *“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.*	del centro hasta uno de los vértices sobre el eje horizontal y b el valor del centro hasta uno de los vértices sobre el eje vertical de la elipse. Finalmente, en la tarea 4 los alumnos deben dar uso a algunas de las propiedades de la elipse. Entre ellas, se tiene la relación $a^2 = b^2 + c^2$ la cual se necesita para obtener el valor de c. Esto se realiza ya el objetivo recae en generalizar las coordenadas de los focos para cualquier elipse. Además de ello, deben dar cuenta que las coordenadas para los focos de una elipse horizontal son diferentes a las coordenadas de los focos de una elipse vertical, en esto los estudiantes justifican el por qué. Para el caso de la elipse horizontal las coordenadas de los focos en términos de $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ son: Foco $1\left(h - \sqrt{a^2 - b^2}\,, k\right)$ o $(h - c\,, k)$ Foco $2\left(h + \sqrt{a^2 - b^2}\,, k\right)$ o $(h + c\,, k)$ En el caso de la elipse vertical: Foco $1\left(h, k - \sqrt{a^2 - b^2}\,\right)$ o $(h\,, k - c)$ Foco $2\left(h, k + \sqrt{a^2 - b^2}\,\right)$ o

	$(h\,,k+c)$	

Nota. Diseño secuencial del taller de la elipse donde se vislumbra fase, actividades y objetivos.

6.2. Taller 2: Hipérbola

Las actividades diseñadas buscan favorecer las habilidades del proceso de representación de la hipérbola entre las que se destacan principalmente las de carácter algebraico, numérico y gráfico. De manera general se busca que los estudiantes mediante la manipulación del software GeoGebra conciban la hipérbola como lugar geométrico y de allí, deduzcan su representación algebraica atravesando por un análisis guiado de la cónica.

El núcleo del taller es el problema inicial, este punto de partida marca el camino de solución en el que paulatinamente el estudiante adquiere herramientas para acercarse por medio de las representaciones al objeto en estudio: la hipérbola.

A continuación, se presenta la estructura del taller a manera de tabla en la que se consideran las fases propuestas por Fiallo y Parada (2018), las actividades y el objetivo de las mismas. Ello acompañado de una descripción del papel que juega cada uno de los roles implicados, investigador/docente y estudiantes (Ver en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/wuyufus9)

Tabla 5.

Taller 2: Hipérbola

Fase	Actividad	Propósito
Información y exploración libre	Se presenta al estudiante el problema inicial: *"Dados dos puntos fijos A y B, construya 20 puntos* $(N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{20})$ *de tal*	Se busca que el estudiante acuda a sus pre saberes y explore el problema para tratar de darle solución. Para esta exploración se

	manera que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de estos puntos con respecto a A como a B se mantenga constante” ***Posible habilidad:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”.*	le da la opción de trabajar con GeoGebra o a lápiz y papel. Sin embargo, al estar planteado como problema se pretende que no logre visualizar un camino de solución de manera inmediata. No obstante, debido al acercamiento análogo con la sección cónica de la elipse el estudiante tiene más herramientas para abordar el problema.
Socialización de los resultados obtenidos	Discusión de las hipótesis planteadas por los estudiantes respecto al problema dado inicialmente. ***Posible habilidad:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”.*	Este espacio se abre con el ánimo de indagar en las concepciones, dificultades e ideas que tienen los estudiantes al abordar el problema. Por ejemplo, se puede encontrar que el estudiante X_1 deduzca que la constante es positiva mientras que el estudiante X_2 plantee la constante de manera negativa. Ello debido a que la resta tiene en cuenta el orden de los valores implicados.
Exploración dirigida 1	**Tarea 1** Teniendo presentes las distancias comprendidas entre cada punto construido con respecto a A como a B, responda: ¿Qué entiendes por "el valor absoluto de la diferencia"? Justifica	Esta actividad tiene como objetivo principal la comprensión del problema. Con ello, se pretende que el estudiante de cuenta que, si la diferencia obtenida de las distancias involucradas es positiva o negativa, al tener presente el

Sugerencia: como ya se ha abordado la elipse previamente se puede volver a orientar con las mismas indicaciones dadas allí, en especial la descrita en la pregunta dos que indaga por las distancias a las que refiere el problema. Así mismo se pueden proporcionar, de manera verbal, las indicaciones expuestas como sugerencia 1 y sugerencia 2 de la elipse.

Posibles habilidades: *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"*

"Interpretación de representaciones del objeto matemático"

"Construcción de representaciones del objeto matemático".

concepto de valor absoluto siempre será considerada una magnitud positiva. Un ejemplo de ello se vislumbra seguidamente:

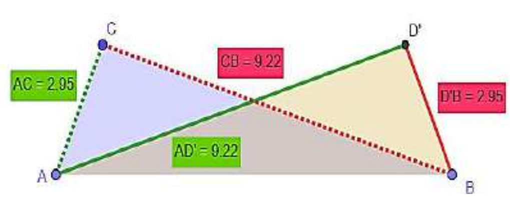
Si P y Q son dos puntos que cumplen la condición del problema inicial entonces $\overline{AP}-\overline{BP}=3-7=-4$ y $\overline{AQ}-\overline{BQ}=9-5=4$, se tiene que $|-4|=|4|$ pues $|-4|=4$ y $|4|=4$. De allí, la diferencia es constante con un valor de 4.

Tarea 2

Note que el punto C se encuentra más cercano al punto A mientras que el punto D' está más cerca de B.

Figura 9.

Actividad tarea 2, hipérbola



Nota. Ejemplo gráfico de la representación de dos puntos que cumplen la condición del problema de la hipérbola.

Esta tarea tiene como objetivo encaminar a los estudiantes en la concepción de la hipérbola como un lugar geométrico.

De esta manera con la primera pregunta se quiere que el alumno note que la diferencia de las distancias comprendidas por el punto C con respecto a A como a B es negativa y la diferencia de las distancias comprendidas por el punto D' con respecto a A y B, es positiva. Además de esto, los

Con esto presente, responda:

1. ¿Qué puedes destacar de la diferencia de las distancias comprendidas por los puntos C y D' con respecto a A como a B?
2. Siguiendo con la comprensión del problema, explora el siguiente applet y contesta las preguntas a continuación descritas.

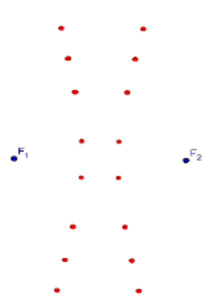
El applet contiene la siguiente información:

-Arrastra el deslizador n para cambiar el valor de la diferencia a la que refiere el problema, luego pulsa el botón de animación para observar algunos puntos que cumplen con la condición del problema.

(Uno de los posibles rastros que puede observar el estudiante es el que se muestra a continuación y con ello podrá dar respuesta a las preguntas 3 y 4).

Figura 10.

Actividad 2 tarea 2, hipérbola



Nota. Representación gráfica de la hipérbola como lugar geométrico.

estudiantes logran observar que la diferencia es negativa cuando la distancia menor es aquella que está más cerca del punto A y será positiva si la distancia menor es más cercana a B.

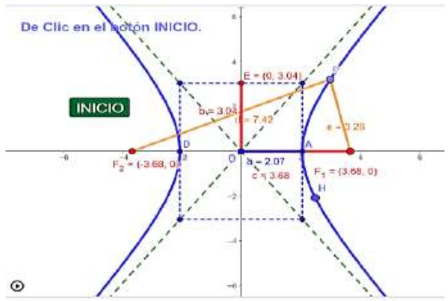
En este sentido, las representaciones que los estudiantes pueden llegar a tener en cuenta son geométrica, algebraica y numérica.

Seguido a esto, se propone una orientación que contiene un applet con el cual el estudiante puede generar nociones acerca del lugar geométrico que va a resultar. Con el applet se busca la comprensión de la hipérbola como lugar geométrico. Esta noción se concreta con la pregunta procedente en la que se busca que el estudiante trate de bosquejar mediante cualquier representación (gestual, gráfica o verbal) la hipérbola.

Finalmente, la cuarta pregunta se plantea para que el estudiante sienta la necesidad de realizar la construcción de este lugar geométrico, pero considerando un

	3. ¿Qué figura crees que se forme al unir los 20 puntos construidos? 4. ¿Cómo podríamos construir 100, 1000, o 10000 puntos con esta característica? ***Posibles habilidades:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”* *“Construcción de representaciones del objeto matemático”* *“Transformación de representaciones del objeto matemático”.*	enfoque más algebraico.
Explicación 1	Una vez conceptualizada la hipérbola como lugar geométrico se definen los elementos de la misma y se da formalmente el nombre a la cónica. Ello se realiza mediante una representación estática de la hipérbola en el tablero. La explicación comienza pidiendo a los alumnos que expresen lo encontrado en las tareas anteriores. De allí, se mencionan de manera superflua las características generales de la hipérbola (curva abierta y simétrica respecto a dos ejes perpendiculares entre sí) con ayuda de los estudiantes.	El objetivo de esta fase es formalizar el nombre y los elementos de la sección cónica: hipérbola. Esta socialización es el primer paso para que los estudiantes se adentren en la deducción de la ecuación canónica de la hipérbola. Cabe resaltar que el estudio de los elementos de manera dinámica lo hacen los estudiantes de manera activa por lo cual esta explicación aún no da cuenta de dicho dinamismo.

	Luego, se vuelve a recordar la definición de la elipse y se procede con la descripción de sus elementos. En primer lugar, se define el punto centro y los focos. De allí se destacan los ejes: principal y secundario y las asíntotas. Cabe aclarar que todo ello se realiza a partir de la analogía con los elementos de la elipse, con el ánimo de comparar ambas cónicas en términos de semejanzas y diferencias. ***Posibles habilidades:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"* *"Interpretación de representaciones del objeto matemático"*	En este sentido, algunos de los elementos que se formalizan son los vértices, focos, ejes y asíntotas.
Exploración dirigida 2	**Tarea 3 (Parte 1)** El applet muestra en el plano cartesiano, el lugar geométrico de todos los puntos C, cuya diferencia de distancia a los puntos F1 y F2 es constante. Este lugar geométrico se llama HIPÉRBOLA. 1.Arrastre los puntos C, F1, F2, A; explore y analice variantes e invariantes entre los elementos de la sección cónica y el plano cartesiano. De clic en el botón inicio.	El propósito general de la tarea consiste en que el estudiante analice las características y relaciones de los elementos que componen una hipérbola desde diversas representaciones (partiendo principalmente de las gráficas hasta las algebraicas). La primera actividad proporciona al estudiante un medio de exploración en el que identifica qué valores permanecen constantes y cuales varían. Con el arrastre del punto C los estudiantes, dentro de una representación

	Figura 11. *Actividad tarea 3, hipérbola*  *Nota.* Representación geométrico-algebraica de la hipérbola. ***<u>Posibles habilidades:</u>*** *<u>“Reconocimiento de representación del objeto matemático”</u>* *<u>“Interpretación de representaciones del objeto matemático”</u>* *<u>“Construcción de representaciones del objeto matemático”</u>* *<u>“Transformación de representaciones del objeto matemático”</u>* *<u>“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.</u>*	gráfico/numérica, pueden observar la variabilidad de los valores e y d independientemente de donde se encuentre el punto A o los focos. Finalmente, con los puntos focales pueden notar variaciones respecto a la forma de la hipérbola, pues entre más corta sea la distancia focal las ramas tienden a ser más “rectas” y entre más alejados, son más “achatadas”, lo cual representa gráficamente la hipérbola.
Explicación 2	Una vez explorados los elementos de manera dinámica se discute con los estudiantes acerca de lo encontrado con preguntas del tipo: ¿Qué ocurrió al arrastrar el punto C? ¿Qué valores se mantuvieron constantes y cuáles variaron?, de manera análoga se procede con los demás puntos indagando en las	El objetivo de esta explicación es concretar las observaciones de los estudiantes de manera colectiva. La fase pretende recolectar el mayor número posible de observaciones e hipótesis de los estudiantes respecto a características físicas de la elipse

	características que logran destacar. Además, se realizan aclaraciones en lo que respecta a la notación algebraica para que den cabida al segundo paso con el ánimo de deducir la ecuación canónica de la hipérbola.	enriqueciendo de esta manera la representación gráfica, gestual y verbal del alumnado.
Exploración dirigida 3	**Tarea 3 (parte 2)** Responda las siguientes preguntas: 1. $¿A\ qué\ es\ igual\ \lvert d-e \rvert$? 2. $¿A\ qué\ es\ igual\ a^2+b^2$? Nota: En esta actividad los estudiantes pueden interactuar con el applet ya que con cada respuesta incorrecta se dan retroacciones que permiten al estudiante acercarse a la respuesta desde diferentes representaciones. Para la segunda pregunta las retroacciones dadas son: • Compare el valor de la diferencia |d-e| con cualquier valor de a y escriba la diferencia en términos de a. • Compare el valor de la diferencia d-e con el valor de a, ¿qué relación hay entre d-e y a para cualquier a? • Abra la vista “Hoja de Cálculo” y compare los valores de la diferencia |d-e| (columna C) con el valor de a (columna D). Mueva el	Con la segunda pregunta se pretende identificar algebraicamente con ayuda de representaciones numéricas, gráficas, algebraicas y escritas que el valor absoluto de la diferencia entre los puntos que conforman la hipérbola y sus focos es constante, y el valor de esa constante es 2a. Así mismo, se pretende que den cuenta de manera análoga que existe una relación pitagórica entre los valores de a, b y c. Cabe resaltar que para llegar a estas respuestas el estudiante tiene la posibilidad de realizar múltiples intentos y de ellos recibe interacciones del applet que guían paulatinamente al mismo hacia la solución.

punto A y P y compare, ¿qué relación existe?

Para la tercera pregunta las retroacciones son:

- Trace el segmento AE, mida su longitud y compárela con las distancias dadas. ¿Qué relación existe entre los segmentos a, b y c?
- ¿Qué relación existe entre a, b y c?

Tarea 4

Teniendo en cuenta que $|\overline{OA}| = a; |\overline{OB}| = b;\ |\overline{OF_1}| = c;\ |\overline{F_2C}| = d;\ |\overline{F_1C}| = e,\ |d - e| = 2a$ y $a^2 + b^2 = c^2$

Utilice las propiedades dadas de la hipérbola para deducir la siguiente fórmula de la hipérbola con centro en (0,0), focos F_1 y F_2, semieje mayor a y semieje menor b.

<u>Fórmula:</u>

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<u>***Posibles habilidades:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”*</u>

<u>*“Interpretación de representaciones del objeto matemático”*</u>

Finalmente, con esta actividad se busca que el estudiante deduzca la ecuación canónica de la hipérbola. Es necesario enfatizar que la actividad brinda la ecuación resultante (o la ecuación a la que deben llegar) ya que el objetivo de este trabajo investigativo consiste en indagar en las habilidades del proceso de representación por lo cual se valoran los procedimientos (principalmente algebraicos) que efectúan los estudiantes para llegar a la solución del problema planteado inicialmente. Puesto que es con la ecuación que realmente se construyen los 20 puntos pedidos inicialmente.

Para esta cónica no se planteó una

	“Construcción de representaciones del objeto matemático” *“Transformación de representaciones del objeto matemático”* *“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.*	tarea 4a como se hizo con la elipse debido a que para la deducción se usaban las mismas herramientas (propiedades, teoremas, entre otros). Sin embargo, se puede considerar la realización de esta tarea para constatar la claridad de los procedimientos algebraicos realizados en la elipse y con ello vislumbrar el entendimiento o no de las herramientas algebraicas usadas.
Explicación 3	Una vez que los estudiantes hayan realizado procedimientos algebraicos para determinar la ecuación se socializa con el grupo los resultados encontrados a partir de la participación activa mediada por orientaciones que indaguen sobre los pasos a tener en cuenta al determinar la ecuación. ***Posibles habilidades:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”.*	Este espacio tiene como propósito concretar la indagación de la precedente orientación dirigida. Aunado a ello, se pretende socializar en grupo con el ánimo de que cada estudiante verifique y/o conozca el proceso de deducción de la ecuación partiendo de su representación geométrica.
Exploración dirigida 4	**Tarea 5** Con ayuda del applet deduzca diferentes propiedades de la hipérbola. 1. ¿Cómo se comporta la hipérbola cuando $a < b$? ¿Cómo se comporta la hipérbola	El objetivo de esta actividad recae en el hecho de que los estudiantes exploren y comprendan diferentes propiedades de la sección cónica hipérbola.

cuando $b < a$?

2. Arrastra los deslizadores a y b y responde:

a) ¿Es posible que el valor de c sea mayor que a? Justifica tu respuesta.

3. ¿Una línea recta puede ser una hipérbola? Justifica tu respuesta.

Posibles habilidades: *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"*

"Interpretación de representaciones del objeto matemático"

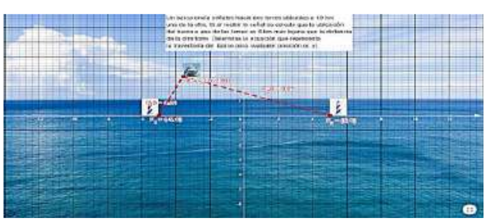
"Construcción de representaciones del objeto matemático"

"Transformación de representaciones del objeto matemático"

"Coordinación de representaciones del objeto matemático".

En primer lugar, se busca que el estudiante con las dos primeras cuestiones analice las características geométricas y algébricas de la hipérbola. Para ello, de manera particular, en la primera pregunta el estudiante debe observar que cuando a<b se obtiene una hipérbola alargada en el eje y. Así mismo, cuando b<a la hipérbola se achata vislumbrándose un alargamiento en el eje x.

El ítem de la segunda pregunta busca que el estudiante con ayuda de la relación pitagórica que tiene la hipérbola justifique que c no puede ser menor que a debido a que la hipotenusa no puede ser más pequeña que uno de los catetos. No obstante, debido a que los niveles de razonamiento y el uso de representaciones no es igual en todos los estudiantes también se puede esperar que justifiquen de manera gráfica y/o numérica que c no puede ser menor que a. Esto de manera informal abre paso al concepto de excentricidad de la hipérbola y con la respuesta a esta

		pregunta se deduce que este valor siempre será mayor a 1. Finalmente, con la tercera pregunta se busca que el estudiante analice un caso particular de la hipérbola que corresponde geométricamente a la mediatriz de la distancia focal, debido a que estos puntos cumplen con la propiedad de que el valor absoluto de la diferencia es constante y esa constante es igual a cero.
Tarea retadora	**¡Evaluemos lo aprendido!** Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas a 10 km una de la otra. Si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia de la otra torre. Determine la ecuación que representa la trayectoria del barco para cualquier posición (x, y) (Adaptado de Henriquez, 2020) **Figura 12.** *Tarea retadora, hipérbola*  *Nota.* Applet diseñado para la tarea retadora de la sección cónica hipérbola.	El fin último de esta tarea es que el estudiante use lo aprendido con las tareas previas y resuelva el problema planteado. Para hacerlo debe tener clara la definición de hipérbola como lugar geométrico con el fin de comprender que el contexto de la tarea retadora sitúa el barco en una hipérbola cuyo valor absoluto de la diferencia es de 6. Con esto claro obtienen el valor de a, siendo este igual a 3. Con ayuda de este valor y el dato proporcionado por el contexto del problema (las torres se distancian por 10 km, si se toman como los focos de una hipérbola, se tendría el valor de la semidistancia focal:

	Posibles habilidades: *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”* *“Construcción de representaciones del objeto matemático”* *“Transformación de representaciones del objeto matemático”* *“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.*	5) se puede hallar el valor de b (haciendo uso de la propiedad pitagórica que tiene la hipérbola) con el que se termina planteando la trayectoria sobre la que se mueve el barco.

Nota. Diseño secuencial del taller de hipérbola junto a las fases, actividades y objetivos.

6.3. Taller 3: Parábola

Las actividades diseñadas en este taller pretenden favorecer las habilidades del proceso de representación de la sección cónica parábola, entre las que se destacan principalmente las de carácter algebraico, numérico y gráfico. De manera general se busca que los estudiantes mediante la manipulación del software GeoGebra conciban la cónica como lugar geométrico y de allí deduzcan su representación algebraica atravesando por un análisis guiado. El núcleo del taller es el problema inicial, este punto de partida marca el camino de solución en el que paulatinamente el estudiante adquiere herramientas para acercarse por medio de las representaciones al objeto en estudio. (Ver en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/vthkxgmh)

Tabla 6.

Taller 3: Parábola

Fase	Actividad	Propósito
Información	Se presenta al estudiante el problema	Se busca que el estudiante acuda a sus

y exploración libre	inicial: *"Dados un punto A y una recta horizontal l (paralela al eje x) fijos, construya 20 puntos ($N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{20}$) de tal forma que equidisten de A y de l".* ***Posible habilidad:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático".*	presaberes y explore el problema para tratar de darle solución. Para esta exploración se le da la opción de trabajar con GeoGebra o a lápiz y papel. Sin embargo, al estar planteado como problema se pretende que no logre visualizar un camino de solución de manera inmediata.
Socialización de los resultados obtenidos	Discusión de las hipótesis planteadas por los estudiantes respecto al problema dado inicialmente. ***Posible habilidad:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático".*	Este espacio se abre con el ánimo de indagar en las concepciones, dificultades e ideas que tienen los estudiantes al abordar el problema. Por ejemplo, se puede encontrar que los estudiantes no relacionan el concepto de equidistancia con el problema planteado. También puede acontecer que un estudiante X conciba la construcción como un dibujo sin características y no como el producto de una representación que cumple con determinadas propiedades. Por otra parte, en términos de resultados es posible que basado en los talleres anteriores el estudiante relacione la directriz como un foco y encuentre el punto vértice, así como algunos otros puntos que hagan parte de una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo.

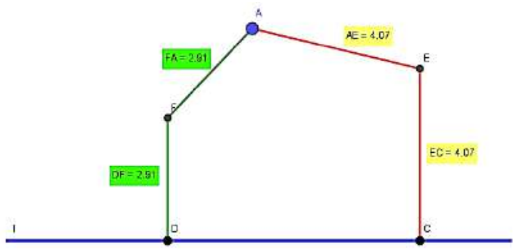
		Nota: Se tiene presente que en esta fase los estudiantes pueden tener dificultades en la comprensión del enunciado del problema.
Exploración dirigida 1	**Tarea 1** ¿A qué se refiere el enunciado cuando menciona que "los puntos equidistan de A y *l*"? Justifica Sugerencia: como ya se han abordado las cónicas de elipse e hipérbola previamente se puede volver a orientar con algunas de las indicaciones dadas allí, en especial la descrita en la pregunta dos que indaga por las distancias a las que refiere el problema. Así mismo se pueden proporcionar, de manera verbal, las indicaciones expuestas como sugerencia 1 y sugerencia 2 de la elipse. ***Posibles habilidades:*** *“Reconocimiento de representación del objeto matemático”* *“Interpretación de representaciones del objeto matemático”* *“Construcción de representaciones del objeto matemático”.*	El objetivo de esta tarea es encaminar al estudiante en la comprensión inicial del problema y al uso recursivo de habilidades de representación. Con ello, se pretende que el estudiante de cuenta de la única propiedad enunciada por el problema denominada equidistancia. Además, se pretende que a través de la exploración con GeoGebra el estudiante comience a idear estrategias para garantizar la equidistancia.

Tarea 2

Note que los puntos E y F cumplen la condición del problema inicial, analice la siguiente imagen y resuelva la actividad posteriormente planteada.

Figura 13.

Tarea 2, parábola



Nota. Representación gráfica planteada en la tarea 2, parábola.

1. Usando la imagen anterior idea un mecanismo que te permita obtener más puntos que cumplan las características del problema inicial. Discute con tus compañeros y profesor.
2. ¿Qué figura crees que se forme al unir los 20 puntos construidos?
3. ¿Cómo podríamos construir 100, 1000, o 10000 puntos con esta característica?

<u>Posibles habilidades:</u>

<u>“Reconocimiento de representación del objeto matemático”</u>

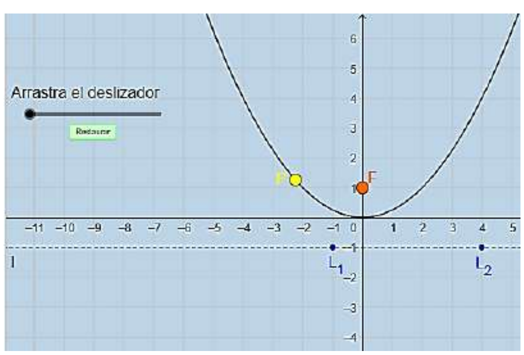
<u>“Interpretación de representaciones</u>

Una vez comprendido el enunciado del problema, se da inicio a la actividad dos, cuyo objetivo principal apunta a la concepción de la parábola como un lugar geométrico.

Con la primera instrucción se quiere que el alumno note que puede garantizar la equidistancia haciendo uso de conceptos previos como las propiedades del triángulo isósceles. Puesto que las distancias de las que habla el problema generan dos de los tres lados de un triángulo y estos tienen la propiedad de ser congruentes. Cabe resaltar que no todo triángulo isósceles permite hallar los puntos pedidos para ello el estudiante debe dar cuenta de la ubicación de los vértices de esos triángulos implicados, notando que uno de ellos es el punto A, el otro debe estar sobre la directriz y el punto final es que pide el problema.

Con la pregunta siguiente se espera que el alumno trate de bosquejar mediante cualquier representación (gestual, gráfica o verbal) la parábola. Finalmente, la cuarta pregunta se plantea para que el estudiante sienta la necesidad de realizar la construcción

	del objeto matemático” *“Construcción de representaciones del objeto matemático”* *“Transformación de representaciones del objeto matemático”.*	de este lugar geométrico, pero considerando un enfoque más algebraico.
Explicación 1	Una vez conceptualizada la hipérbola como lugar geométrico se definen los elementos de la misma y se da formalmente el nombre a la cónica. Ello se realiza mediante una representación estática de la elipse mediada por una presentación en diapositivas o en el tablero. La explicación comienza pidiendo a los alumnos que expresen lo encontrado en las tareas anteriores. De allí se mencionan de manera general las características generales de la parábola (curva plana, abierta y simétrica) con ayuda de los estudiantes. Luego, se vuelve a recordar la definición de la parábola y se procede con la descripción de sus elementos. En primer lugar, se define el punto focal y la directriz a continuación, se detalla en un punto particular que es el vértice y finamente se habla de la distancia p a partir de ejemplos con los que se permita la generalización de esta	El objetivo de esta fase es formalizar los elementos de la parábola, así como el nombre de este objeto matemático en estudio. Esta socialización es el primer paso para que los estudiantes se adentren en la deducción de la ecuación canónica de la parábola. Cabe resaltar que el estudio de los elementos de manera dinámica lo hacen los estudiantes de forma activa por lo cual esta explicación aún no da cuenta de este dinamismo.

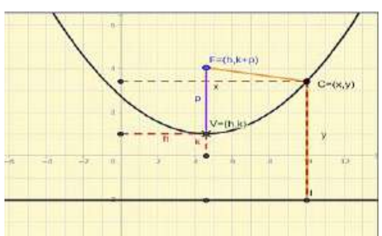
	distancia elemental. ***<u>Posibles habilidades:</u>*** *<u>“Reconocimiento de representación del objeto matemático”</u>* *<u>“Interpretación de representaciones del objeto matemático”</u>*	
Exploración dirigida 2	**Tarea 3** El applet muestra en el plano cartesiano, el lugar geométrico de todos los puntos P, que equidistan de un punto llamado foco (F) y de una recta llamada directriz (l). Este lugar geométrico se llama PARÁBOLA. Arrastre los puntos F, P, L_1, y L_2; Explore y analice variantes e invariantes entre los elementos de la parábola y el plano cartesiano. **Figura 14.** *Applet tarea 3 de la parábola*  *Nota.* Representación gráfica del applet de la tarea 3, sección cónica parábola. 1. ¿Qué sucede al arrastrar el punto F?	El propósito general de la tarea consiste en que el estudiante analice las características y relaciones de los elementos que componen una parábola desde las representaciones gráfica y aritmética principalmente. La primera actividad proporciona al estudiante un medio de exploración en el que identifica qué valores permanecen constantes y cuales varían. El valor de F determina la dimensión de la parábola puesto que entre más cercana se encuentre a la cónica más comprimida estará. Con el arrastre del punto P y el deslizador los estudiantes, dentro de una representación gráfico/numérica, pueden observar la variabilidad de las distancias que conforman la parábola independientemente de donde se encuentre el foco. Finalmente, con los puntos L_1 y L_2 pueden notar

	¿Qué elementos se mantienen invariantes?, ¿Qué elementos varían? JUSTIFIQUE 2. ¿Qué sucede al arrastrar el punto P?, ¿Qué elementos se mantienen invariantes?, ¿Qué elementos varían? JUSTIFIQUE Sugerencia: Use el deslizador para responder a las preguntas planteadas. 3. ¿Qué sucede al arrastrar los puntos L_1 y L_2? ¿Qué elementos se mantienen invariantes? ¿Qué elementos varían? JUSTIFIQUE ***Posibles habilidades:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"* *"Interpretación de representaciones del objeto matemático"* *"Construcción de representaciones del objeto matemático"* *"Transformación de representaciones del objeto matemático".*	variaciones de la parábola respecto a la directriz puesto que cuando es horizontal la parábola abre hacia arriba o abajo, cuando es vertical hacia la derecha o izquierda. Aunado a ello, puede observar que la orientación de la directriz puede ser oblicua, no obstante, debido a la complejidad que representa este caso no se estudiará a detalle en este taller dejándose sólo como un aspecto que cause curiosidad en el alumnado.
Explicación 2	Una vez explorados los elementos de manera dinámica se discute con los estudiantes acerca de lo encontrado con las preguntas de la tarea 3. Además, se realizan aclaraciones en lo que respecta a la notación algebraica para que den	El objetivo de esta explicación es concretar las observaciones de los estudiantes de manera colectiva. La fase pretende recolectar el mayor número posible de observaciones e hipótesis de los estudiantes respecto a

<table>
<tr>
<td></td>
<td>cabida al segundo paso con el ánimo de deducir la ecuación canónica de la parábola.

<u>Posibles habilidades:</u>

<u>“Reconocimiento de representación del objeto matemático”</u>

<u>“Interpretación de representaciones del objeto matemático”</u></td>
<td>características físicas de la parábola enriqueciendo de esta manera la representación gráfica, gestual y verbal del alumnado.</td>
</tr>
<tr>
<td>Exploración dirigida 3</td>
<td>Tarea 4
Teniendo en cuenta que $|\overline{FV}| = p$, utilice la propiedad dada de la parábola para deducir la siguiente fórmula de la cónica con vértice (h, k), foco F y directriz l.
Figura 15.
Applet de la tarea 4, parábola


Nota. Representación del applet usado para la deducción de la ecuación general de la parábola como lugar geométrico.
Realice a lápiz y papel los procedimientos algebraicos, teniendo en cuenta las propiedades métricas y</td>
<td>Finalmente, con esta actividad se busca que el estudiante deduzca la ecuación canónica de la parábola.
Es necesario enfatizar que la actividad brinda la ecuación resultante (o la ecuación a la que deben llegar) ya que el objetivo de este trabajo investigativo consiste en indagar en las habilidades del proceso de representación por lo cual se valoran los procedimientos (principalmente algebraicos) que efectúan los estudiantes para llegar a la solución del problema planteado inicialmente. Puesto que es con la ecuación que realmente se construyen los 20 puntos pedidos inicialmente.</td>
</tr>
</table>

	geométricas de la elipse y pegue el enlace de la imagen de su hoja de trabajo en la casilla de respuestas. ***<u>Posibles habilidades:</u>*** *<u>“Reconocimiento de representación del objeto matemático”</u>* *<u>“Interpretación de representaciones del objeto matemático”</u>* *<u>“Construcción de representaciones del objeto matemático”</u>* *<u>“Transformación de representaciones del objeto matemático”</u>* *<u>“Coordinación de representaciones del objeto matemático”.</u>*	
Exploración dirigida 4	**Tarea 4 (parte 2)** Para deducir la ecuación es necesario analizar la definición desde un sentido algebraico, ya hemos explorado su representación geométrica y textual. 1. Interprete la definición de la parábola de manera algebraica (Sugerencia: Use la notación vista en las tareas 3 y 4 y enfóquese en la condición que hace que estos puntos pedidos sean una parábola) *“Dados un punto A y una recta horizontal l (paralela al eje x) fijos, construya 20 puntos*	Con la actividad anterior es muy probable que los estudiantes no logren realizar la deducción de la ecuación. Es por ello, que se plantea una “actividad auxiliar” conformada por una serie de preguntas presentadas al estudiantado de manera oral. Esta tarea apunta al mismo objetivo de la anterior, pero posee más instrucción. No obstante, debe tenerse presente que las instrucciones se darán a medida que el alumno avance y no de manera general para el grupo ya que

	($N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{20}$) de tal forma que equidisten de A y de l". 2. Para hallar la longitud de un segmento horizontal o vertical en el plano cartesiano sólo debemos "contar cuadros". Sin embargo, para encontrar la longitud de un segmento con orientación diagonal dentro del plano cartesiano no solo basta con contar. ¿Cómo se puede determinar la longitud de un segmento con orientación diagonal? 3. Use el applet para dar respuesta a la pregunta anterior	existe la posibilidad de que algún alumno necesite todas las orientaciones, así como que solo necesite una o dos.
Explicación 3	Una vez que los estudiantes hayan realizado procedimientos algebraicos para determinar la ecuación se socializa con el grupo los resultados encontrados a partir de la participación activa mediada por orientaciones que indaguen sobre los pasos a tener en cuenta al determinar la ecuación. ***Posibles habilidades:*** *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"* *"Interpretación de representaciones del objeto matemático".*	Este espacio tiene como propósito concretar la indagación de la precedente orientación dirigida. Aunado a ello se pretende socializar en grupo con el ánimo de que cada estudiante verifique y/o conozca el proceso de deducción de la ecuación partiendo de su representación geométrica.

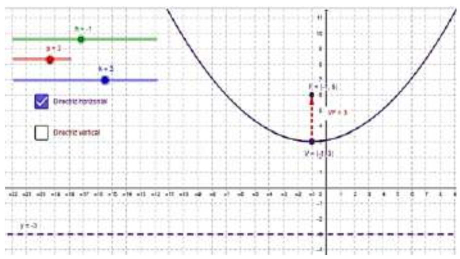
Exploración dirigida 5

Tarea 5

Con ayuda del applet deduzca diferentes propiedades de la parábola.

Figura 16.

Applet de la exploración dirigida 5, parábola



Nota. Applet de la exploración dirigida 5 del caso de la parábola.

1. Teniendo en cuenta la directriz horizontal, ¿Qué sucede cuando p<0? ¿Qué sucede cuando p>0?, ¿Qué sucede cuando p=0?

2. Teniendo en cuenta la directriz vertical, ¿Qué sucede cuando p<0? ¿Qué sucede cuando p>0?, ¿Qué sucede cuando p=0?

3. La ecuación de la parábola con vértice (h, k) y directriz paralela al eje x está dada por $(y-h)^2 = 4p(x-k)$. Así mismo la ecuación de la parábola con vértice (h, k) y paralela al eje y está dada por $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Compare las características de ambas ecuaciones y socialice en clase sus hallazgos.

El objetivo de esta actividad recae en el hecho de que los estudiantes exploren y comprendan diferentes propiedades de la sección cónica parábola.

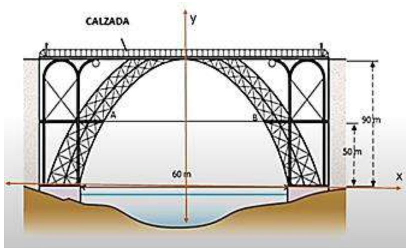
En primer lugar, se busca que el estudiante con las dos primeras cuestiones analice las características geométricas y algébricas de la parábola con directrices horizontales y verticales. Para ello, de manera particular, en la primera pregunta el estudiante debe observar que cuando p<0 las ramas de la parábola apuntan hacia la izquierda, de manera contraria acontece cuando p>0. Así mismo, cuando p=0 se obtiene una recta perpendicular a la directriz o paralela al eje y, qué pasa por el vértice. De manera análoga sucede con la pregunta dos.

Con la tercera actividad los estudiantes deberían dar cuenta de la orientación de la parábola según la ecuación proporcionada. Es decir, se espera que deduzcan que el eje elevado al cuadrado (sea y o x) indica la orientación de la parábola, de allí, con la primera ecuación se obtienen parábolas con directriz horizontal que

	Posibles habilidades: *"Reconocimiento de representación del objeto matemático"* *"Interpretación de representaciones del objeto matemático"* *"Construcción de representaciones del objeto matemático"* *"Transformación de representaciones del objeto matemático"* *"Coordinación de representaciones del objeto matemático".*	abren hacia arriba o abajo y con la segunda ecuación resultan parábolas con directriz vertical que abren hacia los lados.
Tarea retadora	**¡Evaluemos lo aprendido!** Un ingeniero diseña un proyecto para descongestionar el parque san pio en Bucaramanga Santander, para lo cual diseña un puente de forma parabólica de 90m de alto y 60m de base (ver figura). Determina: a) La ecuación general de la parábola que forma el puente. b) La longitud del segmento AB, que está a una altura de 50m de la base del puente.	El fin último de esta tarea es que el estudiante use lo aprendido con las tareas previas y resuelva el problema planteado. Para hacerlo debe tener clara la definición de parábola como lugar geométrico con el fin de comprender que el contexto de la tarea retadora involucra las propiedades de esta cónica. En primer lugar, debe analizar la representación gráfica y de allí extraer información como el vértice de la parábola, coordenadas de los puntos solicitados en la solución del problema (A y B), entre otras características. En segundo lugar, para construir la

Figura 17

Representación gráfica, tarea retadora parábola

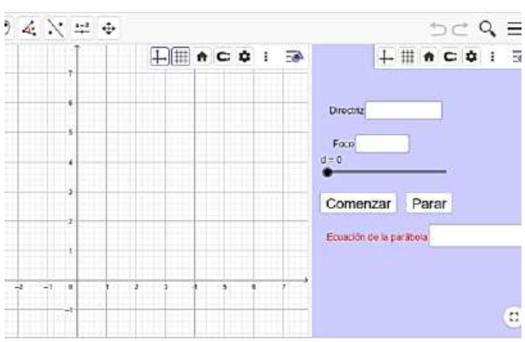


Nota. Representación gráfica de la situación problema.

Use el applet a continuación para encontrar la respuesta. Explore los valores de la posible directriz y el posible foco que da solución al problema planteado. Al finalizar verifique su respuesta insertando la ecuación de la parábola resultante en la casilla final.

Figura 18.

Applet tarea retadora, parábola



Nota. Representación del applet ecuación de la parábola necesita comprender que la directriz en este caso es horizontal y el valor de p es negativo ya que la parábola abre hacia abajo.

Finalmente, en lo que atañe a la construcción de la ecuación el estudiante debe usar la información extraída del registro gráfico para consolidar la misma: $x^2 = -10(y - 90)$.

Ahora bien, con la ecuación planteada se realiza una transformación del registro algebraico al aritmético para resolver el ítem b. Esto se hace usando las coordenadas de los puntos A y B, no obstante, para plantearlas debe tener presente que el valor de y se conoce mientras que el de x debe hallarlo, pero ello se consigue con el uso de la propiedad simétrica de la parábola.

Cabe resaltar que en caso de no saber el camino de solución se presenta el applet que sirve como guía para acercarse a la deducción de la ecuación mediante la experimentación brindando así diversidad de registros para solventar el problema en cuestión.

planteado en la tarea retadora, parábola.

Posibles habilidades:

"Reconocimiento de representación del objeto matemático"

"Interpretación de representaciones del objeto matemático"

"Construcción de representaciones del objeto matemático"

"Transformación de representaciones del objeto matemático"

"Coordinación de representaciones del objeto matemático".

Nota. Diseño secuencial del taller de parábola junto a las fases, actividades y objetivos.

7. Análisis intercalados con la experimentación

En esta sección se realiza un análisis de los hallazgos encontrados en las respuestas de los estudiantes a la secuencia didáctica planteada. Estos descubrimientos se vislumbran en las videograbaciones realizadas, las producciones escritas tomadas de cada uno de los talleres ejecutados y las hojas de procesos que utilizaron los estudiantes para responder a algunos apartados de cada taller. Cabe destacar que este análisis se estructura en torno a las fases descritas por Fiallo y Parada (2018) con el ánimo de vislumbrar la eficacia de estructurar la clase de esta manera.

Aunado a lo anterior se realiza un análisis de lo visto en el diagnóstico debido a que, de allí, surgen nociones importantes que más adelante usan los estudiantes en la resolución de los talleres.

7.1. Diagnóstico

La prueba diagnóstica fue planteada con el fin de conocer las posibles dificultades presentes en la ejecución del proyecto por parte de los estudiantes de grado décimo. En esta prueba se presentan situaciones matemáticas en las cuales deben aplicar conceptos como calcular distancias con teorema de Pitágoras, operaciones algebraicas, mediatriz, entre otros. Siendo ello, un factor principal para llevar acabo de manera eficiente los talleres planteados en la secuencia didáctica para cada una de las secciones cónicas a trabajar.

Tabla 7.

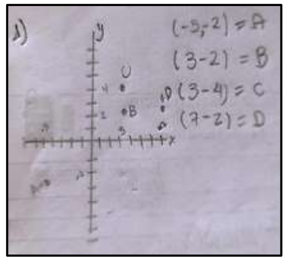
Resultados de la aplicación de la prueba diagnóstica

Objetivo	***Resultados***
La aplicación de la prueba diagnóstica se plantea con una duración de 60 minutos, en esta se indaga de manera implícita sobre los conceptos de: plano cartesiano, teorema de Pitágoras, ley de signos, jerarquía	Del análisis se extrae un listado de dificultades por cada tarea, aunque se tienen más observaciones de la primera ya que muy pocos estudiantes lograron llegar hasta la tercera. De la tarea 1 se observaron dificultades respecto a tres ejes: plano cartesiano, comprensión lectora y estrategias experimentales. Dentro del primer eje se destaca que al menos un 40 por ciento de los estudiantes presentaban confusión al determinar cuál eje hacía referencia a “x” y cuál a “y. De la misma manera, se vislumbra que más de la mitad del salón no sabían ubicar puntos en el plano cartesiano confundiendo la ordenada con la abscisa y viceversa” (como se evidencia en la Figura 19).

de las operaciones, operaciones algebraicas y el concepto de mediatriz. La prueba se estructura por tareas con objetivos específicos encaminados principalmente a la comprensión y aplicación de diferentes conceptos matemáticos necesarios para la ejecución de la secuencia didáctica sobre las secciones cónicas. En este orden de ideas, el objetivo de la primera tarea consiste en vislumbrar algunos conocimientos previos que tienen

Figura 19.

Solución 1 de la actividad 1, diagnóstico

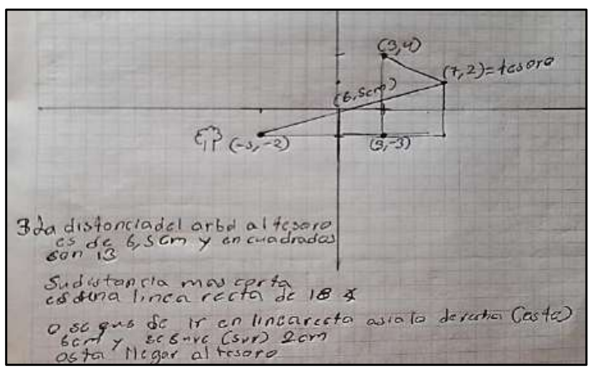


Nota. Dificultad en la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

En lo que atañe al segundo eje se destaca la poca o casi nula comprensión del enunciado del problema, ello se evidencia en las justificaciones de algunos alumnos puesto que al segundo ítem de esta tarea en donde se pedía la suma de todas las distancias recorridas, hallaron la distancia directa como se vislumbra en la Figura 20.

Figura 20.

Solución 2 de la actividad 1, diagnóstico



Nota. Dificultad en el cálculo de la distancia total dentro del plano cartesiano.

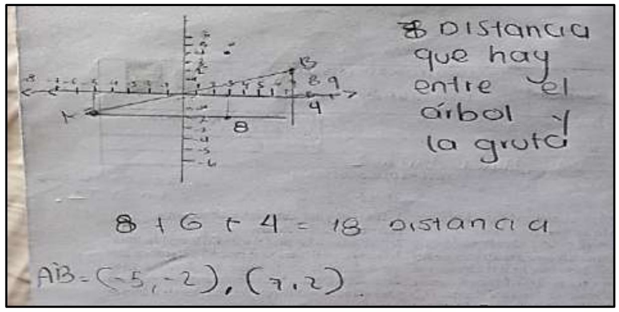
Finalmente, respecto al tercer eje se encontró que algunos alumnos para encontrar el valor de la distancia tomaron la regla y midieron la longitud sin contar con que la escala de la regla y el plano cartesiano coincidieran.

los estudiantes en cuanto a ubicación en el plano cartesiano y uso del teorema de Pitágoras (para hallar distancias), así mismo la tarea busca las posibles estrategias que usan los estudiantes para dar respuesta a las actividades teniendo en cuenta recursos como lápiz, papel, regla o incluso celular.

Seguido a ello, con la tarea dos se quiere observar los conocimientos que tienen los estudiantes para resolver operaciones con expresiones algebraicas, de allí, se destacan principalmente la

Figura 21.

Solución 3 de la actividad 1, diagnóstico

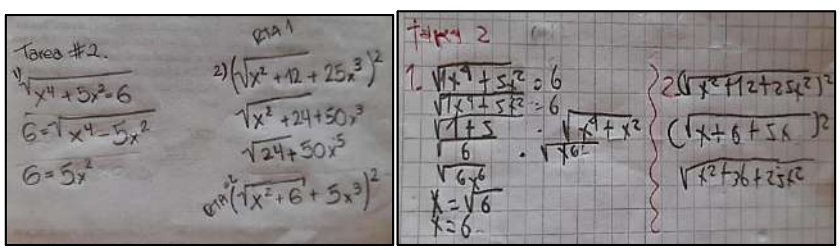


Nota. Dificultad en el cálculo de la distancia entre dos puntos dentro del plano cartesiano.

Ahora bien, en la segunda tarea respecto a las hojas de respuesta se encontró que sólo el 15% de los estudiantes intentó realizarla. Del 85% restante al menos un 70 por ciento leyó el ejercicio, pero manifestó no saber qué hacer ni cómo empezar. Las dificultades en esta tarea giran en torno al desconocimiento de la jerarquía de las operaciones y las reglas para operar relaciones algebraicas (algunos de estos ejemplos se exponen en la Figura 22).

Figura 22.

Soluciones actividad 2, diagnóstico



Nota. Dificultad encontrada en el orden y tratamiento de operaciones algebraicas.

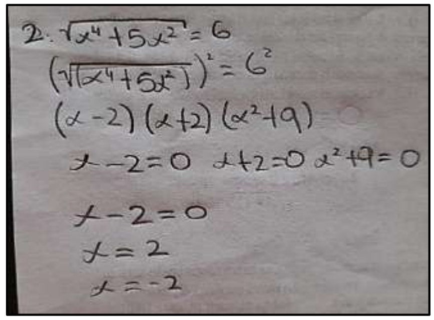
Cabe resaltar que no se impusieron limitaciones sobre el uso de celulares o dispositivos para realizar las operaciones (se puede observar un ejemplo de ello en la Figura 23).

jerarquía de las operaciones, la ley de signos, propiedades de la potenciación y los casos de factorización (Trinomio cuadrado perfecto y factor común); conceptos importantes que se necesitarán en las siguientes fases de la implementación para determinar de manera algebraica la representación de las secciones cónicas.

Finalmente, con el planteamiento de la tarea 3 se busca que el estudiante aplique la definición de mediatriz para hallar los puntos que cumplen la propiedad del

Figura 23.

Solución 3 de la actividad 2, diagnóstico

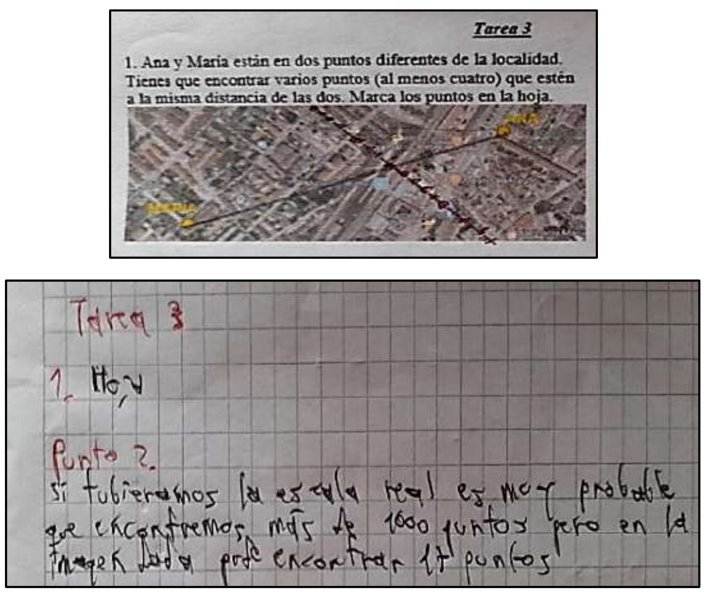


Nota. Solución planteada a la actividad 2 del diagnóstico teniendo en cuenta el uso de tecnología.

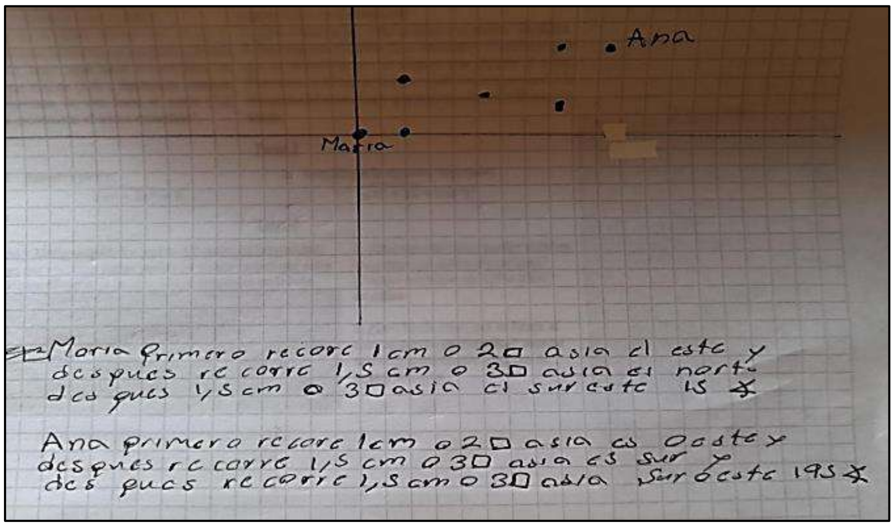
Finalmente, de la tarea tres se destaca que uno de los estudiantes encontró algunos puntos pedidos, no obstante, con la respuesta al ítem 2 se vislumbran dificultades con la propiedad geométrica: “toda recta se conforma de infinitos puntos”.

Figura 24.

Solución 1 de actividad 3, diagnóstico



Nota. Representación gráfica y mediante el lenguaje natural de la actividad 3 del diagnóstico en la se vislumbra la dificultad de no concebir la recta como la unión de infinitos puntos.

problema; ello debido a que es un concepto importante para la secuencia didáctica de la sección cónica: parábola.	Otro estudiante tuvo dificultades con la interpretación de la imagen dada en la tarea por lo cual obtuvo una respuesta diferente a la esperada. Cabe resaltar que esta tarea fue leída y pensada por más de la mitad del salón, pero no se expresó nada respecto a la solución por ningún medio (oral o escrito). **Figura 25.** *Solución 2 de la actividad 3, diagnóstico*  *Nota.* Dificultad en la comprensión de la actividad 3 del diagnóstico.

Nota. En esta tabla se encuentran los resultados de la prueba diagnóstica, en la cual se destacan los resultados más relevantes.

7.2. Taller de elipse

En este apartado se dan a conocer los resultados más relevantes en la ejecución de la secuencia de la elipse con el fin de categorizarlos en las habilidades propuestas por Rueda (2016). Cabe resaltar, que para cada una de las fases se acentúa en aquellas producciones que se encuentran más cercanas al cumplimiento del objetivo propuesto para cada actividad. Es por ello que el análisis se centra principalmente en la cantidad de registros de representación presentados por cada estudiante, así como en el cumplimiento del objetivo.

7.2.1. Fase de exploración y orientación libre

Para esta fase fue planteado el problema inicial de la elipse con el fin de que los estudiantes exploraran y dieran uso a sus presaberes para acercarse a una posible solución del problema. A partir de las producciones de los alumnos se distinguen los obstáculos o dificultades encontrados en el aula de clase. Por esta razón, en la tabla 8 se dan a conocer los resultados más relevantes de esta fase con respecto al objetivo planteado de la misma.

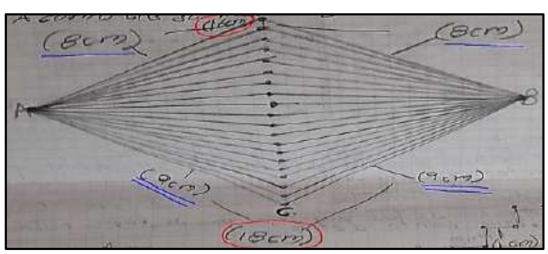
Tabla 8

Resultados fase de información y exploración libre para el caso de la elipse

<table>
<tr><th>Objetivo</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td>Se busca que el estudiante acuda a sus presaberes y explore el problema para tratar de darle solución. Para esta exploración se le da la opción de trabajar con GeoGebra o a lápiz y papel. Sin embargo, al estar planteado como problema se pretende que no logre visualizar un camino de solución de</td><td>Del taller se recoge que una de las nociones presentadas como solución al problema planteado es con el concepto de “mediatriz”, el cual se da mediante la valoración por familiariadad a partir de la socialización de la prueba diagnóstica. De esta manera, se logra evidenciar que el estudiante se enfoca en la construcción de puntos que se encuentren a la misma distancia tanto de A como de B mediante su representación gráfica, sin embargo, no tiene en cuenta que el problema indaga sobre el valor constante, producto de la suma de dichas distancias (de los puntos construidos con respecto a A como a B), esto se ve cuando determina la suma de las distancias para dos de los puntos construidos y estos valores son diferentes.

Figura 26.

Solución 1 (fase de exploración libre), elipse



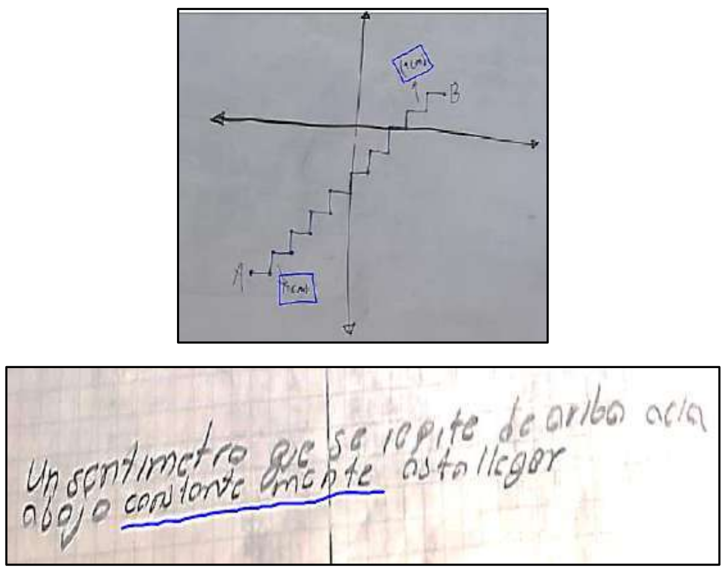
Nota. Representación por familiaridad al problema inicial de la sección cónica elipse.</td></tr>
</table>

manera inmediata.	Otra interpretación de este enunciado alude a un particular énfasis del problema en la propiedad de ser constante, el estudiante 1 afirma que la distancia entre cada punto construido respecto a otro debe ser la misma durante el recorrido de A hasta B. En palabras de la estudiante se tiene la siguiente interpretación del enunciado del problema:

> *-Estudiante 1: Esta, pues cada una la hice entera y que llegué a un punto (señala la representación e indica las distancias a las que se refiere) el total es de 20 puntos (señala la distancia de A a B) y la distancia que hay de uno a otro pues es de un centímetro y pues forma una escalera.*

Figura 27.

Solución 2 (fase de exploración libre), elipse



Nota. Representación de la posible solución del problema inicial de la elipse mediante un registro de lenguaje natural y gráfico.

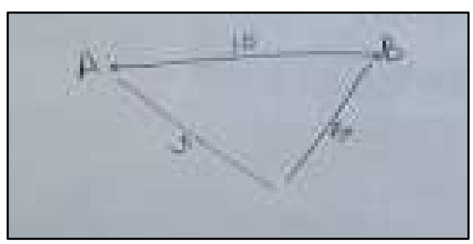
De esta convicción, se acentúa el uso de varias representaciones como la verbal, gestual, gráfica y escrita, generadas a partir de la noción del concepto “constante” entendido como “cantidades iguales”. Además de esto, se logra determinar que la distancia que toman como base principal es la de A hasta B y a partir de ello, construyen un recorrido teniendo en cuenta que la distancia entre cada par de puntos es igual. Es preciso señalar que estas distancias de un centímetro la realizan de manera horizontal y vertical fundamentadas en lo recogido durante la socialización del diagnóstico pues allí se enfatizó que dentro del plano cartesiano las distancias de este tipo se determinaban por conteo de unidades mientras que las distancias en cualquier otra orientación se determinan mediante la fórmula de distancia o el teorema de Pitágoras.

En este orden de ideas, se resalta la construcción de un triángulo isósceles con el fin de garantizar que la medida de la distancia de A hasta un punto N_1 y de B hasta el mismo punto, sea igual. Así mismo, para la construcción se considera que el perímetro del triángulo es de 20 unidades haciendo referencia a la cantidad de puntos que se les pedía construir. Esto se evidencia en la explicación dada por el estudiante:

> -*Estudiante 2: Yo tomé esta distancia (dibuja los puntos A, B y traza la distancia entre ellos) y supongamos que era 10 (anota el número 10 sobre el segmento que demarca la distancia), ammmm…acá hay 5 y acá hay cinco (dibuja dos segmentos que parten de A como de B y genera un triángulo isósceles) para que estos dieran 20.*

Figura 28.

Solución 3 (fase de exploración libre), elipse

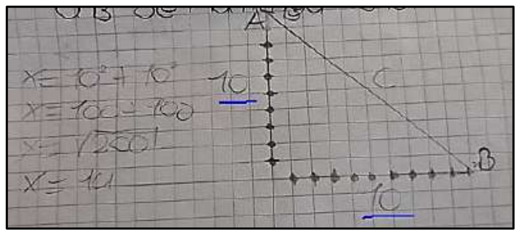


Nota. Dificultad encontrada en la solución del problema inicial de la elipse al concebir el perímetro del triángulo como 20 unidades resaltando que así se construye la totalidad de puntos. Ello, mediante un registro gráfico y de lenguaje natural.

A partir de lo descrito y explicado por la alumna se puede interpretar que la distancia AB se comporta como 10 puntos y cada una de las distancias del punto C hasta A como a B es de 5 puntos, lo cual da como total, 20 puntos. Seguido a esto, se presenta otra idea en relación con un triángulo y para ello los alumnos acudieron a conceptos vistos previamente en el diagnóstico, como fue el "teorema de Pitágoras".

Figura 29.

Solución 4 (fase de exploración libre), elipse

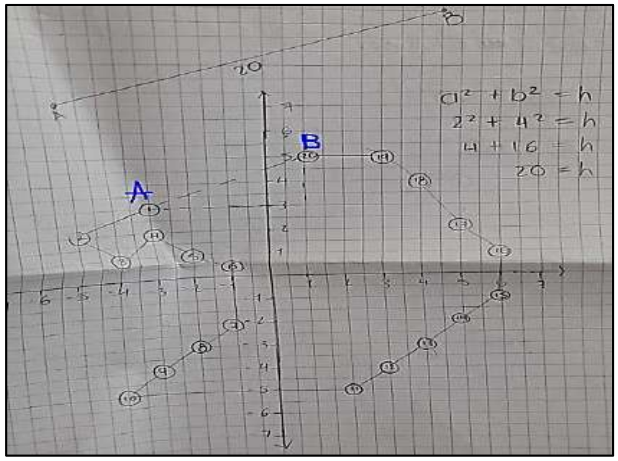


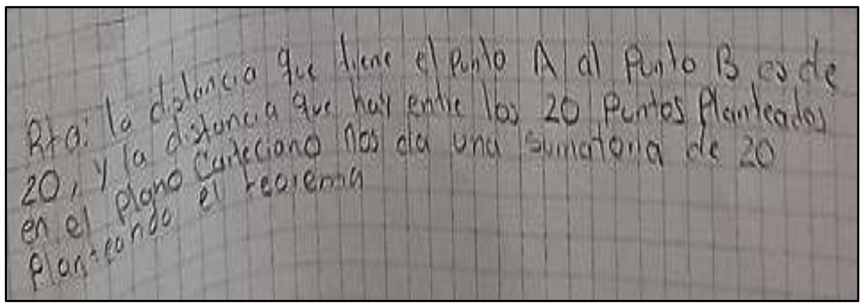
Nota. Dificultad al acudir al teorema de Pitágoras de manera incorrecta.

Obviando los errores que tienen estos alumnos respecto a la notación, se tiene un reconocimiento por familiaridad en el que asocian la suma de cuadrados con la suma de distancias a la que alude la situación problema. Los estudiantes de este grupo de trabajo tienen presente que la suma de los cuadrados de los lados (catetos) es igual al cuadrado del lado más largo (hipotenusa). De esta manera, plantean que si tienen dos lados de 10 y 10 entonces eso sería igual 20 puntos y según el teorema de Pitágoras la suma de estos lados al cuadrado será igual al otro lado al cuadrado por lo cual afirman que su razonamiento es correcto, ya que las distancias al igual que los cuadrados tienen algo en común: son positivas siempre. De manera análoga a la idea anterior se tiene otro grupo que media la solución de manera gráfica y escrita con ayuda del teorema de Pitágoras:

Figura 30.

Solución 5 (fase de exploración libre), elipse





Nota. Dificultad en la comprensión del problema inicial de la elipse y el mal uso del teorema de Pitágoras.

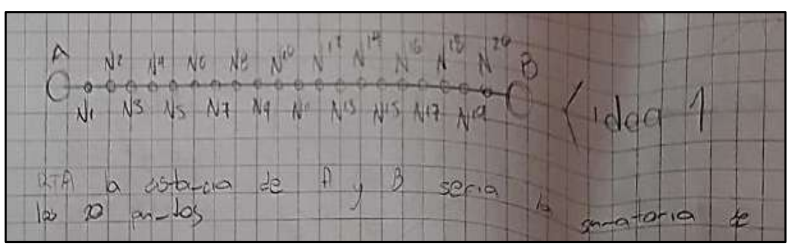
Nótese que en dichas representaciones se establece que la distancia de A hasta B es de 20 y luego se busca construir un triángulo rectángulo con hipotenusa AB. Para ello, plantean que $a^2 + b^2 = h$ determinando que $a = 2$ y $b = 4$ para obtener que $2^2 + 4^2 = 20$ garantizando que la distancia AB se mantiene con un valor de 20. Seguido a esto, se quiere construir los 20 puntos que pide el problema y para esto el punto A lo definen como 1 y el punto B como 20, por lo tanto, construyen otros 18 puntos como se ve en la Figura 30. De esta manera, concluyen que la suma de los puntos es de 20 y que la distancia entre los puntos dados A y B también tienen el mismo valor, lo cual lo relacionan con la noción de ser constante o igual.

Otro punto de vista de este problema lo ofrece el estudiante 4 socializando en el tablero la siguiente idea:

> -*Estudiante 4: Me están indicando acá (señala el enunciado escrito en el tablero) ósea los puntos fijos que son… bueno (dibuja en el tablero los puntos A y B) A y B entonces, ósea que tenemos que encontrar la manera de que… la suma de estas distancias sea tanto a A como a B ósea que sean iguales, ósea al momento en que yo quiero ósea la A en otra posición, bueno, yo lo entendí así (dibuja la distancia entre los puntos A y B y señala que los puntos están dentro de la línea que dibujó) una línea y cada uno de los 20 puntos… ehh que sea la distancia, ósea digamos el primer punto de A al primer punto (señala una distancia dentro de la línea dibujada que comienza desde A hasta lo que el supone es el primer punto que busca) sea cierta punto y que la suma de cada uno de esos puntos nos de la distancia recorrida, digamos acá colocamos 72 (dibuja el número 72 debajo del segmento AB) esto… cada puntico de la sumatoria me debe dar 72.*

Figura 31.

Solución 6 (fase de exploración libre), elipse



Nota. Representación de los 20 puntos sobre el segmento $\overline{AB}$ tomado como el valor de la suma constante.

Aquí, se evidencia que este grupo de estudiantes se enfoca en la suma constante de las distancias constituidas por los puntos pedidos respecto a A como a B. Es por ello que construyen los 20 puntos sobre el segmento que une a A y B, teniendo presente que la suma de las distancias de estos puntos

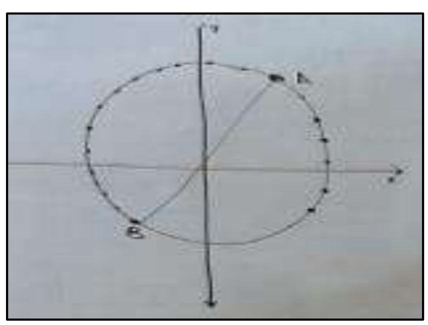
$(N_1, N_2, \ldots, N_{20})$ con respecto a A como B debe tener un valor que no varíe a menos que A y B varíen. Es decir, si se le da un valor de 72 a la magnitud entre A y B entonces se cumple que $\overline{AN} + \overline{NB} = 72$ para cualquier valor de $N \in (N_1, N_2, \ldots, N_{20})$, de esta manera el valor de la constante para las distancias involucradas en todo punto construido es el valor de $\overline{AB}$.

Finalmente, otra de las ideas que se logra destacar es la que involucra un reconocimiento por familiaridad con respecto al concepto de círculo. Esto enfocándose en la propiedad de que la distancia del punto centro a cualquier punto sobre el círculo siempre es la misma, es decir, que se mantiene constante.

Por esta razón, construyen los 20 puntos sobre el círculo destacando la propiedad de que toda distancia del centro a cualquier punto siempre es el radio lo cual se mantiene constante y por lo tanto el diámetro también. A partir de las propiedades que tienen logran plantear que las distancias a las que hace referencia el problema, son aquellas, que se determinar a partir de trazar el diámetro uniendo dos puntos siendo siempre la misma magnitud. Sin embargo, cabe destacar que los estudiantes no se enfocan en las distancias de estos puntos con respecto a A como a B sino que las toman por separado teniendo en cuenta que AB es una distancia igual a $\overline{N_1N_2}$ para todo par de $N \in (N_1, N_2, \ldots, N_{20})$ diferentes sobre el círculo.

Figura 32.

Solución 7 (fase de exploración libre), elipse



Nota. Dificultad al definir como distancias iguales $AB = N_1N_2 = N_3N_4$ sobre una circunferencia.

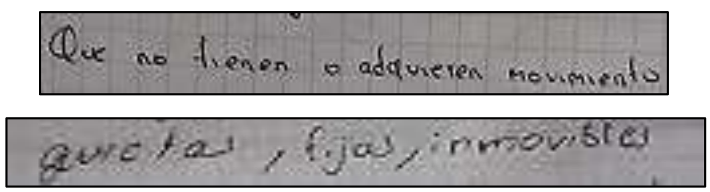
Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados destacados de la primera fase de exploración libre.

7.2.2. Exploración dirigida 1

En la esta fase se plantean y socializan las preguntas destacadas en el diseño de las actividaes de la sección cónica elipse con el fin de comprender el enunciado y encaminar a los estudiantes a la posible solución del problema. Esto debido a que la mayor parte del estudiantado no tuvo en cuenta todo lo que pide el enunciado, enfocándose únicamente en una o dos características del problema (constante, suma o distancias).

Tabla 9.

Primeros resultados de la fase de exploración dirigida 1 para el caso de la elipse

Objetivos	Resultados
La primera pregunta de la tarea 1 tiene como propósito que el alumno vea un punto de partida para interpretar el enunciado. En segundo lugar, la condición de ser puntos fijos debería interpretarse gráficamente como dos puntos que mantienen su distancia. Se considera necesario el énfasis en esta cuestión ya que al estar en un ámbito dinámico se pueden generar interpretaciones erróneas debido a la opción de arrastre que tiene el software.	En la práctica de la primera pregunta se evidencia que la mayoría de los estudiantes tienen clara la noción de puntos fijos, presentando definiciones como las siguientes: **Figura 33.** *Solución 1 (Fase de exploración dirigida 1), elipse*  *Nota.* Respuestas a la cuestión: ¿Qué son puntos fijos? (Como se vislumbra no se encuentran dificultades en esto, por lo tanto se continúa con las demás cuestiones y sugerencias)

La segunda pregunta de la tarea 1 busca que el estudiante enfatice en las distancias a las que se refiere el problema. Ello debido a que al apoyarse de una vista gráfica la única distancia que conciben inicialmente es la de los puntos dados A y B.

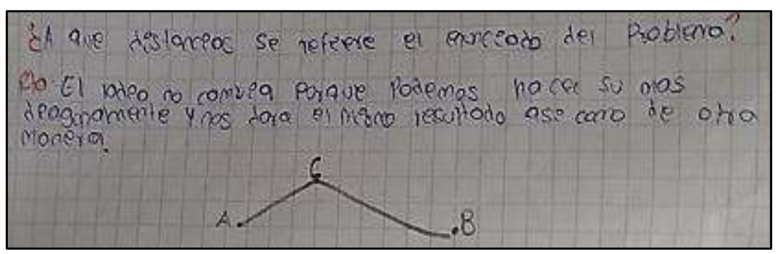
Teniendo esto en cuenta se realizan dos sugerencias de manera verbal encaminadas a la solución de esta segunda cuestión. Esto debido a que puede presentarse la situación en donde un estudiante conciba que las distancias de las que habla el problema son aquellas comprendidas entre un par de puntos del conjunto $(N_1, N_2, \ldots, N_{20})$.

En relación con la segunda cuestión presentada se obtuvieron diferentes aportes de manera gráfica y escrita en relación con las distancias a las que se refiere el enunciado. En una primera instancia gran parte del salón menciona únicamente la distancia AB, sin embargo, con la sugerencia planteada otorgan otras respuestas.

En la Figura 34, se destaca de manera escrita la idea inicial de los estudiantes y de manera gráfica la segunda idea producto de la sugerencia otorgada. Inicialmente los estudiantes manifiestan que la distancia de la cual habla el enunciado es del radio pues por las propiedades de circunferencia se tiene que el radio para cualquier punto es el mismo, es decir, lo consideran como constante. Una vez leída la sugerencia de manera gráfica muestran una noción más clara de las distancias a las que se refiere el problema.

Figura 34.

Solución 2 (Fase de exploración dirigida 1), elipse

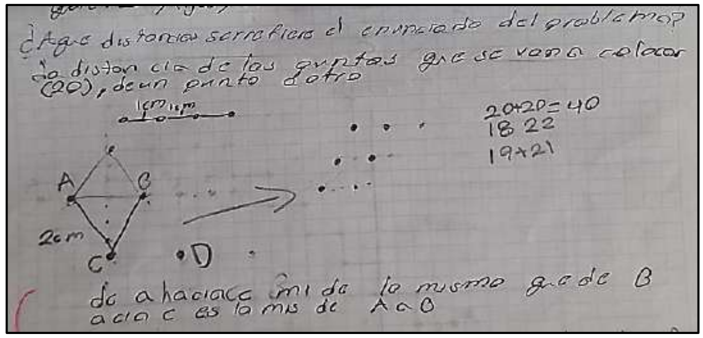


Nota. Respuesta planteada al hablar de las distancias que involucra el problema inicial de la elipse.

Otro fruto del orden de la secuencia se evidencia con el estudiante 1 quien inicialmente plantea concebir las distancias entre los 20 puntos construidos sin dar cuenta que estas son con respecto a los puntos dados (A y B), es decir, hacen referencia a las distancias $AC, CB, BD, \ldots$ destacando que dichas distancias son iguales a la distancia AB como se muestra en la Figura 35.

Figura 35.

Solución 3 (Fase de exploración dirigida 1), elipse

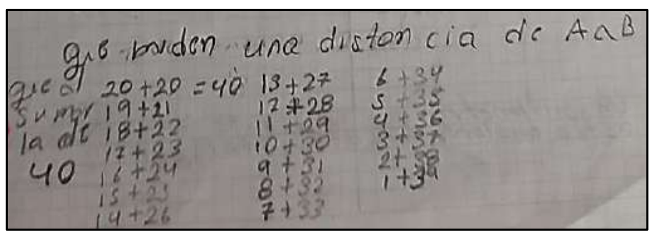


Nota. Dificultad en la comprensión de las distancias que tiene cada punto construido con respecto a A como a B.

Seguido a esto, la misma estudiante luego de la socialización que se hizo con la docente plantea una nueva idea referente a las distancias implicadas en el problema, ello teniendo en cuenta que la suma constante debe ser el valor de la distancia entre A y B.

Figura 36.

Solución 4 (Fase de exploración dirigida 1), elipse



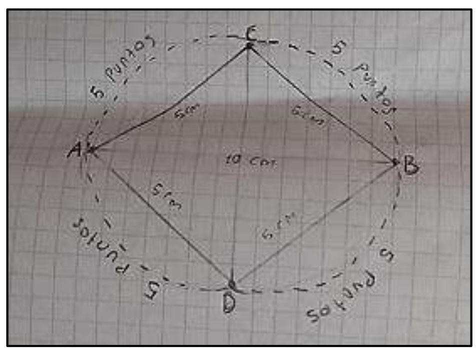
Nota. Dificultad en la representación tabular de la suma contante.

Con lo anterior, se logra destacar que la estudiante al considerar el valor $\overline{AB}$ como la constante plantea de manera “tabular” unos posibles valores que deben tener las distancias de los puntos construidos con respecto a A como a B, dando de manera inmediata respuesta a la cuestión de la suma constante. Esto lo hace dando un valor de 40 a las distancia entre los puntos dados AB.

De esta misma pregunta surgen otras dos ideas en las que se resalta la representación gráfica y el reconocimiento por familiaridad de figuras previamente exploradas como lo son la circunferencia y el cuadrado. En la Figura 37 los estudiantes plantean D como el simétrico de C. Allí, dan cuenta que las distancias de estos puntos con respecto a A como a B son iguales, es decir, $\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{DA} = \overline{DB} = 5\,cm$ destacando que la suma de las distacias comprendidas con los puntos C y D es igual al valor de la distancia entre A y B. Esto en términos algebraicos es $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{DA} + \overline{DB} = \overline{AB} = 10cm.$

Figura 37.

Solución 5 (Fase de exploración dirigida 1), elipse



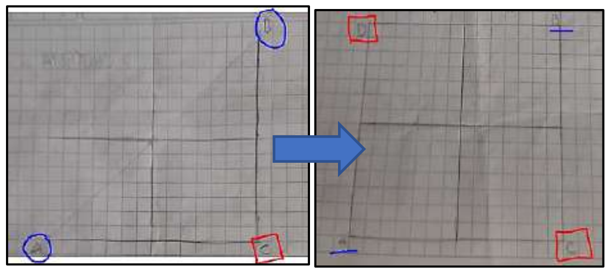
Nota. Representación por familiaridad de circunferencia y cuadrado, planteando simetría entre los puntos construidos C y D.

Además de esto, se vislumbra que los estudiantes concluyen que los 20 puntos se construyen sobre una circunferencia como se ve en la imagen. De manera implícita se puede observar que los puntos que estos estudiantes conciben se pueden crear a partir de la rotación del cuadrado inscrito en la circunferencia.

Por último, se destaca una idea relacionada con los conceptos que se trabajaron en la socialización de la prueba diagnóstica. En ella se destaca que los estudiantes tienen claro que los puntos fijos son A y B por lo tanto construyen el punto C de tal manera que se forme un triángulo rectángulo. Luego construyen D como el simétrico del punto C dando cuenta de otro triángulo simétrico con lo cual obtienen las siguientes representaciones gráficas:

Figura 38.

Solución 7 (Fase de exploración dirigida 1), elipse



Nota. Representación gráfica de los puntos simétricos *D* y *C.*

De ello, se destaca que los puntos construidos cumplen con la condición del problema pues, $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{DA} + \overline{DB}$.

Nota. En esta tabla se vislumbran los primeros resultados obtenido en la fase de exploración dirigida 1 para el caso de la elipse.

Una vez comprendido el enunciado del problema, se da inicio a la actividad dos cuyo objetivo principal apunta a la concepción de la elipse como un lugar geométrico.

Tabla 10.

Segundos resultados de la fase de exploración dirigida 1 para el caso de la elipse

Objetivo	Resultados
Con la primera pregunta de la tarea 2 se quiere que el alumno note que estos triángulos implicados tienen siempre un lado común ($\overline{AB}$). Además, deben darse	Al trabajar en esta tarea se logra evidenciar que la gran mayoría de los estudiantes destaca como característica principal que la suma de las distancias de los puntos C y D con respecto a A y B es la misma. Además de ello, un gran número de estudiantes determina que los triángulos comparten los puntos A y B, es decir, que tienen la misma base.

cuenta que el perímetro de los triángulos es el mismo. Sin embargo, considerando la generalidad de esta pregunta se concibe una pregunta auxiliar que da cuenta de esta longitud.

Figura 39.

Soluciones 8 y 9 (Fase de exploración dirigida 1), elipse

> que la suma de AC+CB y la de DA+DB son iguales, amos valores dan 10.51
> los dos triamgulos tienen la misma base

> Que la suma de sus lados dan igual a pesar de que su valor es distinto : AC + CB = DA + DB

Nota. Representación mediante el lenguaje natural de la suma constante de las distancias de dos puntos construidos.

A partir de ello, se evidencia que los estudiantes no tienen claro los conceptos de área y perímetro, razón por la cual no lograron deducir que el perímetro de los triángulos era igual. Cabe resaltar que un estudiante trató de dar esta definición, pero da evidencia del poco conocimiento acerca del concepto.

Figura 40.

Solución 10 (Fase de exploración dirigida 1), elipse

> que tienen la misma base y los dos tienen los puntos a y b
> en comun. tambien que la suma del area de los dos
> triangulos es la misma. (10,51)

Nota: Dificultad al confundir el concepto de perímetro con el de área.

Además de esto, se obtuvieron como resultado otras propiedades y características en relación con los conocimientos acerca de triángulos.

Figura 41.

Soluciones 11 (Fase de exploración dirigida 1), elipse

> son triángulos obtusángulos, comparten la misma medida
> de la base, ninguno de los triángulos tiene un angulo de
> 90°

Un triángulo es un polígono, es decir una figura geometrica plana que consta de tres lados, tres vértices y tres ángulos los cuales suman 180°, veo un triángulo escaleno y un triángulo obtusangulo

Nota. Soluciones presentadas a partir de las características y propiedades de triángulos.

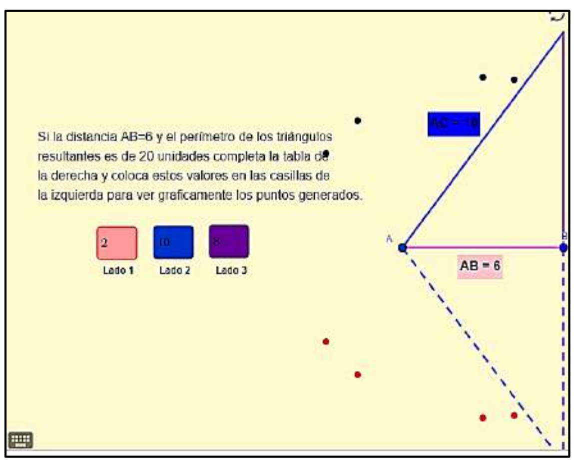
Finalmente, podemos concluir que el objetivo no se logró en su totalidad, sin embargo, se presentaron nociones relacionadas al mismo.

La segunda actividad contiene una tabla y un applet con el cual el estudiante puede dar nociones acerca del lugar geométrico que va a resultar, así como hacer uso de representaciones tabulares y gráficas. El objetivo consiste en completar la tabla de valores, ingresarlos al applet y observar características de los puntos construidos.

Al explorar los resultados de esta actividad se logra evidenciar que la mayoría del estudiantado completó la tabla según las indicaciones cumpliendo con el objetivo. Sin embargo, se llegó a observar que algunos participantes no tuvieron en cuenta que el valor del lado 1 o la distancia AB estaba dada y era de 6, por lo tanto, al completar la tabla ubicaron unos valores diferentes. Esto conlleva a la creación de nuevas medidas que apuntan a otra elipse diferente de la estudiada a modo de ejemplo en este applet.

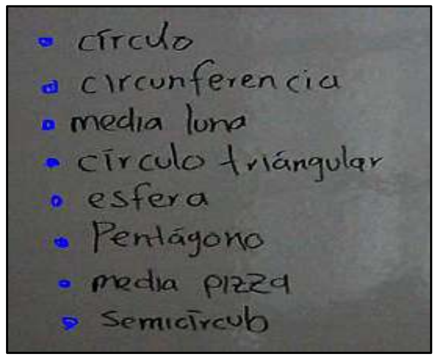
Figura 42.

Solución 12 (Fase de exploración dirigida 1), elipse



Lado 1	Lado 2	Lado 3
6	7	7
6	5	9
6	7.5	6.5
2	10	8
6	4.5	9.5
6.7	9.3	4
6	6.4	7.6
6	5.7	8.3

Nota. Dificultad al no comprender las condiciones de la actividad, modificando el valor constante de la distancia AB.

	Las dificultades encontradas se deben a la poca comprensión e interpretación de la actividad.
La tercera cuestión tiene el propósito que el estudiante a partir de la actividad anterior, trate de bosquejar mediante cualquier representación (gestual, gráfica o verbal) la elipse.	Al analizar la presente actividad se logra dar cuenta que ningún estudiante menciona o da a conocer que se trata de una elipse. Por el contrario, se obtuvieron diferentes resultados u opiniones destacando sus conocimientos previos e imaginación. **Figura 43.** *Solución 13 (Fase de exploración dirigida 1), elipse*  Un rombo, una linea y distintas formas entre esas una parecidas a un avion *Nota.* Reconocimiento de la elipse como objetos o conceptos por familiaridad. En este sentido, fue necesario mencionar que la figura obtenida al unir los puntos construidos es una elipse, de allí, se deja planteada la cuestión: ¿Será que una circunferencia es una elipse? Esta será trabajada posteriormente con la tarea 5.
Finalmente, la cuarta pregunta se plantea para que el estudiante sienta la necesidad de realizar la construcción de este	En la práctica de esta actividad se encontraron diferentes aportes como se destacan a continuación: **Figura 44.** *Soluciones 14 y 15 (Fase de exploración dirigida 1), elipse* haciendo los respectivos puntos en una linea circular.

lugar geométrico, pero considerando un enfoque más algebraico.	se podria hacer una esfera partiendo en cuatro y haciendo puntos *Nota.* Nociones de cómo se pueden construir más de 100 puntos que cumplen la condición del problema inicial. Sin embargo, el objetivo pretendía que los estudiantes destacaran el hecho de construir o generalizar una fórmula. Por esta razón, se destaca la siguiente idea que va encaminada en el proceso de representar analíticamente la elipse como lugar geométrico: **Figura 45.** *Solución 16 (Fase de exploración dirigida 1), elipse* ¿Cómo podríamos construir 100, 1000, o 10000 puntos con esta característica? generando una ecuacion en donde AB +BC + AC = 20 *Nota.* Planteamiento de una posible ecuación para encontrar más puntos con la característica del lugar geométrico.

Nota. En esta tabla se vislumbran los primeros resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 1 para el caso de la elipse.

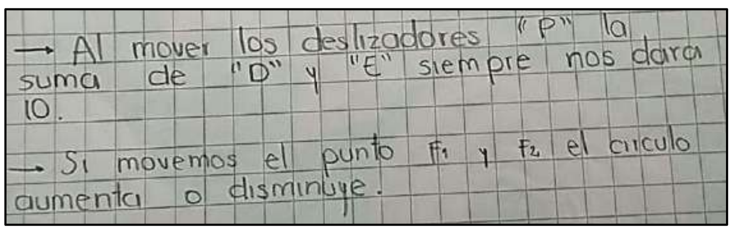
7.2.3. Explicación 2

Una vez explorados los elementos de manera dinámica se discute con los estudiantes acerca de lo encontrado con preguntas del tipo: ¿Qué ocurrió al arrastrar el punto C? ¿Qué valores se mantuvieron constantes y cuáles variaron?, de manera análoga se procede con los demás puntos indagando en las características que logran destacar. Además, se realizan aclaraciones en lo que respecta a la notación algebraica para que den cabida al segundo paso con el ánimo de deducir la ecuación canónica de la elipse.

Tabla 11.

Resultados obtenidos de la fase de explicación 2 para el caso de la elipse

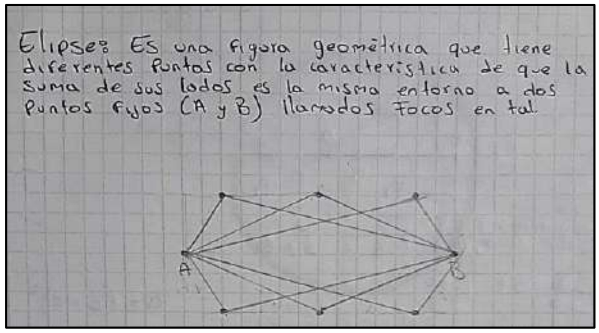
<table>
<tr><th>Objetivo</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td>El objetivo de esta explicación es concretar las observaciones de los estudiantes de manera colectiva. La fase pretende recolectar el mayor número posible de observaciones e hipótesis de los estudiantes respecto a características físicas de la elipse enriqueciendo de esta manera la representación gráfica, gestual y verbal del alumnado.</td><td>En la ejecución de esta fase se encontró que algunos estudiantes siguen nombrando a la cónica en cuestión como circunferencia o círculo, sin embargo, reconocen que tienen características totalmente diferentes. Se destaca la gran variedad de propiedades encontradas por los estudiantes que van desde la concientización de la propiedad principal de la elipse: “la suma de las distancias e y d se mantiene constante” (como se evidencia en la Figura 46), hasta propiedades especiales como lo es el caso donde la elipse tiende a ser una circunferencia o una línea recta.

Figura 46.
Solución 1 (fase de explicación 2), elipse


Nota. Exploración de diferentes propiedades de la elipse mediante la exploración del applet planteado en la tarea 3.
En este orden de ideas, se procede con una indagación de los resultados obtenidos en donde se observa la poca o nula claridad respecto a la noción de elipse, por lo cual se decide continuar con esta cuestión en la siguiente sesión de clase. De allí, se destacan respuestas como la siguiente:</td></tr>
</table>

Figura 47.

Solución 2 (fase de explicación 2), elipse

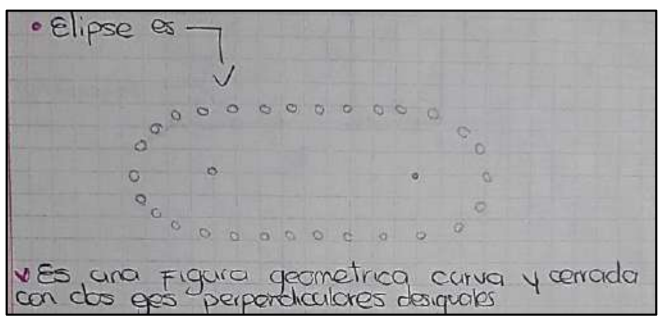


Nota: Representación de la sección cónica elipse mediante registros de lenguaje natural y gráfico.

Con esta primera definición se evidencia que los estudiantes comienzan a concebir la elipse a partir de las propiedades trabajadas y tienen en cuenta lo que se menciona en el problema inicial. Además de ello, lo representan de manera escrita y gráfica mostrando de esta manera un mayor entendimiento.

Figura 48.

Solución 3 (fase de explicación 2), elipse

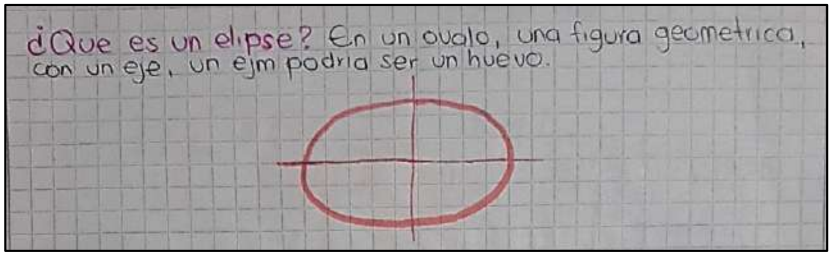


Nota. Representación de la elipse mediante lenguaje natural y su registro gráfico, a partir de la relación de conceptos antes vistos.

De la definición vista en la imagen Figura 48 al igual que de la anterior se resalta la representación escrita y gráfica. Adicionalmente, se puede notar que tienen en cuenta características esenciales para dar su definición, tales como ser cerrada y tener dos ejes perpendiculares que son desiguales.

Figura 49.

Solución 4 (fase de explicación 2), elipse



Nota. Representación de la elipse mediante lenguaje natural y su registro gráfico, a partir de la relación de conceptos antes vistos.

Al igual que con las definiciones anteriores, en esta (ver Figura 49) también se acude a dos sistemas de representación: escrita y gráfica. Además de ello, es destacable la relación establecida con un objeto o elemento propio de la cotidianidad como lo es un "huevo", no obstante, es necesario mencionar que la definición no es totalmente correcta, pues, la elipse no solo tiene un eje sino dos, uno horizontal y otro vertical. En este sentido, se tiene también una noción básica de la gráfica puesto que no hay evidencia de los elementos que conforman la elipse (como los focos, el punto P, las distancias e y d, entre otras). Por último, se logra vislumbrar que los estudiantes tienen el conocimiento base de lo que es la elipse como lugar geométrico, sin embargo, no tienen total consciencia o dominio de las características y propiedades para dar una definición más completa y concisa.

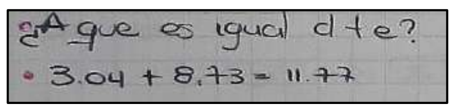
Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados obtenidos en la fase de explicación 2 para el caso de la elipse.

7.2.4. Exploración dirigida 3

Esta fase plantea una exploración guiada por el applet de GeoGebra mediante la presentación de diferentes registros de representación. Para ello, tiene en cuenta el arrastre de algunos elementos como lo son los focos o los vértices de la elipse. El propósito final consiste en la generalización de los valores resultantes en las expresiones $d + e$ y $b^2 + c^2$.

Tabla 12.

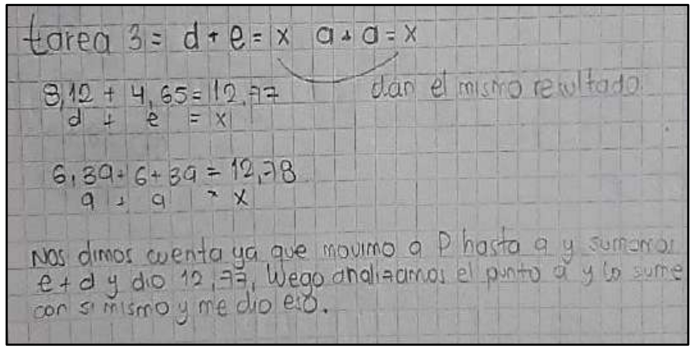
Resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 3 para el caso de la elipse

Objetivo	Resultados
El propósito principal de esta tarea consiste en identificar algebraicamente con ayuda de representaciones numéricas, gráficas, algebraicas y escritas que la suma de las distancias entre los puntos que conforman la elipse y sus focos es constante, y el valor de esa constante es 2a.	En la práctica se encontró que los estudiantes tienen problemas con el proceso de generalización ya que se tenía una duración de 1 hora a lo sumo para encontrar que d+e=2a, pero fue necesario aunar una hora más y dotar de más representaciones[14] a los alumnos. Uno de los aspectos a destacar es que los estudiantes creían que al colocar una respuesta numérica ya habían resuelto lo pedido ignorando totalmente la retroacción dada por el applet. **Figura 50.** *Solución 1 de la actividad 1 (Fase de exploración dirigida 3), elipse*  *Nota:* Representación de $d + e$ para un caso particular. Por esta razón fue necesario solicitarles la manipulación del valor de A para que dieran cuenta de la variación en el resultado pedido: (d+e). Luego de ello se les recuerda que las retroacciones los acercan a resolver la cuestión en caso de que aún no lo hayan logrado, esto con el ánimo de que las interioricen y no solo las pasen por alto. De los resultados obtenidos se destaca que la retroacción que acercó a los estudiantes a la solución fue aquella que comparaba los valores a, e, d y (d+e) en forma tabular. Esto se evidencia en los siguientes resultados:

[14] Estas representaciones adicionales se destacan en el apartado titulado como “Ajustes a la secuencia”.

Figura 51.

Soluciones 2 y 3 de la actividad 1 (fase dirigida 3), elipse

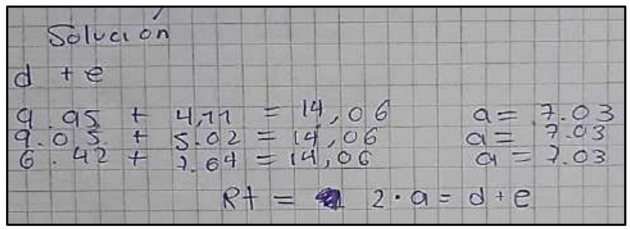


tarea 3 = d + e = x a + a = x

8,12 + 4,65 = 12,77 dan el mismo resultado
d + e = x

6,39 + 6 + 39 = 12,78
a + a = x

Nos dimos cuenta ya que movimo a P hasta a y sumamos e + d y dio 12,77, luego analizamos el punto a y lo sume con si mismo y me dio esto.



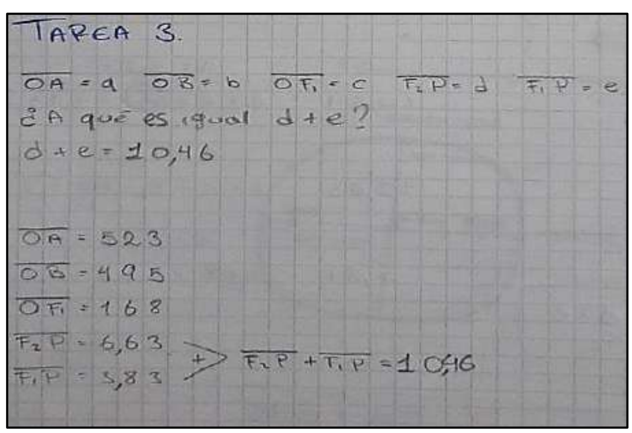
Solución
d + e
9.95 + 4,11 = 14,06 a = 7.03
9.05 + 5.02 = 14,06 a = 7.03
6.42 + 7.64 = 14,06 a = 7.03
Rt = 2 · a = d + e

Nota. Conversión de registros geométrico, aritmético al registro algebraico.

En concordancia con las ideas presentadas, se expone el trabajo realizado por un grupo en particular que usó todas las retroacciones de manera escalonada. Se destaca este resultado ya que en los demás grupos se usó únicamente la retroacción tabular debido a que las anteriores retroacciones no mostraron resultados favorables debido a la dificultad manifestada anteriormente con el proceso de generalización.

Figura 52.

Solución 4 de la actividad 1 (fase de exploración dirigida 3), elipse



TAREA 3.

$\overline{OA} = a$ $\overline{OB} = b$ $\overline{OF_1} = c$ $\overline{F_2P} = d$ $\overline{F_1P} = e$

¿A qué es igual d + e?

d + e = 10,46

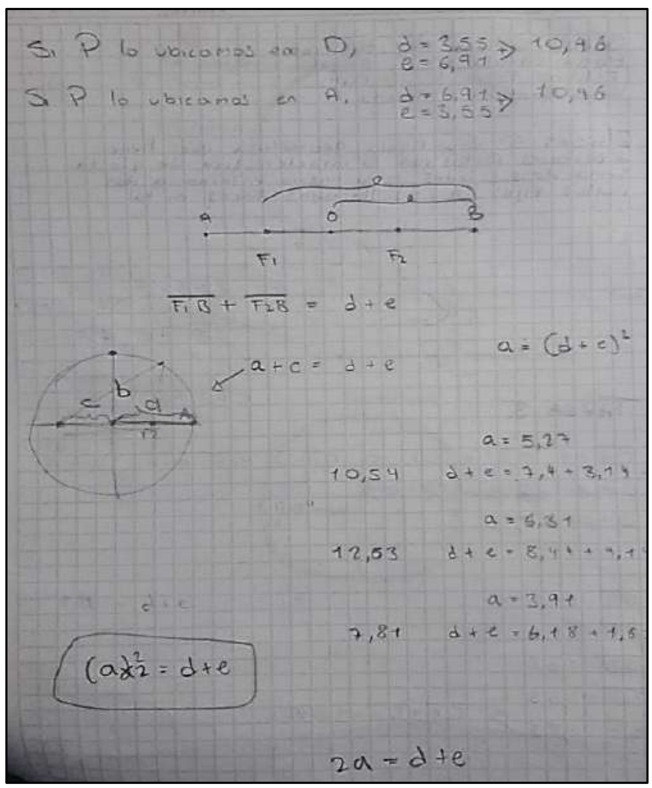
$\overline{OA} = 5.23$
$\overline{OB} = 4.95$
$\overline{OF_1} = 1.68$
$\overline{F_2P} = 6,63$
$\overline{F_1P} = 3,83$ $\xrightarrow{+}$ $\overline{F_2P} + \overline{F_1P} = 10,46$

Nota. Representación de la retroacción del applet en GeoGebra, iniciando desde un valor numérico para luego generalizar.

El grupo inicia con la misma respuesta que los demás, un valor numérico, sin embargo, ellos realizan adicionalmente un análisis usando notación algebraica. De allí prosiguen a seguir la instrucción dada por el applet (primera retroacción) y de ella obtienen una representación gráfica con la que se guían para analizar la representación tabular y con ello dar respuesta a la pregunta planteada.

Figura 53.

Solución 4 parte 2 de la actividad 1 (fase de exploración dirigida 3), elipse.

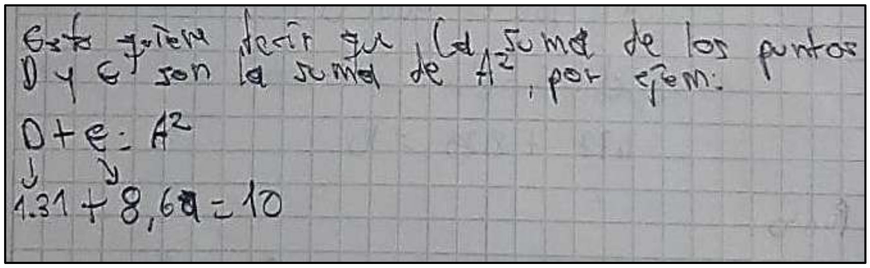


Nota. Uso de las retroacciones del applet para generalizar el valor de $d + e$.

No obstante, así como se destacan los aciertos también se enfatiza en las dificultades encontradas, estas se resumen en la imagen presentada a continuación:

Figura 54.

Solución 5 de la actividad 1 (fase de exploración dirigida 3), elipse



Nota. Dificultad al concebir $2a$ como a^2

En primer lugar, nótese que existen dificultades en cuanto a notación ya que las distancias se denotan con letras minúsculas (aspecto que se destacó en la socialización) y aquí se hizo con letras mayúsculas indicando además que son puntos, de allí, surge la segunda vertiente a notar ya que está sumando puntos como si fueran distancias. Finalmente compara esta suma con el valor de a, pero no lo hace como suma sino como potencia, evidenciando problemas con la comprensión de dicha operación.

Así mismo, se pretende que den cuenta de manera análoga que existe una relación pitagórica entre la semidistancia focal, el valor del semieje mayor y el semieje menor.

Cabe resaltar que para

De esta fase es necesario destacar que las 2 cuestiones por las que indaga la tarea 3 (d + e =2a y $b^2 + c^2 = a^2$) fueron abordadas en días diferentes. Sin embargo, se afrontan más dificultades y se invierte más tiempo en la primera pregunta, ya que en esta se da una exploración exhaustiva de la elipse aunada con un paso a paso del proceso de generalizar que comienza con una identificación de patrones (ya sean de manera numérica o geométrica) y finaliza con la generalización de la propiedad en cuestión. De allí, que con la segunda propiedad se obtuvieran mejores frutos en términos de cantidad de estudiantes que

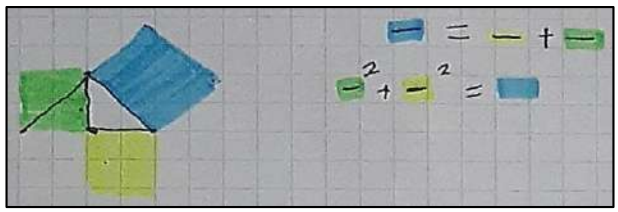
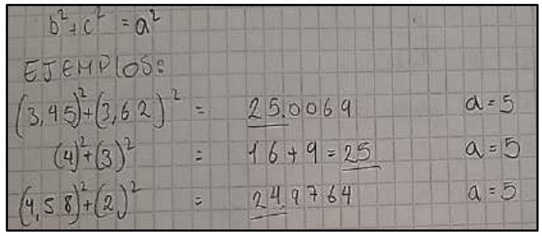
llegar a estas respuestas el estudiante tiene la posibilidad de realizar múltiples intentos y de ellos recibe interacciones del applet que guían paulatinamente al mismo hacia la solución.	llegaron a la deducción, menor tiempo y diferentes formas de analizar el problema. Uno de los análisis realizados lo presenta un grupo particular en el que ninguno de sus integrantes había atravesado el proceso realizado con la pregunta 1 (d + e =2a). Estos estudiantes sólo asistieron a la socialización dada por una de sus compañeras respecto al proceso que atravesó para llegar a la deducción de la constante 2a. Con esto en cuenta presentan la siguiente producción gráfica: **Figura 55.** *Solución 1 de la actividad 2 (fase de exploración dirigida 3), elipse*  *Nota.* Representación gráfica y pictórica de la posible solución a la cuestión $b^2 + c^2$. Al indagar por esta producción los estudiantes manifiestan que vieron las “letras al cuadrado” y asociaron ello con lo visto acerca de Pitágoras por lo cual buscaron ese triángulo pedido que se formaba al arrastrar el punto P hasta B (tal como lo indicaba la retroacción) y de allí, usando el resultado de d+e=2a (que se puede tratar de vislumbrar en el dibujo debido a que se trazan las distancias d y e que forman un triángulo isósceles), concluyeron que el área del cuadrado azul era de a^2 porque la hipotenusa de ese triángulo dibujado era de longitud a ya que a+a=2a. Es necesario destacar que se les solicitó escribirlo, pero en la hoja de trabajo sólo se encontraba el dibujo. Desde otro sentido, varios estudiantes realizaron ejemplificaciones desde una perspectiva tabular para realizar la generalización pedida comparando los valores cuadrados con el valor de a, así:

Figura 56.

Solución 2 de la actividad 2 (fase de exploración dirigida 3), elipse



$b^2+c^2=a^2$

EJEMPLOS:

$(3{,}45)^2+(3{,}62)^2 = 25{,}0069$ $a=5$

$(4)^2+(3)^2 = 16+9=25$ $a=5$

$(4{,}58)^2+(2)^2 = 24{,}9764$ $a=5$

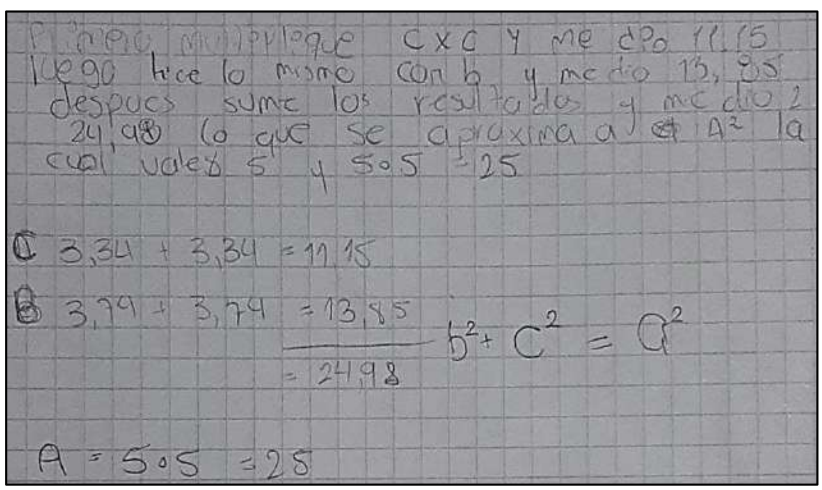
Nota. Representación tabular de casos particulares que permiten la generalización.

De manera particular, se puede destacar que el autor de esta producción estaba convencido del resultado sin importar que el valor del ejemplo 1 y 3 no diera exactamente 25 como se ve en el ejemplo 2.

Se obtienen múltiples resultados similares al expuesto previamente, pero se destaca particularmente el de un grupo de alumnos que esbozan paso a paso el análisis realizado desde tres registros semióticos: escrito, algebraico y tabular.

Figura 57.

Solución 3 de la actividad 2 (fase de exploración dirigida 3), elipse



Primero multipliqué c x c y me dio 11,15
luego hice lo mismo con b y me dio 13,85
despues sumé los resultados y me dio 2
24,98 lo que se aproxima a A² la
cual vale 5 y 5·5 = 25

C 3,34 + 3,34 = 11,15
B 3,72 + 3,72 = 13,85
= 24,98 $b^2+c^2=a^2$

A = 5·5 = 25

Nota. Solución de la actividad a partir del tratamiento de varios registros como lenguaje natural, algebraico y tabular.

Con la tarea 4 se busca que el estudiante deduzca la ecuación canónica de la elipse.

Es necesario enfatizar que la actividad brinda la ecuación resultante (o la ecuación a la que deben llegar) ya que el objetivo de este trabajo investigativo consiste en indagar en las habilidades del proceso de representación por lo cual se valoran los procedimientos (principalmente algebraicos) que efectúan los estudiantes para llegar a la solución del problema planteado inicialmente. Puesto que es con la ecuación que realmente se construyen los 20 puntos pedidos inicialmente.

De esta actividad sólo se obtuvieron resultados de dos grupos, pero ninguno de ellos arrojó frutos de la representación algebraica esperada, sin embargo, estos resultados estaban previstos según lo obtenido en el diagnóstico.

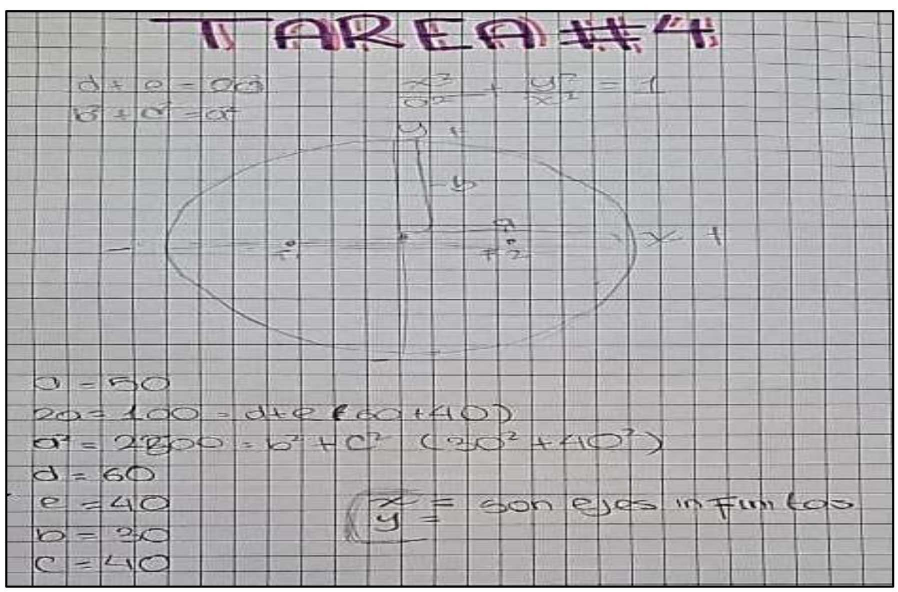
Uno de los grupos escribió las propiedades descubiertas en la tarea 3 y la ecuación algebraica a la que debían llegar. No obstante, les fue imposible vislumbrar la relación existente entre estos elementos algebraicos que resaltaron.

Por otra parte, vuelve a tomar importancia la representación geométrica y numérica. El grupo manifiesta que fue necesario hacer la gráfica para ver el comportamiento de la ecuación canónica de la elipse al variar los valores de a y b, para ello también se apoyaron en ejemplos numéricos. Esto se hace notorio en la siguiente transcripción y la imagen que le sigue a continuación.

Estudiante 6: hicimos la grafiquita para ver cómo funcionaba la fórmula al cambiarle los valores

Figura 58.

Solución 1 tarea 4 (fase de exploración dirigida 3), elipse

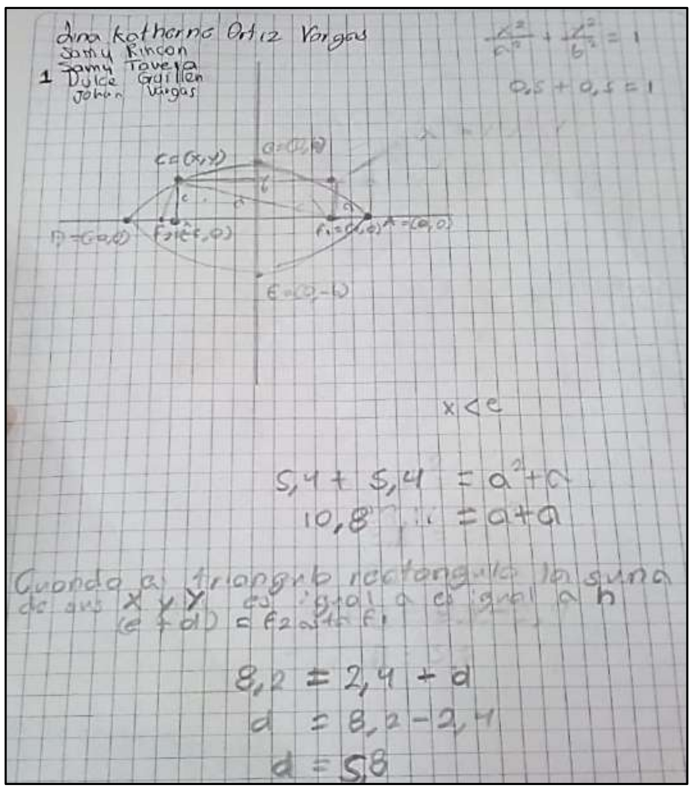


Nota. Conversión de un registro gráfico a uno aritmético, expresado mediante ejemplos.

En cuanto a los resultados obtenidos por el otro grupo se puede enfatizar en el uso de representaciones geométricas, numéricas, escritas y algebraicas. Es notorio que aquí consideran todos los elementos involucrados en la elipse como lugar geométrico (coordenadas en términos generalizados, distancias, entre otros), pese a ello, las deducciones descritas debajo de la gráfica no son del todo acertadas ya que al final mencionan que la suma de d+e es la distancia que va de un foco a otro, es decir, 2c. Esto se corrigió allí en clase y el grupo mencionó que era un error de concentración y en la siguiente actividad lo cambiaron por 2a.

Figura 59.

Solución 2 tarea 4 (fase de exploración dirigida 3), elipse



Nota. Representación numérica, algebraica, gráfica y de lenguaje natural acerca del problema de deducción de la ecuación, resaltando dificultad en la comprensión de la actividad.

	Con estos resultados en mente se planea una actividad adicional con la que se pretende que los estudiantes aborden el problema con una instrucción más detallada.

Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 3 para el caso de la elipse.

7.2.5. Exploración dirigida 4

Tal y como se menciona en el objetivo se realiza una segunda actividad con la que se consiguen resultados de más grupos, pero por cuestiones de tiempo y conocimientos previos no se termina la actividad y tampoco se usan en su totalidad las instrucciones preparadas para la construcción de este conocimiento escalonado.

Tabla 13.

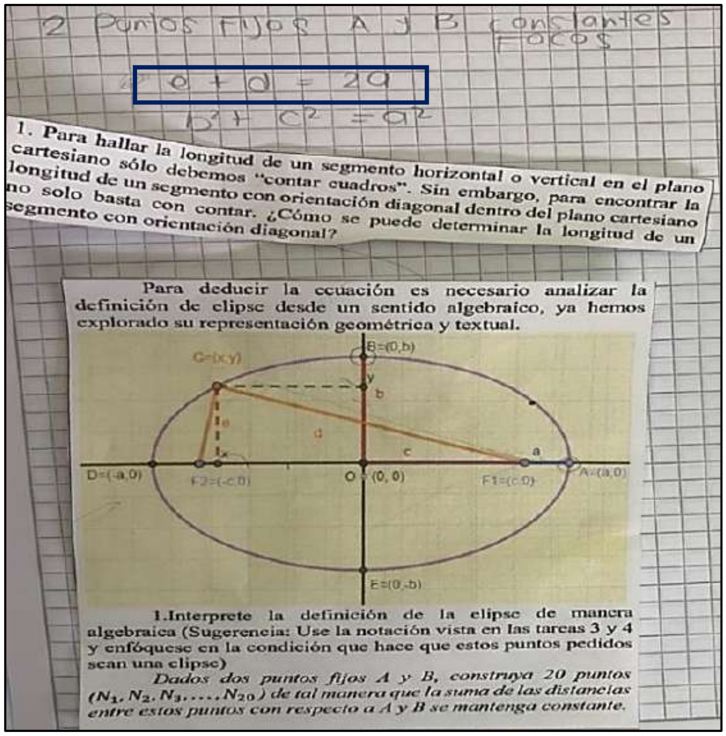
Resultados de la fase de exploración dirigida 4 para el caso de la elipse

Objetivos	Resultados
Con la actividad anterior es muy probable que los estudiantes no logren realizar la deducción de la ecuación. Es por ello que se plantea una "actividad auxiliar" que apunta al	La primera instrucción pretendía que los estudiantes realizaran la transformación de la representación escrita a la representación algebraica. Esto debido a que se les solicita analizar la definición desde el ámbito algebraico. Sin embargo, la instrucción resultó insuficiente ya que ningún grupo mostró señales de comprensión así que se ejemplificó con un ejercicio. Este consistía en escribir de manera algebraica el siguiente enunciado: "El doble de un número es igual a otro número". Una vez socializado lo anterior, varios grupos llegaron a deducir que el enunciado refería a la propiedad previamente vista (d+e=2a), esto puede hacerse notorio en el siguiente producto entregado por un grupo de estudiantes.

mismo objetivo de la anterior, pero posee más instrucción.

Figura 60.

Solución 1 de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse

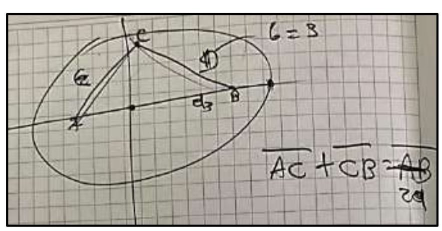


Nota. Planteamiento del primer paso para la deducción de la ecuación de la elipse.

Como se evidencia en la imagen, este grupo ya había recibido la segunda instrucción, pero como se mencionó previamente ningún estudiante logró llegar más allá del planteamiento de la ecuación d+e=2a o en su defecto, $|\overline{AC}|+|\overline{CB}|=2a$ como lo hizo un grupo que aún no asigna los nombres de F1 y F2 a los focos.

Figura 61.

Solución 2 de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse



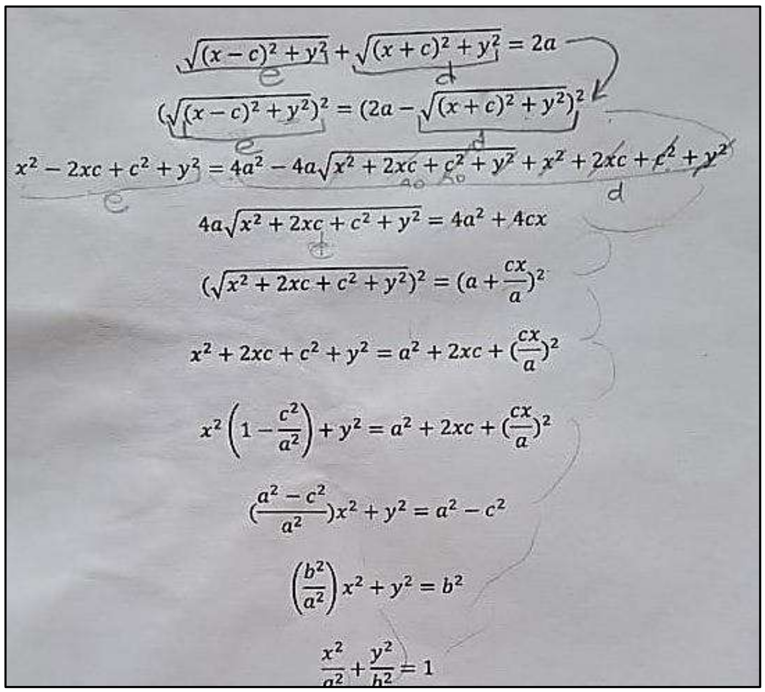
Nota. Representación del primer paso para la deducción de la elipse a partir de la notación $\overline{AC} + \overline{CB} = 2a$.

Al notar ello, se optó por dar la solución del problema de manera algebraica y se solicitó a los alumnos la justificación de los pasos con total detalle, partiendo del planteamiento cartesiano de la ecuación hasta la expresión canónica de la elipse.

Uno de los resultados obtenidos da cuenta de que los términos con raíz corresponden a las distancias d y e respectivamente. No obstante, se pueden evidenciar dificultades respecto al despeje debido a que en el renglón 3 cancelan los términos dentro de la raíz, con los que se encuentran al mismo lado de la igualdad.

Figura 62.

Solución 3 de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse

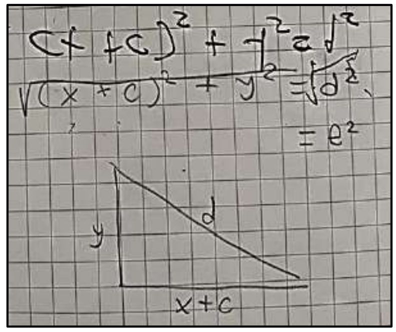


Nota. Planteamiento de las distancias d y e como la raíz al aplicar el teorema de Pitágoras.

Otro de los resultados destacables, es el que se ilustra a continuación ya que en este se evidencia claramente el uso de la propiedad pitagórica para hallar el valor de la longitud d; empero, el tiempo no permitió obtener mayores resultados.

Figura 63.

Solución 4 de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse

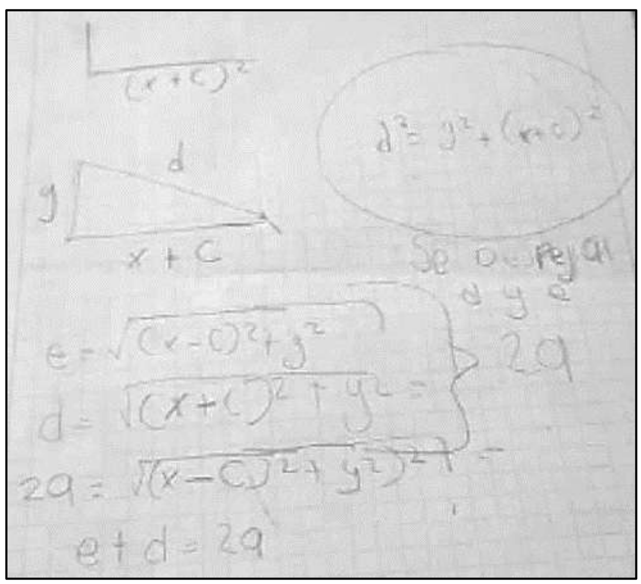


Nota. Planteamiento de las distancias del triángulo rectángulo formado para hallar el valor de *d* a partir del teorema de Pitágoras. Ello, a partir de un registro geométrico y algebraico.

Un resultado análogo al anterior deja ver con mayor detalle los procedimientos realizados por otro grupo en donde también se usa la propiedad pitagórica para obtener los términos resultantes en el primer renglón de la solución algebraica.

Figura 64.

Solución 6 de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse

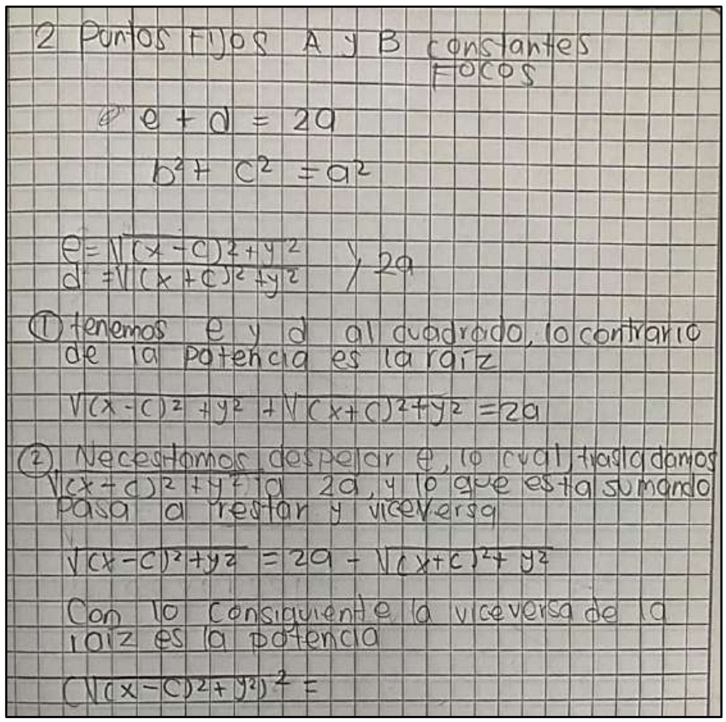


Nota. Representación geométrica y algebraica que justifican el primer paso de la deducción de la ecuación de la sección cónica elipse.

Así como este, se presentaron dos grupos adicionales que alcanzan a analizar más renglones de la solución. El primer grupo usa una representación escrita para justificar los pasos ilustrados en la solución algebraica del problema en cuestión. Es necesario destacar que hacen uso de las operaciones inversas para explicar los despejes, este aspecto se hizo reiterativo en la socialización del diagnóstico y en las actividades posteriores en donde se hacía uso de una ecuación.

Figura 65.

Solución 6b de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse


2 Puntos Fijos A y B constantes
FOCOS

$e + d = 2a$

$b^2 + c^2 = a^2$

$e = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ } $2a$
$d = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

① tenemos e y d al cuadrado, lo contrario de la potencia es la raiz

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

② Necesitamos despejar e, lo cual trasladamos $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ a 2a, y lo que esta sumando pasa a restar y viceversa

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Con lo consiguiente la viceversa de la raiz es la potencia

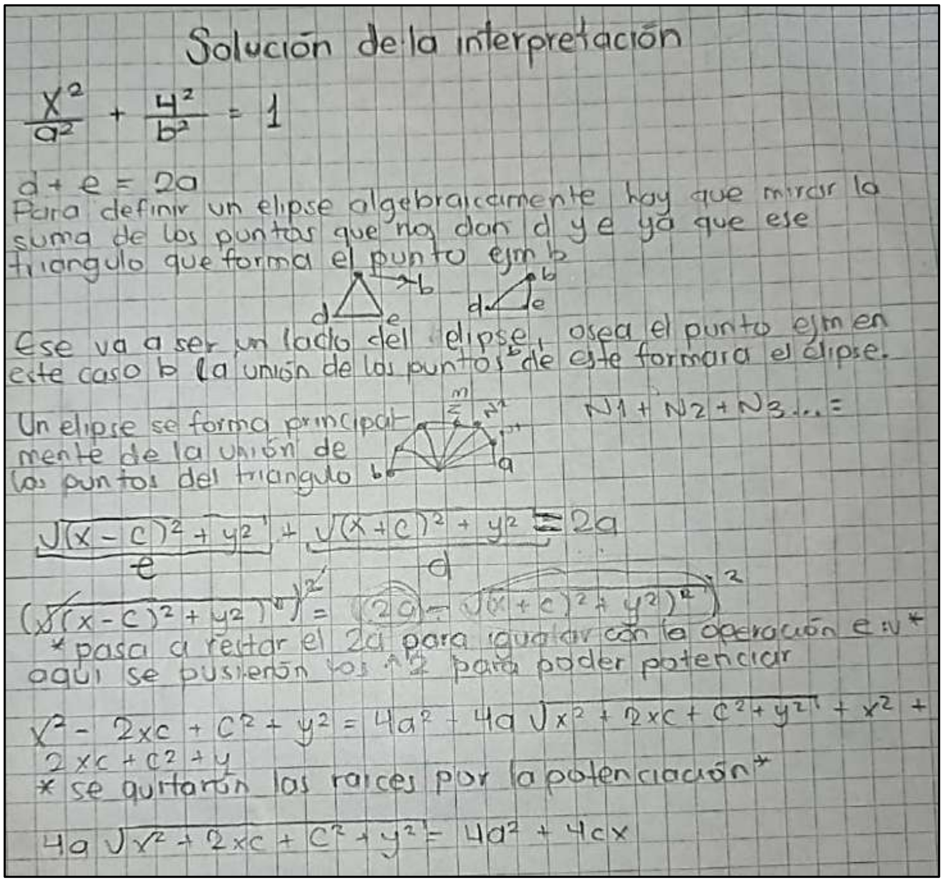
$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 =$

Nota. Justificación de los primeros pasos para la deducción de la ecuación de la elipse, a partir de registros algebraicos y lenguaje natural.

Finalmente, el segundo grupo del que se habló en el párrafo anterior usó representaciones algebraicas y geométricas para justificar los pasos del despeje que da solución a la cuestión estudiada. Aunado a ello, hace una transformación de representaciones debido a que comienza ilustrando la representación escrita mientras trata de justificar con ejemplos y algunas representaciones geométrico-algebraicas la expresión de d+e=2a; sin embargo, según lo escrito no se centra en justificar por qué el enunciado se relaciona con la expresión d+e= 2a, pero sí se observa la parte algebraica se realiza esta correspondencia que plantearon inicialmente de manera simbólica.

Figura 66.

Solución 7 de la actividad 4a (Fase de exploración dirigida 4), elipse



Nota. Justificación de algunos de los pasos para la deducción de la ecuación a partir de registros algebraicos, gráficos y lenguaje natural.

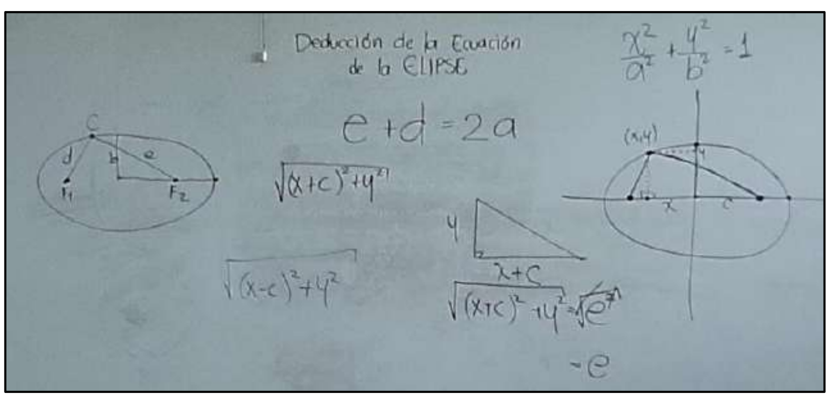
Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 4 para el caso de la elipse.

7.2.6. Explicación 3

Una vez que los estudiantes realizan procedimientos algebraicos para determinar la ecuación canónica de la elipse, se socializa con el grupo los resultados encontrados a partir de la participación activa mediada por orientaciones que indagan en los pasos a tener en cuenta al determinar la ecuación.

Tabla 14.

Resultados de la fase explicación 3 para el caso de la elipse

<table>
<tr><th>Objetivo</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td>Este espacio tiene como propósito concretar la indagación de la precedente orientación dirigida.
Aunado a ello se pretende socializar en grupo con el ánimo de que cada estudiante verifique y/o conozca el proceso de deducción de la ecuación partiendo de su representación geométrica.</td><td>Con la práctica de la exploración dirigida 4 se planteó como trabajo para la casa que los estudiantes justificaran los pasos algebraicos que se realizan para llegar a la deducción de la ecuación de la elipse. Ello, se plantea debido a las dificultades presentadas en este proceso, pues se hace necesario que los estudiantes recuerden e investiguen conceptos como factor común, el cuadrado de la suma de un binomio, operaciones inversas, entre otros. A partir de esto, se vislumbra gran dificultad en el tratamiento algebraico por lo cual se realiza una socialización en el tablero a partir de diferentes representaciones: escrita, gráfica, verbal y gestual.
Figura 67.
Socialización para la deducción de la ecuación la elipse (explicación 3)


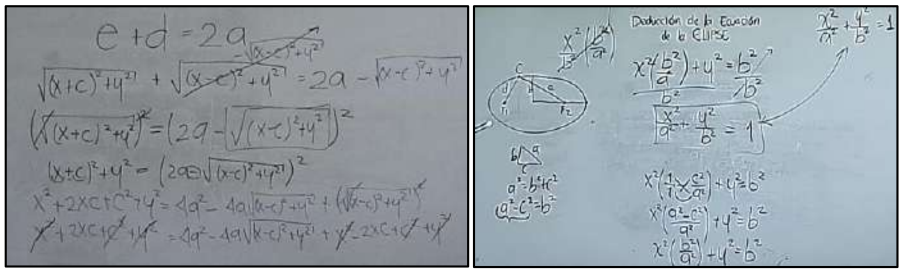
Nota. Socialización del proceso para la deducción de la ecuación canónica de la elipse a partir de diferentes registros de representación.

De esta primera imagen se destaca la representación gráfica y algebraica de las distancias e y d, siendo un acercamiento más ameno a los</td></tr>
</table>

estudiantes para la comprensión del primer paso en el proceso de la deducción de la ecuación de la elipse.

Figura 68.

Socialización de la deducción de la ecuación la elipse (explicación 3) parte 2



Nota: Tratamiento del registro algebraico para deducir la ecuación de la elipse por parte de una de las docentes.

Seguido a ello, se presenta de manera netamente algébrica los siguientes pasos teniendo en cuenta despejes, simplificación, operaciones inversas, cuadrado de un binomio y factor común, ello realizando cada paso con su respectiva explicación fomentando la participación del estudiantado. Seguido a esto, para recordar la relación entre $a, b\ y\ c$ se representa un triángulo con estas distancias recordando que $a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras, siendo esto equivalente a tener $b^2 = a^2 - c^2$. Lo cual permite que, al reemplazar $a^2 - c^2$ por b^2 en el procedimiento que se lleva haciendo se haga un acercamiento más próximo a la ecuación que se busca $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

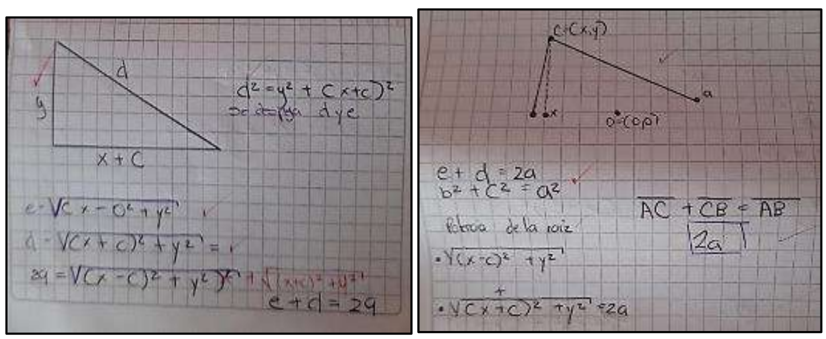
A partir de esta fase, se destacan las múltiples representaciones que utiliza la docente para explicar el proceso que conlleva la deducción de la ecuación de la elipse. Además, por medio de la diversidad de representaciones se consiguen abordar algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes en la justificación de la tarea.

Ahora bien, en lo que respecta a los productos entregados por los estudiantes se obtienen tres destacables en relación con el uso de diferentes representaciones.

En el primero de estos resultados destacados se evidencia la aplicación de conceptos trabajados en la socialización del diagnóstico como el Teorema de Pitágoras y el plano cartesiano para determinar las distancias solicitadas (d y e). Cabe resaltar, que al determinar las distancias *d* y *e,* se realizan dos representaciones: la representación gráfica y algebraica, lo cual le permite al estudiante plantear el primer paso para la deducción de la ecuación, como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 69.

Primeros registros para la de deducción de la ecuación de la elipse



Nota. Representación gráfica y algebraica para la deducción de la ecuación de la elipse.

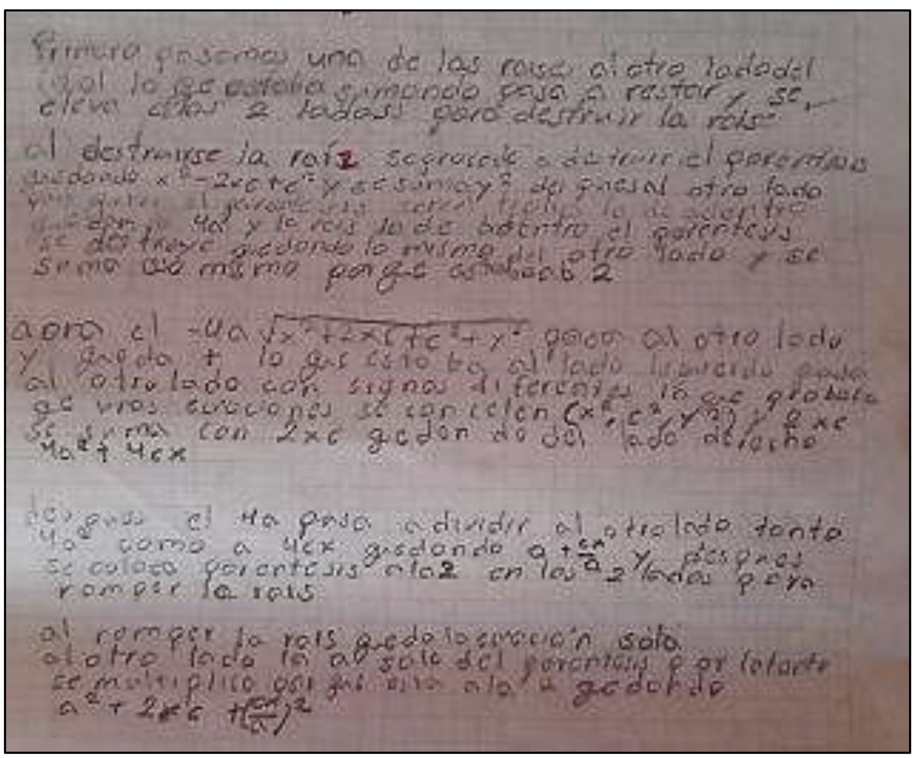
En el otro resultado a considerar, sobresale la representación netamente escrita y algebraica. Por otra parte, cabe resaltar que las justificaciones presentadas con esta combinación de representaciones, en los registros de lenguaje natural y algebraico, son fundamentadas netamente en los conocimientos previos del estudiante sin la investigación sugerida respecto a los presaberes necesarios para realizar la tarea. Es por ello que de estos resultados se extraen las dificultades en la aplicación de conceptos previos aprendidos en años anteriores (según lo expuesto en los estándares básicos de competencias).

En la primera imagen, se observan dificultades de tipo algebraico, ya que en el tercer paso donde se solventa el binomio dentro de la raíz se justifica con las siguientes palabras: "al destruirse la raíz se procede a destruir el paréntesis quedando $x^2 - 2xc + c^2$ y se suma y^2", ello, da cuenta de dos obstáculos principalmente; el primero es el desconocimiento que tiene el estudiante del producto notable que se realiza en ese paso, y el segundo es el despeje, ya que habla de sumar y^2 cuando este término se encontraba fuera del binomio pero dentro de la raíz por lo cual al cancelarse la raíz con su operación inversa (la potencia).

En la segunda imagen la dificultad radica en el tecnicismo manejado por el estudiante, ya que se refiere a las distancias d y e como puntos que puede sumar. Ello muestra la confusión que tiene el estudiante con los conceptos de punto y distancia, así como de su notación algebraica.

Figura 70.

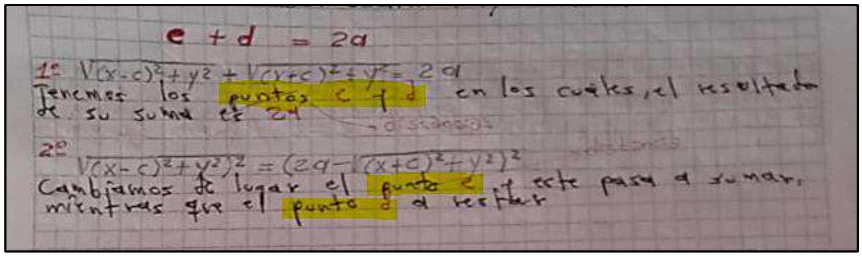
Justificación de los pasos de la ecuación de la elipse mediante el registro de lenguaje natural



Nota. Dificultad en el tratamiento de registros algebraicos.

Figura 71.

Justificación de algunos pasos para la deducción de la ecuación de la elipse

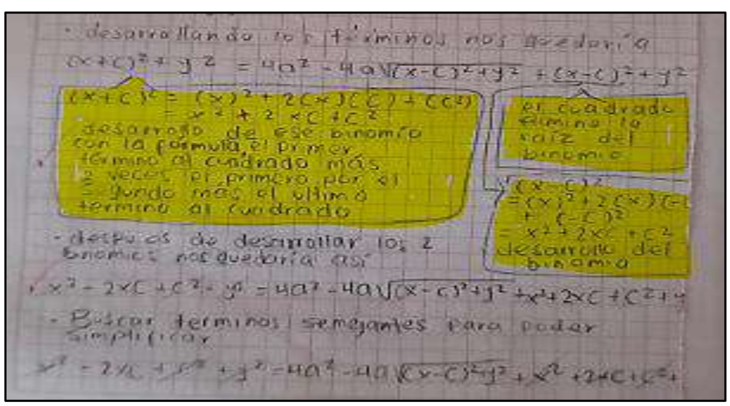


Nota. Dificultad en el tecnicismo manejado por el estudiante para justificar.

Finalmente, otro resultado destacado es el de un grupo de estudiantes que se reunió a justificar cada uno de los pasos de manera escrita y algebraica. En este trabajo se resalta la investigación realizada por los estudiantes respecto a los temas sugeridos (casos de factorización, productos notables, propiedades de la potenciación, entre otros). Aunque, no logran llegar a la ecuación, se destaca la justificación y argumentación que presentan a lo largo del trabajo dando evidencia de la consulta que realizaron para aclarar conceptos.

Figura 72.

Justificación de los pasos para la deducción de la ecuación de la elipse mediante conceptos y definiciones consultadas



Nota. Representación mediante el registro del lenguaje natural de la consulta de conceptos.

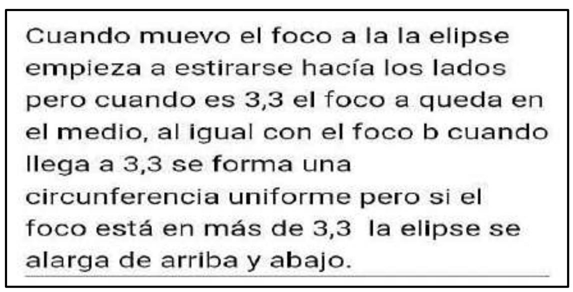
Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados obtenidos en la fase de explicación 3 para el caso de la elipse.

7.2.7. Exploración dirigida 5

Así como aconteció con la anterior fase, se planteó esta exploración como tarea para la casa por cuestiones de tiempo.

Tabla 15.

Resultados de la fase de exploración dirigida 5 para el caso de la elipse

Objetivos	***Resultados***
El objetivo de esta actividad recae en el hecho de que los estudiantes exploren y comprendan diferentes propiedades de la sección cónica elipse. En primer lugar, se busca que el estudiante con las dos primeras cuestiones analice las características geométricas y algébricas de la	A la luz de los resultados se puede argüir que con la primera pregunta se logró el objetivo planteado. De las repuestas se pueden destacar dos combinaciones de registros; uno que acopla los registros de lenguaje natural, algebraico y numérico, y otro que une el registro de lenguaje natural con el algebraico. **Figura 73.** *Solución 1 de la actividad 1 (Exploración dirigida 5), elipse*  Cuando muevo el foco a la la elipse empieza a estirarse hacía los lados pero cuando es 3,3 el foco a queda en el medio, al igual con el foco b cuando llega a 3,3 se forma una circunferencia uniforme pero si el foco está en más de 3,3 la elipse se alarga de arriba y abajo. *Nota.* Representación de propiedades mediante un registro de lenguaje natral y numérico. La Figura 73, es ejemplo de la primera combinación de registros mencionado, sin embargo, note que el estudiante que entrega esta respuesta confunde los focos con los valores de a y b por lo cual termina denominando a las distancias del semieje mayor y el semieje menor como puntos focales. Por otra parte, las respuestas que encajan con la segunda combinación de registros suelen ser lacónicas y pertinentes como se vislumbra en la Figura 74.

elipse orientada de manera vertical. Para ello, de manera particular, en la primera pregunta el estudiante debe observar que cuando $a<b$ se obtiene una elipse vertical en la cual los focos estarán ubicados sobre el eje y.

Con la segunda actividad los estudiantes deberían notar que esta suma de fracciones tiene una característica especial. Esa es que el denominador del cuadrado de la x es siempre el eje mayor de la elipse.

Con la tercera

Figura 74.

Solución 2 de la actividad 1 (exploración dirigida 5), elipse

Los focos se empiezan a desplazar en el eje Y

Cuando a es menor que b los focos quedan en el eje y

Nota. Representación mediante el registro de lenguaje natural y algebraico.

Prosiguiendo con la segunda cuestión planteada en esta fase, se puede establecer que el objetivo se cumplió parcialmente puesto que algunos estudiantes sí realizaron la comparación pedida llegando a deducir lo solicitado, mientras que otros sólo realizaron descripciones intuitivas en el registro del lenguaje natural sin analizar el enunciado de la pregunta.

Como ejemplo del primer tipo de respuesta a esta pregunta tenemos que el estudiante realiza una comparación en el registro del lenguaje natural incorporándolo elementos del registro algebraico.

Figura 75.

Solución 1 de la actividad 2 (exploración dirigida 5), elipse

El punto b^2 y a^2 cambiaron de lugar, también la fórmula que se nos muestra es la fórmula para las elipses que se encuentran en vertical y la fórmula socializada en clase es para elipses en horizontal

Nota. Representación de la diferencia entre la ecuación de elipse horizontal y vertical mediante un registro de lenguaje natural.

Así mismo, respecto a la otra tipología previamente abordada se tiene como ejemplo la respuesta de un estudiante que plantea como solución a la pregunta, una característica algebraica de la ecuación dada.

Figura 76.

Solución 2 de la actividad 2 (exploración dirigida 5), elipse

El denominador está elevado al cuadrado

Nota. Conversión del registro algebriaco a un registro de lenguaje natural.

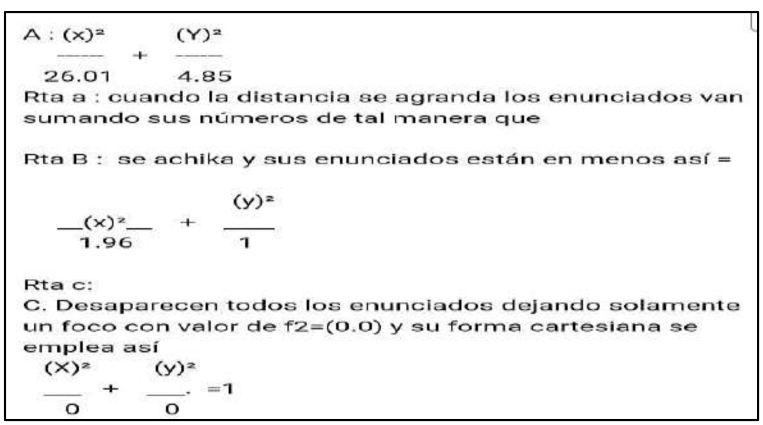
pregunta se busca que el estudiante de cuenta de lo que formalmente se conoce como excentricidad de la elipse. En esta intervienen factores como la distancia focal. Del ítem a el alumno puede notar que entre mayor sea la distancia focal más "achatada" será la elipse. Con los ítems b y c encontrará que la cercanía de los focos transforma paulatinamente la cónica hasta hacerla una circunferencia cuando la distancia se hace cero, es decir, cuando los focos

Ahora bien, con la tercera pregunta se obtuvo una variedad de respuestas diferentes; no obstante, algunas de ellas no consiguen cumplir con el objetivo planteado para cada ítem.

En particular, se resaltan tres productos realizados por los estudiantes teniendo en cuenta la cantidad de representaciones usadas y el cumplimiento del objetivo planteado. En primer lugar, se obtiene una combinación de registros algebraico, numérico y de lenguaje natural, pese a ello, no cumple con los objetivos ya que se realiza un análisis netamente algebraico sin tener presente la representación geométrica por lo cual no se consigue una coordinación entre lo representado algebraica y geométricamente. Además de ello, al detallar en el ítem c se consigue reiterar la confusión expuesta en la pregunta anterior con respecto a los valores de a, b y c y lo que estos representan ya que se les pedía modificar el valor de c para así dar cuenta de la igualdad obtenida por los valores de a y b, pero lo que realizaron fue una sustitución de los valores a y b por cero asumiendo que esta era la distancia nula a la que refería la cuestión. Es de resaltar que en la respuesta c, el estudiante divide por cero sin tener en cuenta que es una indeterminación, de este modo, supone que no existe, por lo tanto, no afecta la expresión algebraica.

Figura 77.

Solución 1 de la actividad 3 (exploración dirigida 5), elipse



Nota. Dificultad al concebir a y b como cero, en donde se presenta una indeterminación.

coinciden en un mismo punto, se obtendrá como resultado una circunferencia.

Con la cuarta pregunta se quiere que el estudiante usando la definición de la elipse en cualquiera de sus representaciones (gráfica, algebraica, numérica) logre argumentar que la circunferencia es un tipo de elipse ya que cumple con la definición. En otras palabras, la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Así mismo, en la pregunta cinco

En segundo lugar, se tiene una respuesta en la que prima el registro de lenguaje natural. A diferencia de la anterior, en esta imagen se vislumbra un cumplimiento del objetivo en cuanto al ítem a y b, sin embargo, también se presenta la misma dificultad respecto al ítem c.

Figura 78.

Solución 2 de la actividad 3 (exploración dirigida 5), elipse

A. Las Distancias de lo focos se alargan y la elipse se estira, también la distancia entre E y D también se alarga.
B. el triangulo se se alarga verticalmente y el consecuencia la elipse es más alta que ancha
c) desaparece la elipse porque todos sus puntos (focos) se encuentran en
punto 0

Nota. Interpretación de propiedades mediante la exploración del applet, presentando dificultad en el ítem c.

Finalmente, se destaca una solución que evidencia el cumplimiento del objetivo planteado, además de eso se hace notoria la investigación que realiza el estudiante. Esto último se hace evidente debido al uso del término “excentricidad” ya que no se había abordado en clase.

Figura 79.

Solución 3 de la actividad 3 (exploración dirigida 5), elipse

a)Cuando la distancia focal de una elipse es grande en comparación con la longitud de los ejes, la excentricidad de la elipse se acerca a 1. Esto significa que la elipse se asemeja cada vez más a una parábola, que es una figura geométrica con excentricidad igual a 1.Dicho de otra manera, esto significa que la elipse se vuelve más plana y estrecha en una dirección y más alargada en la otra.
b)Cuando la distancia focal de una elipse es pequeña en comparación con la longitud de los ejes, la excentricidad de la elipse se acerca a cero. Esto significa que la elipse se asemeja cada vez más a un círculo, que es una figura geométrica con excentricidad igual a cero.Dicho de otra manera , esto significa que la elipse se vuelve más redonda y menos alargada.
C)Cuando la distancia focal de una elipse es nula, la elipse se convierte en un círculo. En otras palabras, si los focos de la elipse coinciden en el mismo punto, entonces la elipse se reduce a un punto y su forma se convierte en una figura geométrica perfectamente redonda.Dicho de otra manera, esto significa que todas las distancias desde el centro de la elipse hasta cualquier punto de su perímetro son iguales.

Nota. Representación de la interpretación de diferentes propiedades a partir de la exploración del applet mediante un registro de lenguaje natural.

los alumnos deben dar cuenta de propiedades con respecto a la relación entre a, b y c. De ello, se destaca que a=b y que la distancia c=0 ya que los focos coinciden en un mismo punto.

Siguiendo con esta línea, la sexta indagación quiere que los estudiantes hallen de la expresión algebraica de la elipse la ecuación de la circunferencia a partir de procedimientos aritméticos. De allí, la ecuación resultante será $x^2 + y^2 = r^2$, esto debido a

Siguiendo con el objetivo de concebir la circunferencia como un caso particular de la elipse se resaltan tres resultados distintos. En primera instancia se tiene un análisis algebraico de un estudiante respecto a las ecuaciones en cuestión, la de elipse y circunferencia, además resalta de manera geométrica que dentro del plano cartesiano tienen "partes" iguales.

Figura 80.

Solución 1 de la actividad 4, ítem a (exploración dirigida 5), elipse

Si, por que todas sus partes son iguales en el plano cartesiano
(X-h) al cuadrado + (y-k) al cuadrado = r al cuadrado

Nota. Representación mediante un registro de lenguaje natural y algebraico para justificar que la circunferencia es una elipse.

Como segundo ejemplo se tiene una respuesta en donde se evidencia el uso del registro algebraico y de lenguaje natural a lo largo de toda la solución planteada. Por otra parte, se puede vislumbrar un análisis contradictorio en el que se comienza planteando que la circunferencia no es una elipse y se termina deduciendo mediante una consulta, que es "un caso particular" al concluir algebraicamente la ecuación de la circunferencia a partir de la ecuación de la elipse.

Figura 81.

Solución 2 de la actividad 4 ítems a y b (Exploración dirigida 5), elipse

a)No, la circunferencia no es una
elipse. La circunferencia es una curva geométrica plana definida como la serie de puntos equidistantes a un punto fijo llamado centro, mientras que una elipse es una curva plana definida como la serie de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Aunque ambas tienen algunas similitudes, son dos curvas distintas con definiciones diferentes.

que r=a y en las preguntas anteriores encontraron que a=b.

b)Las características destacadas de una circunferencia son:
1. Está definida por un punto central y un radio constante que determina su tamaño.
2. Todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro.
3. La longitud de la circunferencia se puede calcular utilizando la fórmula
2mr, donde r es el radio de la circunferencia.
4. La circunferencia tiene simetría radial en relación con su centro.

Nota. Representación mediante el registro de lenguaje algunas de las propiedades de una circunferencia y dificultad al concebir la circunferencia como un caso particular de la elipse.

Figura 82.

Solución 3 actividad 4, ítem c (exploración dirigida 5), elipse

c)Para deducir la ecuación de la circunferencia a partir de la ecuación de la elipse, primero debemos recordar que la circunferencia es un caso particular de la elipse, donde los dos radios son iguales y por lo tanto, tienen la misma longitud. Entonces, para una elipse cuya ecuación es:
(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1
Donde a es la medida del semieie mayor y b es la medida del semieje menor, podemos igualar ambos semiejes y obtener:
a = b
Y asi, la ecuación de la elipse se convierte en la ecuación de la circunferencia
(x/a)^2 + (y/a)12 = 1
Que también se puede escribir como
×^2 + y^2 = a^2
Si igualamos a^2 a r^2, la ecuación de la circunferencia se convierte en:
×^2 + y^2 = r^2
Que es la ecuación dada.

Nota. Tratamiento del registro algebraico y lenguaje natural para deducir la ecuación de la circunferencia.

Finalmente, de manera análoga con la respuesta previamente expuesta, se tiene una solución en la representación escrita-algebraica y se realiza una consulta, sin embargo, en esta sí existe coherencia entre el ítem a y c llegando a concluir que la circunferencia es un caso particular de la elipse como estaba planteado en el objetivo de la actividad.

Figura 83.

Solución 4 de la actividad 4, ítem a (exploración dirigida 5), elipse

a)Sí, una circunferencia es una elipse especial en la que los dos ejes tienen la misma longitud, es decir, la distancia desde el centro de la circunferencia a cualquier punto de la circunferencia es la misma. Esto hace que los dos focos de la elipse coincidan en el centro de la circunferencia.Por definición, una elipse es una curva cerrada y simétrica que resulta de cortar un cono con un plano oblicuo que no pasa por su vértice. Cuando el plano de corte es perpendicular al eje del cono, se obtiene una circunferencia, que es una elipse especial con excentricidad cero.

Nota. Interpretación de la circunferencia como un caso particular de la elipse destacando una justificación mediante el registro de lenguaje natural.

Figura 84.

Solución 5 de la actividad 4, ítems b y c (exploración dirigida 5), elipse

b)- Es una figura geométrica de dos dimensiones.
- Tiene un radio constante, es decir, la distancia desde cualquier punto de la circunferencia hasta el centro es siempre la misma.
- Tiene un diámetro, que es la distancia más larga que se puede trazar dentro de la circunferencia y que pasa por el centro.
- Tiene una cuerda, que es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- Tiene un arco, que es cualquier parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- Tiene un perímetro, que es la longitud total de la circunferencia y se calcula como 2π veces el radio.
- Tiene un área, que es la cantidad de espacio que ocupa la circunferencia en un plano y se calcula como π veces el radio al cuadrado.

En una circunferencia el radio es la misma longitud que los semiejes en la elipse. Entonces, podemos reemplazar a con r (el radio de la circunferencia) y obtener finalmente:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Que es la ecuación estándar de una circunferencia con centro (h,k) y radio r.

Nota. Interpretación de propiedades y transformación de representaciones en varios registros, dando cuenta de la circunferencia como caso particular de la sección cónica elipse.

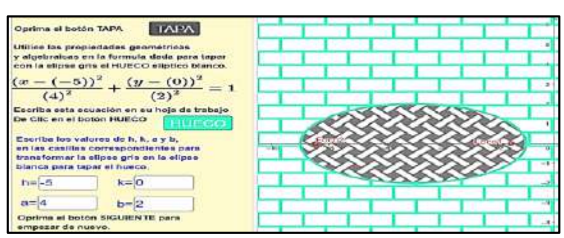
Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 5 para el caso de la elipse.

7.2.8. Tarea Retadora

Como colofón del taller realizado para la cónica elipse se planifica una actividad final en la que se pretende que los estudiantes usen lo aprendido en las fases previas, para solventar un nuevo problema que da cuenta de los aprendizajes adquiridos a lo largo de la ejecución del taller.

Tabla 16.

Resultados de la tarea retadora para el caso de la elipse

Objetivos	***Resultados***
Esta actividad tiene como objetivo que el estudiante determine la ecuación de la elipse cuando el centro es diferente a (0,0). Con la primera tarea el estudiante obtiene posibles recursos que le permiten llegar a generalizar propiedades para	La primera tarea arrojó los resultados esperados ya que todos los estudiantes realizaron las transformaciones pedidas en el applet. **Figura 85.** *Exploración 1 en tarea retadora, elipse* 

dar solución a las siguientes tareas. En esta tarea el estudiante realiza diferentes transformaciones a la elipse para lograr obtener la elipse correspondiente a la del hueco.

El propósito de la tarea dos consiste en que el estudiante escriba la fórmula general de la elipse con centro diferente a (0,0) en términos de h. k, a y b. Aunado a ello, se quiere ver la justificación que los alumnos realizan teniendo en cuenta la exploración en la tarea 1, destacando que los alumnos deben dar cuenta que el centro de la elipse tiene como coordenadas (h,k)

Para la tarea 3 el objetivo recae en el hecho de que el estudiante represente de manera escrita las diferentes transformaciones y exploración que realizó en el applet con respecto a h, k, a y b. De esta manera para h deben ver el movimiento vertical y para k el movimiento horizontal del

Nota. Representación gráfica de actividad resuelta teniendo en cuenta los valores de $h, k, a\ y\ b$.

Este resultado va acompañado de la justificación escrita de las transformaciones realizadas a la elipse inicial (tapa) para llegar a la elipse final (hueco). Algunos de estos razonamientos entregados por los estudiantes destacan ejemplos puntuales de la transformación mientras que otros describen el movimiento de manera más general.

Como primer ejemplo de respuesta, se destaca el análisis de un estudiante que da cuenta de la función de los valores h y k primordialmente, afirmando que "H equivalente a el eje x" y "K equivalente a el eje y". Para realizar esta justificación acude a múltiples ejemplificaciones haciendo uso de la representación numérica.

Figura 86.

Solución 1 de la actividad 2 (Tarea retadora), elipse

> H corresponde al eje x si ponemos un valor positivo. Ejemplo: 5 el centro se ubica en el número 5, pero si él ponemos un valor negativo. Ejemplo: -2 se ubica el centro en -2 y se queda en la línea x, pero si el valor de K es 0 porque eso este valor se cambia a positivó lo que hace es que se formarían unas líneas imaginarias. Ejemplo: K=(-2) y H=(6), la elipse se ubicaría más o menos a la derecha hasta el punto 6 y baja -2, ¿porque? Porque H equivalente a el eje x y como es positivo se ubica a la derecha y K es equivalente a el eje y entonces como el valor de K es negativo se ubica en la parte inferior del plano cartesiano, eso varía dependiendo de los valores en este caso sería que sus líneas forman un ángulo de 90 grados pero esto no se presenta en todos los casos.

Nota. Registro del lenguaje natural y representación numérica para comunicar las transformaciones realizadas en la exploración del applet.

centro de la elipse. Así mismo, que a es el valor del centro hasta uno de los vértices sobre el eje horizontal y b el valor del centro hasta uno de los vértices sobre el eje vertical de la elipse.

Finalmente, en la tarea 4 los alumnos deben dar uso a algunas de las propiedades de la elipse. Entre ellas, se tiene la relación $a^2 = b^2 + c^2$ la cual se necesita para obtener el valor de c. Esto se realiza ya el objetivo recae en generalizar las coordenadas de los focos para cualquier elipse. Además de ello, deben dar cuenta que las coordenadas para los focos de una elipse horizontal son diferentes a las coordenadas de los focos de una elipse vertical, en esto los estudiantes justifican el por qué. Para el caso de la elipse horizontal las coordenadas de los focos en términos de

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ son:

Foco:1$\left(h - \sqrt{a^2 - b^2}\,, k\right)$ o

Otra respuesta obtenida de esta cuestión acude a una representación más algebraica en donde detalla las transformaciones en términos generales de la elipse.

Figura 87.

Solución 2 de la actividad 2 (Tarea retadora), elipse

> Como primero se puede decir que empecé moviendo todos los mundo para poder ubicarme que hacía cada uno les puse valores x y salía diferente huecos y demás Dándome cuenta que la h nos da el rango de moviendo en el eje x encambio la k nos da el rango de moviendo en el eje y, los valores de estos para llenar el hueco se dan por el plano cartesiano,y los valores de a y b ya lo sabemos que nos dan el anchor y la altura

Nota. Registro del lenguaje natural y algebraico para representar las transformaciones realizadas en la exploración del applet.

Aunque no todas las repuestas fueron netamente algebraicas, también se encontraron soluciones que acoplaban diferentes registros como se evidencia a continuación con la Figura 88.

Figura 88.

Solución 3 de la actividad 2 (tarea retadora), elipse

> la h mueve hacia la derecha o la izquierda la tapa
> la k sube o baja la tapa
> la a agranda el tamaño de la tapa
> la b alarga la tapa
> y en conclusion dos ejemplos de ecuacion del cambio seria h=0 k=4 a=1 b=2 y la otra seria h=-1 k=4 a=3 b=2

Nota. Representación numérica y verbal de las transformaciones realizada en la exploración.

Con el punto 3 de esta tarea retadora se obtuvieron los frutos esperados ya que la mayor parte de los estudiantes llegó a la

$(h-c\,,k)$ Foco 2 $\left(h+\sqrt{a^2-b^2}\,,k\right)$ o $(h+c\,,k)$ En el caso de la elipse vertical: Foco 1$\left(h,k-\sqrt{a^2-b^2}\,\right)$ o $(h\,,k-c)$ Foco 2$\left(h,k+\sqrt{a^2-b^2}\,\right)$ o $(h\,,k+c)$	generalización de la ecuación en el registro algebraico y en algunos casos también se acompañaba de una justificación por escrito como se aprecia en la Figura 89. **Figura 89.** *Solución de la actividad 3 (Tarea retadora), elipse* (X-(h))^2/(a)^2 + (y-(k))^2/(b)^2 = 1 ¿Por que? Porque h y a son equivalentes al eje x por ello están en ese lado de la ecuación, k y b son equivalentes a Y *Nota.* Representación algebraica de la ecuación general de la elipse con centro diferente a $(0{,}0)$ teniendo presente un registro de lenguaje natural. Finalmente, con el cuarto punto no se lograron los resultados esperados por cuestiones de tiempo y de manipulación algebraica por lo cual se decidió socializar en la siguiente sesión de clase la solución de este punto.

Nota. En esta tabla se vislumbran los resultados obtenidos en la tarea retadora para el caso de la elipse.

7.3. Taller de Hipérbola

7.3.1. Fase de información y exploración libre

Al explorar el problema que da paso al concepto de hipérbola se obtienen múltiples resultados de los cuales se destacan cinco, debido a los aportes brindados a la investigación en términos de dificultades y uso de representaciones.

Tabla 17.

Resultados de la fase de exploración libre para el caso de la hipérbola

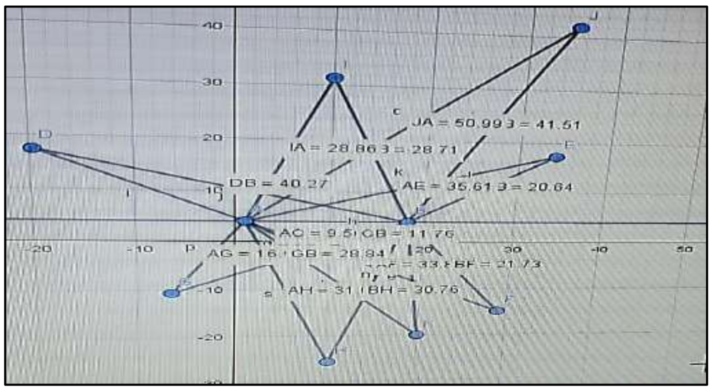
Objetivos	*Resultados*

Se busca que el estudiante acuda a sus pre saberes y explore el problema para tratar de darle solución. Para esta exploración se le da la opción de trabajar con GeoGebra o a lápiz y papel. Sin embargo, al estar planteado como problema se pretende que no logre visualizar un camino de solución de manera inmediata. No obstante, debido al acercamiento análogo con la sección cónica de la elipse el estudiante tiene más herramientas para abordar el problema.

Las primeras imágenes corresponden al producto entregado por el mismo estudiante, en esta interpretación se hace uso de los registros gráfico, algebraico y numérico. No obstante, se evidencia una dificultad en la comprensión del problema ya que asume que los puntos a construir solo cumplen la condición del valor absoluto, por lo cual toma valores al azar y calcula el mismo sin considerar que este valor debe ser constante para cualquier punto construido.

Figura 90.

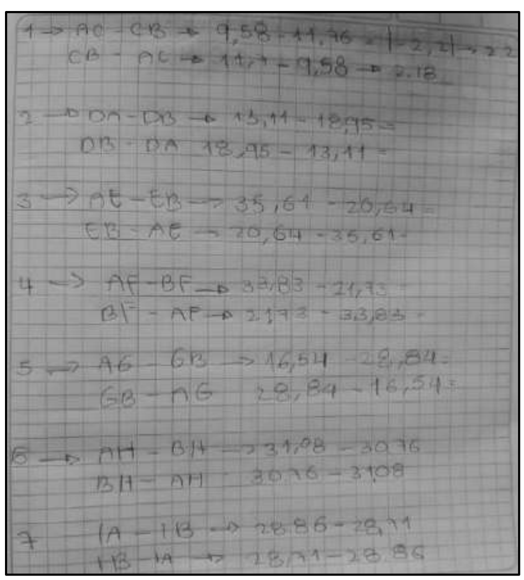
Solución 1 del problema inicial para la hipérbola



Nota. Representación de la solución del problema inicial en GeoGebra, evidenciando dificultad en la comprensión del problema.

Figura 91.

Solución 1, parte 2 del problema inicial de la hipérbola

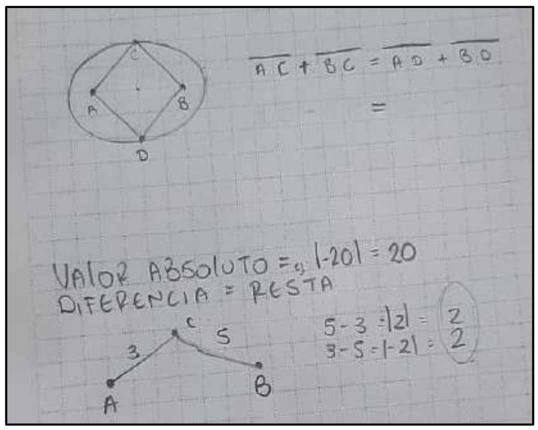


Nota. Representación tabular de los datos tenidos en cuenta para construir los puntos en GeoGebra, presentando dificultad en la comprensión del problema.

En segundo lugar, se acentúa el siguiente resultado debido a la asociación que realiza el estudiante del problema dado con el problema de la elipse. Al indagar por esta respuesta algo curiosa el alumno responde que "es muy parecido al problema de la elipse sólo que ahora me hablan de diferencia y de valor absoluto". Aquí podemos observar una riqueza de representaciones que van desde lo gráfico hasta lo numérico.

Figura 92.

Solución 2 del problema inicial para la hipérbola

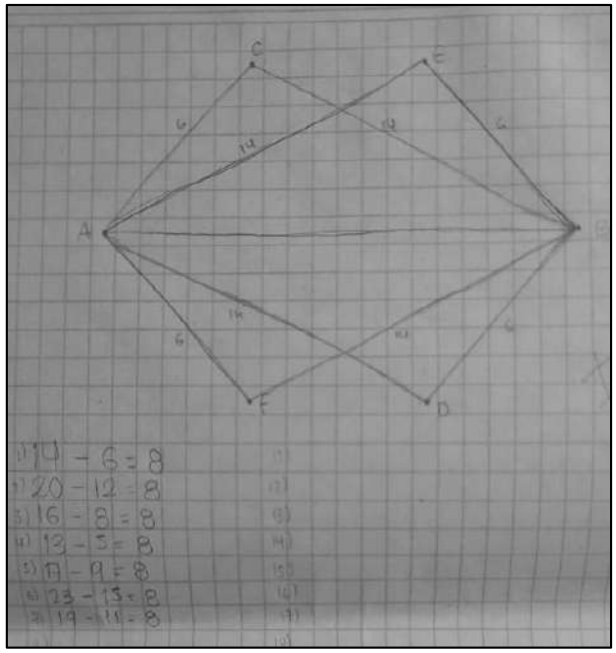


Nota. Representación de la solución del problema a partir del reconocimiento con la elipse, presentando registros gráficos, algebraicos y numéricos.

El tercer resultado que se hace notar es el presentado a continuación en donde se establece como ejemplo la constante 8 y se crean los puntos C, E, D y F de manera gráfica. Además, se plantean las distancias que deberían tener los otros puntos a construir con respecto a los fijos (A y B). Cabe resaltar que en el gráfico dan cuenta de la característica del valor absoluto realizando los triángulos simétricos; sin embargo, al analizar lo expresado de manera numérica no reflejan la misma conclusión ya que solo tienen en cuenta las diferencias positivas.

Figura 93.

Solución 3 del problema inicial para la hipérbola

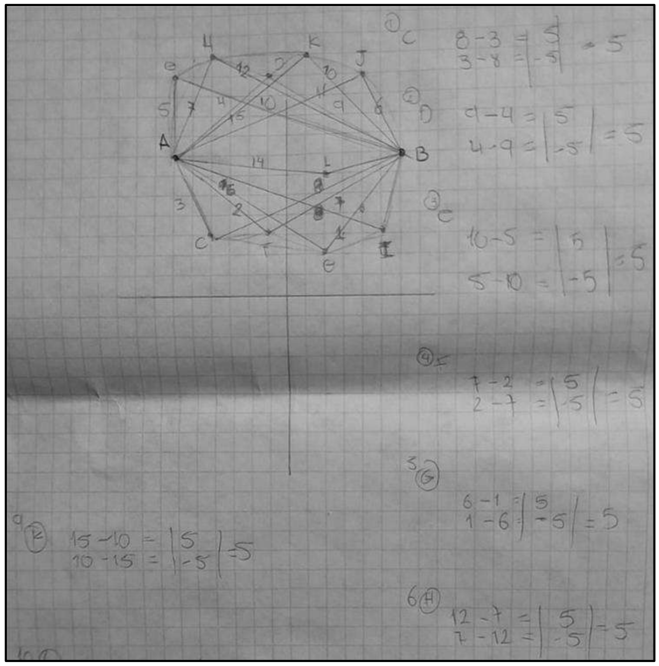


Nota. Construcción de cuatro puntos que cumplen la condición del problema, sin embargo, presentan dificultad al definir los siguientes puntos.

Otro producto entregado por un estudiante, muestra a partir de una representación gráfica y numérica la misma analogía expuesta en el segundo resultado en donde se asocia el problema de elipse con el de hipérbola. En este caso, el gráfico que contiene los puntos construidos revela esta asociación ya que con lápiz une los mismos formando una elipse. Sin embargo, no tiene en cuenta la dimensión de los triángulos creados por lo cual se le propone realizar este bosquejo en GeoGebra con las medidas descritas (el resultado se refleja en las Figuras 94 y 95).

Figura 94.

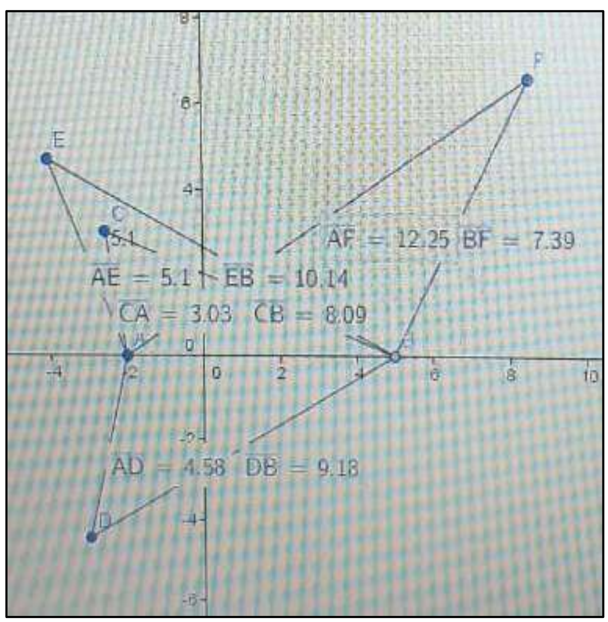
Solución 4 del problema inicial para la hipérbola



Nota. Representación aritmética de los puntos que se va a construir, presentando dificultad en el registro gráfico.

Figura 95.

Solución 4, parte 2 del problema inicial de la hipérbola

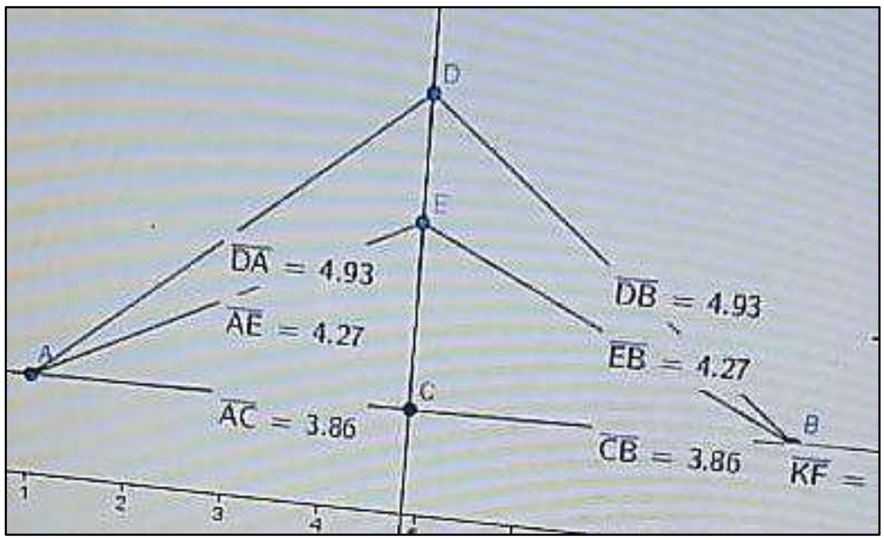


Nota. Representación mediante el uso de GeoGebra de los puntos que cumplen la condición, presentando dificultad al no tomar medidas exactas a las planteadas de manera escrita.

Finalmente, un grupo de estudiantes encuentra una solución particular del problema en donde el valor de la constante es cero. Esta línea encontrada con infinitos puntos que cumplen la condición de que el valor absoluto de la diferencia sea constante, es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Figura 96.

Solución 5 del problema inicial para la hipérbola



Nota. Representación en GeoGebra del caso particular de la hipérbola: Mediatriz.

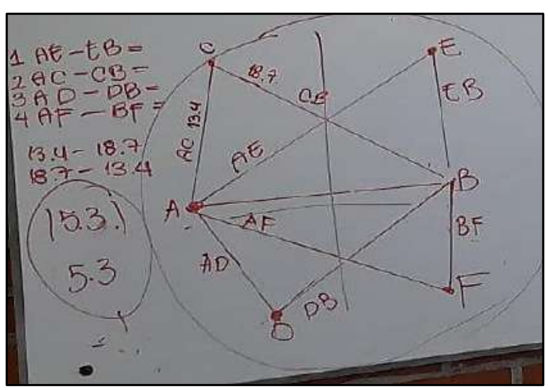
Nota. En esta tabla se observan los resultados obtenidos en la fase de exploración libre para el caso de la hipérbola.

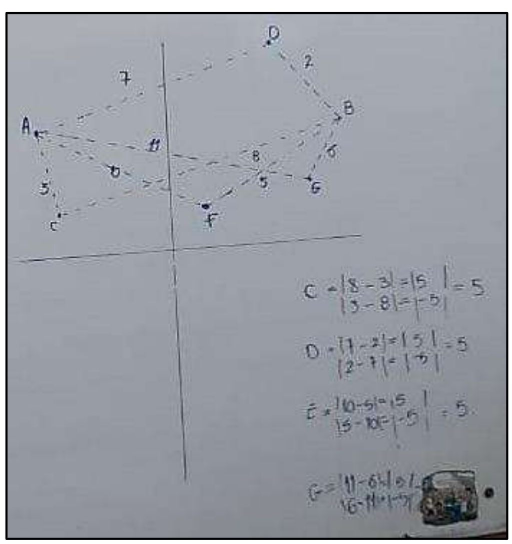
7.3.2. Socialización de los resultados obtenidos

Por cuestiones de tiempo se seleccionan solo tres resultados acertados y análogos sin indagar tanto en las dificultades vislumbradas. Aunado a ello, se toma la socialización como sustitución de la tarea 1 para abrir paso a la tarea 2 una vez apreciadas las tres respuestas expuestas por los estudiantes.

Tabla 18.

Evidencias en la fase de socialización de resultados obtenidos para el caso de la hipérbola

Objetivo	Resultados
Este espacio se abre con el ánimo de indagar en las concepciones, dificultades e ideas que tienen los estudiantes al abordar el problema. Por ejemplo, se puede encontrar que el estudiante X_1 deduzca que la constante es positiva mientras que el estudiante X_2 plantee la constante de manera negativa. Ello debido a que la resta tiene	Este análisis se realiza a través de las transcripciones e imágenes tomadas en las videograbaciones. La primera palabra en el momento de socialización es tomada por el estudiante 2 quien describe su hallazgo con las siguientes palabras: - Estudiante 2: lo que yo traté de decir es que nos decían que tenía que tener los dos puntos fijos A y B (señala los puntos en el tablero) entonces construya 20 puntos y en cualquier plano literalmente ósea (dibuja un eje coordenado encima de la representación previamente dibujada donde priman los triángulos resultantes al trazar las distancias pedidas por el problema) en cualquier parte se puede construir (…) lo que yo me di cuenta (…) es que al restar AC-CB o cualquier punto EB-AE van a dar lo mismo ya sea valor absoluto o sea positivo, lo que el valor absoluto nos hace es que lo que está positivo siempre va a dar igual ya sea x y lo único es que ya sea dependiendo del plano (encierra en un círculo su representación) todo cambia. - Investigadora: ¿Qué es lo que cambia? - Estudiante 2: amm, cambia la medida y el resultado sólo se mantiene esto (encierra el valor que eligió como constante, en este caso: 5,3) y ya. **Figura 97**. *Socialización 1 del problema inicial de la hipérbola* 

<table>
<tr>
<td>en cuenta el orden de los valores implicados.</td>
<td>
Nota: Representación gráfica, algebraica y verbal de la solución del problema para la socialización grupal.
Si acoplamos la transcripción con el dibujo que realizó el estudiante para explicar su hipótesis de solución vemos que encuentra dos conjuntos de puntos, aquellos cuya diferencia es negativa y los que tienen diferencia positiva. Aunado a ello, de la transcripción se recoge la buena comprensión del problema ya que tiene presente todas las características allí solicitadas, desde las distancias implicadas hasta el reconocimiento del valor absoluto. Por otra parte, la explicación deja ver que el estudiante comprende que los focos pueden encontrarse en cualquier parte del plano enfatizando que lo esencial es conocer el valor de la constante.
Este resultado también es expuesto por otro estudiante desde la representación gráfica, algebraica y numérica. Esta socialización fue fructífera debido a que brindó una manera sistemática de hallar los puntos. Esta parte del establecimiento de la constante, atraviesa una manipulación numérica y termina con la gráfica de los puntos teniendo presente las distancias numéricas establecidas. Sin embargo, la fidelidad dimensional no se vislumbra en el dibujo por lo cual los puntos allí trazados no permiten ver la silueta de la cónica buscada.
Figura 98.
Socialización 2 del problema inicial de la hipérbola


</td>
</tr>
</table>

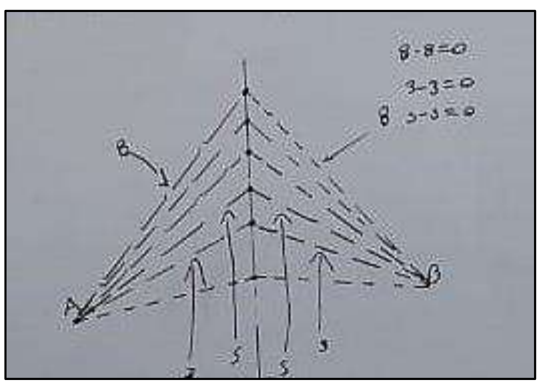
Nota. Representación gráfica y aritmética de la solución planteada por un estudiante al problema inicial de la hipérbola.

Finalmente, el estudiante explica su solución particular del problema de la siguiente manera,

- Estudiante 1: pues los puntos A y B (señala los puntos) me di cuenta de que al trazar la línea exactamente por la mitad del segmento (señala el segmento $\overline{AB}$) … Ehhh y ponemos todos los puntos de esa línea (señala la mediatriz de $\overline{AB}$), las distancias tanto de este lado (señala las distancias trazadas de los focos a un punto específico de la mediatriz que se encuentran del lado izquierdo del eje coordenado dibujado) van a ser iguales con las otras (…) entonces esta distancia más esta distancia da igual a cero (señala las distancias que pide el problema comenzando de arriba hacia abajo mientras continua hablando) esta distancia menos esta da cero, no importa en qué lugar de la línea se encuentre porque ese punto va a dar cero.

Figura 99.

Socialización 3 del problema inicial de la hipérbola



Nota. Representación gráfica y aritmética de la socialización del caso particular mediatriz.

Esta socialización culmina con la exposición de este caso particular de la hipérbola en donde se considera la constante cero. Cabe resaltar que el grupo

	de estudiantes que formuló esta solución fue el único que encontró los 20 puntos y siendo conscientes de ello, mencionan que los demás puntos se encuentran dentro de la recta. En síntesis, con las exposiciones de determinados trabajos se logró consolidar la comprensión del problema por lo cual se procede con la tarea 2.

Nota. En esta tabla se observan los resultados obtenidos en la fase de socialización para el caso de la hipérbola.

7.3.3. Exploración dirigida 1

Así como se ha venido exponiendo, la siguiente tabla revela los resultados obtenidos en la fase cuyo objetivo principal era la consolidación de la hipérbola como lugar geométrico. Cabe resaltar que en esta fase se evidencia mejoría respecto a los resultados encontrados con la cónica de la elipse.

Tabla 19.

Resultados de la exploración dirigida 1 para el caso de la hipérbola

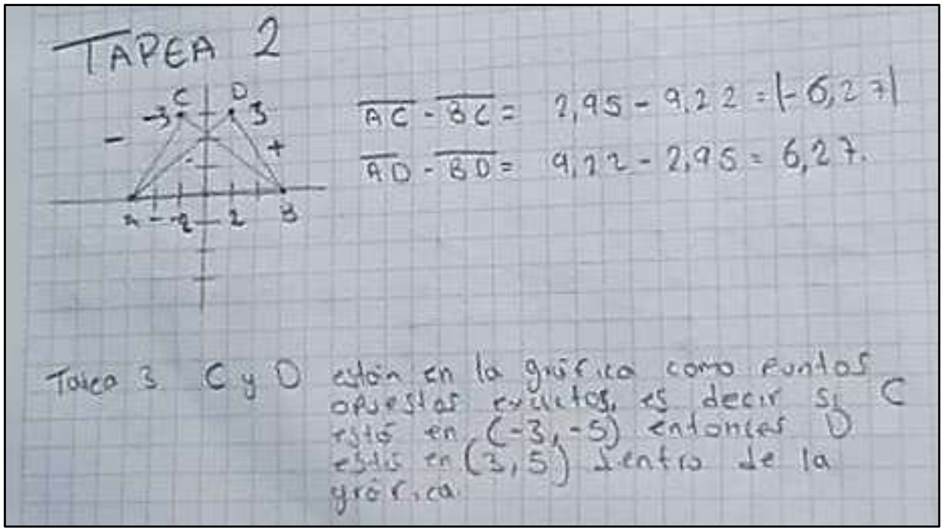
Objetivo	Resultados
Esta tarea tiene como objetivo encaminar a los estudiantes en la concepción de la hipérbola como un lugar geométrico. De esta manera con la primera pregunta se quiere que el	La primera cuestión de la tarea 2 arrojó resultados variados en términos de escritura, pero apuntan al objetivo en cuestión que consiste en valorar las diferencias de las distancias entre los puntos fijos y los construidos, y comprobar que hay una negativa y una positiva dando sentido al valor absoluto presente en el enunciado del problema inicial. **Figura 100.** *Solución 1 ítem 1 (Exploración dirigida 1- hipérbola)* Yo puedo decir que como la simetría daban lo mismo (se mantiene la simetría)pero cuando sacabamos la diferencia con el valor absoluto podríamos decir que AC daba negativo y DB daba positivo pero el valor absoluto nos ayudaba a qué los doss fueran constantes se mantienen.

alumno note que la diferencia de las distancias comprendidas por el punto C con respecto a A como a B es negativa y la diferencia de las distancias comprendidas por el punto D’ con respecto a A y B, es positiva. Además de esto, los estudiantes logran observar que la diferencia es negativa cuando la distancia menor es aquella que está más cerca del punto A y será positiva si la distancia menor es más cercana a B. En este sentido, las representaciones	*Nota.* Representación escrita de la interpretación de la actividad destacando propiedades como simetría y cumplimiento de la condición del problema inicial. La Figura 100 da cuenta del cumplimiento del objetivo y aunado a ello, deja ver la habilidad de interpretación debido a que con la actividad logran deducir una propiedad de la hipérbola: la simetría. En este sentido, otro estudiante plantea una solución de manera ejemplificada que da cuenta de la simetría, con la combinación de registros algebraico, de lenguaje natural y numérico de ello hay evidencia en la siguiente transcripción y Figura 101. - Estudiante 8: Ya tenemos los puntos A y B fijos ¿Cierto? Y dentro de la gráfica (señala el eje coordenado sobre el que está realizando el bosquejo de los puntos) Lo que estaba diciendo C está más cerca a A (señala los puntos C y A mientras habla) y D está más cerca a B y estos dos puntos (señala el punto C y D) son puntos opuestos exactos ¿Qué quiere decir esto? Por ejemplo (…) estos son números negativos (señala el cuadrante 2) y estos son números positivos (señala el cuadrante 1) (…) C está en el pongámosle menos… menos 2 y emm… la menos 3 (señala el punto ejemplificado, sin embargo, el punto al que se refiere tiene coordenadas (-2,3) ya que está en el cuadrante 2) y el D está en el dos y en el tres ósea son exactos pero opuestos (señala los puntos C y D mientras habla)

que los estudiantes pueden llegar a tener en cuenta son geométrica, algebraica y numérica. Seguido a esto, se propone una orientación que contiene un applet con el cual el estudiante puede generar nociones acerca del lugar geométrico que va a resultar. Con el applet se busca la comprensión de la hipérbola como lugar geométrico. Esta noción se concreta con la pregunta procedente en la que se busca que el estudiante

Figura 101.

Solución 2 ítem 1 (Exploración dirigida 1 - hipérbola

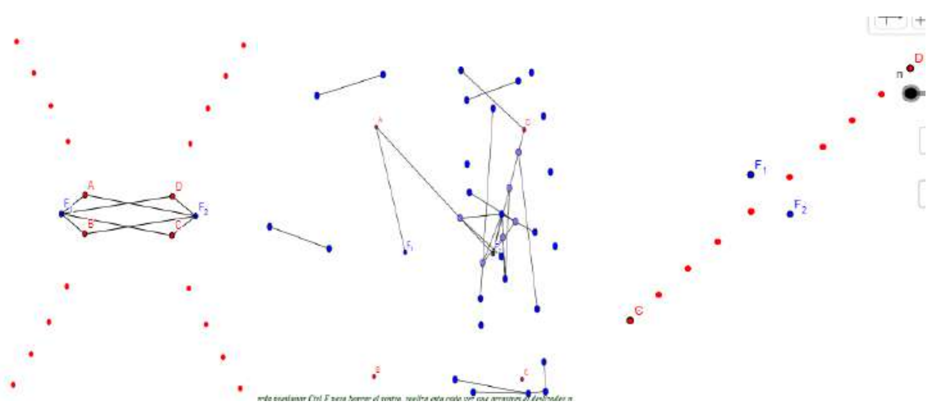


Nota. Representación gráfica, aritmética y de lenguaje natural de la simetría entre los puntos C y D.

Prosiguiendo con la descripción de los resultados hallados, con ayuda del applet planteado se obtuvieron algunos resultados como los que se ven a continuación.

Figura 102.

Exploración del applet en la actividad 2 (exploración dirigida 1-hipérbola)

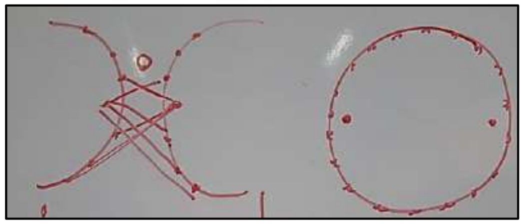


Nota: Exploraciones en applet teniendo en cuenta lo expuesto en la actividad 2 de fase tratada en este apartado.

trate de bosquejar mediante cualquier representación (gestual, gráfica o verbal) la hipérbola. Finalmente, la cuarta pregunta se plantea para que el estudiante sienta la necesidad de realizar la construcción de este lugar geométrico, pero considerando un enfoque más algebraico.	En la primera representación se evidencia una correcta ejecución de las instrucciones dadas para dar cuenta de la cónica estudiada como lugar geométrico. Ahora bien, al analizar la segunda representación se evidencian dificultades con el trazo de las distancias, pero ellas se justifican debido a que para esta sesión fue necesario que los estudiantes usaran el celular ya que no se disponía de computadores ese día. Finalmente, se observa algo curioso en la última imagen ya que mueven los puntos focales de tal manera que el rastro resultante sea la mediatriz del segmento $\overline{F_1F_2}$. Aunado a ello, en esta actividad un estudiante presenta en la combinación de registros gráfico y de lenguaje natural algunas características de la posible figura formada con respecto a lo que se mencionaba en el problema inicial, destacando que los puntos cumplían las condiciones del mismo (el valor absoluto de la diferencia de las distancias para cada punto con respecto a A como a B es constante). - Estudiante 1: lo que yo entendí, según estos al trazar las líneas, que descubrí, que si está el círculo (señala la representación de la hipérbola que dibujo al lado de la representación de la elipse) en el anterior estaba el círculo como tal (señala la representación de la elipse a la que se refiere como círculo con dos puntos internos) se veía fácil y sus dos puntos siempre estaban acá dentro (señala los focos de la elipse) (..) en este caso el círculo esta partido por la mitad y volteado (realiza un gesto con las manos en forma de c refiriéndose a una rama de la hipérbola) pero igual los puntos siguen estando al borde (señala los focos y los compara con los focos de la elipse dibujada) (…) aun así yo puedo hacer este y este (traza las distancias simétricas que algebraicamente se denominan como “e” y continua haciéndolo mientras habla) están a una distancia igual que al restarla me va a dar cero y así hago con este este, este, este y todos.

Figura 103.

Interpretación de la exploración del applet (Exploración dirigida 1-hipérbola)



Nota. Representación por reconocimiento de los objetos matemáticos mediatriz y elipse.

Al solicitar el trazo y medición de las distancias a las que refiere el enunciado del problema, los estudiantes podían enriquecer las representaciones del objeto en estudio tal y como se evidencia en la Figura 104, en donde incluso muestran mayor dominio con el lenguaje técnico matemático.

Figura 104.

Solución de la actividad 3(exploración dirigida 1-hipérbola)

Trazamos 6 distancias y aplicamos valor absoluto:
*6-2=4=|4|=4
2-6=-4=|-4|=4
*7.23-3.23=4=|4|=4
3.23-7.23=-4=|-4|=4
*1.05-6=-4=|-4| = 4
6-1.05=4=|4|=4
Dado lo anterior concluimos que el valor absoluto de la distancia es 4

Nota. Representación aritmética y lenguaje natural para exponer la diferencia constante como 4.

Con la culminación de esta tarea se construye la noción de hipérbola como lugar geométrico, sin embargo, aún no se formaliza el concepto permitiendo que los alumnos asocien por familiaridad la silueta construida. Algunas de las concepciones que dieron los estudiantes se presentan a continuación:

Figura 105.

Planteamientos para la actividad 4 (exploración dirigida 1-hipérbola)

- como un signo mayor y un menor
- Creo que podemos formar una estrella, un patrón parecido a una mándala.
- Dos líneas curvas q "se dan la espalda "
- Un círculo partido a la mitad y boltiado)(como asi

Nota. Reconocimiento por familiaridad de la representación gráfica al unir los puntos construidos en el applet.

Como colofón de esta fase se puede argüir que estas respuestas dadas por los estudiantes son similares, exceptuando la segunda que no refiere a la unión de los puntos construidos sino a la unión de las distancias que generan los puntos construidos.

Nota. En esta tabla se observan los resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 1 para el caso de la hipérbola.

7.3.4. Explicación 1

El objetivo de esta fase es formalizar el nombre y los elementos de la sección cónica: hipérbola. Esta socialización es el primer paso para que los estudiantes se adentren en la deducción de la ecuación canónica de la hipérbola.

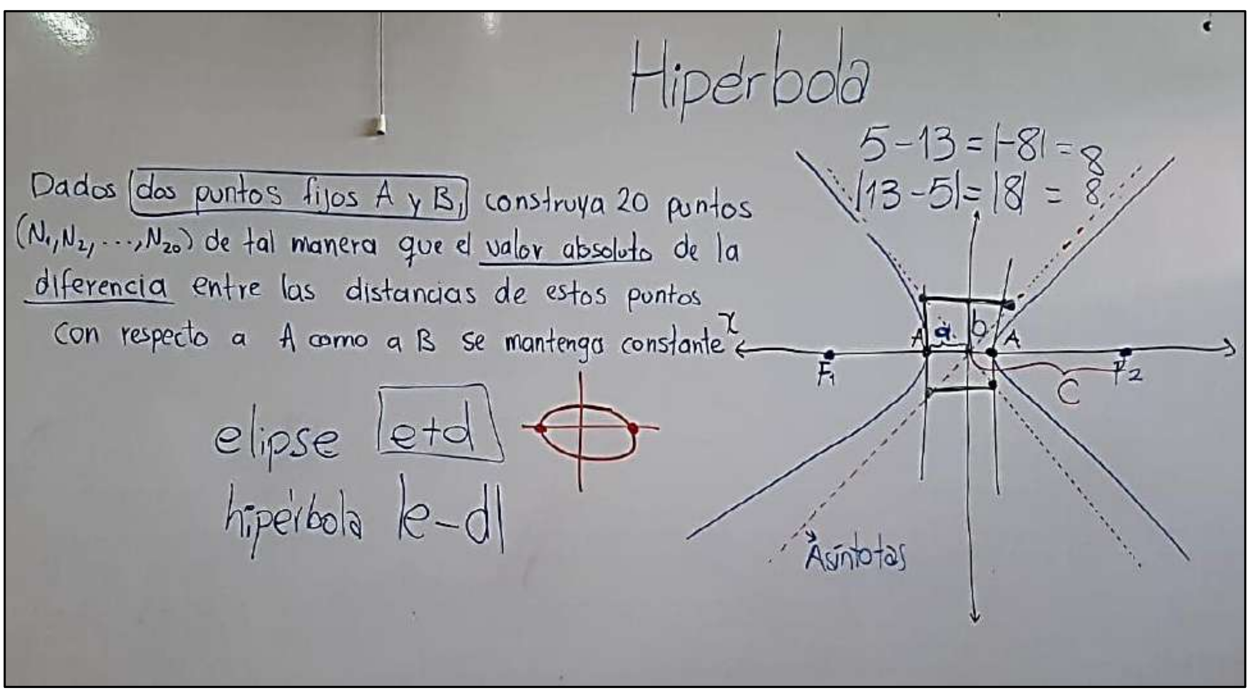
Cabe resaltar que el estudio de los elementos de manera dinámica lo hacen los estudiantes de forma activa por lo cual esta explicación aún no da cuenta de dicho dinamismo.

En este sentido, algunos de los elementos que se formalizan son los vértices, focos, ejes y asíntotas. La exposición de la cónica hipérbola difiere de la realizada para la elipse debido a que en esta no se realiza el proceso de generalización con múltiples ejemplos, sino que se parangonan los elementos conocidos de la elipse con los de la nueva cónica presentada: la hipérbola.

La explicación comienza pidiendo a los alumnos que expresen lo encontrado en las tareas anteriores. De allí, se mencionan de manera superflua las características generales de la hipérbola (curva abierta y simétrica respecto a dos ejes perpendiculares entre sí) con ayuda de los estudiantes. Luego, se vuelve a recordar la definición de la elipse y se procede con la descripción de sus elementos. Esta comienza con la definición del punto centro y los focos, de allí se destacan los ejes: principal y secundario y las asíntotas, que resultan ser el único elemento nuevo que difiere de los elementos de la elipse (ello se puede observar en la Figura 106). Cabe resaltar que constantemente se solicita la participación de los estudiantes para constatar la consolidación de los elementos y se les pide valorar mentalmente las transformaciones que sufre la cónica al modificar los valores de a, b y c.

Figura 106.

Socialización de los elementos y formalización de la sección cónica: Hipérbola



Nota. Representación escrita, gráfica, algebraica y aritmética de los elementos de la hipérbola, realizando comparaciones con lo trabajado en elipse.

7.3.5. Exploración dirigida 3

Contrario a lo que sucedió con la cónica de la elipse, en esta tarea se obtuvieron varios resultados favorables con menos errores y mayores representaciones. Esto se describe en la tabla 19 que contiene el fruto de los análisis de la fase en cuestión.

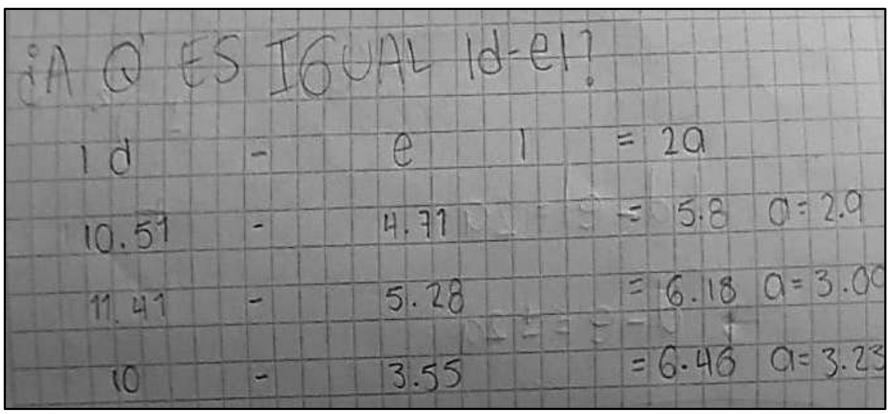
Tabla 20.

Resultados de la fase de exploración dirigida 3 para el caso de la hipérbola

<table>
<tr><th>Objetivos</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td>Con la segunda pregunta, ¿A qué es igual $|d-e|$?, se pretende identificar algebraicamente con ayuda de representaciones numéricas, gráficas, algebraicas y escritas que el valor absoluto de la diferencia entre los puntos que conforman la hipérbola y sus focos es constante, y el valor de esa constante es 2a.</td><td>Para la cuestión que indagaba sobre el valor absoluto de la diferencia se obtuvieron representaciones en la combinación de registros tabular, numérico y algebraico. La Figura 107 da cuenta de esta combinación de registros mediante la manipulación numérica.

Figura 107.

Solución 1 (exploración dirigida 3-hipérbola)



Nota. Tratamiento del registro numérico, tabular y algebraico para generalizar $|d-e|$

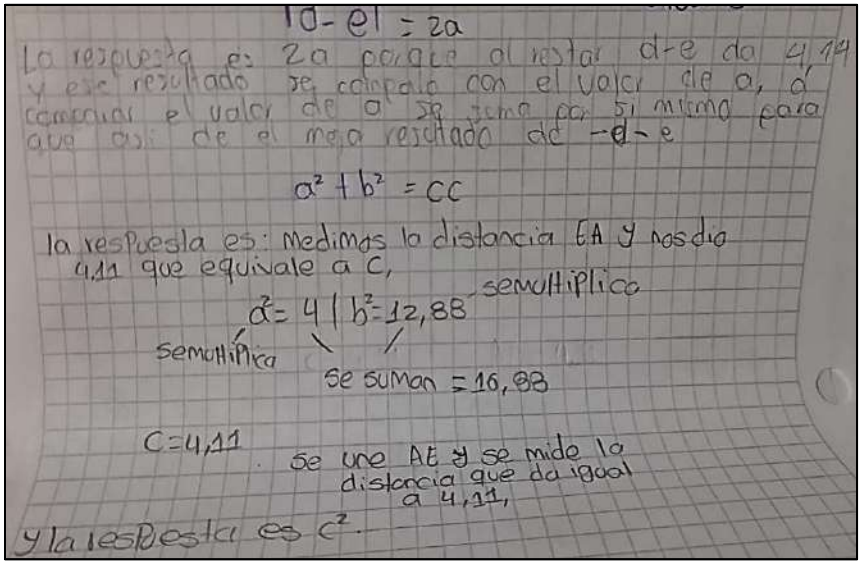
Otra solución a considerar combina los registros previamente mencionados y adiciona el de lenguaje natural. Además de ello, se destaca el uso de la sugerencia que involucra el trazo y comparación del segmento AE con la distancia c.</td></tr>
</table>

Así mismo, se pretende que den cuenta de manera análoga que existe una relación pitagórica entre los valores de a, b y c.

Cabe resaltar que para llegar a estas respuestas el estudiante tiene la posibilidad de realizar múltiples intentos y de ellos recibe interacciones del applet que guían paulatinamente al mismo hacia la solución.

Figura 108.

Solución 2 (exploración dirigida 3-hipérbola)

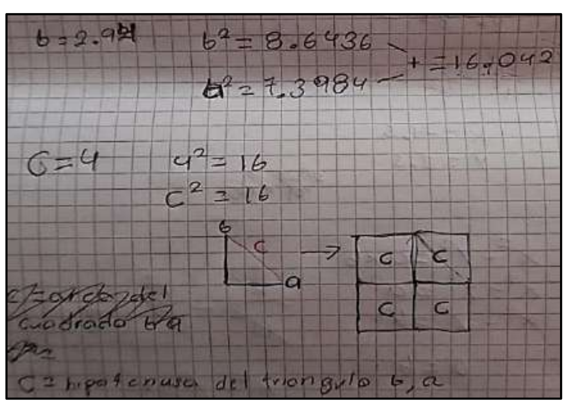


Nota. Tratamiento del registro numérico, tabular, lenguaje natural y algebraico para generalizar $|d - e|$ y $a^2 + b^2$.

Siguiendo con el análisis en términos de las representaciones se obtiene esta combinación de registros algebraico, numérico y gráfico. Es destacable la coordinación de registros que se evidencia en esta imagen ya que aclara la relación pitagórica desde la manipulación numérica y la constata con una ejecución geométrica que deja entrever el uso de la sugerencia referente al trazado de la distancia AE.

Figura 109.

Solución 3 (exploración dirigida 3- hipérbola)

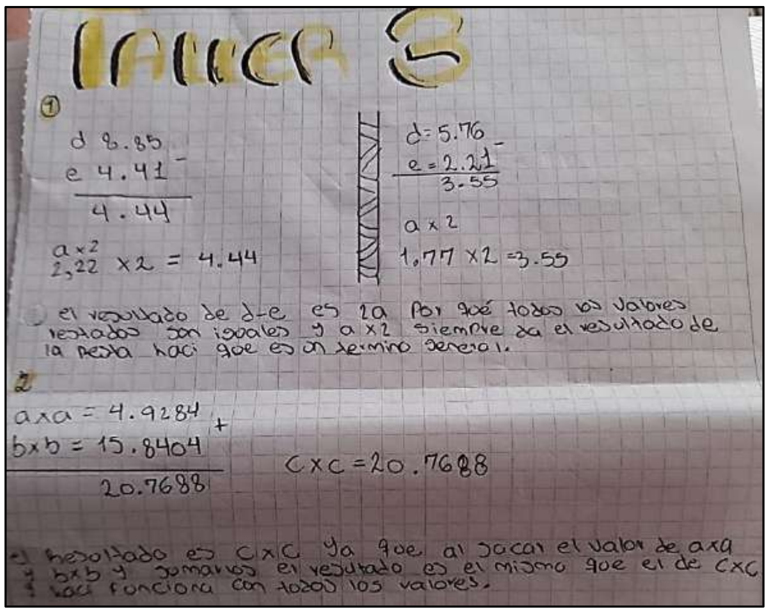


Nota. Representación pitagórica desde el registro aritmético.

Finalmente, se tiene presente este último resultado debido a que la esquematización de la solución deja ver el proceso de generalización realizado por el grupo de estudiantes para deducir las expresiones algebraicas. Por otra parte, se destaca la notación algebraica implementada ya que no elevan al cuadrado los términos, sino que usan la expresión en términos de producto.

Figura 110.

Solución 4 (exploración dirigida 3-hipérbola)



Nota. Representación aritmética, algebraica y de lenguaje natural con el fin de generalizar los valores de la actividad trabajada.

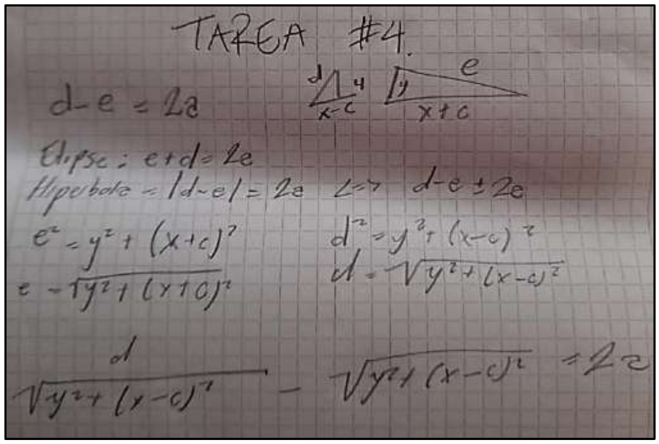
La tarea 4 tiene el objetivo de que el estudiante deduzca la ecuación canónica de la hipérbola. Es necesario	De manera análoga con la tarea 3, al comparar los resultados obtenidos con la generalización de la ecuación de la hipérbola y de la elipse se evidencian más respuestas favorables para esta cónica. Una de ellas se ilustra en la Figura 111, en donde se realiza una comparación entre las ecuaciones que representan el problema de cada cónica en términos de a, d y e. Además de ello, se puede resaltar el uso de la propiedad pitagórica para deducir la ecuación de la hipérbola en términos del plano cartesiano. Esto último deja

enfatizar que la actividad brinda la ecuación resultante (o la ecuación a la que deben llegar) ya que el objetivo de este trabajo investigativo consiste en indagar en las habilidades del proceso de representación por lo cual se valoran los procedimientos (principalmente algebraicos) que efectúan los estudiantes para llegar a la solución del problema planteado inicialmente. Puesto que es con la ecuación que realmente se construyen los 20 puntos pedidos

ver la coordinación de registros algebraico y geométrico necesarios para llegar al planteamiento de la ecuación.

Figura 111.

Solución 1 tarea 4 (exploración dirigida 3)

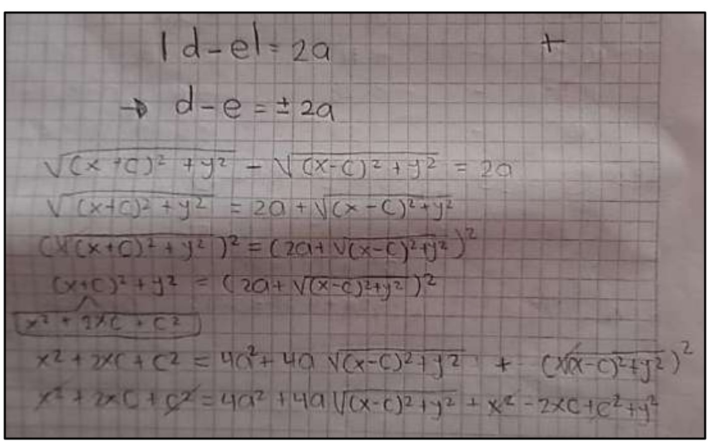


Nota. Representación de la conversión de registro gráfico al algebraico, siendo el primer paso para la deducción de la ecuación de la hipérbola.

Siguiendo con el análisis de esta fase se obtiene un resultado que revela la manipulación algebraica que realiza un grupo para llegar a la deducción de la ecuación canónica de la hipérbola; no obstante, a pesar de que en la parte superior indiquen que la expresión del valor absoluto es equivalente a la que tienen en el siguiente renglón no hacen uso de ello considerando sólo la diferencia positiva de la hipérbola.

Figura 112.

Solución 2 de la tarea 4 (exploración dirigida 3-hipérbola)



inicialmente.

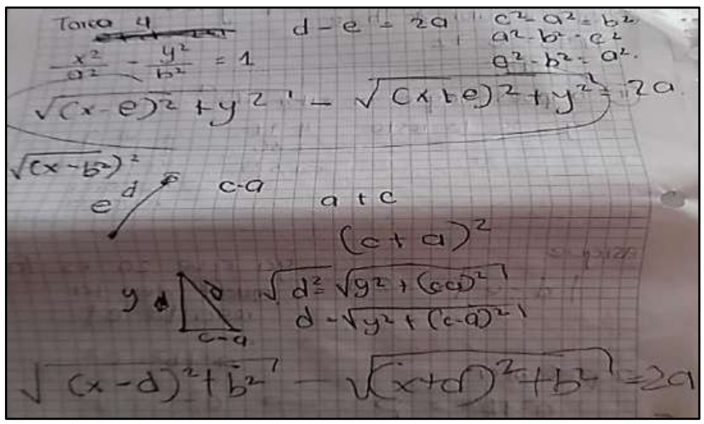
Para esta cónica no se planteó una tarea 4a como se hizo con la elipse debido a que para la deducción se usaban las mismas herramientas (propiedades, teoremas, entre otros). Sin embargo, se puede considerar la realización de esta tarea para constatar la claridad de los procedimientos algebraicos realizados en la elipse y con ello vislumbrar el entendimiento o no de las herramientas algebraicas usadas

Nota. Dificultad al plantear $d - e = \pm 2a$ y luego no trabajar sobre este registro.

Finalmente, se obtiene otro resultado que da cuenta de la coordinación de registros algebraico y gráfico, sin embargo, en este se enfatiza que inicialmente no tenían claridad de los elementos de la hipérbola por lo cual consideran la distancia “c” como “a” y viceversa. Al notar ello, se realiza una intervención en clase recordando los elementos previamente vistos con lo que se consigue una corrección al final del planteamiento inicialmente dado.

Figura 113.

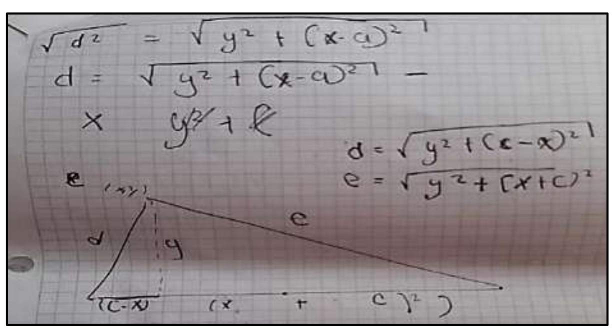
Solución 3 de la tarea 4 (exploración dirigida 3-hipérbola)



Nota. Dificultad al plantear las distancias de los triángulos formados, pues no se presenta claridad al manipular los elementos de la hipérbola.

Figura 114.

Solución 3 con correcciones de la tarea 4 (exploración dirigida 3-hipérbola)



Nota. Representación gráfica y algebraica de las distancias d y e.

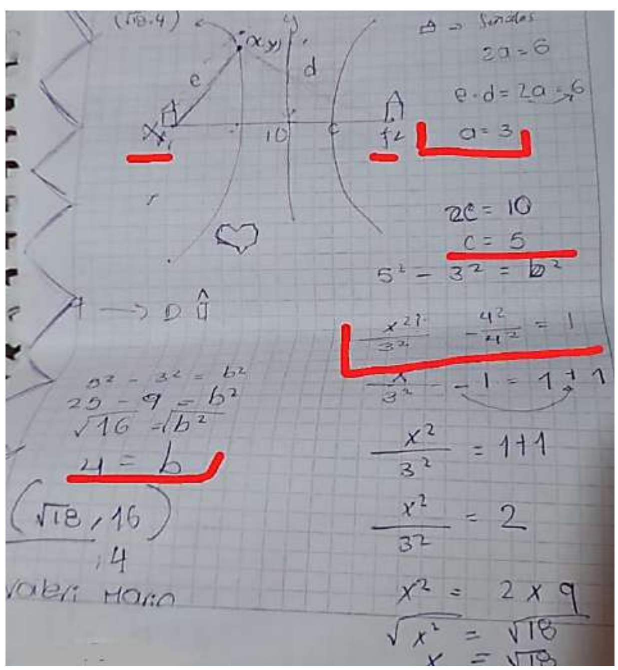
Nota. En esta tabla se observan los resultados obtenidos en la fase de exploración dirigida 3 para el caso de la hipérbola.

7.3.6. Tarea retadora

De esta fase, distinto a lo que aconteció con la tarea retadora de la elipse, se obtuvieron menos resultados debido a múltiples cuestiones como el factor tiempo y la omisión de algunas fases explicativas y dirigidas.

Tabla 21.

Resultados de la tarea retadora para el caso de la hipérbola

Objetivo	Resultados
El fin último de esta tarea es que el estudiante use lo aprendido con las tareas previas y resuelva el problema planteado. Para hacerlo debe tener clara la definición de hipérbola como lugar geométrico con el fin de comprender que el contexto de la tarea retadora sitúa el barco en una hipérbola	Uno de los resultados obtenidos revela la habilidad de interpretación y coordinación de los registros numérico, algebraico y gráfico. En esta se presenta una dificultad en cuanto a la notación ya que se evidencia en el planteamiento de la ecuación “e-d=2a” que omiten las barras de valor absoluto. **Figura 115.** *Solución 1 de la tarea retadora-hipérbola* 

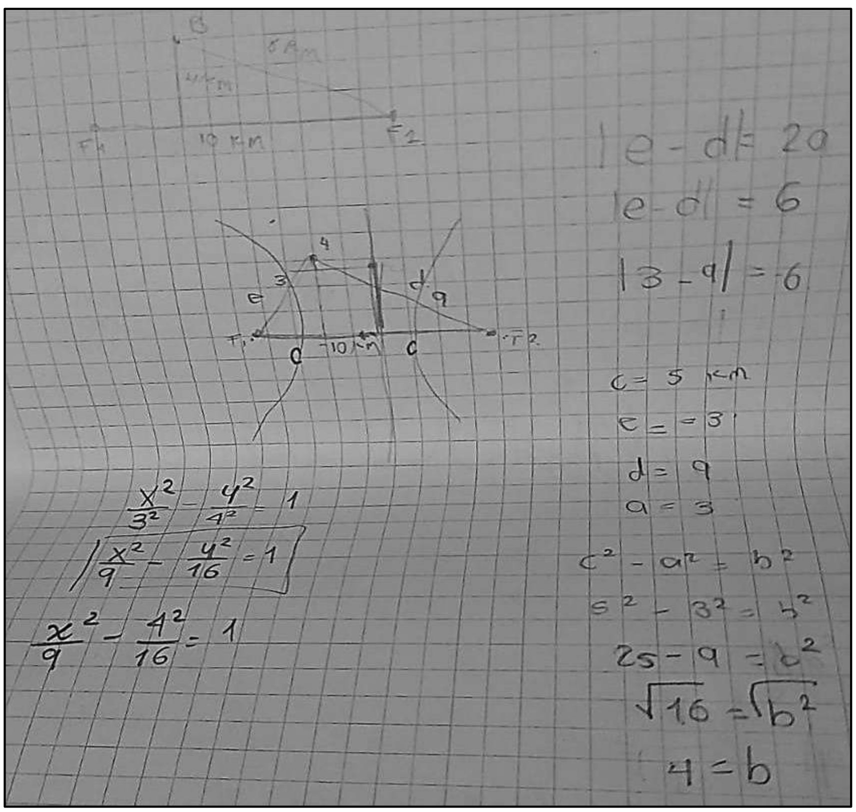
cuyo valor absoluto de la diferencia es de 6. Con esto claro obtienen el valor de a, siendo este igual a 3. Con ayuda de este valor y el dato proporcionado por el contexto del problema (las torres se distancian por 10 km, si se toman como los focos de una hipérbola, se tendría el valor de la semidistancia focal: 5) se puede hallar el valor de b (haciendo uso de la propiedad pitagórica que tiene la hipérbola) con el que se termina planteando la

Nota. Registro de diferentes tipos de representación como gráfica, algebraica y aritmética a partir de una situación problema.

Pese a lo visto anteriormente, no todos los grupos consiguieron la respuesta, pero cumplieron parte de los objetivos planteados para esta tarea. En la Figura 116, se vislumbra el uso de la propiedad pitagórica para hallar el valor de b, lo cual muestra dominio en esta relación que cumple la hipérbola. Además, se evidencia que ejecutan un tratamiento numérico-algebraico al principio de la solución debido a que particularizan las distancias e y d con los valores de 9 y 3 para que se cumpla la relación pedida. Sin embargo, no realizan el despeje de la ecuación para encontrar el valor de x y así hallar la posición del barco.

Figura 116.

Solución 2 de la tarea retadora-hipérbola



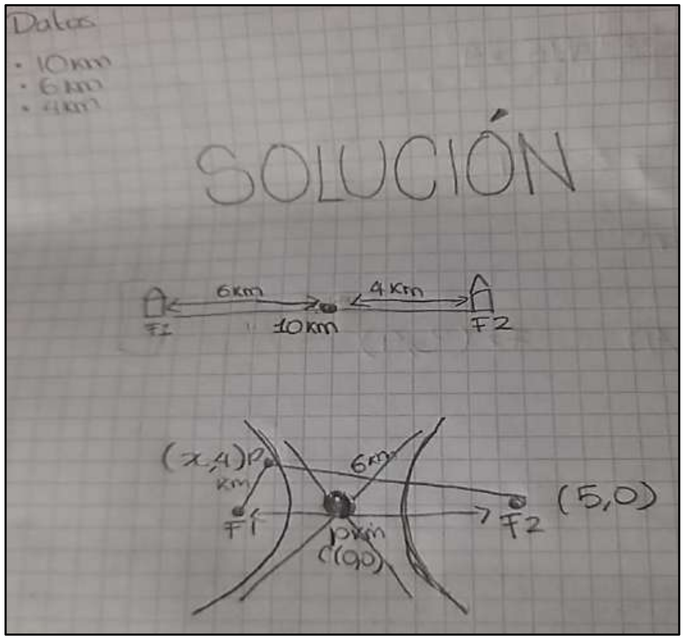
Nota. Representación gráfica, algebraica y numérica del problema planteado, esto sin determinar el valor de *x*.

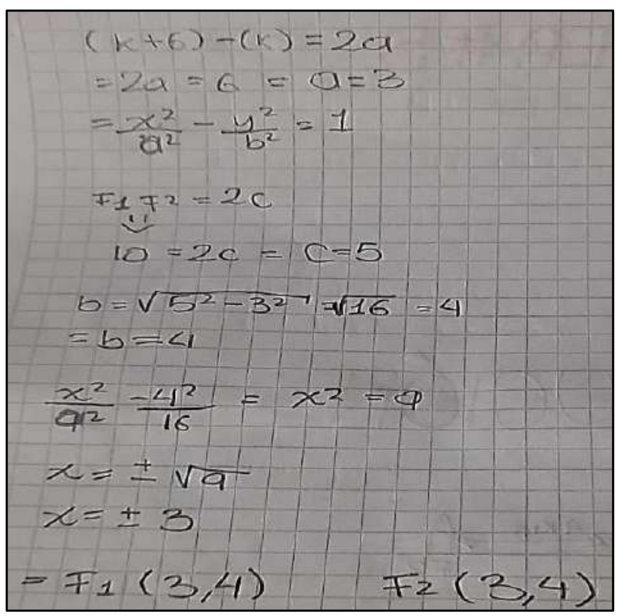
trayectoria sobre la que se mueve el barco. Es así que lo último que debería hacer el estudiante es usar la coordinación de las representaciones tabular, algebraica y geométrica para saber el punto exacto donde se encuentra el barco. Ello lo hace al usar la ecuación hallada de la representación gráfica y/o escrita para buscar el punto mediante la tabulación del punto cuya segunda coordenada es 4 (que es la

Finalmente, se tiene un resultado parcialmente correcto que también cumple con uno de los objetivos planteados para esta tarea (uso comprensivo de la relación pitagórica). No obstante, presentan una confusión al plantear la ecuación de la hipérbola sobre la que se encuentra el barco y no sustituyen el valor de a por lo cual no consiguen despejar correctamente el valor de x.

Figura 117.

Solución 3 de la tarea retadora-hipérbola





distancia entre el barco y la costa).	*Nota.* Representaciones gráfica y algebraica presentando dificultad en la manipulación de la ecuación de la hipérbola.

Nota. En esta tabla se observan los resultados obtenidos en la tarea retadora para el caso de la hipérbola.

8. Ajustes a la secuencia

Siguiendo las ideas planteadas por la estrategia de experimento de enseñanza, en este apartado se revelan los ajustes realizados tanto a la secuencia como al diagnóstico según lo vislumbrado paulatinamente en el aula de clases. Es necesario aclarar que los cambios realizados en el diagnóstico giran en torno a los estudiantes de la institución educativa, mientras que los cambios realizados a la secuencia didáctica se extraen de lo visto con el pequeño grupo de personas al que se les realizó la prueba piloto de la que se habla en el diseño metodológico.

8.1. Diagnóstico

Respecto al diagnóstico se tenía planteada una duración no mayor a 40 minutos, sin embargo, al inspeccionar la sesión se decidió dar 20 minutos más retándole tiempo a la discusión de los resultados obtenidos. Por otra parte, se tenía planificada la implementación de esta prueba de manera virtual; sin embargo, al no contar con los medios necesarios (computadores o tabletas) se optó por realizar un diseño impreso.

8.2. Taller 1

Las actividades planificadas para la elipse sufrieron dos tipos de cambios, los planteados para la secuencia inicial y los que surgían paulatinamente a medida que se ejecutaban las actividades en clase. En este apartado se describen en primer lugar, las modificaciones realizadas a la secuencia a modo de comparación y, en segundo lugar, se especifican en prosa los cambios en la planeación final.

Tabla 22.

Ajustes de la secuencia inicial de la elipse

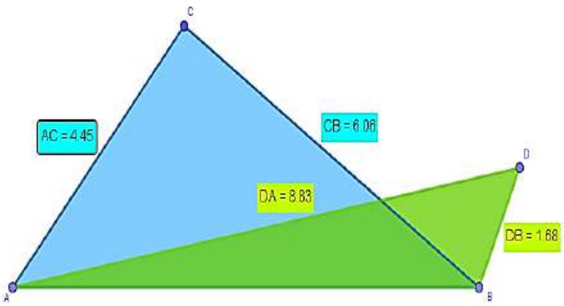
Secuencia inicial de la elipse	Secuencia final de la elipse
Con el ánimo de esquematizar la comprensión del problema se plantean unas preguntas orientadoras que le permiten al estudiante valorar los resultados conseguidos en la fase de exploración libre. Estas son: • ¿Qué significa que los puntos A y B se mantengan fijos? • ¿Qué entiendes por el enunciado “la suma de las distancias entre estos dos puntos con respecto a A y B se mantiene constante”? • ¿A qué distancias se refiere el enunciado del problema? Justifique Teniendo presentes las distancias comprendidas de cada punto construido con respecto a A como a B, responda: • ¿Qué implica que la suma sea constante? • ¿Cómo podemos garantizar que la suma de esas distancias pedidas es constante?	Al implementar la secuencia inicial a personas ajenas del estudio y consultar con el director del proyecto se modifican, en términos gramaticales, las cuestiones planteadas de la siguiente manera: • ¿Qué significa que los puntos A y B se mantengan fijos? • ¿A qué distancias se refiere el enunciado del problema? Justifica Teniendo presentes las distancias comprendidas entre cada punto construido con respecto a A como a B, responda: • ¿A qué se refiere el enunciado cuando se indaga por "la suma constante de las distancias"? Justifica • ¿Cómo podemos verificar que la suma de esas distancias pedidas es constante?
Prosiguiendo con la descripción de la secuencia inicial se plantea una segunda	A raíz de otra reunión con el director del proyecto y múltiples discusiones se obtuvieron

actividad cuyo fin último apunta a la concepción de la elipse como un lugar geométrico. La tarea comienza con la siguiente instrucción:

Note que con cada punto construido se genera un triángulo

Figura 118.

Representación gráfica de la tarea 2, elipse



Nota. Representación inicial de la tarea 2 para la secuencia de la elipse.

Luego de ello se indaga por los elementos haciendo las siguientes preguntas:

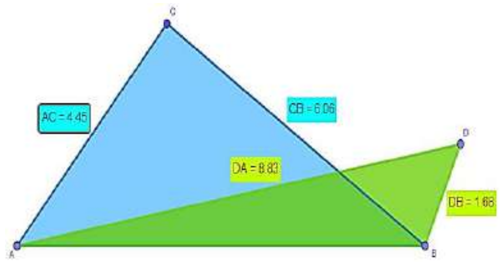
- ¿Qué características tienen estos triángulos formados?
- ¿Qué herramienta nos permita garantizar que la suma de los tres lados es contante para cada triángulo formado?
- ¿Cómo usamos esta herramienta para construir los puntos?
- ¿Qué figura crees que se forme al unir los 20 puntos construidos?

modificaciones considerables en términos estructurales y gramaticales. De esta manera, en la secuencia final se obtiene la siguiente actividad que incluye preguntas textuales, applets interactivos y sugerencias:

Note que los puntos C y D cumplen con la condición del problema inicial, analice:

Figura 119.

Representación gráfica final de la tarea 2, elipse



Nota. Representación final de la tarea 2 para la secuencia de la elipse.

- ¿Qué características tienen estos triángulos formados?

(¿Qué nos podría garantizar que la suma de los lados es constante para cada triángulo formado?).

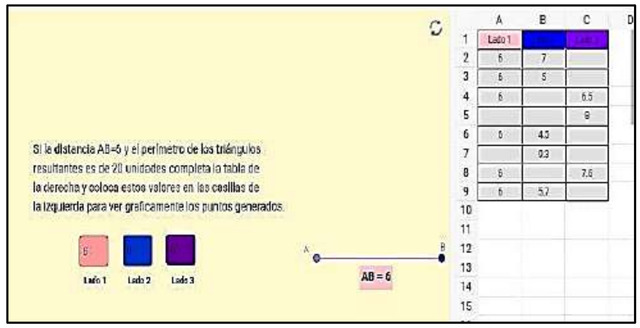
Teniendo en cuenta la respuesta anterior, analiza:

- Si la distancia AB es de 6 unidades y el perímetro de los triángulos resultantes es de 20 unidades completa la tabla de la derecha y coloca estos valores en las casillas de la izquierda para ver gráficamene los puntos generados.

- ¿Cómo podremos construir 100,1000 o 10000 puntos con esta característica?

Figura 120.

Representación final del applet de la tarea 2, elipse



Nota. Representación final del applet para definir la elipse como lugar geométrico.

- ¿Qué figura crees que se forme al unir los 20 puntos construidos?
- ¿Cómo podríamos construir 100, 1000, o 10000 puntos con esta característica?

Para la exploración de los elementos de la elipse como lugar geométrico se planteó inicialmente un listado de actividades que comienzan de lo particular para llegar a lo general.

El siguiente applet inaugura esta exploración planteando lo siguiente:

Arrastra el deslizador naranja para visualizar algunos puntos que conforman una elipse y analiza qué elementos se pueden destacar de ella.

Las actividades planteadas inicialmente sirvieron como base para lo que posteriormente se consolidaría como las tareas 3 y 5 de la secuencia para la elipse; sin embargo, se realizaron múltiples modificaciones dejando invariante únicamente el objetivo de explorar elementos y propiedades de la cónica en estudio.

De esta manera se obtienen las tareas a continuación descritas:

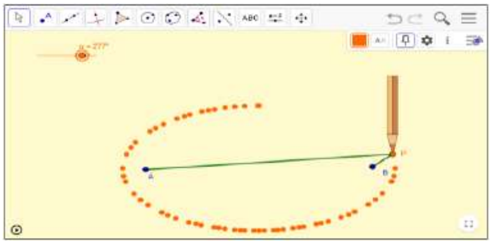
Tarea 3 (Parte 1)

El applet muestra en el plano cartesiano, el lugar geométrico de todos los puntos C, cuya suma de distancia a los puntos F1 y F2 es constante. Este lugar geométrico se llama ELIPSE.

- Arrastre los puntos **C**, **F1** y **A**; una vez hecho

Figura 121.

Applet inicial para la exploración de elementos y propiedades de la elipse



Nota. Applet inicial para la exploración de elementos y propiedades de la elipse.

De allí se exponen las siguientes preguntas,

- ¿Qué características puedes destacar inicialmente de la elipse?

Activa el eje coordenado y responde:

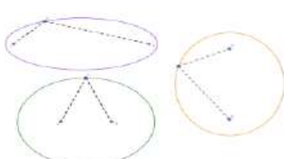
- ¿Qué elementos intervienen en la construcción de una elipse?

Seguido a ello se les propone analizar un conjunto de representaciones gráficas de la elipse con el fin de analizar algunas propiedades propias de la cónica con la siguiente actividad:

A continuación, tienes tres elipses diferentes, analiza sus elementos y responde:

Figura 122.

Representación gráfica de elipses

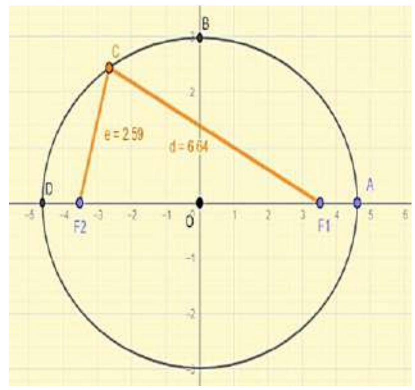


Nota. Representación gráfica para caracterizar características de la elipse.

esto explore y analice qué varía y que no (variantes e invariantes) entre los elementos de la elipse y el plano cartesiano.

Figura 126.

Applet final para la exploración de elementos y propiedades de la elipse



Nota. Applet final para la exploración de elementos y propiedades de la elipse.

Tarea 3 (Parte 2)

Teniendo en cuenta que $|\underline{OA}| = a; |\underline{OB}| = b;\quad |\underline{OF1}| = c;\quad |\underline{F2P}| = d;$ $|\underline{F1P}| = e$, conteste las siguientes preguntas:

1. $d + e = ?$
2. $b^2 + c^2 = ?$

Nota: En esta actividad los estudiantes pueden interactuar con el applet ya que con cada respuesta incorrecta se dan retroacciones que permiten al estudiante acercarse a la respuesta desde diferentes representaciones.

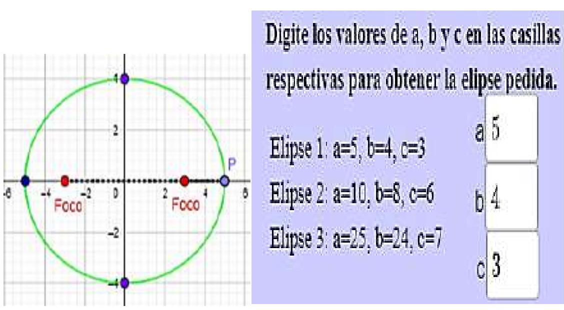
- ¿Qué elementos tienen en común las tres elipses?
- ¿Qué elementos difieren en las tres elipses?

Para la tercera actividad se hace uso de la hoja de cálculo con la intención de verificar que la suma entre las distancias de los puntos con respecto a A como a B es constante.

- Calcula el valor de esta constante para cada elipse determinada por las triadas de valores a, b y c.

Figura 123.

Applet inicial para determinar la relación entre a, b y c



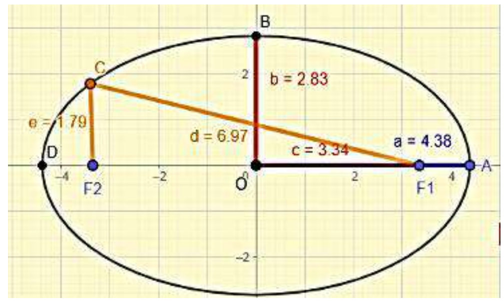
Nota. Representación dinámica inicial para dar cuenta de las propiedades de suma constante y de la relación entre *a, b* y *c*.

- Con ayuda de la hoja de cálculo, halle el valor constante de las sumas para cada elipse y regístrelo en este espacio.
- ¿Qué puedes decir de este valor constante?

Finalmente, la actividad que culmina esta exploración dirigida se dota de applets y preguntas que apuntan a la determinación de

Figura 127.

Applet final para la exploración de las relaciones d+e *y* $b^2 + c^2$



Nota. Representación dinámica para dar cuenta de las propiedades de suma constante y de la relación entre *a, b* y *c*.

Para la primera pregunta las retroacciones dadas son:

- Lleve el punto P hasta el punto D o A. Compare el valor de la suma d+e con cualquier valor de a y escribe la suma en términos de a.
- Compare el valor de la suma d+e con el valor de a ¿Qué relación hay entre d+e y a para cualquier a?
- Abra la vista “Hoja de Cálculo” y compare los valores de la suma de d+e (Columna C) con el valor de a (Columna D). Mueva el punto A y P y compare ¿Qué relación existe?

Para la segunda pregunta la retroacción es:

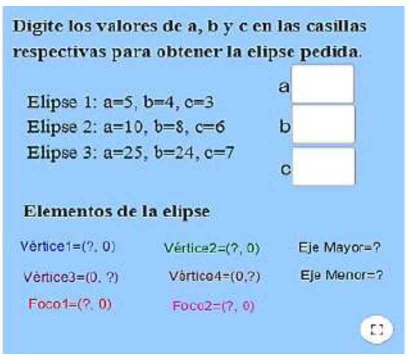
- Lleve el punto C hasta el punto B. ¿Qué relación existe entre los segmentos a, b y c? Escriba la suma de los cuadrados de b y c en términos de a.
- Compare la suma de los cuadrados de b y c

los cantidades variantes e invariantes de la cónica.

Se comienza con un applet que contiene una vista grafica con el plano cartesiano acompañada de otra vista con instrucciones planteadas como se ve en la Figura 118.

Figura 124.

Actividad inicial de valores variantes e invariantes



Nota. Representación dinámica inicial para detrminar valores variantes e invariantes.

Luego de ello se solicita a los estudiantes que completen la tabla con los valores obtenidos en el anterior applet.

Figura 125.

Continuación del applet planteado en la Figura 124

	Vértice 1	Vértice 3	Foco 1
Elipse 1			
Elipse 2			
Elipse 3			

Nota. Representación tabular de los valores obtenido en el applet de la Figura 118.

con a. Escriba a qué es igual la suma de los cuadrados de b y c en términos de a.

Tarea 5

Con ayuda del applet deduzca diferentes propiedades de la elipse.

1. ¿Qué sucede si a<b? ¿Qué sucede con los focos?

2. La ecuación de la elipse vertical está dada por

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (*)$$

Compare las características de esta ecuación (*) con la ecuación de la elipse encontrada y socializada en grupo.

3.Arrastra los deslizadores a y b y responde:

a) ¿Qué sucede cuando la distancia focal es grande?

b) ¿Qué sucede cuando la distancia focal es pequeña?

c) ¿Qué sucede cuando la distancia focal es nula?

4. ¿La circunferencia es una elipse? Justifica tu respuesta

5. ¿Qué características destacas de la circunferencia?

6. A partir de la ecuación de la elipse deduzca la ecuación de la circunferencia dada por

$x^2+y^2=r^2$.

Esta tarea va acompañada de las siguientes indagaciones:

- Vértice 1

¿Qué magnitud se mantiene constante?

¿Qué magnitud varía?

- Vértice 3

¿Qué magnitud se mantiene constante?

¿Qué magnitud varía?

- Foco 1

¿Qué magnitud se mantiene constante?

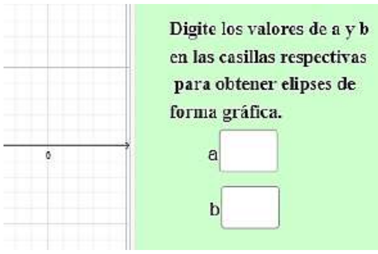
¿Qué magnitud varía?

- Establezca las coordenadas del vértice 1, el vértice 3 y el foco para cualquier elipse.
- Note que cuando P está sobre el vértice 3 se genera un triángulo rectángulo.
- Determine las dimensiones de este triángulo generado al superponer el punto P sobre el punto de corte de la elipse con el eje y.
  (Sugerencia: Use la herramienta Polígono para visualizar el triángulo en cuestión)

Para la generalización de la ecuación canónica de la elipse se diseñó un applet (análogo al de la actividad 3 previamente expuesta) guiado con preguntas como se ilustra a continuación.	De manera análoga con el análisis anterior, se presentan cambios insondables en términos estructurales manteniendo el objetivo de dilucidar la ecuación canónica de la elipse. La actividad que cumple con este objetivo se plasma

Figura 128.

Applet inicial para la deducción de la ecuación de la elipse



Nota. Representación inicial del applet que conlleva la deducción de la ecuación de la elipse.

- Calcule la distancia del punto P al Foco 1
- Calcule la distancia del punto P al Foco 2

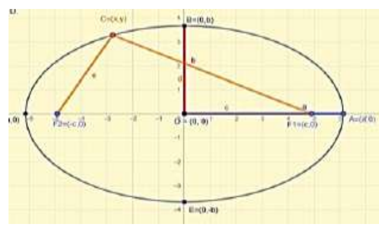
La tarea de deducción estaba planteada para finalizarse con una actividad de completar el procedimiento algebraico, el cual se hace necesario para deducir la ecuación. Esta empieza con el hallazgo previamente hecho por los estudiantes, respecto al cálculo de las distancias que pide el problema inicial. con el nombre de "tarea 4" y contiene lo siguiente:

Tarea 4 (parte 1)

1. Utilice las propiedades dadas de la elipse y algunas reglas algebraicas para deducir la siguiente fórmula de la elipse con centro (0,0), focos F1 y F2, semieje mayor a y semieje menor b. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Figura 129.

Applet final para la deducción de la ecuación de la elipse



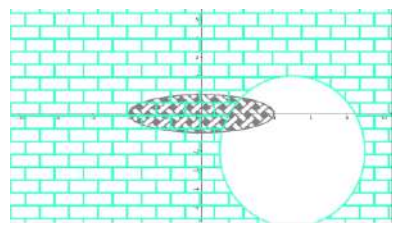
Nota. Representación final del applet que conlleva la deducción de la ecuación de la elipse.

Realice a lápiz y papel los procedimientos algebraicos, teniendo en cuenta las propiedades métricas y geométricas de la elipse y pegue el enlace de la imagen de su hoja de trabajo en la casilla de respuestas.

Tarea 4 (parte 2)

Para deducir la ecuación es necesario analizar la definición desde un sentido algebraico, ya hemos explorado su representación geométrica y textual.

- Interprete la definición de la elipse de manera algebraica.

	Posteriormente, se realizan sugerencias para solventar esta construcción (ver capítulo 6).
Como tarea retadora se les planteaba pensar en la solución de los siguientes problemas: • Deduzca la ecuación de la circunferencia partiendo de la ecuación de la elipse. • Determine la ecuación de la elipse cuyo centro es diferente del punto (0,0)	Finalmente, para la tarea retadora se retoma la idea planteada del segundo ítem que se encuentra en la secuencia inicial y de allí, se obtiene el siguiente producto: **¡Evaluemos lo aprendido!** • Oprime el botón TAPA y utiliza las propiedades geométricas y algebraicas en la fórmula dada para tapar con la elipse gris el HUECO elíptico blanco. • Escriba la ecuación en su hoja de trabajo y a continuación de clic en el botón HUECO. **Figura 130.** *Applet final de la tarea retadora para la elipse*  *Nota.* Representación dinámica para determinar la ecuación general de la elipse para cualquier centro. • Escriba los valores de h, k, a y b, en las casillas correspondientes para transformar la elipse gris en la elipse blanca para tapar el hueco. • Una vez hecho ello, escriba la nueva ecuación de la elipse y compare con la inicial. ¿Qué transformaciones se hicieron?

	• ¿Cuáles son las coordenadas de los focos del hueco?

Nota. En esta tabla se observan los ajustes de la secuencia final de la elipse con respecto la inicial.

Note que los objetivos de las actividades en la secuencia inicial se mantuvieron, sin embargo, al analizar este producto se realizaron múltiples modificaciones en aras de mejorar y potenciar las habilidades del proceso de representación.

Ahora bien, como se había mencionado al inicio de este apartado se detallará en los ajustes realizados a la secuencia final según el avance gradual de los estudiantes. Cabe resaltar que las fases previas a la exploración dirigida 3 no tuvieron variaciones.

8.2.1. Ajustes a la fase de exploración dirigida 3

Como se mencionó en el capítulo 7 en el apartado de exploración dirigida 3 de la elipse tuvieron presentes algunas representaciones adicionales que no se encontraban contempladas en la planeación. Lo anterior, debido a que el día de la implementación fue necesario hacer uso de los celulares y algunas retroacciones no aparecieron, como lo fue la representación tabular por lo cual fue necesario realizar algunos ajustes en la práctica.

En primer lugar, la retroacción número 1 se dió de manera verbal y gestual pues se le solicitó a un integrante de cada grupo que se quitara el cordón del zapato para realizar el dibujo de la elipse e ilustrar lo descrito en la retroacción. Este dibujo pretendía reiterar de manera dinámica[15] que la suma de las distancias d+e es constante y esa constante es 2a, sin embargo, con la mayoría de grupos sólo se logró el primer objetivo. Aunado a ello, se recordaron las propiedades vistas en fases anteriores acentuando en los elementos variantes e invariantes de la cónica en cuestión.

[15] Para indagar acerca del dibujo dinámico realizado con el cordón de zapato con el ánimo de explorar las propiedad característica de la elipse se recomienda visualizar el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=BKhF5FDRbIY

En segundo lugar, se usaron ejemplos para invitar a los estudiantes a generalizar mediante la familiarización con conceptos tales como el área de un rectángulo, para ello se tomaban 3 o 4 objetos diferentes en forma rectangular y se les solicitaba hallar el área, al hacerlo podían notar que el proceso siempre era el mismo a pesar de que las medidas en todos los objetos variaban.

Finalmente, debido a que la retroacción que contenía la representación tabular no se podía ver en los celulares se optó por pedirle a los estudiantes que compararan directamente los valores de a y d+e consiguiendo así la generalización pedida.

8.2.2. Ajustes a la fase de exploración dirigida 4

A partir de los resultados obtenidos en la exploración 4 se decide plantear una nueva categoría de análisis llamada *Transformación de representaciones estáticas a representaciones dinámicas del objeto matemático.* Ello se propone, debido a las acciones realizadas por los estudiantes sobre una representación estática teniendo en cuenta el reconocimiento del objeto de estudio, la manipulación de sus características y propiedades desde una perspectiva dinámica. Lo cual se ve reflejado como consecuencia de la interacción con el software de geometría dinámica GeoGebra durante las sesiones previas.

Cabe resaltar, que lo anterior surge a partir del planteamiento de sugerencias escritas presentadas como guías a los estudiantes para resolver el problema, pues al ver la representación geométrica impresa en un papel, los estudiantes desde su nivel cognitivo intentaban dinamizar las propiedades de la sección cónica: elipse, realizando los posibles arrastres de elementos que se presentaban en el applet de GeoGebra.

Además de esto, al evidenciar ciertas dificultades en tratamiento algebraico durante las sesiones previas de clase, se decide realizar algunos ajustes a la actividad propuesta. El primero de ellos, consistió en presentar una sugerencia a los estudiantes que contenía la representación geométrica y escrita del problema y se les pedía a los alumnos que, a partir de ello, intentaran plantear de manera algebraica el enunciado del problema inicial, siendo la base para deducir la ecuación de la sección cónica que se está trabajando. De esta manera, al vislumbrar dificultad al pasar de un registro a otro, se decide dar algunas pistas no previstas a los grupos para una mejor comprensión la actividad como ejemplos de lo que es pasar de palabras a símbolos como "cuatro veces a esequivalente a tener $4a$" o "¿Qué se puede usar para hallar distancias según lo que vimos en el diagnóstico?", lo cual ayudó a dos o tres grupos.

En este sentido, como consecuencia del poco avance en la actividad y las dificultades presentadas se decide otorgarles a los estudiantes la solución del problema solicitándoles que justifiquen cada paso del proceso, lo cual no estaba previsto en la secuencia didáctica de la elipse. Finalmente, como la actividad no fue resulta en su totalidad debido a los pocos conocimientos de algebra, se decide plantear la actividad como tarea para la siguiente sesión.

8.2.3. Ajustes a la fase de exploración dirigida 5

Por cuestiones de tiempo esta actividad no se logra realizar en el aula de clases como estaba planificada, por lo cual, se solicita a los estudiantes que la resuelvan en casa. Es necesario aclarar que no existieron limitaciones en cuanto al uso de herramientas tecnológicas para realizar la tarea de allí, que resultara válida la realización de consultas por internet.

8.3. Taller 2

Tomando como base la secuencia final de la cónica elipse, de manera análoga se genera la estructura secuencial de la hipérbola. Por ende, solo se habla de los cambios graduales efectuados a la secuencia según el avance de los alumnos.

8.3.1. Ajustes a la fase de exploración dirigida 1

Como consecuencia de los resultados favorables encontrados en la fase de exploración libre se decide omitir la tarea 1. Esta acción es justificable debido al cumplimiento del objetivo ligado a esta tarea que radica en la socialización realizada por las tres estudiantes acerca de sus producciones.

8.3.2. Ajustes a las fases de exploración dirigida 2 y explicación 2

Considerando los aportes realizados por los estudiantes en las tareas previas, la semejanza de los elementos de la hipérbola con respecto a los de la elipse y el factor tiempo, se decide omitir estas fases para proseguir con la exploración de las propiedades de la cónica estudiada como lugar geométrico: hipérbola.

8.3.3. Ajustes a la fase de exploración dirigida 4

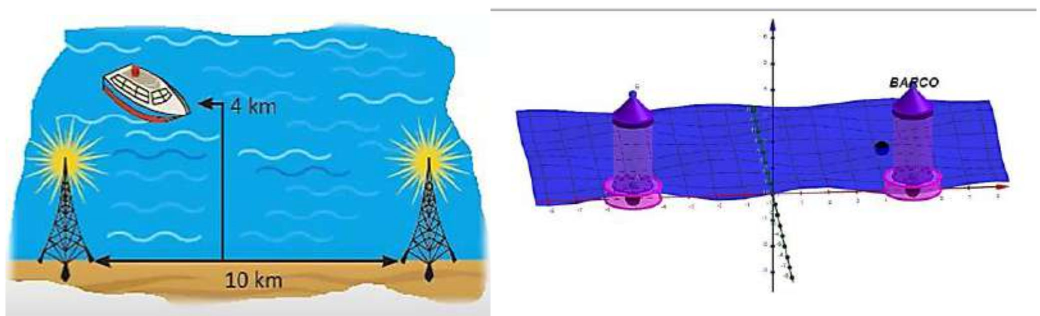
Teniendo en cuenta los deberes académicos de los estudiantes y la poca duración de las clases se decide omitir la tarea 5 con el ánimo de ejecutar la tarea retadora planteada para esta sección cónica.

8.3.4. Ajustes a la tarea retadora

Basado en los resultados obtenidos en la implementación se vislumbran múltiples dificultades con la interpretación del problema por lo cual se considera el esquema de la tarea planteada con el ánimo de modificarlo. Para ello se tiene presente la base del objetivo propuesto en el diseño y se realizan modificaciones en la pregunta problematizadora y el diseño del applet. En cuanto a la pregunta inicialmente se planteó la siguiente situación: “Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre la costa a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco al centro de una de las torres es 6 km más lejana que la distancia al centro de la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 4 km de distancia de la costa" (Adaptado de Henriquez, 2020). Este se acompañaba de una imagen (ver figura 131) y un applet con realidad aumentada, para que los estudiantes pudieran visualizar la situación dentro de un entorno que ofrece diferentes perspectivas visuales para acercarse a la solución del problema.

Figura 131.

Representación gráfica de la tarea retadora, hipérbola



Nota. Representaciones con la información del problema referido a la tarea retadora de la hipérbola.

Al comparar ambas actividades (la implementada y la ajustada después de la implementación) se evidencia un cambio en la presentación del problema y la tarea propuesta para la misma.

9. Análisis retrospectivo

Camargo (2021) propone una definición y marco a seguir para elaborar un análisis retrospectivo. Este se orienta a partir del planteamiento de una conjetura inicial y tiene como finalidad la consolidación de un sistema teórico esquematizado que proporciona un recurso de planeación para los docentes. Para conseguir ello, se hace necesario escudriñar en las evidencias de aprendizaje producto de la experimentación en el aula con el ánimo de refinar, confirmar o modificar la conjetura inicialmente planteada y así, proponer constructos teóricos y/o desarrollar modelos de enseñanza.

En particular, el estudio vigente estriba en el abordaje de las secciones cónicas desde una perspectiva geométrico-analítica en aras de establecer conexiones conceptuales mediadas por el reconocimiento de habilidades cognitivas, con el fin de adquirir las competencias establecidas dentro de los estándares colombianos. En este sentido, la eficiencia de la conjetura se valora mediante la revisión de las habilidades emprendidas por los estudiantes al realizar los talleres de la secuencia didáctica. Para dar rigor a esta valoración de eficiencia se subdivide la misma en dos categorías de análisis consecutivas que comienzan con el contraste entre las competencias alcanzadas por los estudiantes y las que deberían adquirir según los estatutos legales, y finaliza con la comparación de la forma y tiempo en la que debieron ser enseñados los conceptos en cuestión y cómo se terminaron enseñando con ayuda de la secuencia planteada.

Según los estándares básicos de competencia los estudiantes de décimo grado en previos años escolares debieron adquirir competencias que les permitieran afrontar otras de orden superior como lo son las trabajadas en esta secuencia (citadas en el capítulo 3, sección 3.1). No obstante, en la práctica efectuada no hay evidencia de ello según los resultados arrojados en el diagnóstico, encontrándose dificultades en la solución de ecuaciones, uso de propiedades de la potenciación o radicación, localización en el plano cartesiano, reconocimiento y uso de relaciones geométricas usadas en el teorema de Pitágoras, entre otras. Es por ello, que se propone una fase de socialización adicional con la que se suplen[16] algunas de las dificultades ya mencionadas contribuyendo así, al desarrollo de las competencias detrás de estos obstáculos epistemológicos.

[16] Como evidencia de esta contribución a las competencias diríjase al capítulo 7 enfatizando en los resultados descritos en la sección 7.2 y 7.3.

Al detallar en la secuencia, se encuentran otras tantas dificultades en términos de habilidades cognitivas del proceso de representación que tienen que ver con la descripción y modelación de situaciones de variación, el reconocimiento de cantidades variantes e invariantes, la identificación de relaciones entre propiedades gráficas y algebraicas, la construcción de expresiones algebraicas equivalentes a otras y, el uso de procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. Sin embargo, con la ejecución de los dos primeros talleres se consigue un avance paulatino entre las tareas de cada taller que se vislumbra en las habilidades adquiridas de manera gradual con los mismos. Un ejemplo de ello, se hace notorio al parangonar los resultados de la tarea 4 en ambos talleres, ya que para la cónica elipse no se ven tratamientos algebraicos mientras que con la hipérbola sí.

En otro orden de ideas, pese a los logros obtenidos se pueden destacar tres factores que obstaculizaron la ejecución total del diseño. En primer lugar, la secuencia fue planificada contando con la disposición de una sala de cómputo con conexión a internet, pero por cuestiones de gestión fue necesario adecuar la implementación, trabajándola de manera alternada en una sala de informática (con menos computadores e inestabilidad de conexión) y en el aula de clase. Debido a ello, se hizo necesaria la modificación del enfoque individual de trabajo a uno colaborativo ya que en el aula de informática no había computadores equiparables a la cantidad de alumnos, y en el salón de clases solo uno de cada cinco estudiantes contaba con un plan de datos para ejecutar las tareas (lo cual ralentizaba el trabajo en clase).

En segundo lugar, se había gestionado con el colegio la implementación en un periodo de tiempo abarcado desde el 24 de abril hasta el 23 de mayo del año vigente, pero por diversos factores se aplaza la fecha final hasta el 6 de junio. Entre estos causales se encuentran los días festivos en el mes de mayo (2 días), el paro nacional de docentes efectuado los días 9 y 10 de mayo, la celebración del día del maestro (14 de mayo) y finalmente, debido a la modalidad con el cambio de salones y las contra jornadas se disponían sólo de 40 minutos por hora de clase. En tercer lugar, a causa de la pandemia y el modelo de enseñanza llevado a cabo en esos años, se producen vacíos conceptuales que obstaculizaron el progreso que debieron llevar los estudiantes para estar en el grado décimo.

Para hablar acerca de estas dificultades y la manera en la que se trataron de solventar, se tiene presente lo planteado por la normativa legal (estándares básicos de competencia y derechos básicos de aprendizaje) para los diferentes temas que debieron ser abordados en grados anteriores e incluso en el año actual. Con el ánimo de ser lacónicas, se presenta la comparación de lo planteado por la normativa y lo ejecutado en la secuencia didáctica para cuatro de los vacíos conceptuales encontrados y comparados con los descritos en la revisión bibliográfica específicamente, en el capítulo de los antecedentes (es necesario aclarar que los obstáculos se dan en términos del estándar involucrado).

Tabla 23.

Tratamiento de las dificultades del objeto de estudio

DIFICULTAD 1: Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) (DBA, 2016)	
Los DBA plantean evidencias de aprendizaje con las que se puede valorar el logro de la competencia ligada al estándar. De manera particular, para este se presentan las siguientes:	Con la tarea retadora de la hipérbola los estudiantes debían usar la habilidad cognitiva de coordinación de representaciones para encontrar la respuesta al problema planteado. Ello

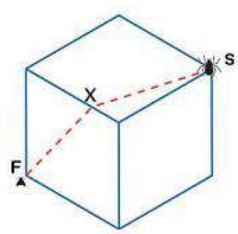
- Toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.
- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva

Aunado a lo anterior se propone un ejemplo de cómo puede ser abordada la competencia. En este caso el problema planteado consiste en revisar la siguiente situación:

Una araña ubicada en una esquina quiere cazar a una mosca que está ubicada en la esquina inferior izquierda de una caja cúbica cuyo lado mide un metro. La araña usará un camino recto pasando por dos caras del cubo y atravesando una de sus aristas por un punto X como se muestra en la línea punteada de la figura. Determina la posición del punto X para que el camino seguido por la mosca sea el más corto. Encuentra el camino más corto que ha de seguir la araña para llegar hasta la mosca.

Figura 132.

Actividad para trabajar la dificultad 1

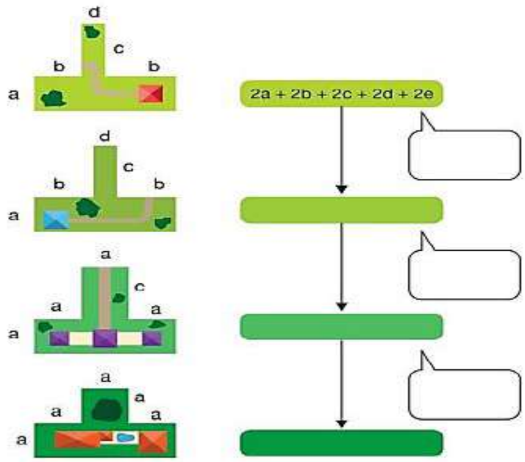


Nota. Representación de una actividad tomada de los DBA para tratar la dificultad 1.

Utiliza el teorema de Pitágoras para obtener la distancia de la línea punteada. Explora numéricamente una solución y implicaba la toma de decisiones fundamentadas en los registros gráfico, de lenguaje natural y aritmético dados por la situación. Adicionalmente, era indispensable relacionar las características algebraicas, gráficas y aritméticas del lugar geométrico generado por el movimiento del barco.

Cabe resaltar que a lo largo de la secuencia se fortalece esta competencia y se hacen notorias las evidencias de aprendizaje, pero la tarea retadora es el ejemplo más completo que da cuenta de ello por lo cual no se hace mención de otras tareas como la 3 o la 4 en donde se vislumbró la ejercitación de la competencia.

elabora un modelo algebraico de las longitudes de las rutas posibles (DBA, 2016, p.64)	
DIFICULTAD 2: Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación (DBA, 2016)	
Las evidencias de aprendizaje del DBA para este estándar son: • Opera con formas simbólicas que representan cantidades. • Reconoce que las letras pueden representar números y cantidades, y que se pueden operar con ellas y sobre ellas. • Interpreta expresiones numéricas, algebraicas o gráficas y toma decisiones con base en su interpretación. Aunado a lo anterior se propone un ejemplo de cómo puede ser abordada la competencia. En este caso el problema planteado consiste en resolver la siguiente situación: La figura 133 muestra varios terrenos. Cada terreno será delimitado con una cerca cuyo costo por metro es de 15.000 pesos. Cada lado tiene una longitud en metros, cuyo valor desconocemos, representado por una letra: a, b, c, d, e. Se sabe que a=b; c=e; d<a y d<c. Encuentra una expresión para el precio total de la cerca de cada terreno. Indica cuál de los terrenos es más costoso y cuál es menos costoso para cercar (DBA, 2016, p.71). **Figura 133.** *Actividad para tratar la dificultad 2 en el aula de clase*	Las tres evidencias de aprendizaje dictaminadas para este estándar se trabajan con la tarea 4. Pues el inicio de esta actividad plantea la interpretación del problema en el registro algebraico para lo cual debe reconocer que las letras pueden representar números y cantidades. Luego de ello, se le solicita un tratamiento algebraico mediante el cual termina realizando operaciones con formas simbólicas. Finalmente, debido a que los alumnos no poseían los preconceptos necesarios para realizar el tratamiento algebraico, se les propone la tarea 4a en la que deben interpretar el despeje de las expresiones algebraicas y tomar decisiones respecto a su interpretación.



DIFICULTAD 3: Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas (DBA, 2016).

Las evidencias de aprendizaje del DBA para este estándar son:

- Efectúa exploraciones, organiza los resultados de las mismas y propone patrones de comportamiento.
- Propone conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y las expresa verbal o simbólicamente.
- Valida las conjeturas y explica sus conclusiones.
- Interpreta expresiones numéricas y toma decisiones con base en su interpretación.

Aunado a lo anterior se propone un ejemplo de cómo puede ser abordada la competencia. En este caso el problema planteado consiste en encontrar de manera sistemática el número total de rectángulos que se pueden formar en un tablero de 8 x 8 como el de la figura, considerando que los cuadrados son casos particulares de rectángulos. Tomar como referencia la tabla de rectángulos en una tabla de 3x3. Registra la información en una tabla, encuentra la expresión

En la secuencia se trata de solventar esta dificultad en múltiples ocasiones destacando las exploraciones dirigidas 2 y 3 para la cónica elipse y la exploración dirigida 3 en el caso de la hipérbola.

Con la tarea 3 se efectúan exploraciones en donde el estudiante puede organizar y sugerir patrones de comportamiento desde cualquier tipo de representación. Así mismo, al indagar o realizar tabulaciones numéricas, propone conjeturas que data en el registro general para hallar el número de rectángulos en un cuadrado de n x n (DBA, 2016, p.71).

Figura 134.

Actividad para trabajar en la dificultad 3

Rectángulos en una tabla de 3x3

Número de rectángulos	Número de rectángulos verticales	Número de rectángulos horizontales	Total	Patrón observado
3x3	1	0	1	$1^3=1$
2x3	2x1=2	2x1=2	4	$2^3=8$
2x2	4	0	4	
1x3	3x1=3	3x1	6	$3^3=27$
1x2	3x2=6	3x2=6	12	
1x1	9	0	9	
total	25	11	36	36

de lenguaje natural de manera verbal o escrita.

Ahora bien, con ayuda del recurso tecnológico de GeoGebra el estudiante puede validar dichas conjeturas. Por otra parte, al solicitar la justificación de los planteamientos efectuados, los alumnos suelen acudir a una conversión del registro algebraico en el que se encuentran en aras de cambiar al registro aritmético, sustentando que se cumple la propiedad para cualquier valor numérico.

Finalmente, en lo que refiere a la última evidencia de aprendizaje se puede valorar en la tarea 3 de la cónica hipérbola, en donde una de las retroacciones solicita la revisión de los datos numéricos planteados en la hoja de cálculo con el fin de interpretar a qué valores refiere la tabla y que relación algebraica existe entre los datos allí registrados.

En síntesis, al comparar la situación ejemplificada propuesta por los DBA con la efectuada por la secuencia didáctica se pueden

	destacar distintos niveles de dificultad que apuntan al mismo objetivo: el cumplimiento de las evidencias de aprendizaje.
DIFICULTAD 4: Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos (DBA, 2016).	
Las evidencias de aprendizaje del DBA para este estándar son: • Opera con formas simbólicas que representan números y encuentra valores desconocidos en ecuaciones numéricas. • Reconoce patrones numéricos y los describe verbalmente. • Representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y opera con y sobre variables. • Describe diferentes usos del signo igual (equivalencia, igualdad condicionada) en las expresiones algebraicas. • Utiliza las propiedades de los conjuntos numéricos para resolver ecuaciones (DBA, 2016, p.63).	Debido a que los DBA se estructuran progresivamente con el pasar de los años se puede observar que este estándar en relación con el anterior es muy similar, sin embargo, presenta un nivel de complejidad distinto. Es por ello que las actividades mencionadas con la dificultad anterior también son abarcables para esta competencia, por lo cual no se hace necesario mencionarlas nuevamente.

Nota. En esta tabla se vislumbran las dificultades encontradas en la revisión bibliográfica acerca del objeto de estudio versus el cómo fueron trabajadas en el aula de clase.

Como colofón de este análisis se puede validar que la conjetura inicialmente planteada arroja resultados favorables según las competencias abordadas por la secuencia y el trabajo de las dificultades epistemológicas de los estudiantes en términos de habilidades cognitivas.

10. Producción de resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en términos de las habilidades del proceso de representación, para ello se destacan las transcripciones, fotos y producciones escritas de los estudiantes junto con su respectivo análisis.

Se han retomado las cinco habilidades cognitivas seleccionadas a priori como categorías de análisis reportadas. En cada categoría se presentan en orden cronológico y hasta donde ha sido posible, evidencias a la par de los alumnos haciendo una comparación entre las acciones realizadas por cada uno de ellos.

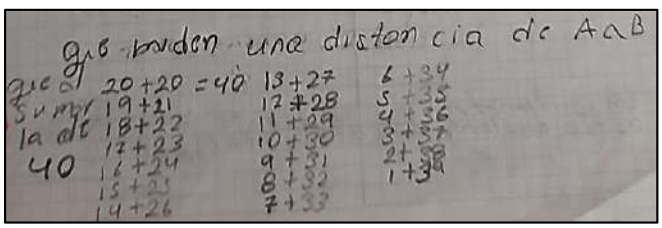
10.1. Reconocer representaciones de los objetos matemáticos

En la sección 5.2.3 se destacan las acciones de los estudiantes que se encuentran en esta categoría, en términos generales son aquellos que logran distinguir, a partir del problema planteado, la sección cónica en exploración ya sea de manera geométrica, escrita, verbal, gestual o algebraica. A continuación, se muestran las evidencias encontradas sobre la habilidad de reconocimiento representacional de la sección cónica elipse.

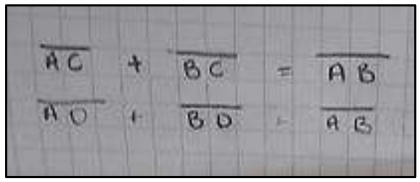
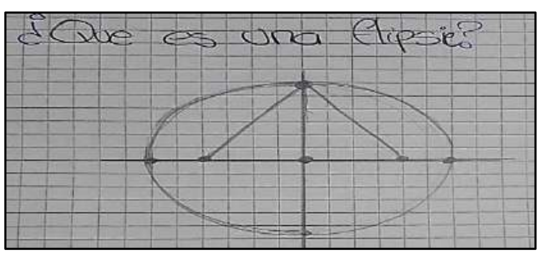
Tabla 24.

Resultados categorizados como Reconocer representaciones de los objetos matemáticos

<table>
<tr><th>Tipo de representación</th><th>Evidencia</th><th>Fase y cónica en la que se dio</th></tr>
<tr><td>Tabular</td><td>Una primera representación se da de manera tabular reconociendo la definición de elipse como lugar geométrico mediante un ejemplo particular en donde la constante toma el valor de 40.

Figura 135.
Representación 1: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio.


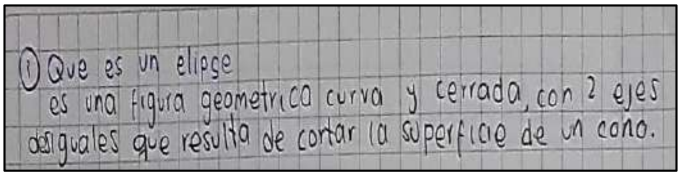
Nota. Reconocimiento de la elipse como lugar geométrico a partir de un registro tabular.</td><td rowspan="2">Exploración dirigida número 1.</td></tr>
<tr><td>Algebraica</td><td>Aunque errónea, esta representación algebraica se dio como fruto de la primera exploración dirigida en donde los alumnos aún concebían los focos como puntos que cumplían con la definición. Es errónea debido a que el resultado de esa suma no es la distancia AB ya que esto implicaría que la constante a la que atañe la definición de elipse es 2c y no 2a como más adelante se darán cuenta. No obstante, plantean correctamente los sumandos y la notación es pertinente para lo que quieren expresar: “la suma de las distancias comprendidas entre los</td></tr>
</table>

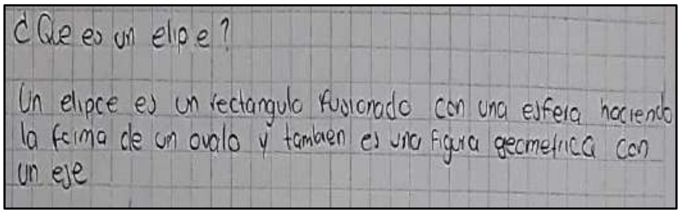
	puntos fijos y los puntos a construir (en este caso el punto C) es constante”. **Figura 136.** *Representación 2: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio*  *Nota.* Reconocimiento de la propiedad de la elipse como lugar geométrico a partir de un registro algebraico con segmentos.	
Gráfica	Un segundo acercamiento a la elipse se da mediante la gráfica de la cónica, en esta se detallan superfluamente puntos tales como el centro, los focos, los vértices y covértices sin necesidad de darles un nombre o característica específica a los mismos. **Figura 137.** *Representación 3: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio*  *Nota.* Reconocimiento de la elipse a partir de su representación gráfica.	
	En el mismo orden de ideas se presenta un acercamiento escrito en el que se mencionan algunas características observables de la elipse.	Explicación 2

Lenguaje natural

Figura 138.

Representaciones 4 y 5: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio





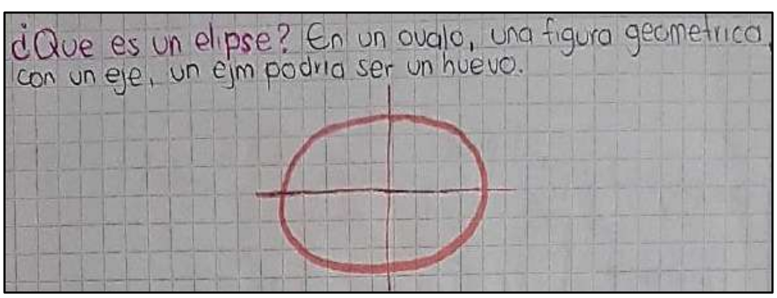
Nota: Representación de la sección cónica elipse a partir de un registro de lenguaje natural por familiaridad.

De esta misma fase se obtienen diferentes concepciones de la cónica en estudio que van desde una ejemplificación contextualizada de un objeto cotidiano, hasta un parafraseo de la definición acompañado de un esbozo de la construcción elíptica.

Gráfica y de lenguaje natural

Figura 139.

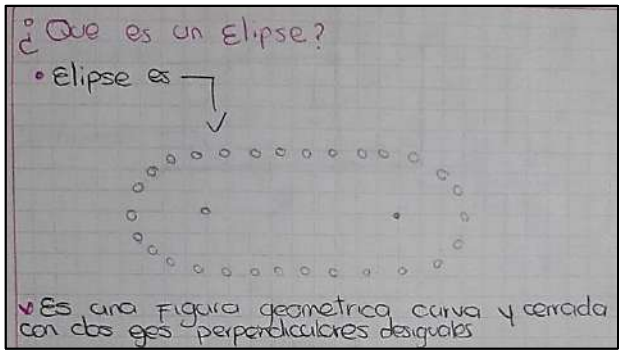
Representación 6: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio

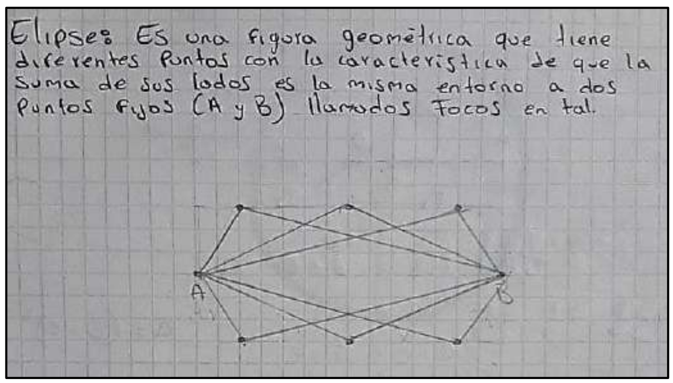


Nota. Reconocimiento de la elipse a partir de un registro grafico y de lenguaje natural por familiaridad.

Figura 140.

Representación 7 y 8: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio





Nota. Reconocmiento de la elipse a partir de registros gráfico y lenguaje natural.

Simbólico motriz y de lenguaje natural	Así mismo, se obtiene una definición verbal y gestual de la elipse que hace uso de preconceptos que tienen los estudiantes, de allí que relacionen la elipse con un rectángulo “modificado” y un óvalo, incluso con una esfera. *Estudiante 5:* Un rectángulo, pero … (hace con los dedos una representación gestual de la elipse mientras prosigue con su explicación) *Estudiante 6*: Curvo *Estudiante 8:* Se une una esfera con un rectángulo y eso forma la elipse *Estudiante 10:* ¡Ay!, un óvalo

Figura 141.

Representación 9 y 10: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio

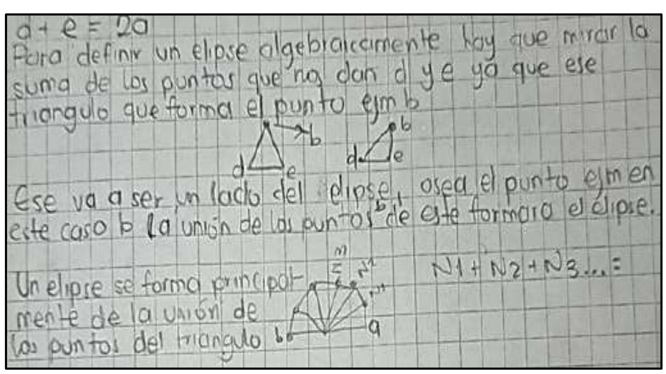
Nota. Reconocimiento de la elipse a través de un registro simbólico motriz y de un lenguaje natural.

Algebraico, gráfico y de lenguaje natural

Este producto hace parte de una tarea más elaborada en la que se ven involucradas más habilidades, sin embargo en este primer fragmento se realiza un análisis contextual del objeto matemático en estudio (la elipse) y esto hace parte del reconocimiento de la cónica. Este análisis se encuentra enriquecido con ejemplos e ilustra parte del proceso atravesado por cada estudiante para encontrar la elipse como lugar geométrico.

Figura 142.

Representación 11: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio



Exploración dirigida 3

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Nota. Reconocimiento de la elipse como lugar geométrico destacando la propiedad que cumple a partir de registros algebraico, gráfico y de lenguaje natural.

Este es un claro ejemplo que ilustra la pluralidad de habilidades presentes en una sola tarea, sin importar si ya se ha atravesado una habilidad de orden mayor como lo es la coordinación de representaciones.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Algebraico y de lenguaje natural</td>
<td>A partir del proceso deductivo de la ecuación de la elipse surge el reconocimiento algebraico de la cónica en orientación vertical.

Figura 143.
Representación 12: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio

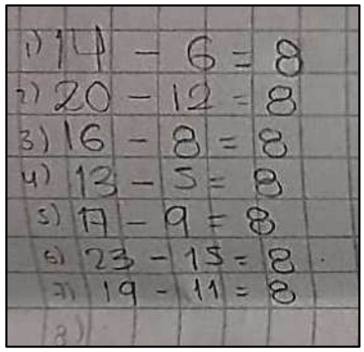
El punto b^2 y a^2 cambiaron de lugar, también la fórmula que se nos muestra es la fórmula para las elipses que se encuentran en vertical y la fórmula socializada en clase es para elipses en horizontal

Nota. Reconocimiento de la elipse con orientación vertical a partir de un registro algebraico y lenguaje natural basados en la exploración del applet y los conceptos antes tratados.</td>
<td>Exploración dirigida 5 (elipse)</td>
</tr>
<tr>
<td>Aritmético</td>
<td>Con la valoración del problema de la segunda cónica se obtiene el reconocimiento de un caso particular de la cónica de manera aritmética destacando los valores de las distancias e, d y la constante 8.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Figura 144.

Representación 13: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio



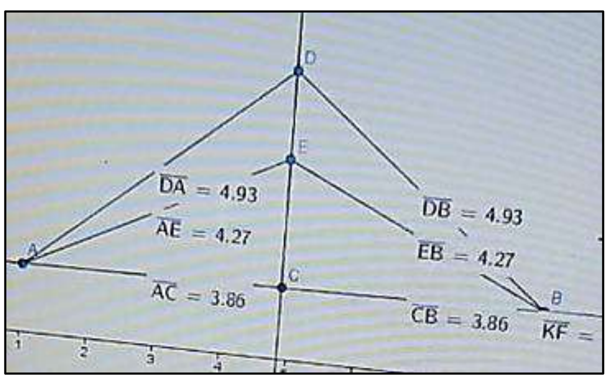
Nota. Reconociento de la propiedad de la hipérbola como lugar geométrico a partir de un reggistra aritmético.

</td>
<td>Exploración libre (hipérbola)</td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfico, aritmético y algebraico</td>
<td>

Como producto de la misma fase en cuestión un grupo de estudiantes reconoce a partir del registro gráfico un caso particular de la hipérbola que ocurre cuando las distancias c y a son iguales.

Figura 145.

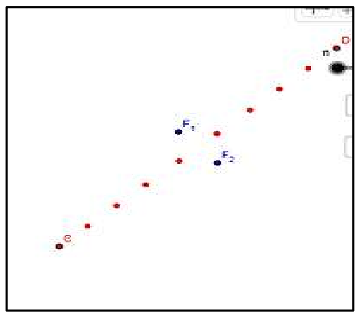
Representación 14: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio



Nota. Reconocimiento de la mediatriz como un caso particular de la hipérbola, el cual se da mediante la familiaridad con el concepto tratado en la socialización del diagnóstico.

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

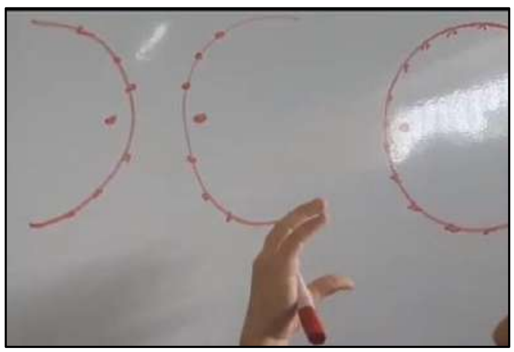
<table>
<tr>
<td>Grafico</td>
<td>Aunque la tarea 2 brinda la representación gráfica de la hipérbola sin necesidad de realizar deducciones o cálculos, un grupo de estudiantes modificó la ubicación de los focos para encontrar el caso particular de la cónica en estudio donde esta se hace una línea recta.

Figura 146.
Representación 15: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio

Nota. Reconocimiento de la mediatriz como un caso de la hipérbola a partir de la exploración del applet planteado en la exploración dirigida 1 de esta cónica.</td>
<td>Exploración dirigida 1 (hipérbola)</td>
</tr>
<tr>
<td>Simbólico motriz, gráfica y de lenguaje natural</td>
<td>Finalmente, se obtiene una representación verbal y gestual de la hipérbola que hace uso de preconceptos recientes que tienen los estudiantes, de allí que relacionen la hipérbola con una elipse. Esto se ilustra en la transcripción e imagen presentadas a continuación.
- Estudiante 1: lo que yo entendí según estos al trazar las líneas, que descubrí que si está el círculo (señala la representación de la hipérbola que dibujo al lado de la representación de la elipse) en el anterior estaba el círculo como tal (señala la representación de la elipse a la que se refiere como círculo con dos puntos internos) se veía fácil y sus dos puntos siempre estaban acá dentro (señala los focos de la elipse) (..) en este caso el</td>
<td></td>
</tr>
</table>

círculo esta partido por la mitad y volteado (realiza un gesto con las manos en forma de c refiriéndose a una rama de la hipérbola) pero igual los puntos siguen estando al borde (señala los focos y los compara con los focos de la elipse dibujada) (…) aun así yo puedo hacer este y este (traza las distancias simétricas que algebraicamente se denominan como "e" y continua haciéndolo mientras habla) están a una distancia igual que al restarla me va a dar cero y así hago con este este, este, este y todos.

Figura 147.

Representación 16: Habilidad de reconocimiento de representaciones del objeto de estudio



Nota. Reconocimiento de la hipérbola de manera gráfica, simbólico motriz y mediante un lenguaje natural.

Nota. En esta tabla se observa la categorización respectiva a los resultados de las actividades con respecto a la habilidad cognitiva: Reconocer representaciones de los objetos matemáticos

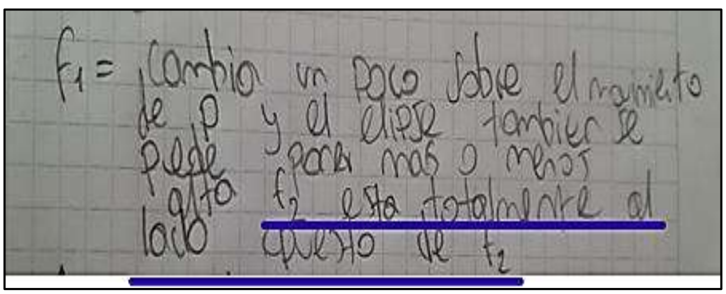
10.2. Interpretar las representaciones de los objetos matemáticos

Esta categoría se comienza a construir una vez consolidada cada una de las secciones cónicas como lugar geométrico, el alumno que llega hasta este punto debe realizar múltiples interpretaciones de manera escalonada y consecutiva todo el tiempo. Estas deducciones se hacen a partir de la tarea 3 en adelante, es aquí donde se escudriña en las características de las cónicas. Para el caso de la elipse se tienen los siguientes resultados.

Tabla 25.

Resultados categorizados como Interpretar las representaciones de los objetos matemáticos

<table>
<tr><th>Tipo de representación</th><th>Evidencia</th><th>Fase y cónica en la que se dio</th></tr>
<tr><td>De lenguaje natural</td><td>En este comentario escrito se evidencia la habilidad de interpretación ya que sin usar explícitamente la palabra “simetría” resalta esta característica al mencionar que los focos se encuentran “totalmente opuestos” por el punto centro.

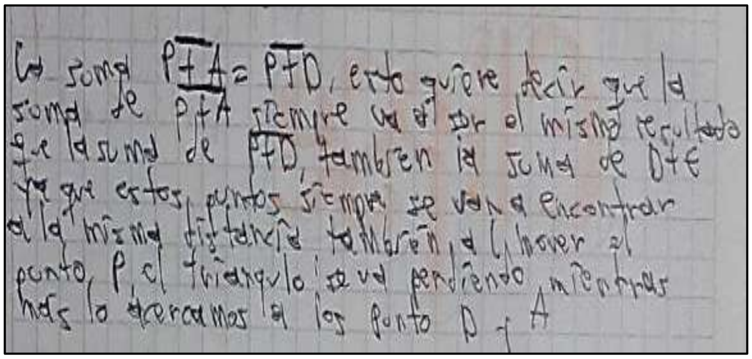
Figura 148.
Representación 1: Habilidad de interpretar representaciones del objeto de estudio


Nota. Interpretación de la propiedad de simetría de la elipse a partir de un registro de lenguaje natural.</td><td rowspan="2">Exploración dirigida 2 (elipse)</td></tr>
<tr><td></td><td>De manera análoga con el anterior producto en este se vislumbra una representación escrita acompañada de notación algebraica en la que se resalta implícitamente la simetría de la cónica. Lo mencionado se hace evidente cuando resalta que se obtiene el mismo resultado sin importar si se arrastra hacia el punto D o A.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>De lenguaje natural y algebraica</td>
<td>

Figura 149.

Representación 2: Habilidad de interpretar representaciones del objeto de estudio



La suma P+A = P+D, esto quiere decir que la suma de P+A siempre va a dar el mismo resultado que la suma de P+D, tambien la suma de D+E ya que estos puntos siempre se van a encontrar a la misma distancia también, al mover el punto P, el triangulo se va perdiendo mientras más lo acercamos a los punto D y A

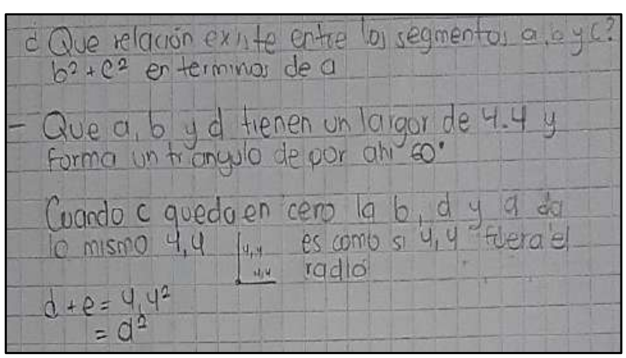
Nota. Interpretación de la elipse como lugar geométrico cumpliendo la propiedad de suma constante y dando cuenta de la simetría, ello, a partir de un registro de lenguaje natural y algebraico.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Algebraica, aritmética y de lenguaje natural</td>
<td>

A pesar de que la evidencia tenga algunos errores conceptuales como lo es el de confundir la notación de producto (2a) con la notación de la potencia (a^2), se destaca la habilidad de interpretación ya que de manera tácita habla del caso especial en el que los focos se situan en el origen creando el lugar geométrico de la circunferencia.

Figura 150.

Representación 3: Habilidad de interpretar representaciones del objeto de estudio



¿Que relación existe entre los segmentos a, b y c?
$b^2 + c^2$ en terminos de a

- Que a, b y d tienen un largor de 4.4 y forma un triangulo de por ahí 60°

Cuando c quedo en cero la b, d y a da lo mismo 4,4 es como si 4,4 fuera el radio

$d + e = 4,4^2$
$= a^2$

</td>
<td>Exploración dirigida 3 (elipse)</td>
</tr>
</table>

	Nota. Interpretación de la elipse como el caso particular: circunferencia, esto, mediante un registro de lenguaje natural, aritmético y algebraico.	
De lenguaje natural	A partir de la exploración con el applet dado en la tarea 5 se consigue la interpretación de nuevas propiedades de la elipse como lo es la deducción del caso particular de la cónica: la circunferencia. **Figura 151.** *Representación 4: Habilidad de interpretar representaciones del objeto de estudio* a)Cuando la distancia focal de una elipse es grande en comparación con la longitud de los ejes, la excentricidad de la elipse se acerca a 1. Esto significa que la elipse se asemeja cada vez más a una parábola, que es una figura geométrica con excentricidad igual a 1.Dicho de otra manera, esto significa que la elipse se vuelve más plana y estrecha en una dirección y más alargada en la otra. b)Cuando la distancia focal de una elipse es pequeña en comparación con la longitud de los ejes, la excentricidad de la elipse se acerca a cero. Esto significa que la elipse se asemeja cada vez más a un círculo, que es una figura geométrica con excentricidad igual a cero.Dicho de otra manera , esto significa que la elipse se vuelve más redonda y menos alargada. C)Cuando la distancia focal de una elipse es nula, la elipse se convierte en un círculo. En otras palabras, si los focos de la elipse coinciden en el mismo punto, entonces la elipse se reduce a un punto y su forma se convierte en una figura geométrica perfectamente redonda.Dicho de otra manera, esto significa que todas las distancias desde el centro de la elipse hasta cualquier punto de su perímetro son iguales. *Nota.* Interpretración de la elipse como lugar geométrico destacando firentes propiedades con respeto a sus elementos mediante un registro de lenguaje natural.	Exploración dirigida 5 (elipse)
	Como producto de la tarea 2 del segundo taller se encuentra un resultado que da cuenta de la habilidad de interpretación	

De lenguaje natural y algebraico	debido a que en este se vislumbra la deducción de la simetría a partir de la combinacion de registros gráfico, algebraico y aritmético dados en la primera actividad. **Figura 152.** *Representación 5: Habilidad de interpretar representaciones del objeto de estudio* Yo puedo decir que como la simetría daban lo mismo (se mantiene la simetría)pero cuando sacabamos la diferencia con el valor absoluto podríamos decir que AC daba negativo y DB daba positivo pero el valor absoluto nos ayudaba a qué los doss fueran constantes se mantienen. *Nota.* Intepretación de la hiérbola como un lugar geometrico que es simétrico, ello, es dao mediante un registro de lenguaje natural y algebraico.	Exploración dirigida 1 (hipérbola)
De lenguaje natural, algebraico y aritmético	De manera análoga al resultado anterior se obtiene el reconocimiento de la propiedad simétrica de la hipérbola de manera implícita al indicar que C y D son “como puntos opuestos exactos”, tal y como se indica en la Figura 153. **Figura 153.** *Representación 6: Habilidad de interpretar representaciones del objeto de estudio* Están en la gráfica como puntos opuestos exactos, es decir, si C esta en (-3, -5) entonces D esta en (3 - 5) dentro de la gráfica. *Nota.* Interpetación de la simetría de la hipérbola mediante un lenguaje natural, algebraico y aritmético, en el cual se resaltad dificultad al definir las coordenas de los puntos.	

Nota. En esta tabla se observan los resultados categorizados para la habilidad Interpretar las representaciones de los objetos matemáticos.

10.3. Construir representaciones de los objetos matemáticos

Para Rueda (2016) esta habilidad consiste en crear algo nuevo, partiendo de una representación (en cualquiera de los registros: algebraico, tabular, entre otros). Sin embargo, puede pensarse en ello como una transformación de la representación inicial, pero el autor aclara que la construcción no siempre corresponde al mismo objeto expuesto inicialmente. Además, reitera que Duval (2004) considera esto bajo el nombre de “representaciones puente” o “representaciones intermediarias” y otras expresiones mixtas que se obtienen por combinaciones de dos registros.

Tabla 26.

Resultados categorizados como la habilidad Construir representaciones de los objetos matemáticos

Tipo de representación	Evidencia	Fase y cónica en la que se dio
Algebraica y de lenguaje natural	Como consecuencia de la tarea retadora surge la habilidad de construcción debido a que de la combinación de registros algebraico, gráfico, aritmético y de lenguaje natural brindado por el applet, se consigue la construcción de la ecuación algebraica de la elipse con centro (h, k). **Figura 154.** *Representación 1: Habilidad de construir representaciones del objeto de estudio* (X-(h))^2/(a)^2 + (y-(k))^2/(b)^2 = 1 ¿Por que? Porque h y a son equivalentes al eje x por ello están en ese lado de la ecuación, k y b son equivalentes a Y	Tarea retadora (elipse)

	Nota. Construcción de la ecuación general de la elipse con centro diferente a $(0,0)$, destacando el registro algebraico y de lenguaje natural que plantea el estudiante.	

Nota. En esta tabla se observan los resultados categorizados como construir representaciones de los objetos matemáticos.

10.4. Transformar representaciones de los objetos matemáticos

Recordando la definición de esta habilidad expuesta en el marco teórico, se enfatiza en que "la transformación de representaciones como habilidad, comprende las acciones que un individuo realiza sobre una representación inicialmente dada para obtener una nueva representación, ya sea en el mismo registro o en un registro diferente, siendo que estas nuevas representaciones conserven parte o todo el contenido de la representación inicial (Duval, 2004)" (Rueda, 2016; p. 46). Para el caso de la elipse se obtuvieron las evidencias presentadas a continuación de manera lacónica en un cuadro.

Tabla 27.

Resultados categorizados como la habilidad Transformar representaciones de los objetos matemáticos

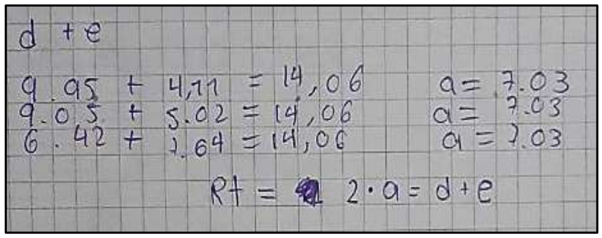
Tipo de representación	Evidencia	Fase y cónica en la que se dio
	Con la tarea 3 se obtuvieron algunas habilidades de transformación ya que se realiza un tratamiento aritmético que concluye en la conversión de esta representación a una algebraica. Se resalta una posible tabulación ya que se organiza en dos columnas la información obtenida, en una se	

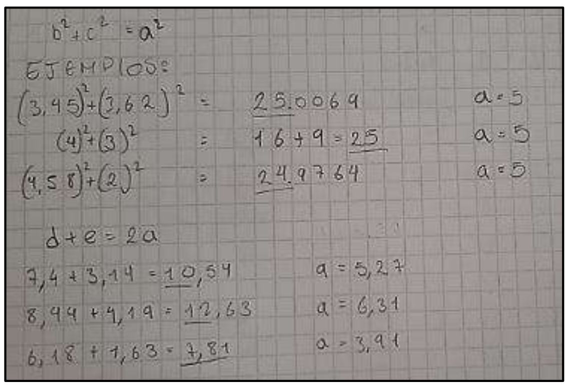
Aritmética, algebraica y posiblemente tabular

encuentra la suma de los valores de d, e, b^2 y c^2(respectivamente), y en la otra se detalla el valor de a.

Figura 155.

Representaciones 1 y 2: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio





Nota. Transformación de la elipse desde un registro geométrico dinámico a un registro aritmético y algebraico.

Exploración dirigida 3 (elipse)

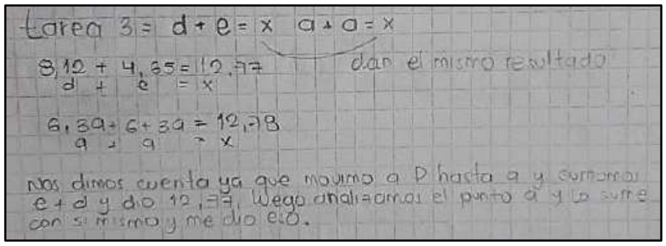
Algebraica, aritmética y de lenguaje natural

De manera análoga con el anterior resultado, se destaca el tratamiento aritmético de la propiedad d+e= 2a para llegar finalmente a la representación algebraica. El proceso descrito anteriormente no se hace evidente hasta que se presenta la justificación escrita ya que según la jerarquía de la información presentada puede suponerse que partieron de la representación algebraica para llegar a la aritmética.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Figura 156.

Representación 3: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio



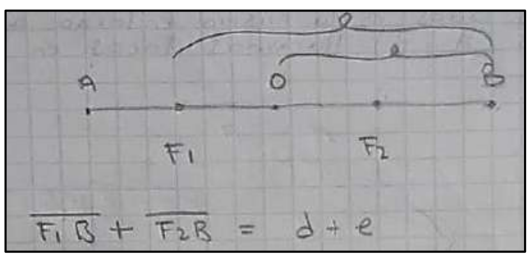
Nota. Transformación de la elipse mediante una conversión del registro gráfico a registros algebraicos, aritméticos y de lenguaje natural.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfica y algebraica</td>
<td>

En este resultado existe una conversión de la representación gráfica a la representación algebraica. Esto se consigue con la tarea 3 en donde se indaga por la propiedad de la elipse, d+e=2a.

Figura 157.

Representación 4: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio



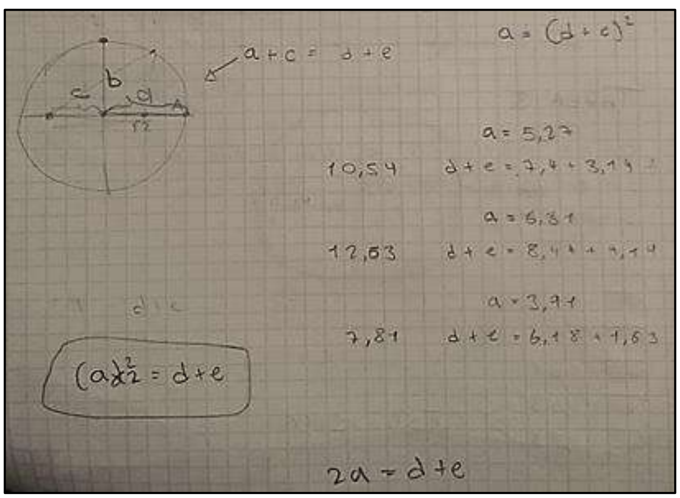
Nota. Transformación de la elipse desde un tratamiento gráfico hasta la conversión de un registro algebraico.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfica, aritmética, de lenguaje</td>
<td>Como se describe en el párrafo inicial de este apartado, la Figura 158 da cuenta de la habilidad de transformación de representaciones. En primer lugar, note que hay una flecha que relaciona la representación gráfica con una representación algebraica (cabe aclarar que inicialmente no</td>
<td>Exploración dirigida 3(elipse)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>natural y algebraica.</td>
<td>
es correcta la representación algebraica), aunado a ello al preguntar al estudiante por este resultado menciona explícitamente lo siguiente:

“Hicimos el dibujo de la elipse para tratar de interpretar lo que debemos hallar con letras y tenemos esta idea por ahora” (transcripción de la respuesta dada por el estudiante 8 a la cuestión planteada por la investigadora respecto a la justificación de la respuesta escrita).

Luego de ello se evidencia que realizan un tratamiento aritmético/algebraico para comprobar si su hipótesis inicial es cierta y concluyen que no lo es, pero llegan a la respuesta adecuada, es decir, d+e=2a.

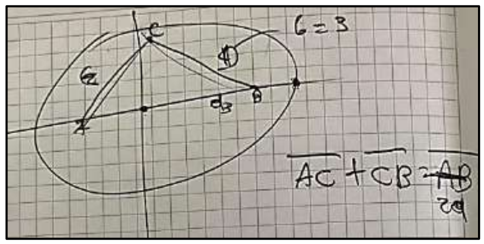
Figura 158.
Representación 5: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio


Nota. Transformación de la elipse desde el tratamiento de su representación gráfica hasta la conversión de registros algebraico y aritmético.
</td>
</tr>
</table>

Análogo a lo que acontece con el producto anterior en este resultado se vislumbra una conversión del registro gráfico al algebraico.

Figura 159.

Representación 6: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio



Nota. Transformación de la elipse desde un registro geométrico dinámico a un registro gráfico y algebraico.

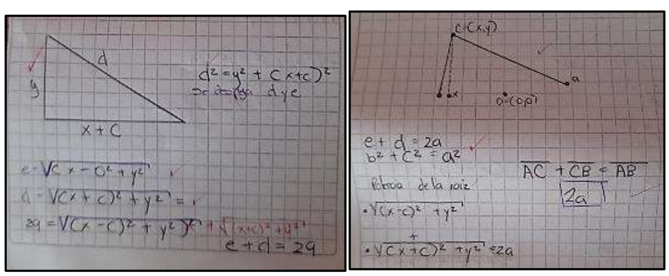
Gráfica y algebraica

Exploración dirigida 4 (elipse)

Asimismo, se obtiene otra producción que reporta la misma conversión de registros, pero con una pequeña variante.

Figura 160.

Representaciones 7 y 8: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio



Nota. Transformación de la elipse desde un registro geométrico dinámico a un registro gráfico y algebraico.

En estas imágenes se le adiciona un tratamiento algebraico a la ecuación planteada.

En la Figura 161 se realizan conversiones de los registros algebraico y gráfico con el de lenguaje natural. De esta

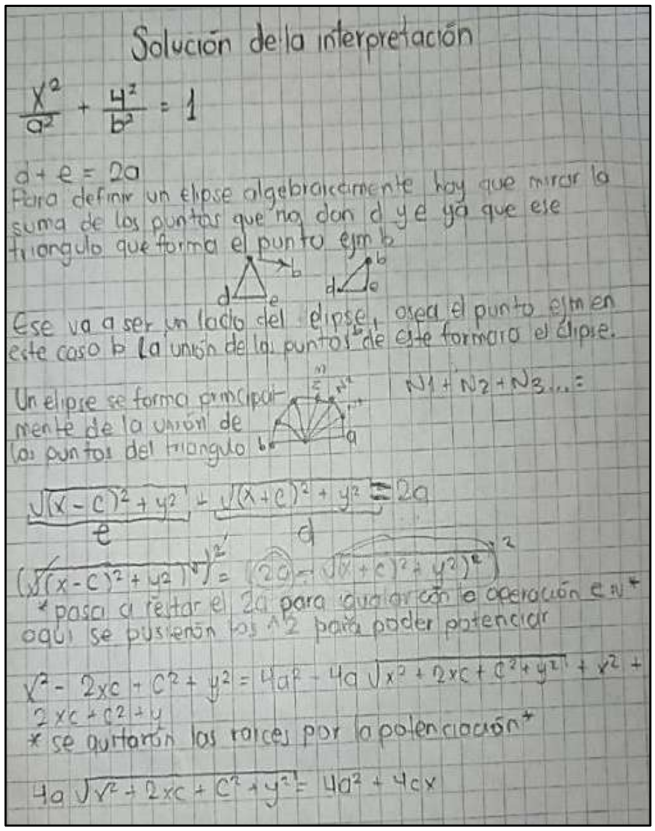
Registro gráfico, algebraico y lenguaje natural	manera, se vislumbra un tratamiento en los diferentes registros valorados. **Figura 161.** *Representación 9: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio*  *Nota.* Transformación de la elipse mediante registros gráficos, algebraicos y de lenguaje natural para deducir su ecuación.	Exploración dirigida 4 (elipse)
De lenguaje natural y algebraico	Como producto de la actividad 3 se consigue un tratamiento en el registro algebraico que consiste en deducir la ecuación de la circunferencia partiendo de la ecuación de la elipse.	Exploración dirigida 5 (elipse)

Figura 162.

Representación 10: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio

c)La ecuación de la elipse se define como:

(x-h)²/a² + (y-k)²/b² = 1

Donde (h,k) son las coordenadas del centro de la elipse, a es la longitud del semieje mayor (que determina la distancia desde el centro a los extremos de la elipse en el eje x), y b es la longitud del semieje menor (que determina la distancia desde el centro a los extremos de la elipse en el eje y).

Para obtener la ecuación de la circunferencia, debemos considerar el caso especial en el que a = b (es decir, los semiejes tienen la misma longitud). En este caso, la elipse se convierte en una circunferencia.

Entonces, podemos reemplazar a = b en la ecuación de la elipse y obtener:

(x-h)²/a² + (y-k)²/a² = 1

Como a = b, podemos simplificar:

(x-h)²/a² + (y-k)²/a² = (a/a)²

(x-h)²/a² + (y-k)²/a² = 1²

Multiplicando ambos lados de la ecuación por a², obtenemos:

(x-h)² + (y-k)² = a²

En una circunferencia el radio es la misma longitud que los semiejes en la elipse. Entonces, podemos reemplazar a con r (el radio de la circunferencia) y obtener finalmente:

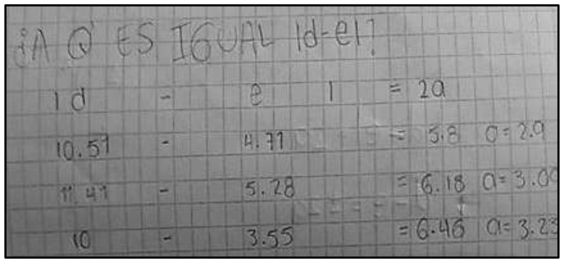
(x-h)² + (y-k)² = r²

Que es la ecuación estándar de una circunferencia con centro (h,k) y radio r.

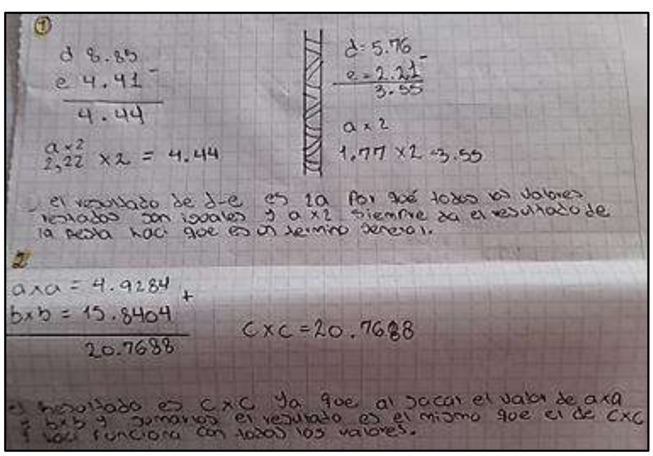
Nota. Trasformación de la ecuación de la elipse a la ecuación general de circunferencia.

Algebraico, aritmético y tabular	En la Figura 163 se evidencia un tratamiento aritmético que concluye en la conversión de esta representación a una algebraica. Se resalta una posible tabulación ya que se organiza en dos columnas la información obtenida, en una se encuentra la diferencia de los valores de d, e y en la otra se detalla el valor de a. Sin embargo, es destacable la omisión	Exploración dirigida 3 (hipérbola)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>del valor absoluto ya que no tienen presentes valores donde la diferencia se hace negativa.

Figura 163.
Representación 11: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio


Nota. Transformación de la hipérbola desde un registro gráfico dinámico a un registro aritmético y tabular.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Aritmético, de lenguaje natural y algebraico</td>
<td>Para esta evidencia se presenta un tratamiento aritmético que permite realizar la conversión del registro previamente mencionado al algebraico. Seguido de ello, realiza otra conversión en donde combina los registros algebraico y de lenguaje natural. Este proceso lo realiza para cada pregunta realizada en la tarea 3 (|d-e| y $a^2 + b^2$)

Figura 164.
Representación 12: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio

</td>
<td>Exploración dirigida 3 (hipérbola)</td>
</tr>
</table>

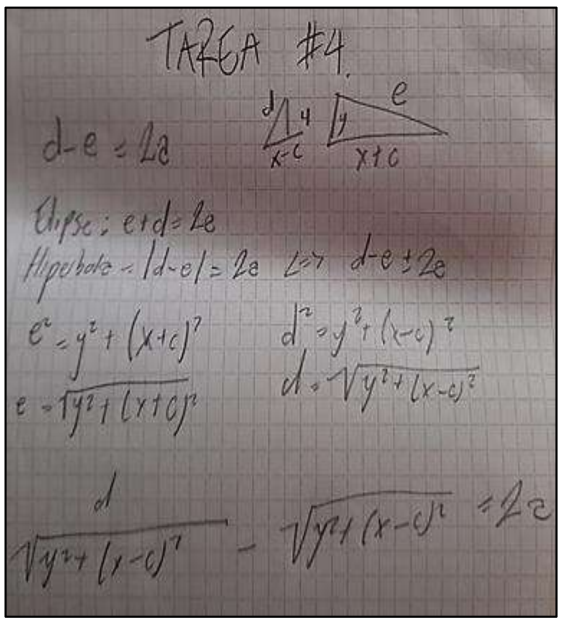
Nota. Transformacuón de la hiperbola a parir de un registro gráfico hasta la conversión con registros aritméticos, algebraicos y de lenguaje natural.

Algebraico y gráfico

Aquí se evidencia la conversión del registro gráfico al algebraico y un posterior tratamiento algebraico que culmina con el planteamiento cartesiano de la ecuación que da solución al problema de la hipérbola de manera algebraica.

Figura 165.

Representación 13: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio



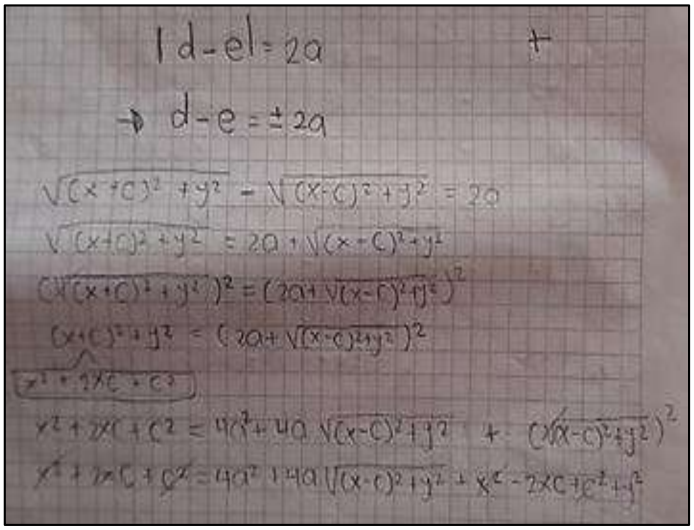
Nota. Transformación de la hipérbola a registros graficos y algebraicos.

Algebraico

Finalmente, se puede observar un tratamiento en el registro algebraico encaminado a la deducción canónica de la hipérbola.

Figura 166.

Representación 14: Habilidad de transformar representaciones del objeto de estudio



Nota. Transformación de la hiperbola apratir de un tratamiento algebraico.

Exploración dirigida 3 (hipérbola)

Nota. En esta tabla se observan los resultados categorizados en la habilidad: Transformar representaciones de los objetos matemáticos.

10.5. Transformación de representaciones estáticas a representaciones dinámicas del objeto matemático

Esta habilidad no se encontraba contemplada dentro del marco teórico hasta que se implementó la secuencia y se obtuvo una nueva categoría de análisis. Los estudiantes que se encuentran dentro de este nivel realizan acciones sobre una representación estática. Estos actos van desde el reconocimiento dinámico del objeto en estudio, hasta la manipulación de sus características y propiedades de manera coordinada desde una perspectiva dinámica.

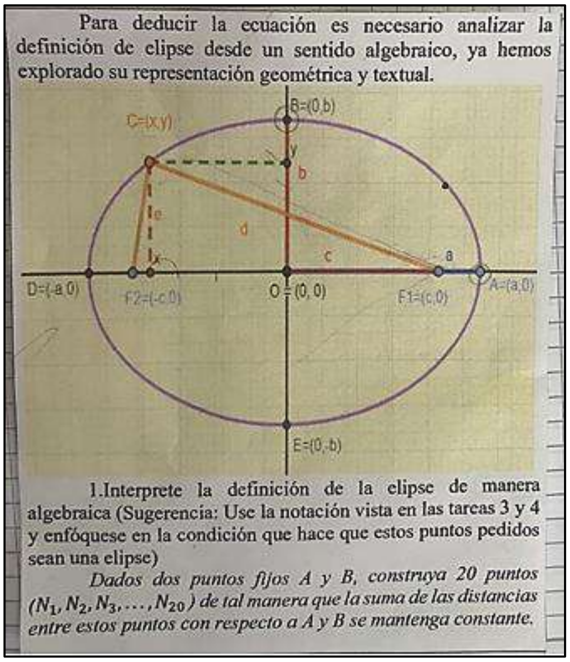
Tabla 28.

Resultados categorizados como habilidad Transformación de representaciones estáticas a representaciones dinámicas del objeto matemático

Tipo de representación	**Evidencia**	**Fase y cónica en la que se dio**
Sensorio motriz, de lenguaje natural y gráfica	Dentro del diario de campo se realiza la siguiente anotación "El estudiante 8, señala la representación gráfica dada en una hoja de papel (como se ilustra en la Figura 167) y comienza a hablar de la construcción de la elipse ilustrando con los dedos el movimiento del punto C y las respectivas distancias d y e". Dentro de su explicación menciona que para hablar de la suma de distancias de manera algebraica primero debe enmarcarse por qué el punto C tiene esas coordenadas y da varios ejemplos para tratar de ilustrar la variación de las distancias x e y. Además, aclara que el movimiento de ese punto es el que termina construyendo la elipse al establecer una unión entre los mismos.	Exploración dirigida 3 (elipse)

Figura 167.

Representación 1: Habilidad de transformar representaciones estáticas a dinámicas del objeto matemático.



Nota. Transformación de la elipse desde una representación estática a una dinámica desde la manipulación de propiedades concebida en la exploración con los applet en GeoGebra.

Lo anterior deja entrever que la estudiante visualiza mentalmente el dinamismo de este punto C que gradualmente constituye la gráfica de la elipse.

Sensorio motriz, de lenguaje natural y gráfica	De manera análoga a como aconteció con la elipse se presenta un producto para la hipérbola que casualmente coincide con el mismo autor. El estudiante realiza un apunte similar al que ejecutó para el caso de la elipse con la diferencia de que en este hace la	Exploración dirigida 3 (hipérbola)

comparación de las cónicas en lugar de ejemplificar la variación de los ejes x e y.

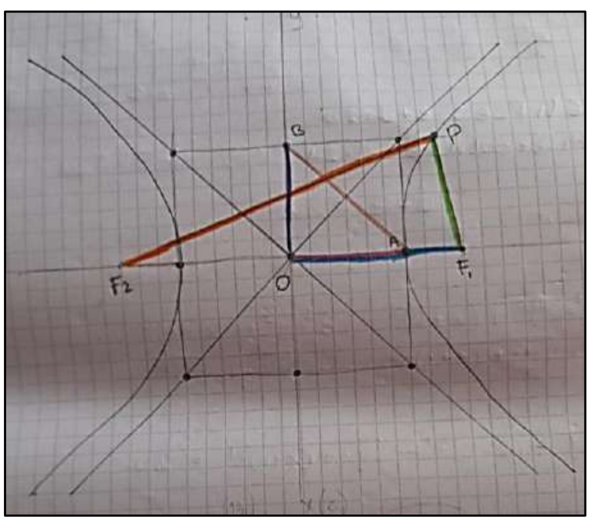
Ello, se data en el diario de campo con las siguientes palabras:

“El estudiante 8 señala la representación gráfica hecha como producto de la explicación de los elementos de la hipérbola y menciona que para encontrar la “fórmula” debe mirar “el movimiento del punto C por las líneas” (señala la cónica en cuestión). Luego de ello especifica que eso observó con la elipse por lo cual creyó que podía realizar lo mismo para la hipérbola, de allí, deduce que siempre se pueden crear dos triángulos pitagóricos y de los elementos puede obtener la “fórmula” solicitada.

Finalmente, la representación gráfica que uso para explicar su argumento se presenta en la Figura 168.

Figura 168.

Representación 2: Habilidad de transformar representaciones estáticas a dinámicas del objeto matemático.



	Nota. Transformación de la hipérbola desde una representación estática a una dinámica desde la manipulación de propiedades concebida en la exploración con los applet en GeoGebra.	

Nota. Se pueden observar los resultados para la nueva categoría de análisis: Habilidad de Transformación de representaciones estáticas a representaciones dinámicas del objeto matemático.

10.6. Coordinación de representaciones del objeto matemático

Rueda (2016) afirma, bajo las ideas de Duval (2004), que la coordinación de representaciones le permite al estudiante acceder al objeto matemático representado. Así mismo tiene conocimiento de la diferencia que existe entre el objeto y su representación. De este modo, cuando el individuo coordina representaciones puede extractar información de cada representación que tenga el objeto y así usarla para solventar problemas.

Tabla 29.

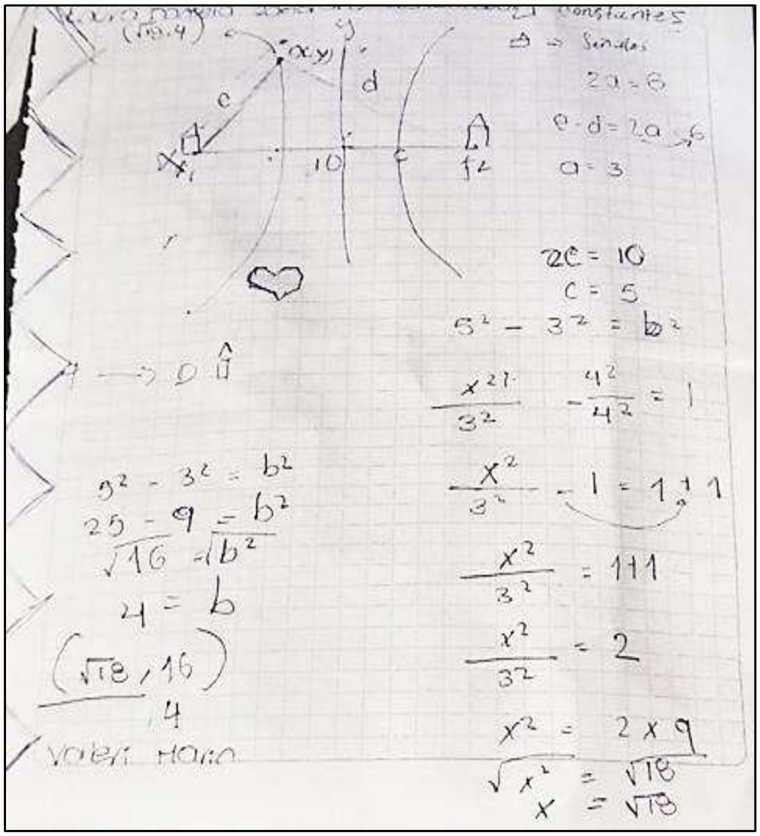
Resultados categorizados como Coordinación de representaciones del objeto matemático

Tipo de representación	Evidencia	Fase y cónica en la que se dio
	Como se describe en el párrafo anterior esta imagen da cuenta de la habilidad de coordinación de representaciones. Ello, se da debido a que del problema planteado se logran extraer representaciones gráficas, aritméticas y algebraicas con el fin último de solventar el problema del barco.	Tarea retadora (hipérbola)

Gráfica, aritmética y algebraica.

Figura 169.

Representación 1: Habilidad de coordinar representaciones del objeto de estudio



Nota. Coordinación de la hipérbola desde un registro escrito hasta la manipulación de registros gráficos, algebraicos y aritméticos.

Nota. Resultados obtenidos de la categorización de la habilidad Coordinación de representaciones del objeto matemático

11. Conclusiones

El estudio hasta aquí documentado nace con la intención de querer solventar una problemática vigente en la enseñanza de la matemática, para ello, se realiza un análisis contextual de problemas latentes actualmente, en el cual se encuentra que, las áreas con más dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la misma, son el álgebra y la geometría debido a su alto nivel de rigidez y abstracción. Con el ánimo de particularizar el dilema para el posterior estudio, se revisan por separado las áreas en términos de dificultades llegando a inferir que la enseñanza tradicional de estas no considera contextos que fomenten la deducción, abstracción y generalización, limitando así, el aprendizaje de los estudiantes por lo cual se hace necesario encontrar una manera de abordar los conceptos de manera más dinámica. De esta manera, al recoger lo previamente mencionado se consolida la investigación sintetizada en la siguiente pregunta: ¿Qué habilidades del proceso de representación se pueden favorecer con la enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos desde una perspectiva dinámica mediada por GeoGebra?

Para responder a esta cuestión se plantea el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica en GeoGebra enfocada al desarrollo de las habilidades del proceso de representación. En este sentido, se concibe una serie de pasos en aras de esquematizar el cumplimiento de la pregunta que parte de una revisión bibliográfica sobre los ejes rectores de la investigación (secciones cónicas y habilidades del proceso de representación), sigue con el diseño, implementación y análisis de una secuencia didáctica, y finaliza con la caracterización de las habilidades favorecidas por la secuencia didáctica creada. Esta serie de pasos se cumple paulatinamente y se documenta en los diferentes capítulos expuestos en este escrito partiendo de los antecedentes hasta la producción de resultados datada en el capítulo 10.

De manera particular el primer objetivo planteaba una revisión bibliográfica que permitiera dar cuenta de las investigaciones reportadas por la literatura acerca de las secciones cónicas y las habilidades del proceso de representación. Esta búsqueda se plasma en el capítulo de antecedentes que contiene una perspectiva curricular de las cónicas en Colombia, incluye estudios de matemática educativa a nivel internacional y nacional, y resalta investigaciones en torno a las habilidades del proceso de representación. En cuanto al currículo nacional de Colombia, se destaca el objetivo de proponer una enseñanza interdisciplinaria de las cónicas con un abordaje que va desde lo gráfico hasta lo algebraico; sin embargo, se observa que en la práctica predomina el enfoque geométrico para la educación media y el algebraico para la educación superior, lo cual termina desconectando las áreas en cuestión.

Así mismo, en lo que atañe a las investigaciones internacionales se encuentran estudios que abordan las cónicas desde diferentes enfoques, enfatizando en el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. Estos estudios resaltan la importancia de trabajar las cónicas como lugares geométricos y la necesidad de promover el aprendizaje constructivista mediante el uso de materiales concretos que contribuyan a la consolidación del significado geométrico de las cónicas. En lo que respecta a los estudios nacionales se presentan resultados de investigaciones que incorporan diferentes tecnologías como lo son la plastilina, el doblado de papel y GeoGebra para enseñar las cónicas. Además de ello, se destaca la utilidad de los softwares para promover el aprendizaje autónomo y se resalta la importancia de la revisión de los materiales y el manejo del tiempo en la práctica educativa. Finalmente, en cuanto a las habilidades se resalta el escrito de Rueda (2016) que posteriormente se usa como marco teórico en esta investigación.

Desde el punto de vista de las investigadoras, esta revisión permitió vislumbrar el exiguo desarrollo investigativo que se le otorga al objeto matemático de las secciones cónicas como lugar geométrico. Esto debido a que en la misma se observó que los trabajos con estas cónicas desde una perspectiva geométrico analítica, se suelen centrar en una de ellas específicamente: la elipse.

Seguido a ello, el segundo objetivo apunta al diseño de una secuencia didáctica de carácter dinámico que gire en torno al desarrollo de habilidades del proceso de representación. El cumplimiento de este propósito se evidencia en el capítulo de metodología que comienza exponiendo las características elementales del estudio junto con la manera en la que este se lleva a cabo. Dentro de estas características se destaca que el contexto de enseñanza fue un aula regular de clase con 39 estudiantes de una institución educativa colombiana del régimen público.

En general, se utiliza una estrategia metodológica llamada “experimento de enseñanza”, la cual pretende consolidar un puente entre la teoría y la práctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, produciendo de esta manera resultados de investigación relevantes para aplicar en las aulas de clase regulares. Cabe resaltar que el uso de esta metodología permite suplir una de las necesidades actuales de la educación debido a que produce resultados más cercanos a las exigencias que tiene la educación media. Pues, como se observó en el capítulo de los antecedentes este tipo de trabajos con el uso de tecnologías suelen plantearse en mayor medida para la educación superior.

Siguiendo con la misma idea, se esquematiza la secuencia didáctica bajo el planteamiento de tres talleres estructurados en las cinco fases propuestas por Fiallo y Parada (2018). Esta organización secuencial promueve la interacción social entre los estudiantes, el aprendizaje autónomo y cambia el rol tradicional del papel del profesor, de un impartidor de conocimiento a un facilitador del mismo. Aunado a ello, el enfoque metodológico define los roles de los participantes en el estudio y describe las acciones a realizar en cada fase por cada miembro, destacando la importancia de encontrar y promover la aparición de habilidades del proceso de representación. Finalmente, se describen los medios de recopilación de estos datos que incluye videograbaciones, transcripciones, diario de campo, registros de actividad en GeoGebra y planeaciones de clases.

De manera personal, la organización del diseño en términos de fases, actividades, propósitos y habilidades a desarrollar es flexible puesto que permite el trabajo de la secuencia didáctica en un aula regular o computarizada.

En este sentido, una vez cumplido el objetivo dos se apunta al tercero que busca implementar las actividades del diseño didáctico esquematizado de manera tabular dentro del capítulo 6. Los resultados de esta implementación se describen detalladamente en el capítulo 7 de manera secuencial enfatizando en lo obtenido por cada taller ejecutado, en términos de logros, dificultades y habilidades del proceso de representación adquiridas. Cabe resaltar que los logros giran en torno al avance cognitivo de los estudiantes plasmado en las habilidades mostradas y la suplencia de dificultades a lo largo de la solución de cada taller. En cuanto a las dificultades se destacan inicialmente las vislumbradas con el diagnóstico inicial y se siguen encontrando a lo largo del desarrollo de la secuencia. De la misma manera se resaltan las habilidades desarrolladas con cada tarea de la secuencia didáctica planteada.

Dentro del diagnóstico se identifican dificultades en tres áreas principales: el plano cartesiano, la comprensión lectora y las estrategias experimentales. En cuanto al plano cartesiano, los resultados arrojan que más de la mitad del grupo tenía dificultades para ubicar puntos en el plano cartesiano, confundiendo la ordenada con la abscisa y viceversa. En relación con la comprensión lectora, se destacó la escasa interpretación del enunciado del problema. En lo referente a las estrategias experimentales, se encontró que algunos alumnos intentaron encontrar el valor de una distancia dentro del plano midiendo la longitud con una regla sin considerar que la escala de la regla y el plano cartesiano debían coincidir. Aunado a ello, se presentaron otras dificultades como el desconocimiento de la jerarquía operacional, las reglas para operar relaciones algebraicas y algunas propiedades geométricas. En otro orden de ideas, en lo que alude a las habilidades del proceso de representación se encuentra que con la inspección inicial de conocimientos no se halla ni una habilidad en cuanto a los objetos matemáticos implicados, no obstante, se obtuvieron variedad de respuestas que destacan el uso de los registros gráfico, algebraico y aritmético principalmente.

En lo concerniente al taller de la elipse, se encuentran diferentes interpretaciones y enfoques de los estudiantes en relación al problema planteado como producto de la fase exploratoria propuesta en el diseño experimental. De aquí, se destaca que inicialmente se produjeron múltiples dificultades que atañen a la comprensión del problema, pero estas son solventadas gradualmente con la ejecución de las demás tareas del taller. Dentro de esas tareas realizadas se encuentran algunos obstáculos en cuanto al uso de conceptos geométricos como el perímetro de la misma manera que la confusión de la cónica elipse con otros objetos matemáticos como la circunferencia. Aunado a lo anterior, se siguen presentando dificultades con la manipulación algebraica de algunas expresiones lo que impide deducir la ecuación canónica de la elipse en un primer intento.

No obstante, a lo largo del taller se suplen parcialmente estas dificultades, esto se evidencia en las producciones dentro de las cuales se enfatiza el descubrimiento de diversas propiedades que contribuyen a la construcción progresiva del concepto de elipse, así como la presentación de justificaciones fundamentadas teóricamente de los razonamientos, en cualquier registro (algebraico, aritmético, gráfico, entre otros). Aunado a lo anterior se puede dilucidar de los resultados obtenidos que el taller consiguió los objetivos planteados con la pregunta de investigación puesto que se tiene evidencia del favorecimiento de las habilidades de reconocimiento, interpretación, construcción y transformación del objeto matemático en cuestión, mostrando así un avance progresivo de la cónica elipse.

En lo alusivo al taller de la hipérbola se obtienen menos frutos de la implementación debido a la omisión de algunas fases planificadas. Sin embargo, se consiguen resultados benéficos en cuanto a la producción de resultados, en términos de habilidades, y la mejoría de las dificultades encontradas desde el diagnóstico inicial. Ello, se evidencia desde la primera actividad que refiere a la comprensión del problema ya que para esta cónica no existen las mismas dificultades de interpretación que se dieron con la elipse. Por otra parte, en cuanto a esas dificultades que prevalecen para la hipérbola se encuentra la manipulación algebraica de algunas expresiones y la interpretación de algunas propiedades geométricas propias de la cónica. Pese a lo anterior, se alcanzan la mayoría de objetivos planteados para el taller exhibiendo de dicha manera la efectividad del mismo ya que según lo registrado en los capítulos 7 y 10, se consigue el favorecimiento de las habilidades de reconocimiento, interpretación, transformación y coordinación de representaciones de la cónica hipérbola.

Ahora bien, es necesario aclarar que esta secuencia didáctica no se alcanza a implementar a cabalidad por lo cual no se ejecuta el taller de la parábola, pero se plantea un análisis de objetivos, así como se realizó con las otras cónicas en el diseño experimental datado en el capítulo 6. En otro orden de ideas, se tiene que esta secuencia se consolida después de múltiples ajustes realizados antes, durante y después de la implementación. Estos se tienen presentes en el capítulo 8 y se detallan para cada taller expuesto. Dentro de los cambios realizados antes de la implementación se destacan las modificaciones estructurales del taller de la elipse como producto de una prueba piloto a personas externas de la investigación. En lo que refiere a las reformas durante la ejecución de la secuencia se habla de tres causales involucrados, estos son el factor tiempo, recursos y presaberes de los estudiantes. Del primer factor se mencionan los días de clase perdidos, así como las complicaciones que ocasionaban una disminución del tiempo destinado para las clases. Seguido a ello, de los recursos se destaca que inicialmente se planificó la implementación en un aula computarizada pero no siendo posible ello se termina accediendo a un trabajo alternado en dos tipos de aulas: una tradicional que cuenta con un televisor, sillas y tablero y, una de informática que tiene a lo sumo 20 computadores y no siempre cuenta con acceso a internet. En lo que respecta al factor de presaberes se considera la previa realidad educativa afrontada por el país con la aparición del COVID 19 por lo cual se tienen presentes los vacíos conceptuales que esta trajo consigo. Finalmente, en lo que atañe a las modificaciones finales se tiene en cuenta la modificación de la tarea retadora de la cónica hipérbola con la que se esperan mejores resultados en aras de favorecer más habilidades del proceso de representación.

En lo que atañe al último objetivo para responder a la pregunta de investigación se tiene el capítulo 10 en donde se caracterizan las habilidades del proceso de representación favorecidas por la implementación de la secuencia didáctica en GeoGebra. De allí, se resalta la diversidad de registros presentados en las habilidades de reconocimiento, interpretación y transformación de los objetos matemáticos en estudio. De igual manera se evidencia que las habilidades cognitivas menos favorecidas según los resultados arrojados por el proyecto fueron las de construcción y coordinación de representaciones de los objetos elipse e hipérbola. Además, se destaca el surgimiento de una nueva categoría como producto de las manipulaciones mediadas por la herramienta GeoGebra a la cual se denomina “transformación de representaciones estáticas a representaciones dinámicas del objeto matemático” y consiste en las acciones dinámicas que puede realizar un estudiante basado en una representación estática.

Finalmente, para evaluar la eficiencia de esta secuencia se encuentra el capítulo de análisis retrospectivo que valora el diseño didáctico con el ánimo de consolidar un sistema teórico de planificación docente a través de la experimentación en el aula. Para hacer esta validación se basa en el contraste entre las competencias alcanzadas por los estudiantes que participaron en el estudio y las competencias requeridas legalmente documentadas en los EBC y DBA. Este análisis de contraste se fundamenta en los resultados detallados en los capítulos 7 y 8 con los que valora la pertinencia de los talleres al solventar obstáculos epistemológicos y dificultades en habilidades cognitivas presentadas por los estudiantes, así como las modificaciones que pudieron realizarse a la secuencia en aras de obtener mejores resultados. De este análisis se concluye que, con la secuencia planteada se proporciona una solución a la pregunta de investigación con la obtención de distintas habilidades del proceso de representación y la suplencia de varias dificultades presentadas por los estudiantes.

Aunado a lo anterior, la evaluación de la secuencia realizada con una metodología diferente a la conocida por los alumnos ocasionó diversos conflictos. Esto debido a que el docente ya no impartía conocimientos de vigencia limitada, sino que guiaba a los mismos a encontrar sus propias respuestas.

Como colofón de esta propuesta se puede argüir que, con esta secuencia didáctica se pueden abordar no solo las secciones cónicas como lugares geométricos sino también algunos otros objetos matemáticos como la mediatriz. Por otra parte, considerando lo mencionado en los ajustes se propone un abordaje de esta secuencia contando con un aula computarizada y con internet ya que, según lo visualizado el uso de herramientas como GeoGebra potencia la adquisición de conocimientos y permite un mejor acercamiento a los objetos matemáticos aquí expuestos debido a la variedad de representaciones que ofrece y a la manipulación dinámica por la que se caracteriza. Se enfatiza en el aula con internet por cuestiones de seguimiento personalizado a los estudiantes ya que, con la creación de aulas digitales se consigue valorar el progreso y dificultades en tiempo real para así dar solución temprana y oportuna a estos obstáculos y potenciar el desarrollo cognitivo de los alumnos. Así mismo se aconseja que para futuras investigaciones se puede considerar como base el diseño didáctico completo en aras de estudiar la potenciación de los demás estándares de proceso planteados por el documento de los principios y estándares para la educación matemática (NCTM): la resolución de problemas, el razonamiento y prueba, la comunicación y las conexiones. En lo referente al primer proceso, la estructuración de la secuencia en fases para solventar un problema permite dividir el mismo en sub-problemas que paulatinamente guían a la solución del dilema general lo cual deja entrever la resolución de problemas. En otro orden de ideas, el estudiante argumenta constantemente sus respuestas y de manera implícita trabaja con el proceso de razonamiento y prueba. Finalmente, en cuanto a los procesos de comunicación y conexiones se tiene que, a lo largo de la secuencia, específicamente en las fases de socialización y explicación, se interactúa y dialoga con los estudiantes generando relaciones que implican la interdisciplinariedad, intradisciplinariedad y enfoque globalizado.

Referencias bibliográficas

Acevedo, P. (2019). *Aportes didácticos de los MOOC (cursos abiertos masivos en línea) en la enseñanza de la elipse con estudiantes de grado décimo de la I.E. Boyacá de Pereira* (Tesis de maestría). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Arellano, F. y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En Lestón, P. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22(1), 357-365. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4704/1/ArellanoAlgunasAlme2009.pdf

Arrieche, M. y Pérez, Y. (2009). Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica. En Lestón, P. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22(1), 525-533. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4705/1/ArriecheAn%C3%A1lisisAlme2009.pdf

Bartolini, M. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. In Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. & Valero, P. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, 37, 39-60. Recuperado de https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_4

Beltrán, J. (2019). *Propuesta de actividades para la enseñanza de las cónicas desde el diseño de una Ingeniería Didáctica* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas Bogotá, Colombia.

Calderón, W. y Peñuela, S. (2013). Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista científica,* 17(2), 272-280. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6640/1/Pe%C3%B1uela2013Propuesta.pdf

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje dela demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (Tesis doctoral). Universitat de Valencia

Camargo, L. (2021). Estrategias de investigación cualitativa en educación matemática. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/17880.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En Estepa, A., Contreras, A., Deulofeu, J., Penalva, C., García, J.y Ordóñez, L. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI*, 75 – 94. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11199/2/Castro2012Dificultades.pdf

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación matemática*, 29(1), 141-170.

Contreras, J. y Pino, C. (s.f). El problema de la Duplicación del Cubo. *Revista del Instituto de Matemática y Física*, 14-23. Recuperado de https://proyectodescartes.org/escenas-aux/bibliografia/duplica_cubo.pdf

Duval, R. (2001). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Santiago de Cali, Colombia.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Dzib-Goodin, A. (2013). La arquitectura cerebral como responsable del proceso de aprendizaje. *Revista Mexicana de Neurociencia*, 14(2): 81-85. Recuperado de http://www.usfx.bo/nueva/vicerrectorado/citas/TECNOLOGICAS_20/Arquitectura/49.pdf

Escalante, J. y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/405/40525850002.pdf

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Geometre II Plus* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9475/1/CB-0450269.pdf

Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de Geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica*, 20(3), 56-71. https://doi.org/10.14483/23448350.7689

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación: curso de precálculo mediado por geogebra*. Recuperado de https://elibro-net.bibliotecavirtual.uis.edu.co/es/ereader/uis/111871

González, C., Paniagua, J. y Patiño, G. (2008). *Secciones cónicas. Una mirada desde la derivación implícita*. Recuperado de http://hdl.handle.net/20.500.12622/1917

Henriquez, A. (Productor).(2020). *Segundo U3 4.7 Aplicaciones de la hipérbola*. *https://www.youtube.com/watch?v=oizwkSdUPEU*

Herrera, P. (2018). *Las Secciones Cónicas desde el entorno dinámico GeoGebra* (Tesis de doctorado). Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua.

Jarero, M. y Tuyub, I. (2013). El fenómeno de persistencia de dificultades en la construcción de conocimiento matemático. *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 160-167. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/16648/1/Jarero2013El.pdf

López, G. (2013). Prácticas disciplinares, prácticas escolares: qué son las disciplinas académicas y cómo se relacionan con la educación formal en las ciencias y en las humanidades. *Revista mexicana de investigación educativa*, 18(57), 383-412. Recuperado de https://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v18n57/v18n57a4.pdf

Lugo, J. (2014). *Secciones Cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en los libros de texto* (Tesis de especialización). Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles116042_archivo_pdf2.pdf

MEN (2016). *Derechos básicos de Aprendizaje (DBA) Matemáticas V2.* Recuperado de https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf

Murillo, N. (2020). *Objeto de aprendizaje para la enseñanza de las secciones cónicas incorporando los conceptos matemáticos, la teoría de representaciones y las aplicaciones* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ojeda, E. (2014). Interdisciplinariedad académica: en busca del nodo perdido. *Cuaderno De Pedagogía Universitaria*, *4*(8), 13-18. https://doi.org/10.29197/cpu.v4i8.69

Pérez, Z. y Montiel, G. (2018). Hacia una problematización de la parábola en su construcción geométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1489-1497. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/13733/1/Perez2018Hacia.pdf

Quintero, C. y Aragón, J. (2017). *Propuesta de enseñanza de las secciones cónicas usando diversas tecnologías para su desarrollo* (Tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Ramirez, R. (2013). *Las Secciones Cónicas en la Escuela Secundaria: un Análisis Matemático y Didáctico* (Tesis de especialización). Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina.

Ricaldi, L. (2017). Secuencia didáctica para el cambio conceptual en el tratamiento de la elipse. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1468-1478. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/12381/1/Ricaldi2017Secuencia.pdf

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación* (Tesis de maestría), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Tinoco, G. (2018). Elipse: *Elementos y ecuación de la elipse*. [Manuscrito no publicado]. México: UAEM. http://metabase.uaem.mx//handle/123456789/2890

Van der Linde, G. (2014). ¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior?. *Cuaderno De Pedagogía Universitaria*, 4(8), 11-12. https://doi.org/10.29197/cpu.v4i8.68

Vargas, L. (2021). *Un estudio histórico-epistemológico sobre la construcción social de las secciones cónicas en el espacio* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.