

**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA
UN PROBLEMA DE STUM-LIOUVILLE CON
VALORES EN LA FRONTERA**

DARWIN DÍAZ MEJÍA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2012**

**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA
UN PROBLEMA DE STUM-LIOUVILLE CON
VALORES EN LA FRONTERA**

DARWIN DÍAZ MEJÍA

**Monografía presentada para optar al
título de Licenciado en Matemáticas**

**Director
JULIO CÉSAR CARRILLO ESCOBAR, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2012**

Agradecimientos

- *Primero agradezco a Dios por darme una segunda oportunidad de vivir, de ver la vida desde otro punto de vista, donde la paciencia, virtud y sabiduría, juega un papel importante en la toma de decisiones, y que es la base para iniciar otro recorrido con el apoyo incondicional de mi familia.*
- *Gracias al profesor Julio Cesar Carrillo Escobar por sus útiles consejos que orientaron mis pensamiento hacia el éxito del desarrollo de este proyecto. Al profesor Bernardo Mayorga, por ser un excelente docente a quien le tengo respeto y admiración, por su sabiduría y su experiencia a lo largo de la vida.*
- *La vida siempre esta hecha de caídas, subidas y mentiras, pero los amigos verdaderos siempre perduran en la vida. Siempre estaran en mi mente. Gracias por todos esos bellos momentos que comparten conmigo llenos de ternura, que es una paz que viaja al lado de mi vida.*

Tabla de Contenido

0.1. Introducción	11
1. Espacios y operadores	12
1.1. Espacios métricos	12
1.1.1. Métrica y espacio métrico	13
1.1.2. Topología en espacio métricos	14
1.1.3. Completez	17
1.1.4. Compacidad y convexidad	19
1.1.5. Contracciones y teorema del punto fijo de Banach	22
1.2. Espacios normados y espacios de Banach	25
1.2.1. Espacios vectoriales reales	26
1.2.2. Norma y espacio normado	27
1.2.3. Producto interno y espacio con producto interno	28
1.2.4. Espacios de Hilbert	30
1.3. Teoría de operadores	30
1.3.1. Fundamentos	30
1.3.2. Operadores continuos	31
1.3.3. Operadores adjuntos	31
1.3.4. Condiciones de solubilidad	32
1.3.5. El espectro de un operador	33
1.3.6. Operadores compactos	35
1.3.7. El espectro de un operador compacto auto-adjunto	37
2. Problemas de valores en la frontera de segundo orden	39
2.1. El problema de Sturm-Liouville regular	40
2.2. Ecuaciones integrables	45

2.2.1.	Ecuaciones de Fredholm	46
2.2.2.	Soluciones mediante un desarrollo con funciones propias . .	50
2.2.3.	Funciones de Green	54
2.3.	Métodos numéricos	60
2.3.1.	Para problemas de valor inicial	60
2.4.	Para problemas de valores en la frontera	62
2.4.1.	El método del disparo no lineal	63
3.	El problema de valores en la frontera	70
3.1.	Introducción	70
3.2.	Existencia y unicidad de soluciones	71
3.2.1.	Procedimiento iterativo	74
A.	Algoritmos	75
A.1.	Algoritmo método del disparo	75
B.	Bibliografía	79

Índice de figuras

1.1. Desigualdad tiangular	13
1.2. Bola de centro en el origen y de radio 1, (a) en la métrica d_1 y la métrica d_2	15
1.3. Representación grafica de la definición 1,4	16
1.4. Notación en la parte (a) de la demostración del Teorema 1.1. . . .	16
2.1. Resultados numéricos del método de Runge-Kutta cuando $s^* = -14$.	69

RESUMEN

TÍTULO: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA DE STUM-LIOUVILLE CON VALORES EN LA FRONTERA*

AUTOR: DARWIN DÍAZ MEJÍA**

PALABRAS CLAVES: continuidad, sucesiones, convergencia, operador lineal.

DESCRIPCIÓN:

Consideremos el problema de valor en la frontera (PVF),

$$\begin{aligned} \text{(EDO)} \quad & u'' + \alpha(t)f(u) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \text{(CF)} \quad & au(0) - bu'(0) = \gamma_1, \\ \text{(CF)} \quad & cu(T) + du'(T) = \gamma_2. \end{aligned} \tag{1}$$

en donde f es una función que cumple condiciones apropiadas y a , b , c y d son constante dadas. Este problema surge en diferentes áreas de la matemática aplicada y la física, ver [7]. Por ejemplo, cuando $\alpha(t)$ es una constante y $b = d = 0$, el PVF (1) se presenta en conexión con el problema establecer la deflexión vertical u de una varilla elástica con extremos fijos, siendo α la carga axial (constante) que actúa en cada punto de la varilla. En este caso, para valores pequeños de α la solución del PVF es $u = 0$, a menos que α corresponda a un valor propio del problema. Cuando la carga axial es aumentada, la varilla se arquea, dando origen a una solución no nula u del problema. Para este caso, Loaiza demuestra en [9] mediante la técnica del punto fijo de Banach, y bajo condiciones apropiadas sobre f , que este problema tiene una única solución. Mediante la misma técnica, nos proponemos estudiar la existencia y unicidad de soluciones del PVF (1).

*Universidad Industrial de Santander, Decanatura de ciencias básicas, Escuela de matemáticas.

**Dr. Julio César Carrillo Escobar, Director del Trabajo de Grado.

ABSTRACT

TITLE: EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR A STUM-LIOUVILLE BOUNDARY VALUE PROBLEM***

AUTHOR: DARWIN DÍAZ MEJÍA****

KEYWORDS: continuity, sequences, convergence, linear operator.

DESCRIPTION: Consider the problem of boundary value (PVF),

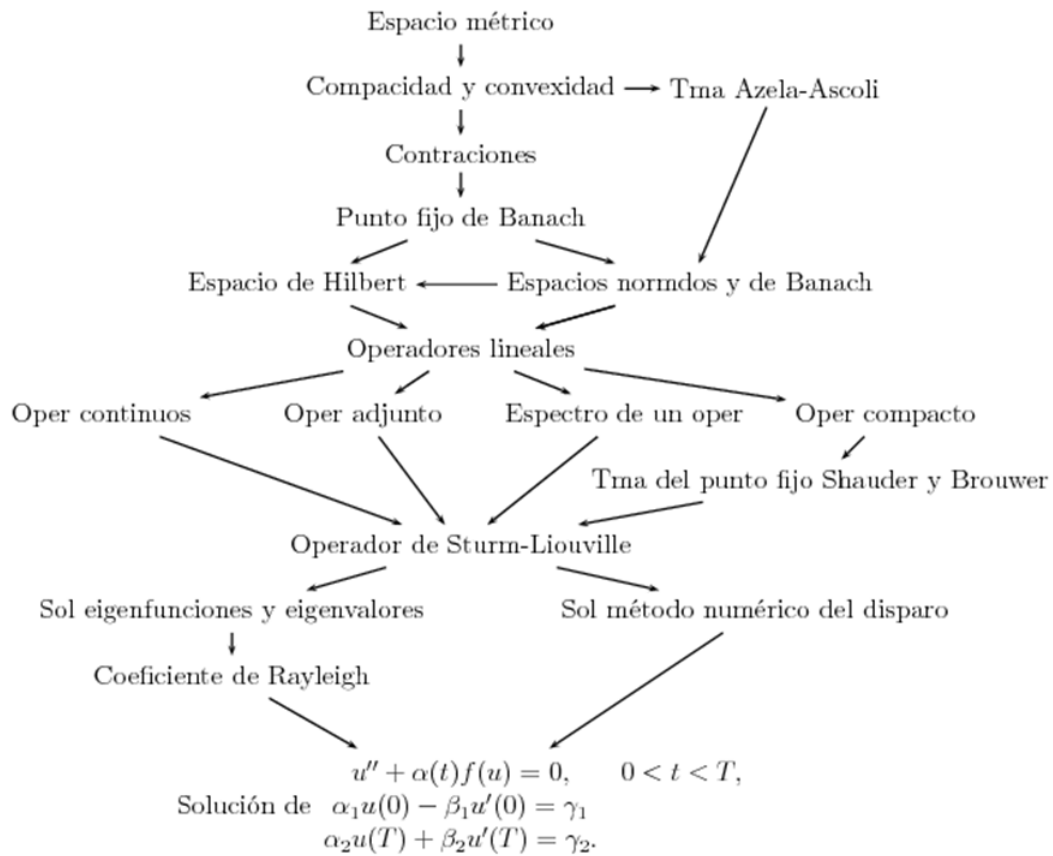
$$\begin{aligned} \text{(EDO)} \quad & u'' + \alpha(x)f(u) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \text{(CF)} \quad & au(0) - bu'(0) = \gamma_1, \\ \text{(CF)} \quad & cu(1) + du'(1) = \gamma_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Where f is a function that satisfies appropriate conditions a , b , c y d are given constant. This problem arises in different areas of applied mathematics and physics, see [7]. Example, when $a(x)$ is a constant $b = d = 0$, the PVF (2) presented in connection with the problem set the deflection u vertical rod of elastic with fixed ends, a being the axial load (constant) acting on each point of the rod. Small values of a the solution of PVF is $u = 0$, unless a value corresponding to a own the problem. When the axial load is increased, the rod arches, giving rise to a nonzero solution u of the problem. To this case demonstrates Loaiza [9] technique, using fixed point Banach, and under appropriate conditions on f , this problem has a unique solution. By the same technique, we propose study the existence and uniqueness of solutions PVF (2).

***Universidad Industrial de Santander, Faculty of Science, Undergraduate Program of Licentiate in Mathematics, School of Mathematics.

****Dr. Julio César Carrillo Escobar, Undergraduate Dissertation Director.

0.1. Introducción



Capítulo 1

Espacios y operadores

En este capítulo se presenta una revisión de los temas que serán el fundamento del estudio del problema de valores en la frontera de Sturm-Liouville semilineal. En la medida de lo posible, esta revisión se hará lo más precisa posible y cuando sea necesaria se hará referencia a la bibliografía estudiada. En general, se puede encontrar una discusión más amplia de los temas de que trata este capítulo en los trabajos de [9, 10, 11, 12, 18, 19].

En el segundo capítulo demostraremos la existencia y unicidad del problema de valores en la frontera de Sturm-Liouville semilineal, y damos un análisis con un ejemplo de los procedimientos iterativos de soluciones de valores iniciales (Euler y Runge-Kutta), para resolver problemas de valores en la frontera [1, 2, 9].

1.1. Espacios métricos

Un espacio métrico es un conjunto en el cual tiene sentido “medir distancias”, es decir, dados dos elementos cualquiera del conjunto, digamos x e y , se puede calcular la distancia entre ellos, denotada como $d(x, y)$. Se espera que $d(x, y)$ sea un número real positivo cuando $x \neq y$, o que sea igual a cero cuando $x = y$, al igual que sucede en espacios euclidianos. El concepto de espacio métrico generaliza la noción de distancia de espacios euclidianos a conjuntos que no necesariamente son espacios vectoriales.¹

¹El concepto de espacios métricos fue dado por Maurice René Fréchet en 1906, aunque el nombre se debe a Hausdorff, cuando por primera vez trató de formalizar los conceptos topológicos asociados a los trabajos de Volterra, Arzela, Hadamard y Cantor.

1.1.1. Métrica y espacio métrico

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades

- (a) $d(x, x) = 0$,
- (b) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$,
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

para todo x, y, z en X , se llama una **métrica** en X . Un conjunto no vacío X dotado con una métrica se llama un **espacio métrico**. El par (X, d) suele denotar el espacio métrico conformado por el conjunto no vacío X y la métrica d definida sobre él.

Las propiedades de (a) – (d) son llamadas los axiomas de espacio métrico, donde (a) y (b) indican que la métrica d es una función de valor real no negativa, además (c) y (d) son llamadas las propiedades de simetría y de la desigualdad triangular, respectivamente. Geométricamente, esta última propiedad significa que en todo triángulo la longitud de cada lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

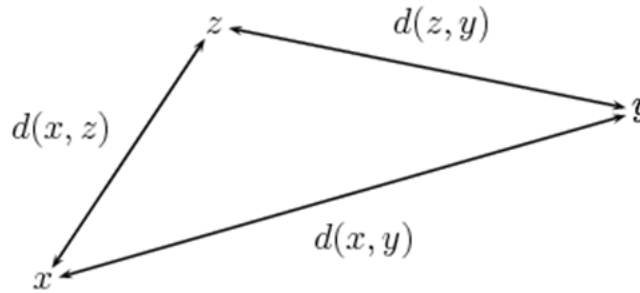


Figura 1.1: Desigualdad triangular

Ejemplo 1.1. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales junto con la función $d(x, y) = |x - y|$, definida para cada $x, y \in \mathbb{R}$, forma el espacio métrico usual de los números reales.

En general, se considera el conjunto $\mathbb{R}^n$, el cual consiste de todas las n -plas ordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con los $x_i \in \mathbb{R}$. Para cada número entero positivo

p , la función

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p)^{1/p},$$

define una métrica en $\mathbb{R}^n$, llamada la p -métrica de $\mathbb{R}^n$. En particular, la 1-métrica de $\mathbb{R}^n$ se llama la métrica del taxista en $\mathbb{R}^n$ y a la 2-métrica la métrica euclidiana, o métrica usual, de $\mathbb{R}^n$. A $\mathbb{R}^n$ junto con esta métrica se le llama un espacio euclidiano.

Para $p = \infty$, la función

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

define una métrica en $\mathbb{R}^n$, llamada la métrica del máximo.

Ejemplo 1.2. En el conjunto $C[a, b]$ de todas las funciones de valor real que están definidas y son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, la función

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

define una métrica en $C[a, b]$. Como toda función continua es integrable, la función

$$d_2(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

esta bien definida para todo par de funciones f, g en $C[a, b]$, y además se puede demostrar que define una métrica en $C[a, b]$, que usualmente se llama la métrica L^2 .

1.1.2. Topología en espacio métricos

La noción de topología de puntos en el espacio euclidiano se puede extender a espacios métricos arbitrarios.

Definición 1.2. Sean (X, d) un espacio métrico, x_0 un punto dado de X y r un número real positivo dado. Se define la **bola abierta** de centro en x_0 y de radio r , denotada $B(x_0; r)$, al conjunto

$$B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Este tipo de conjuntos son a menudo llamados una **vecindad** de x . Igualmente, se llama **bola cerrada** de centro x_0 y radio r , denotada $\bar{B}(x_0; r)$, al conjunto

$$\bar{B}(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

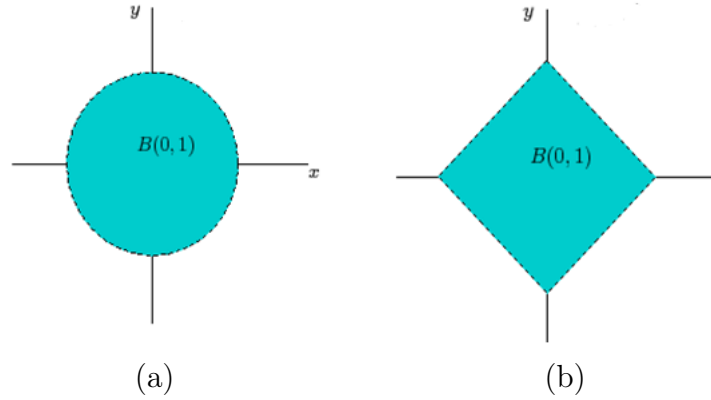


Figura 1.2: Bola de centro en el origen y de radio 1, (a) en la métrica d_1 y la métrica d_2

Ejemplo 1.3. En $\mathbb{R}$ junto con la métrica d_1 , inducida por el valor absoluto, la bola abierta de centro en a y radio r es el intervalo abierto $(a - r, a + r)$.

Ejemplo 1.4. En $\mathbb{R}^2$, junto con la métrica euclidiana, la bola abierta de centro en el origen y radio 1 es el conjunto

$$\begin{aligned} B((0,0);1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \end{aligned}$$

el cual representa el círculo abierto de centro en el origen y de radio 1.

Ahora bien, considerando a $\mathbb{R}^2$ junto con la métrica d_1 , tenemos que la bola abierta de centro en el origen y de radio 1 es el conjunto

$$B((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\},$$

el cual consiste de todos los puntos interiores a un cuadrado, con centro en el origen, cuando se rota un ángulo de $\pi/4$ radianes con respecto al eje x .

Definición 1.3. Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X . Se dice que x en X es un **punto interior** de A si existe una bola abierta de centro en x y de radio r que esta contenida en A . Además, se dice que A es un **conjunto abierto**, “abierto” por brevedad, si todos sus puntos son puntos interiores.

Definición 1.4. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $T : X \rightarrow Y$ se dice **continua en** $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que usualmente depende de ϵ , tal que $d_Y(Tx, Tx_0) < \epsilon$ para todo $x \in X$ tal que $d_X(x, x_0) < \delta$. La función f es **continua en** X si la función es continua en cada punto de X .

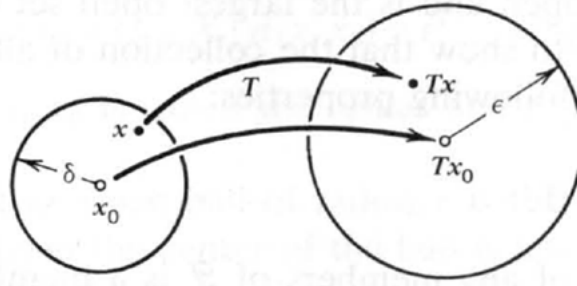


Figura 1.3: Representación grafica de la definición 1.4

Teorema 1.1. Sea $T : X \rightarrow Y$ una función entre los espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) . Entonces, T es continua si y sólo la imagen inversa de todo abierto en Y es un abierto en X .

Demostración.

- (a) Supongamos que T es continua. Sea $S \subset Y$ un abierto y S_0 la imagen inversa de S , es decir $S_0 = T^{-1}(S)$. Si $S_0 = \emptyset$, evidentemente S_0 es abierto. Supongamos ahora que $S_0 \neq \emptyset$ y consideramos un elemento x_0 cualquiera en S_0 . Entonces existe un $y_0 \in Y$ tal que $Tx_0 = y_0$. Como S es abierto y $y_0 \in S$, existe un $\epsilon > 0$ en donde $B(y_0, \epsilon) \subset S$. Como T es continua, existe un $\delta > 0$ tal que $T(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \epsilon)$. En consecuencia $B(x_0, \delta) \subset S_0$, lo cual quiere decir que S_0 es un conjunto abierto de X , dado que x_0 en S_0 es arbitrario.

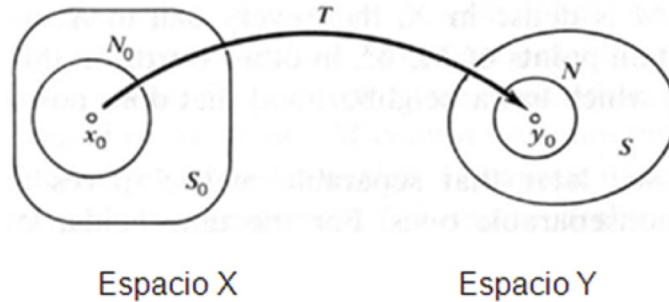


Figura 1.4: Notación en la parte (a) de la demostración del Teorema 1.1.

- (b) Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ dados. Si N es una ϵ -vecindad de Tx_0 , por hipótesis, la imagen inversa de N es un abierto de X que contiene a x_0 . Por lo tanto, existe

una δ – vecindad V_δ tal que $T(V_\delta) \subset N$. Como x_0 es arbitrario, entonces T es continua.

□

1.1.3. Completez

Las definiciones de convergencia y sucesiones de Cauchy en espacios euclidianos se generalizan de una manera obvia a espacios métricos. Una sucesión en un espacio métrico (X, d) es una función $n \mapsto x_n$ que asocia un punto $x_n \in X$ a cada número natural $n \in \mathbb{N}$.

La métrica genera una noción automática de convergencia, en el sentido que una sucesión (x_n) en el espacio métrico converge a un punto x de él sí y solo si la sucesión de números reales $(d(x_n, x))$ converge a cero.

Definición 1.5. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) , se dice que **converge** a $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, que usualmente depende de ϵ , tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ cuando $n > N$. Se dice que la sucesión (x_n) es **convergente** si existe algún x en X al cual la sucesión converge. Si (x_n) no es convergente, se dice que la sucesión es **divergente**. La sucesión (x_n) es de **Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, que usualmente depende de ϵ , tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para todo $m, n \geq N$.

Teorema 1.2. Sea T una función definida entre los espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) . Entonces T es continua en $x \in X$ si y solo si para toda sucesión (x_n) en X que converge a x se tiene que la sucesión (Tx_n) en Y converge a Tx ; es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = Tx.$$

La prueba de este resultado es similar a la que hace para funciones definidas entre espacios euclidianos.

Definición 1.6. Un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un límite en X .

Ejemplo 1.5. El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es completo. Existe una sucesión de números racionales (q_n) que converge al número real $\sqrt{2}$, el cual es un número irracional.

Ejemplo 1.6. El espacio $C[a, b]$ es completo en la métrica del máximo (ver [8]) pero no en la métrica L^2 . Por ejemplo, la sucesión (x_n) en $C[-1, 1]$ con término n -ésimo

$$x_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(nt),$$

es de Cauchy en $C[-1, 1]$:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |x_m(t) - x_n(t)|^2 dt = 0.$$

No obstante, el límite de esta sucesión es la función discontinua

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & 1 \leq t < 0. \end{cases}$$

Si un espacio métrico no es completo, entonces la extensión completa del espacio se obtiene al agregarle los límite de todas aquellas sucesiones de Cauchy del espacio. Aunque intuitivamente es comprensible la idea de completez de un espacio métrico, en la práctica no lo es (ver [8]).

Ejemplo 1.7. Consideremos el espacio vectorial $C[a, b]$ con la métrica L^2 . Entonces la extensión completa de $C[a, b]$ es $L^2[a, b]$, que es el espacio de todas las funciones cuadrado integrable con la propiedad de que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty.$$

La integral, se considera en el sentido de Riemann. Los elementos de $L^2[a, b]$ son en realidad clases de equivalencia de funciones con la propiedad de que si u y v están en la misma clase de equivalencia, entonces

$$\int_a^b |u(x) - v(x)|^2 = 0.$$

Por ejemplo, para todo $x \in [-1, 1]$ las funciones

$$u(x) = x^2, \quad v(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

son distintas, no obstante

$$\int_{-1}^1 |u(x) - v(x)|^2 = 0.$$

En tal caso, se suele decir que u y v son iguales excepto en el conjunto $\{0\}$, el cual se puede considerar como un intervalo de longitud cero. Si una función

en $L^2[a, b]$ tiene cierta propiedad en todos los puntos de $[a, b]$, excepto en un conjunto de longitud cero, entonces se dice que tal función posee esa propiedad en casi todas partes (c.t.p.) de $[a, b]$. Así, los elementos de una clase de equivalencia de funciones de $L^2[a, b]$ son funciones que son iguales en c.t.p. de $[a, b]$ (ver [16] para detalles adicionales).

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subset X$ y $x \in X$. Decimos que x es un punto de adherencia de S si existe una sucesión (s_n) en S tal que $s_n \rightarrow x$. Se llama la **adherencia o clausura** de S y se denota como $\overline{S}$.

Ejemplo 1.8. Sean $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y $S = (0, 1]$. Entonces cero es un punto de adherencia de S , pues $(\frac{1}{n})$ es una sucesión en S que converge a cero. El conjunto de todos los puntos de la adherencia de S es $\overline{S} = [0, 1]$.

Definición 1.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, se dice que es un **conjunto denso** en X si y sólo si $\overline{A} = X$.

1.1.4. Compacidad y convexidad

Definición 1.9. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, la **recta en $\mathbb{R}^n$** que pasa por los puntos x_1, x_2 cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} r &= \{x \in \mathbb{R}^n / x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n; \quad \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / x = x_2 + \lambda(x_1 - x_2); \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n; \quad \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Definición 1.10. El **segmento lineal** entre dos puntos x_1 y x_2 se representa

$$[x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n; \quad \lambda \in [0, 1]\}$$

Se trata de un segmento lineal cerrado, porque incluye los puntos x_1 y x_2 .

Definición 1.11. Un conjunto S es **convexo** si y sólo si cumple que

$$\forall x_1, x_2 \in S \rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Es decir, dados dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento lineal cerrado está totalmente contenido en el conjunto.

Definición 1.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$. Diremos que C es **compacto**, si toda sucesión en C admite subsucesión convergente en C .

Definición 1.13. Sean (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$. Diremos que C es **acotado**, si existe $a \in C$ y $r > 0$ tales que $C \subseteq B(a; r)$.

Teorema 1.3. *En todo espacio métrico (X, d) , las bolas abiertas son conjuntos convexos.*

Demostración. Sea $B(a, r) \subset X$ una bola abierta. Sean $x, y \in B(a, r)$ entonces $d(x, a) < r$ y $d(y, a) < r$. Sea $\lambda \in [0, 1]$, tenemos $(1 - \lambda)x + \lambda y - a = (1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)$, tomando el valor absoluto de la ecuación se obtiene $|(1 - \lambda)x + \lambda y - a| = |(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)| = |(1 - \lambda)||x - a| + |\lambda||y - a| = (1 - \lambda)|x - a| + \lambda|y - a| = (1 - \lambda)d(x, a) + \lambda d(y, a) < (1 - \lambda)r + \lambda r = r \quad \square$

Definición 1.14. *Sea A, D dos espacios métricos, F es subconjunto de las funciones continuas en los espacios métrico A, D y $t \in A$, decimos que F es **equicontinua** en t , dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_t > 0$ tal que $d_A(t, t') < \delta_t$ implica*

$$d_D(f(t), f(t')) < \varepsilon.$$

Para todo $f \in F$.

Definición 1.15. *Sea A, D dos espacios métricos, $F \subset C[A, D]$ y $t \in A$, decimos que F es **uniformemente equicontinua** en A , dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que, para todo $t, t' \in A$, $d_A(t, t') < \delta$ implica*

$$d_D(f(t), f(t')) < \varepsilon$$

Para todo $f \in F$.

Teorema 1.4 (Azela-Ascoli). *Sea A un espacio métrico compacto. Sea F un subconjunto cerrado de $C[A, K]$ ($K = \mathbb{R}$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- (1) F es compacto.
- (2) F es cerrado y equicontinuo

Demostración. Sea d la métrica en A

(1) $\rightarrow$ (2) Como F es compacto (hipotesis). implica que F es cerrado y acotado. probemos que F es equicontinuo.

Sea $\varepsilon > 0$, tomando $\frac{\varepsilon}{3}$, entonces la bola

$$\left\{ B\left(f, \frac{\varepsilon}{3}\right) : f \in F \right\}.$$

Como F es compacto, existe $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$ tal que

$$F \subset \bigcup_{j=1}^n B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

sea $j \in 1, 2, \dots, n$, como f_j es uniformemente continua entonces existe $\delta_j > 0$ tal que $d(t, t') < \delta_j$ implica

$$|f_j(t) - f_j(t')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}.$$

Si la $d(t, t') < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &\leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t')| + |f_k(t') - f(t')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

luego F es equicontinua.

(2) $\rightarrow$ (1) Supongamos que F es acotado y equicontinua. Probaremos que F es secuencialmente compacto². Probaremos que todas las sucesiones contenidas en F tiene una subsucesión convergente a un punto de F .

Sea $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset F$ una sucesión.

Como F es acotado existe una constante M tal que

$$|f_n(t)| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $t \in A$.

Como A es un espacio métrico compacto, contiene un subconjunto denso y numerable $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$.

tenemos que $\{f_n(t_1)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión (numérica) acotada y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $\{f_{1n}(t_1)\}_{n \geq 1}$.

Nuevamente $\{f_{1n}(t_2)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión (numérica) acotada y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $\{f_{2n}(t_2)\}_{n \geq 1}$. Y así sucesivamente. Sea

$$g_j = f_{jj}.$$

Entonces

- (a) $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una subsucesión de $\{f_n\}_{n \geq 1}$,
- (b) para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{g_n(t_k)\}_{n \geq 1}$ converge.

² F es llamado relativamente compacto si y sólo si, todas las sucesiones en F tiene subsucesión convergente. Si el límite de estas subsucesión siempre pertenece a F , entonces F es llamado secuencialmente compacto

Vamos a probar que $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ como F uniformemente equicontinua entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$d(t, t') < \delta \quad \text{implica} \quad |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } f \in F.$$

Tenemos que la bola $\{B(t_n, \delta) : n \geq 1\}$.

Como A es compacto existe $t_1, \dots, t_N \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N B(t_k, \delta).$$

Por (b), para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_m(t_k) - g_n(t_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $m, n \geq n_k$.

Sea $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ entonces

$$|g_m(t_k) - g_n(t_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $m, n \geq n_0$, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$.

Sea $t \in A$ y sean $m, n \geq n_0$. Existe $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $d(t, t_{k_0}) < \delta$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} |g_m(t_{k_0}) - g_n(t)| &\leq |g_m(t) - g_m(t_{k_0})| + |g_m(t_{k_0}) - g_n(t_{k_0})| + |g_n(t_{k_0}) - g_n(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

luego $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Como F es cerrado tenemos que $\{g_n\}_{n \geq 1}$ converge a un punto de F .

□

1.1.5. Contracciones y teorema del punto fijo de Banach

Contracciones

Algunas ecuaciones funcionales, diferenciales e integrales, se pueden escribir de la forma

$$u = Tu, \tag{1.1}$$

en donde T es una transformación de un espacio métrico en sí mismo. Desde este punto de vista, las soluciones de (1.1) son elementos u en el espacio métrico que son invariantes bajo T .

Definición 1.16. Sea T una función definida de un espacio métrico (X, d) en sí mismo. Toda solución del problema (1.1) se llama un **punto fijo** de T .

Un método de solución de (1.1), que es también llamado método de aproximaciones sucesivas (o método de iteraciones), comienza con algún valor inicial u_0 dado. A continuación se definen la sucesión (u_n) de aproximaciones sucesivas $u_1 = Tu_0, u_2 = Tu_1, \dots$, la cual se espera que converja al punto fijo de T . Este es el caso cuando T es continua y la sucesión (u_n) es convergente, digamos a v . Como $u_n = Tu_{n-1}$, donde $u_n \rightarrow v$ y $u_{n-1} \rightarrow v$, la continuidad de T nos permite garantizar que $Tu_{n-1} \rightarrow Tv$, así que $v = Tv$. También se tiene que las funciones contractivas forman una clase importante de funciones para las cuales el método de las aproximaciones sucesivas funciona.

Definición 1.17. Una transformación T de un espacio métrico X en sí mismo se dice que es **Lipschitz continua**, si existe una constante $c \geq 0$, independiente de u y de v , tal que

$$d(Tu, Tv) \leq c d(u, v), \quad \text{para todo } u, v \in X. \quad (1.2)$$

Si (1.2) se cumple para $c < 1$, se llama a T una **contracción** y a c un **factor de contracción** de T .

Teorema 1.5. Toda contracción en un espacio métrico es continua.

Demostración. Sea f una función contractiva, existe $0 \leq c < 1$,

- (a) Si $c = 0$, implica que $d(f(x), f(x)) = 0$, entonces $f(x) = f(y)$, esto significa que f es una función constante y por lo tanto continua.
- (b) Si $c > 0$, sea $\delta = \frac{\epsilon}{c}$. Sea a un elemento fijo y arbitrario en X , como f es contractiva, y $x \in X$ tal que $d(x, a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < cd(x, a) < \epsilon$, por lo tanto, f es continua en a . Como a es un elemento arbitrario en X , entonces f es continua en X . $\square$

Teorema del punto fijo de Banach

El teorema del punto fijo de Banach garantiza que todo proceso iterativo que involucra una función contractiva es convergente a un punto fijo de tal función, al inicio de ese proceso de iteraciones requiere un valor x_0 , el cual depende de nuestra elección.

Teorema 1.6. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico completo. Si $T : X \rightarrow X$ es una contracción en X entonces

1) Existe un único $y \in X$ punto fijo de T .

2) Sea $x_0 \in X$ la sucesión iterada $x_n = Tx_{n-1}; n = 1, 2, \dots$ converge a y .

Demostración. Construiremos una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ y mostremos que es de cauchy, donde está sucesión resulta ser convergente en el espacio completo de X , probaremos entonces que su límite y es un punto fijo de T y que T no tiene más puntos fijos.

Existencia

Para $x_0 \in X$ arbitrario explicitamos los elementos de la sucesión iterada $(x_n)_{n \geq 1}$ definida por

$$\begin{aligned} x_n &= Tx_{n-1}; \quad n = 1, 2, \dots \\ x_1 &= Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0 \quad \text{y en general} \\ x_n &= T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Claramente está es una sucesión de imágenes de x_0 bajo repetidas aplicaciones de T .

Vamos a demostrar que $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X .

Para $m \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) = \alpha^2 d(Tx_{m-2}, Tx_{m-3}) \leq \alpha^3 d(x_{m-2}, x_{m-3}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) \\ &\text{es decir } d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m d(x_0, x_1), \quad m \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por otro lado para $m \geq n \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\text{usando repetidas veces la relación (1.3)} \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1$ tenemos $1 - \alpha^{m-n} < 1$, luego

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \quad (1.4)$$

Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$$

pues $0 \leq \alpha < 1$ por lo tanto de (1.4) obtenemos

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

luego, la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es de Caychy en X . Como X es completo, entonces $(x_n)_{n \geq 1}$ converge a un punto de X , digamos que $y \in X$ talque $x_n \rightarrow y$.

vamos a demostrar que y es un punto fijo de T . En efecto, tenemos

$$d(Ty, y) \leq d(Ty, x_n) + d(x_n, y),$$

pero como $x_n = Tx_{n-1}$, tenemos

$$d(Ty, y) \leq \alpha d(y, x_{n-1}) + d(x_n, y).$$

Observamos que cada término del segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a cero.

Unicidad

Supongamos que existe $z \in X$ otro punto fijo de T , tal que $y \neq z$, tenemos

$$\begin{aligned} Ty = y, z = Tz \quad \text{con } y \neq z \quad \text{en } X, \quad \text{entonces} \\ 0 < d(y, z) = d(Ty, Tz) \leq \alpha d(y, z) \end{aligned}$$

de donde resulta que $\alpha \geq 1$, lo cual, es una contradicción.

□

1.2. Espacios normados y espacios de Banach

Banach publico en 1932 su libro “*Théorie des opérations linéaires*”, en el cual se presento por primera vez un estudio de la teoría de operadores lineales en espacios normados, como una consecuencia del trabajo de F. Riesz y de S. Banach. Este hecho significo el comienzo del estudio sistemático de espacios normados que son completos en la métrica inducida por la norma del espacio.

1.2.1. Espacios vectoriales reales

Definición 1.18. *Un conjunto no vacío V junto con dos operaciones algebraicas, llamadas suma $(+)$ y multiplicación por un escalar $(\cdot)$ es un espacio vectorial cuando estas operaciones cumplen las siguientes propiedades*

1. *Para la suma: Para cada par ordenado (x, y) de elementos de V están definidos los elementos $x + y$ de V llamados la suma de x y y de tal manera que:*
 - (a) *Para cada x, y en V , $x + y = y + x$ (conmutativa),*
 - (b) *Para cada x, y, z en V , $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativa),*
 - (c) *existe un elemento 0 en V tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in V$ (la existencia del cero),*
 - (d) *para cada x en V existe un elemento $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$ (existencia de elementos opuestos).*
2. *Para la multiplicación por escalar α y cualquier elemento x en V está definido el elemento αx en V de manera que para cada x, y en V y escalares α, β se tiene que:*
 - (a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
 - (b) $1 \cdot x = x$.
3. *Para la suma y multiplicación por un escalar: Las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, la cual se cumple para cada x, y en V :*
 - (a) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
 - (b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Por definición, los únicos espacios vectoriales que se consideran son los espacios vectoriales reales.

Ejemplo 1.9. *El conjunto $C[a, b]$ junto con las operaciones reales de suma de funciones y de multiplicación de un escalar por una función, es un espacio vectorial.*

Ejemplo 1.10. *El conjunto $C^2[a, b]$ de todas las funciones que tienen hasta sus segundas derivadas continuas en $[a, b]$, es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma de funciones y de multiplicación de un escalar por una función. Sea $Lu = u''(x) - k^2u$ donde k es un escalar dado. Entonces el conjunto de todas las funciones u en $C^2[0, T]$ que son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria*

homogénea $Lu = 0$, es un espacio vectorial bajo estas mismas operaciones. No sucede así con el conjunto de funciones en $C^2[0, T]$ que son soluciones de la ecuación diferencial no homogénea $Lu = x^2$.

Ejemplo 1.11. El conjunto l_2 de todas las sucesiones de números reales (x_n) tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \quad (1.5)$$

junto con las operaciones de suma y multiplicación por escalar en l^2 definidas como

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n), \\ \alpha(x_n) &= (\alpha x_n) \quad (\alpha \text{ un escalar}), \end{aligned}$$

es un espacio vectorial. El hecho que la suma de dos sucesiones de l_2 cumpla la condición (1.5) se desprende la desigualdad

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

la cual se cumple para todo par de escalares a y b .

1.2.2. Norma y espacio normado

Definición 1.19. Un **espacio normado** es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada **norma**, la cual cumple las siguientes propiedades para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

- (a) $\|x\| \geq 0$
- (b) $\|x\| = 0$ sí y solo si $x = 0$
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad triangular)

Ejemplo 1.12. En el espacio vectorial l^2 , la función

$$\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

define una norma. El resultado se sigue de las propiedades de las series absolutamente convergentes.

Ejemplo 1.13. El espacio $C[a, b]$ es un espacio normado bajo la norma

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

la cual se suele llamar la norma de máximo, y se denota además como $\|\cdot\|_\infty$. También lo es en la norma L^2 , definida como

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Proposición 1.1. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la función $d(x, y) = \|x - y\|$ definida para todo $x, y \in X$ cumple con las siguientes propiedades:

- (a) (X, d) es un espacio métrico.
- (b) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ para todo $x, y, z \in X$.
- (c) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.20. Un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ que es completo en la métrica inducida por la norma:

$$d(u, v) = \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in X,$$

se llama un **espacio de Banach**.

Ejemplo 1.14. Según el Ejemplo 1.6, el espacio $C[a, b]$ es un espacio de Banach en la norma del máximo, pero no lo es en la norma L^2 . También el espacio $L^2[a, b]$ es un espacio de Banach en la norma L^2 .

De la definición de espacios de Banach y el Teorema de punto fijo de Banach en espacios métricos se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.1. Si T es una contracción de un espacio de Banach X en si mismo, entonces T tiene un único punto fijo.

1.2.3. Producto interno y espacio con producto interno

El concepto de espacio con producto interno es una generalización del concepto de espacio euclidiano con producto punto, la cual permite que la noción de convergencia de sucesiones. El producto interior permite que se pueda adoptar una visión geométrica y que se utilice el lenguaje geométrico familiar de los espacios de dimensión finita. De todos los espacios vectoriales de dimensión infinita, los espacios de Hilbert son los más cercanos a los espacios de dimensión finita con producto interno (ver [16]).

Definición 1.21. Un **producto escalar** en un espacio vectorial real V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la cual cumple con las siguientes propiedades, para todo $x, y, z \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- (a) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- (b) $\langle x, y \rangle = 0$ sí y solo si $x = y$,
- (c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- (d) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Un espacio con producto interno, o también pre-Hilbert, es un espacio vectorial real con producto interno.

De las propiedades (c) y (d) del producto interno se sigue que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en su segundo argumento:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle.$$

En consecuencia, un producto interno es una forma bilineal, simétrica y definido positiva. También, como consecuencia de estas propiedades tenemos que todo espacio vectorial con producto interno es un espacio normado.

Teorema 1.7. Si V es un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces

1. $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ para cada $x, y \in V$.
2. $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ define una norma $\|\cdot\|$ en V para la cual

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

para todo $x, y \in V$.

3. El producto escalar es una función continua de $V \times V$ en $\mathbb{R}$.

Así, todo espacio con producto interno es también un espacio métrico.

Ejemplo 1.15. Se puede demostrar a partir de las propiedades de la integral que en el espacio vectorial $C[a, b]$ la función

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

define un producto interno.

1.2.4. Espacios de Hilbert

En espacios vectoriales con producto interno es de especial importancia el estudio de la convergencia de sucesiones Cauchy en la métrica inducida por el producto interno del espacio.

Definición 1.22. *Un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno que es completo en la métrica inducida por el producto interno.*

En particular, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach; es decir, si d es la métrica inducida por la norma del espacio con producto interno X , entonces (X, d) es completo.

Corolario 1.2. *Si T es una contracción de un espacio de Hilbert X en sí mismo entonces T tiene un único punto fijo.*

Demostración. Como X es un espacio de Hilbert, su producto interno define una norma. Por Teorema 1.1 se concluye que T tiene un único punto fijo. $\square$

1.3. Teoría de operadores

Cuando se tiene que resolver ciertos problemas en matemáticas aplicadas, se obtiene ciertas ventajas de claridad, generalidad y visión geométrica cuando se resuelven estos problemas en espacios de Hilbert. El hacerlo requiere de ciertos conceptos adicionales y en especial los que son pertinentes a un problema de valores en la frontera de segundo orden.

1.3.1. Fundamentos

Toda función definida entre espacios de Hilbert se llama una transformación. Cuando una transformación está definida entre un espacio vectorial y sí mismo, se llama un operador.

Definición 1.23. *Sea A un operador de un espacio de Hilbert X en sí mismo. Se dice que A es **lineal** si*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av,$$

para todo $u, v \in X$ y todo par de escalares α, β .

El conjunto de D_A , de todos los $x \in X$ para las cuales el operador está definido, se llama el dominio de A . En general, no se tiene que $D_A = X$, sin embargo, siempre admitiremos que D_A es un subespacio de X .

1.3.2. Operadores continuos

En lo sucesivo se considera que el operador A está definido en un espacio de Hilbert X .

Definición 1.24. *El operador lineal A se dice que es **acotado**, si existe un número real c tal que para cada $x \in D_A$, $\|Ax\| \leq c\|x\|$.*

Un operador lineal es una función de A en A , se llama **acotado**, cuando esta definido sobre todo el A y transforma cada conjunto acotado en un conjunto también acotado. Entre la acotación y la continuidad de un operador lineal tiene una relación fuerte donde se ve reflejado con el siguiente teorema.

Teorema 1.8. *Sea A un operador lineal. entonces A es continuo si y solo si A es acotado.*

Demostración. Sea $A : X \rightarrow X_1$, tal que $X_1 \subset X$, es un operador continuo, sea M un subconjunto de X que es acotado y tal que $A(M)$ es un subconjunto no acotado de X_1 . Entonces existe en X_1 una vecindad V del cero tal que ninguno de los conjuntos $\frac{1}{n}AM$ está contenido en V . Pero en este caso existe una sucesión $(x_n) \subset M$ tal que ninguno de los elementos $\frac{1}{n}Ax_n$ pertenecen a V implica que $(\frac{1}{n}x_n) \rightarrow 0$ (Como $x_n \subset M$, implica que x_n puede ser convergente o no, como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ entonces $\frac{1}{n}x_n \rightarrow 0$.) en X , mientras que la sucesión $(\frac{1}{n}Ax_n)$ no converge hacia el cero en X_1 ; contradiciendo la continuidad del operador A .

Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la desigualdad

$$\|x_1 - x\| < \delta (x_1 \in D_A),$$

se concluye que

$$\|Ax_1 - Ax\| < \epsilon$$

Entonces el operador lineal A es continuo. □

1.3.3. Operadores adjuntos

Consideremos el operador lineal continuo $Au = f$ definido en todo un espacio Hilbert X .

Definición 1.25. *Se dice que el operador A^* es el adjunto de A si A^* es un operador lineal continuo definido en todo X , tal que*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle,$$

para cada $u, v \in X$.

Ejemplo 1.16. Supongamos que A es un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ y sea B la matriz de este operador, es decir, $A(x) = Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. El producto interno usual de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir de la forma

$$\langle x, y \rangle = x^T y,$$

para cada x, y en $\mathbb{R}^n$. Como

$$\langle Ax, y \rangle = (Bx)^T y = x^T B^T y = x^T (B^T y) = \langle x, B^T y \rangle,$$

concluimos que $A^*y = B^T y$ es el adjunto de A .

Las siguientes son las propiedades mas importantes de los operadores adjuntos.

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
2. Si k es un escalar $(kA)^* = kA^*$.

Definición 1.26. Sea A operador lineal continuo en el espacio de Hilbert X . Se dice que A es auto-adjunto si $A = A^*$; es decir, si

$$\langle Au, v \rangle = \langle v, Au \rangle,$$

para todo $u, v \in X$.

En el Ejemplo 1.16, si B es una matriz simétrica, entonces el operador $A(x) = Bx$ es autoadjunto. Así, el concepto de autodjunto en espacios vectoriales de dimensión finita corresponde a los conceptos de transpuesta y de matrices simétricas.

1.3.4. Condiciones de solubilidad

Sea A un operador lineal tal que el dominio D_A es denso en X . Buscamos establecer para que elementos f se puede encontrar soluciones $u \in D_A$ de la ecuación no homogénea

$$Au = f. \tag{1.6}$$

Sea $u \in D_A$, por lo tanto $Au = f$ donde A está definido sólo en D_A , para esto es conveniente estudiar a la vez la ecuación homogénea adjunta

$$A^*v = 0, \quad v \in D_{A^*}. \tag{1.7}$$

Si $v \in D_{A^*}$ y es único, observe que esta ecuación tiene por lo menos la solución $v = 0$ y tal vez más. Si u es solución de (1.6) y v solución de (1.7) entonces

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Si A es autoadjunto se sigue de (1.7) que

$$\langle Ax, v \rangle = \langle x, A^*v \rangle = 0.$$

Así que una condición necesaria para que (1.7) tenga solución es que

$$\langle f, v \rangle = 0 \tag{1.8}$$

para cada v que satisface (1.7). De hecho esta condición tiene sentido solo si (1.7) tiene soluciones no triviales. Las condiciones (1.8) satisface también a (1.7), entonces (1.7) no tiene soluciones triviales.

1.3.5. El espectro de un operador

El comportamiento de un operador lineal A se obtiene estudiando la familia de operadores $A - \lambda I$ con λ real, por otra parte el inverso de un operador $(A - \lambda I)^{-1}$ donde $A \in X$ (Donde X es el espacio de Hilbert) y λ es un escalar fijado, por lo tanto, esto permitirá descomponer el operador A . Implica que en la práctica esto permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales.

En la teoría de los operadores y sus aplicaciones desempeñan un papel fundamental en el concepto de espectro³ del operador.

Definición 1.27. Sea A un operador lineal en el espacio de n -dimensiones X^n . El número λ se llama valor propio del operador A , cuando la ecuación

$$Ax = \lambda x$$

tiene solución no nula. El conjunto de todos los valores propios se denomina espectro el operador A y todos los demás valores de λ se llama regulares.

Es decir, λ es un punto regular, cuando el operador $(A - \lambda I)$ es invertible, donde el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ en un espacio de dimensión finita, es acotado. En un espacio de dimensión finita existen dos posibilidades:

³Siempre que se hable del espectro de un operador, consideramos que el operador actúa en un espacio real.

1. La ecuación $Ax = \lambda x$ tiene solución no nula. es decir, λ es un valor propio de A ; en este caso el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ no existe.
2. Existe el operador acotado $(A - \lambda I)^{-1}$, λ es un punto regular. En este caso la dimensión infinita puede darse una tercera posibilidad:
3. El operador $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, es decir, la ecuación $Ax = \lambda x$ tiene solamente solución nula, pero este operador no es acotado.

El número λ se llama regular para el operador A que actúa en espacio X cuando $(A - \lambda I)^{-1}$ que se llama resolvente del operador A , está definido a todo el espacio X y es continuo, existen dos posibilidades:

1. El conjunto de todos los demás valores de λ es espectro del operador A , si $(A - \lambda I)x = 0$ para un $x \neq 0$, no existe $(A - \lambda I)^{-1}$; se llama espectro puntual.
2. El conjunto de valores de λ para los cuales $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, pero no es continuo, se llama espectro continuo.

Ejemplo 1.17. *consideremos en el espacio $C[0, 1]$ el operador A definido mediante la formula*

$$Ax(t) = \mu(t)x(t)$$

donde $\mu(t)$ es una función continua fija. Tenemos

$$(A - \lambda I)x(t) = (\mu(t) - \lambda)x(t),$$

de donde

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{\mu(t) - \lambda}x(t).$$

El espectro del operador A se compone de todos los λ tales que $\mu(t) - \lambda$ se anulan para cierto t , comprendido entre 0 y 1, es decir, el espectro coincide con el conjunto de todos los valores de la función $\mu(t)$ sobre el segmento $[0, 1]$.

Observación 1.1.

1. *Todo operador lineal acotado, definido en un espacio de Banach completo, que tiene al menos un elemento diferente de cero, tiene espectro no vacío. Existe operadores, cuyo espectro se compone de un sólo punto.*

2. Los operadores resolventes R_μ y R_λ , correspondientes a los puntos $\mu \in R_\mu$ y $\lambda \in R_\lambda$ conmutan y satisface la relación

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$$

que se puede comprobar fácilmente, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por

$$(A - \lambda I)(A - \mu I).$$

De aquí se deduce que, siendo λ_0 un punto regular de A , la derivada de R_λ respecto a λ en $\lambda = \lambda_0$, es decir, el límite

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{R_{\lambda_0 + \Delta\lambda} - R_{\lambda_0}}{\Delta\lambda}$$

existe (en el sentido de la convergencia según el operador) y es igual a $R_{\lambda_0}^2$ (ver [16] para una exposición en más detalle de estas ideas.)

1.3.6. Operadores compactos

Los operadores compactos cuya propiedades son aquellos que más se asemejan a los operadores lineales en espacios de dimensión finita.

Definición 1.28. Sea A un operador en un espacio de Banach X . se dice que A es compacto, si A transforma cada conjunto acotado en un conjunto relativamente compacto.

Teorema 1.9 (del punto fijo de Brouwer). Sean X un espacio de Hilbert de dimensión finita, y C un subconjunto compacto no vacío de X . Si la función $f : C \rightarrow C$ es continua entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Como C es compacto, entonces existe la sucesión $\|x_n\| \rightarrow p$ tal que está sucesión admite una subsucesión $\|(x_n)_m\| \rightarrow p$, donde $p \in \mathbb{R}$, como C es convexo, entonces existe $[a, b]$ que está contenido totalmente en C , en efecto, si $x \in C$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola $B(x, \epsilon) \in C$, se concluye que $[a, b] \in B(x, \epsilon)$, por hipótesis f es continua, entonces la $B(x, \epsilon) \in f$, implica que $\|x_n\| \in B(x, \epsilon)$ por lo tanto esta bola es contractiva, entonces se concluye que f es una función contractiva por el Teorema del Banach, se obtiene que f tiene un punto fijo. $\square$

Teorema 1.10 (punto fijo de Schauder). Sea C un conjunto cerrado, acotado⁴ y convexo en un espacio de Banach X . Y sea $T : C \rightarrow C$ un operador compacto entonces T tiene un punto fijo.

⁴Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado entonces S es compacto.

Corolario 1.3. *[Versión alternativa del teorema del punto fijo de Shauder] Sea X un espacio de Banach y M un subconjunto no vacío de X , compacto y convexo, $T : M \rightarrow M$ un operador continuo tal que $T(M)$ es relativamente secuencialmente compacto entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración. Vamos a demostrar la versión alternativa del punto fijo de Shauder.

Sea X un espacio de Banach y M un subconjunto no vacío de X , compacto y convexo, $T : M \rightarrow M$ un operador compacto por la definición (1.28) implica que $T(M)$ es relativamente secuencialmente compacto, por el teorema de (Ascoli-Arzelà) entonces $T(M)$ es compacto y $T(M)$ es cerrado y equicontinuo, como M es convexo, entonces $[a, b] \in T(M)$ convexo, entonces existe la sucesión $(s_n) \in [a, b]$, como $T(M)$ es compacto, existe una subsucesión convergente $(s_n)_m \in [a, b]$. Como $T(M)$ es secuencialmente compacto entonces al límite de la subsucesión converge en $T(M)$.

Vamos a probar que la sucesión (s_n) es contractiva por lo tanto es convergente en $T(M)$.

Para $m > n$ entonces

$$\begin{aligned}
 |s_{m+1} - s_m| &\leq |s_{m+1} - s_m| + |s_{m-2} - s_{m-3}| + \cdots + |s_{n+1} - s_n| \\
 &\leq |s_{m+1} - s_m| + c|s_{m-2} - s_{m-3}| + \cdots + c^m |s_{n+1} - s_n| \\
 &\leq (c^{m-2} + c^{m-3} + \cdots + c^{n-1}) |s_2 - s_1| \\
 &= c^{n-1} (c^{m-n-1} + c^{m-n-2} + \cdots + 1) |s_2 - s_1| \\
 &= c^{n-1} \left(\frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} \right) |s_2 - s_1| \\
 &\leq c^{n-1} \left(\frac{1}{1 - c} \right) |s_2 - s_1|.
 \end{aligned}$$

Puesto que $0 < c < 1$. Entonces se concluye que (s_n) es contractiva, por lo tanto, (s_n) es Cauchy. Como $(s_n) \in T(M)$ es convergente a un punto fijo de $T(M)$. Entonces T tiene un punto fijo. $\square$

Demostración punto fijo de Shauder. Sea C un conjunto cerrado y acotado por lo tanto compacto en un espacio de Banach X , sea $T : C \rightarrow C$ un operador compacto. Como T es convexo, por definición (1.28), se concluye que $T(C)$ es relativamente secuencialmente compacto, por el corolario (1.3) se concluye que $T(M)$ tiene un punto fijo. $\square$

1.3.7. El espectro de un operador compacto auto-adjunto

La teoría espectral muestra la importancia de los valores propios y funciones propias para caracterizar una transformación lineal de forma única. espectro establece que, bajo unas condiciones determinadas, una transformación lineal de una función puede expresarse como la combinación lineal de las funciones propias con coeficientes de valor igual a los valores propios.

Demostremos las propiedades de los vectores y valores propios de operadores auto-adjunto en X .

Teorema 1.11. *Sea A un operador auto-adjunto y acotado en X entonces*

- (a) *Todos los valores propios de A son reales.*
- (b) *Los vectores propios de A , como valores propios distintos, son ortogonales.*

Demostración.

- (a) Sea $x \in X$ vectores propios de A con su correspondiente valor propio λ entonces como $Ax = \lambda x$, con x no nulos entonces

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle,$$

de donde $\lambda = \bar{\lambda}$.

- (b) Sean x, y vectores propios de A tales que $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ donde $\lambda \neq \mu$ entonces

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle y, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle,$$

como $\lambda \neq \mu$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$. □

Anunciemos el siguiente teorema sin demostrarlo. Para La demostración consultar el trabajo de Kolmogorov [16, p. 260].

Teorema 1.12 (de Hilbert-Smith). *Para cualquier operador lineal auto-adjunto y totalmente continuo A en un espacio de Hilbert X , existe un sistema ortonormal de vectores propios $\varphi(n)$ de A , con correspondientes valores propios (λ_n) tal que cada elemento $\beta \in X$ se puede escribir de manera única de la forma*

$$\beta = \sum c_k \varphi_k + \beta',$$

donde el vector β' tal que $A\beta' = 0$; además,

$$A\beta = \sum \lambda_k c_k \varphi_k$$

y

$$\lim \lambda_n = 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Esto quiere decir, todo operador lineal auto-adjunto y totalmente continuo A en X existe una base ortogonal del espacio X compuesta por los vectores propios del operador de A . En efecto, para obtener una base de este tipo bastará completar el sistema de vectores propios (φ_n) en A , con una base ortogonal arbitraria de X .

Capítulo 2

Problemas de valores en la frontera de segundo orden

En esta sección consideramos la ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$Lu = a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f, \quad a < x < b, \quad (2.1)$$

en donde los coeficientes a_i se asumen continuos en $[a, b]$ y el coeficiente $a_2(x) \neq 0$ en $[a, b]$. Un punto en donde $a_2(x)$ se anula es un *punto singular* de la ecuación diferencial, y el intervalo $[a, b]$ se sigue de tal manera que no involucre este tipo de puntos. El término no homogéneo f se asume que es una función continua a trozos en $[a, b]$.

Recordemos que una *solución clásica* de esta ecuación diferencial (2.1) es una función $u(x)$ que tiene primera derivada continua y una segunda derivada continua a trozos¹, de tal manera que satisface la ecuación diferencial (2.1) para todos los puntos en donde f es continua.

De la teoría de ecuaciones diferenciales se sabe que la solución general de la ecuación $Lu = f$ involucra dos constantes. Imponiendo dos condiciones adicionales a esta ecuación, generalmente conocidas como *condiciones de frontera*, se espera encontrar una solución específica de la ecuación diferencial. Esto es garantizado en el caso de condiciones iniciales, cuando u y u' son dadas en el mismo punto x_0 en $[a, b]$, pero no siempre es cierto para condiciones de frontera en general.

¹Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica contiene más de una fórmula: para distintos valores de la variable independiente x se deben usar distintas fórmulas que permitan calcular la imagen y que les corresponde, además, garantiza la existencia de la transformada de Laplace.

En general, se requiere que la solución $u(x)$ cumpla las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u(b) + \beta_{11}u'(a) + \beta_{12}u'(b) = \gamma_1, \\ B_2 u &= \alpha_{21}u(a) + \alpha_{22}u(b) + \beta_{21}u'(a) + \beta_{22}u'(b) = \gamma_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

en donde los vectores $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{12})$ y $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22})$ se asumen que son linealmente independientes (ninguna fila es múltiplo escalar de la otra).

Usualmente a B_1 y a B_2 como se les llama *funciones de frontera*, puesto que ellas asignan a funciones $u(x)$ suficientemente suaves los números $B_1 u$ y B_2 . La ecuación diferencial (2.1), junto con las condiciones de frontera (2.2) forma un *problema de valores en la frontera* (PVF).

Observación 2.1.

1. En el PVF anterior se considera que todos los coeficientes a_i , α_{ij} y β_{ij} son fijos; es decir, que L , B_1 y B_2 son fijos. También nos referimos a f , γ_1 y γ_2 como los datos del problema.
2. La independencia lineal de los vectores $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{12})$ y $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22})$ garantiza que realmente se tienen dos condiciones de frontera distintas. En caso contrario, las dos condiciones de frontera pueden o ser idénticas o no tener soluciones a las condiciones de la frontera.
3. Si $\beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, se dice que la condición de frontera es no mezclada:

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha_{11}u(a) + \beta_{12}u'(a) = \gamma_1, \\ B_2 u &= \alpha_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = \gamma_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, se obtienen las condiciones iniciales $u(a) = \gamma_1$, $u'(a) = \gamma_2$.

4. Las condiciones de frontera (2.1) son linealmente independientes si y solo si $\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$.

2.1. El problema de Sturm-Liouville regular

La teoría de Sturm-Liouville creó una nueva área dentro del análisis matemático, permitió la generalización de series trigonométricas y se extendió el uso de la función de Green a un amplio rango de ecuaciones diferenciales [13, 14].

Un problema Sturm-Liouville regular con valores en la frontera, es un problemas de valores propios de la forma:

$$\begin{aligned}(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) &= 0, & a < x < b \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde $p(x)$, $p'(x)$, y $r(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ con valores reales, $p(x) \geq 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$ donde a, b son constantes. Los casos en que $a_1 = a_2 = 0$ ó $b_1 = b_2 = 0$.

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, es decir, de la forma

$$Lu + \lambda \rho(x)u(x) = 0\tag{2.5}$$

con L el operador lineal definido en (2.1). Se busca una función $\mu(x)$ que la multiplicarla en (2.5) se obtenga que $(\mu a_2)' = \mu a_1$. Al hacer $\rho = \mu a_2$, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, $\rho' = \mu a_1 = \frac{a_1}{a_2} \rho$, al resolverla en términos de ρ , obtenemos:

$$\rho(x) = C e^{\int a_1(x)/a_2(x)dx},$$

para C una constante positiva. En tal caso,

$$\mu(x) = [1/a_2(x)] e^{\int a_1(x)/a_2(x)dx}.$$

Mediante esta función, llamada un factor integrante de la ecuación diferencial (2.5), se escribe la ecuación (2.5) de la forma (2.1).

Considerando $p = \mu a_2$, $q = \mu a_0$ y $r = \mu \rho$, donde se necesita que estos coeficientes sean continuos en $[a, b]$ y que $a_2(x)$ no se anule en $[a, b]$. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *Para convertir la siguiente ecuación diferencial*

$$2x^2 u''(x) - 3x u'(x) + 2u = 0, \quad x > 0\tag{2.6}$$

Consideramos $a_2(x) = 2x^2$ y $a_1(x) = -3x$ y usamos la formula (2.6):

$$\mu(x) = \frac{1}{2x^2} e^{\int a_1(x)/a_2(x)dx} = \frac{1}{2x^2} e^{-\frac{3}{2} \int x/x^2 dx} = \frac{1}{2x^2} e^{-\frac{3}{2} \ln(x)} = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2x^2} = \frac{1}{2} x^{-\frac{7}{2}}$$

Al multiplicar la ecuación (2.5) por $\mu(x)$, obtenemos la ecuación diferencial de Sturm-Liouville,

$$(x^{-3/2} u'(x))' + x^{-7/2} u = 0$$

la cual el operador lineal $Lu = (x^{-3/2}u'(x))' + x^{-7/2}u$

Teorema 2.1 (Identidad de Lagrange). *Sea u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ y sea $Lu = (pu')' + qu$ en donde $p \in C^1[a, b]$ y $q \in C[a, b]$, tal que $0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1$ y $0 < q_0 \leq q(x) \leq q_1$. Entonces*

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}(pW[u, v]),$$

donde $W[u, v] = uv' - vu'$ es el wronskiano de u, v .

Demostración. Usamos la regla del producto y sumamos y restamos $pu'v'$ para obtener

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u[(pv')' + qv] - v[(pu')' + qu] = u(pv')' + qvu - v(pu')' + qvu \\ &= u(pv')' + u'(pv') - v'(pu') - v(pu')' = [u(pv')] - [v(pu')] \\ &= \frac{d}{dx}[pWu, v] \end{aligned} \quad \square$$

Al integrar la identidad de Lagrange, obtenemos la siguiente relación, la cual es llamada la identidad de Green o formula de integración por partes.

Corolario 2.1 (Identidad de Green). *Sea u, v funciones con segunda derivada continuas en el intervalo $[a, b]$ entonces*

$$\int_a^b [uLv - vLu]d(x) = (pW[u, v](x)) \Big|_a^b.$$

Si además u y v satisfacen las condiciones de frontera (2.1), se tiene de la identidad de Green que

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = 0. \quad (2.7)$$

En efecto, cuando $a_1 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$ en las condiciones de frontera en (2.1), tenemos que

$$\begin{aligned} u'(a) &= - \left(\frac{a_1}{a_2} \right) u(a), \\ u'(b) &= - \left(\frac{b_1}{b_2} \right) u(b), \\ v'(a) &= - \left(\frac{a_1}{a_2} \right) v(a), \\ v'(b) &= - \left(\frac{b_1}{b_2} \right) v(b). \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en el lado derecho de la identidad de Green, se obtiene

$$\begin{aligned}
p(b)W[u, v](b) - p(a)W[u, v](a) &= p(b)[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] - p(a)[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] \\
&= p(b)\left[u(b)\left(-\left(\frac{b_1}{b_2}\right)v(b)\right) - \left(-\left(\frac{b_1}{b_2}\right)u(b)\right)v(b)\right] \\
&\quad - p(a)\left[u(a)\left(-\left(\frac{a}{b}\right)v(a)\right) - \left(-\left(\frac{a}{b}\right)u(a)\right)v(a)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consideramos el producto interno L^2 :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

en $[a, b]$, tenemos de la ecuación (2.8) que

$$\langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle$$

para cada u, v en el dominio de L . En este caso D_L es el conjunto de las funciones en $C^2[a, b]$ que cumplen las condiciones de frontera (2.2):

$$D_L = \{u \in C^2[a, b] : \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0\}.$$

Esto demuestra que L es auto-adjunto en D_L .

Teorema 2.2. *Los valores propios del operador L de Sturm-Liouville regular del problema valores en la frontera (2.3), son reales y tienen correspondientes funciones propias de valor real.*

Demostración. Suponga que λ es un valor propio de L , posiblemente complejo, con función propia correspondiente $\phi(x)$ en D_L , no idénticamente nula en $[a, b]$, la cual también puede asumir valores complejos. Como

$$L\phi(x) + \lambda r(x)\phi(x) = 0, \tag{2.8}$$

al calcular su conjugado complejo y usar el hecho de p, q, r toman valores reales, obtenemos

$$\overline{L\phi(x) + \lambda r(x)\phi(x)} = L[\bar{\phi}](x) + \bar{\lambda}r(x)\bar{\phi}(x) = 0. \tag{2.9}$$

Además, como las cantidades a_1, a_2, b_1, b_2 son escalares, un argumento similar demuestra que $\bar{\phi}$ también satisface las condiciones de la frontera en (2.3). Por lo tanto, $\bar{\lambda}$ es un valor propio con función propia $\bar{\phi}$.

De la ecuación (2.9)

$$\int_a^b L\phi(x)\bar{\phi}(x)dx = -\lambda \int_a^b r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)dx = -\lambda \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2dx.$$

Por otro lado, si usamos la identidad de Green, y el hecho de que $\bar{\lambda}$ sea un valor propio con función propia $\bar{\phi}$, vemos que

$$\int_a^b L\phi(x)\bar{\phi}(x)\phi(x)dx = \int_a^b \phi(x)L[\bar{\phi}](x)dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2dx.$$

De lo anterior se sigue que

$$-\lambda \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2dx.$$

Como $r(x) > 0$ y ϕ es una solución no trivial del problema (2.3), se sigue que

$$\int_a^b r(x)(\phi(x))dx > 0.$$

Así, podemos cancelar esta integral para obtener $\lambda = \bar{\lambda}$ lo que establece que λ es un número real.

Si ϕ no asume valores reales, podemos obtener función propia de valor real considerando simplemente la parte real e imaginaria de ϕ . $\square$

Teorema 2.3. *Todos los valores propios de problema de Sturm-Liouville con valores en la frontera (2.3) son simples.*

Demostración. Suponga que $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son dos funciones propias correspondientes a los valores propios de λ (así, $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son soluciones de la misma ecuación diferencial) las cuales satisfacen las condiciones frontera en (2.5), de modo que

$$a\phi(a) + b\phi'(a) = 0, \quad a\psi(a) + b\psi'(a) = 0.$$

Suponga que $b \neq 0$ (se aplica un argumento similar si $b = 0$ y $a \neq 0$). Como

$$\phi'(a) = (-a/b)\phi(a), \psi'(a) = (-a/b)\psi(a)$$

entonces

$$\begin{aligned} W[\phi, \psi](a) &= \phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) \\ &= \phi(a)\psi(a)(-a/b)\psi(a) - (\phi(a)\psi(a)(-a/b)\psi(a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esto se concluye que $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son linealmente dependientes, de modo que una debe ser múltiplo de la otra. Así, λ es un valor propio de multiplicidad uno. $\square$

Ahora mostraremos que las funciones propias asociadas a valores propios distintos cumplen la propiedad de ortogonalidad con respecto a una función de peso positiva $w(x)$ en $[a, b]$, si

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = 0.$$

Teorema 2.4. *Las funciones propias que corresponden a valores propios distintos del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (2.4), son ortogonales con respecto a la función de peso $r(x)$ en $[a, b]$*

Demostración. Sea λ y μ valores propios distintos con funciones propias correspondientes ϕ y ψ , respectivamente, es decir, $L\phi = \lambda r\phi$ y $L[\psi] = \mu r\psi$. Por el Teorema 2.2 las funciones ϕ y ψ tienen valores propios reales. Por la identidad de Green tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b b(\phi L[\psi] - \phi L[\psi])(x)dx \\ &= \int_a^b b(-\phi r\psi + \phi \lambda r\phi)(x)dx \\ &= (\lambda - \mu) \int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \mu$, entonces

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx = 0$$

por lo tanto las funciones propias ϕ y ψ son ortogonales con respecto a $r(x)$ en $[a, b]$. $\square$

2.2. Ecuaciones integrables

Una ecuación integral, es una ecuación que contiene la función incógnita bajo el signo de la integral. Existe una conexión fundamental entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales, y de hecho algunos problemas pueden formularse como ecuación diferencial, o como una ecuación integral de la forma

$$\varphi(s) = \int_b^a K(s, t)\varphi(t)dt + f(s) \quad (2.10)$$

en donde f y K son funciones dadas y φ la función que debemos encontrar. Las variables s y t recorren aquí un $[a, b]$ dado, tal que $\varphi(s) = T\varphi(s)$, donde T es un operador lineal.

Una característica importante de la ecuación (2.10) es su linealidad, la función incognita φ entra en ella de un modo lineal. Varios problemas conducen a la necesidad de considerar también ecuaciones integrales no lineales, por ejemplo, la ecuación del tipo

$$\varphi(s) = \int_b^a K(s, t)g(\varphi(t), t)dt \quad (2.11)$$

en donde f K y g son funciones dadas con g no lineal. No obstante, en lo sucesivo nos limitaremos a ecuaciones integrales lineales.

Algunas ecuaciones integrales fueron estudiadas ya al principio del siglo pasado. por ejemplo, Abel consideró en 1823 la ecuación que lleva ahora su nombre

$$f(s) = \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad f(0) = 0,$$

donde f es una función dada y φ es la función incognita, y demostró que la solución de la ecuación es de la forma

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^t \frac{-f'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}$$

2.2.1. Ecuaciones de Fredholm

La ecuación integral en la función φ

$$\int_b^a K(s, t)\varphi(t)dt - \lambda\varphi(s) = f(s), \quad a \leq s \leq b,$$

cuando $\lambda = 0$ se llama ecuación de Fredholm primera clase. Cuando $\lambda \neq 0$ se llama ecuación de Fredholm segunda clase. Resolver este problema consiste en encontrar la función desconocida $\varphi(t)$, la cual debe tener como dominio al intervalo cerrado $[a, b]$. La función $K(s, t)$ es el núcleo de la ecuación.

Alternativa de Fredholm

Consideramos la ecuación diferencial no homogénea $Lu = f$ de Sturm-Liouville dada en (2.4).

Definición 2.1. *Entonces el **adjunto formal**² (o adjunto de Lagrange) de L es el operador diferencial L^* definido como*

$$L^*u = [a_2u]'' - [a_1u]' + a_0u.$$

Ejemplo 2.2. *Si consideramos*

$$Lu = 2x^2u'' - 3xu' + 2u$$

entonces su adjunto formal es

$$L^*u(x) = [2x^2u]'' - [-3xu]' + 2u = 2x^2u'' + 11xu' + 9u$$

Teorema 2.5 (Identidad de Lagrange). *Sea L un operador diferencial definido en (2.4) y sea L^* su auto adjunto formal. Entonces*

$$vLu - uL^*v = \frac{d}{dx}J(u, v),$$

donde

$$J(u, v) = ua_1v - u(a_2v)' + u'a_2v. \quad (2.12)$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned} vLu - uL^*v &= v[a_2u'' + a_1u' + a_0u] - u[(a_2v)'' - (a_1v)' + a_0v] \\ &= a_2vu'' + a_1vu' - a_2uv'' - 2a_2'uv' - a_2''uv + a_1'uv + a_1uv', \end{aligned}$$

de la definición de $J(v, u)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[J(u, v)] &= (ua_1v)' - (u(a_2v)')' + (u'a_2v)' \\ &= (u'a_1v + ua_1'v + ua_1v') - (ua - 2v' + ua_2'v)' + (u''a_2v + u'a_2'v + u'a_2v') \\ &= a_2vu'' + a_1vu' - a_2uv'' - 2a_2'uv' - a_2''uv + a_1'uv + a_1uv', \end{aligned}$$

lo cual se tiene el resultado. □

²Se llama a L^* el adjunto formal de L puesto que no se conoce su dominio.

De la identidad de Lagrange obtenemos la identidad de Green o formula de integración por partes.

Corolario 2.2 (Identidad de Green). *Sea L el operador diferencial definido en y sea L^* su adjunto formal. Entonces*

$$\int_a^b (vLu - uL^*v)dx = J(u(x), v(x)) \Big|_a^b,$$

donde el operador J es definido en (2.12).

En la notación del producto interior L^2 , la identidad de Green se convierte en la fórmula

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle + J(u(x), v(x)) \Big|_a^b \quad (2.13)$$

la cual establece la manera como se transfiere el operador L de la función u a la función v , al calcular sus productos interiores.

Aunque los operadores L y L^* se puede aplicar a cualquier función en $C^2[a, b]$, por ejemplo, al resolver problemas con valores en la frontera de segundo orden nos interesa además que estas funciones satisfagan las condiciones de la frontera del problema. Por lo tanto, al considerar los operadores L y L^* , en adelante supondremos que sus respectivos dominios, D_L y D_{L^*} , sean subespacios de $C^2[a, b]$.

Dado el operador diferencial lineal L con dominio D_L , veremos las ventajas de restringir el adjunto formal L^* de modo que

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle \quad (2.14)$$

se cumpla para todo u en D_L y toda v en D_{L^*} . En general, bastaría que D_{L^*} conste de la única función $v \equiv 0$, lo cual no es un caso interesante. Lo que realmente se quiere hacer es elegir a D_L como el conjunto de funciones en $C^2[a, b]$, lo más grande posible y de tal manera para que se cumpla (2.13). En tal caso, se dice que L^* es el **operador adjunto formal** de L .

Ejemplo 2.3. *Consideramos el problema*

$$Lu = u'' + 2u' + 2u, \quad u(0) = u(\pi) = 0,$$

entonces el adjunto de L es

$$L^*u = u'' - 2u' + 2u.$$

para determinar el dominio de L^* , primero observemos que v'' es continua en $[0, \pi]$ además para que se cumpla (2.12) debemos tener que

$$J(u(x), v(x)) \Big|_0^\pi = 0$$

para todo u en D_L y v en D_{L^*} .

Considerando la formula de $J(u, v)$ dada en (2.12) con $a_1 = 2$ y $a_2 = 2$, y de las condiciones de frontera sobre u , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 2(u(x)v(x) - u(x)v'(x) + u'(x)v(x)) \Big|_0^\pi \\ &= 2(u'(\pi)v(\pi) - u(0)v(0)) \end{aligned}$$

si

$$u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0) = 0.$$

Ahora bien, como $u'(\pi)$ y $u'(0)$ pueden asumir cualquier valor, entonces se debe tener que $v(0) = v(\pi) = 0$, lo cual efectivamente hace que se cumpla la ecuación (2.13) para todo u en D_L . Por lo tanto, el dominio de L^* , consta de aquellas funciones v que tienen segunda derivada continua en $[0, \pi]$ y que satisfacen las condiciones de frontera $v(0) = v(\pi) = 0$:

$$D_{L^*} = \{v \in C^2[a, b] : v(0) = v(\pi) = 0\},$$

el cual es un subespacio de $C^2[a, b]$.

Ejemplo 2.4. Consideramos el problema del adjunto con valores en la frontera

$$Lu = 2x^2u''(x) - 3xu'(x) + 2u(x) = 0, \quad u(1) = u(e^\pi) = 0$$

El operador adjunto formal de Lu es el operador

$$L^*u(x) = 2x^2u''(x) + 11xu'(x) + 9u(x).$$

Para determinar el dominio de L^* usamos la identidad de Green y pedimos que

$$J(u(x), v(x)) \Big|_1^{e^\pi} = 0$$

para cada u en D_L y v en D_{L^*} . Como $a_2(x) = 2x^2$ y $a_1(x) = -3x$, estas condiciones se convierten en

$$\int_1^{e^\pi} (vLu - uL^*u)dx = J(u(x), v(x)) \Big|_1^{e^\pi}$$

en donde

$$J(u, v) = a_1 uv - u(a_2 v)' + u'v = -7xuv - 2x^2 uv' + 2x^2 u'v.$$

Como $u'(e^\pi)$ y $u'(1)$ pueden asumir valores arbitrarios, debemos considerar que $v(e^\pi) = v(1) = 0$. Por lo tanto, el problema adjunto del problema de valores de frontera dado es

$$2x^2 u''(x) - 3xu'(x) + 2u(x) = 0, \quad u(1) = u(e^\pi) = 0.$$

Teorema 2.6 (La alternativa de Fredholm). *Consideremos el problema de valores en la frontera (2.1)-(2.2) donde $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Entonces el problema tiene una solución si y solo si*

$$\int_a^b f(x)v(x)dx = 0$$

para cada solución v del problema del adjunto con valores en la frontera

$$\begin{aligned} L^* z(x) &= 0, & a < x < b, \\ B^* v &= 0, \end{aligned}$$

en donde $B^* v$ denota las condiciones de frontera que deben cumplir las funciones v y derivadas del problema de valores en la frontera (2.1)-(2.2) mediante la identidad de Green (ver ejemplos anteriores).

Demostración. Ver [20], página 203, □

2.2.2. Soluciones mediante un desarrollo con funciones propias

La alternativa de Fredholm proporciona un criterio para determinar si un problema no homogéneo con valores en la frontera tiene solución.

En efecto, consideremos el problema de Sturm-Liouville regular con valores en la frontera,

$$\begin{aligned} Lu + \mu ru &= f \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde

$$Lu = (pu')' + qu.$$

Como se ha visto en las secciones anteriores, el problema homogéneo de valores en la frontera asociado tiene un conjunto de valores propios $\{\lambda_n\}$ con funciones propias correspondientes $\{\phi_n\}$, las cuales forman un sistema ortogonal con respecto a la función de peso $r(x)$, en $[a, b]$; es decir, tales que

$$L\phi_n + \lambda_n r\phi_n = 0, \quad \int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{m,n}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

en donde

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Supongamos que la solución del problema (2.15) tiene la forma

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

donde los coeficientes c_n son escalares a determinar.

A fin de establecer estos coeficientes, se procede formalmente como sigue. Primero que todo, u satisface las condiciones de frontera en (2.15), dado que cada ϕ_n las satisface. Como L es lineal y además $L\phi_n = -\lambda_n r\phi_n$ para cada n , entonces

$$\begin{aligned} Lu + \mu ru &= L \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \right) + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-r\lambda_n \phi_n) + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \\ &= r \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n) c_n \phi_n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Si expresamos a f como el producto $r(f/r)$ es desarrollo mediante funciones propias

$$\frac{f}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n,$$

donde

$$\gamma_n = \frac{\int_a^b \frac{f}{r} \phi_n r dx}{\int_a^b \phi_n^2 r dx} = \frac{\int_a^b f \phi_n dx}{\int_a^b \phi_n^2 r dx},$$

entonces el lado derecho de (2.15) se convierte en

$$r \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n \quad (2.17)$$

De (2.16) y (2.17) en (2.16) se tiene que

$$r \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n) c_n \phi_n = r \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n,$$

o bien, dado que $r > 0$, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\mu - \lambda_n) c_n - \gamma_n] \phi_n = 0.$$

La suma de estos desarrollo es igual a cero si y sólo si, todos los coeficientes se anulan. Por lo tanto, los coeficientes c_n buscados deben resolver al ecuación

$$(\mu - \lambda_n) c_n - \gamma_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Ahora consideremos dos casos.

Caso 1: Cuando todos los coeficientes de c_n son diferentes de cero. En tal caso, se debe tener que $\mu \neq \lambda_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ y en consecuencia

$$c_n = \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Así, la única solución de (2.15) está dada formalmente por

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n(x).$$

Usualmente $u(x)$ es la única solución del problema (2.15), pues en este caso el problema homogéneo asociado tiene únicamente la solución trivial y por lo tanto, el problema no homogéneo (2.15) tiene una única solución (ver además [13]).

Caso 2: Cuando alguno de los coeficientes de c_n es igual a cero. En tal caso, se debe tener que $\mu = \lambda_N$ para algún entero positivo N . De (2.18) se sigue que $\gamma_N \neq 0$ o bien $\gamma_N = 0$. En el primer caso se tendría una contradicción con (2.17) y entonces la solución $u(x)$ no puede expresarse mediante el desarrollo de las funciones propias ϕ_n . En el segundo caso, entonces no hay restricciones sobre c_N en (2.18) y además se obtendría una familia uniparamétrica de soluciones del

problema (2.15), la cual depende del parámetro c_N . Por lo tanto, debe suceder que $\gamma_N = 0$ y como por definición

$$\gamma_N = \frac{\int_a^b f(x)\phi_N(x)dx}{\int_a^b \phi_N^2(x)r(x)dx},$$

entonces se tiene que

$$\int_a^b f(x)\phi_N(x)dx = 0,$$

lo cual significa que las funciones f y ϕ_N deben ser ortogonales, lo cual es justamente la condición necesaria de la alternativa de Fredholm para el problema no homogéneo (2.15).

En resumen, el siguiente es el método para obtener un desarrollo en funciones propias para la solución de $u(x)$ del problema de Sturm-Liouville regular (2.15):

- (a) Determinar el sistema ortogonal de funciones propias $\{\phi_n\}$ y los valores propios correspondientes $\{\lambda_n\}$ para el problema homogéneo asociado con (2.15).
- (b) Calcular el desarrollo en términos de funciones propias para f/r , es decir, se determinan los cocientes γ_n tales que

$$\frac{f}{r} = \sum r_n \phi_n.$$

- (c) Si $\mu \neq \lambda_n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, entonces la solución ϕ está dada por

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n(x)$$

- (d) Si $\mu = \lambda_N$ para alguna N y $\gamma_N \neq 0$ entonces no hay solución.
- (e) Si $\mu = \lambda_N$ para alguna N y $\gamma_N = 0$, entonces

$$u(x) = c_N \phi_N(x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n(x)$$

es una solución para cualquier elección del parámetro c_N .

Ejemplo 2.5. *Solucionar en términos de funciones propias*

$$u'' + \lambda u = 5 \sin(3x) + 2 \cos(8x), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0$$

soluciones de la ecuación homogénea,

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0$$

Tiene valores propios $\lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$ para $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ con funciones propias $\phi_n = \sin \sqrt{\lambda_n} x$, $n = 1, 2, 3, 4 \dots$

En este caso, $r(x) = 1$ de modo que debemos determinar los coeficientes γ_n , tales que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{r(x)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n-1)} x \\ &= 5 \sin(3x) + 2 \cos(8x). \end{aligned}$$

Es claro que $\gamma_3 = 5$ y $\gamma_5 = 3$, y que los restantes γ_n se anulan cuando $\sqrt{\mu} = 3$, $\mu = 9 \neq \lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ Entonces

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n(x) = \frac{5}{9 - 61,68502751} \sin(3x) + \frac{2}{9 - 555,1652476} \sin(8x).$$

2.2.3. Funciones de Green

Por medio de la función de Green obtenemos una representación integral de la solución de un PVF no homogéneo con valores en la frontera; veremos que se puede expresar esta solución de la forma

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds,$$

en donde la función $G(x, s)$ es llamada función de Green o función de influencia. Se sabe que esta representación existe para problemas muy generales, sin embargo, aquí consideramos los problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu = f, \quad a < x < b \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde p , p' y q son continuas en $[a, b]$ con $p(x) > 0$ y $r(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Supondremos que f es continua en $[a, b]$, aunque no es necesario. En este contexto, escribimos el termino no homogéneo como $-f(x)$ en vez de $f(x)$.

Por ahora, supongamos que el problema homogéneo asociado con el problema (2.19) ($f(x) = 0$) tiene sólo la solución trivial, o en forma equivalente, que $\lambda = 0$ no es un valor propio en Lu . La alternativa de Fredholm implica entonces que el problema no homogéneo (2.19) tiene una solución, la cual es única, pues el problema homogéneo asociado tiene una única solución. Estas condiciones hacen que estos dos problemas cumplan con las condiciones del teorema de existencia y unicidad de problemas de valor inicial de segundo orden (ver [13]), lo cual garantiza que z_1 y z_2 existan.

Para poder utilizar el método de separación de variables, antes se debe verificar que z_1 y z_2 son linealmente independientes. Observen que si z_1 y z_2 fuesen linealmente dependientes entonces una tendría que ser una múltiplo constante de la otra, Digamos que $z_1 = cz_2$, para alguna constante c . Como z_2 satisface a (2.19) entonces z_1 satisface a (2.19), y así z_1 satisface $L(z_1) = 0$. Como se ha supuesto que el problema sólo tiene las soluciones triviales. Está contradicción implica que z_1 y z_2 son linealmente independientes.

Para aplicar la fórmula del método de variación del parámetro, la ecuación diferencial (2.19)

$$u'' + \frac{p'}{p}u' + \frac{q}{p}u = -\frac{f}{p} \quad (2.20)$$

Supongamos existen funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ tales que la solución de esta ecuación es de la forma

$$u(x) = c_1(x)z_1(x) + c_2(x)z_2(x). \quad (2.21)$$

Utilizando el método de variación del parámetro obtenemos que estas funciones deben satisfacer las ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$c_1'(x) = \frac{f(x)z_2}{p(x)W[z_1, z_2](x)}, \quad c_2'(x) = \frac{f(x)z_1}{p(x)W[z_1, z_2](x)},$$

en donde

$$W[z_1, z_2] = z_1z_2' - z_1'z_2$$

es el wronskiano de z_1, z_2 . Resolviendo está ecuaciones diferenciales encontramos que

$$c_1(x) = \int_x^b \frac{-z_2f(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)}ds$$

y

$$c_2(x) = \int_a^x \frac{-z_1f(s)}{p(s)W[z_1, z_2](s)}ds,$$

dado que es posible elegir libremente las constantes de integración.

Al sustituir estas funciones en (2.21) obtenemos la solución del PVF de Sturm-Liouville (2.19) de la forma

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad (2.22)$$

en donde

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{-z_1(s)z_2(x)}{p(x)W[z_1, z_2]}(s), & a \leq s \leq x, \\ \frac{-z_1(x)z_2(s)}{p(x)W[z_1, z_2]}(s), & x \leq s \leq b. \end{cases}$$

Esta función es llamada la función de Green para el problema (2.19). Veamos ahora que la solución de (2.21) también es solución del problema (2.19).

Teorema 2.7. *Sea $G(x, s)$ la función de Green para un problema de Sturm-Liouville regular con valores en la frontera (2.19). Entonces (2.22) es la solución del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera, con $Lu = -f$ para cualquier función f continua en $[a, b]$.*

Demostración. Mediante el método de variación del parámetro se estableció que la función dada en (2.22) satisface la ecuación diferencial en (2.19). Veamos que también satisface las condiciones de frontera dadas allí. Como

$$u'(x) = z_1(x)' \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds + z_2(x)' \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{c} ds,$$

entonces

$$\begin{aligned} au(a) + bu'(a) &= az_1(a) \int_a^b (-z_1(s)f(s)/c) ds + bz_1'(a) \int_a^b (-z_2(s)f(s)/c) ds \\ &= [az_1(a) + bz_1'(a)] \int_a^b (-z_1(s)f(s)/c) ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues z_1 satisface las condiciones en (2.19). Así, la función $u(x)$ dada en (2.22) satisface también las condiciones de frontera en (2.19). Un cálculo similar muestra que u también satisface condición de frontera (2.19). Por lo tanto, la función $u(x)$ dada en (2.22) resuelve el problema (2.19). $\square$

Propiedades fundamentales de la función de Green

Teorema 2.8. *La función de Green $G(x, s)$ del problema de Sturm-Liouville regular (2.19) tiene las siguientes propiedades.*

- (a) $G(x, s)$ es continua en $[a, b] \times [a, b]$. Para s fija, las derivadas parciales $G_x(x, s)$ y $G_{xx}(x, s)$ son funciones continuas de x para todo $x \neq s$.
- (b) En $x = s$, la derivada parcial G_x tiene una discontinuidad de salto:

$$\lim_{x \rightarrow s^+} G_x(x, s) - \lim_{x \rightarrow s^-} G_x(x, s) = -\frac{1}{p(s)}$$

- (c) Para cada s fija, La función $G(x, s)$ satisface el problema homogéneo correspondiente para $x \neq s$; es decir, verifica cuando

$$\begin{aligned} L^*G(x, s) &= 0 \quad \text{para } x \neq s, \\ \alpha_1 G(a, s) + \alpha_2 G_x(a, s) &= 0, \quad \beta_1 G(b, s) + \beta_2 G_x(b, s) = 0. \end{aligned}$$

- (d) Sólo existe una única función G que satisfagan las propiedades (a)-(c).
- (e) $G(x, s)$ es simétrica, es decir,

$$G(x, s) = G(s, x)$$

Demostración.

- (a) Sean z_1 y z_2 soluciones de $Lu = 0$ en $[a, b]$, son continuas y tienen primera y segunda derivada continua, por lo tanto la función $G(x, s)$ implica que $G(x, s)$ es continua en $[a, b] \times [a, b]$, tal que para s fija tenemos que $G_x(x, s)$ y $G_{xx}(x, s)$ son funciones continuas de x para $x \neq s$
- (b) Como $c = p(x)W[z_1, z_2](s)$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow s^+} G_x(x, s) - \lim_{x \rightarrow s^-} G_x(x, s) &= \frac{-z_1(s)z_2'(s)}{c} - \frac{-z_1'(s)z_2(s)}{c} \\ &= -\frac{-z_1(s)z_2'(s) - z_1'(s)z_2(s)}{c} \\ &= -\frac{W[z_1, z_2]}{c} \\ &= -\frac{1}{p(s)}. \end{aligned}$$

- (c) Para s fija, la función $G(x, s)$ es un múltiplo constante de $z_1(x)$ cuando $x < s$ y un múltiplo constante de $z_2(x)$ cuando $s < x$. Como $z_1(x)$ y $z_2(x)$ satisfacen a $Lu = 0$, entonces $G(\cdot, s)$ para $x \neq s$ satisfacen a $Lu = 0$. cuando $x < s$, tenemos que $G(x, s) = (-z_2(x)/c)z_1(x)$ como $z_1(x)$ satisfacen las condiciones de frontera en (2.19)

$$\alpha_1 G(\alpha, s) + \alpha_2 G_x(\alpha, s) = \left(\frac{-z_2(s)}{c} \right) [\alpha_1 z_1(\alpha) + \alpha_2 z_1'(\alpha)] = 0.$$

Además, cuando $s < x$ tenemos que $G(x, s) = (-z_1(s)/c)z_2(x)$. Como $z_1(x)$ satisface la ecuación diferencial en (2.19), vemos que

$$\beta_1 G(\beta, s) + \beta_2 G_x(\beta, s) = \left(\frac{-z_1(s)}{c} \right) [\beta_1 z_2(\beta) + \beta_2 z_2'(\beta)] = 0$$

Así, para cada s fija, $G(\cdot, s)$ satisface las condiciones dadas en (c).

- (d) Supongamos ahora que $G(x, s)$ y $H(x, s)$ satisfacen las propiedades (a), (b) y (c), y mostraremos que

$$K(x, s) = G(x, s) - H(x, s)$$

es idénticamente cero en $[a, b] \times [a, b]$. Para esto, fijaremos $s = s_0$. Por la propiedad (a), $K(x, s_0)$ es continua en $[a, b]$ y $K_x(x, s_0)$ y $K_{xx}(x, s_0)$ son continuas para $s \neq s_0$.

Además como la propiedad (b) dice que $G_x(x, s_0)$ y $H_x(x, s_0)$ tiene los mismos saltos en $s = s_0$ vemos que $K_x(x, s_0)$ y $G_x(x, s_0) - H_x(x, s_0)$ existen y es continua (no tienen salto) en $x = s_0$.

Por lo tanto, $K(x, s_0)$ y $K_x(x, s_0)$ son continuas en $[a, b]$. Por lo propiedad (c), ecuación $K_{xx}(x, s_0)$ es igual a una función constante $x \neq s_0$ en consecuencia $K_{xx}(x, s_0)$ es continua en $[a, b]$.

Así, que $K(x, s_0)$ es una solución del problema homogéneo con valores en la frontera en todo intervalo $[a, b]$ pero este problema solo tiene la solución trivial, de modo que $K(x, s_0) \equiv 0$. Por último, como s_0 es arbitrario, $K(x, s) \equiv 0$ en $[a, b] \times [a, b]$; es decir la función de Green es única.

- (e) La simetría es a partir de $G(x, s)$ en la función de Green es cambiar el orden de los factores y se obtiene $G(s, x)$. $\square$

La función de Green que satisface las propiedades (a)-(d) también existe para los problemas generales no auto adjuntos con valores en la frontera. Además, se

puede mostrar que la existencia de una función de Green simétrica es equivalente al hecho de que el operador lineal es auto adjunto; debido a la unicidad de la función de Green. Podríamos haber definido a $G(x, s)$ como la función que satisface las propiedades (a)-(c) en el Teorema 2.8 y usar luego esta propiedad para deducir la formula

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{-z_1(s)z_2(x)}{c}, & a \leq s \leq x \\ \frac{-z_1(x)z_2(s)}{c}, & x \leq s \leq b \end{cases}$$

La formula de Green también se puede caracterizar mediante la función delta de Dirac.

Definición 2.2. *La función delta de Dirac $\delta(t)$ se caracteriza por las dos siguientes propiedades*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

para cualquier función $f(t)$ que sea continua en un intervalo abierto que contenga a $t = 0$.

Al recorrer el argumento de $\delta(t)$, tenemos que $\delta(t - a) = 0$, si $t \neq a$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)dt = f(a).$$

Si suponemos que existe una función $G(x, s)$ tal que

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds,$$

es la solución del problema (2.19), entonces podemos operar con L a ambos lados de esta representación de u . Tal que

$$Lu(x) = \int_a^b f(s)LG(x, s)ds = -f(x),$$

es decir, $LG(x, s)$ debe actuar como una función delta de Dirac concentrada en $x = c$, $\delta(x-s)$. Además, tal función de Green $G(\cdot, s)$ debe satisfacer las condiciones de frontera en (2.19). Si definimos $G(x, s)$ como solución del problema

$$\begin{aligned} L^*G(x, s) &= -\delta(x - s), & x \neq s, \\ \alpha_1 G(a, s) + \alpha_2 G_x(a, s) &= 0, & \beta_1 G(b, s) + \beta_2 G_x(b, s) = 0, \end{aligned}$$

entonces podemos utilizar las propiedades de la función delta de Dirac para mostrar formalmente que $G(x, s)$ satisface las propiedades del Teorema 2.8, página 57 (ver [13] para más detalles).

La caracterización de la función de Green dada apoya la siguiente interpretación física. Veamos a $G(x, s)$ como la deflexión de una cuerda (viga etc) en el punto x como resultado del acción de una fuerza puntual de intensidad unitaria de algún otro punto de s sobre la cuerda en el punto x . De aquí el nombre de función influencia. Además, $G(x, s)f(s)$ es la influencia de la fuerza puntual para s entre a y b , por lo cual obtenemos

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds.$$

Como la deflexión resultante de una cuerda bajo una fuerza externa de $-f(x)$.

2.3. Métodos numéricos

Finalmente, en esta sección presentamos los métodos numéricos de solución que serán relevantes en la solución del problema de valores en la frontera de que trata este trabajo. Mayores detalles se encuentran en las referencias bibliográficas de este trabajo.

2.3.1. Para problemas de valor inicial

Consideremos soluciones numéricas del problema de valor inicial

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(x_0) = u_0, \quad (2.23)$$

en donde la función f se asume que es continua en una región D del plano xy . Los métodos considerados son el de Euler y los Métodos de Runge-Kutta, los cuales son generalizaciones del Método de Euler.

Método de Euler

La solución aproximada del problema (2.23) se denota como $\tilde{u}(x)$ y los valores $\tilde{u}(x_0), \tilde{u}(x_1), \dots$ como $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots$. Los puntos $x_0, x_1, \dots$ en estos valores de $\tilde{u}$ se consideran separados una distancia h , razón por la cual

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots$$

En este caso se llama a h la longitud del paso.

Como el problema (2.23) usualmente se resuelve en el intervalo $[x_0, b]$, se considera la solución numérica a ese problema en el intervalo $[x_0, x_N]$ en donde N es el mayor subíndice para el cual se tiene que $x_N \leq b$ y $x_{N+1} > b$. Evidentemente, N depende de h .

Considerando la expansión de Taylor de primer orden de $u(x)$ en $x + h$ tenemos que

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(\xi),$$

con $x \leq \xi \leq x + h$.

Eliminando el término de error, se obtiene el Método de Euler

$$\tilde{u}_0 = u_0, \quad \tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + hf(x_n, u_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

para resolver de manera aproximada el problema de valor inicial (2.23) de manera; es decir, mediante la poligonal que une los puntos $(x_i, \tilde{u}_i)$, con $i = 0, 1, \dots, N$.

Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son motivados por la relación que se puede establecer entre problemas de valor inicial con el Teorema de Taylor. Estos métodos tienen la ventaja de no requerir las derivadas de la función f en (2.23).

Método de Runge-Kutta de segundo orden

Para construir un método de solución aproximada de (2.23), consideremos la expansión de Taylor de segundo orden de u en $x + h$,

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(\xi),$$

para algún $x \leq \xi \leq x + h$.

La primera derivada de u se puede reemplazar por $f(x, u(t))$ y su segunda derivada por la derivada de la ecuación diferencial en (2.23) con respecto a x ; es decir, por

$$u''(x) = f_x(x, u) + f_u(x, u)u'(x) = f_x(x, u) + f_u(x, u)f(x, u).$$

Omitiendo, por ahora, la dependencia que tiene u de x , la expansión de Taylor dada se transforma en

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hf(x, u) + \frac{h^2}{2} \left(f_x(x, u) + f_u(x, u)f(x, u) \right) + \frac{h^3}{3!} u'''(\xi) \\ &= u(x) + \frac{h}{2} f(x, u) + \frac{h}{2} \left(f(x, u) + hf_x(x, u) + hf_u(x, u)f(x, u) \right) + \frac{h^3}{3!} u'''(\xi). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como la expansión de Taylor de primer orden de f en $(x+h, u+k)$ está dada como

$$f(x+h, u+k) = f(x, u) + hf_x(x, u) + kf_u(x, u) + \cdots,$$

la expresión entre paréntesis en (2.24) puede ser interpretada como

$$f(x+h, u+hf(x, u)) = f(x, u) + hf_x(x, u) + hf_u(x, u)f(x, u).$$

Por lo tanto,

$$u(x+h) = u(x) + \frac{h}{2} f(x, u) + \frac{h}{2} f(x+h, u+hf(x, u)) + \frac{h^3}{3!} u'''(\xi),$$

o numéricamente,

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, \tilde{u}_n), \\ k_2 &= f(x_n + h, \tilde{u}_n + hk_1). \end{aligned}$$

Esta técnica es conocida como el Método de Runge-Kutta de segundo orden.

2.4. Para problemas de valores en la frontera

El método del disparo es uno de los métodos numéricos más populares para resolver problemas de valores en la frontera, al reducirlo al problema de resolver un problema de valor inicial.

Consideremos el problema de valores en la frontera PVF de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} u''(x) &= F(x, u(x), u'(x)), & a < x < b, \\ \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

en donde la función $F(x, u, v)$ se asume que es continua³ en la región

$$\Omega = \{(x, u, v) : a \leq x \leq b, -\infty < u, v < \infty\}$$

del espacio xuv , y los escalares α_i y β_i no son simultáneamente nulos (i.e., $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2$) y linealmente independientes (i.e., $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \neq 0$).

Decimos que el PVF (2.25) es lineal si la función F es lineal en u y v . En tal caso, el problema es lineal si existen funciones continuas p , q y r tales que

$$F(x, u, v) = -p(x)v - q(x)u + r(x). \quad (2.26)$$

El PVF lineal se dice homogéneo cuando $r(x) \equiv 0$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, y no homogéneo en caso contrario. Un PVF es no lineal cuando F no es lineal.

2.4.1. El método del disparo no lineal

A fin de resolver el problema (2.26) mediante el método del disparo, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u'' &= F(x, u, u'), & a < x < b, \\ u(a) &= \beta_1 s - c_2 \gamma_1, & u'(a) = \alpha_1 s - c_1 \gamma_1, \end{aligned} \quad (2.27)$$

el cual depende del parámetro s , y donde c_0 y c_1 son constantes arbitrarias tales que

$$\beta_1 c_1 - \alpha_1 c_2 = 1. \quad (2.28)$$

Si se denota como $u(x, s)$ la solución del problema (2.28), entonces

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, s) &= F(x, u(x, s), u_x(x, s)), & a < x \leq b \\ u(a, s) &= \beta_1 s - c_2 \gamma_1, & u_x(a, s) = \alpha_1 s - c_1 \gamma_1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

³De manera más general, se puede asumir que la función F es Lipschitz en u y v en la región Ω (ver [2, p. 437]).

en donde la notación de derivadas parciales resulta ser más conveniente. En tal caso, se sigue que

$$\alpha_1 u(a, s) - \beta_1 u_x(a, s) = \gamma_1$$

para toda s para el cual u existe, lo cual demuestra que $u(x, s)$ satisface la primera condición de frontera del problema (2.27). Para que u sea la solución de este problema, se necesita además que u cumpla con la segunda de sus condiciones de frontera, es decir, que

$$\varphi(s) = \alpha_2 u(b, s) + \beta_2 u_x(b, s) - \gamma_2 = 0, \quad (2.30)$$

la cual es una ecuación no lineal en s . Si s^* es un raíz de $\varphi(s)$, entonces $u(x, s^*)$ satisface el problema (2.27). Así, encontrar la solución del problema (2.27) depende que se pueda encontrar la raíz s^* de la función φ , y que a continuación se resuelva el problema (2.29) para $s = s^*$. En general, se puede demostrar que bajo condiciones apropiadas sobre F y sus condiciones de frontera, la ecuación (2.30) tiene una única solución s^* (ver [2, p. 438]). Esta ecuación se puede resolver mediante cualquier método de solución de ecuaciones no lineales.

Esta forma de encontrar la solución del problema (2.27) es llamada el *método del disparo*, porque estableciendo que la ecuación diferencial del PVF (2.27) satisface unas condiciones iniciales en $x = a$ que dependen de un parámetro s , el PVI (2.28), tal parámetro se elige de tal manera que cuando la solución de este PVI avance hasta $x = b$, allí cumpla con las condiciones de PVF original, la condición dada en (2.30).

El siguiente ejemplo establece un caso en el cual es posible encontrar una solución de un problema de valor en la frontera al resolver el problema de valor inicial (2.28), o bien (2.29), y la ecuación (2.30) de manera exacta.

Ejemplo 2.6. *Resolver el problema de valor en la frontera lineal*

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - u'), & 1 < x < 3, \\ u(1) &= 17, & u(3) = \frac{43}{3} \end{aligned}$$

mediante el método del disparo.

Solución. Como la condición (2.27) se cumple para $c_1 = 0$ y $c_2 = -1$, el problema de valor inicial (2.27) para el método del disparo resulta ser

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - u'), & 1 < x < 3, \\ u(1) &= 17, & u'(1) = s, \end{aligned}$$

y tal solución se denota como $u(x, s)$. Considerando a s como una constante, se encuentra que la solución de este problema resulta ser

$$u(x, s) = \frac{s+17}{2} e^{x-1} - \frac{s-17}{2} e^{1-x}.$$

La solución de este problema de valor inicial es solución del problema de valor en la frontera dado, si para algún s se tiene que

$$u(3, s) = \frac{43}{3},$$

o bien, que

$$\frac{s+17}{2} e^2 - \frac{s-17}{2} e^{-2} = \frac{43}{3},$$

la cual es una ecuación lineal en s . Si denotamos como s^* la solución de esta ecuación (ver (2.30)), entonces $u(x) \equiv u(x, s^*)$ es la solución del problema de valor en la frontera. Resolviendo esta ecuación algebraica para s encontramos que

$$s^* = -\frac{51e^4 - 86e^2 + 51}{3e^4 - 3} \approx -13,68235549063943,$$

y por lo tanto, la solución del problema de valor en la frontera dado es

$$u(x) = \frac{43e^2 - 51}{3(e^4 - 1)} e^{x-1} + \frac{51e^4 - 43e^2}{3(e^4 - 1)} e^{1-x}. \quad \square$$

Por lo general sucede que no es posible resolver el problema de valor inicial (2.27) o la ecuación (2.30) de manera exacta. Supongamos que ambas situaciones se dan.

Si s_0 es una aproximación inicial de s^* , el método de Newton permite encontrar la sucesión de aproximaciones (s_m) de s^* en (2.30) de la forma

$$s_{m+1} = s_m - \frac{\varphi(s_m)}{\varphi'(s_m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

donde

$$\varphi'(s) = \alpha_2 u_s(b, s) + \beta_2 u_{xs}(b, s) = \alpha_2 u_s(b, s) + \beta_2 u_{sx}(b, s), \quad (2.32)$$

o bien,

$$\varphi'(s) = \alpha_2 \xi(b, s) + \beta_2 \frac{d\xi(b, s)}{dx}, \quad (2.33)$$

donde

$$\xi(x, s) = \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} = u_s(x, s).$$

Teniendo en cuenta que, para s fijo,

$$\frac{d\xi(x, s)}{dx} = u_{sx}(x, s) = u_{xs}(x, s), \quad \frac{d^2\xi(x, s)}{dx^2} = u_{sxx}(x, s) = u_{xxs}(x, s),$$

y que F depende implícitamente de x y de s , se sigue de (2.29) que la función $\xi(x, s)$ requerida en (2.33) es la solución del problema de valor inicial, en la variable x (i.e., s permanece fijo),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi(x, s)}{dx^2} &= F_u(x, u(x, s), u_x(x, s))\xi(x, s) + F_v(x, u(x, s), u_x(x, s))\frac{d\xi(x, s)}{dx}, \\ \xi(a, s) &= \beta_1, \quad \frac{d\xi(a, s)}{dx} = \alpha_1, \end{aligned} \tag{2.34}$$

en donde las funciones F_u y F_v denotan las derivadas parciales de $F(x, u, v)$ con respecto a u y v , respectivamente.

En la practica, los problemas (2.29) y (2.34) se reducen a cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables u , u_x , ξ y ξ' , o bien, pueden ser resueltas numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de segundo orden (ver la Sección 3.2.1).

Existen algunos problemas que surgen en la aplicación del método del disparo. El primero, es que no existe una regla para asignar el valor de s_0 , lo cual puede dar como resultado que la sucesión (s_m) sea divergente. Por esta razón el método modificado de Newton a fin de garantizar la convergencia de esta sucesión (ver [2, p. 108]). La segunda dificultad se da porque la solución numérica del problema (2.34) mediante el método de Runge-Kutta de segundo orden, es sensible a los cambios de h y s (i.e., el problema no depende continuamente de sus parámetros o inestable, y en consecuencia es mal condicionado).

En resumen, el método del disparo resuelve el PVF (2.27) de la siguiente manera:

1. Se da el valor s_0 .
2. Se resuelve el problema (2.29) para $s = s_0$ para en el punto $x = b$ obtener el valor de $\varphi(s_0)$ como se definió en (2.30).
3. La derivada $\varphi'(s_0)$ se evalúa después de resolver el problema (2.34) con $s = s_0$.

4. Se encuentra s_1 mediante la fórmula (2.30).
5. Se repiten los pasos 2 al 4 con s_0 reemplazado por s_1 , y así sucesivamente.

En general, cuando no se puede resolver el problema de valor inicial

Ejemplo 2.7. *Consideramos el problema de valor en la frontera semilineal*

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - uu'), & 1 < x < 3, \\ u(1) &= 17, \quad u(3) = \frac{43}{3}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

el cual tiene solución exacta $u(x) = x^2 + 16/x$.

Dado que la condición (2.28) se cumple para $c_1 = 0$ y $c_2 = -1$, el problema de valor inicial (2.27) para el método del disparo es

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - uu'), & 1 < x \leq 3, \\ u(1) &= 17, \quad u'(1) = s. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Como $F(x, u, v) = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - uv)$, $F_u = -v/8$ y $F_v = -u/8$, el problema correspondiente a (2.34) es

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi(x, s)}{dx^2} &= -\frac{1}{8} \left(u' \xi(x, s) + u \frac{d\xi(x, s)}{dx} \right), \\ \xi(a, s) &= 0, \quad \frac{d\xi(a, s)}{dx} = 1, \end{aligned} \tag{2.37}$$

o bien, con s dado, como

$$\begin{aligned} z''(x) &= -\frac{1}{8}(u'z + uz'), \\ z(a) &= 0, \quad z'(a) = 1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Este problema para $d^2\xi/dx^2$, o z'' , utiliza la solución $u(x, s)$ de (2.37). La función $\varphi(s)$ para calcular s^* es

$$\varphi(s) = u(3, s) - \frac{43}{3}.$$

Para usar el método de Newton, tenemos que

$$\varphi'(s) = u(3, s) = \xi(3, s).$$

Partiendo de un valor dado s_0 , se obtiene una estimación de s^* de la forma

$$s_{m+1} = s_m - \frac{u(3, s_m) - 43/3}{\xi(3, s_m)}, \quad m = 0, 1, \dots$$

En este caso se puede evitar el cálculo de s^* mediante el método de Newton. En efecto, como se conoce la solución $u(x)$ del problema (2.35), se sigue de la condición de frontera $u'(1) = s$ en el problema (2.35) que

$$s^* = u'(1) = u'(x) \Big|_{x=1} = 2x - \frac{16}{x^2} \Big|_{x=1} = -14.$$

Así, cuando $s_m \rightarrow s^* = -14$ debe suceder que $u(3, s_m) \rightarrow u(3, s^*) = 43/3 \approx 14,3333$.

En nuestro caso los problemas (2.36) y (2.38) son resueltos mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Para ellos, estos problemas se descomponen de la forma

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yv), \quad 1 < x \leq 3 \\ u(1) &= 17, \quad v(1) = s^* = -14 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{\partial u''}{\partial u} z + \frac{\partial u''}{\partial u'} z' = -\frac{1}{8}(u'z + uz') \\ z' &= l \\ l' &= -\frac{1}{8}(u'z + ul), \quad 1 < x \leq 3 \\ z(1) &= 0, \quad l(1) = 1. \end{aligned}$$

Para una tolerancia de 1×10^{-5} , mediante los resultados de la siguiente tabla de valores, se establece que la estimación de $u(3, s^*) = u(3, -14)$ es 14,33333 (ver Apéndice A para el algoritmo).

x_i	$u(x_i, s^*)$	Sol Exacta
1,0	17,00000	17,00000
1,1	15,75550	15,75545
1,2	14,77339	14,77333
1,3	13,99775	13,99769
1,4	13,38863	13,38857
1,5	12,91672	12,91666
1,6	12,56005	12,56000
1,7	12,30181	12,30176
1,8	12,12892	12,12888
1,9	12,03108	12,03105
2,0	12,00002	12,00000
2,1	12,02907	12,02904
2,2	12,11274	12,11272
2,3	12,24653	12,24672
2,4	12,42667	12,46666
2,5	12,65000	12,65000
2,6	12,91385	12,91384
2,7	13,21592	13,21592
2,8	13,55428	13,55428
2,9	13,92724	13,92724
3,0	14,33333	14,33333

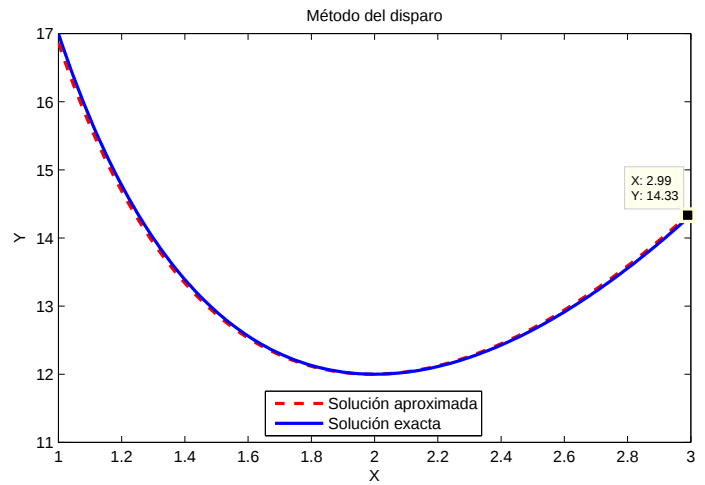


Figura 2.1: Resultados numéricos del método de Runge-Kutta cuando $s^* = -14$.

Capítulo 3

El problema de valores en la frontera

En este capítulo analizaremos la existencia y unicidad de un problema de Sturm-Liouville semilineal de valores en la frontera. Las referencias bibliográficas citadas tratan en general de este tema, pero en especial se consideraron los trabajos que al respecto se hace en [9, 21, 16, 20]. La demostración del resultado de existencia y unicidad se fundamenta en el Teorema 2.2 de P. Amster y P. Cárdenas en [1].

3.1. Introducción

Consideremos el problema de valores en la frontera semilineal de segundo orden

$$\begin{aligned} u'' + \alpha(t)f(u) &= 0, & 0 < t < T, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 u(T) + \beta_2 u'(T) &= \gamma_2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

en donde $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ y T son constantes dadas tales $\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \neq 0$ y $T > 0$.

Este problema surge en diferentes áreas de la matemática aplicada y la física, ver [7]. Por ejemplo, cuando $\mu(t)$ es una constante y $\beta_1 = \beta_2 = 0$, este problema representa la deflexión vertical u de una varilla elástica con extremos fijos, siendo α la carga axial (constante) que actúa en cada punto de la varilla. En este caso, para valores pequeños de α la solución del problema es $u = 0$, a menos que α corresponda a un valor propio del problema. Cuando la carga axial es aumentada, la varilla se arquea, dando origen a una solución no nula u del mismo [9, 15, 20].

3.2. Existencia y unicidad de soluciones

Podemos asumir que los valores propios $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del problema (3.1) son números reales no negativos. Recordemos que estos valores propios y las correspondientes funciones propias se obtienen como las soluciones del problema

$$-u'' = \lambda u, \quad \alpha_1 u(0) - \beta_1 u(0) = \alpha_2 u(T) + \beta_2 u(T) = 0.$$

Para el valor propio $\lambda = r^2$, la ecuación diferencial de este problema tiene soluciones de la forma

$$u(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt},$$

la cual representa la función propia correspondiente al valor propio λ , y siendo c_1 y c_2 constantes apropiadas. De esta función propia, se sigue que las condiciones de frontera del problema (3.1) son linealmente independientes si y sólo si el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \beta_1 r)c_1 + (\alpha_1 + \beta_1 r)c_2 &= \gamma_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2 r)e^{rT}c_1 + (\alpha_2 - \beta_2 r)e^{-rT}c_2 &= \gamma_2 \end{aligned}$$

tiene solución. De esto se sigue que la condición $\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \neq 0$ es equivalente a la condición

$$(\alpha_1 - \beta_1 r)(\alpha_2 - \beta_2 r) \neq (\alpha_1 + \beta_1 r)(\alpha_2 + \beta_2 r)e^{2rT}, \quad \text{para } r > 0. \quad (3.2)$$

En nuestro caso, se establece la existencia y unicidad del problema (3.1) bajo el supuesto que

$$\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2T \neq 0, \quad (3.3)$$

lo cual implica que el primer valor propio del problema (3.1) es positivo. Recordemos que este primer valor propio puede ser calculado mediante el coeficiente de Rayleigh de la forma

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X - \{0\}} \frac{-\int_0^T u''(t)u(t)dt}{\int_0^T u^2(t)dt} \quad (3.4)$$

donde

$$X = \{u \in H^2(0, T) : \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = \alpha_2 u(T) + \beta_2 u'(T) = 0\}$$

es el dominio del adjunto de $-u''$.

A continuación, se establece la existencia y unicidad del problema (3.1), siendo la técnica del punto fijo es la herramienta fundamental para establecer estos resultados.

Teorema 3.1 (Existencia y unicidad). *Supongamos que las condiciones (3.2) y (3.3) se cumplen. Además, se asume que*

$$\frac{|\alpha(t)(f(u) - f(v))|}{|u - v|} \leq \mu < \lambda_1 \quad (3.5)$$

y que

$$|\alpha(t)f(u)| \leq k|u|^r + l, \quad (3.6)$$

para algunas constantes k, l, r con $r < 2$. Entonces el problema (3.1) tiene una única solución.

Demostración. De la condición (3.3), se sigue que para cualquier función $\phi \in L^2(0, T)$ existe una única solución del problema

$$u'' = \phi, \quad \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = \alpha_2 u(T) + \beta_2 u'(T) = 0, \quad (3.7)$$

la cual es dada de la forma integral

$$u(t) = \int_0^T G(t, s) \phi(s) ds, \quad (3.8)$$

en donde G es la función de Green,

$$G(t, s) = \frac{(\beta_1 - \alpha_1 T)(\alpha_2(T - s) + \beta_2)}{\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T} + \max\{t - x, 0\}. \quad (3.9)$$

Así, las soluciones del problema (3.1) pueden ser consideradas como los puntos fijos del operador T dado como

$$Tu(t) = At + B - \int_0^T G(t, s) \alpha(s) f(u(s)) ds, \quad (3.10)$$

donde

$$A = \frac{\alpha_1 u_T - \alpha_2 u_0}{\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T}, \quad B = \frac{(\alpha_2 T + \beta_2) u_0 - \beta_1 u_T}{\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 T}.$$

Por hipótesis, si $u \in L^2(0, T)$ entonces $\alpha(\cdot)f(u) \in L^p(0, T)$, para alguna $p > 1$, y en consecuencia el operador $T : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ está bien definido. Además, si $u = \sigma Tu$ para algún $\sigma \in [0, 1]$, entonces

$$S_\sigma u = u'' + \sigma \alpha(t)f(u) = 0, \quad \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = \sigma \gamma_1, \quad \alpha_2 u(0) + \beta_2 u'(0) = \sigma \gamma_2.$$

Si $\tilde{u} \in H^2(0, T)$,

$$\alpha_1 \tilde{u}(0) - \beta_1 \tilde{u}'(0) = \sigma \gamma_1, \quad \alpha_2 \tilde{u}(0) + \beta_2 \tilde{u}'(0) = \sigma \gamma_2.$$

Como T es compacto. Entonces,

$$\begin{aligned} \|S_\sigma u - S_\sigma \tilde{u}\|_{L^2} \|u - \tilde{u}\|_{L^2} &\geq - \int_0^T (S_\sigma u - S_\sigma \tilde{u})(u - \tilde{u}) dt \\ &\geq \lambda_1 \|u - \tilde{u}\|_{L^2}^2 - \int_0^T (\alpha(t)f(u) - \alpha(t)f(\tilde{u}))(u - \tilde{u}) dt \\ &\geq (\lambda_1 - \mu) \lambda_1 \|u - \tilde{u}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1 - \mu} \|S_\sigma u - S_\sigma \tilde{u}\|_{L^2} = \frac{1}{\lambda_1 - \mu} \|S_\sigma \tilde{u}\|_{L^2}.$$

Así, si se considera $z \in H^2(0, T)$ fija de tal manera que

$$\alpha_1 z(0) - \beta_1 z'(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 z(0) + \beta_2 z'(0) = \gamma_2,$$

al hacer $\tilde{u} = \sigma z$ tenemos que

$$\|u - \sigma z\|_{L^2} \leq \frac{\sigma}{\lambda_1 - \mu} \|z'' + \alpha(\cdot)f(\sigma z)\|_{L^2} \leq c,$$

para alguna constante c independiente de σ . Esto implica que todas las soluciones del problema $u = \sigma Tu$ se tenga que $\|u\| \leq M$ para alguna constante M , y la existencia del punto fijo de T se siga del Teorema de Leroy-Schauder (ver [1]).

Finalmente, si u y $\tilde{u}$ son soluciones de (3.1), entonces $S_1 u = S_1 \tilde{u} = 0$. Por lo tanto,

$$\|u - \sigma z\|_{L^2} \leq \frac{\sigma}{\lambda_1 - \mu} \|S_1 u - S_1 \tilde{u}\|_{L^2} = 0,$$

de lo cual se sigue que $u = \tilde{u}$, y queda así establecida la unicidad de la solución del problema (3.1). $\square$

3.2.1. Procedimiento iterativo

El Teorema 3.1 establece las condiciones bajo las cuales el problema (3.1) tiene una única solución. La solución analítica de este problema puede ser dada mediante (3.8), la cual depende de la solución del problema (3.7), el cual a su vez depende de una solución desconocida ϕ . Ante esta situación, la solución aproximada del problema (3.1) es la mejor alternativa. En nuestro caso, se resuelve este problema numéricamente mediante el método del disparo no lineal, tal como se estableció en la Sección 2.4.1.

Si c_1 y c_2 son constantes tales que la condición (2.29) se cumple, entonces el PVI (2.28) para el método del disparo del problema (3.1) es

$$\begin{aligned} u'' &= -\alpha(t)f(u), \quad 0 < t \leq T \\ u(0) &= \beta_1 s - c_2 \gamma_1, \quad u'(0) = \alpha_1 s - c_1 \gamma_1. \end{aligned}$$

La solución de este problema se denota como $u(x, s)$.

Al derivar este problema en este problema con respecto a s se obtiene que el problema correspondiente a (2.35) es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi(x, s)}{dx^2} &= -\alpha(x)f'(u)\xi(x, s), \quad 0 < t \leq T, \\ \xi(0, s) &= \beta_1, \quad \frac{d\xi(0, s)}{dx} = \alpha_1, \end{aligned}$$

donde

$$\xi(x, s) = \frac{\partial u(x, s)}{\partial s}.$$

En este caso, el valor de s se obtiene como la raíz s^* de la función

$$\varphi(s) = u(T, s) - \gamma_2.$$

Como

$$\varphi'(s) = \frac{\partial u(T, s)}{\partial s} = \xi_s(T)$$

y dada una estimación s_0 de s^* , el método de Newton permite encontrar estimaciones de s^* de la forma

$$s_{m+1} = s_m - \frac{u(T, s) - \gamma_2}{\xi_s(T)}, \quad m = 0, 1, \dots$$

De igual manera a como se hizo en el Ejemplo 2.7, y utilizando el código de **Matlab** dado en Apéndice A, se pueden obtener una solución aproximada del problema (3.1).

Apéndice A

Algoritmos

A.1. Algoritmo método del disparo

Para derivadas parciales en Matlab se utiliza el comando **diff**{'ecuación',x}.

```
fprintf('\n \tMÉTODO DEL DISPARO, ECUACIÓN \n');
g=input('\n Ingrese la primera ecuacion diferencial\n','s');
f=input('\n Ingrese la segunda ecuacion diferencial\n','s');
x0=input('\n Ingrese el primer punto x0:\n');
x1=input('\n Ingrese el segundo punto x1:\n');
y0=input('\n Ingrese la condicion inicial y(x0):\n');
u0=input('\n Ingrese la condicion inicial u(x0):\n');
fprintf('\n \tDERIVADA PARCIAL DE LA ECUACIÓN\n');
g=input('\n Ingrese la primera ecuacion diferencial\n','s');
f=input('\n Ingrese la segunda ecuacion diferencial\n','s');
b0=input('\n Ingrese la condicion inicial b(x0):\n'); (b(x0) = u'(x0))
z0=input('\n Ingrese la condicion inicial z(x0):\n');
l0=input('\n Ingrese la condicion inicial l(x0):\n');
n=input('\n Ingrese el numero de pasos n:\n');
h = (x1 - x0)/n;
xs = x0 : h : x1;
for i = 1 : n;
format long
it = i - 1;
```

```

x0 = xs(i);
u = u0;
m1 = h * eval(g);
x = x0;
y = y0;
u = u0;
k1 = h * eval(f);
u = u0 + k1/2;
m2 = h * eval(g);
x = x0 + h/2;
y = y0 + m1/2;
u = u0 + k1/2;
k2 = h * eval(f);
u = u0 + k2/2;
m3 = h * eval(g);
x = x0 + h/2;
y = y0 + m2/2;
u = u0 + k2/2;
k3 = h * eval(f);
u = u0 + k2;
m4 = h * eval(g);
x = x0 + h;
y = y0 + m3;
u = u0 + k3;
k4 = h * eval(f);
u0 = u0 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
y0 = y0 + (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4)/6;
Yy0(i + 1) = y0;
Yx0(i + 1) = x0;
M(i, 1) = x0;
M(i, 2) = y0;
end
plot(Yx0, Yy0, 'r');

```

```

grid on;
hold on;
M;
for i = 1 : n;
it = i - 1;
x0 = xs(i);
l = l0;
m1 = h * eval(g);
b = b0;
z = z0;
u = u0;
l = l0;
k1 = h * eval(f);
l = l0 + k1/2;
m2 = h * eval(g);
z = z0 + m1/2;
l = l0 + k1/2;
k2 = h * eval(f);
l = l0 + k2/2;
m3 = h * eval(g);
z = z0 + m2/2;
l = l0 + k2/2;
k3 = h * eval(f);
l = l0 + k2;
m4 = h * eval(g);
z = z0 + m1;
l = l0 + k1;
k4 = h * eval(f);
l0 = l0 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
z0 = z0 + (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4)/6;
Yyo(i + 1) = z0;
M(i, 3) = z0;
end

```

```

for i=1:n
   $u = u_0 - (M(i, 2) - 43/3)/M(i, 3);$ 
   $Yu(i + 1) = u;$ 
   $M(i, 4) = u;$ 
end
M;

```

Apéndice B

Bibliografía

Bibliografía

- [1] P. Amster & P. Cárdenas, Sturm-Liouville boundary conditions for a second order ODE, *Matemática: Enseñanza Universitaria*, Vol XV, 2007.
- [2] Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [3] Robert B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [4] Tom M. Apostol. *Mathematical analysis*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., second edition, 1974.
- [5] Robert G. Bartle. *Introducción al análisis matemático*. Editorial Limusa, México, 1982. Translated from the English by Ma. Cristina Gutiérrez González.
- [6] Klaus Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [7] L. H. Erbe and Haiyan Wang. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3):743–748, 1994.
- [8] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.
- [9] Julio Román Loayza Cerrón. *Aplicaciones del teorema punto fijo de Banach*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Peru, 2006. Tesis de Pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Peru, 2006.
- [10] D. R. Smart. A fixed-point theorem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 57:430, 1961.
- [11] D. R. Smart. Fixed point theorems for many-valued mappings. *Math. Colloq. Univ. Cape Town*, 8:167–170, 1973.

- [12] D. R. Smart. *Fixed point theorems*. Cambridge University Press, London, 1974. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66.
- [13] Nagle. Kent *Ecuaciones difernciales con valores en la frontera*. Pearson Education. Cuarta edition. México 2005.
- [14] Boyce. William *Ecuaciones difernciales con valores en la frontera*. Editorial Limusa. Cuarta edition. México 1998.
- [15] Haberman. Rchard *Ecuaciones en derivadas parciales con problemas en el contorno*. Prentice Hall.Tercera edition.Madrid (España) 2008.
- [16] Kolmogorov.A.N *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Editorial MIR.primera edition. Moscú (URSS)1995.
- [17] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*
- [18] Díaz Jose M. *Introducción a la topologia de los espacios métricos*. Servicios de publicaciones Universidad de Caliz. España. 1998.
- [19] Sabogal Sonia y Arenas Gilberto *Introducción introducción a la geometría fractal*. Servicios de publicaciones UIS, Colombia. 1998.
- [20] Stakgold Ivar *Green's function and boundary value problem*. Jhon Wiley. 1979.
- [21] Burden L Richard. *Análisis numérico*. Editorial Math Learning. Septima edición. 1993.