LOS APUNTES:
UNA APROXIMACIÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO

CLAUDIA BARAJAS ARENAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2009

LOS APUNTES:
UNA APROXIMACIÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO

CLAUDIA BARAJAS ARENAS

Trabajo para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Profesor Director
Cristian Cogollo Guevara
Especialista en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2009

Dedicatorias

Al ser que fue, es y será mí
más grande apoyo:
Mi Dios.

A mis padres porque aunque no estuvimos
juntos en este proceso siempre me
apoyaron y estuvieron pendientes de mí.
Este logro es para ustedes. Los amo.

A mi hermana por quien doy infinitas
gracias a Dios por habernos hecho
hermanas y por su inmensa paciencia
y comprensión en los momentos
difíciles de mi formación.

A mi mejor amiga, Mildred, porque
desde que hace parte de mi vida
ha sido el oasis en el cual mi
alma se refresca cuando mis
fuentes se han secado.

Agradecimientos

"La gratitud nunca es suficiente;
al contrario, falta".

Primeramente a mi Dios por ser mi mejor amigo, mi fortaleza, por darme todo lo que tengo y no dejarme caer nunca. Seguidamente, a la Universidad Industrial de Santander, por ser la gestora de la transformación de mi ser. A la profesora Diana Jaramillo porque su práctica docente fue la que no me dejó renunciar a este sueño –Dios la bendiga–. Al profesor Bernardo Mayorga por haberme ayudado a potenciar mis capacidades; la confianza depositada fue su mayor aporte para mi formación profesional. Al Semillero Matemático porque las diversas experiencias vividas con ellos me han permitido conocer un nuevo significado del ejercicio docente; al profesor Cristian Cogollo por ayudarme a lo largo de la tesis desinteresadamente y brindarme su amistad. Al profesor Gabriel Yánez por las orientaciones dadas para pulir este Trabajo. Y, al profesor Gilberto Obando por su colaboración.

Asimismo, deseo expresar mi agradecimiento a mis amigos y compañeros Carolina Rojas, Michael Pérez y Humberto Trillos porque su valiosísima y sincera amistad fue indispensable durante todos estos años. De igual modo, a mis compañeras Gladys Soraya Rodríguez y María del Pilar Peralta porque estuvieron en el momento indicado y con las palabras precisas. A Jorge Armando Ortiz por su compañía en las tantas noches de amanecer y esfuerzo para la realización de esta tesis.

A todos y cada uno de mis estudiantes del Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados) y al señor Director David D. Rodríguez por su inmensa colaboración.

… Y a todos aquellos que de una u otra forma me ayudaron a alcanzar esta meta. Por ello, muchas gracias.

Tabla de Contenido

Resumen

TÍTULO: LOS APUNTES: UNA APROXIMACIÓN AL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO[*]

AUTORA: BARAJAS ARENAS, Claudia[**]

PALABRAS CLAVE: Metodología de enseñanza – Apuntes – Construcción – Proporcionalidad – Resolución de Problemas

Tradicionalmente en clase los apuntes han sido el registro del conocimiento que el profesor dicta desde sus notas o del libro de texto, distinguiendo con ello al estudiante anotador copista del estratégico. A partir de esta inadvertida y sencilla actividad de clase surgió la pregunta orientadora de este Trabajo: **¿Cómo el sentido que los apuntes tienen en la metodología de enseñanza influye en la construcción del concepto de Proporcionalidad de los estudiantes de séptimo grado?**

Así, se elaboró una metodología de enseñanza cuyo pilar fueron tres *Cartillas* que oficiaron de recursos didácticos y de mediadoras para la construcción del concepto de proporcionalidad. El apunte se caracterizó por ser el instrumento a través del cual los estudiantes del Colegio Príncipe San Carlos (Sede B - Colorados) formarían los conceptos necesarios para comprender la proporcionalidad. Permitiendo, simultáneamente, aproximarse a su razonamiento proporcional que fue desarrollándose paulatinamente desde el razonamiento cualitativo hasta alcanzar la cuantificación. De esta manera, se realizó un estudio de casos a los apuntes de tres estudiantes para analizar su razonamiento proporcional como resultado de la metodología propuesta.

Esta Investigación muestra, entre otras cosas, que cuando se le da sentido a la escritura dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje esta se puede convertir, a través de la toma de apuntes, en una potencial herramienta para favorecer el desarrollo del razonamiento matemático ya que esta desarrolla procesos cognitivos y metacognitivos pues escribir es un instrumento epistemológico de aprendizaje y no solo un método de evaluación de conocimientos o de registro de la información.

---

[*] Trabajo de grado.
[**] Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Licenciatura en Matemáticas – Director: COGOLLO GUEVARA, Cristian; especialista en Educación Matemática.

Summary

TITLE: THE NOTES: AN APPROACH TO THE PROPORTIONAL REASONING OF THE STUDENTS OF SEVENTH GRADE*

AUTHOR: BARAJAS ARENAS, Claudia**

KEY WORDS: Teaching methodology, notes of class, construction, proportionality, resolution of problems

Traditionally in class the notes have been the registration of the knowledge that the professor dictates from their notes or of the text book, distinguishing with it to the student annotator copyist of the strategic one. Starting from this inadvertent and simple class activity the question leader of this Investigation arose: **How does the sense that the notes make in the teaching methodology influence in the construction of the students' of seventh grade concept Proportionality?**

This way, a teaching methodology was elaborated whose pillar three *Cartillas* that officiated of didactic resources was and of mediators for the construction of the concept of proportionality. The note was characterized to be the instrument through the one which the students of the School Prince San Carlos (Headquarters B - Colorados) they would form the necessary concepts to understand the proportionality. Allowing, simultaneously, to approach to their proportional reasoning that was being developed gradually from the qualitative reasoning until reaching the quantification. This way, it was carried out a study of cases to the notes of three students to analyze their proportional reasoning as a result of the proposed methodology.

This Investigation shows, among other things that when it is given sense to the writing inside the teaching-learning process it can become, through the taking of notes, in a potential tool to favor the development of the mathematical reasoning since this it develops processes cognitives and since metacognitives to write it is an instrument learning epistemology and not alone a method of evaluation of knowledge or of registration of the information.

* Thesis

** Science Faculty - Mathematics School - Degree in Mathematics - Director: COGOLLO GUEVARA, Cristian; specialist in Mathematical Education.

Presentación

Este Trabajo de Investigación se enmarca en el Servicio Social y Trabajo de Grado II propio de la Licenciatura de Matemáticas cuyas raíces empiezan a germinar en el Servicio Social y Trabajo de Grado I y, posteriormente, se fortalecen en el que fue mi lugar de trabajo por seis meses durante el 2007: el Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados).

Durante el ejercicio de mi práctica docente (Servicio Social y Trabajo de Grado I, primer semestre del 2007) en el Instituto Tecnológico Dámaso Zapata –y tal vez antes– surgieron muchas inquietudes alrededor de los procesos de lecto-escritura de los estudiantes. Pero el motivo de mayor inquietud se dio durante el período de observación al notar que los estudiantes no tomaban apuntes dado que la metodología del profesor de aquel entonces era dejarles a los estudiantes de noveno grado la tarea de leer en la casa y preguntar en clase.

En definitiva, esta metodología de enseñanza-aprendizaje en la Educación Básica y Media Vocacional fue de difícil adaptación como método de estudio para los estudiantes ya que el sistema educativo ha moldeado el ritmo de enseñanza-aprendizaje al paso del dictado y después la explicación y, posteriormente, preguntas si es que los estudiantes se animan a hacerlas.

Por lo tanto, como profesora practicante, noté al mirar los cuadernos de los estudiantes que eran muy pocos los apuntes que tomaban y, durante las clases con el profesor encargado, podía contar con los dedos de mi mano los estudiantes que tomaban nota de las cosas importantes que el profesor decía en su discurso académico.

¿Acaso comprendían todo lo que el profesor decía tanto así como para no tomar nota? ¿O era que la lectura matemática que realizaban del libro de Álgebra de Santillana era tan fructífera que lo de clase sobraba? Y si era así, ¿por qué era tan alto el índice de reprobación? ¿Por qué los escuchaba quejarse tanto a la hora de estudiar porque no entendían los apuntes que *tomaban*?

En el Colegio Príncipe San Carlos, la situación fue diferente en cuanto al rol que desempeñaba pues ya no era "la practicante" sino "la profesora". Al llegar al Colegio me asombré al mirar los cuadernos de "Matemáticas", "Álgebra", "Trigonometría" y "Cálculo" de los estudiantes de cada grado…. ¡Estábamos en inicio de julio y los jóvenes ya llevaban un segundo cuaderno de 100 hojas! Si se hace un paralelo entre los dos panoramas presentados se esbozan dos conclusiones: en el primero, pocos apuntes; en el segundo… ¿Demasiados? Pues bien, esa no era mi preocupación.

Empero, la pregunta que saltó a mi consciente al ver tantas hojas fue: "¿Por qué copiaran tanto?". Con el tiempo comprendí que era un asunto más de control de disciplina que de metodología de enseñanza dado que los jóvenes eran muy inquietos –sobre todo los jóvenes de séptimo y octavo grados–.

De esta manera, a través del diario pedagógico me di cuenta que los jóvenes comprendían cuasinada de sus apuntes pues al remitirlos a estos cuando me preguntaban algo sobre determinado tema que ya habían visto, leían y al final decían: "¡Profe, no entiendo nada!" a lo que yo respondía abriendo los ojos lo más que podía y preguntándoles: "¿Cómo así?". Tal vez fue por la juventud de mi ejercicio pedagógico que me inquieté tanto al notar que mis estudiantes y sus apuntes eran dos islas. Esto fue tan significativo en mi práctica docente que desde entonces quise observar cómo era la relación de tan particular tripleta (estudiante-apuntes-aprendizaje).

Después de esto, y de indagar sobre la toma de apuntes y el uso que los estudiantes le daban, estructuré la pregunta que desencadenaría mi Trabajo de Grado teniendo en cuenta que el tema a tratar sería Proporcionalidad**: ¿Cómo el sentido que los apuntes tienen en la metodología de enseñanza influye en la construcción del concepto Proporcionalidad de los estudiantes de séptimo grado?** Definiéndose, consecuentemente, los objetivos generales de este: **Elaborar una metodología en la cual el sentido de los apuntes favorezca la formación de conceptos y los procesos de anotación; y, analizar el proceso de construcción del concepto de Proporcionalidad a través de los apuntes de los estudiantes del Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados).** De esta manera uso el apunte como instrumento para aproximarme al razonamiento que cada estudiante realizó en la construcción del concepto mencionado.

Por lo tanto, sería el sentido que el estudiante le diera al objeto de aprendizaje lo que haría del apunte un elemento personal e intransferible. De esta manera, la toma de apuntes se tornaría paulatinamente significativa como efecto del sentido que el apunte tendría dentro de la metodología de clase.

Como actividades preliminares de la Investigación, se hizo un seguimiento de la metodología de enseñanza aplicada anteriormente al grupo que participaría en el Proyecto. Esto con el propósito de establecer la metodología apropiada según el carácter del grupo y el objetivo de esta. Además, se cumplió con el conducto regular necesario para obtener el aval del director del Colegio y los padres de familia de los estudiantes para llevar el Proyecto al aula regular.

Posteriormente, se diseñó el material didáctico apropiado que les permitiría a los estudiantes realizar la construcción del concepto de proporcionalidad a través de dicha metodología y, simultáneamente, construir sus apuntes de manera autónoma. De este modo, se pudo observar los apuntes que cada estudiante realizó durante las actividades propuestas alrededor de la tarea de construcción ya mencionada. Esto se hizo recogiendo los apuntes (cualquiera que fue su caracterización: cuaderno, hojas sueltas u otra material que el estudiante dispusiera para realizarlos) semanalmente y, cuando se consideró pertinente y necesario, realizando entrevistas a los autores de los apuntes para que fueran ellos quienes señalaran el sentido que le dieron al apunte y a la actividad misma que hubieran trabajado. Además, se realizaron grabaciones de clase para capturar las interpretaciones y los aportes presentados durante clase a favor de la construcción matemática que se pretendía.

Después de haber desarrollado y socializado las actividades presentadas, se pidió a los estudiantes que realizaran una producción de texto alrededor del tema para así observar la apropiación del concepto y las debilidades y fortalezas del proceso de construcción, además, con ello se determinaría la incidencia del apunte en la tarea cognitivo-matemática planteada. Es importante aclarar que en este Proyecto se da por sentado –por concepciones de la investigadora– que el apunte y la escritura son dos elementos interrelacionados lo cual se podrá palpar en el análisis dado que se enfatizó en el apunte en cuanto a la caracterización de la escritura misma.

Seguidamente, analicé los datos recolectados a través de cada sesión (cuadernos, cartillas, entrevistas y grabaciones magnetofónicas) para analizar la incidencia de la metodología en la elaboración de los apuntes y, por consiguiente, en la construcción del concepto matemático ya mencionado lo cual permitió acercarme al razonamiento proporcional de los estudiantes realizando una triangulación entre los datos recolectados, los autores que sustentan el marco teórico de esta Investigación tanto en proporcionalidad y toma de apuntes –y escritura– y la voz de los estudiantes independientemente de si fue recogida en colectivo o individualmente.

Dichas entrevistas las realicé durante las actividades de clase, y en otras ocasiones en tiempo extraclase tratando siempre de favorecer el clima de la entrevista y al entrevistado. Las entrevistas realizadas siempre tuvieron como eje orientador el apunte del entrevistado y algunas preguntas estructuradas de antemano para socavar el razonamiento que este realizaba alrededor de las actividades. Por lo tanto, las entrevistas realizadas fueron semi-estructuradas.

Para dicho análisis, y dado que el Proyecto se caracterizó por ser un proceso de investigación centralizado en el sujeto (para este caso, en el estudiante) a quien se le reconoció como un ser que se relacionaba con el mundo y con los otros; además de que se consideraron las interpretaciones de los sujetos por encima o junto con la interpretación del investigador y al contexto como elementos importantes a tomar en cuenta, opté por un abordaje metodológico cualitativo de tipo fenomenológico-hermenéutico ya que este permitiría comprender mejor el trabajo realizado por mis estudiantes.

Asimismo, para realizar el análisis de los datos me incliné por el estudio de casos ya que cuando se quiere estudiar algo singular, que tenga un valor en sí mismo, se debe escoger el estudio de caso pues este es un método empleado para estudiar un individuo o un colectivo en un entorno o situación de forma intensa y lo más detallada posible.

> Eso significa que el objeto es tratado como único, una representación singular de la realidad que es multidimensional e históricamente situada. De ese modo, la pregunta sobre el caso "típico", esto es, empíricamente representativo de una población determinada, se torna inadecuada ya que cada caso es tratado como teniendo un valor intrínseco (Pinto, 1997 apud Cogollo, 2006, p. 9).

Y, por último, para estructurar la presente relatoria y presentar, a su vez, el análisis de los apuntes se presenta el estudio de caso de tres estudiantes que hicieron palpable –de diferente forma– su razonamiento proporcional en sus apuntes –también heterogéneos entre sí– impregnándole a estos su sentido mostrando con ello que la tarea de toma de apuntes se puede tornar significativa y personal siempre y cuando la metodología de clase lo permita, además que permiten aproximarse al proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Así, el lector encontrará entonces que he organizado el documento en cuatro capítulos así:

"Capítulo 1. ASPECTOS ESPECÍFICOS DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN". Aquí expongo y ahondo en los aspectos teóricos sobre los cuales se sustenta este Proyecto en cuanto a "apuntes", "sentido" y "construcción del concepto de proporcionalidad" delimitando así los objetivos generales de esta Investigación alrededor de estos aspectos. Además, presento y sustento la metodología de enseñanza aplicada.

“Capítulo 2. RECURSOS DIDÁCTICOS DEL PROYECTO”. En este presento los recursos didácticos diseñados y usados para la metodología de enseñanza y muestro en términos generales cómo se vivenció el proceso en el salón de clase y cómo este proceso transformó el ambiente educativo como resultado de la metodología diseñada cuyo pilar fue el recurso didáctico diseñado. Además, relato las actividades didácticas que permitieron dar continuidad al proceso de enseñanza.

“Capítulo 3. ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES”. Aquí analizo los apuntes de los estudiantes según la consecución de las actividades didácticas diseñadas en el marco de las voces de los estudiantes, del marco teórico y de mi interpretación como investigadora. Asimismo, muestro la construcción del concepto de proporcionalidad a la cual llegaron los estudiantes que hacen parte del análisis según sus diferencias individuales.

“Capítulo 4: UN APUNTE FINAL”, a modo de cierre, realizo un *feedback* reflexivo sobre la experiencia comentando el impacto del Proyecto en el contexto educativo en donde se realizó, y trato de concluir algunos aspectos que considero importantes.

Por último, es importante mencionar que para el desarrollo del presente documento se estilaron tres voces: las de los autores del marco teórico, la de la investigadora en tanto que interviene para mediar entre estos y su interpretación de los sucesos, y su voz reflexiva. Esta última se distingue porque está sangrada y en cursiva.

CAPÍTULO 1

Aspectos Específicos del Proyecto de Investigación

INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo pretendo establecer los antecedentes teóricos de esta Investigación cuyo perfil, dada mi inacabada formación profesional, se enmarca en la educación matemática y cuyo ejercicio docente se encuentra permeado por el convencimiento de que "enseñar no es transferir conocimiento sino crear las posibilidades para su propia producción o construcción" (Freire, 1998). Pues bien, para comprender mejor lo que se pretende será necesario ahondar específica y teóricamente en los siguientes aspectos mostrando, al mismo tiempo, cómo ellos se interrelacionan para así darle cuerpo y claridad a los objetivos generatrices de este Trabajo. Tales aspectos son:

- Los apuntes,
- El sentido, y
- La proporcionalidad: su *construcción*, *comprensión* y el *razonamiento* proporcional

Posteriormente, presentaré los aspectos metodológicos que posibilitaron una caracterización diferente de los apuntes en un salón de clases de estudiantes de séptimo grado. Veamos.

1. 1. ASPECTOS TEÓRICOS

1.1.1. Sobre los apuntes

De manera tímida durante mi Servicio Social y Trabajo de Grado I observé la relación tan impersonal de los estudiantes con sus apuntes frente al discurso académico del profesor llegando a concluir que era una situación "normal". Sin embargo, mis observaciones insípidas se tornaron en reflexiones durante mi ejercicio docente en el Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados) cuando como profesora empecé a notar que aunque los cuadernos tuvieran decenas y decenas de hojas llenas, los apuntes que estas contenían eran ajenos a la autonomía y al entendimiento de los estudiantes.

> *"¿Por qué solo copian cuando yo lo digo? ¿Por qué cambian el color del lapicero para dar connotación a algo cuando yo lo digo? ¿Por qué solo copian lo que se les dicta o lo que está en el tablero listo para copiar?", cuestionamientos como estos atestaban mi cabeza.*
>
> *Y al pensar en el dictado reflexionaba: "Pero sino no les dicto, no copian y entonces con qué estudian después. Además, sino se les dicto, al mirar en casa los papás los cuadernos tendré problemas porque dirán entonces qué es lo que está enseñando la profesora".*

Al darme cuenta de que mis estudiantes solo copiaban cuando y como yo dijera, empecé a tener conciencia de la forma como dictaba tratando de estructurarles los apuntes de manera clara y sencilla, resaltando lo importante con subrayados, mayúsculas sostenidas, recuadros, colores, cambio del color del lapicero, etc.

> *"Pero –pensaba– ¿de qué me sirve el esfuerzo que hago si esa estructura solo es clara y significativa para mí?" Los apuntes seguían siendo míos <de la profesora>, no de ellos. Además, "la clase se me está yendo en dictar y los jóvenes no están pensando… Les estoy negando ese derecho"…*

Entonces, cómo dar solución a esta problemática que estaba obstaculizando mi práctica docente y al mismo tiempo me estaba llevando a transgredir mi formación profesional ya que al dictar estaba transfiriendo conocimiento no propiciando espacios para su producción o conocimiento.

Todo este vaivén me tenía inquieta y al mismo tiempo me llevaba a rechazar la situación como "normal" tal cual lo había hecho en mi posición de practicante en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata. Fue así como empecé a realizar consultas sueltas en Internet sobre los apuntes –quería saber a cuántos más les inquietaba el asunto–. De antemano debo decir que la bibliografía que hay alrededor de los apuntes no era –por lo menos para la fecha– muy basta. Sin embargo, en mi búsqueda hallé dos textos que avalaron mis inquietudes y que me permitieron perfilar la investigación que me atañe proporcionándole la solidez teórica que esta requería.

Es así como Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 3) reafirman citando a Le Bras (1992) que

> No cabe duda que la toma de apuntes es una actividad cotidiana en la vida de los estudiantes de diferentes niveles educativos. Una actividad que es de naturaleza diferente según nos situemos en un nivel u otro del sistema educativo. Así, mientras que en primaria el discurso del profesor suele tener un componente directivo acerca de lo que es importante y lo que hay que conservar quedando así reducida la actividad de los estudiantes al registro de lo expuesto; en secundaria y en la universidad los estudiantes –se supone– deben poner en juego otras destrezas que requieren mayores cualificaciones y mayor nivel en los procesos cognitivos puestos en juego para poder procesar adecuadamente tanto el contenido como los procesos intelectuales que tienen lugar en estos espacios de formación.
>
> [...] En los trabajos realizados por Monereo y otros (2000) a nivel universitario, se afirma que, en general, los discentes no saben tomar apuntes, sino que se convierten en meros copistas de la información que les proporciona su profesor, la toma de apuntes se convierte así en un proceso "amanuense" repetitivo y poco significativo. Esto implica que el grado de dificultad de los procesos mentales de los alumnos en esta actividad es mínimo y no se suele modificar entre los distintos niveles educativos.
>
> Igualmente podemos constatar esta afirmación de Monereo y otros en la investigación de Ward y Tatsukawa (2003) de la Universidad de Tokio, quienes reiteran que no es cierto que el tomar apuntes de forma copiada facilite a los alumnos la comprensión y aprendizaje de la información recibida, pues al copiarla si más, no la interiorizan (a no ser que vuelvan a leerlos y trabajarlos).

Entonces estaremos de acuerdo en que la toma de apuntes se convierte en –y es– uno de los procedimientos más utilizados en nuestro –o en cualquier– contexto educativo ya sea en la educación básica primaria, secundaria o superior como fuente priorizada de información.

> De primaria a la facultad los objetivos [que direccionan la toma de apuntes] son los mismos: es necesario aprenderse la clase. En cambio la utilización de estos conocimientos puede ser diferente. En Primaria se toman notas para ser capaces de recitar una lección, hacer un examen escrito o un control. La mayor preocupación de los alumnos consiste en anotar lo más fácilmente posible todo lo que se dice, por otra parte el profesor proporciona directrices suficientes para que así sea. En el instituto, se exige un poco más de autonomía, teniendo que preparar en ocasiones exámenes orales sobre temas concretos a partir de las notas que se hayan tomado en clase. En la Facultad, se trabajará a la vista de los exámenes, se tomarán notas en el aula, en las prácticas, se investigará en documentos, en libros (ibídem, pp. 6-7).

Por lo tanto, la tendencia educativa a utilizar los apuntes de clases suele reducirse al registro mecánico del discurso académico que está constituido por las explicaciones del profesor, apartes de guías o de libros propios de la materia, y trabajos académicos realizados por los estudiantes. “Dentro del ámbito educativo hay que distinguir diferentes usos del *discurso académico*. Se puede hablar del *discurso académico* empleado para enseñar conocimiento, generado por el experto en la materia, frente al *discurso académico* empleado para aprender y demostrar lo que se ha aprendido, generado por el aprendiz” (Atienza, 1998, p. 29).

Reiterando, es por tal razón que el profesor en primaria y secundaria –en aras de ayudarle al estudiante a tomar nota– se hace responsable de su estructuración –tal cual lo hacía yo– planeando cuidadosamente lo que dice, hace, y presenta en el salón de clase; es decir, nos esforzamos –conjugo el verbo “esforzar” porque no siempre es así– por cuidar nuestro discurso independientemente de su caracterización. A esto los autores Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 14) aportan:

> No podemos olvidar que éste <el discurso académico> está claramente favorecido por una forma de cooperación tácita que suele establecerse entre el emisor y el receptor, muy especialmente en <ciertas> situaciones educativas, y <en la> que <se> respeta los siguientes principios: considerar al emisor como informativo pues se piensa que proporciona la información necesaria en su justa medida; atribuir sinceridad a sus palabras hasta que no se demuestre lo contrario; y admitir que lo que dice el emisor ha estado previamente seleccionado y, por tanto, engloba lo más importante del tema, lo que “hay que saber”. Como se deja ver en estos principios que constituyen un acuerdo implícito entre el emisor y el receptor, la mayor parte de responsabilidad recae sobre el emisor pues será él el que determine cuáles serán las informaciones relevantes para transmitir, qué ideas hay que relacionar […].

Subyacentemente, la toma de apuntes está ceñida al ejercicio de la escritura, ejercicio que es diferente para cada autor y, por ende, no tiene el mismo sentido para uno como para el otro ya que como bien se puede escribir con el propósito de dar claridad a algo o para dejar "en remojo" una cuestión para después abordar. De igual modo, lo que es importante para un sujeto para el otro no lo es tanto.

No obstante, el estudiante recurre al lenguaje escrito en su discurso como mediador didáctico, reiterando, con dos funciones básicas: (1) para aprender o (2) para demostrar lo aprendido. Los autores Britton et al. (1975) apud Atienza (1998, p. 29-30) se refieren directa y tácitamente a estas funciones así:

> 1. Escribir para aprender
> El ser humano emplea el lenguaje para construir conocimiento en su función dialéctica, esto es, en el proceso de composición que le lleva a materializar una idea. En el contexto educativo, el estudiante utiliza constantemente la escritura en esta vertiente formadora. Se trata del discurso realizado para aprender, hecho para uno mismo como construcción del conocimiento, como tanteo y aproximación al saber de los programas de las disciplinas. Dicha escritura se plasma en apuntes de clase, esquemas, borradores de un tema, etc.
> 2. Escribir para demostrar lo aprendido
> El modo que normalmente tiene el estudiante de demostrar en las disciplinas académicas la adquisición de conocimientos es mediante una prueba de ensayo o examen, donde debe dar cuenta de tales conceptos a partir de la exposición de los mismos. Se trata del discurso presentado como producto, hecho para demostrar a un tercero la construcción del conocimiento. Dicha escritura se plasma en los exámenes, trabajos monográficos, esto es, en ejercicios expositivos diversos que el estudiante entrega al profesor.

Aprovecho las dos distinciones realizadas para anotar que la presente Investigación tuvo como punto de partida el lenguaje escrito visto desde la perspectiva "escribir para aprender"; no obstante, paulatinamente la escritura que componía la toma de apuntes fue evolucionando y las dos funcionalidades se hicieron presentes en el proceso ya que los estudiantes intuitivamente fueron tomando consciencia de cómo debían comportarse como escritores de tal forma que atendieran las exigencias subyacentes en la dinámica del apunte como instrumento evidenciador de su proceso de construcción conceptual.

A lo anterior, Rosenblatt, citado por Valery (2000, p. 39), aporta que "la toma de apuntes es un proceso de diálogo que el estudiante realiza consigo mismo, el saber que está tratando de aprender y el pensamiento de otros". Desde esta perspectiva, Valery (ibídem, p. 40) afirma que mientras "el lenguaje oral aparece como una actividad espontánea, el lenguaje escrito exige un trabajo consciente y analítico, porque si bien el lenguaje oral abstrae la realidad y la representa en palabras, el escrito requiere de un mayor nivel de abstracción, un segundo nivel de simbolización porque en él no sólo las palabras son remplazadas por signos alfabéticos sino también los elementos no verbales como la sonoridad, los gestos, las intenciones deben ser puestos en palabras escritas, sintácticamente organizadas para ser transmitidas en toda su significación".

Por lo tanto, al tratarse la toma de apuntes de un procedimiento interdisciplinario podría esperarse que esta utilización fuese flexible o estratégica y tuviese en cuenta las condiciones cambiantes de cada contexto de anotación, es decir, que estuviera guiado por procesos cognitivos y metacognitivos por parte del estudiante alrededor de cada objeto de aprendizaje, esto en aras de favorecer su proceso de aprendizaje poniendo en consideración una puesta en marcha de autonomía y pensamiento crítico frente a lo que escucha, lee, ve, escribe e incluso lo que habla.

Sin embargo, dicho *registro* se va construyendo en un proceso en el que el estudiante aporta poco de sí mismo muy a pesar de que, a final de cuentas, sea el apunte –o el cuaderno– el recurso que guiará su aprendizaje en el momento de la ausencia del profesor. No obstante –tal cual ya lo había vivenciado–, la forma y la caracterización de los apuntes de un estudiante de secundaria depende en gran medida de la metodología de enseñanza del profesor y cómo este defina implícitamente en su práctica el apunte para el estudiante. Por ende, la caracterización de los apuntes estará ceñida, hasta cierto punto, por el profesor y su propia práctica.

Por citar un ejemplo, de mi experiencia docente he observado que la intención de cualquier texto (apuntes, trabajos, composiciones) que realiza el estudiante, como bien lo afirma Atienza (1999), queda reducida en muchas ocasiones a satisfacer las exigencias del profesor ya que tiene como destinatario último al profesor, quien juzgará el texto elaborado por el estudiante. Es decir que el estudiante no ejerce autonomía al tomar sus propias decisiones respecto qué, cuándo y cómo *apuntar* ni muchos menos entenderá, en su defecto, lo que apuntó ya que se limita, a fin de cuentas, a escribir para el profesor con el único objetivo –en la mayoría de los casos porque excepciones hay– de obtener una nota aprobatoria.

Por lo tanto, "parece ser que la toma de apuntes está guiada por procedimientos algoritmos pues el estudiante solo se preocupa por la estética del apunte, la ortografía, entre otros, dejando de lado la heurística que requiere la toma de apuntes para que tenga sentido para sí mismo pues está sujeta a la variabilidad, lo que hace necesario que el estudiante emplee recursos metacognitivos propios para cada área" (Monereo, Castelló, Palma y Pérez, 1998, p. 25).

Sin embargo, no pretendo decir, ni mucho menos afirmar, que *todos* los estudiantes son anotadores copistas. No. Hay estudiantes que logran poner en juego un número de técnicas y estrategias para apuntar de manera personalizada lo que hace que en un salón en buena hora se distingan dos clases de anotares: copista y estratégicos. Nuevamente los autores Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 17) se refieren también a esta observación ofreciendo mayor visión, claridad y argumentación:

> Para los primeros anotar consiste en tratar de reproducir la clase, por consiguiente, el apunte es una copia de la clase, la materia prima sobre la que posteriormente se preparará el examen. Bajo esta óptica la clase es considerada como una situación de transmisión de los contenidos que el profesor ha seleccionado. En cambio para los segundos tomar apuntes es tratar de comprender el significado y sentido que tiene la clase para el profesor. El apunte es pues una representación fidedigna de los apartados más relevantes que conforman la estructura de la clase. Por otra parte, todos tienden a anotar aquello que es susceptible de ser evaluado.
>
> En relación al modo en que anotan, el primer grupo lo hace mayoritariamente de forma literal y lo justifican afirmando que así no tienen que pensar y pueden anotar un mayor número de ideas. Por el contrario, el grupo formado por los anotadores estratégicos apuntan de manera personalizada, dando coherencia a sus apuntes a través de conjunciones, conexiones sintácticas, sangrado, flechas, etc....

Si nos detenemos un momento en los anotadores estratégicos podremos inferir que ellos tienen una intención al apuntar que va más allá de registrar la información recibida del profesor pues como bien afirma Smith (1982), citado también por Valery (2000, p. 39), "[la toma de apuntes] parte de la especificación de las intenciones, es decir, se trata de especificar lo que queremos decir al escribir algo, tener claras las ideas". Como Smith lo plantea, la especificación de las intenciones es un proceso dinámico, que se realiza a través de la interacción entre nuestro pensamiento y el discurso que va apareciendo ante nosotros.

Pero para que haya intención frente a la toma de apuntes, el saber que se presenta debe tener vida en sí mismo para que así el estudiante no se quede en el trabajo algorítmico y logre así construir significados que le permitan realizar la toma de apuntes con sentido aunque, parafraseando a Benveniste (1971), citado por Valdemoros y Ruiz (2006, p. 302), no haya una secuencia cronológica o de procedencia en el desarrollo, entre sentido y significado ya que son distintos componentes que se complementan.

Por ende, es así como en esta Investigación se pretendía que el estudiante empezara por darle una intención a la toma de apuntes para que de esta manera los inyectara de autonomía y los convirtiera en un instrumento de aprendizaje autónomo, dirigido y personal que le comunicara algo al volver a él y al mismo tiempo me comunicara algo a mí como profesora sobre el proceso de construcción matemático que se pretendía al mismo tiempo que reflejara la evolución de su aprendizaje y razonamiento. A este "comunicar algo" se refiere Atienza (1992, p. 25) así:

> Se aprende a comunicar haciendo uso real de la lengua, en una situación concreta, contextualizada. Trasladada esta premisa al aula, el estudiante puede aprender a escribir un texto eficaz si éste es percibido por él como necesario, como resultado de una situación real de escritura. Quiere esto decir que la didáctica del texto escrito implica un planteamiento retórico del mismo, donde se tenga en cuenta la relación entre el productor, el destinatario del texto y la intención que mueve a escribir el texto.

Y ese objetivo se alcanzaría aprovechando sus roles como tales: como estudiantes que construyen <y demuestran> los contenidos que van aprendiendo mediante el lenguaje. A este respecto Halté (1988) apud Atienza (2006, p. 26) afirma que "el *discurso académico*, unido crucialmente a la comprensión y al aprendizaje, está de forma omnipresente en las aulas, ya sea en las explicaciones del profesor, en los manuales de texto, en los apuntes y esquemas de estudio de los estudiantes o en los trabajos académicos realizados por éstos para certificar su saber, donde tienen que transmitir, parafrasear o reformular las explicaciones de otro o tienen que construir explicaciones nuevas, al menos para ellos".

Tomando consciencia de esa omnipresencia, y para alcanzar el objetivo secundario planteado en esta Investigación fue necesario diseñar una metodología de clase diferente que estuvo totalmente orientada por el material didáctico que preparé en torno al tema de proporcionalidad empezando por los precursores del razonamiento proporcional (razón y proporción) para así conducir a los estudiantes a la construcción de aquella.

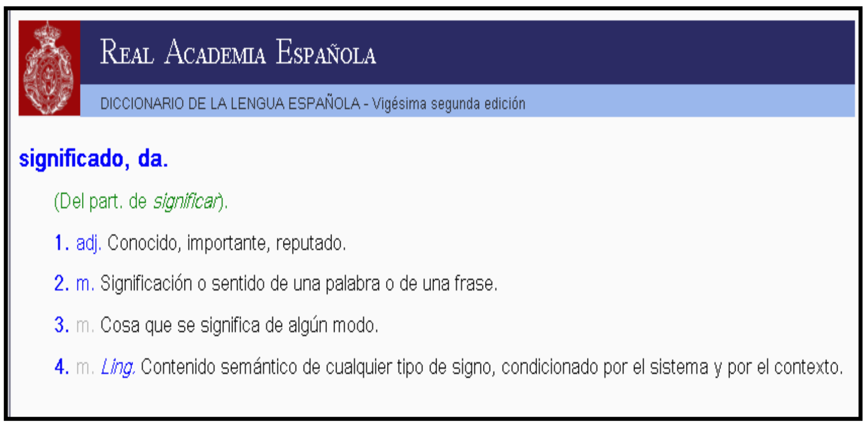
Además, en la construcción de dicho material me esforcé por crear un proceso de enseñanza acorde al contexto en el que se desenvolvían y convivían los estudiantes. Así, "el contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas", *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998, p. 36).

También, de manera gradual, les recreé los contenidos matemáticos a través de situaciones problemas ya que estas llevan a los estudiantes a que se sientan involucrados en la situación y por lo tanto se esfuercen por encontrar una solución o una serie de soluciones para la misma, además despertarían el interés y la motivación hacia el aprendizaje del tema.

Finalmente, serían las actividades presentadas en el material en mención –que más adelante detallaré– y la metodología de clase las que conducirían a los estudiantes a darle un vuelco a la toma de apuntes.

1.1.2. Sobre el sentido

Pues bien, para comprender mejor lo que se pretende en esta Investigación en cuanto a "sentido" se refiere, dedicaré este apartado a este concepto que descansa en la perspectiva socio-cultural y que en educación ha venido tomando fuerza pero que suele confundirse por su aproximación e interpretación vernácula con el "significado". Y será precisamente desde aquí de donde empezaré a clarificar y distinguir estos términos. Si nos remitimos al Diccionario de la Real Academia Española (RAE) [1] encontraremos las siguientes definiciones para cada una de las *palabras* que nos competen:



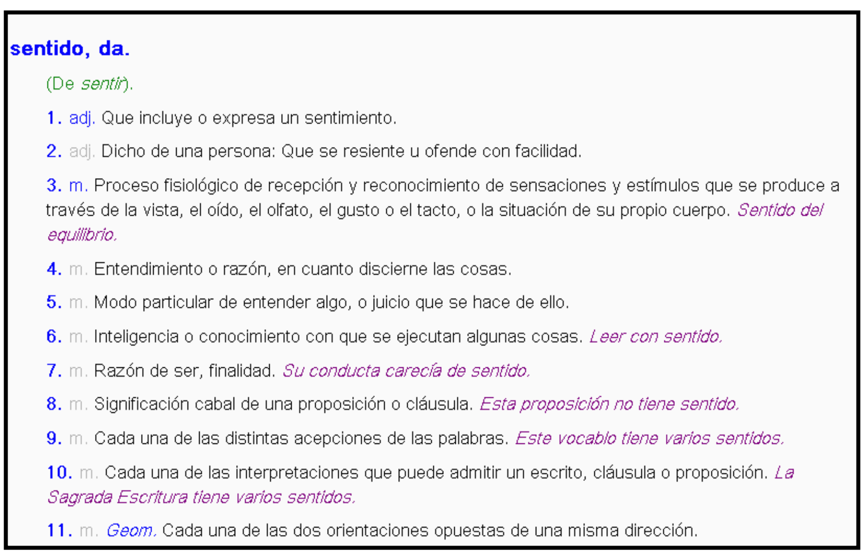
REAL ACADEMIA ESPAÑOLA

DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA - Vigésima segunda edición

significado, da.

(Del part. de *significar*).

1. adj. Conocido, importante, reputado.
2. m. Significación o sentido de una palabra o de una frase.
3. m. Cosa que se significa de algún modo.
4. m. *Ling.* Contenido semántico de cualquier tipo de signo, condicionado por el sistema y por el contexto.



sentido, da.

(De *sentir*).

1. adj. Que incluye o expresa un sentimiento.
2. adj. Dicho de una persona: Que se resiente u ofende con facilidad.
3. m. Proceso fisiológico de recepción y reconocimiento de sensaciones y estímulos que se produce a través de la vista, el oído, el olfato, el gusto o el tacto, o la situación de su propio cuerpo. *Sentido del equilibrio.*
4. m. Entendimiento o razón, en cuanto discierne las cosas.
5. m. Modo particular de entender algo, o juicio que se hace de ello.
6. m. Inteligencia o conocimiento con que se ejecutan algunas cosas. *Leer con sentido.*
7. m. Razón de ser, finalidad. *Su conducta carecía de sentido.*
8. m. Significación cabal de una proposición o cláusula. *Esta proposición no tiene sentido.*
9. m. Cada una de las distintas acepciones de las palabras. *Este vocablo tiene varios sentidos.*
10. m. Cada una de las interpretaciones que puede admitir un escrito, cláusula o proposición. *La Sagrada Escritura tiene varios sentidos.*
11. m. *Geom.* Cada una de las dos orientaciones opuestas de una misma dirección.

Figuras 1. El "significado" y el "sentido" según RAE.

[1] Dicha consulta hace referencia al destino on-line del Diccionario de la RAE: http://www.rae.es/

Como podemos ver, estas dos palabras tienen varios *significados* y a su vez la una recurre a la otra para definirse (ver definiciones **2** de la figura superior y **8** de la figura inferior), por tal razón es necesario precisar, delimitar y diferenciar los conceptos para el contexto que nos compete: Educación. Para ello, partiré de la premisa de que el "sentido" y el "significado" se relacionan con el lenguaje, el pensamiento y el sujeto.

Entonces, la clave para comprender estos dos conceptos está en la distinción proporcionada por Serrano (2000, p. 46) quien a su vez recurre a Vygostky (1977) para afirmar que "el primero alude al sinnúmero de connotaciones que una palabra posee para el individuo, de acuerdo con su repertorio de experiencias, esto hace al sentido inestable, dinámico y cambiante. En cambio, el significado representa su zona más estable pues alude a su uso convencional".

De esta distinción se desprende que el sentido, en virtud de ser una construcción en nuestra conciencia, es casi ilimitado puesto que cambia en las diferentes mentes y situaciones, mientras que el significado es ese punto fijo, invariable, que se mantiene estable durante todos los cambios del sentido en varios contextos.

Pues bien, "Vygostky, según Luria (1984) citado por Serrano (2000, p. 45), formuló la tesis de que el pensamiento no se encarna sino que se realiza en la palabra, de que el pensamiento se va produciendo con ayuda de la palabra. De esta forma, según este autor, el problema fundamental de la interrelación entre el pensamiento y el lenguaje es el problema del paso del *sentido subjetivo no formulado* aún verbalmente y comprensible sólo para el propio sujeto, a un sistema de *significados verbalmente formulados y comprensibles* para cualquier interlocutor, sistema que se forma en la alocución verbal".

De esta manera, a través del proceso de aprendizaje que vivirían los estudiantes se pretendía tomar como punto de partida el *sentido subjetivo no formulado* para alcanzar *significados verbalmente formulados y comprensibles* alrededor de la proporcionalidad y así terminar *escribiendo para demostrar lo aprendido* lo cual, se esperaba, fuera incidentemente determinante en la toma de apuntes.

De tal modo, y finalmente, en este punto se engrana el propósito de escritura que se pretendía el estudiante realizará con sus apuntes al *escribir para aprender* partiendo de su *sentido* para así alcanzar la *significación matemática* que se planteó a través de un proceso de revisión y depuración continuo en el que participó tanto el estudiante, el profesor y hasta el mismo contexto en el que se ubicaron las experiencias de aprendizaje.

Ahora, invito al lector a pasar al siguiente apartado en el que trataremos el concepto matemático de esta Investigación:

1.1.3. Sobre la proporcionalidad

1.1.3.1. Su *construcción*

Continuando con lo anterior, asumo para esta Investigación como construcción satisfactoria del concepto de proporcionalidad a una aproximación al significado de este basto concepto matemático dado que no se puede pretender que en tan corto tiempo los estudiantes realizaran una construcción completa y rigurosa del concepto dado que

> […] el conocimiento matemático no se genera de modo rápido y acabado, todo proceso de aprendizaje es lento y nunca está totalmente concluido […]; la red de relaciones entre conceptos y estructuras matemáticas es prácticamente inagotable, permite generar continuamente nuevos procedimientos y algoritmos; no es posible pues, dar por terminado el dominio de ningún concepto en un breve período de tiempo, ni pretender que se logre autónomamente una conexión significativa entre un conocimiento nuevo y aquellos conocimientos previamente establecidos (MEN, 1998, p. 31).

Con lo anterior, no pretendo –ni mucho menos– salvaguardar mi responsabilidad docente sobre la tarea matemática que me correspondía. Sencillamente pretendo aterrizar el término “construcción” ya que su connotación para este Trabajo no es precisamente “algo acabado”. De igual modo, está concepción de construcción del conocimiento está –en mi caso– asociada al pensamiento de Freire (2004) quien defiende la premisa de que

> […] nuestra capacidad de aprender, de donde viene la de enseñar, sugiere, o, más que eso, implica nuestra habilidad de *aprehender* la sustantividad del objeto aprendido. La memorización mecánica del perfil del objeto no es un verdadero aprendizaje del objeto o del contenido. En este caso, el aprendiz funciona mucho más como *paciente* de la transferencia del objeto o del contenido que como sujeto crítico, epistemológicamente curioso, que construye el conocimiento del objeto o participa de su construcción. Es precisamente gracias a esta habilidad de *aprehender* la sustantividad del objeto como nos es posible reconstruir un mal aprendizaje, en el cual el aprendiz fue un simple paciente de la transferencia del conocimiento hecha por el educador. Mujeres y hombres, somos los únicos seres que, social e históricamente, llegamos a ser capaces de *aprehender.* Por eso, somos los únicos para quienes *aprender* es una aventura creadora, algo, por eso mismo, mucho más rico que simplemente repetir la *lección dada.* Para nosotros aprender es *construir,* reconstruir, *comprobar para cambiar,* lo que no se hace sin apertura al riesgo y a la aventura del espíritu.

Consecuentemente, considero, que al posibilitarle al estudiante esa aprehensión de la sustantividad del objeto es que se abre paso al surgimiento del *sentido* dentro del proceso educativo ya que es desde esta plataforma que el estudiante da paso a la comprensión de lo que aprende razonando con el objeto matemático que se integra a sus saberes.

Ahora, tomar apuntes significativamente y con sentido alrededor de la proporcionalidad debería resultar una tarea *sencilla* para el estudiante ya que hay una relación estrecha entre cultura y proporcionalidad pues podemos reconocer el uso implícito y a veces impreciso que de la proporcionalidad hacen los individuos en diversas situaciones de la vida. No obstante, si nos detenemos a observar detenidamente, algunas de esas situaciones se manejan con la precisión algorítmica de la aritmética comercial en las versiones de proporcionalidad simple: “Una mara vale doscientos pesos; para comprar doce, necesito dos mil cuatrocientos pesos”. Como bien notaría el lector, sin darse cuenta en este ejemplo está manejando relaciones multiplicativas que esconden relaciones proporcionales.

Sin embargo, cabe notar como lo afirman Obando y Vásquez (2007, p. 1) que “nuestro currículo de matemáticas se caracteriza por tener un alto grado de desintegración entre los diferentes ejes temáticos que lo componen” convirtiéndose este factor, considero yo, en *uno* de los factores que empobrecen la formación del pensamiento matemático de nuestros estudiantes lo que contribuye –independientemente del grado con el que esto suceda– a que el estudiante se forme como un individuo incapaz de razonar el mundo a través de los objetos matemáticos que se dan en clase pues la comprensión de ellos fue mínima.

Por tal razón, en esta Investigación se escatimaron esfuerzos para integrar diferentes elementos para propiciar la construcción del concepto de proporcionalidad *en los estudiantes de séptimo grado del Colegio Príncipe San Carlos (Sede B - Colorados)* reconociendo, como muchos colegas lo han señalado, que el desarrollo de este concepto no es fácil, sin embargo se puede alcanzar su comprensión aplicando una enseñanza activa que utilice material apropiado, lo cual ayuda al estudiante en la formulación de preguntas, siendo esto significativamente favorable para el desarrollo del pensamiento proporcional.

En suma, a través del desarrollo de este apartado se ha enfatizado el uso de los términos "razonamiento" y "comprensión" alrededor de la proporcionalidad. Dado que estos son importantes para esta Investigación dedicaré el siguiente espacio para delimitarlos.

1.1.3.2. Su *comprensión* y el *razonamiento* proporcionalidad

Ya que estamos en el terreno de lo cognitivo, precisaré sobre el significado de la comprensión de la proporcionalidad. Para ello me apoyaré en la perspectiva socio-cultural que ofrecen García y Serrano (1999, pp. 29-32) ya que para efectos de este Proyecto esta presenta la fundamentación teórica necesaria y suficiente; veamos:

> Nos apoyamos en los siguientes supuestos de la teoría de la comprensión para la educación matemática que han elaborado investigadores como Sierpinska. En primer lugar, consideramos que todo acto de compresión está basado en la construcción de una representación mental. En segundo lugar, asumimos también que las representaciones mentales deben ser relacionadas entre sí. En tercer lugar, estas representaciones pueden ser de diversos tipos, icónicas, verbales, etc.. En cuarto lugar, compartimos la propuesta de relacionar la comprensión con la significación.
>
> […] La comprensión está determinada por actos como la identificación, discriminación, generalización y síntesis. Con ello la comprensión determina una distinción sobre lo que denomina el argot educativo conocimiento sobre la proporcionalidad; éste, es concebido como saber la información sobre los hechos, notaciones, términos o definiciones de manera inconexa y aislada sobre la proporcionalidad.

> […] Lo anterior, sugiere que lo que interesa no es tanto la representación mental en sí misma sino la acción que desarrolla el sujeto apoyada en dicha representación.
>
> Para identificar el papel del razonamiento en la comprensión, es necesario partir de las propuestas que investigadores como Rico y Sierpinska han elaborado sobre el razonamiento matemático y confrontarla como propuestas curriculares como la de los Estándares del NCTM[2] y los Lineamientos Curriculares, área de matemáticas del MEN. Por tal razón vamos a describir a continuación de manera general cada una de estas propuestas:
>
> 1. Rico (1995) identifica al razonamiento con la capacidad de establecer nuevas relaciones entre conceptos, estas relaciones se expresan en argumentos. [...] En el trabajo con los estudiantes de Educación Obligatoria, un razonamiento es todo un argumento suficientemente fundado que dé razón o justifique una propiedad.
>
> 2. Sierpinska (1994) identifica al razonamiento como una red que hace parte de los actos de comprensión; cada uno de los actos de comprensión esta acompañado del razonamiento […].
>
> 3. Los estándares curriculares del NCTM […] de manera general […] orientan al profesor para desarrollar procesos de razonamiento en los estudiantes a través de los espacios donde la explicación, la justificación y la conjetura son las herramientas que posibilitan su desarrollo […].
>
> 4. Por su parte en los *Lineamientos Curricurales de Matemáticas* al razonamiento matemático se le considera también como uno de los ejes curriculares asociado con la comunicación y la resolución de problemas. Se le entiende como los actos en los cuales el niño justifica, conjetura, explica y predice entre otros actos.
>
> La conclusión que se deriva de estas propuestas permite señalar que el razonamiento es parte inherente de la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, ligado a situaciones de aprendizaje que impliquen procesos de elaboración de conjeturas, de explicaciones, etc., es decir inmerso en procesos comunicativos.

Por lo tanto, la comprensión no depende exclusivamente del encuentro con el mundo físico sino de las interacciones entre personas en relación con el mundo, un mundo que no es simplemente físico, sino cultural y significante.

Obando, Vanegas y Vásquez (2007, p. 123) caracterizan, desde Lesh (1988), el pensamiento proporcional evocando de la siguiente manera al razonamiento: “El desarrollo del pensamiento proporcional, puede caracterizarse como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación y comparaciones múltiples, y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente distintos tipos de información”.

---

[2] *National Council of Teachers of Mathematics.*

En consideración a esto, Obando y Vásquez (2007, pp. 1-2) consideran que “el razonamiento proporcional está estrictamente relacionado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de razonamiento cualitativo como cuantitativo. Valdemoros y Ruiz (2006, p. 301) afirman que “lo cualitativo emerge antes que lo cuantitativo” convirtiéndose el primero en la base del aprendizaje de los conceptos formales.

Es importante aclarar, apoyándome en Valdemoros y Ruiz (2006, p. 301) que “el razonamiento proporcional *cualitativo* atañe al que se origina desde la percepción mientras que el *cuantitativo* hace referencia a cuando el niño puede hacer uso de las razones y proporciones y maneja indistintamente razones internas y externas para enfrentar problemas matemáticos”.

Finalmente, teniendo en cuenta las apreciaciones anteriores y tantas otras de otros autores sobre proporcionalidad fue que realicé el material didáctico ya varias veces mencionado y que sin más preámbulo presento a continuación paralelamente con la metodología de clase aplicada. Hago la salvedad de que no ahondo más en proporcionalidad para evitar momentos repetitivos dado que lo concerniente a esta se tendrá en cuenta para argumentar el diseño de las actividades y el análisis del razonamiento proporcional de los estudiantes.

1.2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

"La clase magistral es la mejor manera de que las ideas pasen del apunte del profesor y al apunte del alumno sin pasar por la cabeza de ninguno de ellos".
Florencio Escardó

Como antes lo mencioné, fue desde mi práctica docente y la reflexión que surgió mi inconformidad frente a los apuntes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, inconformidad que se transformó en preguntas como: *¿En dónde radica el problema de la toma de apuntes insulsa y desmedida como registro? ¿Cómo podría superarse esa problemática? ¿Desde dónde debo atacarla?* Así después de la observación y la reflexión llegué a conjeturar que la metodología de enseñanza influía de alguna manera en la toma de apuntes dado que si se dictaba los estudiantes tomaban apuntes, de lo contrario no lo hacían.

Con preguntas reflexivas de aquel tipo y con la hipótesis planteada, me di a la tarea de revisar si la inconformidad era solo mía o si por el contrario había estudios alrededor del objeto de mis inquietudes.

La claridad de este hecho surgió de la revisión bibliográfica hecha a la investigación de Martínez, Navarro y Zamora (2006) en el cual se realizó un paralelo comparativo de la tarea de toma de apuntes en dos sistemas educativos diferentes mostrando que la metodología de enseñanza del profesor moldea, en mayor o menor grado, la manera como el estudiante toma apuntes pues dependiendo de esta se crea o no la necesidad de regular dicha tarea dándole, por ende, sentido a la toma de apuntes y encontrando en ella una estrategia de aprendizaje.

De esta manera, teniendo ya un antecedente teórico era claro que debía diseñar una metodología de enseñanza apropiada en la cual tuviera protagonismo la toma de apuntes como actividad autónoma y autodirigida por el estudiante alrededor de proporcionalidad. Para que, así, dichos apuntes sirvieran de objeto de revisión y consecución del proceso de aprendizaje.

1.2.1. El contexto de enseñanza y sus antecedentes

Pues bien, como antes había mencionado, el lugar donde llevaría acabo el trabajo de campo sería en el Colegio Príncipe San Carlos – Sede B, Colorados. Este Colegio de carácter privado ubicado al norte de la ciudad, tiene el compromiso de educar niños en edad pre-escolar, primaria y secundaria de estratos socio-económicos 1, 2 e incluso niños de familias que se declaran desplazadas.

El grupo de la investigación fue séptimo; un grupo de 29 estudiantes (14 niños y 15 niñas); iniciamos las actividades propias del Proyecto el 6 de octubre y culminaron el 30 de noviembre de 2007, trabajando cuatro horas semanales repartidas en tres sesiones. Las entrevistas con los estudiantes se realizaron en horario extraclase para respetar el tiempo de aprendizaje y enseñanza en el salón de clases.

Por otro lado, una vez clarificado mi proyecto de investigación, fue necesario realizar un seguimiento sobre la metodología de enseñanza que se venía implementando con el grupo y distinguir cuál era el papel de los apuntes en esta. Antes de ingresar como profesora titular, la metodología que se manejaba partía de la clase magistral dando al dictado un espacio amplio dentro del tiempo de enseñanza además de la aplicación de algunos talleres que favorecían la ejercitación de algoritmos; se daba espacio a la socialización y si era necesario se volvía a la parte expositiva para reforzar conceptos para al final evaluar. De esta manera los apuntes mayoritariamente estaban constituidos por el dictado del profesor y la solución de los talleres propuestos.

A propósito de la toma de apuntes en diferentes contextos educativos, veamos lo que Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 3) refieren al respecto:

> Los modelos de enseñanza son quienes mejor definen las situaciones de aula. Uno de estos modelos, fuertemente implantado en la docencia, es el expositivo y la convicción y necesidad por parte de los docentes de proporcionales a los alumnos un conjunto de conocimientos (contenidos) actualizados de la materia que se imparte utilizando para ello los llamados apuntes. El significado de los mismos y la manera y forma de llevarlos a cabo es distinto en los diferentes niveles educativos, así en Primaria, la mayoría de los profesores al dictar la clase, escriben el esquema en la pizarra (Pozo, 1999, p. 45). Esto

> tranquiliza a los inquietos que temen no captarlo todo y estimula a los perezosos, cuya inactividad ya no puede pasar desapercibida.
>
> En Secundaria, la cosa cambia. Los profesores ya no dictan, "dan" su clase y los alumnos la siguen como pueden. Algunos rápidamente, desbordados, no toman más que algunas palabras, un poco por azar, confiando en su memoria y se dan cuenta en un instante que no recuerdan nada. Otros se esfuerzan por anotarlo todo, emborronan decenas de hojas y luego se pasan mucho tiempo descifrándolas, cuando lo consiguen.

Fue así que en el tiempo que dediqué a observar la relación ternaria de los estudiantes-apuntes-conocimiento –todos ellos engranados por el aprendizaje– concluí, como antes lo dije, que los apuntes en su mayoría eran el instrumento que el profesor usaba para dejar allí consignado lo que el estudiante *debía saber*. Así, "al finalizar una clase los alumnos no recuerdan, y lo que es más importante, no comprenden la mayor parte de las ideas que se han impartido pero eso no suele importar cuando se *tiene todo apuntado*" (ibíd.).

Entonces surgió la pregunta: "¿Cómo hago para cambiar eso?" Que a su vez me llevó a esta: "¿De qué manera diseño la metodología de tal forma que logre sacar a los estudiantes de ese perfil anotador tan marcado y a la vez tan válido para ellos?".

1.2.2. La metodología de enseñanza

Algo que sí tenía claro al momento de pensar en la metodología de enseñanza era que debía darle protagonismo al apunte fuera de su caracterización de registro de información que yo como profesora estructuraría. Pues bien, la metodología de enseñanza básicamente se sustentó en los siguientes pilares:

1. Mi papel no sería el de transferir el conocimiento, es decir, el dictado quedaba excluido del espacio pedagógico.

2. El tablero abandonaría su papel de elemento copista en el cual se expondría el discurso académico que me correspondía para que el estudiante lo fotocopiara en su apunte. Al contrario, sería el espacio sobre el cual plasmaríamos situaciones que nos permitirán discutir y negociar posiciones y significados.

3. Por ende, el salón de clase sería un espacio para propiciar la discusión y el análisis de situaciones que darían paso a los conceptos matemáticos necesarios para llegar a la proporcionalidad.

Como se podrá inferir, estos tres elementos de entrada desestabilizarían a los estudiantes dados los antecedentes metodológicos. Y dicha inferencia es cierta. Sin embargo, debo decir que esto venía ocurriendo paulatinamente desde el momento en el que inicié mi labor en el Colegio –eso sí– puntualizando solo en los dos últimos ítems pues el dictado era parte de mi práctica pedagógica. Pero para efectos de la Investigación el primer ítem fue determinante e incluso arriesgado para el aprendizaje del tema, no obstante también debo decir que paulatinamente –clase tras clase, semanas antes como solución inmediata al problema de la toma de apuntes indiscriminadamente impersonal– les sugerí sigilosamente a mis estudiantes –a todos mis estudiantes– que se esforzaran por apuntar más de lo que se dictaba, que prestaran atención a cuáles cosas el profesor le daba mayor énfasis en su explicación, que *tradujeran* ciertos cambios de tono y ciertas *insistencias* en el discurso, que tomaran nota de las cosas importantes que se decían y que no entendían, etc. Todo ello en aras de aportarles estrategias para su aprendizaje y preparar el camino para las actividades propias de la Investigación.

De esta manera algunos estudiantes copistas –pocos realmente– tomaron en cuenta estas sugerencias y mostraron cambios pequeños pero significativos en la toma de apuntes aunque para otros resultaron un acabose –incluso para mí– porque cuando explicaba me detenían: “Profe, espere; dícteme lo que acabó de decir”.

4. Sin embargo, para subsanar el vacío del dictado, proporcionaría a los estudiantes material didáctico inmerso en situaciones problemas que los llevaría a sentir la *necesidad de escribir* y al mismo tiempo los llevaría a esforzarse por hacer de esa escritura una herramienta en pro de su aprendizaje al tomar consciencia de que sino escribían lo que entendía –o no entendían– no tendría un punto de referencia para continuar en su proceso de aprendizaje.

De esta manera el estudiante elaboraría los apuntes de manera autónoma, autodirigida, y personal desarrollando y mejorando al mismo tiempo procesos de autorregulación y metacognición a partir del ejercicio de la escritura que finalmente favorecería la significación del concepto de proporcionalidad y por ende el razonamiento y la comprensión de este. Así, Valery (2000, p. 39) citando los trabajos de Rosenblatt, afirma que

> […] el texto nos puede llevar a cuestionar lo que pensamos, a aclarar y organizar ese pensamiento. A medida que confrontamos nuestras ideas con el texto, cuando revisamos si lo escrito dice realmente lo que queríamos decir, se va construyendo el significado y así la escritura se convierte en un proceso de aprendizaje. […] La escritura se transforma en un proceso de aprendizaje, es decir, la escritura permite la elaboración y transformación de conocimientos.

Haciendo un alto, hasta aquí no habrá duda de que detrás de cualquier modelo de enseñanza de las matemáticas hay una filosofía de la matemática. Esto es innegable. Cualquier práctica en un campo profesional necesariamente se realiza desde alguna perspectiva en relación con los objetos centrales en ese campo. Del mismo modo, la enseñanza en sí misma está impregnada de otros aspectos que inciden en la enseñanza del currículo de matemáticas como por ejemplo, las creencias y las concepciones[3] del profesor. Así, .la actividad docente se lleva a cabo dentro de un sistema educativo que tiene metas y objetivos para el aprendizaje de sus estudiantes.

De lo anterior se desprende que el bagaje de creencias y concepciones del profesor es el que, de una u otra forma, determina diferentes estilos de enseñanza. Por tal razón, considero prudente hacer explícito en este Trabajo que una de las razones que me llevó a centrarme en los apuntes fue mi concepción de que la escritura es excesivamente importante en el proceso de enseñanza y, ante todo, en el de aprendizaje.

---

[3] Un panorama general del campo de los estudios sobre concepciones, creencias y conocimiento profesional se puede obtener de los trabajos de Thompson A. G., Llinares S., Flores P. entre otros quienes reportan creencias y concepciones de los profesores acerca de las matemáticas y su enseñanza.

Es decir, dentro de las concepciones de la enseñanza de la investigadora se encuentra fuertemente arraigada la convicción de que todos los estudiantes deben desarrollar habilidades lecto-escrituras ya que el pensamiento se desarrolla a través del lenguaje, tal cual se puede corroborar en Valery (2000), evoluciona, se organiza y sistematiza además de que se desarrollan operadores mentales como el análisis, la síntesis, la abstracción, entre otros. Además, concibo que la escritura se produzca debido al hecho de comprender que es una actividad intelectual que implica atribuir significado a la información nueva y relacionarla con la ya existente. Comprensión que se asumía como reto a lograr en los estudiantes a través del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Así, con esto dejo explícita una de las concepciones que inciden en este Proyecto, intentado con ello ofrecer al lector una visión más clara de la manera que yo profesora-investigadora entiendo y llevo a cabo mi práctica docente y que es, en últimas, el elemento que se le da un sentido diferente al apunte dentro de la metodología de enseñanza; sentido que proviene de mis concepciones.

5. Finalmente, dentro de la metodología de enseñanza tendría un importantísimo papel mi intervención continua en el proceso de aprendizaje a través del diálogo y el seguimiento individual de los estudiantes –más precisamente al apunte de los estudiantes– ya que este estaría totalmente abierto al *sentido* que le dieran a los elementos presentados en clase. Además, sin este cerco sería difícil alcanzar siquiera una aproximación del significado del concepto.

Dada su importancia e incidencia en este Proyecto, y sin más preámbulo, en el siguiente capítulo presento los recursos didácticos que hacen parte de –y que protagonizaron– la metodología de enseñanza.

CAPÍTULO 2

Recursos Didácticos del Proyecto

INTRODUCCIÓN

En las distintas propuestas de reforma del currículo matemático de diferentes comunidades se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. “Uno de los argumentos en que se apoyan estas orientaciones es que se supone que los materiales manipulativos ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real” (Godino, Batanero y Font, 2000, p. 123).

De esta manera, paulatinamente en la educación matemática los recursos y materiales didácticos hablan de su incidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que facilitan este proceso y despierta el interés de los estudiantes al igual que los conduce y orienta hacia el objetivo de aprendizaje.

Son muchos los posibles recursos didácticos que podemos usar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dentro de ellos están los propios libros de texto, cuadernos de ejercicios, pizarra, lápiz, papel e instrumentos de dibujo o la calculadora que usamos habitualmente en clase son recursos didácticos, puesto que ayudan al estudiante en su aprendizaje y al profesor en la enseñanza. Recursos didácticos más sofisticados incluyen los documentales grabados en vídeo sobre aspectos concretos de las matemáticas, los programas didácticos de ordenador y recientemente los recursos en Internet.

Según Godino, Batanero y Font (ibíd., p. 123), "para comprender mejor la importancia de los recursos o materiales didácticos, se usan diferentes clasificaciones de los mismos. Una de ella consiste en diferenciar dos tipos de recursos:

- *Ayudas al estudio*: recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.
- *Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático*: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático".

El material didáctico propuesto para este Proyecto cabe dentro de las dos clasificaciones dado que para dar inicio al proceso de aprendizaje los estudiantes y yo trabajamos con material manipulativo concreto, para ser exacta con las Regletas de Cuisenaire. Y, por otro lado, el material que diseñé cabe dentro de las dos clasificaciones ya que en él presenté situaciones problema para ser abordadas por los estudiantes y al mismo tiempo problemas recreados en escenarios y contextos didácticos; todo esto estructurado en tres compendios que mis estudiantes llamaron *cartillas* –nombre que sin ningún problema acepté y adapté y con el cual me referiré de aquí en adelante al hablar del material didáctico propio de este Proyecto–.

Es así que por la incidencia de las cartillas como recurso didáctico para el proceso de enseñanza-aprendizaje y de la metodología de enseñanza en esta Investigación, preferí estructurar un capítulo exclusivo para presentarlos paralelamente con la fundamentación teórica sobre proporcionalidad que me ofrecieron para validar su estructuración y contenido autores como Godino y Batanero (2002), Obando, Vanegas y Vásquez (2007), Guacaneme (2001), Valdemoros y Ruiz (2006), Obando y Vásquez (2007) y Fernández (2001); además los autores Mojica y Buitrago (2007), Baena y Vega (2007) y Carreño (2007) me ofrecieron orientación didáctica y claridad al momento de empezar el camino del diseño del material.

De otro lado, progresivamente mostraré los propósitos con los cuales se escogieron cada una de las actividades y situaciones problemas que propiciarían los conflictos cognitivos que llevarían a los estudiantes a establecer generalidades, cuestionar la efectividad de sus procedimientos, solicitar explicaciones, realizar consultas en textos todo ello en aras de negociar y comprender significados, contrastar y discutir los puntos de vista propios y de los otros para así construir y desarrollar el conocimiento conceptual de la proporcionalidad.

Pero antes de abordar los asuntos planteados será necesario hacer una revisión teórica de: “situaciones problemas” y “resolución de problemas” ya que son la plataforma del material diseñado y de la metodología de enseñanza misma.

2.1. "SITUACIONES PROBLEMAS" Y "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS": PREDECESORES DEL DISEÑO

> "Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan. Estas intervenciones generan preguntas y situaciones interesantes que por estar relacionadas con su entorno son relevantes para el estudiante y le dan sentido a las matemáticas. Así es como del contexto amplio se generan *situaciones problemáticas*", *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998, p. 36).

Pues bien, con antes lo había mencionado, para la metodología de enseñanza era prioritario encontrar un camino preciso para motivar a mis estudiantes a abandonar la forma rudimentaria como llevaban sus apuntes. Como respuesta a ello encontré las situaciones problema y la resolución de problemas tal como lo proponen los *Lineamientos Curriculares* (ibídem) ya que estas herramientas transformarían el salón de clases en un espacio donde primaría la autonomía de los estudiantes orientada por los saberes que les permitiría avanzar en el proceso de aprendizaje o incluso *frenarse* espontáneamente para dotarse de otros saberes que les permitieran consolidar su proceso y facilitar la construcción del conocimiento matemático.

> Pero para que una situación cumpla con el papel de dar lugar a la actividad matemática del alumno, ésta debe ser asumida por él, en lo que Brousseau llamó la *devolución de la situación*. La devolución de la situación es, pues, una parte fundamental del trabajo, ya que a través de ella se logra que el alumno asuma su papel y, por tanto, se enfrente al trabajo que se le presenta de manera autónoma y no como una exigencia externa motivada por el capricho de un adulto (el docente). En otras palabras, un paso fundamental está mediado por la capacidad del maestro en lograr que el alumno haga suyo el o los problemas que se le presentan, transfiriendo así la responsabilidad hacia el alumno. Esta transferencia es la garantía de lograr que él sea consciente del trabajo que realiza y, por tanto, su actividad matemática sea significativa. Esta actividad matemática debe fundamentarse sobre lo que ya sabe, para lograr el aprendizaje de nuevos conceptos (Obando y Múnera, 2003, p. 12).

Por ende, la actividad de resolver problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. "No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas" (Godino, Batanero y Font, 2000, p. 62), y una fuente de motivación para los estudiantes ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Además "se constituyen como una justificación para aprender –en el caso de los estudiantes– matemáticas y se muestran como una actividad amena y recreativa ya que las matemáticas pueden ser divertidas y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos" (Vilanova, Rocerau, Valdez, Oliver, et al., 2001, p. 9).

De esta manera en el diseño de las cartillas las situaciones problema tuvieron el papel protagónico ya que

> Los recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las situaciones problema más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos. Dicho de otra manera, cada conjunto de recursos, puestos en escena a través de una situación de aprendizaje significativo y comprensivo, permite recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos que se proponen para que los estudiantes los aprendan y ejerciten y, así, esa situación ayuda a profundizar y consolidar los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático. En este sentido, a través de las situaciones problema, los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos, (*Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*, MEN, 2006, p. 75).

Así, al emplear problemas relacionados con el contexto o el entorno en el cual ellos <los estudiantes> se desenvolvían, los llevaría a que se sintieran involucrados en la situación y por lo tanto se esforzarían por encontrar una solución o una serie de soluciones para la misma, con esto se lograría un mejor aprendizaje de los conceptos que se encontraban inmersos en cada situación problema y además los obligaría a profundizar en otros que quizá no conocerían de no ser por los sucesos involucrados en la situación problema.

Obando y Múnera (2003, p. 1) ofrecen una aproximación teórica de las situaciones problemas tal cual se precisa a continuación:

> Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, esta debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación.
>
> Si bien es cierto que Vigostky plantea que la presencia de un problema no es el único factor que interviene en la formación de los conceptos, también lo es que, para él, el problema es la base fundamental que desencadena dicho proceso. Desde su perspectiva, el problema desencadena una serie de procesos psicológicos que llevan a la formación de símbolos y palabras sobre las cuales se elabora el concepto. Por lo tanto, la situación problema, además de permitir el establecimiento de relaciones, asociaciones, inducciones, deducciones, representaciones, generalizaciones, etc., propicia niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático, elementos básicos en la construcción de conceptos matemáticos.

Además, aceptan que

> Las situaciones problema pueden asumirse como un instrumento de enseñanza y aprendizaje que propicia niveles de conceptualización y simbolización de manera progresiva hacia la construcción de conocimientos matemáticos (ibídem, p. 5).

Respecto a situaciones problemas existen diferentes concepciones, para esta investigación se tuvo en cuenta los puntos de vista de Moreno y Waldegg, citados por Obando y Múnera (ibídem, p. 1), quienes escriben que:

> […] La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe tener las siguientes características: (a) Debe involucrar implícitamente los conceptos que se va a aprender. (b) Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él. (c) Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.

De aquí la importancia de que el concepto este implícito en cada situación, con el fin de que esto le sirva al estudiante para reforzar y pensar sobre el concepto a tratar, y lo lleve a preguntarse cada vez más del por qué de las cosas en la realidad.

Según Mojica y Buitrago (2007, p. 17), “de los antecedentes de las situaciones problema se conoce que su gran pionero fue Polya (2005) quien propone un modelo para la resolución de problemas comprendido en 4 fases: 1. Comprender el Problema. 2. Crear un Plan. 3. Ponerlo en práctica; y 4. Examinar lo hecho”.

Según Vilanova, Rocerau, et ali. (2001, p. 5), “los aspectos del conocimiento relevantes para el rendimiento en resolución de problemas incluyen: el conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, los hechos, las definiciones y los procedimientos algorítmicos, los procedimientos rutinarios, las competencias relevantes y el conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio (Schoenfeld, 1985). En suma, los hallazgos señalan la importancia y la influencia del conocimiento de base (también llamado “recursos”) en resolución de problemas matemáticos. Estos esquemas de conocimiento son el vocabulario y las bases para el rendimiento en situaciones rutinarias y no rutinarias de resolución”.

De otra parte, la lectura y la comprensión determinan en gran parte el éxito para resolver la situación problema. De esta manera, en esta Investigación, a partir del lenguaje escrito (la escritura) se pretendía incidir en los procesos mentales de los estudiantes exigiéndoles niveles de comprensión y análisis que desembocarían en la transformación de su lenguaje interno y por ende del pensamiento y razonamiento proporcional lo cual se pretendía se evidenciara en un estructuración personal de los apuntes ya que, según Valery (2000, p. 40), “la mediación semiótica facilitada por la escritura crea las funciones epistémica, planificadora, reguladora y comunicativa del lenguaje. De esta manera, la escritura en tanto que es una actividad conscientemente dirigida, nos ayuda a organizar nuestro pensamiento y a elaborar nuevos conocimientos”. Así se conceptualiza al proceso de resolución de problemas como “la actividad desplegada por el resolutor desde el momento en que le es presentada la situación problema hasta alcanzar *una* solución; dicha solución se concibe cuando el sujeto considera que la situación propuesta deja de ser problemática” (García y Serrano, 1999, p. 35) porque la ha dotado de sentido.

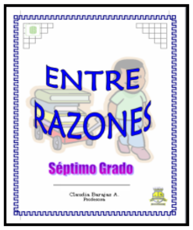
Finalmente, el lector concordará con Godino, Batanero y Font (2000, p. 22) en que “el dar un papel primordial a la resolución de problemas […] tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Sería cuanto menos contradictorio con la génesis histórica de las matemáticas, al igual que con sus aplicaciones actuales, presentar las matemáticas a los alumnos como algo cerrado, completo y alejado de la realidad”.

2.2. LAS *CARTILLAS*: DERROTERO DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Para realizar el material fue necesario realizar un ardua revisión bibliográfica sobre el tema de proporcionalidad ya que era la primera vez que lo enseñaría además de que, debo reconocer, no conocía cuán basta y rica es la proporcionalidad en sí misma, además de atender con ello a mi compromiso ético y social de enseñanza y reconocer, por ende, que para *hacer matemáticas* es preciso estudiar las *reglas matemáticas* para poder progresar en la materia y más aún para diseñar recursos didácticos.

Teniendo en cuenta que autores como Obando, Vanegas, y Vásquez (2007, p. 123) coinciden en que los "precedentes muestran una línea de continuidad desde la multiplicación hasta la proporcionalidad, la cual pasa por el desarrollo del pensamiento proporcional, que puede caracterizarse como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación y comparaciones múltiples, y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente distintos tipos de información (Lesh y otros 1988). Las situaciones que en general implican razonamiento proporcional son aquellas en las que se encuentran productos, razones, y proporciones, tales como: equivalencia entre fracciones, porcentajes, conversión de medidas, velocidades, razones de cambio, funciones, etc.".

Con esto establecí el punto de partida para la construcción del concepto de proporcionalidad: Razones (Cartilla 1: "Entre Razones"); seguidamente trataríamos con Proporciones (Cartilla 2: "De camino a la Proporcionalidad"); para finalmente orientar el trabajo hacia la resolución de situaciones problemas que fortalecerían y potenciarían el razonamiento proporcional de los estudiantes en la tarea cognitiva de la construcción del concepto de proporcionalidad (Cartilla 3: "En la cumbre de la Proporcionalidad").



2.2.1. Cartilla 1: “Entre Razones”

Esta Cartilla estaba constituida por cuatro bloques tal cual lo muestra la Tabla 1. Seguidamente, sustentaré sus objetivos recurriendo a las actividades propias de cada bloque para así tener mayor claridad sobre el derrotero didáctico trazado. Veamos.

BLOQUE		**OBJETIVOS Y FUNDAMENTACIÓN**
I	**TABLAS**	Fortalecer la construcción y comprensión del concepto de razón favoreciendo el ambiente de aprendizaje y el interés del estudiante a través de las ilustraciones ya que al mismo tiempo estas permitían interiorizar de manera significativa la notación de las razones.
II	**¿RAZÓN, FRACCIÓN O AMBAS?**	Encontrar y establecer distinciones significativas entre “razón” y “fracción” ya que en todos los casos “razón” no es sinónimo de “fracción”. Los autores Godino y Batanero (2002) consideran importante estudiar con detalle el uso que se hace del término “razón” ya que sus nociones se encuentran en las fracciones y los números racionales dado que dentro de los usos de la fracción figura el de razón, entendida de manera genérica, como la comparación entre una parte y otra parte.
III	**BITÁCORA**	Propiciar un espacio de análisis y escritura sobre lo trabajado en las actividades precedentes para así ir conceptualizando y negociando significados. De antemano, debo decir que este bloque les costó trabajo a los estudiantes dado requería de *saber leer*, cosa que no era una fortaleza en mis estudiantes. Por otro lado, otro de los objetivos subyacentes de este bloque era despertar y favorecer el desarrollo de procesos metacognitivos en los estudiantes pues entre las situaciones que se propusieron estaban el volver y revisar lo apuntado para encontrar errores, incoherencias y, por supuesto, mejorar la conceptualización que se estaba haciendo.
IV	**LUPA MATE-MÁTICA**	Mostrar e identificar el papel y el protagonismo de las razones de tal forma que los estudiantes reconocieran que el conocimiento que estaban aprendiendo tenía sustento en su contexto inmediato.

Tabla 1. Relación de los bloques didácticos de la cartilla “Entre Razones”.

BLOQUE I: Tablas

Como referí anteriormente, las actividades de este Bloque fueron adaptadas de la sugerencia dada por Godino y Batanero (2002) dado que los estudiantes usan razones pero de manera indistinta manejan razones internas y externas para enfrentar problemas matemáticos. Por tal razón, a través de estas actividades se pretendía ofrecer al estudiante los elementos para realizar tal distinción a partir de los conocimientos previos que se habían establecido alrededor de estos.

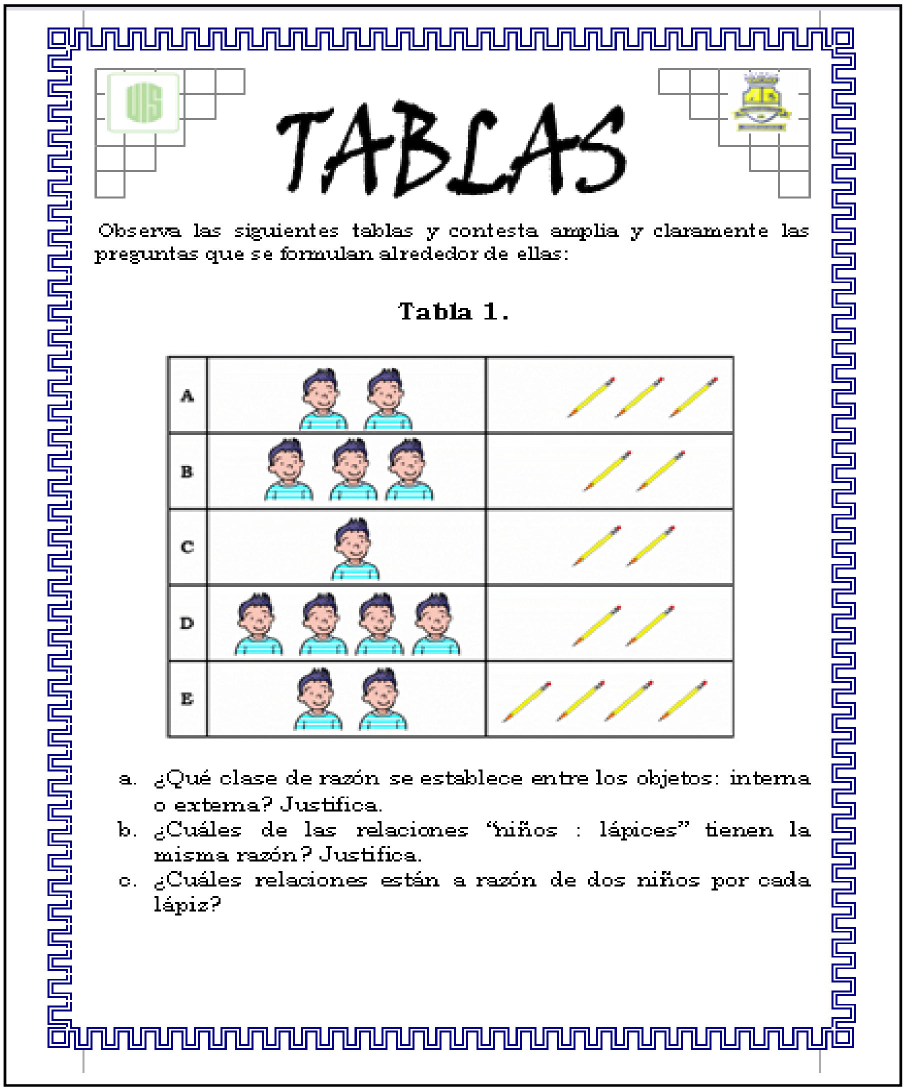


Figura 2.a. Actividad 1 del bloque "Tablas" de la cartilla "Entre Razones".

De esta manera, según Pozueta y Guruceaga (2006, p. 2) siguiendo las ideas de Freudental, sostienen que "los problemas de razonamiento proporcional pueden clasificarse en problemas que tienen razones internas y razones externas. Las "razones internas" son razones entre términos pertenecientes a una misma magnitud (distancia con distancia, tiempo con tiempo), y las "razones externas" son comparaciones entre cantidad de dos diferentes magnitudes (por ejemplo, tiempo con distancia o litros de leche con precio)".

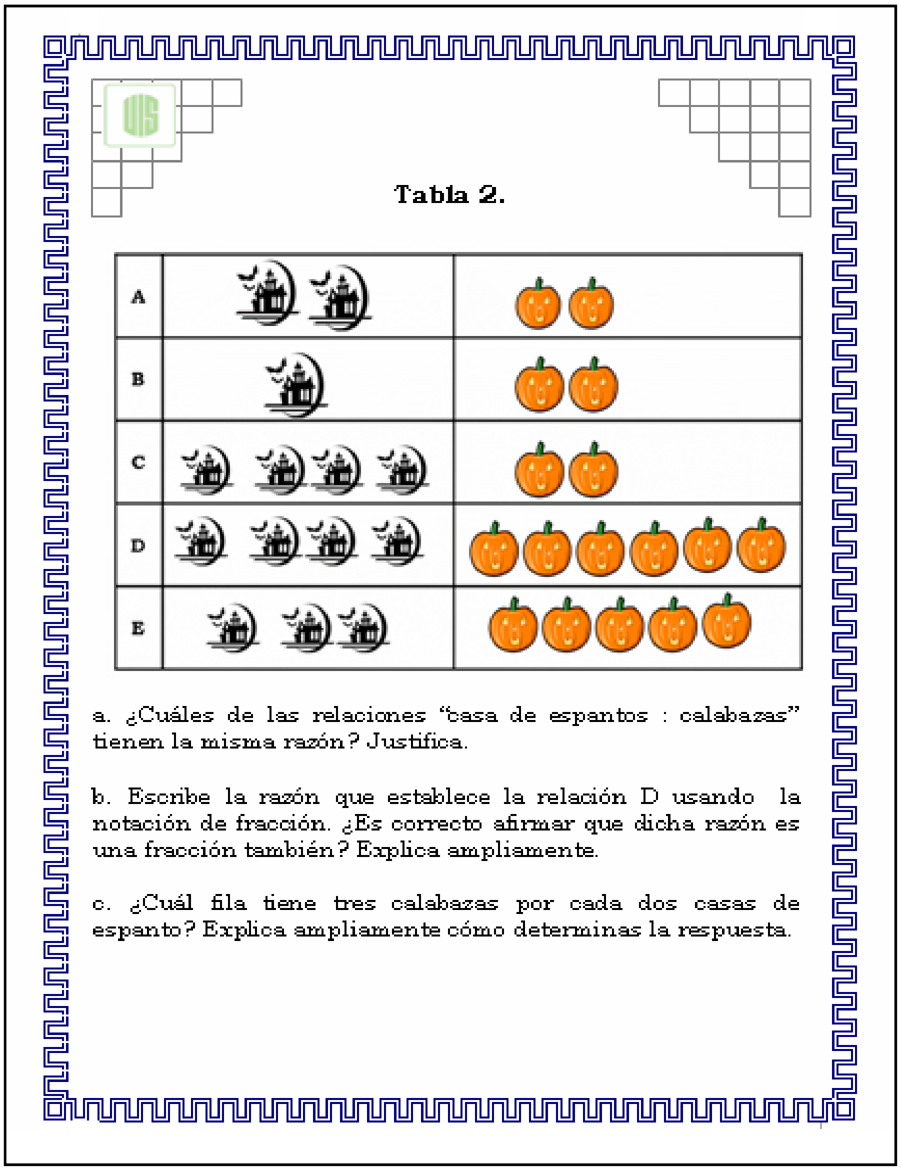


Tabla 2.

A
B
C
D
E

a. ¿Cuáles de las relaciones "casa de espantos : calabazas" tienen la misma razón? Justifica.

b. Escribe la razón que establece la relación D usando la notación de fracción. ¿Es correcto afirmar que dicha razón es una fracción también? Explica ampliamente.

c. ¿Cuál fila tiene tres calabazas por cada dos casas de espanto? Explica ampliamente cómo determinas la respuesta.

Figura 2.b. Actividades 2 del bloque "Tablas" de la cartilla "Entre Razones".

Además, como podría notar el lector, para provocar el ejercicio de escritura que permitiera observar el razonamiento de los estudiantes, se formularon un número de preguntas alrededor de cada situación como se puede observar en las Figuras 2 que muestran las tablas. Ahora, si el lector encuentra rápidamente la razón de la Tabla 2 mostrada en la Figura 2.b. podrá precisar que la Tabla presentara un error pues no se identifica una razón para las relaciones establecidas. Pues bien, este *error* se planteó para observar si los estudiantes proponían una posible *corrección* para dar como respuesta una razón. Eso sí, aclaro que en ningún momento se les dijo que lo hicieran.

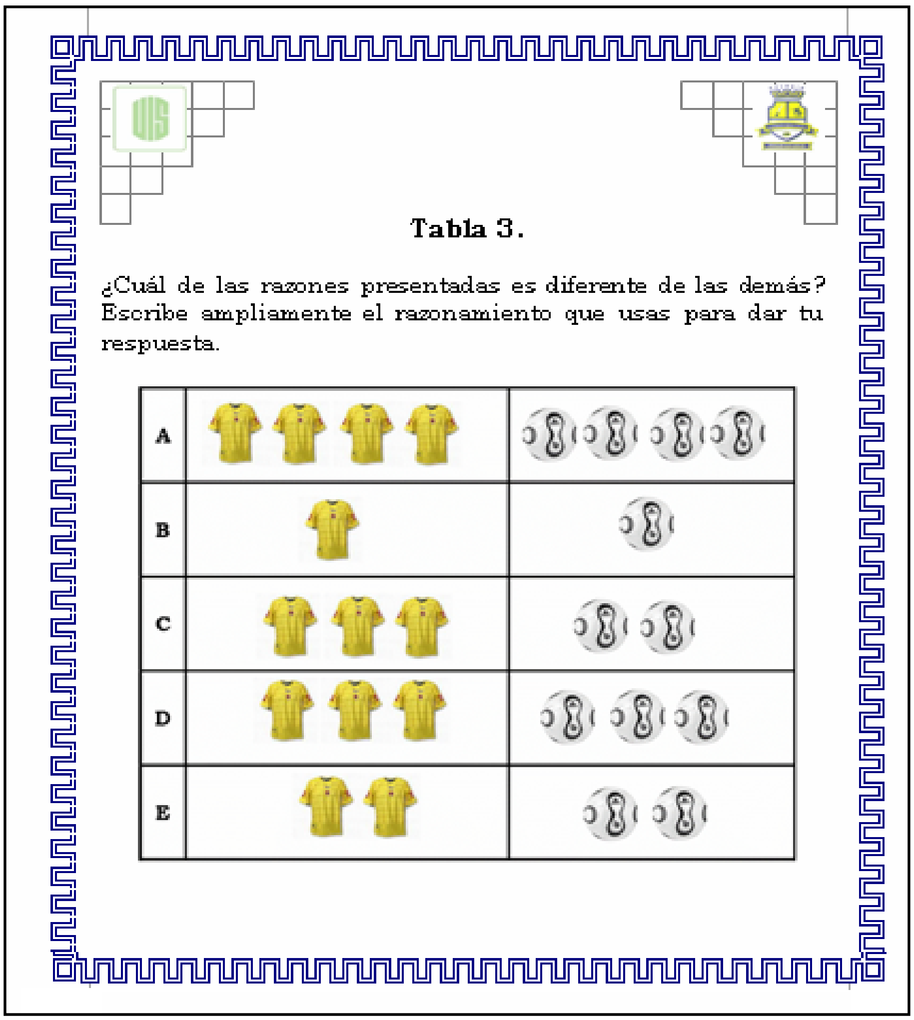


Figura 2.c. Actividad 3 del bloque "Tablas" de la cartilla "Entre Razones".

BLOQUE II:

¿Razón, Fracción o ambas?

Como claramente anticipé, este Bloque oficiaba como mediador para que el estudiante clarificara las distinciones entre los conceptos mencionados dado que los estudiantes tienden a generalizar erróneamente que toda fracción es una razón pues al presentarles la notación fraccionaria de las razones se escucharon voces que dijeron: "¡Ah profe! Eso lo que es, es una fracción". Sin embargo, ninguno inquirió –por lo menos públicamente– si realmente toda fracción es una razón, o mejor aún, si se puede afirmar que toda razón es una fracción ajustándose a su definición.

Por ende, el objetivo de este Bloque era analizar cada una de las siete situaciones presentadas para determinar si el concepto presente era el de razón o fracción o ambos y, por ende, comprender tal hecho. Así, como podrá apreciar el lector al leer las situaciones del Bloque en las Figuras 3, los problemas fueron personalizados –tomaron una característica diferente, un escenario más próximo a la realidad– para darle sentido a la significación del concepto y motivar al estudiante a razonar sin temor a equivocarse (las situaciones 1 y 7 hacen parte de la prueba diagnóstica que realicé antes de dar paso a las actividades formales del Proyecto; de esta hablaré más adelante).

Además, todas las situaciones fueron normalizadas pues, como bien afirma Fernández (2001, p. 54), "puede ocurrir que magnitudes o medidas que nos gustaría comparar estén fuera de nuestra imaginación. Freudental (1993) denomina "normalizar" a un complejo de técnicas que permite a las personas visualizar o percibir razones que, en principio, les resultan difíciles de imaginar". Veamos las situaciones a la luz de la normalización hecha, teniendo en cuenta que en las siguientes situaciones las razones normalizadas son del tipo parte-todo ya que en su estructura aparecen expresiones de la forma "de cada", "en cada", "por cada"; estas situaciones establecían razones internas como se puede apreciar en la Figura siguiente:

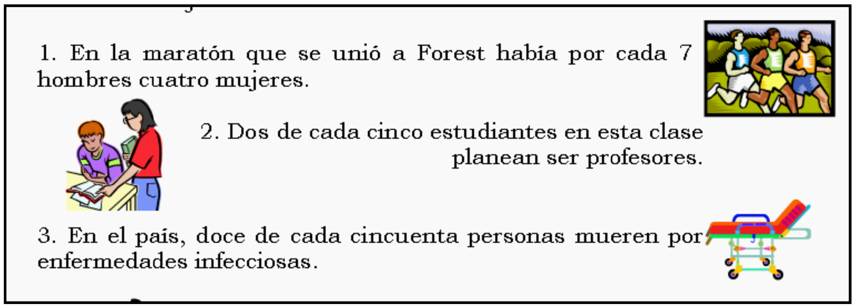


Figura 3.a. Situaciones problema 1, 2 y 3 a la luz de la normalización o tipificación.

De igual modo se presentó otro problema clásico de la literatura de razonamiento "parte-parte" en la forma del siguiente problema:

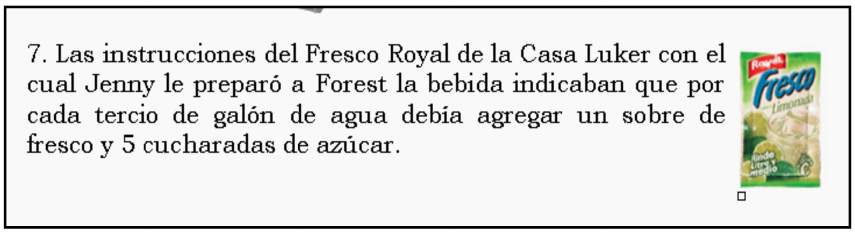


Figura 3.b. Situación problema 7 a la luz de la normalización o tipificación.

También se incluyó un "problema bien compactado" (*Well-chunked measures*) que atiende a una clasificación de problemas propuesta por Lamon (1993) en Fernández (2001, p. 63) e implica la comparación de dos cantidades extensivas produciendo así una tasa (*rate*).

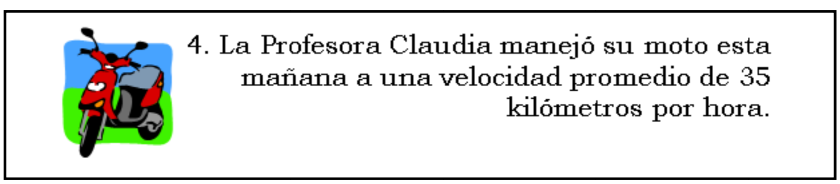


Figura 3.c. Situación problema de tasa (*rate*).

Finalmente, la situación problema 5 es la más interesante y fue precisamente la que creó mayor discusión durante la socialización pues ¾ de leche es solo una fracción y no una comparación de dos cantidades. Para analizar esta, y las demás situaciones, los estudiantes debían tener claridad sobre la relación "parte-todo" y "parte-parte". De igual modo, la situación 6 presentó en clase dificultades ya que no se presentaba en la estructura semántica de la situación un referente que les permitiera distinguir tácitamente los referentes a relacionar.

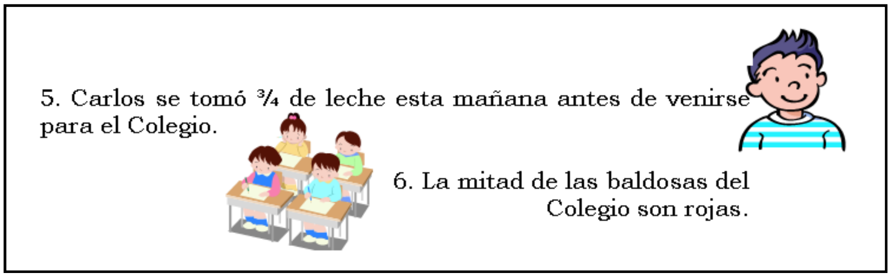


Figura 3.d. Situaciones problemas 5 y 6.

BLOQUE III: Bitácora

Dado que los apuntes de los estudiantes serían quienes hablarían –mayoritariamente– del razonamiento de los estudiantes, diseñé este Bloque en aras de ayudarles a organizar, estructurar, clarificar y depurar los conceptos que estaban construyendo dado que aunque los estudiantes estaban tomando apuntes la mayoría de estos estaban llenos –como era de esperarse– de ejemplificaciones, detalles innecesarios, incoherencias, escasa intencionalidad comunicativa siquiera para el mismo estudiante pues al remitirse al apunte no se hallaba mayor orientación cognitiva. Asimismo, se pretendía indagar las construcciones conceptuales que los estudiantes estaban realizando.

En cuanto a la coherencia de un texto, Atienza (1992, p. 127-128) ofrece dos definiciones: 1. "Intuitivamente la coherencia es una propiedad semántica de los discursos, basada en la interpretación de cada frase individual relacionada con la interpretación de otras frases", esta según Van Dijk (1977, 1980, p. 147). 2. Mientras que Conte (1977, 1986, 1994), explica que "la *coherencia* es una propiedad atribuida por el sujeto intérprete del *texto*, resultado de la interacción emisor-texto-receptor […] Así la coherencia está pues ligada a la posibilidad de dar sentido y para que tenga sentido la información que llega debe poder ser interpretada, debe, por lo tanto, tener siempre algún tipo de conexión con la información almacenada en la memoria". Para efectos de esta investigación, como bien intuirá el lector, se adoptará la segunda. Asimismo "La [eficiencia (*efficiency*)] de un *texto* depende de que los participantes empleen o no un mínimo de esfuerzo en su utilización comunicativa", (Atienza, ibíd., p. 132).

No obstante, empezando el proceso de enseñanza dichas carencias lecto-escritoras y el escaso uso de lenguaje escrito como comunicación textual eficaz eran comprensibles dado que –como mejor lo expresa Atienza (ibídem, p. 27)–

> En las clases de otras disciplinas, no acostumbra a enseñarse ni valorarse la organización textual sino que se valora la repetición de unos conocimientos previamente organizados por el libro de texto o el profesor. Es más, diversas investigaciones sobre el texto escrito han ratificado el hecho de que, cuando se escriben textos relacionados con las distintas áreas no lingüísticas del currículo, el nivel de calidad del texto escrito experimenta un bajón. Son frecuentes las diferencias de apreciación, a veces importantes, entre profesores de lengua y profesores de otras asignaturas, concernientes al dominio del escrito por estudiantes comunes. Los profesores de otras disciplinas distintas a la lengua denuncian la mediocridad en los textos que elaboran los estudiantes, y consideran que el problema debe ser resuelto desde la clase de lengua.

Sin embargo, aclaro que no comparto –dadas mis concepciones– la afirmación de que *los profesores de otras disciplinas […] consideran que el problema debe ser resuelto desde la clase de lengua,* dado que desde la educación todas las áreas tienen la tarea de hacer del lenguaje (en su forma escrita) una herramienta para potencial para el aprendizaje –no solo para la evaluación– además de que la escritura es un proceso de apropiación de un instrumento construido *socialmente* no en *un salón de clase*.

Empero, sí concuerdo con que *en las clases de otras disciplinas, no acostumbra a enseñarse ni valorarse la organización textual sino que se valora la repetición de unos conocimientos previamente organizados por el libro de texto o el profesor*, y reflejo fiel de ellos son los apuntes.

Continuando con las actividades de la Bitácora, este Bloque eslabonaba todo el trabajo hecho anteriormente en el primer punto –de cuatro– pues en él se pedía al estudiante definir lo que había comprendido por “razón”; con ello se esperaba que hiciera distinciones entre “razón externa” y “razón externa” y que definiera claramente cuáles elementos matemáticos constituían una razón según las situaciones tratadas.

BITÁCORA

1. Define con tus propias palabras qué es razón teniendo en cuenta cada una de las cosas tratadas durante las sesiones. Intenta incluir en ella todo lo discutido y las anotaciones importantes que tomaste durante las sesiones.

2. A continuación aparece la definición de razón de un texto de matemáticas:

La razón entre dos cantidades a y b con $b \neq 0$ es el cociente indicado de dichas cantidades.

Se simboliza $\frac{a}{b}$ o a:b y se lee “a es a b”.

Así “a” se llama antecedente de la razón y “b” se llama consecuente de la razón.

Compárala con la tuya (punto 1), ¿tienen algo en común?

¿Cuál de las dos consideras es más comprensible para un estudiante de tu edad? ¿Por qué? ¿Qué palabras causarían confusión en la definición?

¿Podrías complementar una definición con la otra?

Figura 4.a. Actividades 1 y 2 del bloque “Bitácora” de la cartilla “Entre Razones”.

En el segundo punto, presenté la definición del libro con el cual me apoyaba regularmente en clase –se han dado investigaciones sobre el trato que los textos escolares hacen de los conocimientos matemáticos mostrando la falta de precisión para tratarlos[4]–, esto con el objetivo de –en el tercer punto– analizarla, y determinar inconsistencias a la luz de lo discutido alrededor del tema y, por ende, "cuestionar su validez". Todo esto a través de preguntas planificadas para dicho propósito (véase la Figura 4.b.).

Con ello, aparte, se quería mostrar al estudiante lo importante que es leer *letra a letra, palabra a palabra* las definiciones y analizar si los datos presentes son realmente los necesarios y suficientes e incluso si excluyen casos particulares del concepto tal cual sucedía en nuestro caso.

Además, no quiero dar espera para decir que como fruto de esta actividad algunos estudiantes fortalecieron la confianza en sus capacidades favoreciendo con esto su proceso de aprendizaje pues fue significativo para ellos *descubrir errores en un libro de matemáticas*. Asimismo, como podrá notar el lector al remitirse a tal definición en la Figura 4.a., aproveché este espacio para introducir la notación de las razones y presentar el nombre de los términos que la componen.

Ahora, volviendo a la discusión sobre la definición, el meollo de esta era que los estudiantes hallaran uno de los aspectos en los cual fallaba: "con $b \neq 0$" dado que "en las razones, el segundo componente puede ser cero" (Godino y Batanero, 2003, p. 8), sin embargo esta condición en los libros de texto puede sustentarse, como bien lo expone Guacaneme (2001), de la precedencia en los textos de los fraccionarios (los racionales) a la razón.

---

[4] Muy seguramente el lector notó al leer la definición en la Figura 4.a. que no se establece explícitamente el conjunto numérico al cual pertenecen el antecedente y el consecuente pero sí excluye para este último el valor de cero. Esta exclusión parece justificarse en la asociación de la razón con la división ya que en efecto no sería posible considerar una razón como cociente si el consecuente es cero pues no existiría tal cociente, hecho que algunos de mis estudiantes dedujeron en la actividad y que Guacaneme (2001) discute ampliamente en su trabajo sobre el *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos formales y a los textos escolares de matemáticas.*

3. Teniendo en cuenta la definición del texto de matemáticas y los saberes adquiridos, contesta ampliamente:

a. ¿Una razón siempre se establece entre "dos-cantidades"?

b. ¿Por qué crees que en la definición se hace la aclaración de "$b \neq 0$"? ¿Esa aclaración será sinónimo de "ATENCIÓN: EL CONSECUENTE NO PUEDE SER CERO"?

c. Interpreta la siguiente situación:

"En una bolsita de *sparkies* la razón de bolitas rosadas a verdes es 10:0"

Según lo anterior, ¿es correcto o incorrecto decir que el consecuente de una razón debe ser diferente de cero? Justifica ampliamente.

d. Ahora, en la definición aparece la expresión "cociente indicado" ¿a qué te suena eso?
¿Será correcto afirmar que dos o más relaciones tienen la misma razón si sus respectivos cocientes son diferentes? Toma algunas relaciones que tengan la misma razón y realiza el procedimiento y análisis necesario para dar respuesta a esta pregunta y escribe las conclusiones.

e. ¿Todas las razones se representan con la notación fraccional?

4. Según el análisis que hiciste anteriormente, ¿crees que le hace falta algo a la definición del texto? ¿O a la tuya? Escribe una nueva.

Ahora compara esta última con la que hiciste en el segundo punto, ¿encuentras diferencias o semejanzas entre la una y la otra? Si es así, escríbelas de tal forma que se distingan.

Figura 4.b. Actividades 3 y 4 del bloque "Bitácora" de la cartilla "Entre Razones".

BLOQUE IV:
Lupa Matemática

Tal cual lo plantean los *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998), el profesor debe imaginar y proponer a los estudiantes situaciones que puedan vivir y en las que los conocimientos aparezcan como la solución óptima y descubrible. Es así como al abrir esta clase de espacios –incluso– se le permite al estudiante de manera implícita que reflexione acerca del por qué y del para qué de los aprendizajes que vivencia.

De esta manera se dilucida el propósito de este Bloque que contiene las actividades expuestas en las Figuras 5. A nivel matemático, se aprovechó este espacio para tratar razones entre magnitudes continuas favoreciendo con ello el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes pues como muy bien asevera Obando, Vanegas, y Vásquez (2007, p. 123):

> El razonamiento proporcional está estrictamente relacionado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de razonamiento cualitativo como cuantitativo. Este tipo de razonamiento implica el establecer relaciones entre relaciones (relaciones de segundo orden), y al involucrar la covariación[5], está estrechamente relacionado con las nociones de variable y variación. Esto hace que el razonamiento proporcional se constituya en la cúspide del desarrollo del pensamiento aritmético, y en la puerta de entrada al pensamiento algebraico.

De esta manera concluye la primera fase didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje cuyo objetivo era presentar diversas situaciones en las cuales el estudiante lograra abstraer e inferir los elementos importantes que definen la razón en el marco de la proporcionalidad logrando así distinguir razones establecidas entre números, medidas de magnitudes, o entre magnitudes llegando a así estudiar la relación de variación entre estas últimas y, por ende, tratando la razón de manera funcional.

---

[5] "En sentido estricto, la covariación implica que dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las variables están correlacionadas […]", Obando, Vanegas, y Vásquez (2007, p. 123).

LUPA MATEMÁTICA

La Matemática es la ciencia en la cual se fundamentan la mayoría de las cosas del mundo. A continuación encontrarás algunas situaciones familiares en las cuales lograrás identificar la razón y su papel en la sociedad.

a. ¿Podrás determinar si las siguientes palabras describen una razón? Si, es así, escribe las magnitudes que cada una de ellas relaciona y, además, escribe en dónde la has escuchado.

a. Natalidad
b. Volumen
c. Velocidad
d. Densidad

b. Las empresas de servicios públicos relacionan ciertas magnitudes para facturar sus servicios y establecen una razón de costo entre ellas para el cobro del servicio en cada hogar.

Sabes cuáles son las magnitudes que la Electrificadora de Santander (ESSA) toma en cuenta para relacionar el costo de la factura mensualmente? ¿Y conoces la razón establecida entre ellas para determinar el cobro del servicio consumido?

Y el Acueducto Metropolitano de Bucaramanga, ¿qué magnitudes relaciona para el cobro del servicio? ¿Cuál es la razón establecida para el costo entre ellas?

Figura 5.a. Actividades del bloque “Lupa Matemática” de la cartilla “Entre Razones”.

Para la realización del ítem b, se esperaba que los estudiantes se remitieran a los recibos de las empresas protagonistas de las situaciones planteadas para que de esta forma aprendieran a leer dichos formatos y reconocieran que el conocimiento matemático hace parte del mundo y es el que regula el sistema de cobro de servicios. Siendo esto, además, un abrebocas para estudiar la variación de las magnitudes involucradas y palpar el efecto de esto en la economía de sus hogares.

Finalmente, para trabajar el ítem e, los estudiantes contaban con un antecedente didáctico realizado semanas anteriores como parte de las clases regulares de nuestro ideario pedagógico en el cual, a través de un taller y la manipulación orientada de diferentes objetos circulares[6], los estudiantes establecieron la razón que define a π. Por lo tanto, se esperaba que abordaran significativa y comprensivamente esta situación.

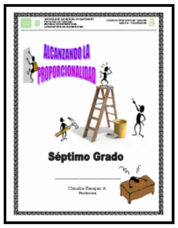
c. ¿Quién no ha tomado medicamentos?
Pues bien, cada medicamento tiene una prescripción del laboratorio para su ingestión. ¿Cuál es el nombre preciso que se le da en las etiquetas de los medicamentos a dicha prescripción? ¿Cuáles magnitudes se tienen en cuenta en su formulación?

d. Las papelerías de la UIS suelen requerir la prestación de servicios de digitadores. Si tú fueras el dueño de la papelería Copycopias, qué criterio establecerías para escoger un digitógrafo de un grupo de aspirantes al puesto. ¿Se relaciona ese criterio con el concepto de razón? Explica cómo.

e. Para determinar la circunferencia de cualquier objeto circular debemos recurrir siempre al número π, ¿recuerdas cómo se determina π? ¿Se puede afirmar que representa una razón? Si es así, escríbela.

Figura 5.b. Actividades del bloque “Lupa Matemática” de la cartilla “Entre Razones”.

[6] Se enfatiza que esta actividad no hace parte del Proyecto. Se trae a alusión para dejar claridad de que los estudiantes ya conocían la historia y cómo aparece π en las matemáticas.



2.2.2. Cartilla 2: "Alcanzando la Proporcionalidad"

Al igual que la Cartilla 1, esta se constituyó en tres bloques didácticos distinguibles por su caracterización y propósitos. Si el lector examina las Figuras 6, 7, y 8 podrá notar que en el tratamiento didáctico de las actividades prima el dibujo. Pues bien, se optó por esta representación dado que para los estudiantes es más fácil transitar del pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo en el terreno de la resolución de problemas.

BLOQUE		PROPÓSITOS
I	La casa de María	Reconocer cualitativamente la noción de proporcionalidad. Integrar la forma y el tamaño del dibujo para favorecer la construcción de la noción de proporcionalidad.
II	"Blancanieves y los Siete Enanitos": Mundos Proporcionales	Reconocer cualitativamente la noción de proporcionalidad. Realizar comparaciones de forma cuantitativa para favorecer el razonamiento proporcional cuantitativo. Fortalecer el uso de la razón como relación de magnitudes. Dibujar figuras proporcionales usando las nociones desarrolladas sobre proporcionalidad. Recuperar la secuencia del razonamiento del estudiante. Construir una definición tentativa de proporcionalidad.
III	Semejantes Rectángulos	Introducir el concepto de proporción tomado desde un libro escolar. Indagar la comprensión y, por ende, el uso de la definición dada. Emparejar rectángulos proporcionales y observar las estrategias usadas para esta tarea cognitiva. Indagar si el estudiante puedo hallar la cuarta proporcional y revisar la estrategia que usa (estructura aditiva o multiplicativa). Determinar si el estudiante establece relaciones entre las situaciones problema y la definición dada. Una vez revisada la estrategia, generalizar la estrategia de solución. Estudiar si el estudiante elaboró procesos metacognitivos que le permitieran evolucionar su razonamiento proporcional del estudiante, esto a través de la escritura.

Tabla 2. Bloques y propósitos de la Cartilla 2.

De esta manera, al finalizar las actividades propuestas los estudiantes mostraron que el enriquecimiento de las relaciones cualitativas les permitió desarrollar procesos algoritmos y construir generalizaciones y significados a partir de la percepción, la abstracción y la inferencia, todo ello enmarcado por el sentido que les proporcionaron las situaciones problemas que fueron recreadas en el cuento de la literatura clásica “Blancanieves y los siete enanitos” ya que esta ofrece un rico contexto cualitativo de la proporcionalidad (este recurso es también trabajado por Valdemoros y Ruiz (2006)).

Así Streefland (1984, 1985), citado por Valdemoros y Ruiz (2006, p. 301), enfatiza que “como recursos didácticos para la enseñanza de la razón y la proporción se deben usar figuras, dibujos, expresiones que favorezcan el desarrollo patrones perceptuales que desemboquen en procesos de cuantificación”. De esta manera, el contexto de mayor influencia de las situaciones fue el dibujo.

Por otro lado, en este punto los apuntes y el proceso de aprendizaje habían adquirido *sentido* para los estudiantes tanto así que no era necesario conducirlos al trabajo de clase pues por sí mismos sacaban las cartillas y discutían entre sí para superar dificultades, y menos había que dejarles tarea pues la autonomía y la motivación habían despertado de tal forma que la consulta en casa fue lo cual favoreció su proceso de enseñanza.

Además, como se podrá observar en el análisis, hubo un avance significativo en el manejo de los apuntes y el discurso académico de estos ya que los estudiantes tomaron conciencia de que a través de este posibilitaría la evolución de su proceso de aprendizaje pues escribían para aprender no para consignar información sin ton ni son en los apuntes.

No obstante, debo hacer la salvedad de que los anteriores frutos no se alcanzaron con todos los estudiantes pues muchos niños ante la exigencia de la metodología no despegaron. Por lo tanto, esta relatoría presentará en el análisis de casos las diferentes caracterizaciones de los apuntes y los diferentes niveles que evidenciaron mis estudiantes en su razonamiento.

BLOQUE I:
La Casa de María

La actividad que compone este Bloque es propuesta por Valdemoros y Ruiz (2006), y el objetivo de esta es indagar si el estudiante puede reconocer la reducción de un dibujo en todos sus componentes, de tal manera que pueda expresar con argumentos cualitativos si se conserva la forma original del dibujo con base a discriminaciones visuales.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B – COLORADOS

1. La casa que está abajo, a la izquierda, la dibujó María en su clase de artística.

A B C D E F

a. De los dibujos que están al lado, escoge el que corresponda a una reducción del dibujo de María. Escribe paso a paso lo que hiciste para realizar tu escogencia.

b. Se puede decir que la casa original y la tuya son proporcionales, ¿por qué?

Figura 6. Actividad del bloque "La casa de María" de la cartilla "Alcanzando la Proporcionalidad".

BLOQUE II:

"Blancanieves y los Siete Enanitos": Mundos Proporcionales

Nuevamente, de Valdemoros y Ruiz (2006) se adaptó esta situación, por lo que parafraseo los propósitos que ellas plantean para esta actividad: Primeramente trabajar la noción de reducción para lo cual se solicitó a los estudiantes que compararan el *ropero* de Blancanieves con el de los enanos, con lo que producirían argumentos de carácter cualitativo. Se trató la noción de reducción a través de tres medios: escrito, oral y con el empleo del dibujo (en este se pidió realizar una ampliación y una reducción al mismo mobiliario).

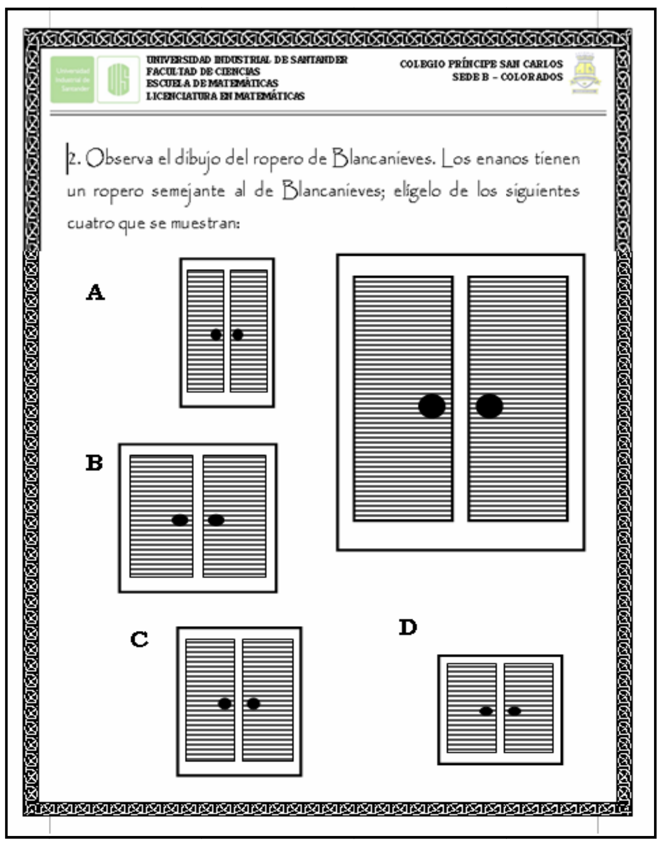


Figura 7. Actividad del bloque ""Blancanieves y los Siete Enanitos": Mundos Proporcionales" de la cartilla "Alcanzando la Proporcionalidad".

En la actividad presentada se esperaba además que los estudiantes recurrieran a medir los *roperos* para determinar el ropero semejante y de esta manera escuchar en sus argumentaciones, respecto a su escogencia, atributos cualitativos del razonamiento proporcional. Para permitirles alcanzar tal propósito los diseños de los *roperos* se hicieron cuidando las medidas de cada una de sus magnitudes de tal forma que se relacionaran a "la mitad" del ropero de Blancanieves.

En cuanto al desarrollo de la actividad en clase, en este punto nos detuvimos bastante ya que fue necesario indagar cómo estaban razonando los estudiantes, si en términos aditivos o multiplicativos y según el caso orientarlos a través de otras situaciones para propiciar el reconocimiento de que la proporcionalidad está relacionada con la multiplicación (o su inverso, la división) mas no con la adición. Esto aprovechando lo consignado como apunte en la primera parte de esta actividad, es decir, aprovechando el error cometido.

De esta manera los apuntes, a través de las situaciones planteadas y por su misma estructura, estaban siendo organizados como el resultado de un esfuerzo colectivo en función de una apropiación individual pues las mismas situaciones llevaron a los estudiantes a intercambiar ideas, comparar, discutir, refutar, contradecir, …, a sentir la necesidad social de tener en cuenta al otro para construir el conocimiento que les competía, con lo cual se resaltó el hecho de que la apropiación de conceptos –el mismo aprendizaje– no es un proceso que se reduzca a una actividad individual.

Asimismo este espacio de socialización como resultado de la construcción de un conocimiento se dio lugar porque en esta etapa del proceso de aprendizaje ya se empezaban a distinguir los estudiantes que comprendían el concepto de proporcionalidad y aquellos que aún tenían dificultades para manejarlo más allá del referente cualitativo. No obstante, dado que la socialización ofrece la ventaja de generar un *feedback* de lo que cada estudiante hace o dice en el curso de la tarea común, esta favoreció a aquellos que se quedaban en las ramas.

De lo anterior se infiere la importancia de la resolución de problemas bajo la dinámica de las situaciones problema ya que se favorece la autonomía del estudiante en el proceso de aprendizaje para inquirir, cuestionar y confrontar las posiciones de los otros lo cual favorece su autoconcepto y su confianza tal cual lo pude observar en una de mis estudiantes quien hace parte de los estudios de caso que presentaré más adelante.

Por otro lado, con las actividades propuestas hasta aquí corroboré que el razonamiento proporcional cualitativo es el puente que permite a los estudiantes desarrollar el razonamiento proporcional cuantitativo dado que la noción de proporción empieza siempre de forma cualitativa y lógica antes de estructurarse cuantitativamente (Valdemoros y Ruiz, 2006). Por ende, el estudiante a partir de su razonamiento cualitativo dota de sentido el desarrollo del razonamiento cuantitativo.

En cuanto a los apuntes, en esta etapa la escritura se había transformado en diferentes niveles –unos más altos que otros– pues los estudiantes superaron la escritura sin tener en cuenta al lector (entre quienes se cuenta a ellos mismos) pues ya no solo escribían sino que una vez hecha la tarea, revisaban y autoevaluaban sus apuntes o buscaban hetereoevaluación teniendo en cuenta a los mismos compañeros o a la profesora. Estaban escribiendo *para aprender y para comunicar*, es decir que la escritura estaba adquiriendo sentido como resultado de un proceso de aprendizaje permeado también de sentidos y significados. De esta manera, al observar en cada clase los apuntes empecé a distinguir dos perfiles de los apuntes: uno, orientado por la “prosa basada en el autor”; y, la otra, por la “prosa basada en el lector”. Estas dos designaciones lingüísticas aportadas por Carlino (2004, p. 269), quien cita a Flower (1979) para definirlas y mostrar algunas caracterizaciones y consideraciones importantes para esta Investigación, así:

> En la primera, las ideas se presentan en el orden en que fueron descubiertas, es decir, la prosa basada en el autor muestra “el camino asociativo de la confrontación del sujeto con su tema”. En la segunda, hay un “intento deliberado para comunicar algo al lector”, lo cual lleva a “crear un lenguaje y un contexto compartidos” entre ambos. Es decir, la prosa basada en el autor “refleja su proceso de pensamiento”; en cambio, la prosa basada en el lector “refleja su propósito”. Flower señala que la primera “es un modo natural de pensar, cognitivamente menos demandante, lo cual explica por qué la escritura es a veces oscura”

> dado que lo principal no ha sido destacado por el autor, y quien lee, debe trabajar para desenterrarlo.

Para efectos de este Trabajo no se hará escogencia alguna entre estas dos ni menos se realizará juicio valorativo ni calificativo entre la una y la otra pues, al contrario, considero –yo investigadora– que el ejercicio de la escritura debe estar permeado por ambas distinciones aunque reconozco también que es un nivel de escritura exigente y que podría decirse que se hallaría solo en escritores expertos. Pero repito… *podría decirse.* Desde este punto de vista, se distinguen, según Scardamalia y Bereiter (1992) apud Carlino (2004, p. 323), dos modelos de la escritura *vs.* el conocimiento: "decir el conocimiento" y "transformar el conocimiento" según lo cual

> En el primer modelo, el que escribe recupera de su memoria lo que sabe sobre un tema y lo expresa en el papel. En el segundo modelo, quien redacta considera la situación retórica en la que compone, es decir, anticipa los rasgos de su destinatario y analiza qué quiere lograr con su texto. Según cómo se representen las necesidades informativas de su potencial lector y de acuerdo con su propósito de escritura, vuelve a concebir lo que conoce para adecuarlo a la situación comunicativa dentro de la que elabora su escrito. De este modo, pone en interacción dos tipos de problemas: retórico (referente a la comunicación efectiva con el lector) y semántico (relativo al contenido). De acuerdo con estos investigadores, sólo quien redacta según el modelo "transformar el conocimiento" logra modificar lo que previamente sabe sobre un tema. Y lo hace porque al escribir desarrolla un proceso dialéctico entre su conocimiento y las exigencias retóricas para producir un texto adecuado. La naturaleza dialéctica de la composición escrita reside en el conflicto que enfrenta el escritor entre las limitaciones del propio saber y la necesidad de lograr un texto eficaz (Scardamalia y Bereiter, 1985). Dicho de otro modo, los escritores experimentados tienen presente al lector y también tienen en cuenta lo que quieren lograr en él con sus textos. Es decir, prestan atención no sólo al tema sobre el que trabajan sino que lo acomodan a las necesidades informativas de su audiencia..

Después de la excelente e implícita claridad que nos ofrecieron estos autores sobre el potencial de la escritura como herramienta para el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje y sin querer problematizar sobre el nivel de de incidencia en un proceso u otro, continuaré con la relatoría de las actividades de la Cartilla 2, Bloque II. Pues bien, después de trabajar cualitativamente el relativo ropero de Blancanieves llegamos a la parte cuantitativa del trabajo con él. Las siguientes actividades tenían como propósitos específicos reproducir el ropero de Blancanieves guardando una relación proporcional entre sus magnitudes. Además, se establecieron unas preguntas para recuperar en el apunte el razonamiento que el estudiante usó para la resolución de la tarea.

BLOQUE III:
Semejantes Rectángulos

Seguidamente, se presentó recreativamente a los estudiantes la definición –tomada del texto con el cual trabaja en clase regularmente– de proporción en aras de enfrentarlos a la lectura matemática simbólica para conducirlos a la interpretación de esta y a su comprensión y uso con la secuencia de actividades que perfilaban el Bloque. Además, se proponía a la luz del a definición y de la interpretación que el estudiante le hubiera dado a esta, relacionar el trabajo realizado para de esta manera darle mayor significación tanto al trabajo como a la definición y favorecer así su comprensión.

Seguidamente, se propuso una actividad sugerida por Obando y Vásquez (2007) que hace parte de un compendio de actividades propias de proporcionalidad y semejanza (véase la Figura 8). En ella se propone inicialmente al estudiante –con criterio abierto– emparejar los ocho rectángulos dibujados y se pide justificar el criterio de escogencia para efectuar la tarea –quiero enfatizar que tanto en esta actividad como en las siguientes, los rectángulos presentados en las Cartillas tenían las medidas precisas para establecer las razones, esto en el campo de los números enteros positivos–.

Con ello se pretendía –para el caso de esta Investigación– determinar si el estudiante estaba superando su razonamiento cualitativo y si estaba integrando los conocimientos adquiridos al recurrir al establecimiento de razones no homogéneas entre las magnitudes geométricas involucradas para así identificar y verificar la proporcionalidad algorítmicamente recurriendo a la comprobación de la igualdad implícita en la definición.

Es importante aclarar que en este punto del proceso, algunos estudiantes ya habían inferido una regla matemática para comprobar que dos expresiones $\frac{a}{b}$ (independiente de la representación que cada elemento tuviera) tenían la *misma razón.* A partir de esta generalización hecha en las actividades de la Cartilla 1 lograron darle sentido a la igualdad presentada en la definición de proporción pues tenían un constructo previo producto de la interpretación de la definición de razón.

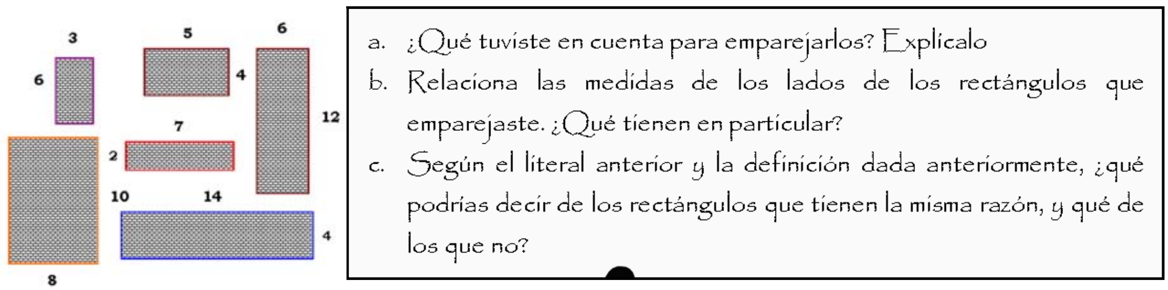


Figura 8. Actividad 2[7] del bloque "Rectángulos Semejantes" de la cartilla "Alcanzando la Proporcionalidad".

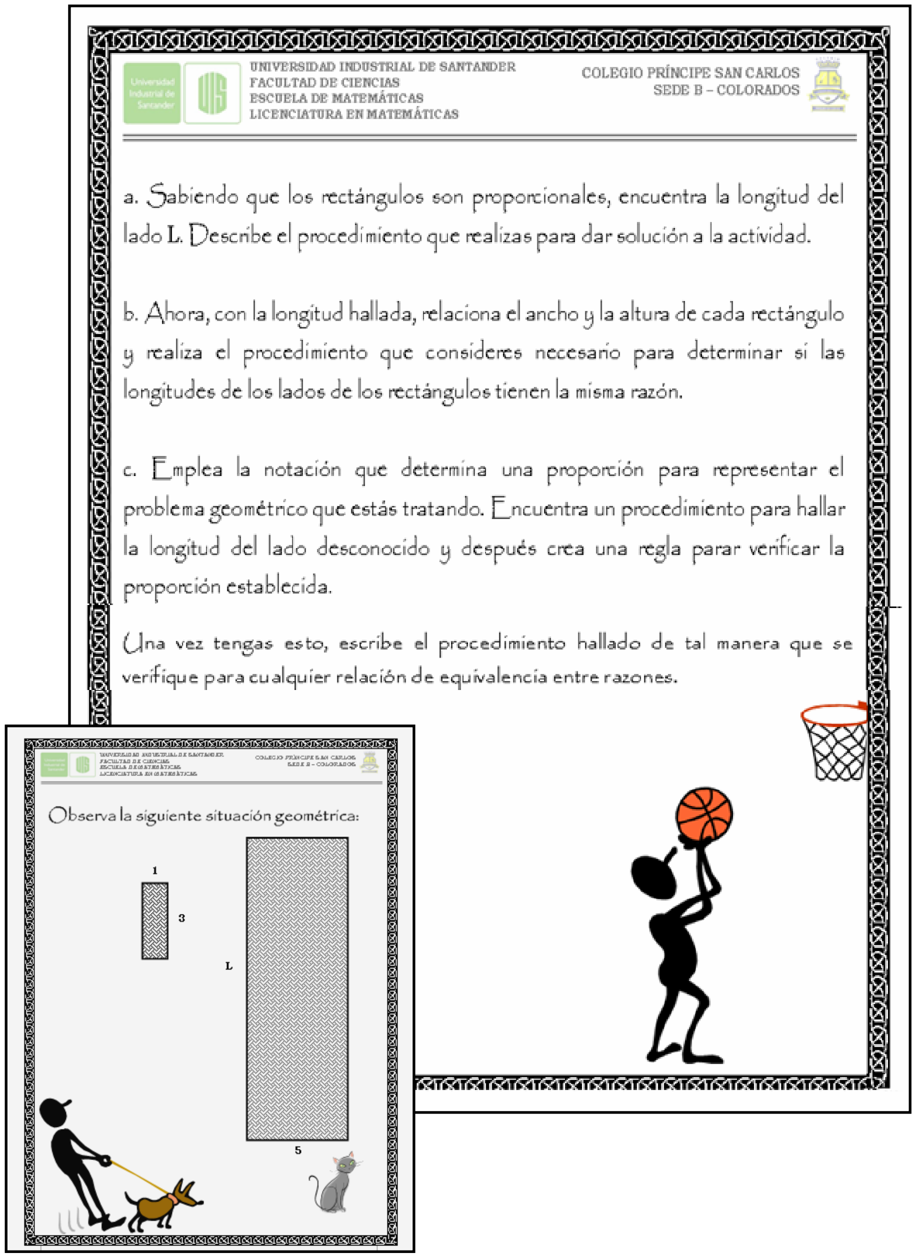
Es importante decir que, reiterando, la socialización era importante para el proceso de aprendizaje y de descubrimiento de reglas matemáticas que permitían avanzar en aquel pues en ese espacio se realizaban preguntas formuladas para establecer la generalidad de las estrategias empleadas en la resolución de los problemas; para cuestionar la efectividad de los procedimientos antes diferentes condiciones estructurales de la tarea; para solicitar explicaciones y justificaciones, todo esto integrado de manera implícita por el diálogo.

En el literal c de la actividad, se hacía volver al estudiante a la definición para que empezara a tomarla como un ente cognitivo que le permitiera explicar, discutir, revisar, contrastar, distinguir, inferir nuevos saberes, además para que comprendiera lo necesario que es retomar lo aprendido para así favorecer la cadena de conocimientos que adquiría en su aprendizaje.

Es así como en la siguiente actividad (la ilustrada en las Figuras siguientes) se pretendía que el estudiante estableciera razones con las medidas de dos rectángulos y mostrara su

[7] En esta actividad como en las siguientes, los rectángulos tenían las medidas precisas para establecer las razones, esto en el campo de los números enteros positos.

equivalencia, pero esto sumado a la tarea de hallar la longitud faltante de uno de los rectángulos, es decir, se pedía hallar la cuarta proporcional de la relación de equivalencia formada implícitamente por las razones. Y, por ende, se quería reforzar el significado de la proporción vista como una relación de equivalencia entre razones.



Figuras 9. Actividad 3 del bloque “Rectángulos Semejantes” de la cartilla “Alcanzando la Proporcionalidad”.

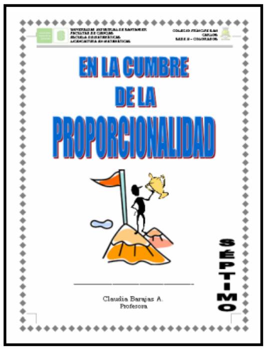
Así, en esta Cartilla se le dio poco protagonismo al enunciado verbal y, al contrario, fue la representación gráfica la que guió el proceso de construcción de la proporcionalidad; esto tuvo una intención: fortalecer la lectura de representaciones gráficas que deben ser comprendidas y traducidas en las expresiones sintácticas correspondientes.

Además, a través de esta tarea se llevó al estudiante a construir una estrategia para hallar la cuarta proporcional y, seguidamente, a generalizar la estrategia. Esto, además, atendiendo a los *Lineamiento Curriculares* (1998, p. 34):

> Es así, como [el profesor] enriqueciendo el contexto deberá crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples y, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción; diseñar además situaciones que generen conflicto cognitivo teniendo en cuenta el diagnóstico de dificultades y los posibles errores.

De por sí, esta parte del proceso fue exigente porque mis estudiantes –según ellos– no se enfrentaban muy a menudo a situaciones de generalización por eso al llegar al ítem c, algunos se me acercaron y me dijeron: “cómo así Profe, ¿qué es una regla? No entiendo lo que hay que hacer”. Al comprender lo que debían hacer, noté el esfuerzo cognitivo que realizaron para resolver el problema –no todos, por supuesto–.

Finalmente, la última actividad propuesta fue escribir lo comprendido hasta el momento por proporcionalidad, con ello se quería revisar cómo iba la construcción del concepto además de querer mirar cómo había avanzado el ejercicio de escritura que los estudiantes estaban realizando en sus apuntes, un ejercicio totalmente autónomo y autorregulado que favorecía su metacognición y, al mismo tiempo, su cognición.



2.2.3. Cartilla 3: "En la cumbre de la Proporcionalidad"

> "El diseño de una situación problemática debe ser tal que además de comprometer la afectividad del estudiante, desencadene los procesos de aprendizaje esperados. La situación problemática se convierte en un microambiente de aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de las otras ciencias. Podría afirmarse que la situación problemática resulta condicionada en mayor o menor medida por factores constituyentes de cada contexto", *Lineamientos Curriculares*, (MEN, 1998, p. 36).

Pues bien, al contrario de las dos Cartillas anteriores, esta no tiene bloques sino que presenta tres situaciones problemas concretas y una situación de escritura final en la cual el estudiante debía evidenciar el proceso vivenciado. Haciendo alusión al epígrafe, las situaciones problemas planteadas para esta Cartilla manejan un contexto muy próximo al de los estudiantes e incluso los ubica en roles que muchos a su corta edad asumen como parte de las responsabilidades en sus hogares: cocinar. De modo que la directriz de esta Cartilla era en primera instancia descubrir que la proporcionalidad estaba inmersa en esas situaciones y, consecuentemente, comprobar que solo a través de este concepto podrían dar una solución correcta a los problemas.

De esta manera, se presentaron dos problemas de mezclas[8] y uno de porcentaje. Fue así como las situaciones presentadas fueron diseñadas inicialmente para generar conflicto cognitivo teniendo en cuenta que los estudiantes ya habían generalizado la propiedad fundamental de la proporción a partir de situaciones representadas pictóricamente mientras

[8] "Tourniarie y Pulos (1985) hacen una clasificación de las diferentes tareas y problemas que se han propuesto a los estudiantes en las distintas investigaciones llevadas a cabo hasta principios de los años ochenta sobre problemas de proporcionalidad. Estos autores agrupan los problemas en cuatro categorías: Tareas de Física, Problemas de tasa, Problemas de mezcla y Tareas de probabilidad.
a). Tareas de Física son aquellas en las cuales se requiere el conocimiento o comprensión de algunos principios físicos además del conocimiento y comprensión de la razón y la proporción. b). Consideran problemas de tasa (*rate*) a aquellos problemas verbales en los que se comparan razones entre objetos distintos. c). Denominan problemas de mezclas a aquellos problemas verbales en los que se presenta una mezcla, tanto si con de comparación de razones como de valor pedido", Fernández (2001, p. 60).

que estas se caracterizaban por la presentación de contextos de la vida social en forma verbal.

Dado que el campo semántico de las situaciones problema había cambiado, los estudiantes se sintieron perdidos respecto al tema que estábamos tratando. Despegar les costó muchísimo trabajo intelectual pues –en tiempo real– duraron aproximadamente 40 minutos desintegrando la situación para reconocer la proporcionalidad en las situaciones por lo que fue necesaria mi intervención para ayudarlos a superar el ahogamiento cognitivo que experimentaron.

Según Fernández (2001, p. 74), "los autores Tourniarie y Pulos (1985) dicen que los problemas de mezcla son más difíciles de abordar que los de tasa pues en ellos se constituyen nuevos objetos, la mezcla de los colores rojo y amarillo da el naranja, o se modifican los objetos –como en el caso del primer problema de la Cartilla: la mezcla de zumo de naranja con agua produce un cambio en el sabor de la naranja–. Sin embargo, el lector estará de acuerdo en que los problemas de tasa (*rate*) también generan nuevos objetos, por ejemplo la cantidad intensiva velocidad como cociente de dos cantidades extensivas, espacio y tiempo.

Por ende, por la misma dificultad del problema al tener que manejar varias magnitudes fue que la situación se ubicó en un contexto muy próximo al estudiante para que por lo menos en este encontrara puntos de referencia y pudiera reflexionar y crear estrategias. Sin embargo, quiero hacer hincapié en lo dificultosa que resultó esta situación para mis estudiantes tanto así que algunos quisieron dejar la tarea de lado; otros se apartaron del grupo para leer, re-leer, pensar y re-penar, revisar y re-revisar los apuntes dado que yo les decía que se preguntaran por qué estaba esta situación presente si estábamos trabajando proporcionalidad. En conclusión, el ambiente se impregnó de una laboriosidad e intelectualismo que –incluso– sujetos ajenos al salón de clase palparon cosa que fue muy satisfactoria para mí como profesora.

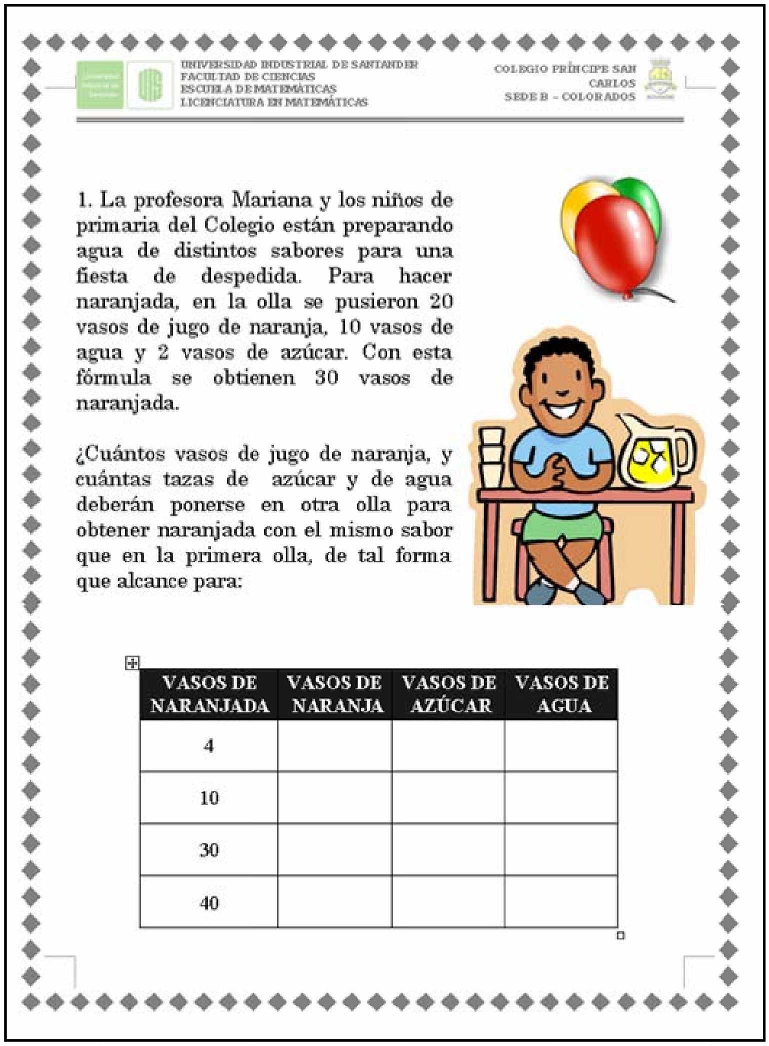
Continuando con la Cartilla, la situación presentada en la Figura 10 es una adaptación de Obando y Vásquez (2007) que exige relacionar cuatro espacios de medida diferentes que requieren de un análisis funcional para establecer las relaciones entre estas y así determinar las tasas propias de la situación. Si el estudiante usaba como referencia la tabla presentada para organizar los datos y lograba darle significado, establecería las siguientes razones: primero, vasos de naranjada-vasos de naranja; en segundo lugar, vasos de naranja-vasos de azúcar; en tercer lugar, vasos de azúcar-vasos de agua.

Sin embargo, dada la forma como se analizaron las magnitudes, las relaciones establecidas por los estudiantes fueron: vasos de naranjada- vasos de naranja, vasos de naranjada-vasos de de azúcar, y vasos de naranjada-vasos de agua. Estas relaciones resultaron ya que los estudiantes concluyeron que si una de ellas (vasos de naranja, vasos de azúcar, vasos de agua) cambiaba, entonces esto afectaba *el sabor de la naranjada*. De esta manera, establecieron relaciones funcionales y distinguieron que las relaciones eran directamente proporcionales.

No obstante, aunque hablo de “los estudiantes”, todos los estudiantes no hicieron explícito este análisis pues su razonamiento se estaba nublando porque habían empezado a aplicar la regla de tres de manera indiscriminada. Respecto a esto Godino y Batanero (2002, p. 13) afirman que

> […] con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente.

Continuando con las características del problema, las magnitudes involucradas son discretas y el campo numérico presentado para que los estudiantes dieran respuesta a la pregunta del problema es el conjunto de los números enteros positivos; sin embargo, al hallar las soluciones a través de las proporciones establecidas, los estudiantes obtuvieron respuestas numéricas cuyo campo numérico es el de los números racionales.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B – COLORADOS

1. La profesora Mariana y los niños de primaria del Colegio están preparando agua de distintos sabores para una fiesta de despedida. Para hacer naranjada, en la olla se pusieron 20 vasos de jugo de naranja, 10 vasos de agua y 2 vasos de azúcar. Con esta fórmula se obtienen 30 vasos de naranjada.

¿Cuántos vasos de jugo de naranja, y cuántas tazas de azúcar y de agua deberán ponerse en otra olla para obtener naranjada con el mismo sabor que en la primera olla, de tal forma que alcance para:

VASOS DE NARANJADA	VASOS DE NARANJA	VASOS DE AZÚCAR	VASOS DE AGUA
4			
10			
30			
40			

Figura 10. Situación problema de mezclas 1 de la cartilla “En la cumbre de la Proporcionalidad”.

En cuanto a dichas respuestas, los estudiantes se enfrentaron a la comprensión de los números racionales llevados por la ubicación contextual de la situación pues al llegar a las respuestas, algunos estudiantes inquirieron: “Profe, cómo así que ocho tercios de naranja”; esto tratando de comprender la respuesta en el contexto de la situación. Por lo que fue necesaria mi intervención para ayudarles a comprender las respuestas y, una vez que los estudiantes le hallaron sentido a los números racionales, sirvieron de apoyo a aquellos que se iban encontrando con la misma dificultad.

Otra de las reacciones a esta situación conflictiva para mis estudiantes al obtener las respuestas racionales fue caer en un estado de abstracción pues creyeron que habían cometido errores algorítmicos por lo que miraban lo que hicieron, lo revisaban, borraban y re-hacían los procedimientos algorítmicos tratando de llegar a respuestas numéricas definidas por enteros. Eso sí, hay que decir, para terminar con este acontecimiento, que algunos estudiantes pasaron por encima de las respuestas sin preocuparse por la característica de esta ni menos por esforzarse por comprenderlas.

De esta manera, se alcanzaron los siguientes objetivos a través de la actividad: leer, interpretar y utilizar números enteros y racionales, expresados de forma acorde con el tipo de actividad que se esté realizando; adquirir destreza en el manejo de los algoritmos propios de la proporcionalidad construidos hasta este nivel; reconocer la utilidad del concepto que se construía –y por añadidura, de los números racionales–; identificar en situaciones de la vida cotidiana relaciones de proporcionalidad directa o inversa entre magnitudes; aplicar los conceptos de proporcionalidad para resolver situaciones problemáticas; reconocer las relaciones que ligan los datos e incógnitas en los problemas y utilizar las propiedades adecuadas para hallarlas.

Además, se alcanzaron –como en las otras Cartillas– objetivos que atañen aspectos actitudinales: desarrollar significativamente la tendencia a entender y comprender el significado de los resultados obtenidos y del proceso seguido en su búsqueda; disposición favorable a la revisión y mejora de cualquier cálculo; perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas; y –lo más importante para el autoestima y el autoconcepto de los estudiantes– adquirir confianza en las propias capacidades para afrontar y resolver problemas.

Referente a la segunda actividad, también es de mezclas; exactamente, es una receta; y fue tomada de Obando, Vanegas, y Vásquez (2007).

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B – COLORADOS

2. Cuando los profesores van a almorzar donde Rosita, ellos quedan muy satisfechos con una sopa de cebolla que ella prepara. Cierto día, la profe Chelita le preguntó a Rosita cómo la preparaba, y ella le respondió: Profe, para preparar dos platos de sopa uso los siguientes ingredientes:

8 cebollas
3 tazas de agua
2 cubos de caldo de gallina
2 cucharadas de mantequilla
½ taza de crema de leche
Sal y pimienta al gusto

Piensa:
Si Rosita prepara sopa para cuatro profesores, ¿cuántos cubos de caldo de gallina serían necesarios? ¿Alcanza una taza de crema de leche? ¿Sobra? ¿Falta? ¿Cuánto?

Si en su casa la profe Chelita, quiere preparar sopa para ella sola, ¿qué cantidad de ingredientes debería usar en la preparación?

Y si la profe invitara a toda al familia a degustar la sopa de cebolla, ¿qué cantidad de ingredientes serían necesarios para prepararla si en total son 12 personas en la familia?

Figura 11. Situación problema de mezclas 2 de la cartilla “En la cumbre de la Proporcionalidad”.

Como consecuencia del esfuerzo de comprensión de la situación anterior, abordar este problema fue una actividad más tranquila ya que al resolver un problema, el estudiante dota de sentido y significado la prácticas matemáticas realizadas ya que comprende su finalidad. Sin embargo, para que esta situación tuviera significado dentro del proceso de enseñanza, presentaba dentro de los ingredientes cantidades representadas por números racionales lo cual impactó a los estudiantes quienes evidenciaron su incomodidad para realizar actividades en las cuales se involucre este campo numérico. De esta manera se trabajaron dos situaciones problemas enmarcadas en los problemas de proporcionalidad de regla de tres –en este caso compuesta– ya que se conocen tres de los cuatro datos que componen una proporción y se requiere calcular el cuarto. Así, el conocimiento de una razón a partir de los datos dados en el problema permitiría hallar el valor de la otra, eso sí cuidando el orden en el cual se establecían las razones y cómo se aplicaban los algoritmos ya que aunque la multiplicación es conmutativa, en el contexto de las magnitudes se debe reconocer que, como lo clarifican García y Serrano (1999, p. 23), “la multiplicación no es semánticamente conmutativa y por consiguiente de una misma situación se pueden construir situaciones diferentes y, por ende, obtener respuestas diferentes”.

Por otro lado, la notación y el razonamiento de proporcionalidad que se pone en juego cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones toma el valor 100 se utiliza en una amplia variedad de situaciones de la vida diaria. Por tal razón no se podía pasar por alto el trabajo con el porcentaje dentro de los problemas de regla de tres que es la última actividad presentada como actividad matemática en el proceso de construcción del concepto de proporcionalidad. Así, los estudiantes manejaron el porcentaje como “parte-todo” estableciendo así las proporciones necesarias para resolver las situaciones propuestas: Una, determinar entre dos opciones dadas de descuento de un computador, cuál sería la mejor compra a hacer si se quería invertir poco. Dos, calcular el valor del IVA de un producto para determinar el valor final a pagar. Por último, la Cartilla proponía a los estudiantes realizar un texto expositivo sobre su comprensión de la proporcionalidad.

Finalmente, como resultado de las situaciones incluidas en los recursos ya detallados, las clases con los estudiantes se dieron en ambientes de diálogo e inquisición sobre la razón de ser de los conceptos aprendidos, así los estudiantes establecieron relaciones y vínculos entre el conocimiento aprendido y el mundo, vislumbrando do el por qué y para qué del proceso vivido. Con esto concluye la relatoría del material didáctico que develó el derrotero del aprendizaje de los estudiantes proceso en el cual los apuntes definitivamente asumieron gran protagonismo por el hecho de escritura que representaron y que, por ende, colaboraron en la construcción del concepto tratado pues la escritura, como ya lo he expuesto, transforma los conocimientos, los enriquece y favorece la construcción de nuevos conocimientos dado el ejercicio de cognición que esta implica y los procesos de metacognición que desarrolla.

2.3. ACTIVIDADES PRECURSORAS

Llamaré Actividades Precursoras (AP) a las actividades didácticas que posibilitaron la construcción de las bases del Proyecto y que favorecieron la continuidad de la construcción del concepto de proporcionalidad. Estas son: Prueba Diagnóstica (PD), AP de la Cartilla 1, AP de la Cartilla 2. Veamos:

"¡¡ CORRE FOREST !!"

PRUEBA DIAGNÓSTICA

> "Por eso mismo pensar acertadamente impone al profesor o, en términos más amplios, a la escuela, el deber de respetar no sólo los saberes con que llegan los educandos, sobre todo los de las clases populares -saberes socialmente construidos en la práctica comunitaria-, sino también, como lo vengo sugiriendo hace más de treinta años, discutir con los alumnos la razón de ser de esos saberes en relación con la enseñanza de los contenidos", Freire (1998, p. 31).

En ese pensar sobre cómo y desde dónde iniciar las actividades del Proyecto surgió la pregunta "¿cuáles son los precursores del razonamiento proporcional de mis estudiantes?". Esta pregunta fue importante para el proceso ya que de allí surgió el punto partida del proyecto pues "en el camino hacia la constitución del objeto mental proporcionalidad desempeñan un papel importante los objetos mentales precursores del razonamiento proporcional", Fernández (2001, p. 58).

Así, diseñé la siguiente prueba diagnóstica para determinar si los estudiantes reconocían los conceptos dentro del escenario preparado. Este escenario fue recreado desde la novela –y después película– "Forest Gump" de Winston Groom.

La PD, además atiende al principio de respetar los saberes de los estudiantes pues partir de un "supuesto" lo que haría es atropellarlos y, muy seguramente, entorpecer el proceso de enseñanza que se pretende iniciar.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B – COLORADOS

Nombre ______________________ **Grado 7 B** **Fecha 06/10/07**

¡¡ CORRE FOREST !!

Forest Gump antes de emprender su viaje le pidió a Jenny, su amiga de toda la vida, que le preparara un refresco para llevar y tomar por el camino. Transcurridos 80 minutos, y con un fuerte sol de compañía, Forest sacó su termo para saciar su sed con el refresco que Jenny le preparó. Después de tomar con tanta ansiedad, exclamó: "Este refresco está tan dulce que me va dar más sed". Según lo anterior:

a. ¿Podrías explicar el motivo que llevó a Forest a expresar tal cosa?
b. ¿Cómo solucionarías el problema de lo "tan dulce" que está el refresco? ¿Puedes resolver el problema con la información dada? Si es así, escribe ampliamente como lo solucionarías; si no, menciona cuáles datos necesitarías y propón, según tu experiencia con los refrescos, la posible solución para mejorarle el refresco a Forest.

Ahora, como Forest no era cualquier caminante, él recorría sus trayectos corriendo por lo que desarrolló en sus piernas una impresionante habilidad como corredor y, por ende, su rapidez le permitía recorrer cada hora 25 kilómetros. Si sus piernas corrían 780 minutos diarios, ¿cuántos kilómetros recorría entonces? Escribe cada razonamiento que realizas para dar tu respuesta.

Forest corrió de costa a costa corriendo continuamente a lo largo de tres años, dos meses, catorce días, y dieciséis horas. Su dedicación inspiró un movimiento de corredores, incluyendo a una multitud que corrió tras él. Si el primer día que empezó a unírsele gente a Forest había por cada 7 hombres 4 mujeres, y en total había 1250 mujeres, ¿cuántos hombres había en la carrera ese día?

Finalmente, un día, Forest decidió dejar de correr y recibió una carta de Jenny pidiéndole que la visitara. Forest se reunió con Jenny y su pequeño hijo. Jenny le dice que el niño se llama Forest, y luego que él era su padre. Después de conocerse, Forest y su pequeño hijo salieron al parque a comer helado en un día soleado. Sentados en una banca, ambos observaron las sombras proyectadas de dos árboles como se muestra en la figura. ¿Cuál es la razón de la altura de cada árbol con respecto a su sombra? Una vez la tengas, ¿podrías decir qué tienen en común?

Finalmente, Jenny y Forest Jr. se mudan con Forest a Greenbow, Alabama, y se casan.

Figura 12. Prueba Diagnóstica (PD).

La producción de texto en la que se enmarca la PD, es de mí autoría. No obstante, la actividad de proporcionalidad que se debe establecer entre la altura de los árboles y sus respectivas sombras, fue tomada de Mojica y Buitrago (2007). El objetivo que se pretendía alcanzar con la prueba era indagar e identificar los saberes de los estudiantes alrededor de los precursores del pensamiento proporcional esto teniendo en cuenta a Fernández (2001).

Es importante decir, respecto al escenario de la PD, que dentro de mi práctica pedagógica suelo presentar los conceptos matemáticos en situaciones problemas ya sean reales o contextualizadas en algún cuento, novela, película, etc. en aras de reducir el procedimiento mecánico con el cual los estudiantes abordaban la tarea matemática y favorecer la aplicación de las fases que se deben seguir al resolver un problema, mencionadas específicamente por García y Serrano (1999, p. 36): "Lectura, comprensión, traducción o elaboración de un plan, cálculo o ejecución del plan, solución y revisión, comprobación según el contexto del problema".

REGLETAS DE CUISSENAIRE Y LÁMINAS ILUSTRATIVAS

AP DE LA CARTILLA 1

Para dar inicio a las actividades en el salón de clase, presenté las regletas de Cuissenaire y dos juegos de láminas ilustrativas. El objetivo general con estas actividades era construir el concepto de razón haciendo uso de contextos familiares al estudiante. Para ello se requería de la exposición a los estudiantes de situaciones que les permitiera construir el concepto de razón (interna y externa) partiendo de situaciones cualitativas para llegar a las cuantitativas, lo que implicaba –dado que el tema era nuevo– motivar e involucrar en la actividad a los estudiantes presentándoles un material que llamara su atención para de esta manera empezar a trabajar cuantitativamente el concepto.

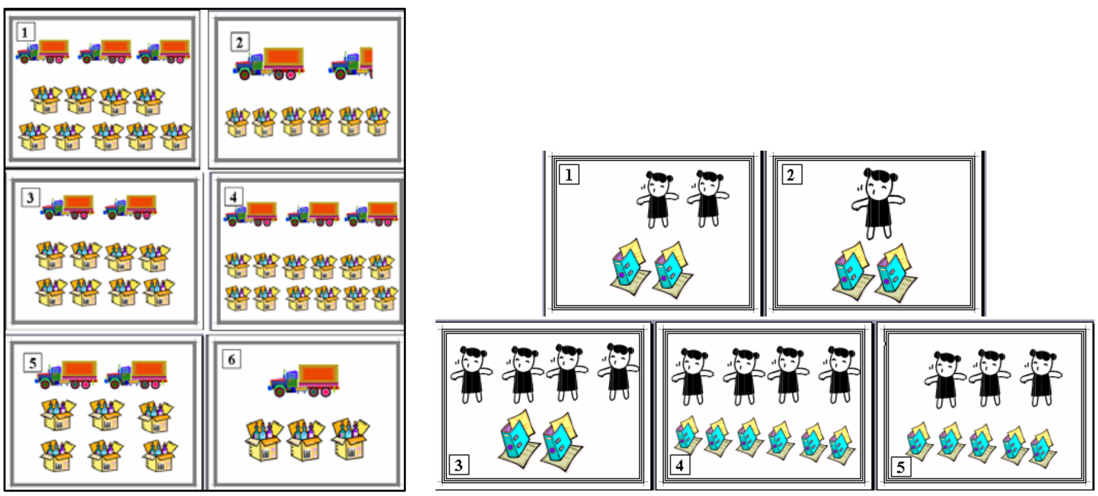
Fue así que en las regletas encontré un excelente recurso para motivar a los estudiantes e involucrarlos en la actividad de clase que sería ante todo de discusión. Los autores Baena y Vega (2007) realizaron una propuesta de investigación a través de la cual le enseñaron a niños de sexto grado a trabajar los conceptos de razón y proporción usando las regletas de Cuissenaire[9], siendo, por ende, esta la fuente de la actividad que realicé como apertura del Proyecto; consiguiendo de esta manera involucrar a los estudiantes en la actividad, incluso a aquellos que nunca estaban dispuestos para la clase de matemáticas dada la novedad del material para ellos.

De esta manera, los estudiantes –trabajando en grupos de tres integrantes– empezaron a manipular el material clasificándolo según sus características (color, longitud). Después del espacio de reconocimiento, los estudiantes organizaron las regletas teniendo en cuenta su longitud, obteniendo de esta manera una escala desde la más pequeña (que es la unidad) hasta la más grande, cuya longitud es 10 veces la unidad. Cada regleta, representa así un número natural del 1 al 10; de esta manera se establece una correspondencia biunívoca entre el color de la regleta y los números (véanse las Fotos de abajo). Y con este reconocimiento y esta convención del material observable y aceptada por todos, empezamos a comparar las regletas por sus longitudes bajo la *condición* "ser el doble de".

Fotos 1. Izq. Material didáctico para la enseñanza de matemáticas: Regletas de Coussinaire.
Der. Estudiante comparando las regletas bajo la relación "ser el doble".

[9] Cabe aclarar que las regletas Cuissenaire son un material didáctico destinado básicamente para que los niños aprendan la composición y descomposición de los números e iniciarles en las actividades de cálculo, todo ello sobre una base manipulativa.

El material didáctico proporcionó tal facilidad para hacer la tarea de relación que, una vez, agotadas las relaciones, recurrí al lenguaje matemático para representar la actividad. Inicialmente, se hizo estableciendo convenciones para los colores y así poder escribirlas, p.e., para escribir que "la roja es el doble de la blanca", escribimos "r:b". Después, los mismos estudiantes realizaron la razón pero numéricamente: 2:1. Y de esta manera se establecieron las demás y, asimismo, se desglosó la actividad hasta que se introdujeron términos como "relación", y "magnitudes". Para dar espacio a las razones externas y establecer razones equivalentes, presenté el siguiente material didáctico: Láminas Ilustrativas (dos juegos).



Figuras 13. Láminas para establecer razones equivalentes.

Estas láminas se trabajaron bajo la pregunta orientadora: "¿Hay algunas láminas en las cuales la razón entre las cajas y los camiones sea la misma?" Dada una lámina, los estudiantes debían seleccionar otra que tuviera la misma razón entre el número de objetos. Una vez trabajadas las láminas, se realizó el análisis comparativo de las razones con las obtenidas con las regletas, de esta manera se distinguieron "razones internas" y "razones externas", "magnitudes homogéneas" y "magnitudes heterogéneas".

Es de anotar que, cuando empezamos a trabajar las relaciones con las regletas, sin introducir el término "razón", para ayudarles a los estudiantes a distinguir las razones sin usar el término me refería a este como el “algo oculto” que relaciona una lámina con otra. Veamos cómo este recurso semántico influyó en el aprendizaje:

> – ¿Bryan, por qué dice que podemos relacionar la Lámina 1 con la 6 [ver Figura 19, juego de láminas de la izquierda]?
> – Porque en la [lámina] 1 es 3:9, en la [lámina] 6 es 1:3 y lo que oculta la 1 es que hay 1 camión para 3 cajas. Por eso digo que es 1:6.
> – De una manera más sencilla, ¿cómo puede describir la relación de una lámina con la otra?
> El estudiante observa y piensa y dice tímidamente:
> – *El triple*
> – Me pregunta o me afirma?
> – A*firmo.*
> – Mmmm…, “el triple”.
>
> (Grabación de clase, 9 de octubre de 2007)

El juego de láminas que aparece a la izquierda de la Figura 13, es una propuesta didáctica de Godino y Batanero (2002), los autores afirman que “esta tarea lleva a los alumnos a realizar una comparación numérica multiplicativa y no visual, e introduce la noción de razón como tasa (comparación de cantidades de magnitudes diferentes)” (ibíd. p. 22). Veamos el razonamiento que realizó Bryan:

> – Ese “triple”…. ¿Es aditivo o multiplicativo?
> – ¿Cómo así, Profe?
> – … ¿Con cuál número relaciona al “triple”?
> – Tres.
> – Bien. Ahora ese tres, ¿lo mira sumando o multiplicando en las láminas?
> – Pues multiplicando.
> – *Pues* amplíe –los compañeros se ríen–.
> – Pues no ve que si sumo tres [a la cantidad de carros de la lámina 6] le dan 4; y [en la lámina 1] hay es 3; y si [a la cantidad de cajas de la lámina 6] le suma 3, le da 6; y son 9.
> – ¿Entonces?
> – Pues multiplica 1 x 3, dan 3 cajas [de la lámina] de arriba; y 3 x 3 dan las 9 cajas. Y ahí sí está bien.
>
> (Grabación de clase, 9 de octubre de 2007)

En cuanto al segundo juego de láminas, el propósito de este era que los estudiantes comprendieran que es importante conocer las magnitudes que representa cada elemento que conforma la razón. Si el lector intenta encontrar un par de láminas que tengan la misma razón, hallará que no lo hay. Hay dos pares de láminas que propician una respuesta: 2:3.

Sin embargo, no se pueden relacionar como bien lo hizo notar otro estudiante del grupo, veamos:

– ¿Leidy, es correcto decir que 2:3?
– Sí.
– Noooo.
– ¿Por qué no, Manuel?
– Toca mirar bien, Profe, porque eso confunde. Estamos relacionando cantidad de niñas y cantidad de libros. En la lámina 2, la razón es 1:2; y en la 3, 4:2 o sea 2:1…
– Aja, ¿y?
– Son los mismos números pero eso no quiere decir que son las razones iguales.
– Leidy, ¿si ve por qué Manuel dice eso?
– No.
– Ay, pues porque en la [lámina] 2 hay una niña, y en la 3, el uno es para el libro. O sea que 1:2 es 1 niña es a 2 libros; y 2:1 es dos niñas y un libro. Y eso no es lo mismo.
– ¿Y eso no es lo mismo?
– No, no ve las láminas lo dicen.
– Muy bien, Manuel. ¿Recuerdan en los números naturales cuál es la propiedad que hace referencia a que 5x4 es igual a 4x5?
– ¡¡Conmutativa!!
– Entonces, según lo que dijo el compañero, ¿podemos hablar de conmutatividad entre razones?
– Nooo.

Así, de manera dialógica, participativa y orientada, los estudiantes a través de las actividades fueron realizando inferencias sobre lo visual para construir conceptos. Por otro lado, en cuanto al apunte, durante las sesiones que se necesitaron para estas actividades, solo al final de las clases se les decía a los estudiantes que realizaran su propio apunte independiente de si ya lo había hecho o no, además porque no mostraban iniciativa para producir el apunte.

Foto 2. Estudiante realizando su primer apunte.

CONSTRUYENDO TRIÁNGULOS CON PALILLOS

AP DE LA CARTILLA 2

Como actividad de apertura para la cartilla “Alcanzando la Proporcionalidad”, propuse una actividad de construcción y medición que requería de palillos. Con ellos construirían triángulos equiláteros de lado 1, 2, 3… n-palillos; y, se organizaría una tabla –en el tablero– para organizar los datos relacionando del triángulo la longitud del lado y su perímetro. Esta actividad es propuesta, nuevamente, por Godino y Batanero (2002). A través de la actividad pretendía introducir significativamente los términos “magnitudes directa e indirectamente proporcionales”, mostrarles cómo se organizan datos en un tabla, que distinguieran las razones dentro de la tabla e identificaran razones equivalentes y cómo estas forman una proporción.

Fue así como la actividad fue muy rica en participación y conexión con lo que se había trabajado. Sin embargo, al empezar la actividad, la interpretación de la indicación que hice para la construcción dio como resultado dos situaciones diferentes: “Haber, hagan un triángulo […]. Ahora hagan uno de lado dos palillos”. Observemos las siguientes Fotos:

Fotos 3. Construcción de triángulos de lado *n*-palillos.

Con esta pequeña anécdota de clase que da mucho para reflexionar, doy por terminada la relatoría de los recursos didácticos empleados en la metodología de enseñanza.

Para finalizar, quiero sintetizar la metodología de enseñanza expuesta a través de este Capítulo dado que fue el vehículo que permitió darle una caracterización diferente al apunte y protagonismo tácito dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El direccionamiento del razonamiento, como se pudo inferir, fue inductivo ya que en todo el proceso se sugirió al estudiante descubrir el principio general que regía las situaciones problema propuestas en las cuales se tuvieron en cuenta aspectos psicológicos como lo fueron los intereses, las necesidades y las experiencias del estudiante propiciando con ello un aprendizaje significativo para favorecer la construcción del nuevo conocimiento a partir de lo que el estudiante conocía.

Así, para concretar el objetivo de enseñanza, fue necesario orientar y guiar cada actividad. En este sentido adquirió gran importancia el tipo de relación interpersonal que se tejió en el proceso en aras de permitir y favorecer el aprendizaje, teniendo presente que “hay que partir de la idea de que el aprendizaje se entiende como un proceso gradual, no como algo acabado, y en este proceso se considera al estudiante como alguien que adquiere un conjunto creciente de procedimientos y conceptos que puede llegar a usar de forma autónoma” (Orrantia y Sánchez, 1994, p. 16).

Por ende, la relación profesora–estudiante fue democrática y dialógica. Y en medio de ese colectivo democrático, los estudiantes trabajaron de manera mixta sus actividades: algunas de manera individual y otras en grupo. Esta selección marcada por la necesidad que generaba la actividad de clase.

Finalmente, en esa dialéctica, incité a los estudiantes a esforzarse por comprender los conocimientos antes que fijarlos como conceptos rígidos y sin sentido, implicando esto justificaciones o fundamentaciones lógicas y teóricas que fueron presentadas por mí o investigadas por el estudiante –esta actitud de investigación se dio al final del proceso de aprendizaje–, enmarcándose así el proceso en el perfil hermenéutico ya mencionado.

CAPÍTULO 3

Actuaciones de los Estudiantes

INTRODUCCIÓN

Estaremos de acuerdo en que desde nuestra infancia, los seres humanos vamos adquiriendo y desarrollando una capacidad relacionada con el hecho de saber cuándo podemos hablar o cuándo debemos callar, y también sobre qué hacerlo, con quién, dónde, para qué y en qué forma e incluso aprendemos a tomar parte en eventos comunicativos y somos capaces de evaluar la participación nuestra y –con mayor ahínco– la de los otros.

Así, de la anterior retrospectiva me asalta una duda: ¿por qué no todos adquirimos y desarrollamos la capacidad relacionada con el hecho de saber cuándo debemos escribir, cuándo debemos no escribir y también sobre qué escribir, en cuál momento escribir, para qué escribir, qué es pertinente escribir y por qué no todos sabemos realmente para qué nos sirve escribir?, etc..

Me atrevo a asegurar que la respuesta inmediata que se elaboró al realizar la lectura de este ejercicio de escritura y reflexión es: "Pues porque no nos enseñaron". Entonces yo haría otra pregunta: ¿Por qué no nos enseñaron o fue que no aprendimos? ¿O las dos?

Si hablar y escribir están en una misma unidad (el lenguaje), ¿por qué en la educación –cultural e instititucional– se le da más énfasis a la enseñanza del lenguaje hablado mas no del lenguaje escrito, por qué se muestran tan separados y, aún más, tan desatendidas en la enseñanza y –por qué no decir– en el aprendizaje? Y si hablamos del caso de la enseñanza matemática, aquí el panorama es un tanto nubloso ya que, como anteriormente lo mencioné, el estudiante –por lo general– no escribe para aprender sino para mostrar lo aprendido.

El apunte es el elemento que conglomera el mayor ejercicio de escritura hecho por un estudiante en su año escolar, pero –más preguntas– cuánta inversión intencional y cognitiva hay en ellos, cuál es la proporción entre notas hechas porque el profesor dictó y aquellas realizadas autónomamente por el estudiante en pro de su aprendizaje; ¿o es que acaso los estudiantes definitivamente no escriben sino se les dice que lo hagan?…

3.1. AL SALÓN DE CLASES, LO QUE ES DEL SALÓN DE CLASES

Recordemos que Martínez, Navarro y Zamora (2006) concluyeron en su investigación que la metodología de enseñanza del profesor moldea, en mayor o menor grado, la manera como el estudiante toma apuntes pues dependiendo de esta se crea o no la necesidad de regular. Así, se atisba que si para el profesor no tiene importancia la toma de apuntes (el ejercicio de escritura) muy difícilmente lo tendrá para el estudiante y mucho menos se creará las condiciones necesarias en el salón de clase para darle protagonismo al apunte más allá del registro orientado por el dictado. No obstante, a través de este Proyecto no pretendo atacar a quien usa como directriz de metodología de enseñanza el libro de texto y el dictado –eso sería olvidar que yo misma lo he usado–. En cuanto al libro de texto y los apuntes, Godino, Batanero y Font (2000, p. 125) se refieren así:

> El recurso didáctico más común en la enseñanza de cualquier tema es el libro de texto. Por ello es importante tener un criterio para elegir los que se han de recomendar a los alumnos. El libro de texto "conserva y transmite" de alguna formal el conocimiento matemático, puesto que el alumno lo usa como referencia, cuando tiene que resolver un problema o recordar una definición o propiedad. La importancia del libro de texto es resaltada en diversos documentos:
> • En el denominado Informe Cockcroft[10] se afirma que "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula".
> • En Rico[11] encontramos que "el libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado, que se puede encontrar fácilmente y con respecto al cual el único trabajo posible consiste en su asimilación. Su determinación ya está hecha, y su base fundamentalmente es "científica", apoyada por la tradición y la experiencia. Como el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir".
> • Romberg y Carpenter[12] por su parte indican que "el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro.

[10] Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan.* Madrid: MEC (p. 114).
[11] Rico, L. (1990). *Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural.* En Llinares, S. y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar (p. 22).
[12] Romberg, T. A. y Carpenter, T. P (1986). *Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry*. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 850-869). New York: McMillan (p. 867).

Anteriormente suscité algo referente sobre *"la propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro"*. Como efecto de la metodología aplicada, la forma cómo los estudiantes concebían mi práctica pedagógica empezó a transformarse ya que el material didáctico le aportó algo diferente *para ellos*. El material de clase impactó en el ambiente de aprendizaje pues este motivó a los estudiantes a por lo menos tenerlo, abrirlo, revisarlo y leerlo –un detalle tan *sencillo* genera un cambio facilitador en el proceso de enseñanza-aprendizaje–.

Por ende, el apunte realizado por los estudiantes no fue el que se realiza en una clase regular; no. La orientación dada al apunte se acerca a la siguiente afirmación que hacen Godino, Batanero y Font (ibídem, p. 125): "Los apuntes también pueden proporcionar información al profesor sobre lo que sus alumnos aprenden".

A esto, y según los propósitos de este Trabajo, añadiría: Permiten observar y analizar el *sentido* que le dan al discurso académico del profesor en el proceso de enseñanza; permiten analizar el razonamiento empleado en el proceso de aprendizaje; asimismo, se pueden convertir en el regulador del aprendizaje y de la construcción de nuevos conocimientos ya que al escribir el estudiante está tomando consciencia de cómo iba su proceso, pues el ejercicio de escritura le exigía claridad cognitiva sobre el objeto de escritura, por lo que el apunte le permitía desarrollar procesos de autorregulación y metacognición.

De este modo, como bien afirma Valery (2000, p. 41), "la escritura en tanto que es una actividad conscientemente dirigida, nos ayuda a organizar nuestro pensamiento y a elaborar nuevos conocimientos. Al mismo tiempo que nos permite la expresión de ideas y sentimientos, que podemos comunicar y compartir con los otros a través del tiempo y del espacio".

Haciendo hincapié, desde esta perspectiva, Valery (ibídem, p. 40) asevera que "el lenguaje oral aparece como una actividad espontánea, mientras el lenguaje escrito exige un trabajo consciente y analítico, porque si bien el lenguaje oral abstrae la realidad y la representa en palabras, el escrito requiere de un mayor nivel de abstracción, un segundo nivel de simbolización, porque en él no sólo las palabras son remplazadas por signos alfabéticos sino también los elementos no verbales como la sonoridad, los gestos, las intenciones deben ser puestos en palabras escritas, sintácticamente organizadas para ser transmitidas en toda su significación".

Fue así como la metodología de enseñanza requirió de la puesta en marcha de capacidades lecto-escritoras de los estudiantes para transitar el derrotero marcado por las Cartillas y así construir el concepto de proporcional, lo cual para mis estudiantes resultó un requerimiento de gran exigencia por lo que, aunque en la génesis de Proyecto se dieron el interés y la motivación de todos los estudiantes del grupo por el proceso de enseñanza, estos no fueron elementos suficientes pues sacar de su posición pasiva a los estudiantes acostumbrados a que el profesor les demarque todo el proceso de aprendizaje.

Para dar inicio al Proyecto consideré prudente ser explícita con mis estudiantes por lo que les expresé que durante el proceso no habría dictados sino que serían ellos quienes por su propia cuenta construirían los apuntes. Así, dado que yo conocía el perfil anotador de los estudiantes, les mostré lo que esto implicaba para que tuvieran clara la meta que se quería conseguir a través del proceso de enseñanza y aprendizaje en este aspecto pues, según Orrantia y Sánchez (1994, p. 17), "tenemos que tener presente que si el estudiante no tiene clara la meta que se quiere conseguir a través del proceso de enseñanza y aprendizaje, no valorará sus progresos, y además estará en constante dependencia del profesor. Y si consideramos que otros de los principios del aprendizaje es lograr la autonomía del estudiante, es decir, que aprenda a aprender, el profesor debe compartir este conocimiento con el estudiante".

Así, las actividades se iniciaron con todos los estudiantes pero de manera paulatina el grupo del Proyecto se fue reduciendo ya que, debido a la metodología implementada algunos de los estudiantes no tomaban apuntes y otros, debido a sus ausencias a clase, interrumpían el proceso lo cual era contraproducente para el desarrollo y el avance del proceso de aprendizaje aparte de que los estudiantes prestaban cuadernos para adelantarse desfigurando los propios para efectos de esta Investigación.

No obstante, con el grupo completo de Séptimo B del Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados) inicié las actividades del Proyecto el 6 de octubre de 2007 con 14 niños y 15 niñas hasta la socialización de la Cartilla 1. En este punto fue necesario separar al grupo pues algunos estudiantes no estaban aprovechando el Proceso, así que trabajé dos grupos: el del Proyecto (11 estudiantes: 9 niñas y 2 niños), y el de clase regular (los restantes).

Con el segundo grupo, trabajé la metodología sobre la que tanto he reflexionado: libro de texto y demás. Con el del Proyecto, se continuó la metodología tal cual se había planificado. Trabajar con los dos grupos fue difícil, pero gracias a la autorregulación del segundo fue posible.

Por lo tanto, de los datos recogidos, se tomaron en cuenta para el análisis aquellos que pertenecían a los estudiantes que siempre fueron los autores de sus apuntes y que vivieron el proceso de aprendizaje completo. No existe, como puede evidenciarse, una metodología perfecta y única que sea capaz de resolver todos los problemas del salón de clases puesto que los estudiantes tienen diferentes estilos de aprendizaje y existen diversos contenidos y contextos que exigen diversas formas de enseñanza. El principal problema es la resistencia del estudiante a ser activo en su aprendizaje. Esto es así, se podría decir, porque los modelos tradicionales de enseñanza así lo han fomentado y, sobre todo, *porque no se aprecia* el aprendizaje significativo y estratégico para el rendimiento.

Finalmente, en lo que sigue de este Capítulo quiero mostrar ese sentido y significado que los estudiantes le dieron al concepto de proporcionalidad y que al mismo tiempo afectó el sentido de la toma de apuntes lo cual favoreció la conceptualización del nuevo conocimiento. La manera en la cual expondré los apuntes de los estudiantes estará mediada por sus voces, el marco teórico y mi voz.

3.2. OTRA CARACTERIZACIÓN DE LOS APUNTES EN CLASE DE MATEMÁTICAS

3.2.1. Los que le apuntaron al Proceso

Antes de dar a conocer los estudiantes que hacen parte del análisis, presentaré las pruebas diagnósticas para visualizar los presaberes de cada uno de ellos. Así, el propósito de 1ª parte de la PD era identificar cualitativamente nociones de covariación y la tasa entre la cantidad de azúcar y la cantidad de agua con la cual se hizo el refresco. Veamos:

Forest Gump antes de emprender su viaje le pidió a Jenny, su amiga de toda la vida, que le preparara un refresco para llevar y tomar por el camino. Transcurridos 80 minutos, y con un fuerte sol de compañía, Forest sacó su termo para saciar su sed con el refresco que Jenny le preparó. Después de tomar con tanta ansiedad, exclamó: "Este refresco está tan dulce que me va dar más sed". Según lo anterior:

a. ¿Podrías explicar el motivo que llevó a Forest a expresar tal cosa?
b. ¿Cómo solucionarías el problema de lo "tan dulce" que está el refresco? ¿Puedes resolver el problema con la información dada? Si es así, escribe ampliamente como lo solucionarías; si no, menciona cuáles datos necesitarías y propón, según tu experiencia con los refrescos, la posible solución para mejorarle el refresco a Forest.

1 a) porque su refresco esta muy dulce y cada vez que tomara le daba mas sed

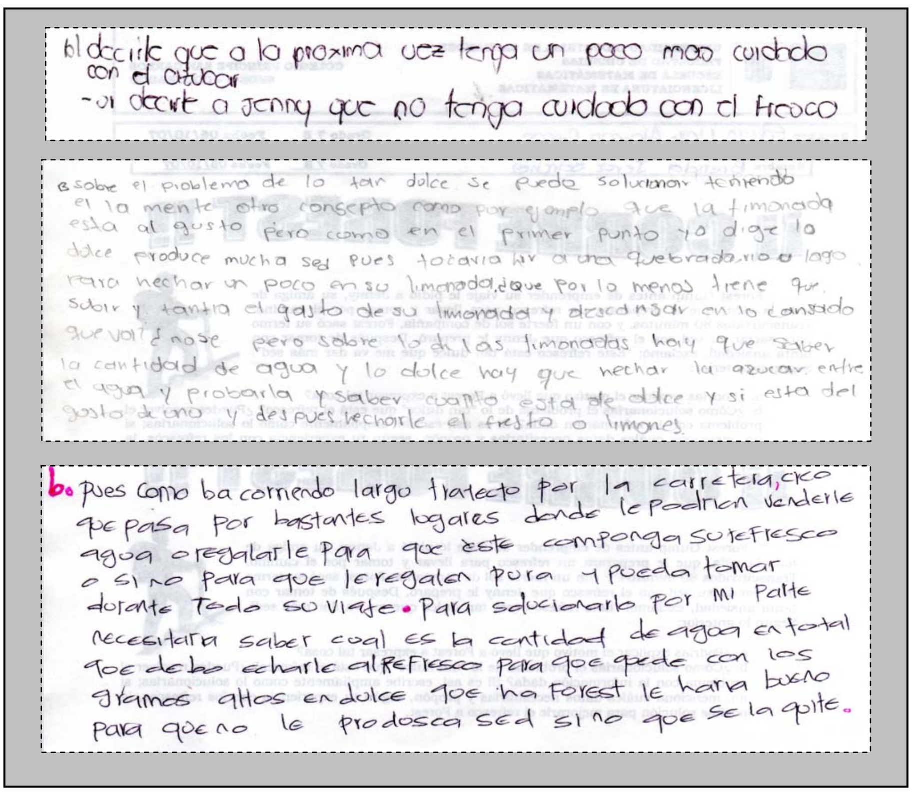
A. Porque el camino era demaciado largo y la limonada estaba muy dulce y ello en verdad para el ser humano lo dulce nos produce mucha sed y nos seca la garganta.

a. Pues el motivo que llevo a Forest a exclamar tal cosa fue, porqué al probar su refresco noto que este estaba muy dulce, y como es un corredor necesita un liquido que mate su sed, y no que le de más.

Figuras 14. Prueba Diagnóstica (PD), 1ª parte, y respuestas literal a, 1ª parte PD. En orden descendente: Edwin Alarcón[13], Brenda Jérez[14], y Sandra M. Hurtado.

[13] Su apunte: "1 a) porque su refresco esta muy dulce y cada vez que tomara le daba mas sed".
[14] Su apunte: "A. Porque el camino era demaciado largo y la limonada estaba dulce y ella en verdad para el ser humano lo dulce nos produce mucha sed y nos seca la garganta".

De esta manera, podemos observar que al no mencionar explícitamente las magnitudes involucradas, los estudiantes terminaron relacionando la “cantidad de dulce” con la “cantidad de sed” siendo está última mal categorizada ya que esta es un estado, una necesidad. Sin embargo, mostraron nociones de covariación (ver apunte de Edwin) ya que infirieron que las *magnitudes* estaban relacionadas de tal forma que el cambio en una de ellas, determinaba cambio en la otra. En cuanto al apunte realizado, se puede observar que Edwin fue más preciso y puntual que las dos estudiantes ya que ellas se quedaron empantanadas en la retórica de la situación. Sin embargo, si comparamos el apunte de Brenda con el de Sandra, Brenda no mostró relación causal o lógica entre las ideas mientras que el apunte de Sandra, además de poseer esta característica de cohesión, manejó coherentemente otros recursos lingüísticos para la elaboración de la respuesta mostrando con ello su disposición y habilidad en las tareas de lenguaje escrito. Veamos ahora, las respuestas al literal b de la primera parte:


b) decirle que a la proxima vez tenga un poco mas cuidado con el azucar
-vi decirle a Jenny que no tenga cuidado con el fresco

B sobre el problema de lo tan dulce se puede solucionar teniendo en la mente otro consepto como por ejemplo que la limonada esta al gusto pero como en el primer punto yo dije lo dulce produce mucha sed pues tocaria ir a una quebrada, rio o lago para hechar un poco en su limonada ¿que por lo menos tiene que subir y tantia el gusto de su limonada y descansar en lo cansado que va? ¿no se pero sobre lo de las limonadas hay que saber la cantidad de agua y lo dulce hay que hechar la azucar entre el agua y probarla y saber cuanto esta de dulce y si esta del gusto de uno y despues hecharle el fresco o limones

b. pues como ba corriendo largo trayecto por la carretera, creo que pasa por bastantes lugares donde le podrian venderle agua o regalarle para que este componga su refresco o sino para que le regalen pura y pueda tomar durante todo su viaje. Para solucionarlo por mi parte necesitaria saber cual es la cantidad de agua en total que debo echarle al refresco para que quede con los gramos altos en dulce que ha Forest le haria bueno para que no le produsca sed sino que se la quite.

Figura 15. Respuestas literal b, 1ª parte, PD.

Nuevamente, vemos que Edwin escribió su respuesta concretamente aunque no hizo uso de ningún procedimiento matemático, solo usó recursos situacionales propios del contexto para dar su respuesta. Además, pareciera que Edwin no realizó revisión del texto que escribía aunque sí releyó el texto original, esto lo digo por la rayita que aparece en la tercera línea de su respuesta, y porque su frase empezó “si decirle…”, lo cual muestra que realizó un proceso de control de lo que escribía sobre lo que leía pero no sobre lo que escribía ya que se contradijo: “si decirle a Jenny que no tenga cuidado con el fresco”.

En la respuesta de Brenda y Sandra, nuevamente notamos que estructuraron una respuesta bastante bondadosa en número de palabras. Brenda hizo explícitas las dos magnitudes involucradas en la situación y continuó con su análisis cualitativo situacional. Sandra, por su parte, compuso su respuesta en dos escenarios: (1) Forest en la situación, y (2) ella en la situación; lo que evidencia su apropiación de la situación y, por ende, analizó la situación refiriéndose a las magnitudes involucradas y, además, empleó unidades para una de las magnitudes volviendo finalmente a la situación original. Ahora veamos la segunda parte de la PD:

> Ahora, como Forest no era cualquier caminante, él recorría sus trayectos corriendo por lo que desarrolló en sus piernas una impresionante habilidad como corredor y, por ende, su rapidez le permitía recorrer cada hora 25 kilómetros. Si sus piernas corrían 780 minutos diarios, ¿cuántos kilómetros recorría entonces? Escribe cada razonamiento que realizas para dar tu respuesta.

Figura 16. PD, 2ª situación problemática.

En esta parte de la PD, se presentó al estudiante una razón normalizada para que fácilmente la reconociera y de esta manera observar si lograba resolver el problema de valor perdido implícito en la situación. En la Figura 17 se podrá observar que Sandra convirtió unidades realizando una regla de correspondencia entre horas:minutos, hallando la equivalencia numérica correcta dado que la tasa era unitaria, y del mismo modo logró determinar la cuarta proporcional sin mayor inconveniente dado que las tasas eran unitarias.

De esta manera, resolvió el problema aplicando estructuras multiplicativas. Por otro lado, el lector notará en la Figura 17 que a la pregunta de la situación no se le asignó literal; mas Sandra, en su respuesta, continuó con el orden alfabético lo cual podría, o ser una sencilla casualidad, o ser reflejo de orden y sistematización. Por su parte, Brenda no abordó el resto de la PD.

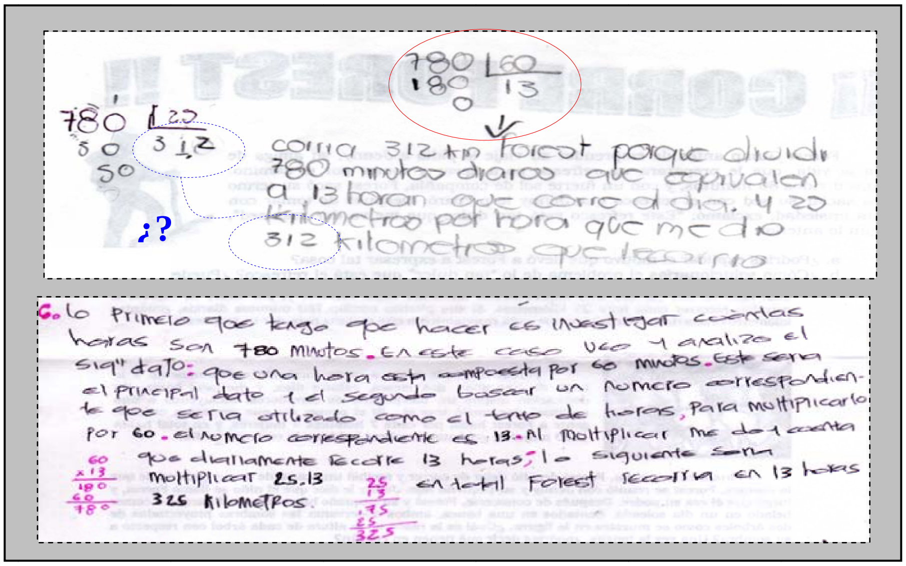


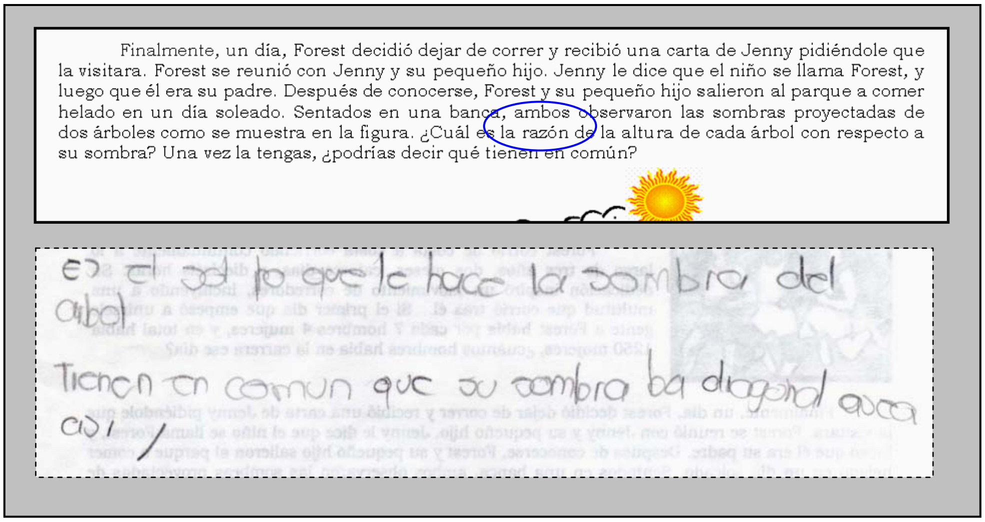
Figura 17. Respuestas 2ª parte, PD.

En cuanto a Edwin, dado que había una tasa normalizada ("cada"), también fácilmente determinó la equivalencia entre las unidades de magnitud lo cual muestra que en los problemas que tienen explícitamente el término "cada" en el enunciado favorece la formación de objetos mentales en relación con la razón.

Forest corrió de costa a costa corriendo continuamente a lo largo de tres años, dos meses, catorce días, y dieciséis horas. Su dedicación inspiró un movimiento de corredores, incluyendo a una multitud que corrió tras él. Si el primer día que empezó a unírsele gente a Forest había por cada 7 hombres 4 mujeres, y en total había 1250 mujeres, ¿cuántos hombres había en la carrera ese día?

Figura 18. PD, 3ª situación problemática.

Esta situación tenía la misma estructura que la anterior, la diferencia radicaba en que las razones ya que no estaban normalizadas lo que –tal cual se esperaba– complicó la actividad matemática para los estudiantes por lo que no la abordaron. Por otro lado, en lo que respecta a la última situación, los estudiantes le dieron un sentido totalmente fuera del contexto matemático a la palabra “razón” que se incluyó en el texto. Veamos:



Finalmente, un día, Forest decidió dejar de correr y recibió una carta de Jenny pidiéndole que la visitara. Forest se reunió con Jenny y su pequeño hijo. Jenny le dice que el niño se llama Forest, y luego que él era su padre. Después de conocerse, Forest y su pequeño hijo salieron al parque a comer helado en un día soleado. Sentados en una banca, ambos observaron las sombras proyectadas de dos árboles como se muestra en la figura. ¿Cuál es la razón de la altura de cada árbol con respecto a su sombra? Una vez la tengas, ¿podrías decir qué tienen en común?

es el sol lo que le hace la sombra del arbol

Tienen en comun que su sombra ba diagonal aca asi /

Figuras 19. Contrates de la 4ª situación problemática con la respuesta Edwin.

Es así como esta respuesta está absolutamente impregnada por el sentido del estudiante siendo este el recurso cognitivo para solucionar la 1ª situación problema que componía la PD.

Finalmente, se resalta que los estudiantes llegan a la escuela con un cúmulo de saberes culturales que de una manera u otra emplean en la actividad de aprendizaje diaria y que muchas veces representa un obstáculo para la enseñanza dado que el estudiante no abandona el significado cultural que le permite a él darle sentido al término en otro contexto. Fue así que con la revisión de estas, y las demás PD, llegué a la conclusión de que las actividades debían arrancar desde razón para conceptualizar debidamente el concepto base de la proporcionalidad.

3.2.2. El apunte: una dialéctica entre la escritura y el pensamiento

Para realizar la selección de los apuntes a analizar tuve en cuenta los siguientes parámetros: Diferencias individuales, rendimiento académico, habilidades lecto-escritoras, perfil de la toma de apuntes, ritmo de aprendizaje y, ante todo, que el estudiante no presentara ausencias durante el proceso de aprendizaje dado que aquellos que faltaron a clase presentaron dificultades en el avance de la construcción del concepto por los vacíos que quedaron en cuanto a la comprensión del mismo. De esta manera presento a los tres estudiantes[15, 16] que se tomaron en cuenta para el análisis de sus apuntes según el objetivo de este Proyecto.

JÉREZ Brenda, 13 años

Un niña responsable, con características personales muy particulares, conversadora aunque tímida, de carácter fuerte; estudiante de rendimiento regular en matemáticas aunque perseverante en sus actividades de aprendizaje. Regularmente, manejaba un locus de control externo pero como efecto del proceso de escritura este tomó características de interno. Aprendizaje basado en la repetición y la memoria.

En cuanto a los antecedentes en la toma de apuntes, siempre cuidaba del buen orden, pero cabía dentro de los anotadores copistas. Durante el período escolar, manejaba un perfil muy bajo en matemáticas en cuanto a participación por lo que cuando tomaba la iniciativa se mostraba muy insegura y esto afectaba su comunicación fluida y clara.

ALARCÓN Edwin, 12 años

Un niño también responsable aunque una que otra vez descuidado; práctico, recursivo, entusiasta, extrovertido, inquieto, ansioso e impaciente a la hora de trabajar actividades de esfuerzo por lo que tenía tendencias a abandonar la tarea cognitiva; presentaba un locus de control externo.

Sus antecedentes en la toma de apuntes: regularmente abandonaba la anotación copista para tomar nota de cosas que no se dictaban y realizaba consultas de lo que no entendía. Su participación en clase era activa.

---

[15] Los padres de los estudiantes autorizaron presentar sus nombres propios.

[16] En las descripciones de los estudiantes se usa el término “locus de control”. Este término es propuesto a partir de la teoría del aprendizaje social. El locus de control ubica a las personas en un continuo según la responsabilidad que aceptan sobre los eventos que experimentan -que pueden ser positivos, negativos o neutros-; así se muestra el grado en que un individuo percibe el origen de su propio comportamiento de manera interna o externa a él.

HURTADO Sandra Milena, 15 años

Una señorita con características de liderazgo, creativa, excelente estudiante, por ende responsable, perseverante y comprometida con sus actividades de aprendizaje; se mostraba ansiosa en las actividades aunque ello no influía en su perseverancia en las actividades ya que manejaba un locus de control interno. A la edad de 15 años cursaba séptimo ya que su escolaridad empezó tarde.

Sus antecedentes en la toma de apuntes eran copistas, sin embargo en clase era muy atenta e inquisidora; presentaba dificultades para expresar sus argumentos e inquietudes oralmente.

Siguiendo con la estructura mencionada al comienzo de este Trabajo, presentaré los distintos datos obtenidos a partir de los instrumentos utilizados (el apunte y las entrevistas), y serán analizados en torno a dos ejes temáticos: uno, proporcionalidad y, segundo, la toma de apuntes (lo concerniente a procesos escritores). De esta manera, se confrontarán los apuntes de los estudiantes como resultado de las diferentes actividades de clase, con las voces de los autores que hacen parte del marco teórico de este Trabajo y con mi interpretación como investigadora. Además, es necesario explicitar, que en los datos que se muestran a continuación, el lector encontrará texto en color verde, azul y naranja los cuales se usan como convención para presentar los interlocutores que intervienen en las entrevistas, así: Verde : Brenda, Azul : Edwin, Naranja : Sandra y Negro : Profesora. De igual forma, en las figuras que mostrarán los apuntes, habrá óvalos o líneas de colores que encerrarán aspectos relevantes en el apunte y que serán analizados.

Pues bien, empecemos por conocer cómo vivían los estudiantes la tomaba apuntes, esto lo haremos escuchando sus voces. Veamos:

(Entrevista, 28 de noviembre de 2007)

– […] ¿Usted normalmente cómo tomaba apuntes… de matemáticas? O ¿Qué copiaba en el cuaderno?
– Eeeh, no sé… Pues si usted me decía que copiara pues yo copiaba.
– ¿Y si no le decía lo que debía copiar?
– Pues no copiaba.
– ¿Y [ahora], quién era el que organizaba los apuntes: usted o yo?
– [Antes] usted… Ahora pues nosotros, digo, yo.

En este pequeño diálogo, notamos las características de anotador copista de Brenda; sin embargo, durante la toma de apuntes del Proyecto la reguló ella. Es interesante resaltar la salvedad que hizo al aclarar que fue *ella*, no la profesora ni "nosotros" (los compañeros y ella) quien realizó la toma de apuntes, asumiendo de esta manera la toma de apuntes de manera personal tanto así que nadie más cabía dentro de la tarea.

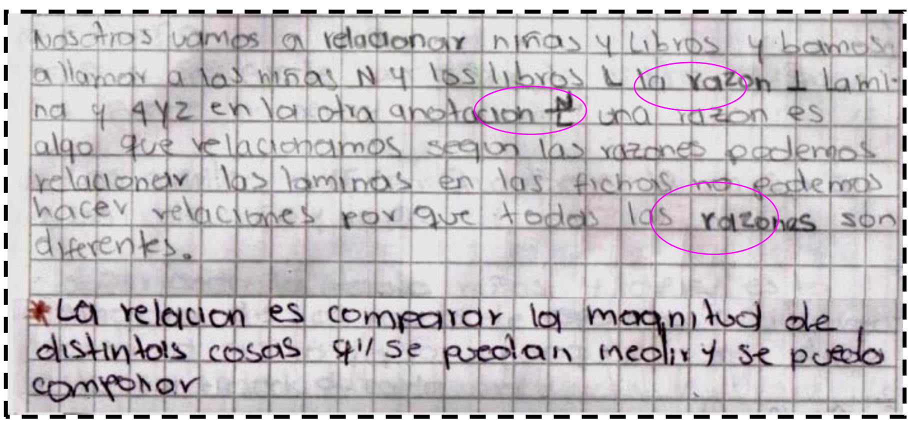
> – ¿Para usted cómo era antes escribir en clase: harto, aburrido, agradable, normal?
> – Ayy…
> – No; tranquila. Dígame que yo no la voy a regañar por eso.
> – Pues a veces eso era algo aburrido.
> – […] ¿Por qué tuvo dificultades para tomar apuntes aprendiendo proporcionalidad?
> – Pues porque no sabía cómo escribir… Yo sabía, pero es que no sabía cómo escribir, o sea yo sabía pero pues se me dificultaba decirlo bien.

Fácilmente se pudo notar lo comprometida que se sintió la estudiante frente a la pregunta pues dado que la persona que generaba el apunte la tenía al frente. Sin embargo, después de darle confianza tranquilamente mostró su, primero, posición frente a la toma de apuntes orientada y estructurada por la profesora y, segundo, lo insignificante que parecía resultar para su aprendizaje al referirse a la toma de apuntes con el adjetivo demostrativo "eso" que tiene una sonoridad de desagravio en la expresión. Asimismo, explicitó que su dificultad para expresarse se vio menguada por el ejercicio de escritura que realizó en la toma de apuntes. Respecto a esto, el lector recordará que Valery (2000) afirma que *la escritura en tanto que es una actividad conscientemente dirigida, nos ayuda a organizar nuestro pensamiento, lo cual se ve reflejado en el lenguaje oral*.

> – Pues lo que dictaba el profesor.
> – ¿Es decir?
> – Lo que el profesor dictaba y la actividades que *él* nos dejaba.

Según Atienza (1992, p. 26), "[…] aunque el profesor haya enmarcado el texto que ha de crear el estudiante dentro de una situación aparentemente real de escritura, el estudiante sabe que, en último término, el lector de su texto es el profesor, de tal modo que no acaba de ver sentido a plantearse el texto como un problema retórico que debe resolver". Por su parte, Martínez, Navarro y Zamora (2000, p. 16), brindan un perfil y unas tendencias generales del comportamiento anotador, entre ellas "*las demandas genéricas con respecto a la anotación*: Cuando se pregunta a los estudiantes cuáles son los principales propósitos por los que toman apuntes, aparecen las siguientes respuestas: a) Recopilar datos; b) retener datos de una exposición o de un texto; c) preparar un trabajo o proyecto escrito; d) actualizarse permanentemente; e) preparar una exposición oral, un debate o una mesa redonda; f) aprender; g) reducir la información para hacerla manejable; h) recordar una fecha o cita; i) levantar acta de una reunión, entrevista o seminario; y j) esbozar un fenómeno, suceso o circunstancia para su desarrollo posterior".

Ahora, veamos los apuntes de Brenda, Edwin y Sandra para identificar cuáles tendencias de las mencionadas por los autores presentan los apuntes realizados sobre la actividad precursora con las regletas de Coussinaire (AP 1), cabe antes mencionar que estos apuntes no contaron con la iniciativa de los estudiantes, yo los provoqué:


Nosotros vamos a relacionar niñas y Libros y bamos
a llamar a las niñas N y los libros L la razon ⊥ lami-
na y 4YZ en la otra anotacion $\frac{N}{L}$ una razon es
algo que relacionamos segun las razones podemos
relacionar las laminas en las fichas no podemos
hacer relaciones por que todas las razones son
diferentes.

*La relacion es comparar la magnitud de
distintas cosas q'l se puedan medir y se puedo
comparar

Figuras 20. Apunte de Brenda de la AP 1.

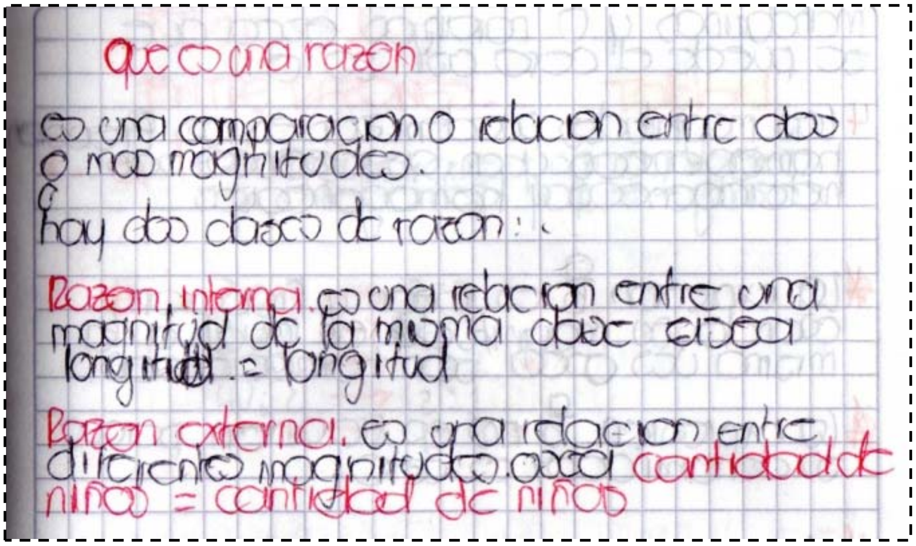
En la Figura 20 se observan dos momentos de escritura: uno en lápiz y el otro a lapicero. Detallaré el primero: En este Brenda hizo un apunte absolutamente descriptivo recurriendo a lo que quedó en su memoria sensorial como respuesta a los estímulos del entorno. No obstante, dentro de su apunte, tal cual se señala en la Figura, Brenda remarcó tres elementos mostrando con ello atención y reconocimiento de elementos importantes dentro de la dinámica del discurso académico del profesor.

En el segundo momento del apunte, Brenda cambió el lápiz por el lapicero e hizo una señalización para connotar lo que le sigue. Sin embargo al intentar definir "razón" definió fue "la relación", con ello evidenció que no quedó claro lo que es una magnitud elaborando por ende un texto desarticulado y sin coherencia y sin conectividad con el párrafo anterior ya que los elementos que remarcó, no los retomó.

Atienza (1992, p. 107) nos ofrece una posible justificación a estas dificultades –y otras– que presenta no solo Brenda sino muchos estudiantes en las escuelas: "En una y otra edad se pone en evidencia un bajo nivel ortográfico, una mala puntuación, un bajo nivel de vocabulario, una construcción de párrafos inadecuada y una ausencia de articulación de las distintas partes de los textos que dificulta su lectura. En general, las redacciones evidencian un proceso de una sola etapa: idear y redactar a la vez. Es probable que se esté reflejando una mala didáctica de la expresión escrita en la enseñanza de la lengua española: *los estudiantes no han interiorizado la necesidad de actuar ordenadamente al expresarse por escrito* (generar ideas o buscar información, organizar el contenido, pensar en el destinatario y en la finalidad del escrito, redactar, revisar, quizás porque no se les ha enseñado antes ni se han practicado los variados procedimientos que intervienen en la compleja actividad de la escritura".

En cuanto a Edwin, al observar la Figura 21, notamos que –al igual que Brenda– estructuró párrafos. Sin embargo, él hizo distinciones del texto con colores estableciendo títulos y subtítulos (el título corresponde a la pregunta que les hice para promover el apunte).

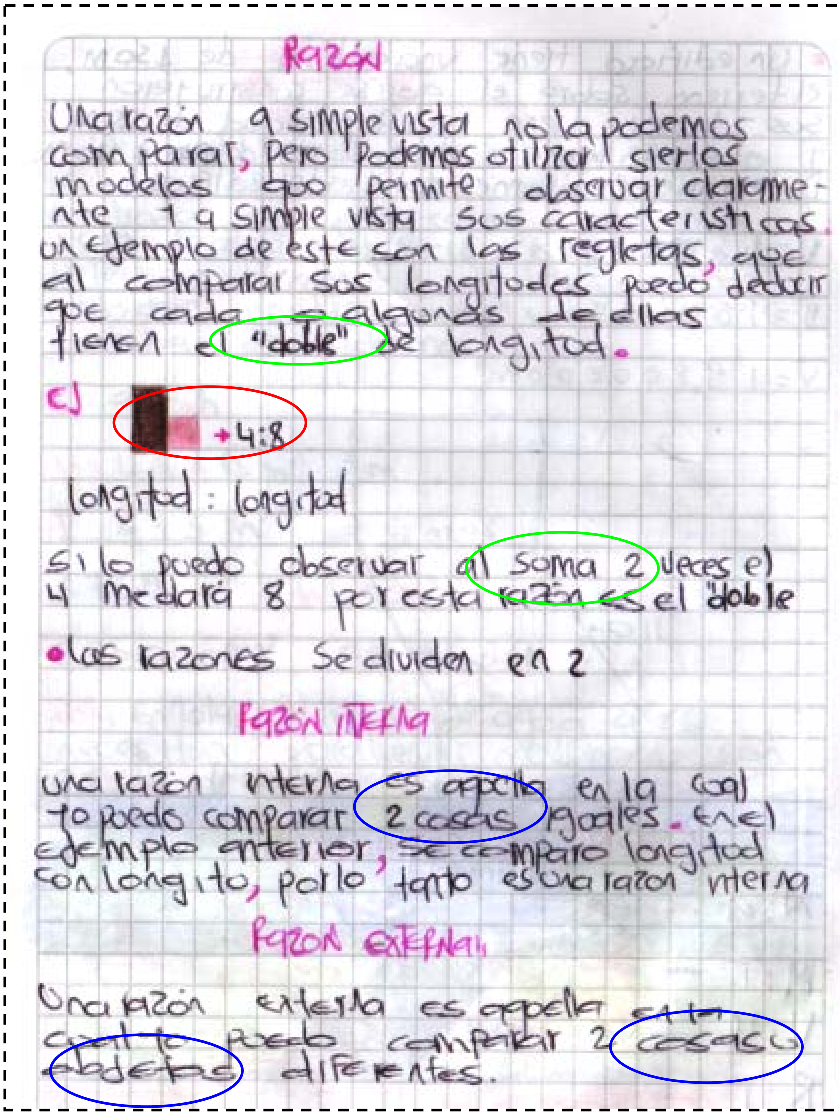
A la luz de la dinámica de la clase, Edwin fue muy concreto y realizó un apunte limpio en cuanto a la conceptualización de "razón" en el marco de las magnitudes tal cual se trabajó en clase. Además, en sus sub-definiciones Edwin recurrió a la ejemplificación para complementar su apunte, de igual modo mostró coordinación y consecución en el texto al hablar y ejemplificar magnitudes o cantidades de magnitudes.



Figuras 21. Apunte de Edwin de la AP 1.

En cuanto a la ejemplificación, me atrevo a decir que esto puede estar influenciado por el marco tradicional de enseñanza en el que se dan las definiciones y posteriormente se ejemplifica. Sandra, por su parte, elaboró un apunte análogo al de Edwin en cuanto a estructura pero adicionó el gráfico que hace alusión al material didáctico de clase y a la misma actividad matemática trabajada con él. No obstante, es interesante desglosar el apunte de la estudiante dado que presentan un par de particularidades para resaltar (véase y léase antes la Figura 22):

1. Muestra fluidez situacional para realizar el apunte ya que, aunque no recurre a aspectos descriptivos propios de la actividad, tampoco los ignora pues usa el contorno de la enseñanza para elaborar su apunte.
2. Maneja con facilidad locuciones adversativas (“por lo tanto”) para darle consecuencia a su texto lo que muestra regulación entre su pensamiento y la palabra.
3. Al igual que Edwin, transforma el pensamiento dando paso a la conceptualización a través de operadores mentales como el análisis, la abstracción y la síntesis mostrando así coordinación con los objetos del conocimiento en formación.



Figuras 22. Apunte de Sandra de la AP 1.

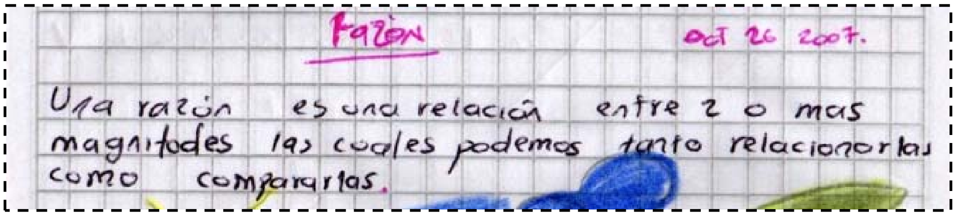
Referente a los aspectos matemáticos, Sandra relacionó aditivamente las longitudes de las regletas aun cuando el “doble” está relacionado con estructuras multiplicativas. Esto podría ser efecto de que en algunas ocasiones la multiplicación aparece como una suma sucesiva de sumandos iguales (4 + 4 = 8). Además, Sandra tuvo un *descuido* al cambiar la representación de la razón (gráfica – numérica) pues no conservó el orden de la relación establecida.

Por otro lado, tal cual se pudo apreciar, al momento de la escritura Sandra se enfrentó a una deficiencia de términos en la recodificación de la información que solucionó recurriendo a la información global que captó acústicamente tratando, desde allí, de generar una información específica sustituyendo, a partir del reconocimiento del significado, el término preciso –magnitud– por otros –"cosa u objeto"– que conservaran –para ella– coherentemente el significado de la *palabra* que aún no estaba incorporada en su léxico pero sí en el garaje de sentidos y significaciones.

Para clarificar un poco algunas de las cosas mencionadas anteriormente, traigo a alusión a Orrantia y Sánchez (1994, p. 22) quienes consideran que el proceso de escritura de las palabras empieza "en el sistema de análisis acústico de la palabra dictada [o dicha] donde se identifican los fonemas para después pasar a un sistema de reconocimiento auditivo donde se encuentra representada la palabra y alcanzar posteriormente su significado en el sistema semántico […] ya que aquí residen las representaciones del significado mismo".

Además, los autores afirman que una vez se ha accedido a la palabra debe vincularse con el conocimiento léxico –en nuestro caso, con los conocimientos previos– para asignarle un significado. "Para ello debemos poseer en nuestra memoria un detector de palabras que posea la información sobre los rasgos característicos e invariantes de la forma de cada palabra contenida en nuestro léxico" (ibídem, p. 21). De esta manera, comprendemos lo que los estudiantes hacían en su proceso de escritura al no tener integrados los términos matemáticos precisos que se intentaban presentar recurrían a su significación para hallar dentro de su garaje de significaciones una ayuda que le permitiera darle *sentido* a lo que escuchaba y, posteriormente, intentaba escribir.

No obstante, Sandra se mostró como reguladora y evaluadora de su apunte ya que en la siguiente clase estuvo atenta para lograr superar sus deficiencias logrando así una mejor abstracción para definir "razón". Veamos:



Figuras 23. Definición de “razón” de Sandra de la AP 1.

De esta manera, teniendo en cuenta a Martínez, Navarro y Zamora (2000), las demandas de anotación de los estudiantes estuvieron orientadas así: Brenda, retener datos de una exposición o de un texto; Edwin y Sandra, aprender; siendo orientación de Sandra más completa en cuanto a ejercicio de escritura se refiere dado que ella utilizó más recursos lingüísticos para la escritura y empleó mayor capacidad de síntesis para estructurar los apuntes, verbigracia, a diferencia de Edwin y Brenda, ella abstrajo el nombre del concepto sobre el cual giraban las actividades didácticas y enmarcó sus apuntes con el título de “razón” tal cual se pudo apreciar en la Figura 22.

Cabe recalcar que los apuntes realizados por los estudiantes se hicieron al final de la clase cuando noté que no habían tomado notas. Referente a esto, nuevamente, Martínez, Navarro y Zamora (ibíd., p. 16) citan dentro de otra de las variables que afectan la anotación “*el periodo de clase en el que tiene lugar la anotación*. Algunos de los trabajos revisados señalan la existencia de dos períodos sensiblemente distintos en la conducta anotadora del estudiante, al iniciar y al finalizar la sesión: a) Al principio de la clase, en términos generales los estudiantes no empiezan a anotar hasta que no se presenta el título del tema que se impartirá ese día, [así] lo que se explique con anterioridad tenderá pues a perderse; y b) Al finalizar la clase, con frecuencia durante el último cuarto de hora el estudiante tiende a relajarse y deja de anotar buena parte de la información”.

Por otro lado, para hablar de la diferenciación entre “razón” y “fracción” dada la ambigüedad que se presenta para reconocerla la una de la otra cuando se usa la notación fraccionaria para ambas, recurrí en mi discurso académico a diversas ejemplificaciones para favorecer la comprensión de dicha diferenciación pero me atrevería a decir que esto resultó poco favorable –o estructurado– dado que a la hora de tomar los apuntes los estudiantes tuvieron dificultades para concretar. Fue así como los estudiantes para suplir dicha falencia, redactaron sus apuntes en segunda persona intentando, después de realizar el análisis acústico, de re-tomar del discurso académico los apartes que estaban en su memoria sensorial los cuales hacen alusión a las ejemplificaciones presentadas. Veamos:

Al hacer lectura del apunte de Brenda, se palpa la falta de claridad sobre el objeto de escritura lo cual no le permitió redactar un texto con coherencia y, podría decirse que no tenía suficiente conocimiento sobre las fracciones que favoreciera su sistema semántico para así complementar su escritura.

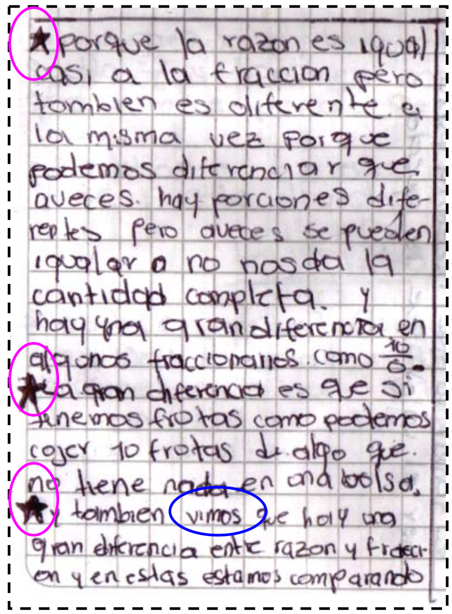

porque la razon es igual
casi a la fraccion pero
tambien es diferente a
la misma vez porque
podemos diferenciar que
aveces hay porciones dife-
rentes pero aveces se pueden
igualar o no nos da la
cantidad completa. y
hay una gran diferencia en
algunas fracciones como $\frac{10}{6}$.
La gran diferencia es que si
tenemos frutas como podemos
coger 10 frutas de algo que
no tiene nada en una bolsa,
y tambien vimos que hay una
gran diferencia entre razon y fracci-
on y en estas estamos comparando

Figura 24.

Referente a los conocimientos que posibilitan el aprendizaje con mayor facilidad y permiten comprender el objeto nuevo de aprendizaje, Orrantia y Sánchez (1994, p. 79) aportan:

> Que los conocimientos juegan un importante rol en la comprensión es algo que está fuera de toda duda, y, además, es posible que las diferencias en conocimiento por sí solas puedan explicar una parte de las diferencias en comprensión entre unos sujetos y otros. Desde esta perspectiva, si ayudásemos a un niño a aumentar su fondo de conocimientos, incrementaríamos su capacidad de comprensión. Ahora bien, el aumento del fondo de conocimientos se relacionar con toda la actividad escolar en su conjunto, y podríamos considerarlo como uno de los fines de la educación. En este sentido, quedaría fuera de cualquier intento de intervención diseñar procedimientos para aumentar el fondo de conocimientos.

Por otro lado, se rescata del apunte de Brenda su intento por ordenar sus ideas usando viñetas. Además, otra cosa que llama la atención en su apunte es cuando se quiso referir a “fracción” uso el término “porción”; palabra que estaba muy marcado en su discurso.

Veamos el significado que tiene para ella "porción" como resultado del sentido que le dio a partir de una experiencia muy coloquial para los niños en su contexto:

> – […] ¿Para usted qué es "porción"?
> – La cantidad de cosas.
> – *Cantidad de cosas*… Si yo tengo 20 hojas, ¿eso es una porción?
> – Sí.
> – Mmmm… ¿A qué otra cosa le suena esa palabra a usted?
> – A peso.
> – ¿Por qué a "peso"?
> – Porque yo había escuchado en las tiendas, ¿sí?: "Deme 3 lb de carne". Entonces el tendero dice: "Esta porción da tanto"… Por el peso.
> – Mmm… ¿Usted relaciona la palabra "porción" con cuál concepto?
> – La división. Sí porque si yo tengo un pastel, lo puedo partir en 10 pedazos y reparto 3, me quedan 7 de 10.
>
> (Entrevista, 6 de noviembre de 2007)

Entre las tantas cosas que se matizan en la intervención de Brenda, hay una que considero importante: la problemática conceptual que presentaba Brenda radicaba desde la notación de la razón como fracción (sistema representacional) y, por ende, el significado que le estaba dando –desde su sistema semántico– a la razón estaba permeado por la división ya que la fracción se encuentra asociada a esta, e incluso la razón tal cual lo expone Guacaneme (2001). Ahora, veamos el apunte de Edwin quien recurrió a un ejemplo concreto usado en la explicación:

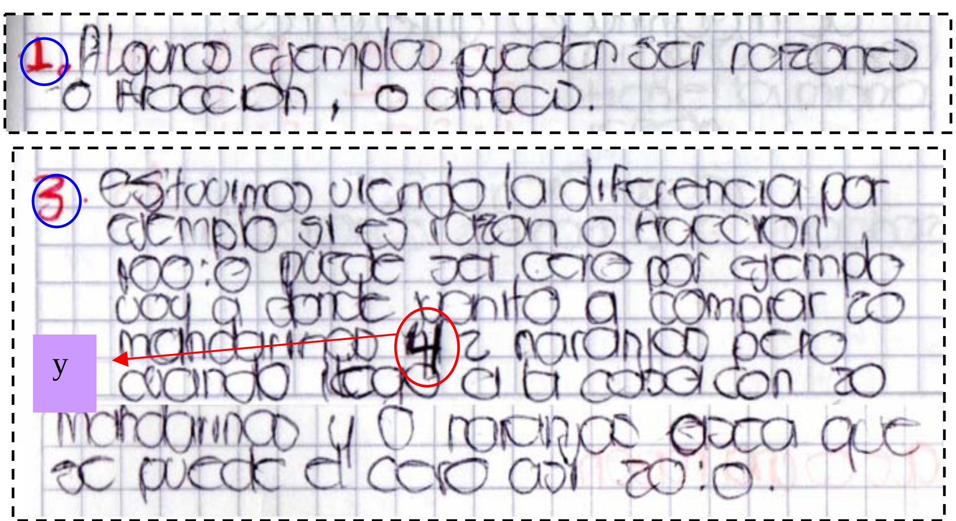


Figura 25. Apunte de Edwin; distinción entre "razón" y "fracción".

Se observa en la Figura, entre otras cosas, que el estudiante recurrió a la numeración de –por decirlo de alguna manera– conclusiones en aras de favorecer la estructura y el orden del apunte como resultado de esfuerzos de abstracción y generalización. En la conclusión 3, está tácitamente la segunda persona y, seguidamente, la recurrencia a la ejemplificación para redactar el apunte. Sin embargo, en contraste con Brenda, al hacer lectura de su apunte se infiere la diferenciación que hizo entre "razón" y "fracción".

Con esto queda claro, como bien lo exponen los ya muy citados Martínez, Navarro y Zamora (2000) que otro de los factores que intervienen en la tarea de anotación es "*la claridad, velocidad y sistematización del discurso*. Al interrogar a los estudiantes sobre qué estilo de profesor prefieren en el momento de tomar apuntes, aparecen tres cualidades: que sea claro, que explique manteniendo una velocidad razonable y que *sea estructurado* en su exposición" (ibídem, p. 16).

Empero, Sandra realizó otra clase de apunte. Cabe antelar que este es bastante largo comparado con el de los compañeros dado que ella, para abordar el objeto de escritura, realizó una revisión mental de conceptos que antes no había considerado en la toma de apuntes. Al leer los apuntes, el lector podrá notar que Sandra era muy explícita al momento de escribir y recurría a muchos recursos lingüísticos al momento de estructurar el texto lo que conduce a considerar que ella escribía con "prosa basada en el lector" atendiendo a la definición dada anteriormente por Carlino (2004) dado que la estudiante en la escritura que componía su apunte intentaba deliberadamente comunicar algo al lector. Esta consideración abandonó su naturaleza hipótetica en una de las entrevistas realizadas a posteriori a la estudiante, veamos:

> – ¿Qué es lo que tanto escribe usted en su cuaderno?
> – Lo que entiendo. O sea, yo soy de las que lo que yo copio en el cuaderno me gusta que me lo entiendan.
> – O sea, ¿usted escribe para usted o escribe para otros?
> – No, para otros.
> – ¿Siempre hace usted esa distin… –ella interrumpe–.
> –Para los dos: para él y para mí.
>
> (Entrevista, 28 de noviembre de 2007)

De esta manera, se podría decir que Sandra al realizar el apunte se autodireccionaba y autocontrolaba ya que mantenía un objetivo de escritura presente y tenía conciencia de que este, lo cual favorecía su aprendizaje ya que esto la llevaba a localizar e identificar la información más específica y relevante presente en el discurso académico trasmitido por el profesor lo que la conducía a activar procesos metacognitivos y de supervisión para evaluar periódicamente las propias acciones.

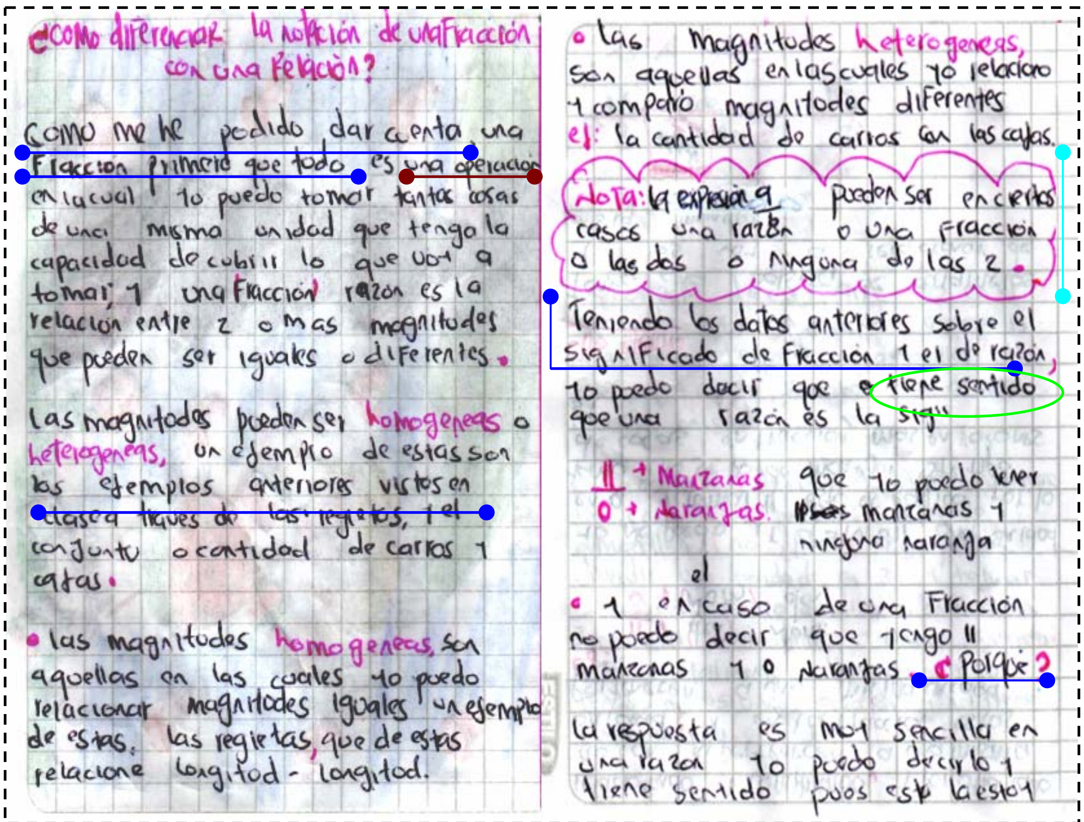


Figura 26.a. Apunte de Sandra; distinción entre “razón” y “fracción”.

No entraré a detallar el apunte mostrado en las Figuras 26, dado que por sí mismos hablan. No obstante es interesante tomar distancia del apunte y observar la organización del texto, el uso de marcadores[17] para distinguir nuevos conceptos o para explicitar algo importante

[17] Llamaré así a los recursos que sirvan para distinguir palabras o expresiones claves dentro del apunte.

en la construcción del momento –invito al lector a revisar tales Figuras antes de continuar la lectura–.

> – ¿Por qué usted escribe con otro color [refiriéndome al título de la Figura 26.a]?
> – Porque eso me titula… O sea, me muestra para donde yo voy a escribir.
> – Aquí dice [señalando el cuaderno] “las magnitudes pueden ser homogéneas o heterogéneas”, y usa el color fucsia para escribir “homogéneas” y “heterogéneas”. ¿Por qué hace la distinción de colores? ¿Qué tienen esas dos palabras que no tengan las demás del apunte?
> – *¿Por qué las escribí de otro color?...* Porque son claves.
> – ¿Por qué resultaron ser “claves” para Sandra en el momento que yo estaba hablando [me refiero al momento de clase] las palabras “homogéneas” y “heterogéneas” en relación a magnitudes?
> – […] Digamos yo soy una de las personas que… que… que a la hora de ir a buscar algo [en el cuaderno] yo… yo busco lo… lo que más me ayude a deducir a… a ayudarme; lo que me ayude más rápidamente a solucionar un problema.
>
> (Entrevista, 6 de noviembre de 2007)

Coincidirá el lector en que la estudiante supervisaba su escritura y definitivamente hacía de esta un ejercicio dialógico entre el conocimiento (ya adquirido y el que estaba en construcción), el posible lector y ella misma.

Al observar el apunte de Sandra, quedan algunas preguntas en el aire: ¿Lo hizo en clase?, ¿realizó algún borrador? Pues bien. El apunte efectivamente lo hizo en clase y *no* realizó borrador. Como antes había apuntado, la estudiante era muy atenta en clase –lo cual se corrobora con su voz en la entrevista anterior– e inquisidora además de que, como podría notar el lector, se esforzaba por conectar sus conocimientos con los nuevos y solía poner en marcha procesos de abstracción y síntesis (*“como me he podido dar cuenta”*, esto habla de la disposición de atención y análisis que tenía sobre el discurso académico lo que posteriormente le permitía aplicar los procesos mentales mencionados para la elaboración del apunte).

Además, se podría afirmar que Sandra comprendió las diferencias entre “razón” y “fracción” dado que, como ya se mencionó, comprender es una actividad intelectual que implica atribuir significado a la información nueva y relacionarla con la existente.

De esta manera, ella logró darle *sentido y significado* al estudio que estábamos haciendo sobre “razón” y “fracción”. Sin embargo, también es importante detenerse en algunos errores cometidos en la parte matemática: En la *introducción* del apunte, Sandra mostró una concepción reducida de la fracción al referirse a ella como “una operación”.

Además, en el globo que resalta la connotación de la notación fraccionaria se excede afirmando que esta puede no ser “ninguna de las 2”. Continuando con sus apuntes y en relación con el ejemplo de las manzanas:naranjas, terminó concluyendo que (refiriéndose a la fracción):

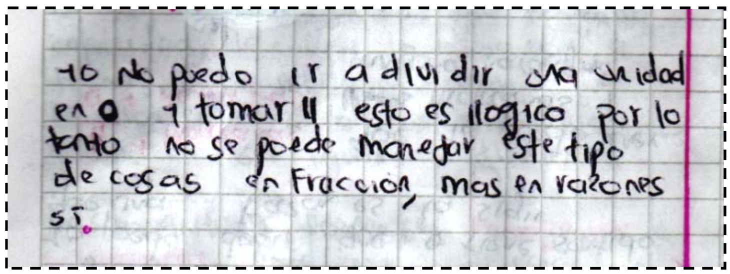

Yo No puedo ir a dividir una unidad en 0 y tomar 4 esto es ilogico por lo tanto no se puede manejar este tipo de cosas en Fraccion, mas en razones si.

Figura 26.b. Apunte de Sandra; distinción entre “razón” y “fracción”.

Referente a la distinción entre estos dos entes matemáticos ambigüos, Godino y Batanero (2002, p. 8) afirman –tal cual lo concluyeron tácitamente los dos últimos estudiantes– que “la idea clave es que las fracciones son *cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero*; mientras que una razón es *un par ordenado de cantidades de magnitudes* Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida”.

De esta manera, “las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “dos de tres partes”, lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción” (ibídem).

Es así que el hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica otra diferencia con las fracciones que Sandra tuvo en cuenta, abordándola desde el punto de vista de …

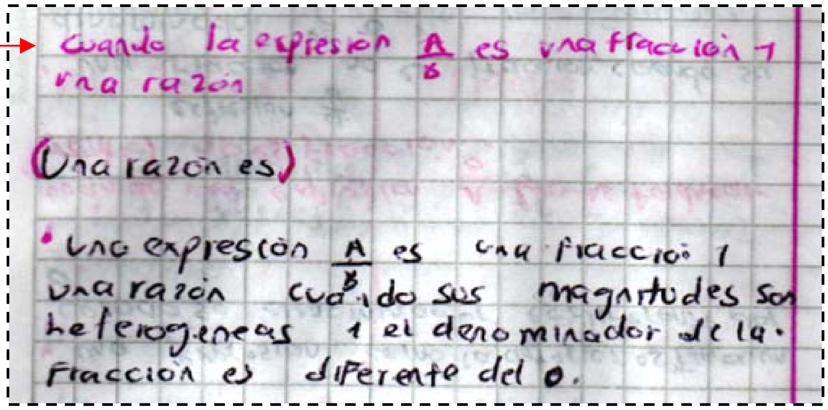
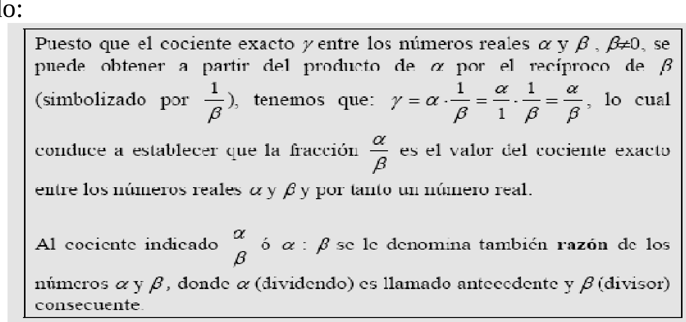


Figura 26.c. Apunte de Sandra; distinción entre “razón” y “fracción”.

No obstante, Guacaneme[18] (2001, p. 59) afirma que “si bien se establece una *equivalencia nominal*[19] entre razón y cociente indicado, no queda suficientemente claro qué relación existe entre fracción de números reales y razón. […] Por ello, preferimos pensar las fracciones de reales y las razones como objetos matemáticos equivalentes entre sí y asociados a la división a través de la función *f* (función cociente)”.

---

[18] Realizando una mirada a los aspectos formales de las fracciones hace algunas observaciones sobre el siguiente resultado:



Puesto que el cociente exacto γ entre los números reales α y β, $\beta \neq 0$, se puede obtener a partir del producto de α por el recíproco de β (simbolizado por $\frac{1}{\beta}$), tenemos que: $\gamma = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, lo cual conduce a establecer que la fracción $\frac{\alpha}{\beta}$ es el valor del cociente exacto entre los números reales α y β y por tanto un número real.

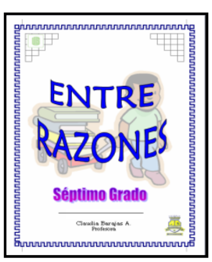
Al cociente indicado $\frac{\alpha}{\beta}$ ó $\alpha : \beta$ se le denomina también **razón** de los números α y β, donde α (dividendo) es llamado antecedente y β (divisor) consecuente.

[19] “Con equivalencia nominal queremos expresar que tanto “razón” como “cociente indicado” tienen, en el contexto del texto base [De Trocóniz, A. y Belda, E. (1959). *Análisis Algebraico*. Bilbao: Talleres Gráficos Ondorica.], la misma asignación conceptual, es decir, el mismo significado. En otras palabras, el mismo objeto tiene dos nombres, o lo que es igual, un mismo significado corresponde a dos términos”, pie de página propio del autor.

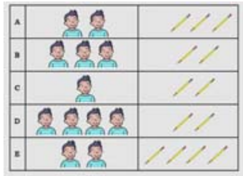
Retomando, de los apuntes revisados hasta este punto, se podría decir que Sandra y Edwin realizaban una toma de apuntes estructurada empleando la síntesis para extraer del discurso académico generado y orientado por el material didáctico de la AP 1 lo más significativo para modificarlo empleando su sentido y sus conocimientos anteriores cada uno marcadamente diferente. En tanto que Brenda mostraba dificultades para la toma de apuntes autodirigida ya que no lograba distinguir lo relevante dentro del discurso tal cual ella lo manifestó:

> – Yo lo utilizo [haciendo alusión al cuaderno] pues para sacar cosas que cuando usted dice, yo no sé cómo referirme entonces yo sacó el cuaderno para explicarme mejor. […] También para repasar y escribir cosas importantes.
> – ¿Cómo distingue usted las cosas importantes?
> – Pues le hago una rayita y a lo demás no le hago nada.
> – ¿Pero por iniciativa propia o porque el profesor le dice?
> – Por iniciativa propia.
> – ¿Entonces por qué –en lo que usted ha copiado– no ha subrayado nada? O sea que nada de lo que hay aquí [refiriéndome al cuaderno que tenía en la mano] es importante.
> – Es que a veces no subrayo ni siquiera me doy cuenta de las cosas que voy a escribir ni de las cosas que tienen importancia o no tienen importancia.
>
> (Entrevista, 31 de octubre de 2007)

De acuerdo con lo que hemos visto, el proceso de composición escrita debe verse como un proceso que exige, por una parte, una compleja estructuración del pensamiento, y por otra, la realización de una serie de acciones y de operaciones que hacen posible estas acciones. Respecto a las operaciones implicadas en el acto de escribir Valery (2000, p. 41), desde Vigostky, dice que "el proceso de escritura es una actividad verbal regida por un motivo, subordinada a una tarea y a un proyecto determinados, que se lleva a cabo bajo un control permanente por parte del escritor".



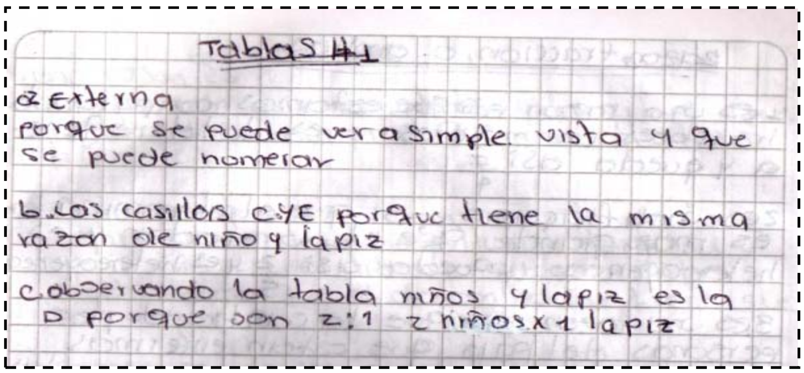
A continuación, empezaremos a revisar el razonamiento de los estudiantes alrededor de las actividades propuestas en la Cartilla 1, "Entre Razones". Recordemos que el objetivo del Bloque I de esta Cartilla era favorecer la construcción del concepto razón y comparar razones.



a. ¿Qué clase de razón se establece entre los objetos: interna o externa? Justifica.
b. ¿Cuáles de las relaciones "niños : lápices" tienen la misma razón? Justifica.
c. ¿Cuáles relaciones están a razón de dos niños por cada lápiz?

Figura 27. Tabla 1, Bloque I, Cartilla 1.

La Tabla 1 fue abordada satisfactoriamente por los estudiantes, a excepción de Brenda que continuaba con dificultades. Veamos las respuestas:


Tablas #1
a externa
porque se puede ver a simple vista y que
se puede nomerar

b. Los casillos C y E porque tiene la misma
razon de niño y lapiz

c observando la tabla niños y lapiz es la
D porque son 2:1 2 niños x 1 lapiz

Figura 28. Apunte de Brenda; Tabla 1, Bloque I, Cartilla 1.

En el literal a, Brenda distinguió que la razón establecida entre las cantidades de magnitud es externa. Sin embargo, su argumentación evidenció que no había conceptualizado la magnitud a pesar de que reconoció visualmente las cantidades de magnitudes y las relacionó con su característica intrínseca: conteo, refiriéndose a ella con "se puede enumerar" al no hallar, tal cual le sucedió a Sandra anteriormente, la palabra precisa. Referente al concepto con el cual se está manejando el término "palabra" es necesario traer a alusión a Vygostky (1987, p. 160-161) quien asevera que

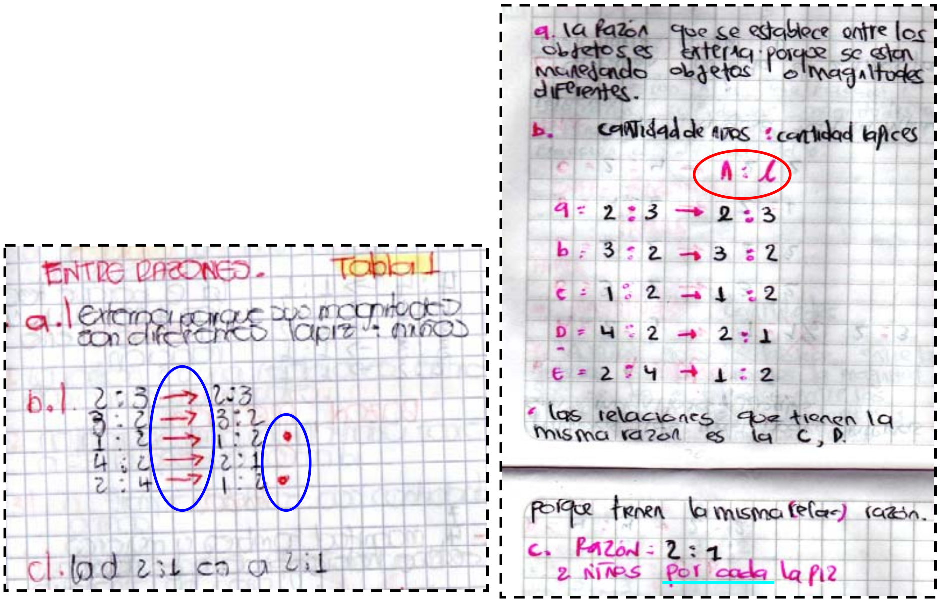
> Una palabra sin significado es un sonido vacío, el significado es, por lo tanto, un criterio de la "palabra" y su componente indispensable. Pero desde el punto de vista de la psicología, el significado de palabra es una generalización o un concepto. El significado de la palabra es un fenómeno del pensamiento mientras este esté encarnado en el lenguaje […]; es un fenómeno del pensamiento verbal, o del lenguaje significativo, una unión de palabra y pensamiento […] que está sujeto a un proceso evolutivo.

Así, Brenda continuaba presentando dificultades para hallar la **palabra** *correcta* que le permitiera organizar su razonamiento y expresarse en términos *correctos* lo cual, se podría decir, se traducía en las insuficiencias para precisar la actividad intelectual en labor pues, como bien lo precisa Luria (1980, p. 93), “el lenguaje hablado y el escrito tienen una importante función: la de servir de medio para consumar el pensamiento y desempeñar el magno papel de precisar la actividad intelectual genuina del sujeto. El hecho de que el pensamiento se codifique en el lenguaje para adquirir verdadera claridad, lo expresó Vygostky en la fórmula <<el pensamiento culmina en la palabra>>”.

Si bien lo anterior es cierto hay que tener en cuenta que “la formación del concepto es el resultado de una actividad compleja en la cual intervienen las funciones intelectuales básicas. […] El aprender a dirigir nuestros propios procesos mentales con la ayuda de palabras o signos es una parte integral del proceso de la formación de los conceptos” (Vygostky, 1987, p. 90-91).

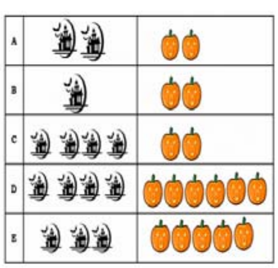
No obstante, estaremos de acuerdo en que aunque Brenda no había logrado conceptualizar la magnitud, estaba manejándola y construyéndola desde la noción que tenía de esta ya que esta herramienta mental le permitía acercarse al conocimiento en construcción. Así, *la noción es la herramienta más primaria, primitiva, básica e importante del conocimiento*, sin ella no daríamos inicio al proceso de conocimiento. Por otro lado, si observamos la Figura 29 en la cual aparecen los apuntes de Edwin y de Sandra, salta a la vista la similitud en las respuestas de estos estudiantes en relación al literal b. Al preguntarle a Edwin cuál fue el sentido que le dio a las flechas y a los puntos, contestó:

> – Edwin, ¿esos punticos qué indican?
> – Pues, Profe, que esas dos relaciones tienen la misma razón. No ve que eso es lo que las flechas están diciendo.
> – ¿Y por qué preferiste esos puntos?
> – Pues creo que con eso se entiende y no escribo tanto.
>
> (Entrevista, 6 de noviembre de 2007)



Figuras 29. Apuntes de Edwin y Sandra; Tabla 1, Bloque I, Cartilla 1.

De esta manera, notamos la practicidad de Edwin para llevar sus apuntes al igual que su disposición para crear estrategias para su estructuración, haciendo con ello su apunte personal e intransferible ya que para entender la toma de apuntes y su organización como consecución de su pensamiento, razonamiento y sentido se requería de su voz. En cuanto a Sandra, se hace tácita su actitud al lenguaje escrito y, por ende, a la misma escritura lo cual favorecía su toma de apuntes desde la perspectiva del lector. Además, es interesante notar su iniciativa para usar “letras” para representar las cantidades de magnitud. Además, ambos estudiantes determinaron las razones equivalentes de la razón de cada relación para así dar respuesta al problema designando las razones con la notación de los dos puntos.



a. ¿Cuáles de las relaciones “casa de espantos:calabazas” tienen la misma razón? Justifica.

b. Escribe la razón que establece la relación D usando la notación de fracción. ¿Es correcto afirmar que dicha razón es una fracción también? Explica ampliamente.

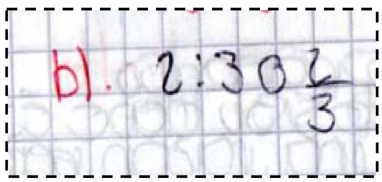
c. ¿Cuál fila tiene tres calabazas por cada dos casas de espanto? Explica ampliamente cómo determinas la respuesta.

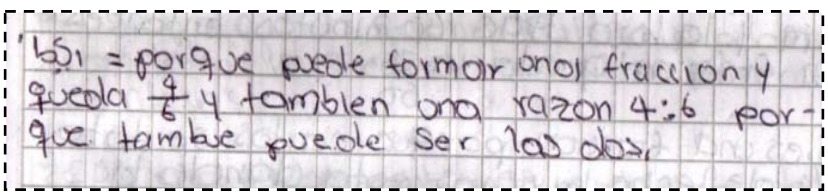
Figura 30. Tabla 2, Bloque I, Cartilla 1.

Como bien se mencionó en el Capítulo 2, esta actividad se diseñó con un supuesto *error* que se planteó para observar si los estudiantes proponían una posible *correcció*n para dar respuesta al literal a. En tanto que ninguno lo hizo de manera escrita, Edwin, en el momento de la socialización hizo la siguiente intervención:

> – Profe… Pero si uno mira se puede hacer que haya razones iguales.
> – ¿Cómo así?
> – Pues si miro está relación [en el cuaderno señala la relación D (4:6 → 2:3)] y mira aquí [toma su Cartilla y señala] en la primera relación, no sería sino pintar otra calabaza y ya.
> – *Ya*… ¿qué?
> – Pues quedan dos [relaciones] con la misma razón: la C y la D.
>
> (Entrevista, 26 de octubre de 2007)

En cuanto al literal b, se continuaban evidenciando falencias en la comprensión de los conceptos, e incluso atención al leer el enunciado presentado, veamos:


b). 2:3 o $\frac{2}{3}$


b)Si = porque puede formar una fraccion y queda $\frac{4}{6}$ y tamblen una razon 4:6 por-que tambie puede ser las dos,

Figuras 31. Apuntes de Edwin y Brenda; Tabla 2, Bloque I, Cartilla 1.

En la respuesta de Edwin se podría decir que no retuvo en la mente toda la pregunta y por ende perdió el nexo entre su respuesta y el enunciado que la estaba originando –sería interesante reflexionar sobre este asunto en las evaluaciones… Suele pasarles a los estudiantes–. Ahora, en cuanto a Brenda, ella interpretó la pregunta sobre lo que sabía en el momento, por ende –dado que no contaba con la claridad necesaria de los conceptos– relacionó la pregunta a la parte simbólica que conecta a la razón y la fracción, y pasó por alto el detalle que Sandra no dejó escapar:

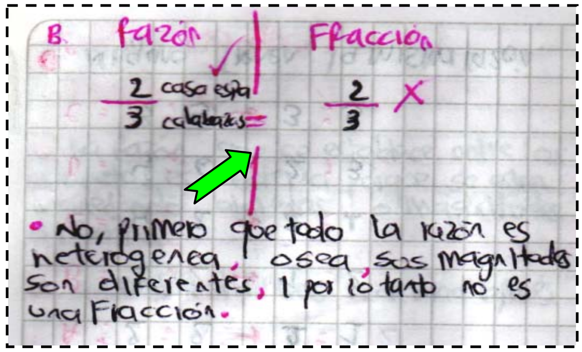
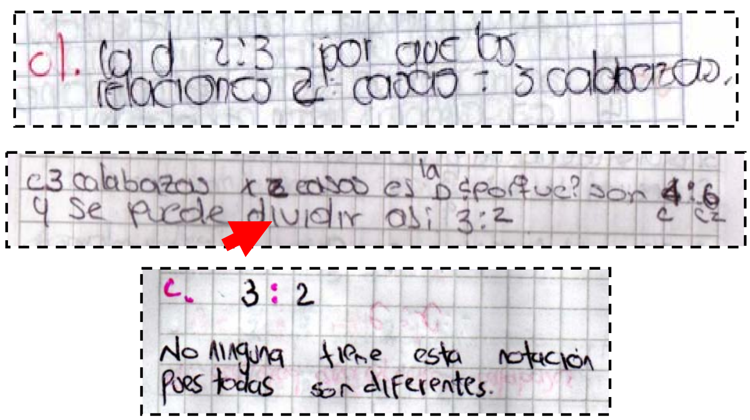


Figura 32. Apunte de Sandra; Tabla 2, Bloque I, Cartilla 1.

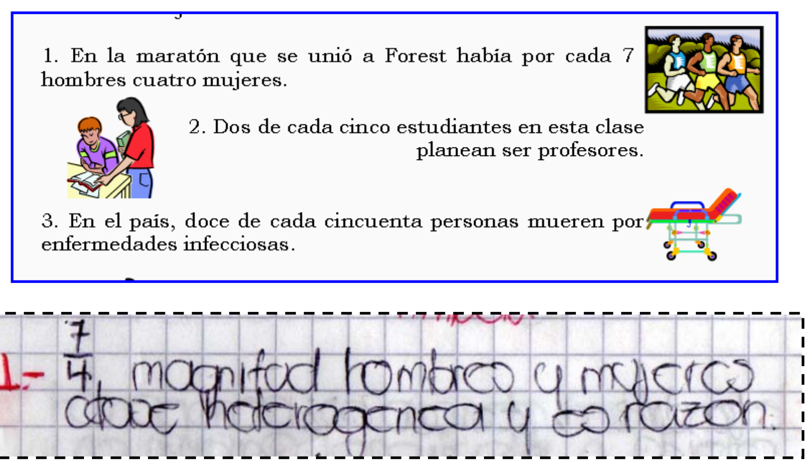
Esa *sencilla línea* que Sandra dibujó dilucida el contraste de conceptos que realizó para dar una respuesta razonada y argumentada como la que aparece en los renglones usando como referente la inferencia hecha anteriormente sobre “razón” y “fracción”. Por otro lado, en relación al literal c se presentaron respuestas heterogéneas –cabe aclarar que el propósito de este literal era abstraer el carácter no conmutativo de las magnitudes en este caso semánticamente y gráficamente tal cual lo aseveran García y Serrano (1999)–.



Figuras 33. Respuestas literal c, Tabla 2, Bloque I, Cartilla 1.

Notamos, pues, que Edwin conmutó la relación dada en el enunciado para hallar solución a la pregunta en la relación establecida por las cantidades de magnitudes en la Tabla; Brenda, en su caso, hizo *lo mismo* pero explicitó la estructura que estaba usando para realizar las razones equivalentes, lo cual –para mí como profesora– fue un buen augurio para el trabajo de proporciones. Sin embargo, había que ayudarle a pulir conceptos que no tenía claros. En cuanto a Sandra, su respuesta no permite saber a ciencia cierta si realizó el razonamiento correcto respecto a la conmutatividad. Empero, al cuestionarla sobre la respuesta dijo: “Es que Profe, la notación es casas:calabazas; no calabazas:casas”, lo que evidencia que alcanzó el objetivo de la actividad aunque en lugar de “relación” haya dicho “notación”.

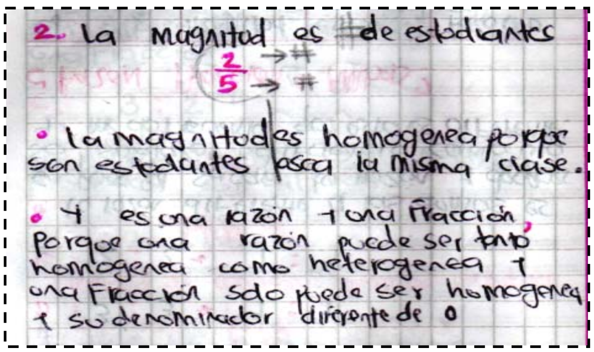
En cuanto al literal c, todos acertaron en la respuesta analizando correctamente las relaciones y determinando las razones *entre* las cantidades de magnitudes presentes en la Tabla. Ahora, pasemos al Bloque II: ¿Razón, Fracción o ambas? Recordemos que este Bloque contenía siete actividades en las cuales se incluyeron situaciones que incluían razones, en su mayoría, normalizadas y una tasa, teniendo en cuenta que las normalizaciones realizadas eran de tipo “parte-todo” y “parte-parte”. Analicemos rápidamente las situaciones a la luz de las respuestas de los estudiantes:

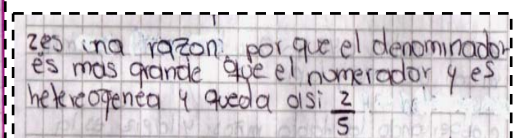


Figuras 34. Arriba: Situaciones 1, 2 y 3; Bloque II, Cartilla 1.
Abajo: Respuesta de Edwin; situación 1.

El abordaje que hizo Edwin fue concreto, conciso y preciso aunque las cantidades de magnitudes están mal nombradas (cantidad de hombres:cantidad de mujeres); usó como argumento de análisis la naturaleza de dichas cantidades de magnitudes (heterogéneas).

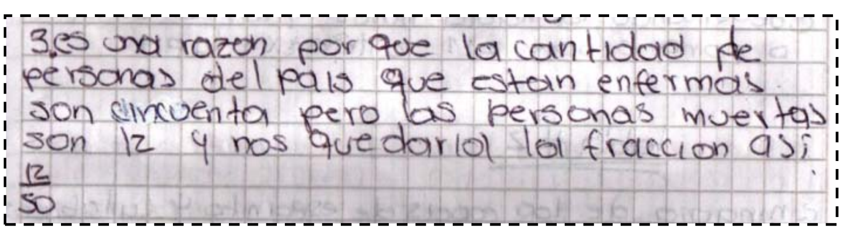
La siguiente situación –"dos de cada cinco estudiantes en esta clase planean ser profesores"– definitivamente es una razón de futuros profesores *a* el total de estudiantes en la clase de 2:5. Adicionalmente, si la razón es "parte-todo" puede además pensarse que es una relación fraccional: 2/5 de los estudiantes en la clase planean ser profesores. Como podrá notar el lector en las siguientes Figuras, Brenda analizó la situación como "parte-todo" tomando como referencia las fracciones propias y las cantidades de magnitudes. Y, por su parte, Sandra –al igual que Edwin– tuvo en cuenta ambas consideraciones pero partiendo del análisis de la *clase* de cantidades de magnitudes presentes y que el segundo término fuera diferente de cero tal cual lo plantearon en sus conclusiones anteriormente.


2. La magnitud es # de estudiantes
$\frac{2}{5}$ → #
→ #
• la magnitud es homogenea porque son estudiantes osea la misma clase.
• Y es una razón y una fracción porque una razón puede ser tanto homogenea como heterogenea y una fracción solo puede ser homogenea y su denominador diferente de 0


2.es una razon por que el denominador es mas grande que el numerador y es heterogenea y queda asi $\frac{2}{5}$

Figuras 35. Respuestas de Sandra y Brenda; situación 2, Bloque II, Cartilla 1.

Sin embargo, en la tercera situación, Sandra y Edwin no acertaron ya que solo establecieron la relación como "parte-parte", siendo esta "parte-todo" y "parte-parte" tal cual lo analizó Brenda, sin embargo su respuesta no fue del todo correcta ya que no conectó el análisis que realizó con la respuesta precedente, resolviendo que era solo una razón siendo esta también una situación de relación fraccionaria.


3.es una razon por que la cantidad de personas del pais que estan enfermas son cincuenta pero las personas muertas son 12 y nos quedaria la fraccion asi $\frac{12}{50}$

Figuras 36. Respuesta de Brenda; Situación 3, Bloque II, Cartilla 1.

Ahora observemos la cuarta situación:

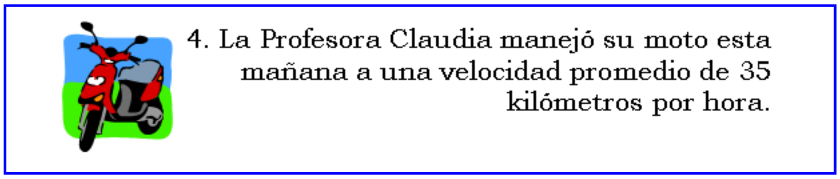
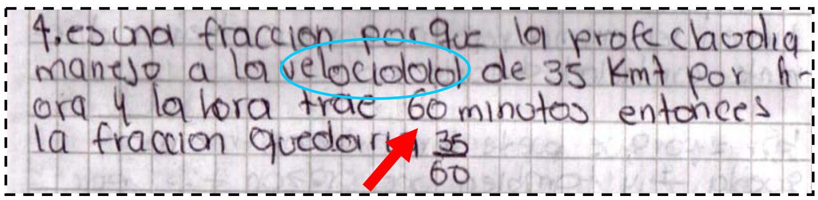


Figura 37. Situación problema de tasa (*rate*), Bloque II, Cartilla 1.

La razón de kilómetros *a* hora es 35 km:1 h; no hay relación fraccionaria presente dado que la razón –que en este caso es una tasa– no tiene la forma “parte-todo”. Sin embargo, Brenda hizo una conversión de unidades que la llevó a afirmar que la razón de la situación era una relación fraccionaria:



Figuras 38. Respuesta de Brenda; Situación 4, Bloque II, Cartilla 1.

Otra *detalle* a mencionar del razonamiento de Brenda es que abordó la situación tácitamente desde una estrategia funcional relacionando distancia:tiempo con la velocidad, lo cual manifiesta estructuras multiplicativas en su razonamiento. Fernández (2001, p. 66), menciona que “otra forma de caracterizar estrategias multiplicativas [en las actuaciones de los estudiantes alrededor de tares de razón y proporción] es la que se ha hecho atendiendo a la naturaleza de las cantidades que relacionan los estudiantes o cómo relacionan los datos del problema”.

Para la situación 5, como se mencionó en el Capítulo anterior, los estudiantes tuvieron dificultades para distinguir si ¾ era razón o fracción o ambas:

> – … ¾ de leche… Bueno, para mí, yo no sé, conclusión, para mí, es razón y fracción… Bueno, de razón, porque… uno, es homogénea –haciendo alusión a las cantidades de magnitud–; segundo, puedo… o sea… al ser homogénea yo puedo tomar de esta misma –se refería a la leche; seguidamente realiza rápidamente una evaluación de lo que expresó y se autorregula en voz alta:– Pero me estoy yendo al significado de fracción. Entonces no. ¿Por qué digo que es fracción, digo, razón?
> – Bueno, vamos por la fracción haber si es más fácil expresarse. ¿Por qué es una fracción?
> – Porque yo de 4… o sea... si se dice que son ¾… de los cuartos de leche, yo puedo tomar tres de esos cuartos.
> – Aja… Y ahora, ¿por qué eso es una razón? –hay risas y la estudiante se pone las manos en la cara al no ser capaz de explicarse–.

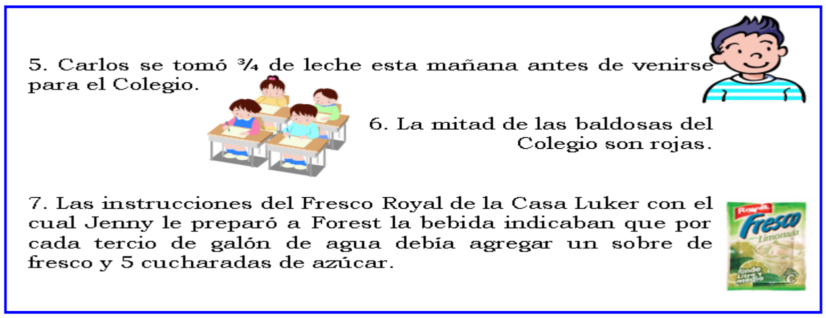
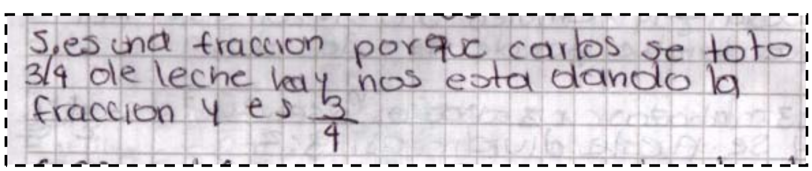


Figura 39. Situaciones 5, 6 y 7; Bloque II, Cartilla 1.

Singularmente, aunque Sandra mostraba habilidades escritoras se le dificultaba expresarse en lenguaje oral y *curiosamente* –uso este adjetivo porque en algún momento concebí que al ser *buen escritor* se era *buen hablador,* sin embargo– Valery (2000, p. 40) ilustra –como ya lo mencioné– que “el lenguaje escrito exige un trabajo consciente y analítico, porque si bien el lenguaje oral abstrae la realidad y la representa en palabras, el escrito requiere de un mayor nivel de abstracción, un segundo nivel de simbolización”.



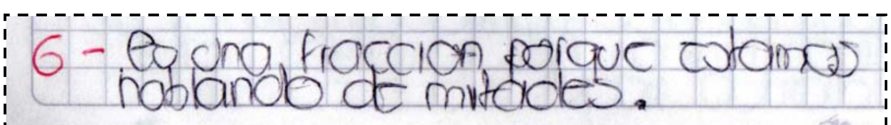
Figuras 40. Respuesta de Brenda; Situación 5, Bloque II, Cartilla 1.

Al ver este apunte da la impresión de que Brenda continuaba ajustando sus procesos analíticos a la representación fraccional y al hecho de que el antecedente sea menor que el consecuente. Dado que el apunte no era lo suficientemente claro y no permitía ver más allá, fue necesario abordarla:

> – Brenda, por favor, amplía la respuesta.
> – … Pues yo pensé en la leche en una jarra. Y como yo puedo repartirla en cuatro vasos como dice… Carlos se tomó tres de esos. Por eso es una fracción… Carlos se tomó una porción.
>
> (Entrevistas, 2 de noviembre de 2007)

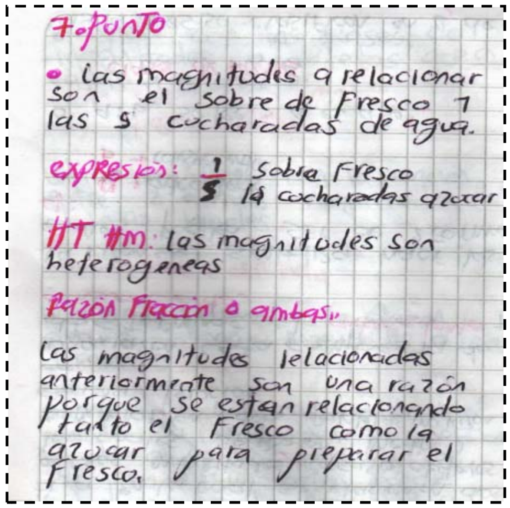
Reincide la conexión del razonamiento de Brenda con su contexto inmediato y sus saberes de vida, matizando la *porción* lo cual le ofreció un referente preciso para fundamentar su respuesta contrario a lo que antes había sucedido. Así, según Vilanova, Rocerau, et al. (2001, p. 5), “en el análisis del rendimiento en situaciones de resolución de problemas, los aspectos centrales a investigar generalmente se relacionan con lo que el individuo sabe y cómo usa ese conocimiento, cuáles son las opciones que tiene a su disposición y por qué utiliza o descarta algunas de ellas. […] Las personas arrastran sus concepciones previas o sus limitaciones conceptuales a la resolución de problemas y esas son las herramientas con las que cuentan. Los aspectos del conocimiento relevantes para el rendimiento en resolución de problemas incluyen: el conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, los hechos, las definiciones y los procedimientos algorítmicos, los procedimientos rutinarios, las competencias relevantes y el conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio (Schoenfeld, 1985)”.

Continuando con las situaciones, la sexta (“la mitad de las baldosas del Colegio son rojas”), es una razón de la forma “parte-parte-todo” siendo que por cada dos baldosas hay una roja, 1:2. Adicionalmente ½ del total de baldosas son rojas. Por ende, es también una relación fraccionaria. Sin embargo, los estudiantes solo analizaron el segundo caso y con gran dificultad ya que no reconocieron “la mitad de” hasta que se les brindó la orientación.



Figuras 41. Respuesta de Edwin; Situación 6, Bloque II, Cartilla 1.

Por último en cuanto a este Bloque, veamos la resolución de la situación problema realizada por Sandra en la séptima situación ("las instrucciones del Fresco Royal de la Casa Luker con el cual Jenny le preparó a Forest la bebida indicaban que por cada tercio de galón de agua debía agregar un sobre de fresco y 5 cucharadas de azúcar"):



Figuras 42. Respuesta de Sandra; Situación 7, Bloque II, Cartilla 1.

Allí hay un problema de mezclas en el cual se establecen relaciones funcionales así: (1) galón de agua:cantidad de fresco y (2) galón de agua:cantidad de azúcar, por lo que no hay una fracción presente ya que las razones no son de forma "parte-todo".

No obstante, como se apreció en la respuesta de Sandra, los estudiantes no establecieron las relaciones funcionales sino que redujeron el problema como se pudo apreciar en el apunte de Sandra, lo que se podría traducir en la rigidez del pensamiento de los estudiantes para considerar más de dos *variables* y pensar en términos de covariación. Otra de las variables que se podría tener en cuenta en la estrategia de resolución de la situación siete, es "ignorar parte de los datos del problema" (Fernández, 2001) reduciendo así su actuación sobre un parte de estos.

Es por tal razón que Obando (2007, p. 2) afirma que "al implicar la covariación, el razonamiento proporcional está estrechamente relacionado con el pensamiento variacional".

No obstante, dada la importancia de la covariación en el pensamiento proporcional, en "Lupa Matemática" se tratarían tácitamente situaciones que permitirían trabajarla desde su noción. Por ahora, continuemos con el Bloque III: "Bitácora", teniendo presente que el objetivo de este era ayudar a los estudiantes a organizar, estructurar, clarificar y depurar los conceptos que estaban construyendo.

Empecemos con Sandra: ella realizó un apunte bastante extenso, por lo cual –para favorecer la revisión– presentaré los apartes más importantes y que aquí no se han considerado.

1. Define con tus propias palabras qué es razón teniendo en cuenta cada una de las cosas tratadas durante las sesiones. Intenta incluir en ella todo lo discutido y las anotaciones importantes que tomaste durante las sesiones.

Figura 43. Punto 1, Bitácora, Cartilla 1.

Para la realización de este punto, es evidente que Sandra realizó consulta sobre el tema que estábamos trabajando; veamos:

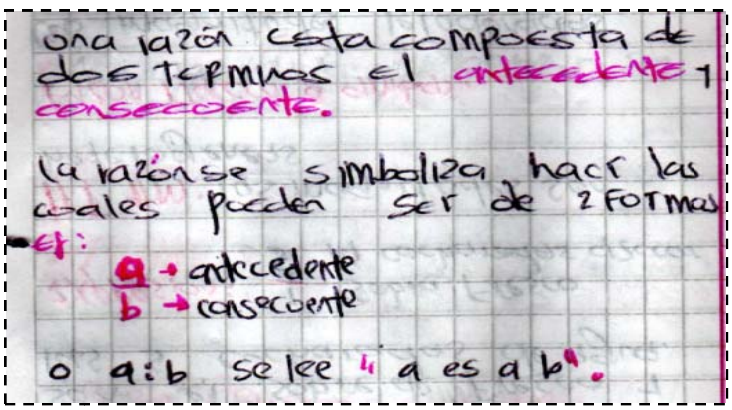

una razón esta compuesta de dos terminos el antecedente y consecuente.
la razón se simboliza hacr las cuales pueden ser de 2 formas
ej:
a → antecedente
b → consecuente
o a:b se lee "a es a b".

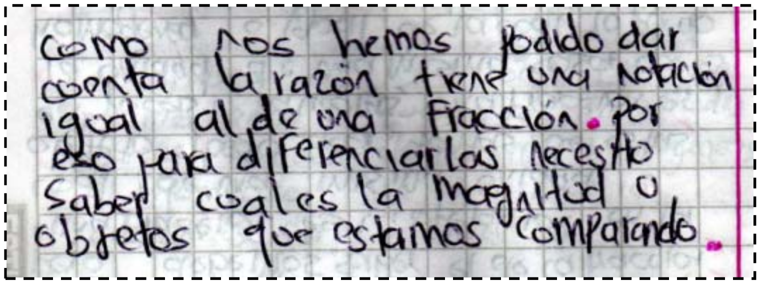
Figura 44.a. Aparte del apunte de Sandra; Punto 1, Bloque III, Cartilla 1.

Entre las cosas por decir, está el hecho de que la dinámica de aprendizaje estaba llevando a los estudiantes a realizar esfuerzos por atribuir significado a la *información* nueva y relacionarla con la ya existente para favorecer el proceso de construcción conceptual, recurriendo para ello a investigar sobre el tema lo que conducía al estudiante a sentir la necesidad de completar su aprendizaje fuera del salón de clase dado que era consciente de sus falencias y dificultades –las palpaba cuando no encontraba las *palabras* que le permitieran comunicar lo que sabía pues, valga decir, la palabra es la exterioridad del pensamiento aunque tampoco se puede afirma que en el proceso de comunicación se comunique lo que verdaderamente se piensa–.

Ahora, en cuanto al apunte como estrategia de enseñanza, Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 12) afirman que –tal cual se ha mostrado hasta ahora– "en el proceso anotador, se distinguen tres fases, la primera, *fase de emisión-recepc*ión, tiene un origen claramente social; la segunda, una *fase de comprensión*, tiene matices diferentes si la fuente de información original es oral o escrita; y una tercera fase, propiamente de escritura, en la que finalmente debería anotarse el producto de las anteriores etapas de selección y comprensión, una fase en la que la información empieza a ser conocimiento para el estudiante".

No obstante, como fácilmente se puede concebir, cada una de estas fases de la toma de apuntes se verá influida y determinada por el contexto en el que la anotación tenga lugar y del cual adquirirá un sentido y un significado específico. Así "según cual sea la fuente de emisión, el objetivo y finalidad de la toma de apuntes, la naturaleza del contenido a anotar, las características tanto de la asignatura como del profesor, el contexto variará y como consecuencia las estrategias que se pongan en juego en cada una de las distintas fases" (ibídem).

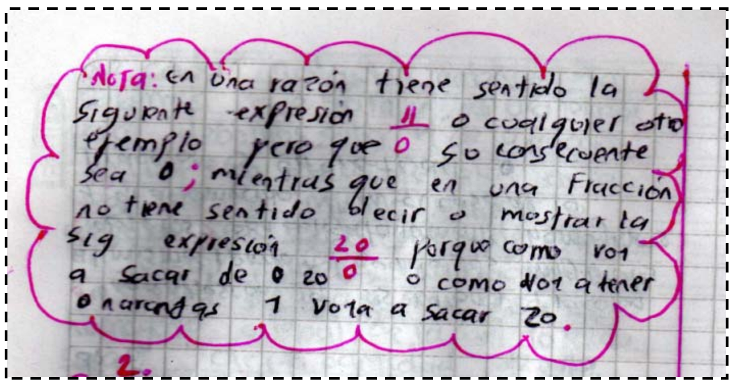
Por tanto, la diversidad misma que constituye y define a cada uno de los anotadores es la que hace que la toma de apuntes sea diferente y característica del anotador cuando se da espacio a que él sea quien lo organice y –sobre todo– que él sea consciente de la tarea de apuntar tal cual Sandra lo estaba interiorizando –o ya lo había interiorizado–. A propósito de Sandra, continuemos con sus apuntes:



como nos hemos podido dar cuenta la razón tiene una notación igual al de una fracción. por eso para diferenciarlos necesito saber cuales la magnitud o objetos que estamos comparando.

Figura 44.b. Aparte del apunte de Sandra; Punto 1, Bloque III, Cartilla 1.

En esta Figura observamos la claridad de Sandra sobre uno de los aspectos a los que Godino y Batanero (2002) se refieren al considerar a la razón y a las fracciones diferentes en tanto se definan dentro del marco de cantidades de magnitudes.



Nota: en una razón tiene sentido la siguiente expresión $\frac{11}{0}$ o cualquier otro ejemplo pero que su consecuente sea 0; mientras que en una fracción no tiene sentido decir o mostrar la sig expresión $\frac{20}{0}$ porque como voy a sacar de 0 20 o como voy a tener 0 naranjas y voy a sacar 20.

2.

Figura 44.c. Aparte del apunte de Sandra; Punto 1, Bloque III, Cartilla 1.

Se visualiza en la Figura superior que la toma de apuntes para Sandra *era* un acto consciente, dirigido, ordenado y estructurado lo que –para este proceso de aprendizaje– la haría una anotadora *estratégica* ya que en la fase de composición-anotación la *información* que estaba recibiendo, manipulando, organizando y le daba sentido y significado para su proceso de aprendizaje…. *Personalizaba* la información transformándola en conocimiento. Al respecto Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 15) connotan que:

> La *fase de composición-anotación* es la última etapa del proceso de toma de apuntes y en ella aquello que el receptor ha recibido por parte del emisor y tras la fase de comprensión llega el momento de composición-anotación. A diferencia de otro tipo de textos como novelas, ensayos, …, los apuntes se dirigen principalmente a uno mismo, es

> decir, el mismo escritor es el que acostumbra ser el destinatario de los apuntes, por lo que estos tendrán validez tan sólo para su autor ya que en ellos se introducirán elementos que serán inteligibles para cualquier otro. Por otro lado, con respecto a la información que contienen, los apuntes suelen organizarse basándose en dos modos: por un lado aquel modo en el que el receptor toma nota al pie de la letra de aquella información que el emisor ofrece sin introducir nada de manera personal, y por otro lado aquellos anotadores que hacen una personalización de la información tomando nota de aquellas ideas del emisor que consideran relevantes pero expresándolas según su modo de entenderlo.

Sin embargo, las habilidades de anotación –cuando se está inmerso en un ambiente educativo en el cual el profesor es el que estructura el apunte y el estudiante asume una posición pasiva frente a la tarea– no se desarrollan de un momento a otro y menos, pues, se logra desligar el apunte de los detalles de las actividades para hallar lo esencial *en* y *del* discurso académico a través del cual se pretende presentar –ya se manera deductiva o inductiva– el conocimiento nuevo, como es el caso Brenda quien para el primer punto de la Bitácora consignó lo siguiente:

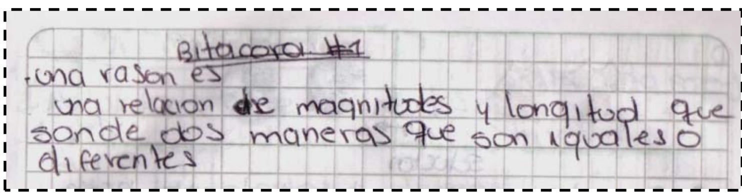


Figura 45. Apunte de Brenda; Punto 1, Bloque III, Cartilla 1.

Cabe precisar –como análisis del apunte de Brenda alrededor de razón– que, citando nuevamente a Martínez, Navarro y Zamora (ibídem), "cuando se pretenden personalizar las notas o apuntes, se persigue algo parecido a la *transformación del conocimiento.* [Por tal razón,] es preciso decidir cuál es la información relevante y necesaria, de qué forma va a resultar más oportuno anotarla, qué aspectos habrá que priorizar y por qué. Es necesario también tener claros los objetivos que se pretenden con la toma de apuntes".

Es precisamente, como lo expresó ella anteriormente, ese *"decidir cuál es la información relevante y necesaria"* que a Brenda –como a la mayoría de estudiantes de su edad escolar– no le permitía realizar una toma de apuntes eficiente para su aprendizaje, esto entre otros factores ya mencionados como no hallar las palabras (los conceptos) para realizar su apunte; y, además, se sumaba a la dificultad de no lograr un apunte fuera de los detalles el hecho de no *actuar* sobre la necesidad de mejorar su comprensión sobre los conceptos. Es decir, *aún* la metodología de enseñanza no influía directamente en su manera de estudiar y aprender.

En cuanto a Edwin, su apunte fue muy sencillo lo que –para mí, quien estuvo cerca de su proceso– no quiere decir que no estuviera construyendo los conceptos y menos que no los estuviera comprendiendo:

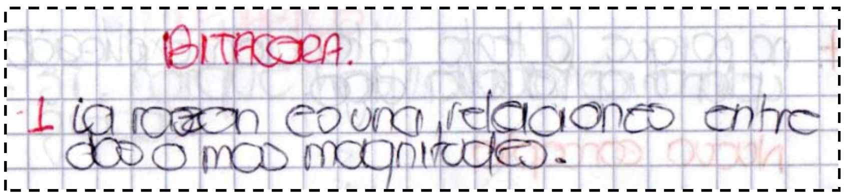
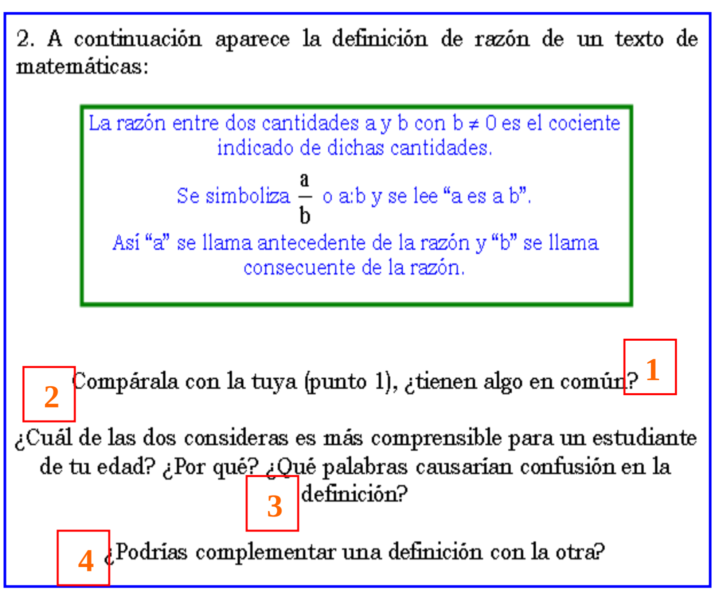


Figura 46. Apunte de Edwin; Punto 1, Bloque III, Cartilla 1.

A continuación el segundo punto de la Bitácora; recordemos que en este se presenta la definición de razón del libro con el cual me apoyaba regularmente en clase y se formularon algunas preguntas para llevar al estudiante a revisar el apunte de la definición que él realizó.



2. A continuación aparece la definición de razón de un texto de matemáticas:

La razón entre dos cantidades a y b con b ≠ 0 es el cociente indicado de dichas cantidades.

Se simboliza $\frac{a}{b}$ o a:b y se lee "a es a b".

Así "a" se llama antecedente de la razón y "b" se llama consecuente de la razón.

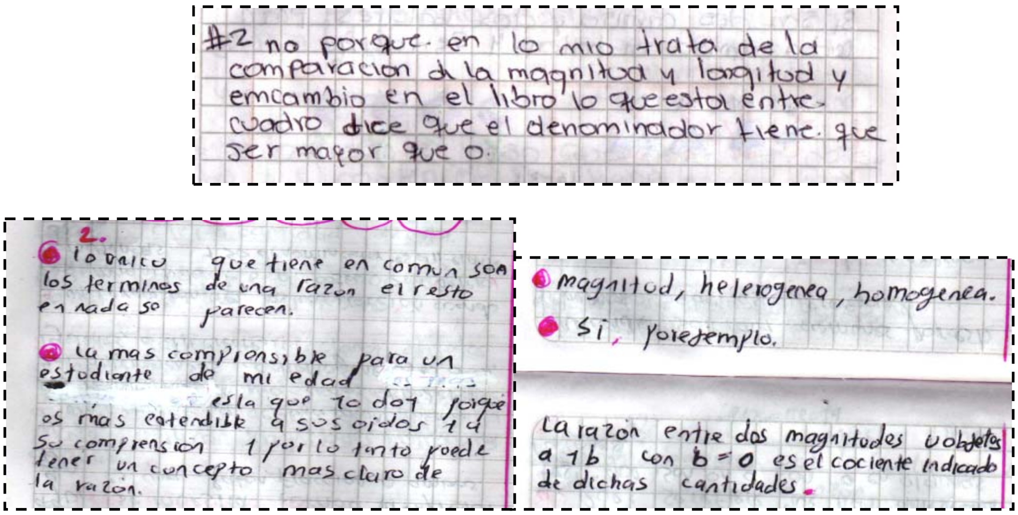
2 Compárala con la tuya (punto 1), ¿tienen algo en común? 1

¿Cuál de las dos consideras es más comprensible para un estudiante de tu edad? ¿Por qué? ¿Qué palabras causarían confusión en la 3 definición?

4 ¿Podrías complementar una definición con la otra?

Figura 47. Punto 2, Bitácora. Cartilla 1.

Las respuestas en general a esta parte de la actividad fueron pobres ya que los estudiantes no tuvieron presente –tal vez por la presentación– que habían cuatro cuestiones que abordar como se pudo apreciar anteriormente; sencillamente contestaron la primera contestando que “no, porque en la cartilla habla sobre a:b lo que yo no escribí”, respuesta de Edwin. Veamos las respuestas de Brenda y Sandra:


#2 no porque en lo mio trata de la comparacion d la magnitud y longitud y emcambio en el libro lo que esta entre cuadro dice que el denominador tiene que ser mayor que 0.

2.
- lo unico que tiene en comun son los terminos de una razon el resto en nada se parecen.
- la mas comprensible para un estudiante de mi edad es la que yo doy porque es mas entendible a sus oidos y a su comprension y por lo tanto puede tener un concepto mas claro de la razon.

- magnitud, heterogenea, homogenea.
- si, porejemplo.

La razon entre dos magnitudes u objetos a y b con b = 0 es el cociente indicado de dichas cantidades.

Figuras 48. Apuntes de Brenda y Sandra; Punto 2, Bitácora, Cartilla 1.

Como se observa, aunque Brenda incluyó en su texto “magnitud” tal cual lo hizo anteriormente, no lograba conceptualizarla bien dado que separaba “magnitud” y “longitud”; además, reincide en la característica de las fracciones en las cuales el *denominador es mayor que cero,* cosa diferente a como lo refería la definición presentada que hablaba de b≠0. Esto podría ser porque solo concibe los números enteros positivos, además, en el proceso solo habíamos trabajado con este campo numérico. En cuanto a Sandra, cabe resaltar la respuesta de la segunda viñeta –y también se resalta el uso de estas para organizar y diferenciar las respuestas–, ya que en aquella ella hizo alusión a la comprensión del concepto que concebía tener y que por ende le permitió hacer la definición del punto anterior para que otro compañero de su edad la comprendiera.

Respeto al punto 3 (véase Figura 49), para el literal a, se pretendía que los estudiantes razonaran sobre "dos-cantidades" necesarias para establecer una relación a la luz de las magnitudes, es decir, se esperaba que se mejorara la definición diciendo que la razón se podía establecer relacionando "cantidades de magnitud" inherentemente si es o no de la misma magnitud lo cual da cabida a las razones externas e internas. Los tres estudiantes que hacen parte de este análisis, afirmaron –con palabras diferentes– que "la razón se establece siempre entre dos cantidades o más".

3. Teniendo en cuenta la definición del texto de matemáticas y los saberes adquiridos, contesta ampliamente:

a. ¿Una razón siempre se establece entre "dos-cantidades"?

b. ¿Por qué crees que en la definición se hace la aclaración de "$b \neq 0$"? ¿Esa aclaración será sinónimo de "ATENCIÓN: EL CONSECUENTE NO PUEDE SER CERO"?

c. Interpreta la siguiente situación:

"En una bolsita de *sparkies* la razón de bolitas rosadas a verdes es 10:0"

Figura 49. Punto 3, literales a, b y c, Bitácora, Cartilla 1.

a. No en todos los casos, Pues se dice que una relación se puede hacer entre 2 o mas magnitudes que dan haci el resultado de una razón, es decir, que una razón, se puede dar con la relación entre 2 o mas magnitudes. Al hablar de cantidad, hablamos de una clase de magnitud.

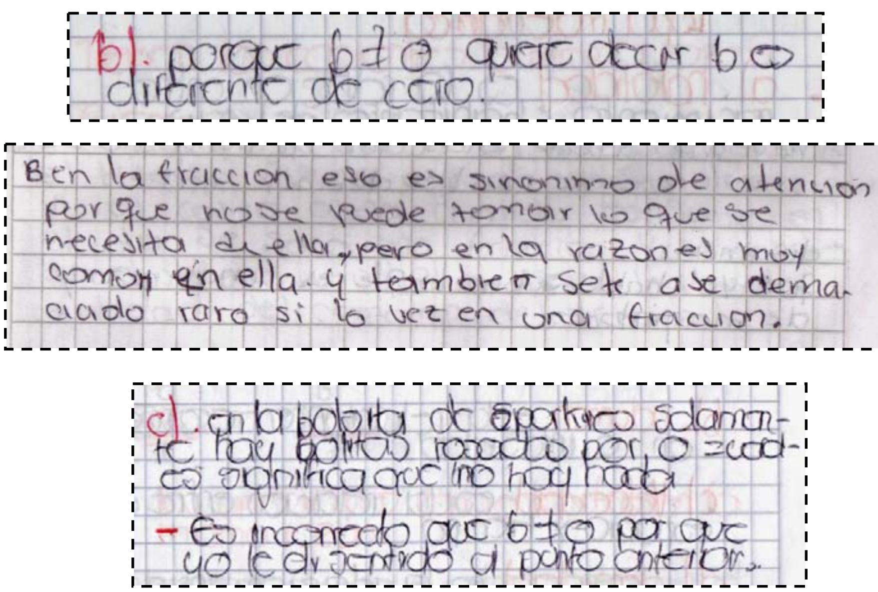
Figura 50. Apunte de Sandra; punto 3.a., Bitácora, Cartilla 1.

Dado que en el razonamiento que Sandra plasmó en su apunte, se palpan aseveraciones erróneas fue necesario dialogar con ella –como con otros estudiantes– sobre estas; veamos a la conclusión que ella llega después de un largo análisis y de muchos ires y venires dentro de los conceptos que ella había ya formado:

– O sea… En la expresión a/b hay dos cosas… dos números… […] que dicen cuántos objetos estoy comparando… pero son casi siempre magnitudes…
– Trate de hallar una expresión que reduzca [queriéndole decir que sintetizara] el análisis que acaba de hacer.
– ¡¡Profe!!
– Concéntrese, Sandra.
Toma el lápiz y empieza a escribir sobre la tabla del pupitre tratando de encontrar un *polo a tierra* cognitivo.
– O sea… la razón sí está hecha por dos números… que son… bueno, según los ejemplos de las clases y de la cartilla, esos números representa cantidades o sea, magnitudes…
– Le ayudo: Busque dos magnitudes y relaciónelas.
– Distancia : Tiempo.
– Listo. Ahora, deme la razón en términos numéricos.
– Como su ejemplo: 35 km por 1 hora.
– Entonces, ¿qué representa ese 35 y el 1?
– La cantidad de cada magnitud…. ¡¡Ah ya, Profe!! […] La razón sí es una relación entre dos números pero o sea, esos números son eso: las cantidades de las magnitudes y esas pueden ser iguales o diferentes […].

(Entrevista, 13 de noviembre de 2007)

Referente al literal b, dado que Brenda tenía tan presente el concepto de fracción, esto le sirvió de base para dar un argumentó aceptable al problema presentado. En tanto que Edwin, dado que no analizó la pregunta dada, dio una respuesta muy trivial. Sin embargo, en la respuesta del literal c, los tres estudiantes coincidieron en que “no tenía sentido que la definición indicara que b≠0 cuando se habla de razón”.


b). porque b≠0 quiere decir b ⊖ diferente de cero.

B en la fraccion eso es sinonimo de atencion porque no se puede tomar lo que se necesita de ella, pero en la razon es muy comun en ella y tambien seria a ser demaciado raro si lo vez en una fraccion.

c). en la bolsita de sparkies solamente hay bolitas rosadas por, 0 = cada-es significa que no hay nada
- Es incorrecto que b≠0 porque ya le di sentido al punto anterior.

Figuras 51. Apuntes de Edwin y Brenda; puntos 3.b. y c, Bitácora, Cartilla 1.

d. Ahora, en la definición aparece la expresión "cociente indicado" ¿a qué te suena eso?
¿Será correcto afirmar que dos o más relaciones tienen la misma razón si sus respectivos cocientes son diferentes? Toma algunas relaciones que tengan la misma razón y realiza el procedimiento y análisis necesario para dar respuesta a esta pregunta y escribe las conclusiones.

Figura 50. Punto 3, literal d, Bitácora, Cartilla 1.

En cuanto al literal d, en los apuntes los estudiantes no lograron llegar a la conclusión que se pretendía. Sin embargo, en la socialización del siguiente Bloque, Edwin dedujo y explicó de forma muy clara y concreta que… Veamos la trascripción de su intervención en clase:

– Edwin, generalice el proceso que acabó de explicarnos.
– Profe, en la cartilla decía que la razón es un cociente, ¿sí? Entonces, el cociente está relacionado con la división: dividendo, divisor y cociente… Entonces…. Yo cojo y divido el antecedente entre el consecuente y si me dan los mismos resultados pues las expresiones tienen la misma razón.

(Grabación de clase, 9 de noviembre de 2007)

Tal deducción es de resaltar dado que, aunque en el momento preciso que se enfrentó a la situación en la Cartilla no logró resolver la situación adecuadamente, posteriormente, después de elaborar mejor sus conceptos, logró establecer una generalidad que lo ayudaría en el trabajo con proporciones. Así, con este razonamiento deductivo, doy paso al último bloque de la Cartilla: "Lupa Matemática".

El abordaje en general de las situaciones problemas propuestas aquí fue muy rica ya que los estudiantes se interesaron en comprender por qué en la clase de matemáticas se incluyeron empresas de servicios públicos municipales dentro de aquellas. No obstante, se debe mencionar que el desarrollo de este Bloque los estudiantes trabajaron de manera individual en casa realizando consultas en el diccionario dado que había términos que ellos no conocían, y preguntándole a sus padres para hallar orientación. Posteriormente, se socializaron en clase las situaciones problemas.

De esta manera se generaron interacciones (1) niños y padres, (2) niños y niñas entre sí; (3) interacciones de los niños y las niñas con los materiales que consultaron y (4) interacciones de los niños y las niñas con los textos que escribían, todas ellas engranadas por el proceso de aprendizaje y por la curiosidad epistémica propia de este.

Este Bloque, más que apuntes generó un gran variedad de análisis ya que, como se esperaba, las actividades que más llamaron la atención fueron las de los servicios públicos dado que los estudiantes no eran capaces siquiera de leer la factura de cada empresa, lo que generó interés por reconocerla y reconocer las diferentes razones que se relacionan en cada una de ellas para el cobro de los servicios. De esta manera, en clase los estudiantes tuvieron sus respectivos recibos para ser analizados y estudiados llegando a sí a establecer tasas de cambio que permitieron hablar de covariación y variación.

Fotos 4. Estudiantes hallando tasas en las facturas de servicios públicos.

– En conclusión, ¿quién me dice cómo la relación de las magnitudes relacionadas en el costo de referencia influye en la factura; en qué influye precisamente?
– Que a mayor número de kilovatios… mayores son los pesos –la estudiante se expresó de esta manera dado que en el recibo del AMB[20] el costo de referencia está dado por "$/m³"–.
– Según esto, ¿quién me puede decir entonces por qué cuando llega el recibo caro, en la casa sus papás lo primero que hacen es decir que hay me prender menos los bombillos, televisor y demás?
Tras un largo silencio interviene otra de las estudiantes participantes:

[20] Acueducto Metropolitano de Bucaramanga S.A. E.S.P.

> – Profe… Yo creo que porque muchas cosas prendidas por ejemplo el televisor –que mis hermanas ven mucha televisión– suben los kilovatios y entonces pues aumenta el valor para pagar, ¿sí?
> Otro de los niños que participó en el Proyecto, concluyó:
> – Y como allá [en el tablero] relacionamos que 1 kilovatio valía 300 pesos, entonces más kilovatios valen más plata.
> – Mmmm ¡ya sé Profesora! Y si me quedó mal, me dejo de llamar Edwin –exclamó enérgicamente– Pues toca prender menos luces para que no paguemos tanto porque esa es la relación: precio a kilovatios.
>
> (Grabación de clase, 9 de noviembre de 2007)

Además, se pusieron en juegos estrategias multiplicativas de resolución a situaciones que emergieron durante la discusión:

> – Si por 1 m^3 de agua, pago 820 pesos, ¿cuánto pago si consumí 320 m^3?
> – Jum… Entonces consumió demasiado… Entonces pagaría 262.400… O sea, multiplico 820 x 320.
> – ¿Ustedes tienen idea de cuánto es realmente un m^3?
>
> (Grabación de clase, 9 de noviembre de 2007)

De esta manera se plantearon relaciones entre dos espacios de medida reconociendo implícitamente que la multiplicación de 1 por 820 producía el valor de 262.400, o en términos más formales que la multiplicación de n por $f(1)$, produce el valor de $f(n)$. Esto teniendo cuidado el análisis dimensional de las cantidades tal cual lo sugieren Obando, Vanegas, y Vásquez (2007, p. 125) "pues este planteamiento es posible gracias al reconocimiento de igualdad $\frac{f(1)}{1}=\frac{f(n)}{n}$ lo cual es equivalente a que $n\,f(1)=f(n)$ (estos es, se reconoce a $f(1)$ como el valor de la constante de proporcionalidad)".

En esta clase, además, fue donde precisamente, Edwin dedujo que a través de la división podía comprobar que las relaciones eran proporcionales –esto por supuesto sin haber hablado de que la proporción es una relación de equivalencia entre razones–. Veamos la memoria de la clase:

> Seguíamos trabajando con el recibo de la AMB y dos razones de cantidades de magnitudes que resultaron de otro problema de cuarta proporcional que se trajo a alusión en aras de establecer base para el trabajo con proporción. Se le pidió a Edwin que pasara al tablero a explicarle a sus compañeros su hallazgo.

– Yo dividí 820 entre 1; entonces aquí –señalando en el tablero la razón $\frac{820}{1}$ – me dio 820. Esa es la razón de esta –aquí estaba evocando conceptualmente la definición dada en la Cartilla: "una razón entre dos números a y b es el cociente…"–. Entonces ahora dividí 5.740 y me dio…
– ¿Con qué dividió?, preguntaron los compañeros.
– Con 7, con 7… y me dio 820. O sea que tienen la misma razón.
(Grabación de clase, 9 de noviembre de 2007)

Así se corrobora que parte esencial de las matemáticas y de su estudio es comunicar nuestras ideas a otros ya que por medio de la formulación, sea esta oral o escrita, y la comunicación, las ideas pasan a ser objetos de reflexión, discusión, revisión y perfeccionamiento.

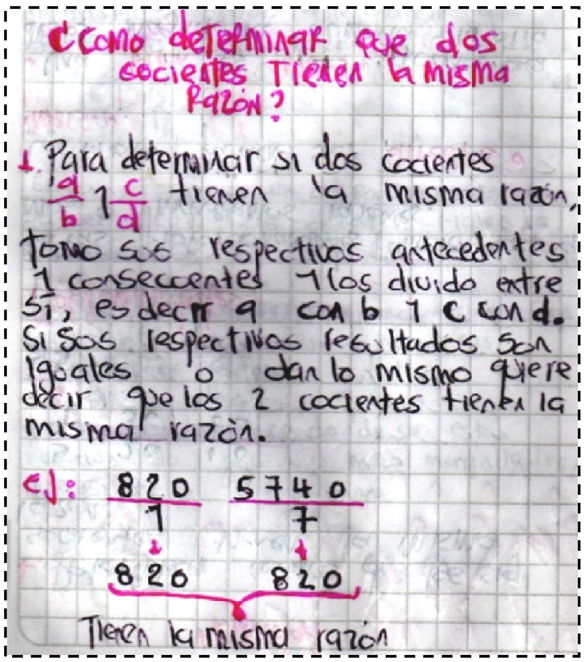


Figura 51. Apuntes de Sandra de la deducción de Edwin.

Al respecto Godino, Batanero y Font (2004, p. 38) afirman que:

> El proceso de comunicación ayuda a construir significado y permanencia para las ideas [ya que] cuando pedimos a los estudiantes que piensen y razonen sobre las matemáticas y que comuniquen los resultados de su pensamiento a otras personas, de manera oral o escrita, aprenden a ser claros y convincentes. Cuando los estudiantes escuchan las explicaciones de otros compañeros tienen oportunidades de desarrollar sus propias

> interpretaciones. Los diálogos mediante los que las ideas matemáticas se exploran desde distintas perspectivas ayudan a los participantes a ajustar su pensamiento y hacer conexiones. Cuando los estudiantes participan en discusiones en las que tienen que justificar sus soluciones -especialmente cuando hay desacuerdos- mejoran su comprensión matemática a medida que tienen que convencer a sus compañeros de puntos de vista diferentes.

Ahora veamos el proceso de comunicación y argumentación que se vivió alrededor de π:

> – "Para determinar la circunferencia de cualquier objeto circular debemos recurrir siempre al número π, ¿recuerdas cómo se determina π? ¿Se puede afirmar que representa una razón? Si es así, escríbela".
> – 2 π r –contestó algún estudiante–.
> – Noooo. El número, no; o sea la longitud con el diámetro.
> – ¿Qué hacíamos?
> – Lo dividíamos. Dividíamos la longitud con el diámetro.
> – Sandra, pase al tablero.
> Escribió la razón L / D y dijo:
> – La longitud la representamos con la "L" y el diámetro con la "D". Esto lo dividíamos. Y como pues… que así sea tal número de la longitud y tal número con el diámetro, siempre el resultado iba a dar 3.14…
> – Entonces. ¿Podemos decir que π es una razón?
> – ¡¡Sí!! –dijo enérgicamente Edwin desde su puesto– Sí, como, como dividimos diferentes cocientes con L y D son diferentes medidas y siempre dan 3.14 entonces tienen la misma razón entonces L y D hacen una razón –los compañeros le hicieron algarabía–.
> (Grabación de clase, 9 de noviembre de 2007)

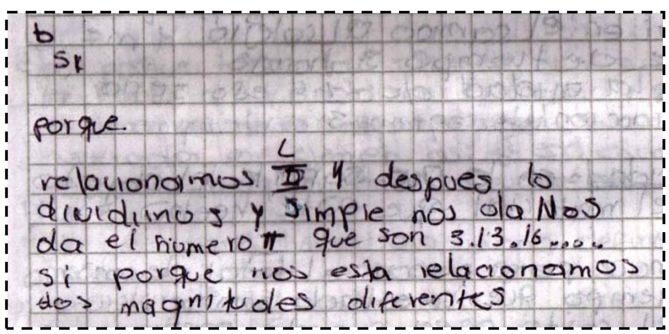


Figura 52. Apunte de Brenda sobre la razón que determina a π.

> Esa actividad [el proceso de comunicación] también ayuda a los estudiantes a desarrollar un lenguaje para expresar ideas matemáticas y les hace conscientes de la necesidad de usar un lenguaje preciso. Los estudiantes que tienen oportunidades, estímulo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas reciben un doble beneficio: mejoran su aprendizaje matemático al tiempo que aprenden a comunicarse de manera matemática (ibídem).

De esta manera se desarrolló el último Bloque de la Cartilla 1 dando protagonismo al trabajo de grupo colaborativo constituyéndose este en un factor esencial en todas las actividades de enseñanza-aprendizaje que se estaban dando, de tal forma que los estudiantes estaban siendo sujetos de su proceso de formación matemática. Simultáneamente, la toma de apuntes se estaba enriqueciendo pues los estudiantes estaban contando con una posición e interpretación diferente de la suya lo que les permitía elaborar un apunte más concreto y claro tal como le empezaba a suceder a Brenda según se pudo observar en la Figura anterior.

Ahora veamos el apunte que realizaron los estudiantes en la AP 2 que da paso a la Cartilla 2: "Alcanzando la Proporcionalidad".

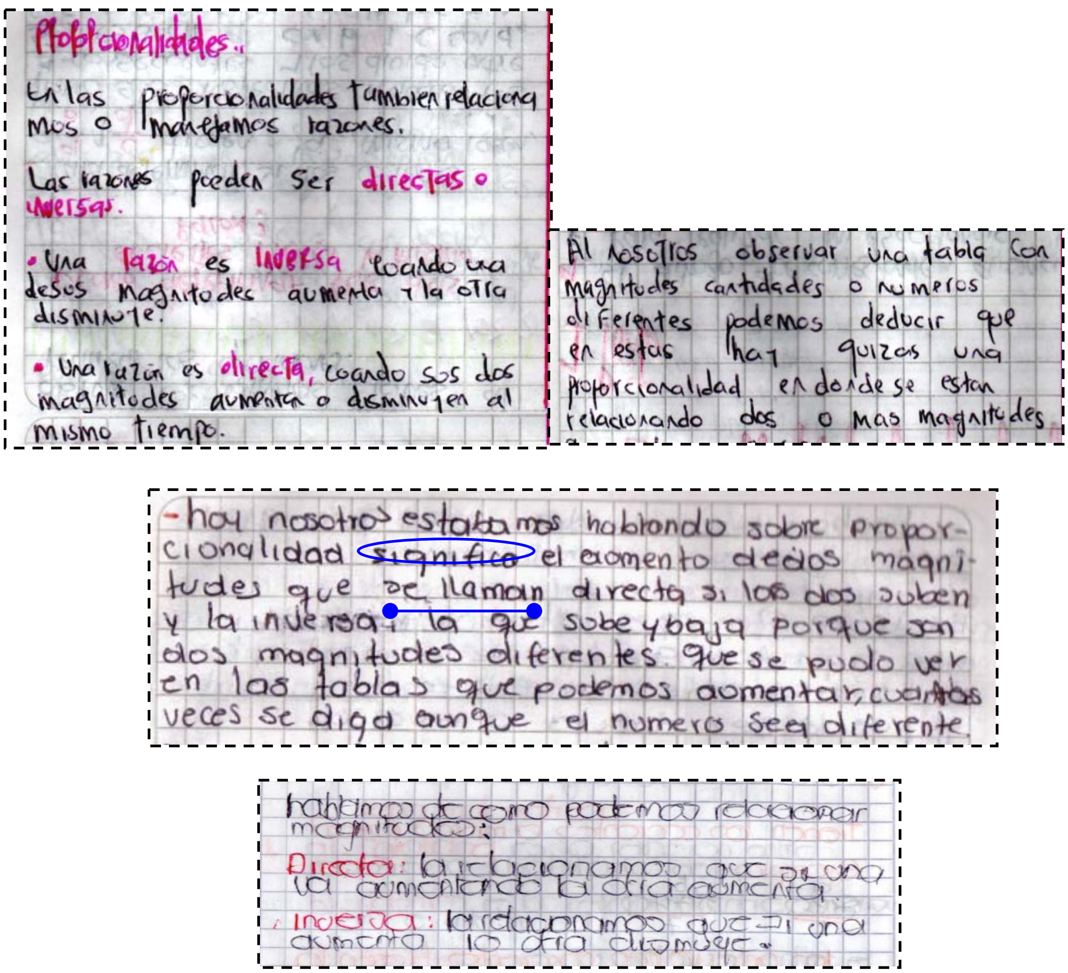


Figura 53. Apuntes sobre la AP 2: "Triángulos con Palillos".

Como se puede apreciar, la toma de apuntes de Brenda estaba adquiriendo otro perfil de escritura al trabajado pues sus tareas de decodificación y recodificación del discurso académico estaban mejorando ya que –se podría decir– estaba regulando la filtración de información para hallar lo verdaderamente importante, lo que la conducía a elaborar un apunte con coherencia recordando que esta, según Atienza (1992), es una propiedad atribuida por el sujeto intérprete. Así la coherencia está pues ligada a la posibilidad de dar sentido y para que tenga sentido la información que llega debe poder ser interpretada, debe, por lo tanto, tener siempre algún tipo de conexión con la información almacenada en la memoria.

Así, Brenda empezó paulatinamente a realizar una toma de apuntes más supervisada y regulada como consecuencia de los conocimientos que había elaborado y de sus mismos presaberes. Referente a esto Martínez, Navarro y Zamora (2006, p. 15) afirman que “la posibilidad de anotar siguiendo un modelo más reflexivo, está estrechamente relacionada con los conocimientos previos. Así, podemos señalar que cuanto más experto sea alguien, cuanto mejor conozca un tema determinado, más fácil le va a resultar tomar decisiones sobre la mejor forma de estructurarlo [el apunte], los aspectos relevantes que deben anotarse, etc.”.

Retomando el curso del análisis de las Cartillas, a continuación observaremos los apuntes de los estudiantes alrededor del Cartilla 2, que está compuesta por tres bloques cuyo objetivo general era establecer relaciones proporcionales cuantitativas partiendo de lo cualitativo para que así el estudiante desarrollara procesos algoritmos y construyera generalizaciones y significados a partir de la percepción, la abstracción y la inferencia.

Así, la única actividad del Bloque I: “La casa de María” permitió, como se dijo anteriormente, reconocer cualitativamente atributos de la proporcionalidad, además de integrar la forma y el tamaño del dibujo para favorecer la construcción de la noción de proporcionalidad. Por lo que la resolución del problema requería una comparación cualitativa de escalas.

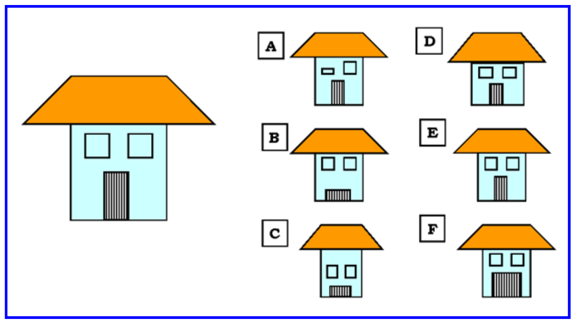


Figura 54. Imágenes base para el razonamiento proporcional cualitativo de la reducción de "La casa de María".

A través de las entrevistas y de los mismos apuntes se corroboró que *la mayoría* de los estudiantes –por su edad– reconocieron fácilmente cuál era la reducción de la casa de María empleando el razonamiento cualitativo corroborando con ello el peso que tiene la imagen visual y lo perceptual en la resolución de tareas de proporcionalidad. A continuación la trascripción del momento en el que un estudiante –diferente a los tenidos en cuenta para el análisis– recurre a mi apoyo para hallar la solución a la actividad propuesta:

– Es que no la encuentro.
– ¿A quién no encuentra?
– A la reducción.
– Bueno. Primero, para usted qué es una reducción.
– La misma casita esta [señalaba la casa de María original] pero en pequeñito.
– Listo. ¿Cuál casa definitivamente no sería [la reducción de la casa de María]?
– La "A".
– ¿Por qué?
– La ventanita […] Como esta [señalando en la Cartilla] es la verdadera, entonces y busco una reducción, yo digo que se descarta esta [la de la opción A] porque no tiene las mismas ventanitas [no son iguales como en la original que tiene las dos ventanas iguales].
– ¿Cuál otra definitivamente no sirve?
– La "F" […], por la puerta que está muy ancha […]
– ¿Cuál otra no sirve?
– La "C" […], porque la puerta está muy chiquita.
– [Quedaban la "D" y la "E"] ¿Cuál de estas dos será?
– La "E" […], porque el techo está más grueso… más grande.
(Grabación de clase, 6 de noviembre de 2007)

De esta manera el estudiante, realizó su elección identificando "modificaciones estructurales que violan la semejanza de la imagen, no se conserva la razón interna y desechan el dibujo y así sucesivamente con los otros dibujos" (Fernández, 2001, p. 138). Por consiguiente, los demás estudiantes realizaron en su cuaderno un análisis basado en el aspecto perceptual usando categorías verbales y el sentido común para constatar que su elección era la correcta. Sin embargo, Edwin en su cuaderno, sintetizó la tarea cognitivo-perceptual que realizó así:

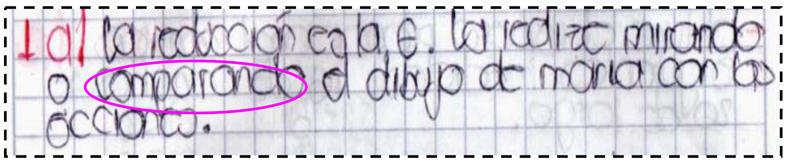


Figura 55. Anotación de Edwin respecto al análisis realizado de la actividad del Bloque I.

Respecto al punto B de la actividad (se puede decir que la casa original y la tuya son proporcionales, ¿por qué?), el término "proporcionales" se incluyó para observar el sentido que los estudiantes le darían según la actividad. Veamos el sentido y el significado que Sandra le dio a la "proporcionalidad" en el sentido de lo que es mutuamente igual en el dibujo original, es mutuamente igual en la imagen reducida.

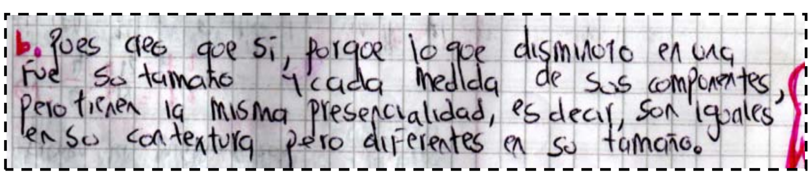


Figura 56. Razonamiento intuitivo de Sandra sobre la proporcionalidad.

Asimismo, los estudiantes abordaron la primera actividad del Bloque II ("Blancanieves y los Siete Enanitos": Mundos Proporcionales) cualitativamente y posteriormente recurrieron a hacer uso de la medida para hacer comparaciones de tipo cuantitativo para determinar el ropero semejante al de Blancanieves aún sin tener el concepto de semejanza, solo trabajaron desde la noción que tenían de esta como resultado de los atributos perceptuales de la proporcionalidad y recurrieron a los conceptos construidos hasta el momento para establecer razones y sentar bases para el concepto de proporción formal. Veamos la entrevista de clase con Sandra en donde argumentó su elección del ropero de los enanos:

> – […] "Los enanos tienen un ropero semejante al de Blancanieves; elígelo de los siguientes cuatro que se muestran". ¿Para usted qué significa la palabra "semejante"?
> – Igual o sino… Esto… Sí, que tengan la misma cualidad o el mismo parecido al otro.
> – Mmm… –señalando la Cartilla le digo:– ¿Cuál, a primera vista, usted escoge?
> – […] el "C".
> – ¿Por qué no escoge el "A"?
> – Porque el "A" está muy… muy delgado y muy largo.
> – ¿Por qué no escoge el "B"?
> – Porque está muy ancho… demasiado ancho […] y el "D" también muy pequeño y al mismo tiempo muy ancho.
> – ¿Qué tiene el "C" que no tengan los demás?
> – Mmm –piensa detenidamente para hablar– más igualdad se ve que la *proporción* es como más parecida a esta. No, no de medidas sino… ¿cómo me explicó?... Reducido.
> – ¿Y cuántas veces le parece que está reducido?
> – ¡Uy! Ahí si tocaría medir –y ríe nerviosamente-.
>
> (Entrevista, 8 de noviembre de 2007)

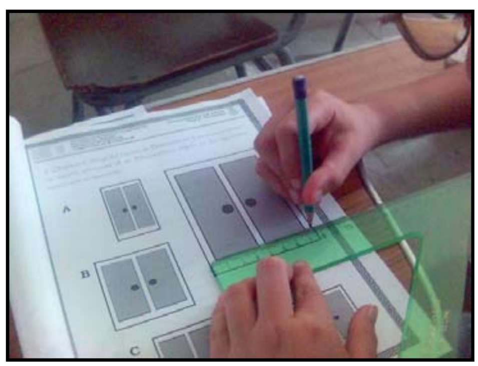


Foto 5. Estudiante empleando instrumentos de medición para establecer razones.

Después de esta entrevista de enseñanza, Sandra efectivamente usó un instrumento –tal cual se esperaba– para establecer las medidas de cada lado del rectángulo que compone al ropero y las consignó en su cartilla, al igual que las medidas del ropero que ella consideraba era el de los enanos.

Como bien se puede observar, Sandra estableció la tasa entre las magnitudes dimensionales del marco que componen al ropero, comprobando así que los dos cocientes indicados tienen la misma razón aplicando la –como lo llamaron en clase– *regla de la división* que Edwin dedujo. Además, determinó que la constante de proporcionalidad que relacionaba ambos roperos correspondía a "la mitad".

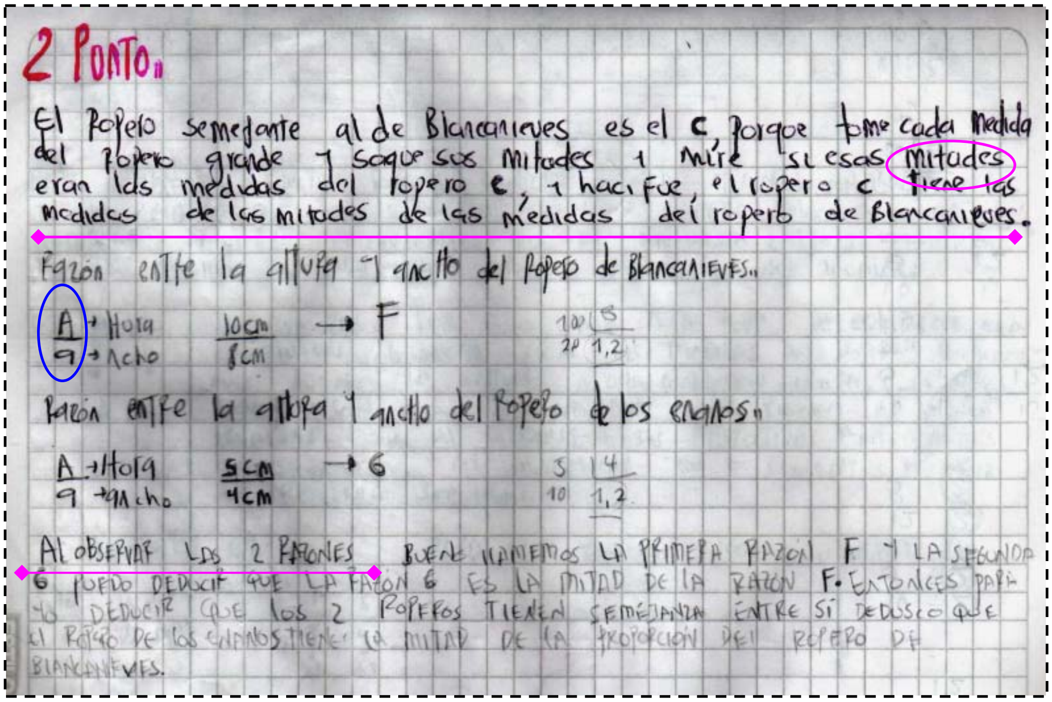


Figura 57. Aproximación al razonamiento de Sandra sobre la actividad del ropero de los enanos.

Sin embargo, fue necesario discutir con Sandra sobre esa constante de proporcionalidad para verificar si su razonamiento estaba enmarcado en estructuras aditivas o multiplicativas. Pero antes de dar paso a esta, veamos el razonamiento que Edwin puso en juego en esta actividad para llegar al uso de la regla después de haber analizado la situación cualtitativamente:

– ¿Cuál era el tema del que estábamos hablando antes?
– Razón.
– ¿Y para dónde vamos ahora?
– Según el nombre de la Cartilla, para proporcionalidad.
– Bueno, ¿aquí podemos establecer una razón con esto?

– Tal vez.
Dado que no lograba establecer la razón entre el ancho y el alto, le pregunté:
– […] ¿Entre quienes solemos establecer razones?
– Entre magnitudes.
– ¿El rectángulo tiene magnitudes?
– […] Sus medidas […] son cuatro magnitudes.
Dada la confusión que Edwin presentaba con estos conceptos geométricos fue necesario abrir un espacio para ayudarle a aclararlos.
– Entonces en el rectángulo puede establecer una relación entre… ¿quiénes?
– El ancho y el alto.
– Ahora, ¿cómo puede establecer razones numéricas teniendo en cuenta esas magnitudes?
– Sacando las medidas.
– ¿Y qué necesita para sacar esas medidas?
– La regla.

(Entrevista, 9 de noviembre de 2007)

Por otro lado, el desempeño de Brenda en esta actividad fue destacable pues fácilmente determinó el ropero de los enanos recurriendo de una vez al uso de la regla para establecer las razones externas respectivas. Sin embargo, no usó ninguna de las dos notaciones que corresponden a la razón (véase la Figura de abajo).

Además, la estudiante observó que cada término de las razones del uno y del otro ropero (Blancanieves y enano) disminuía “la misma cantidad” relacionando así las magnitudes como directamente proporcionales. No obstante, al igual que Sandra, no dejó explícito qué clase de estructura usó en su razonamiento para afirmar tal cosa.

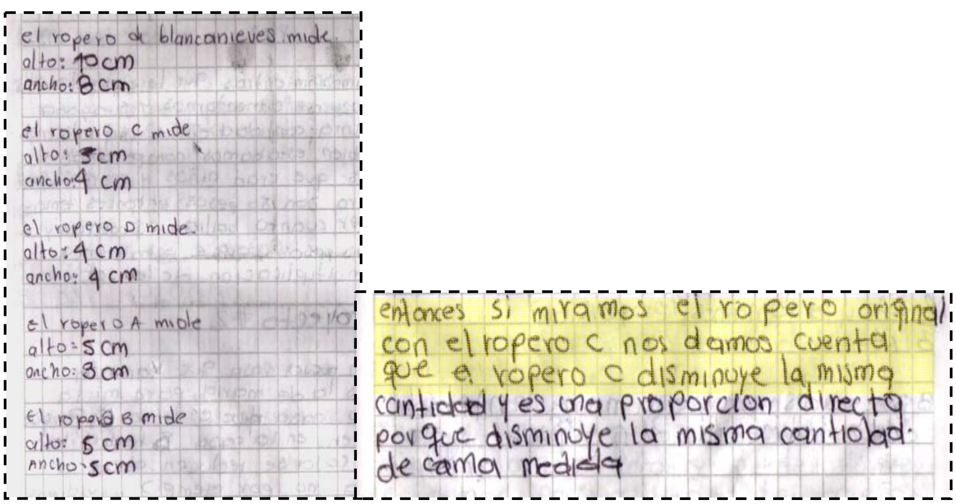


Figura 58. Aproximación del razonamiento de Brenda en la actividad el ropero.

> – El ropero este [el del enano], y este [el de Blancanieves], ¿serán proporcionales?, ¿cuál es la relación del uno con el otro?
> – ¡Ah! Pues la mitad porque todas [las] medidas están reducidas a la mitad.
> – Explíquese mejor.
> – Pues yo mirando, comparando veo que las medidas del ropero de Blancanieves están disminuidas la mitad para que den las [medidas] del [ropero] de los enanos.
> – ¿Cómo así que "la mitad"?
> De manera muy clara y con seguridad, Brenda contestó:
> – Sí. Es, digamos, dividir 10 en 2 y da 5; y 8 en 2 da 4, ¿sí?
>
> (Entrevista, 9 de noviembre de 2007)

Con esta claridad conceptual, Brenda logró realizar los dibujos de la ampliación y la reducción del ropero de Blancanieves sin mayores problemas, y al final consignó –tal como se pidió que lo hiciera en la actividad– en su cuaderno el siguiente apunte sobre lo que ella comprendía como proporcionalidad:

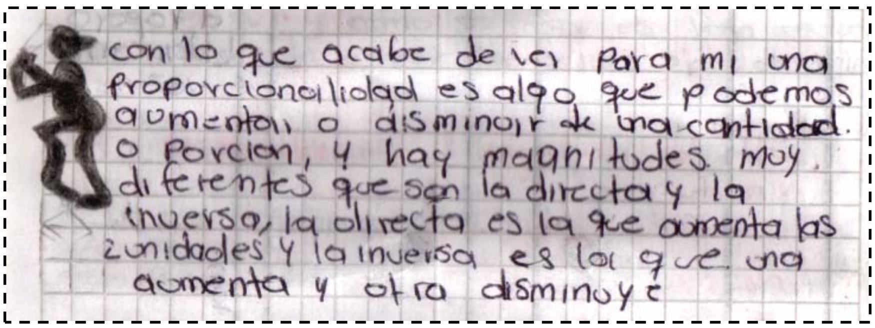
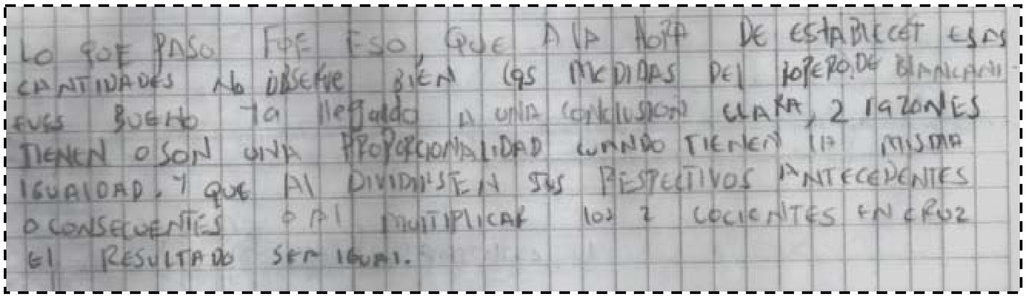

con lo que acabe de ver para mi una
proporcionalidad es algo que podemos
aumentar o disminuir de una cantidad.
o porcion, y hay magnitudes muy
diferentes que son la directa y la
inversa, la directa es la que aumenta las
unidades y la inversa es la que una
aumenta y otra disminuye

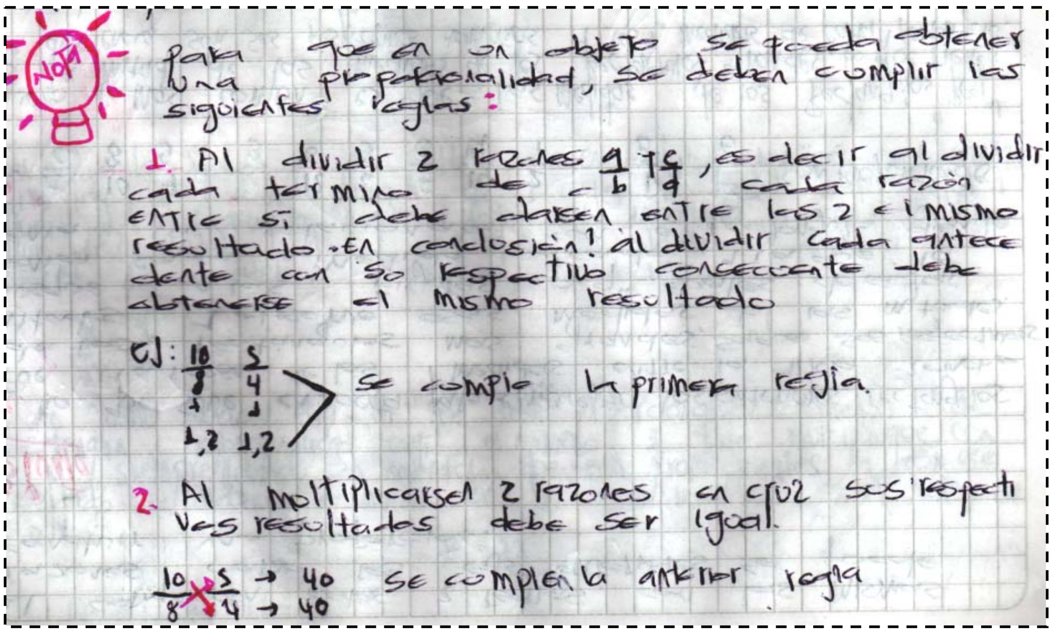
Figura 59. Concepto intuitivo de proporcionalidad de Brenda.

En tanto que Sandra evidenció en la ampliación del ropero que había empleado la constante de proporcionalidad de forma errónea pues a cada magnitud le sumó una constante diferente. Para ayudarle a ver su error, recurrí a preguntarle si las relaciones de las cantidades de magnitud de cada ropero tenían la misma razón. Esto para inducirla a que comprobara tal cosa usando la "regla de la división".

No obstante, su curiosidad epistémica la llevó a *jugar* con las razones hasta que comprobó que si multiplicaba en cruz los términos de las razones implicadas dichos productos serían iguales. Esto le generó mucha satisfacción y entusiasmo. La siguiente fue la huella que dejó en clase en su cuaderno del razonamiento que realizó; y, posteriormente, se presenta el apunte que hizo en la casa al realizar la revisión de lo que había hecho en clase retomando la actividad de los roperos de Blancanieves y los enanos cuyas proporciones eran 10:8 y 5:4.



LO QUE PASO FUE ESO, QUE A LA HORA DE ESTABLECER ESAS CANTIDADES NO OBSERVE BIEN LAS MEDIDAS DEL ROPERO DE BLANCANIEVES BUENO YA llegado A UNA CONCLUSION CLARA, 2 RAZONES TIENEN O SON UNA PROPORCIONALIDAD CUANDO TIENEN LA MISMA IGUALDAD, Y QUE AL DIVIDIRSE EN SUS RESPECTIVOS ANTECEDENTES O CONSECUENTES O AL MULTIPLICAR LOS 2 COCIENTES EN CRUZ EL RESULTADO SER IGUAL.



NOTA

para que en un objeto se pueda obtener una proporcionalidad, se deben cumplir las siguientes reglas:

1. Al dividir 2 razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, es decir al dividir cada termino de cada razón entre si debe darse entre los 2 el mismo resultado. En conclusión! al dividir cada antecedente con su respectivo consecuente debe obtenerse el mismo resultado

Ej: $\frac{10}{8}$ $\frac{5}{4}$ ↓ ↓ 1,2 1,2 > se cumple la primera regla.

2. Al multiplicarse 2 razones en cruz sus respectivos resultados debe ser igual.

$\frac{10}{8} \times \frac{5}{4}$ → 40 → 40 se cumple la anterior regla

Figuras 60. Apunte burdo y refinado de Sandra como resultado de un proceso de metacognición y metadiscurso.

Es así que en la medida que se diseñen actividades –o espacios– de aula en los cuales se les dé espacio a los estudiantes para razonar y proponer es que los profesores ayudamos a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y a usar una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las conjeturas. De esta manera, los estudiantes se forman como resolutores flexibles de problemas creando recursos variados para enfrentar el aprendizaje.

Entonces, como resultado de las actividades didácticas precedentes para la enseñanza de la razón y la proporción a través de los dibujos y las expresiones que favorecieron el desarrollo de patrones perceptuales que desembocaron en procesos de cuantificación, la resolución de problemas de las situaciones planteadas en el Bloque III: “Semejantes Rectángulos”, fue muy dinámica y acertada ya que lograron emparejar los rectángulos proporcionales usando las estrategias multiplicativas requeridas.

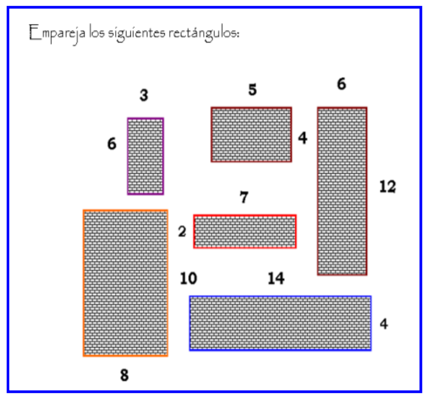


Figura 61. Actividad de emparejamiento de rectángulos proporcionales**.**

Sin embargo, el uso de las palabras (conceptos) correctas para exteriorizar el razonamiento era limitado, empero recurrían al sistema semántico para hallar allí una representación léxica que les permitiera simbolizarlo como era el caso de Brenda. Veamos:

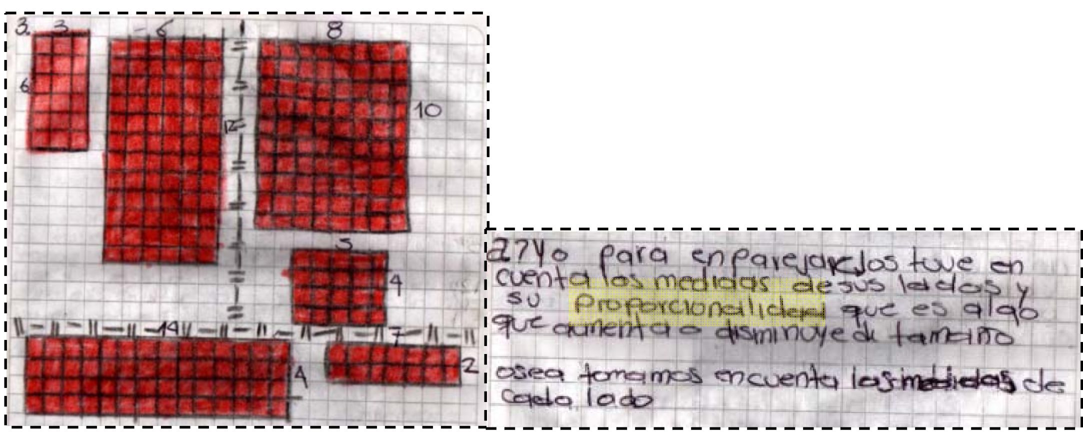
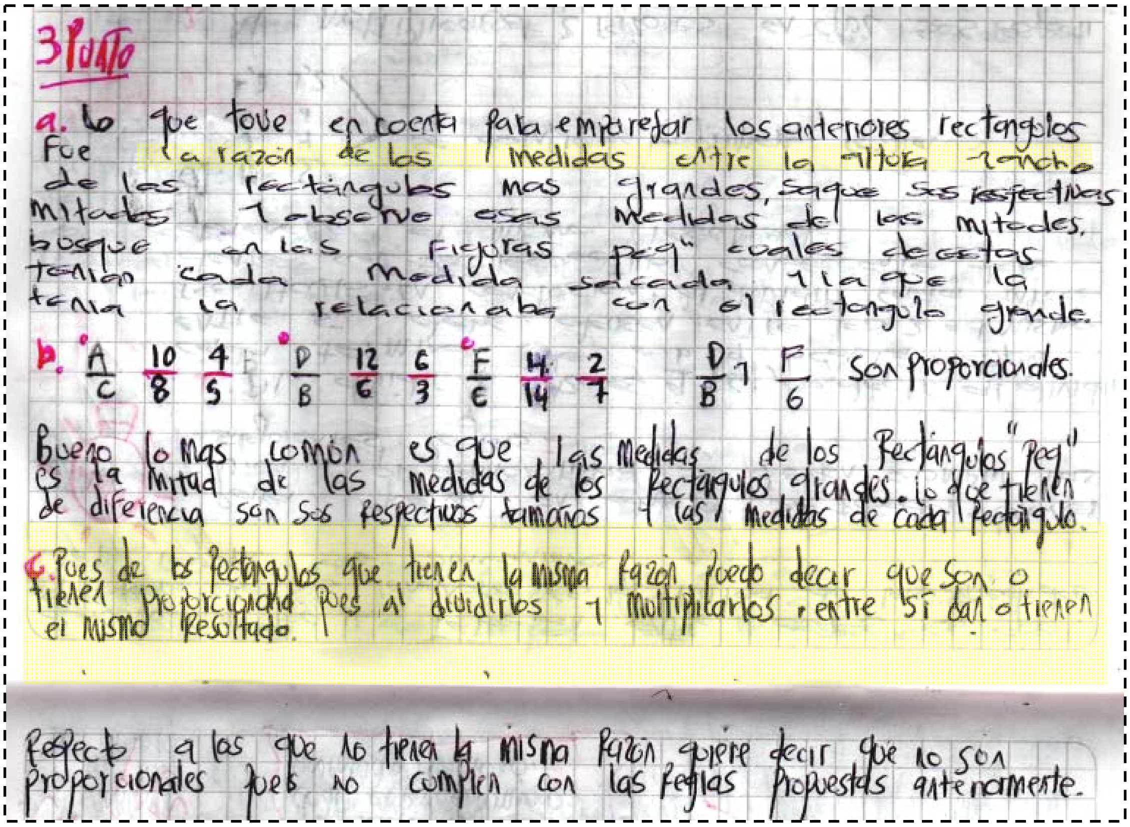


Figura 62. Aproximación al razonamiento de Brenda.

Veamos ahora el trabajo de Sandra que resultó ser más elaborado ya que al momento de escribir recurrió tanto a sus habilidades escritoras –dado que se expresó de manera ordenada, clara y coherente– como al dominio de los conceptos que había logrado construir y comprender durante el proceso:


3 Punto

a. Lo que tove en cuenta para emparejar los anteriores rectangulos fue la razon de las medidas entre la altura y ancho de las rectángulos mas grandes, saque sus respectivas mitades y observe esas medidas de las mitades, busque en las figuras peq" cuales de estas tenian cada medida sacada y la que la tenia la relacionaba con el rectangulo grande.

b. A/C 10/8 4/5 D/B 12/6 6/3 F/E 14/14 2/7 D/B y F/6 son proporcionales.

Bueno lo mas comun es que las medidas de los Rectangulos "peq" es la mitad de las medidas de los rectangulos grandes. Lo que tienen de diferencia son sus respectivos tamaños y las medidas de cada rectangulo.

c. Pues de los rectangulos que tienen la misma razon puedo decir que son o tienen proporcionalidad pues al dividirlos y multiplicarlos entre si dan o tienen el mismo resultado.

Respecto a las que no tienen la misma razon quiere decir que no son proporcionales pues no cumplen con las reglas propuestas anteriormente.

Figura 63. Aproximación al razonamiento proporcional de Sandra:
“Semejantes Rectángulos”, literal a.

A modo de paréntesis, en este punto el proceso se podría decir que las diferencias humanas inciden también para el caso de la toma de apuntes y de la misma composición escrita, “siendo [hablando de la última] para unas personas muy dificultoso como es el caso de las personas con dificultades de aprendizaje y en cambio para otras es algo placentero y que apenas les exige esfuerzo” (García y Fidalgo, 2004, p. 2).

Por tal razón resulta imperante que el profesor conozca a sus estudiantes y su perfil académico para diseñar un marco de evaluación que se ajuste a su potencial y sus capacidades y, al mismo tiempo, le permita intervenir para favorecer los procesos de aprendizaje de cada estudiante partiendo de una base real y no de la suposición de que por estar todos en un mismo curso tienen las mismas capacidades cognitivas y menos considerar que están en un nivel homogéneo.

Veamos el abordaje de Edwin que también fue diferente y consecuente con su proceso de aprendizaje:

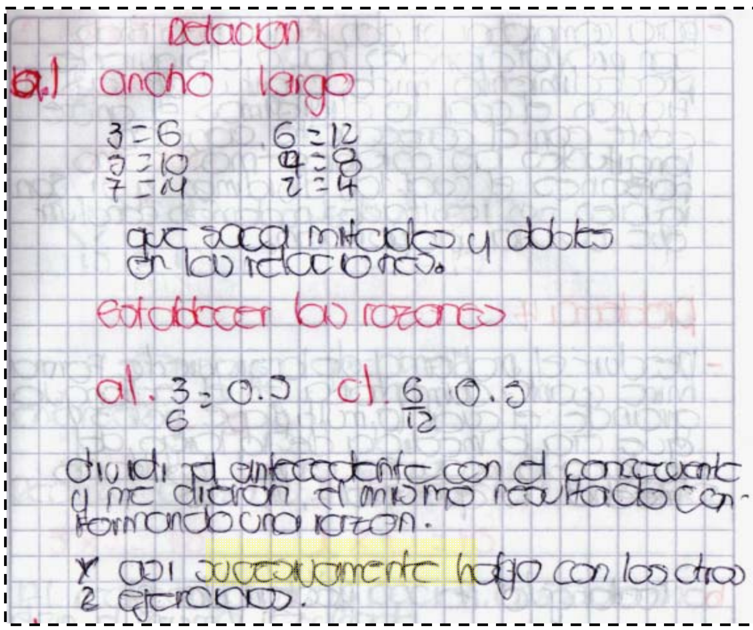


Figura 65. Aproximación al razonamiento proporcional de Edwin:
“Semejantes Rectángulos”, literal a.

Como se puede observar, Edwin recurrió a la notación de los dos puntos para traducir los dibujos a lenguaje matemático lo cual es de resaltar dado que, como bien lo confirma Guacaneme (2001), hasta los libros de textos tiende a dejar de lado esta notación una vez la han presentado en las definiciones de razón.

Además, notamos que Edwin nuevamente apeló a la síntesis para exteriorizar su razonamiento proporcional que se estaba caracterizando por volver, tal cual lo hacía Sandra, a sus propios descubrimientos producto de la dinámica del aprendizaje.

De esta manera, Edwin comprobó las situaciones geométricas proporcionales acogiéndose a la igualdad de los cocientes calculados de cada una de las parejas de razones de los rectángulos proporcionales.

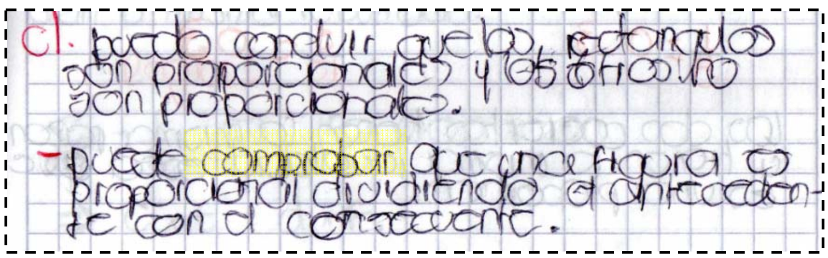
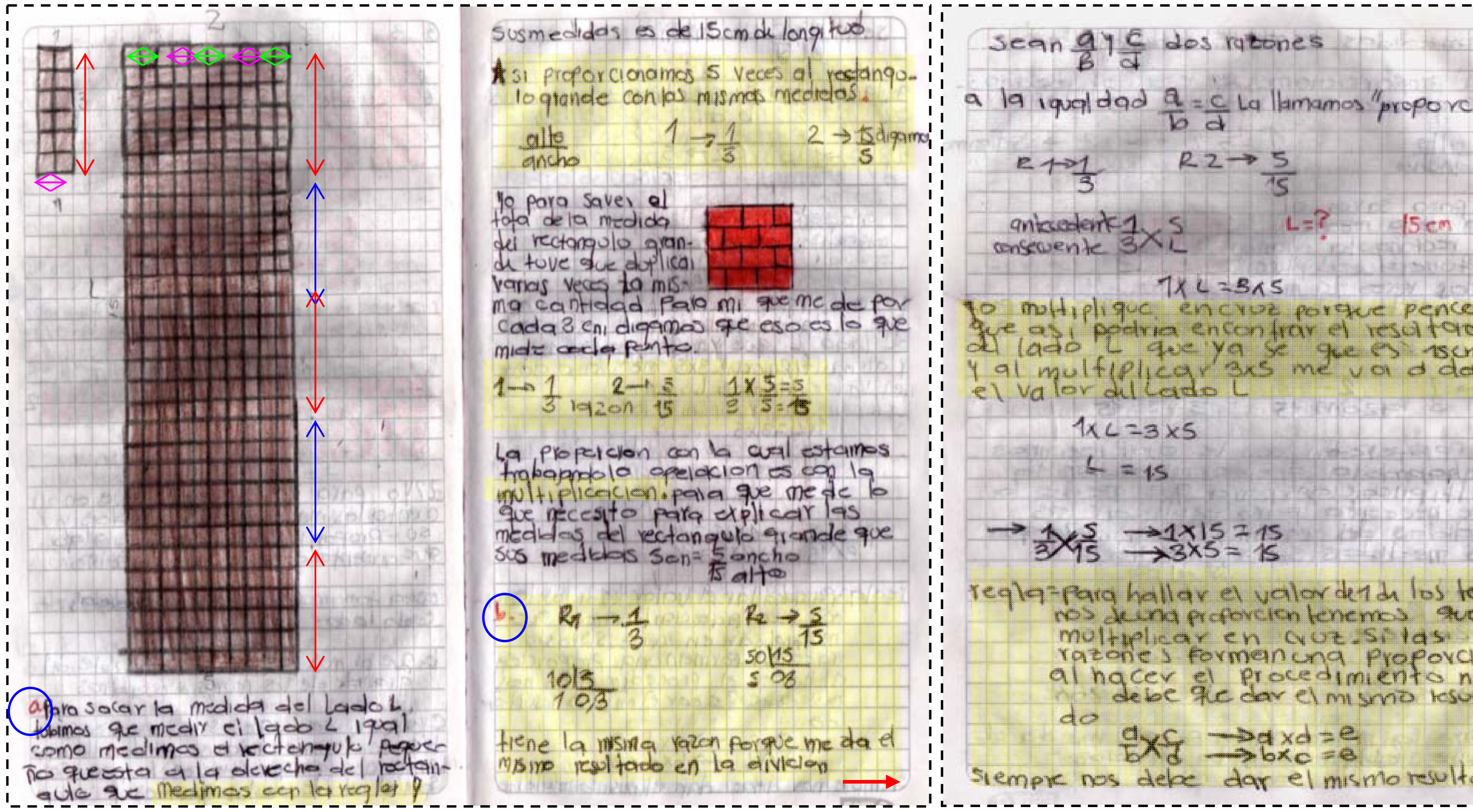


Figura 66. Generalización de Edwin.

En la siguiente situación del Bloque (hallar la cuarta proporcional de una situación de tipo gráfico-geométrico) se dieron diferentes resoluciones. Empecemos con la de Brenda quien para comenzar la actividad recurrió –como consecuencia de las actividades anteriores– a medir el lado desconocido con la regla, encontrando que el valor de este era de 15 cm.

De tal modo, pasó al cuaderno los dibujos y como consecuencia de ello, notó que el ancho del rectángulo pequeño estaba aumentado cinco veces entonces, usando deducciones fundamentadas por conocimientos anteriores, dedujo que la constante de proporcionalidad era 5 (cm).

En el siguiente apunte, podremos ver el avance de Brenda en cuanto a la elaboración de texto ya que fue bastante elocuente y consecuente en los razonamientos que expuso además de que mostró mayor organización e incluyó colores para favorecer la distinción de los literales.



Figuras 67. Aproximación al razonamiento de Brenda: resolución de la cuarta proporcional, procedimiento y explicación para determinar la cuarta proporcional; generalización del procedimiento.

De esta manera vemos que la génesis del razonamiento de Brenda fue el dato que obtuvo de su tarea de medición, lo que la llevó a estudiar las razones y encontrar relaciones algorítmicas que le permitieran hallar los 15 (cm) que obtuvo engranando esto con lo que ya sabía sobre proporción y el vinculo estrecho de esta con las estructuras multiplicativas.

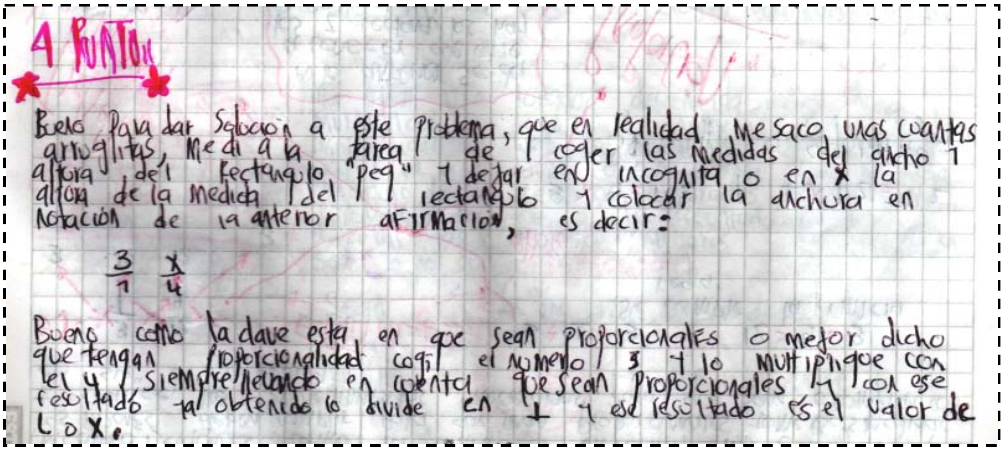
Por otro lado, es interesante la generalización que hizo. El cuerpo textual que la compone es muy claro, con ritmo y más preciso que los precedentes; además, de manera muy natural, incluyó lenguaje algebraico para lograr generalizar y al final enfatizó –como quien está muy seguro de algo– que *siempre* debe darse la igualdad entre el producto en cruz de los términos de las razones que se espera sean una proporción para así dotar de la cualidad de la proporcionalidad a los entes que las generan.

Referente al lenguaje algebraico, Obando y Vásquez (2000) afirman que esto hace que el razonamiento proporcional se constituya en la cúspide del desarrollo del pensamiento aritmético, y en la puerta de entrada al pensamiento algebraico.

Sin embargo, Brenda dejó a mitad de camino la explicación de cómo determinar la cuarta proporcional. Pero se reconoce lo válido de su esfuerzo y la evolución que realizó en la composición de dicha generalización ya que para su elaboración ejerció un control consciente sobre las operaciones mentales que realizaba –vale la pena repensar las condiciones pedagógicas en las que pedimos escribir a nuestros estudiantes–.

En cuanto Sandra, no es necesario explicitar el razonamiento que hizo pues lo plasmó muy bien en sus anotaciones. No está de más resaltar los recursos gráficos que usó para conectar las dos reglas y la doble implicación que existe entre ellas mostrando con ello una organización conceptual genérica y jerárquica entre los conceptos matemáticos que construyó.

Ahora veamos su generalización:

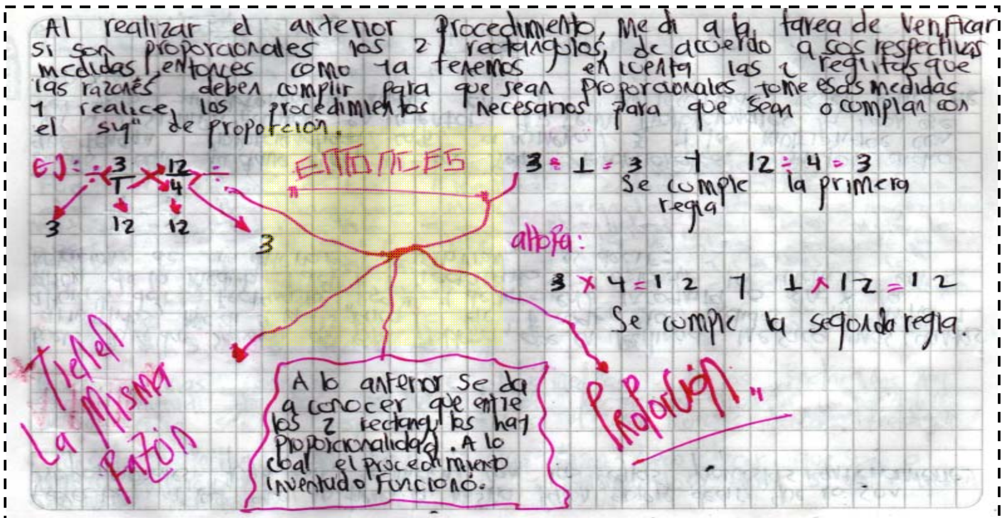


A PUNTO

Bueno para dar solución a este problema, que en realidad me sacó unas cuantas arruguitas, me di a la tarea de coger las medidas del ancho y altura del rectángulo "peq" y dejar en incógnita o en x la altura de la medida del rectángulo y colocar la anchura en notación de la anterior afirmación, es decir:

$\frac{3}{1}$ $\frac{x}{4}$

Bueno como la clave está en que sean proporcionales o mejor dicho que tengan proporcionalidad cogí el número 3 y lo multipliqué con el 4 siempre llevando en cuenta que sean proporcionales y con ese resultado ya obtenido lo divido en 1 y ese resultado es el valor de la x.



Al realizar el anterior procedimiento, me di a la tarea de verificar si son proporcionales los 2 rectángulos, de acuerdo a sus respectivas medidas, entonces como ya tenemos en cuenta las 2 reglitas que las razones deben cumplir para que sean proporcionales tomé esas medidas y realicé los procedimientos necesarios para que sean o cumplan con el "sy" de proporción.

EJ: $\frac{3}{1}$ $\frac{12}{4}$ → 3, 12, 12, 3

ENTONCES

$3 \div 1 = 3$ y $12 \div 4 = 3$ Se cumple la primera regla

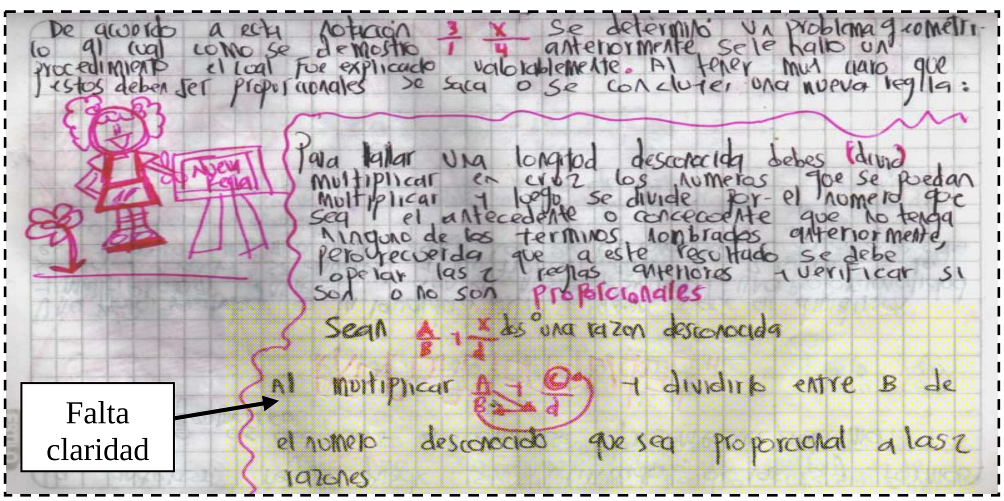
altura:

$3 \times 4 = 12$ y $1 \times 12 = 12$ Se cumple la segunda regla.

Tienen la misma razón

A lo anterior se da a conocer que entre los 2 rectángulos hay proporcionalidad. A lo cual el procedimiento inventado funcionó.

Proporción.



De acuerdo a esta notación $\frac{3}{1}$ $\frac{x}{4}$ se determinó un problema geométrico al cual como se demostró anteriormente se le halló un procedimiento el cual fue explicado valorablemente. Al tener muy claro que éstos deben ser proporcionales se saca o se concluye una nueva regla:

Nueva Regla

Para hallar una longitud desconocida debes ~~divid~~ multiplicar en cruz los números que se puedan multiplicar y luego se divide por el número que sea el antecedente o consecuente que no tenga ninguno de los términos nombrados anteriormente, pero recuerda que a este resultado se debe operar las 2 reglas anteriores y verificar si son o no son proporcionales

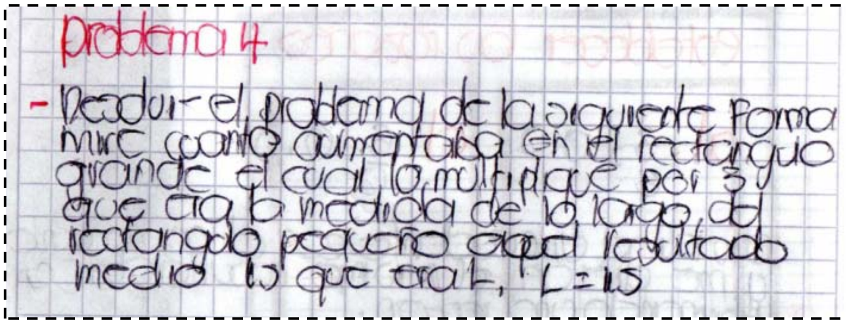
Sean $\frac{A}{B}$ y $\frac{x}{d}$ dos o una razón desconocida

Al multiplicar $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{d}$ y dividirlo entre B de el número desconocido que sea proporcional a las 2 razones

Falta claridad

Figuras 68. Aproximación al razonamiento inferencial de Sandra sobre la actividad de la cuarta proporcional.

Por su parte, Edwin hizo un razonamiento bastante válido y consecuente dado que tenía claro que la proporcionalidad está relacionada con la multiplicación. Esto fue lo que él consignó en sus apuntes acerca del razonamiento proporcional con el cual realizó la tarea matemática. Eso sí, sintetizando como era su estilo:



Problema 4

- Resolví el problema de la siguiente forma mire cuanto aumentaba en el rectangulo grande el cual lo multiplique por 3 que era la medida de lo largo del rectangulo pequeño aquel resultado medio 15 que era L, L = 15

Figura 69. Apunte de Edwin.

Satisfactoriamente, Edwin halló la cuarta proporcional a través del análisis sobre el dibujo presentado, aplicando *su* “regla de la división” sin recurrir al papel y de esta manera infirió:

> – Hay que hacer razones entre las magnitudes para la proporcionalidad y aplicar la regla de la división para ver si son iguales las razones de las dos figuras […], deben dar los mismos los cocientes […] 3 dividido en 1, 3. Entonces debe dar el otro cociente también 3 […] este –señalando el ancho del rectángulo grande– mide 5 cm entonces sería L : 15 cm […] para que dé 3 el cociente [de la razón] por eso L es 15, porque 15 / 5 da 3 y da el mismo cociente.

Su apunte al respecto, fue muy similar la de Brenda, por lo que no se presentara. Por otro lado, su generalización fue la más sencilla de todas, dado que solo recurrió a lenguaje simbólico y fue muy preciso aunque por falta de atención omitió “de los cocientes” en la segunda regla para que tuviera absoluta hilaridad la regla; nuevamente Edwin usó la notación de los dos puntos para generalizar (véase y léase la Figura 70).

De esta manera, el salón de clase se convirtió en un laboratorio de matemáticas en donde los estudiantes a partir de sus interpretaciones y conocimientos infirieron propiedades que por lo general se les da en el tablero de manera axiomática sin darles oportunidad de que ellos descubran cómo surgen ni menos que comprendan el por qué son importantes para la matemática y para el aprendizaje del concepto que ven.

Ciertamente, “como ciencia constituida, las matemáticas se caracterizan por su precisión, por su carácter formal y abstracto, por su naturaleza deductiva y por su organización a menudo axiomática. Sin embargo, tanto en la génesis histórica como en su apropiación individual por los estudiantes, la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas activadas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real es, al mismo tiempo, un paso previo a la formalización y una condición necesaria para interpretar y utilizar correctamente todas las posibilidades que encierra dicha formalización” (Godino, Batanero y Font, 2004, p. 26).

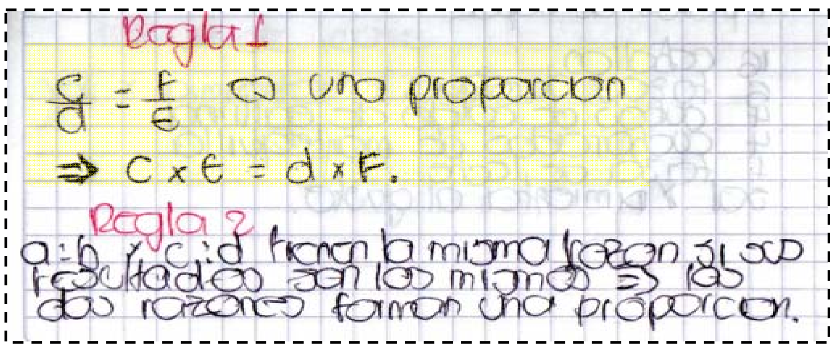
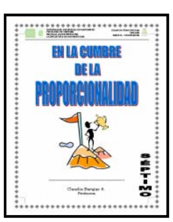


Figura 70. Generalizaciones de las propiedades de la proporción.

En tanto transcurría el aprendizaje, el razonamiento deductivo desempeñaba un papel importante dentro del proceso de construcción de conocimiento de la mano con el razonamiento inductivo lo que les dio a los estudiantes momentos de satisfacción y alegría dado que estaban haciendo matemáticas. Es así que después de tanta confianza adquirida en esta Cartilla, había llegado el momento de que se enfrentaran a situaciones problemas que requirieran mayor concentración y mayor razonamiento que las expuestas.



Como bien recordará el lector, esta última Cartilla estaba estructurada por tres situaciones problemas que surgen de la cotidianidad de cualquier persona; así, se propusieron dos problemas de mezclas y uno de porcentajes.

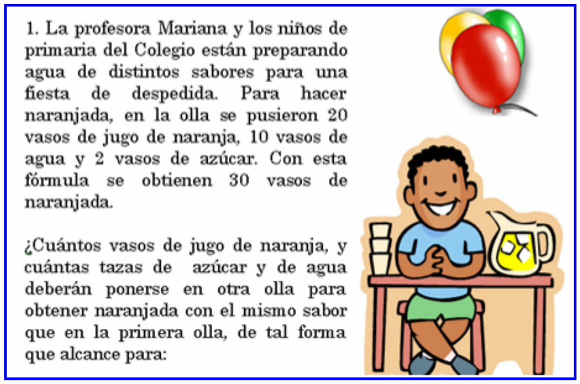


Figura 71. 1ª situación problema de mezclas.

Después de superar las dificultades relatadas en el Capítulo anterior sobre cuán desequilibrante fue la primera situación para los estudiantes dado que aunque parecía que dominaban comprensivamente la proporcionalidad, no lograron vislumbrarla casi una hora después. Edwin por su parte, se estresó demasiado con la actividad por lo que la dejó para después; Sandra por su parte, se alejó del Grupo, y tras poner el pupitre mirando hacia la pared, se dedicó a pensar y re-pensar una posible solución apoyándose en sus apuntes; Brenda, también sola, escribía y borraba y planteaba y re-planteaba soluciones pero no conseguía salir del umbral.

Si sigue las pautas de las flechas en la Figura 72 que muestra uno de los tantos borradores que Brenda hizo intentando solucionar la situación –esta hoja hacía parte del cuaderno de Brenda, pero después de la orientación colectiva, la arrancó–, se puede observar que, primero no había comprendido el problema ni comprendía la misma tabla. Por esto mismo, abordó el problema primeramente tratando de acomodar el número de ingredientes para obtener aditivamente el número que representaba la cantidad de vasos de naranjada (en el caso de 10 y 4). No obstante, como producto de la interacción estudiantes-profesora, y del análisis funcional de la situación, los estudiantes con mucho esfuerzo, lograron establecer las razones funcionales e identificar la proporcionalidad en ella.

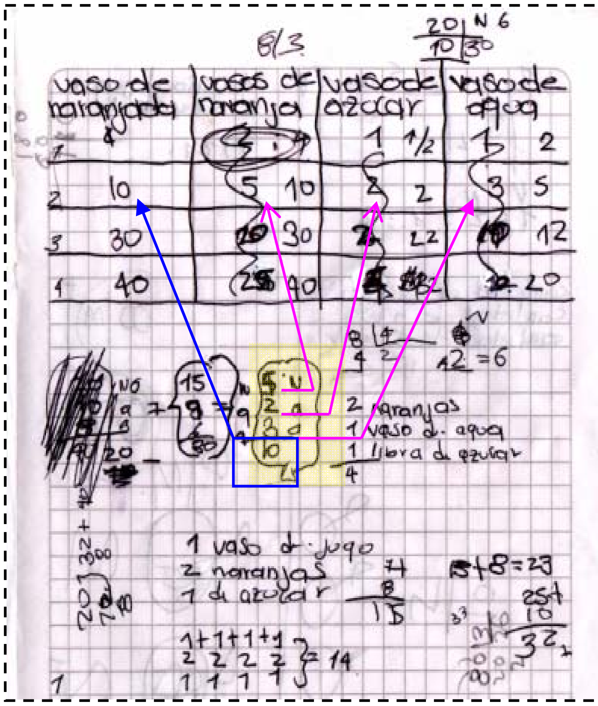


Figura 72. Primeras estrategias de resolución; Brenda.

– Porque tenemos la naranjada, ¿si?, la olla de naranjada, ¿cuáles son las tres cosas que influyen acá?

– El azúcar, el agua y la naranja.

– ¿De qué manera influye?

– O sea, que si se le echa mucho agua, queda simple; si es poca azúcar, ácida; y si es poquitas naranjas pues eso queda pura agua.

– Entonces, ¿cuál es la […] cantidad de magnitud que está teniendo presente usted al hacer ese análisis?

– […] los vasos de naranjada porque como son 30 los ingredientes son exactos para su preparación.

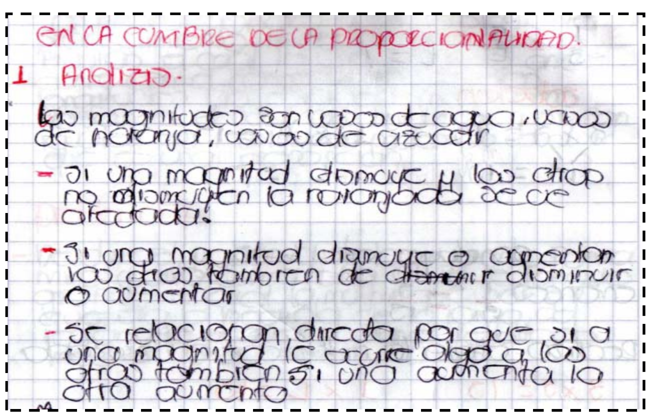


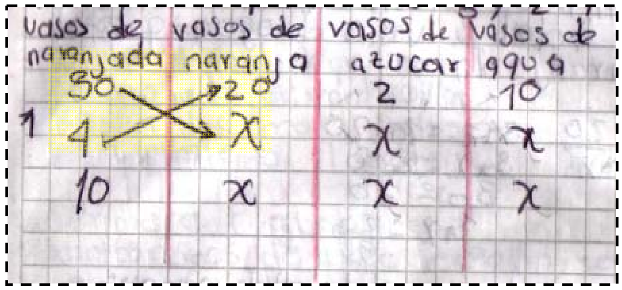
Figura 73. Aproximación al análisis funcional de las magnitudes involucradas; Edwin.

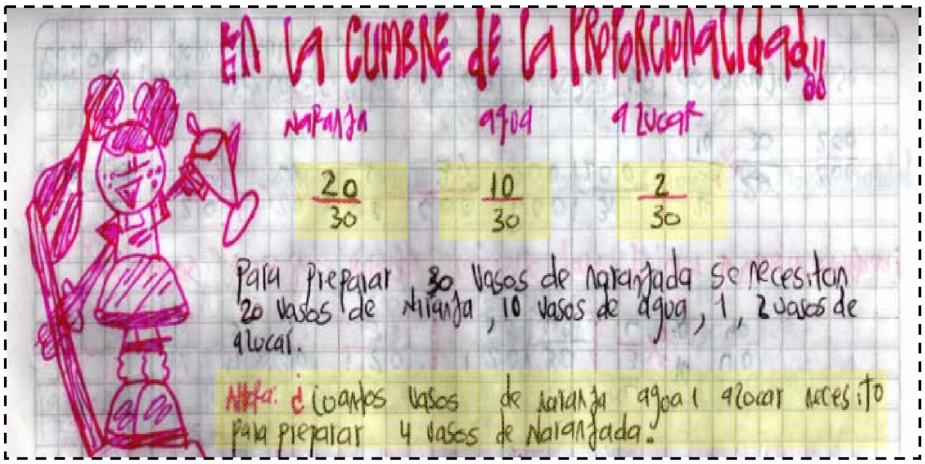
Cabe mencionar, que la situaciones problemas propuestas movilizaron tanto momentos de individualismo para hallar estrategias de solución como espacios de trabajo de grupo ya que los estudiantes exponían sus estrategias lo que los llevaba a argumentarlas y hacerlas válidas ante sus compañeros. Es así como el trabajo en grupo favorece el aprendizaje ya que los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía del profesor lo que los lleva a valorar las matemáticas y a comprometerse activamente en su aprendizaje.

Según el proceso que se ha develado, se podría decir que la enseñanza de las matemáticas significativa requiere de la interacción social, la cooperación, el discurso, y a la comunicación, además de la interacción del sujeto con las situaciones problemas.

> – Entonces, ¿cuál problema les plantea la situación?
> – Pues saber cuántas naranjas, cuánta agua y cuánta azúcar necesitan para preparar otras ollas de naranjada.
> – Y… ¿qué tienen de particular esas otras ollas de naranjada?
> Contesta otra estudiante:
> – Son para otras cantidades de vasos de naranja.
> Después de otras apreciaciones, un estudiante inquiere:
> – Pero Profe, ¿esas otras naranjadas deben parecerse a la narajanda de los 30 vasos?
> – Contésteme eso alguien.
> Silencio en el salón. Hasta que inseguramente otro estudiante del grupo contesta:
> – Pues yo creo que sí porque sino cuál sería el problema –el salón ovaciona al niño–.
> – ¿Cómo así?
> – No ve que si no pues le echo los ingredientes que yo quiera.
> – Sí tiene toda la razón. Entonces, ¿cuál es el problema?
> Contesta Sandra:
> – Pues Profe, o sea yo creo, digo, que tenga el mismo sabor.
> (Grabación de clase, 20 de noviembre de 2007)

Una vez los estudiantes organizaron las relaciones de equivalencia entre las razones establecidas entre los ingredientes, el desarrollo de la situación se hizo prácticamente algorítmica. Eso sí, plantearon para cada par de magnitudes el problema del valor perdido pero quedaron en *stand by* al notar que la incógnita no estaba sola dado que la razón que se conocía no era unitaria como ellos la trabajaron en la Cartilla anterior. Así, paulatinamente, cada estudiante preguntó: “Profe, ¿y esto cómo se hace?”. Incluso hubo un estudiante expresó que era imposible resolver el problema que planteaba la situación.





Figuras 74. Arriba: Organización tradicional de la regla de tres compuesta; Brenda. **Abajo:** Organización personalizada de los datos del problema y exposición del primer problema de la situación; por Sandra.

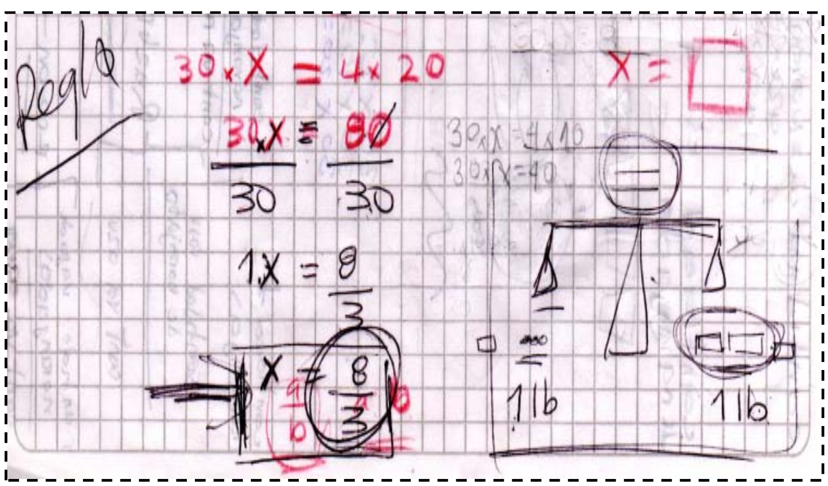


Figura 75. Explicación a Brenda de las propiedades cancelativas para solucionar ecuaciones con una incógnita usando el recurso didáctico de la Regla de la Balanza.

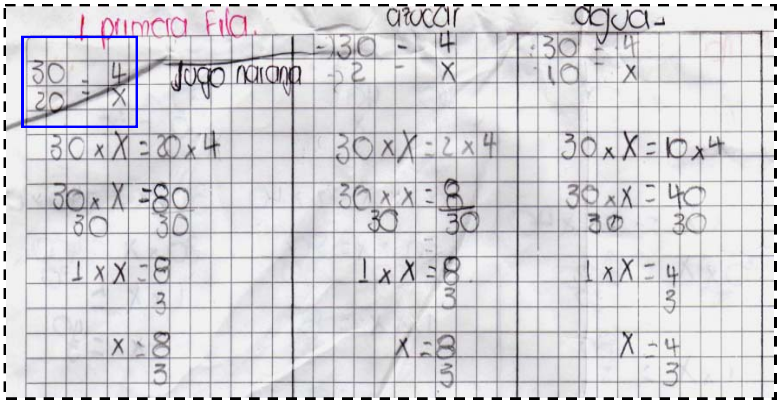


Figura 76. Aplicación del valor desconocido para hallar la cuarta proporcional; por Edwin.

– Caballero, explíqueme todo esto porque no entiendo. Empiece por decirme qué significa esto [señalando el cuadro azul de la Figura].

Contesta señalando con el dedo término a término:

– Esa es la manera de escribir más fácilmente […] para 30 vasos de agua necesitan 20 de naranjas entonces cuántos vasos [vasos de jugo de naranja necesito] para 4 [vasos de naranjada].

(Grabación de clase, 22 de noviembre de 2007)

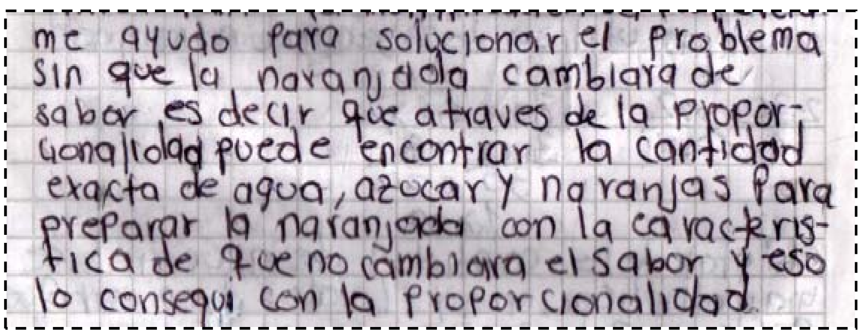

me ayudo para solucionar el problema sin que la naranjada cambiara de sabor es decir que atraves de la propor-cionalidad puede encontrar la cantidad exacta de agua, azucar y naranjas para preparar la naranjada con la caracteris-tica de que no cambiara el sabor y eso lo consegui con la proporcionalidad

Figura 77. Apunte final de Brenda de la primera situación de mezclas sobre la utilidad de la proporcionalidad en esta.

Aquel fue el razonamiento que pautó toda la algoritmia que el estudiante usó para completar la tabla de la Cartilla. Por otro lado, al finalizar la actividad de llenar la tabla, Brenda realizó la anotación que aparece en la Figura de arriba después de que le pregunté para qué le ayudó la proporcionalidad en la resolución del problema.

Cabe mencionar, antes de continuar, que Sandra y Edwin durante el proceso de hallazgos de las cuartas proporcionales, estuvieron comprobando que efectivamente las proporciones se estaban dando; esto es puede apreciar a continuación:

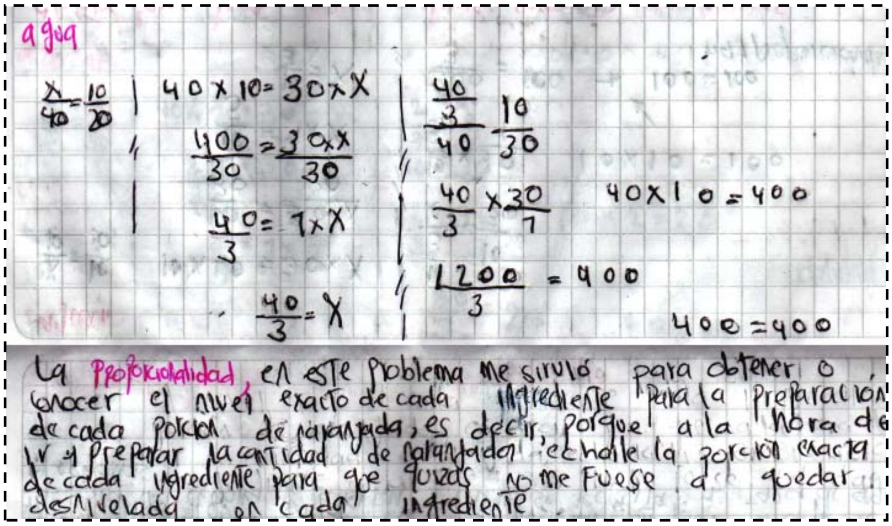
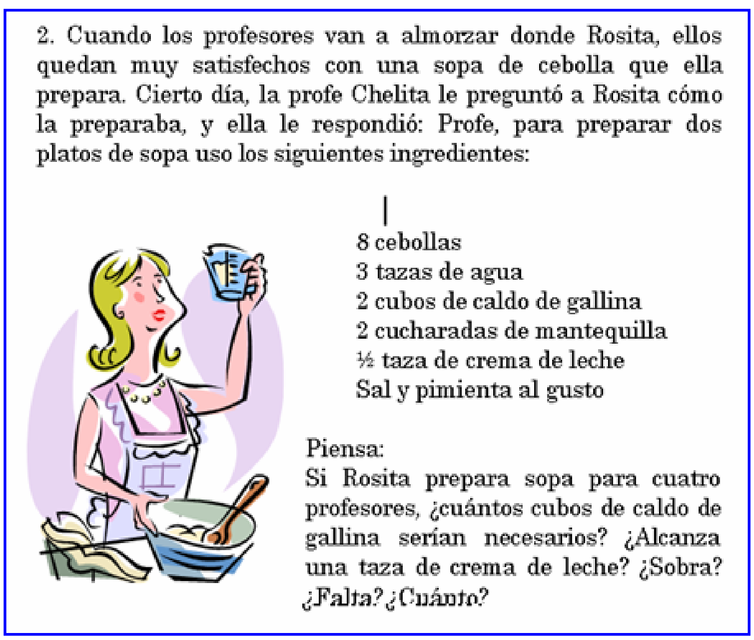


Figura 78. Algoritmia de hallazgo de la cuarta proporcional; comprobación de las relaciones proporcionales; utilidad del concepto de proporcionalidad para la actividad.


2. Cuando los profesores van a almorzar donde Rosita, ellos quedan muy satisfechos con una sopa de cebolla que ella prepara. Cierto día, la profe Chelita le preguntó a Rosita cómo la preparaba, y ella le respondió: Profe, para preparar dos platos de sopa uso los siguientes ingredientes:

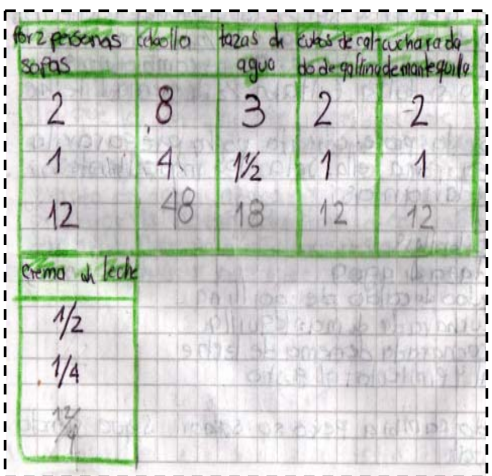
8 cebollas
3 tazas de agua
2 cubos de caldo de gallina
2 cucharadas de mantequilla
½ taza de crema de leche
Sal y pimienta al gusto

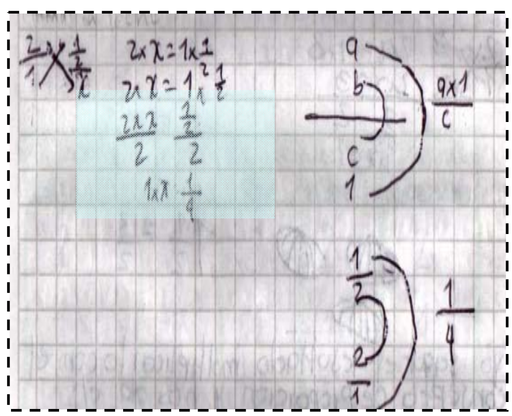
Piensa:
Si Rosita prepara sopa para cuatro profesores, ¿cuántos cubos de caldo de gallina serían necesarios? ¿Alcanza una taza de crema de leche? ¿Sobra? ¿Falta? ¿Cuánto?

Figura 79. 2ª situación problema de mezclas.

Como se aclaró anteriormente, para que este problema tuviera significado dentro del proceso de enseñanza, algunas de las cantidades de los ingredientes pertenecían al campo numérico de los racionales lo que implicó que los estudiantes recordaran la operatividad entre racionales y enteros. Esto es importante dado que era un nuevo planteamiento dentro de la fase de cálculo y ejecución del plan para resolver el problema ya que, tal cual lo afirman García y Serrano (1999, p. 37), este "está determinado en parte, por las magnitudes involucradas, por el tipo de número que las expresa y el por el conocimiento de las propiedades numéricas. […] La fase de solución exige que el estudiante las interprete [las cantidades de magnitudes] para que la solución sea significativa".

En cuanto a la fase de resolución, es importante decir que Brenda fue la única estudiante que tabuló los resultados que iba obteniendo (véase la Figura 80) lo cual es manifestación de la organización que le estaba dando a su razonamiento para abordar el problema con la misma estrategia que empleó para el anterior; no obstante, el paralelismo de las magnitudes y de las cantidades de magnitudes le permitía identificar y discriminar las magnitudes que iba relacionando.





Figuras 80. Izq. Datos organizados en una tabla.
Der. Procedimiento algorítmico para dividir un racional con un entero.

Otra de las cosas que se puede preciar en la Figura superior, es la ligerabilidad de la letra en el procedimiento algorítmico de Brenda, lo que podría ser reflejo de la mecanización del proceso tanto así que estaba descuidando la escritura matemática ya que a partir del tercer paso de la solución de la ecuación olvidó el igual.

De esta manera llegamos a la última actividad de la Cartilla que también son problemas de valor perdido que incluía una razón normalizada ligada al sistema de numeración decimal ya que, como afirma Fernández (2001, p. 55), "en esta el consecuente de la razón es una potencia de diez y las expresiones verbales con las cuales se les refiere son "el tanto por diez", "el tanto por cien", "el tanto por mil"…", para este caso es el "porcentaje" o "tanto por cien" lo que establece una relación de "parte-todo"".

Figura 81. Situaciones problema que involucran el porcentaje.

– ¿Cómo entiende el problema?
Lee el problema y al llegar a la mención de "al ir al Centro a mirar la oferta", exclamó:
– Eso no es ninguna oferta porque es más IVA.

Con ello Sandra evidenció su sentido para darle significado a "oferta" optando como sinónimo "promoción" cuando el significado de la palabra en la situación tiene que ver con el conjunto de bienes o mercancías que se presentan en el mercado con un precio concreto y en un momento determinado. Además, evidenció su inconciencia del IVA como gravamen sobre las ventas que deben aportar los consumidores en la etapa del proceso económico de cualquier enajenación comercial.

> Brenda y Sandra estaban trabajando juntas. Y yo las abordé para ver lo que hacían:
> – Brenda, déjeme ver lo que están haciendo –tomé la hoja en la que trabajaban–.
> – No, es que yo estaba demostrando y procedimiento que me enseñaron y ella se puso a hacerlo por allá con división de resta y… Mire Profe, a mí me enseñaron: yo multiplico este número por este, luego el resultado que me dé de esta multiplicación lo divido entre cien, yo hice eso y me dio 280.800.

De esta manera, se resalta la importancia de estar supervisando las actividades de los estudiantes ya que aunque Sandra tenía el procedimiento mecánico correcto para llegar al descuento del computador con el 12%, no estaba razonando matemáticamente sino usando sus saberes de vida. Continuemos con la supervisión:

> – ¿Qué representa ese 280.000?
> – El porciento.
> – ¿El porciento?
> – O sea a cuánto equivale ese doce porciento, pues a 280.000.
> – Ahhh. Entonces 280.000 es el…
> – El 12%
> – ¿De qué?
> – De 2'240.000.
> – ¿Con todo esto puede establecer una proporción? –Sandra me miró perpleja, por lo que continué:– Trate de establecer la proporción; ahí lo dijo usted sin haberse dado cuenta... ¿Qué es el 12%?, o sea 12% qué es de dos millones?
> – Una parte.
> – Entonces estamos haciendo razones entre el todo y una...
> – Parte.
> – Pero eso es una parte de… ¿quién?
> – Del todo.
>
> (Grabación de clase, 27 de noviembre de 2007)

Por su parte, Edwin organizó su razonamiento proporcional de la forma tradicional como se presentan los problemas de porcentaje; permitiendo así inferir el razonamiento que uso para resolver el problema.

Figura 82. Resolución de las situaciones de porcentaje; Sandra y Brenda.

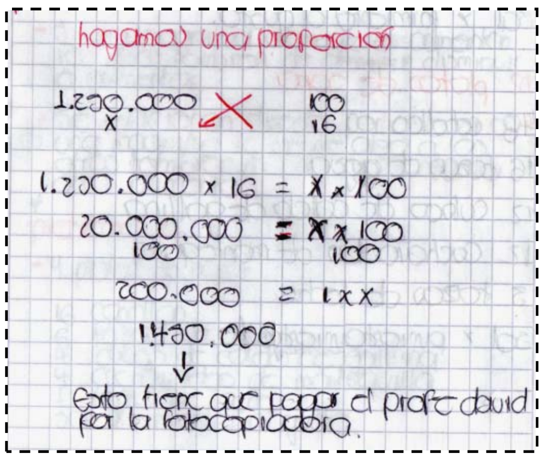


Figura 83. Resolución de la 1ª situación de porcentaje; Edwin.

Notamos así que los estudiantes realizaron relaciones de "parte-todo" para dar solución a las situaciones problemas y así, simultáneamente, comprender el concepto en un contexto real. De esta manera emerge la importancia de los contextos significativos y de la resolución de problemas para el aprendizaje y la construcción de conceptos matemáticos, en este caso los estudiantes realizaron una construcción aproximada del concepto de proporcional que se verá reflejada en la última actividad del Proyecto que se presenta en el siguiente apartado.

3.2.3. "Carta a… "

> "[…] Dentro de una situación de comunicación real, se hace necesaria la definición clara de la tarea, como primer paso en el proceso de escritura, debido a que ella incluye la definición del tema de la composición escrita y de la estructura del texto que será producido. De allí que en este momento es importante la discusión sobre el tema de la composición. El tema seleccionado puede ser producto de una lectura previa, o de una situación conocida por todos los participantes", Valery (2000. p. 43).

Para verificar si el proceso de construcción del concepto de proporcionalidad había adquirido sentido y significado para los estudiantes, se planteó para la última actividad de la Cartilla 3 la realización de un texto. De esta manera, los estudiantes producirían un texto expositivo que los llevaría a cuestionarse, a plantear preguntas, a idear estrategias lingüísticas para crear un texto que comunicara, y a resolver problemas propios del lenguaje escrito. Es decir, debían escribir para ser para ser leídos y no para hacer una tarea para la profesora o para optar por una calificación.

Durante el proceso de producción escrita los estudiantes condujeron la siguiente dinámica de escritura: realizaron espontáneamente una versión inicial de la carta en la que preguntaron y consultaron todo lo que necesitaron, tanto en lo referente al contenido como a la forma. Respecto a esto Valery (ibídem) dice que:

> Durante la *confección de borradores*, cuando se produce la confrontación entre las ideas que el escritor quiere transmitir (el qué) y las formas gramaticales y sintácticas que hacen posible transmitir estas ideas (el cómo), la consulta con el docente o con los compañeros es de gran utilidad en lo que se refiere a la selección de las palabras adecuadas, a la organización de las ideas y al diálogo con la audiencia.
>
> […] *la revisión de los borradores* en forma individual o grupal, es una forma de aclarar conceptos, ampliar la visión de las cosas y acercarse a la audiencia. De esta manera, la revisión se transforma en un medio que ayuda a adquirir conocimientos y a tomar consciencia sobre las ideas expresadas y sobre los aspectos gramaticales y sintácticos del escrito.

Por otro lado, los estudiantes comentaron la carta con sus compañeros encontrando diferencias unos con otros lo que los llevó a poner en marcha argumentaciones conceptuales para persuadir al otro y hacer ver el error o quizás la confusión, esto hasta que tuvieran claridad sobre los conceptos para hacer su versión definitiva de tal manera que lograran un texto coherente claro, fluido y comprensivo. Así, como afirma nuevamente Valery (ibídem):

> La revisión del texto en interacción entre los compañeros y el docente quien dirige el proceso, además de ser un medio de adquirir criterios para la revisión, es un medio regulador para la construcción y transmisión del conocimiento en la escritura. En conclusión, la acción del docente durante el proceso de adquisición de la escritura, tiene la característica de una participación activa, capaz de conducir al estudiante a vivir y a experimentar el proceso de composición escrita con todas sus dificultades y gratificaciones, a comprenderlo y a tomar consciencia del proceso.

Es así que en esta producción de texto el estudiante remitente puso en juego sus procesos metacognitivos básicos como lo son la planificación y la evaluación. Estos dos procesos se refieren precisamente a la disposición del estudiante para supervisar las actividades cognitivas que ponen en marcha para la ejecución de las decisiones para alcanzar el objetivo que se le trazó decidiendo así cuáles actividades son las más adecuadas y, tras aplicarlas, evaluar el trabajo escrito hecho a través de la revisión y la confrontación indagando sobre las causas de posibles errores.

Es importante aclarar que a los estudiantes, no se les dijo qué debían o no incluir en la carta, sencillamente se les dijo: “No es obligatorio nada; es aconsejable todo”. Además, se les permitió –a quienes por iniciativa propia lo hicieron– consultar un libro de texto para orientar su proceso de escritura cuidando, por supuesto, que no copiaran.

De esta manera, presentaré las cartas realizadas por cada uno de los estudiantes que hacen parte de este análisis. Hago la salvedad de que no presentaré detalles sobre ellas, pues considero que al leerlas el lector podrá perfectamente evaluar tanto la estructura matemática, en cuanto a conceptos que cada estudiante logró formar durante el proceso, además de las habilidades lecto-escritores y metacognitivas desplegadas en la elaboración.

No obstante, relacionaré grosso modo cada producción en las siguientes líneas:

"CARTA A UN QUERIDO AMIGO (A)", ALARCÓN Edwin

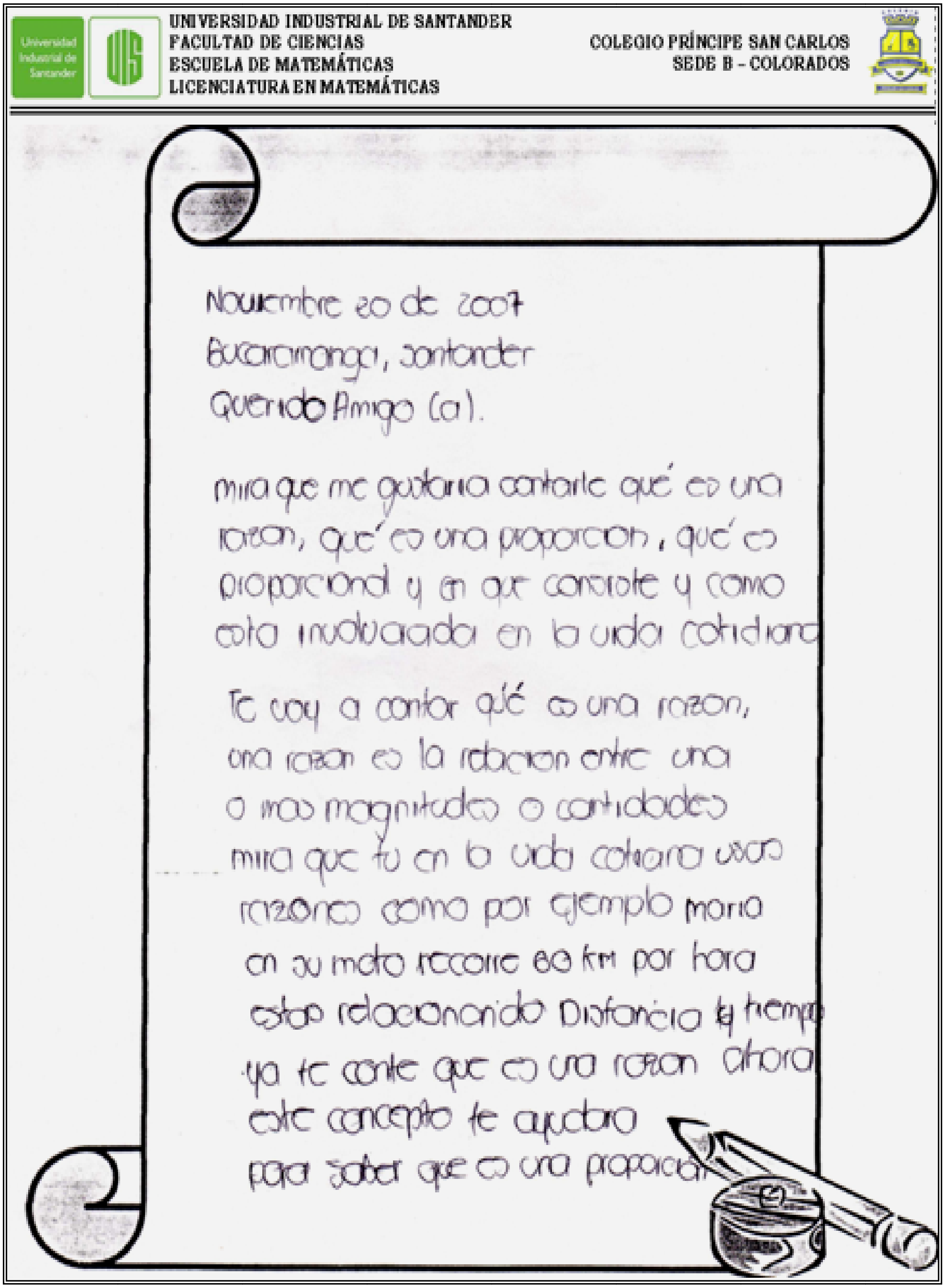
El estudiante elaboró una carta de tres hojas en las cuales hizo el esfuerzo de hablar de los conceptos que integran y definen a la proporcionalidad, sin embargo su comunicación es bastante ejemplificada e hizo poca claridad sobre los conceptos formales que logró en clase.

Edwin fue uno de los estudiantes que recurrió a la consulta y al igual que en Brenda fue notorio el esfuerzo que hizo por lograr una producción limpia, coherente y eficiente en el sentido comunicativo recurriendo a la revisión meticulosa del borrador realizado. Así, escribimos mejor si tenemos oportunidad de revisar ya que revisar de manera eficaz probablemente nos será de ayuda para conocer la reacción de otras personas.

Empero, su ritmo de escritura fue bastante rígido por lo que se alcanza a percibir el control desmesurado que hizo para no equivocarse pues la redacción fue bastante lineal lo cual, según Carlino (2004), podría ubicarlo dentro de los estudiantes cuyo perfil de escritura es aquel que se caracteriza porque intenta recuperar de su memoria lo que sabe sobre el tema y lo expresa linealmente en el papel.

En efecto, al final de la carta, Edwin le contó a su querido amigo que le costó trabajo superar el proceso de aprendizaje pero que sin embargo había encontrado en sus apuntes un apoyo. Por último, Edwin explicitó cómo habían cambiado para él la toma de apuntes y por qué; veamos:

> – ¿Cómo tomaba apuntes en la clase de matemáticas?
> – Pues lo que dictaba la profesora.
> – […] ¿Y qué cambio notó usted ahora –ahora que terminamos el Proyecto– de la forma como usted escribe en su cuaderno?
> – Pues que ahora puedo escribir lo que yo pienso, lo que yo digo.
> – Y antes, ¿no podía o no tenía la iniciativa? ¿Cómo es?
> – Pues no tenía la iniciativa.
> – Entonces, ¿toma apuntes igual a hace dos meses o no?
> – No, no, no.
> – ¿Qué cree usted que influyó en eso [en el cambio]?
> – Pues de la forma en como se vio el tema… Pues que pudimos aprender más y pensar y escribir sin que usted nos dictara todo pero nos corregía […].
>
> (Entrevista, 29 de noviembre de 2007)



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

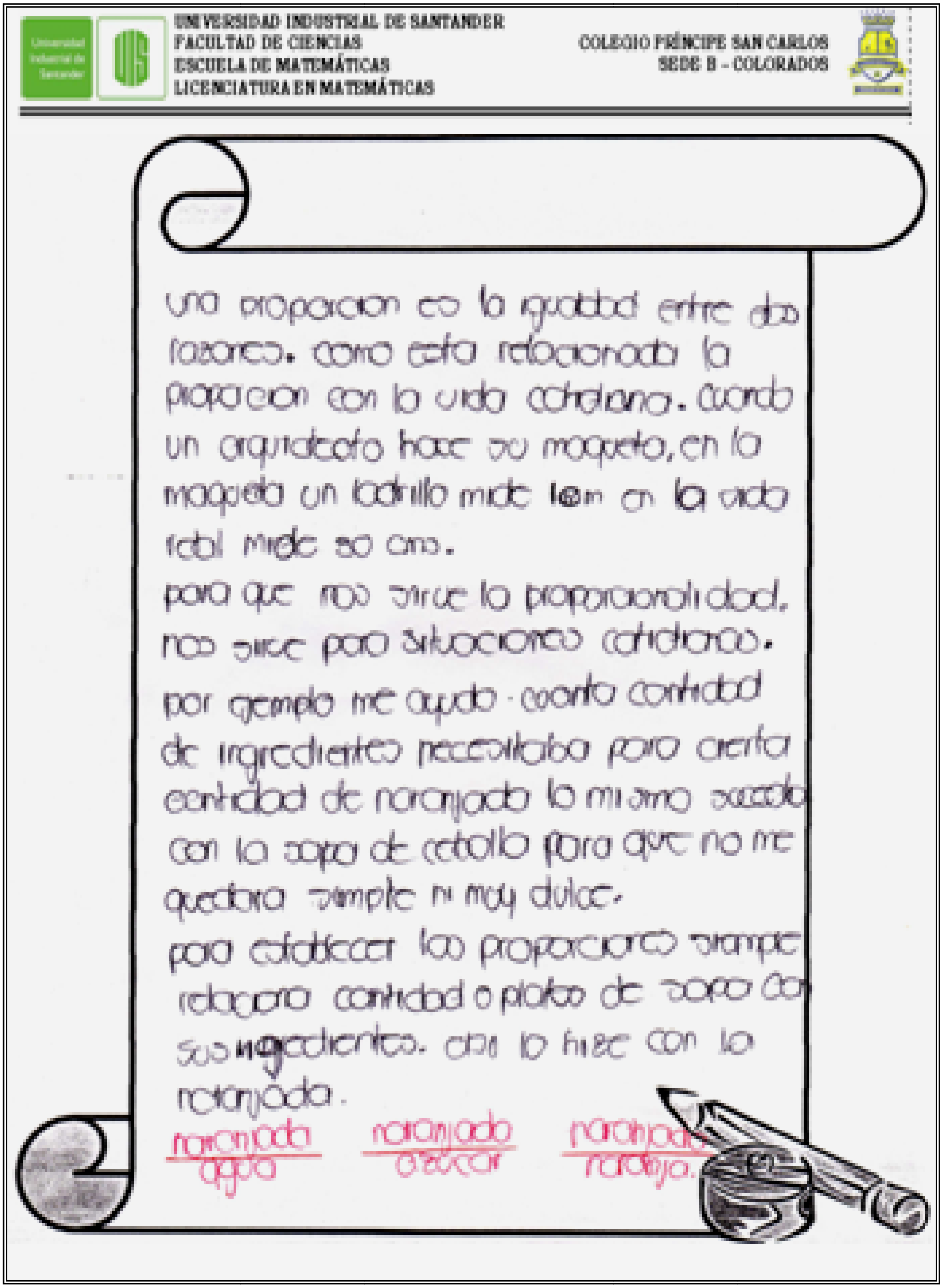
COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Noviembre 20 de 2007
Bucaramanga, santander
Querido Amigo (a).

mira que me gustaria contarle qué es una
razon, qué es una proporcion, qué es
proporcional y en que consiste y como
esta involucrada en la vida cotidiana

Te voy a contar qué es una razon,
una razon es la relacion entre una
o mas magnitudes o cantidades
mira que tu en la vida cotiana usas
razones como por ejemplo maria
en su moto recorre 80 km por hora
estas relacionando Distancia y tiempo
ya te conte que es una razon ahora
este concepto te ayudara
para saber que es una proporcion

Figura 84.a. Carta de Edwin


UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

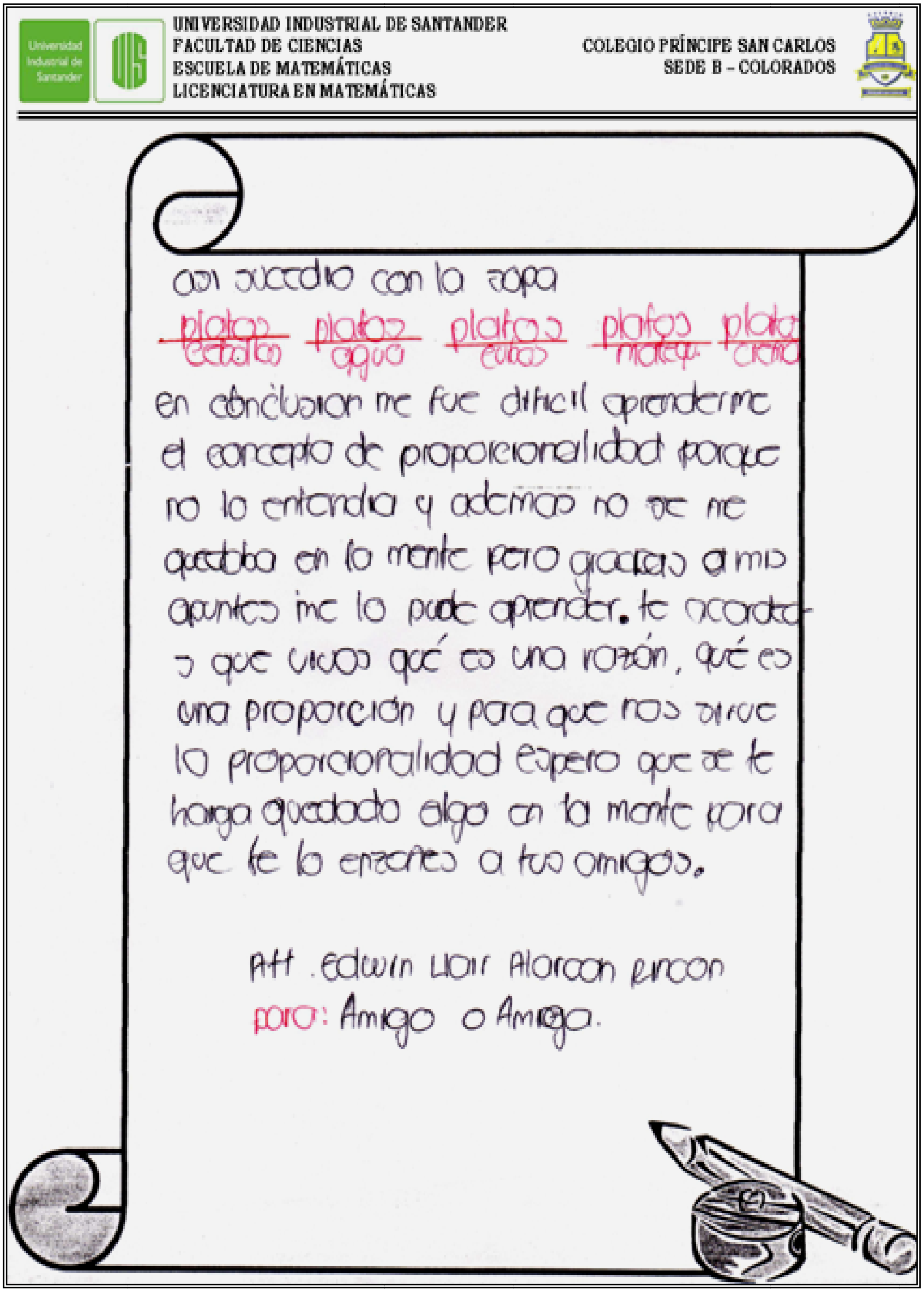
una proporcion es la igualdad entre dos razones. como esta relacionada la proporcion con la vida cotidiana. cuando un arquitecto hace su maqueta, en la maqueta un ladrillo mide 1cm en la vida real mide 30 cms.

para que nos sirve la proporcionalidad. nos sirve para situaciones cotidianas. por ejemplo me ayudo cuanto cantidad de ingredientes necesitaba para cierta cantidad de naranjada lo mismo sucedio con la sopa de cebolla para que no me quedara simple ni muy dulce.

para establecer las proporciones siempre relaciono cantidad o platos de sopa con sus ingredientes. asi lo hice con la naranjada.

$\frac{\text{naranjada}}{\text{agua}}$ $\frac{\text{naranjada}}{\text{azucar}}$ $\frac{\text{naranjada}}{\text{naranja.}}$

Figura 84.b. Carta de Edwin



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B – COLORADOS

asi sucedio con la sopa

$\frac{\text{platos}}{\text{cebollas}}$ $\frac{\text{platos}}{\text{agua}}$ $\frac{\text{platos}}{\text{cubos}}$ $\frac{\text{platos}}{\text{maleza}}$ $\frac{\text{plato}}{\text{crema}}$

en conclusion me fue dificil aprenderme el concepto de proporcionalidad porque no lo entendia y ademas no se me quedaba en la mente pero gracias a mis apuntes me lo pude aprender. te acordaras que vimos qué es una razón, qué es una proporción y para que nos sirve la proporcionalidad espero que se te haiga quedado algo en la mente para que te lo enseñes a tus amigos.

Att. Edwin Uoir Alarcon rincon

para: Amigo o Amiga.

Figura 84.c. Carta de Edwin

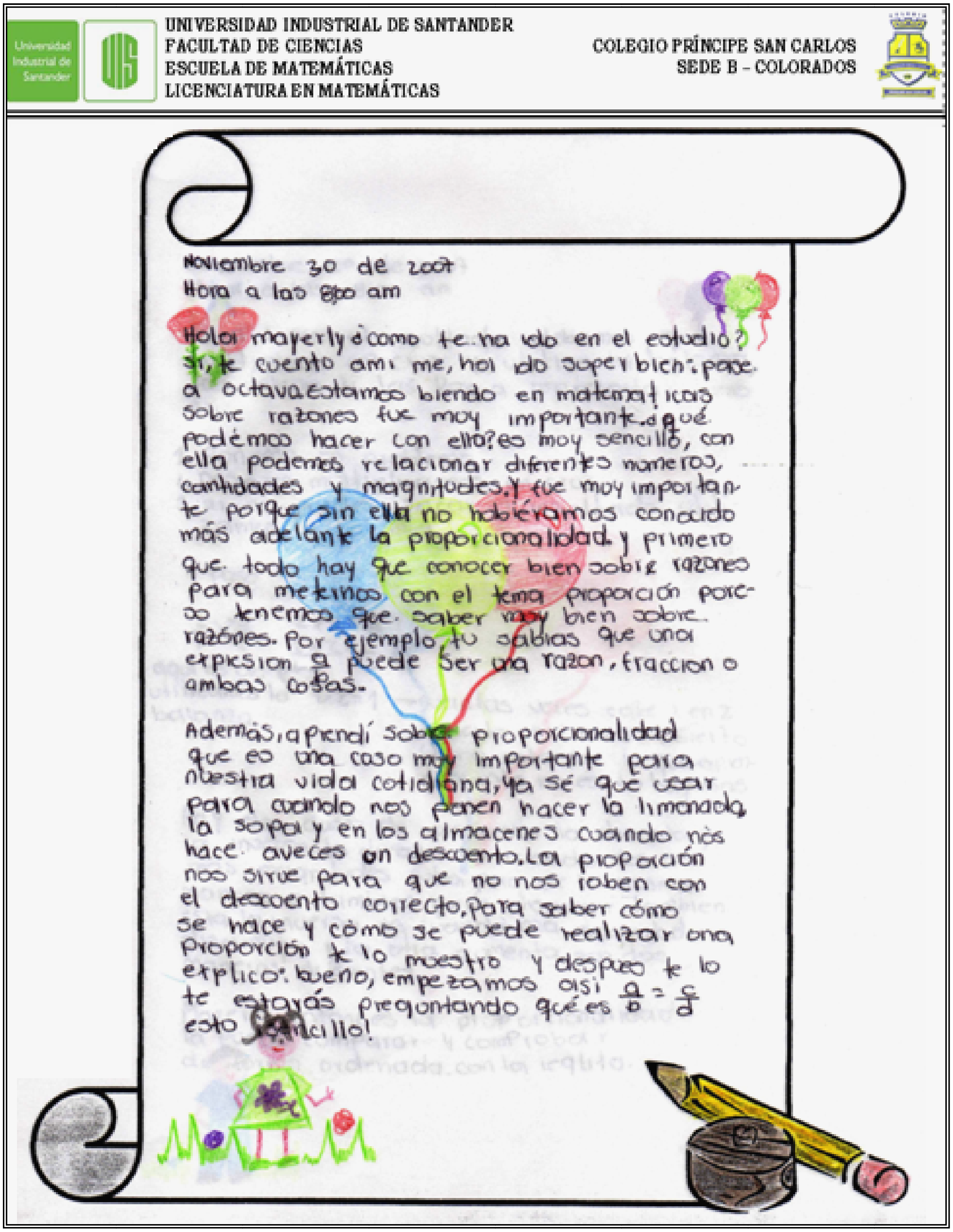
“CARTA A MAYERLY”, JÉREZ Brenda

La estudiante logró elaborar una carta con una dinámica bastante interesante teniendo en cuenta todas las dificultades que tuvo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Logró una carta con una secuencia lógica en el manejo de los conceptos mostrando claramente a su destinatario lo que se requería saber para comprender la proporcionalidad. Además, en la carta habló de algunos de sus hallazgos en clase y ejemplificó para permitir una mayor comprensión de la misma.

La carta de Brenda es el reflejo de la superación de muchas de sus dificultades para escribir ya que su prosa se ajustó a aquella que es basada en el lector, pues conduce al lector de la mano por el texto.

Además, durante el proceso de elaboración la estudiante se mostró muy motivada e interesada en lograr una carta que comunicara y que enseñara por lo que empezó su narración –solo ella lo hizo de esta manera– mostrándole a su amiga por qué era importante que le empezara a hablar de razones para que entendiera la proporcionalidad. De esta manera logró una carta de tres hojas en las cuales, considero yo, hizo un muy buen trabajo teniendo en cuenta sus diferencias individuales y el proceso que vivió.

> – Brenda, cuénteme algo importante que le haya pasado en el Proyecto, algo significativo.
> – Eeeh… Bueno. Cuando nos metimos con el tema de proporción pues me empecé a leer sobre el tema pues para que no me pasara como lo de razón que me enredaba mucho y ya…
> Hace una larga pausa y continúa:
> – Que antes yo… la diferencia es que cuando yo escribía repetía las mismas palabras y me enredaba y volvía a repetir; en esta carta como hemos avanzado ya no repito entonces tanto la misma cosa y como mejor… escribo más específicamente.
> – ¿Y en cuánto a la lectura? ¿Tuvo dificultades al principio para leer? […]
> – No, cuando yo leía se me dificultaba, no entendía casi nada.
> – ¿Y eso mejoró o siguió igual?
> – No, mejoró.
> – ¿Por qué?
> – Me tocó prestarle más la atención y porque es que mientras que iba… Eh, antes yo leía y leía pero no entendía.
> – ¿Cómo leía antes?
> – Leía, y luego miraba y volvía y leía como es que era, y luego iba y preguntaba […] y ahora es forma más sencilla; ahora yo leo y entiendo de una vez.
>
> (Entrevista, 30 de noviembre de 2007).



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

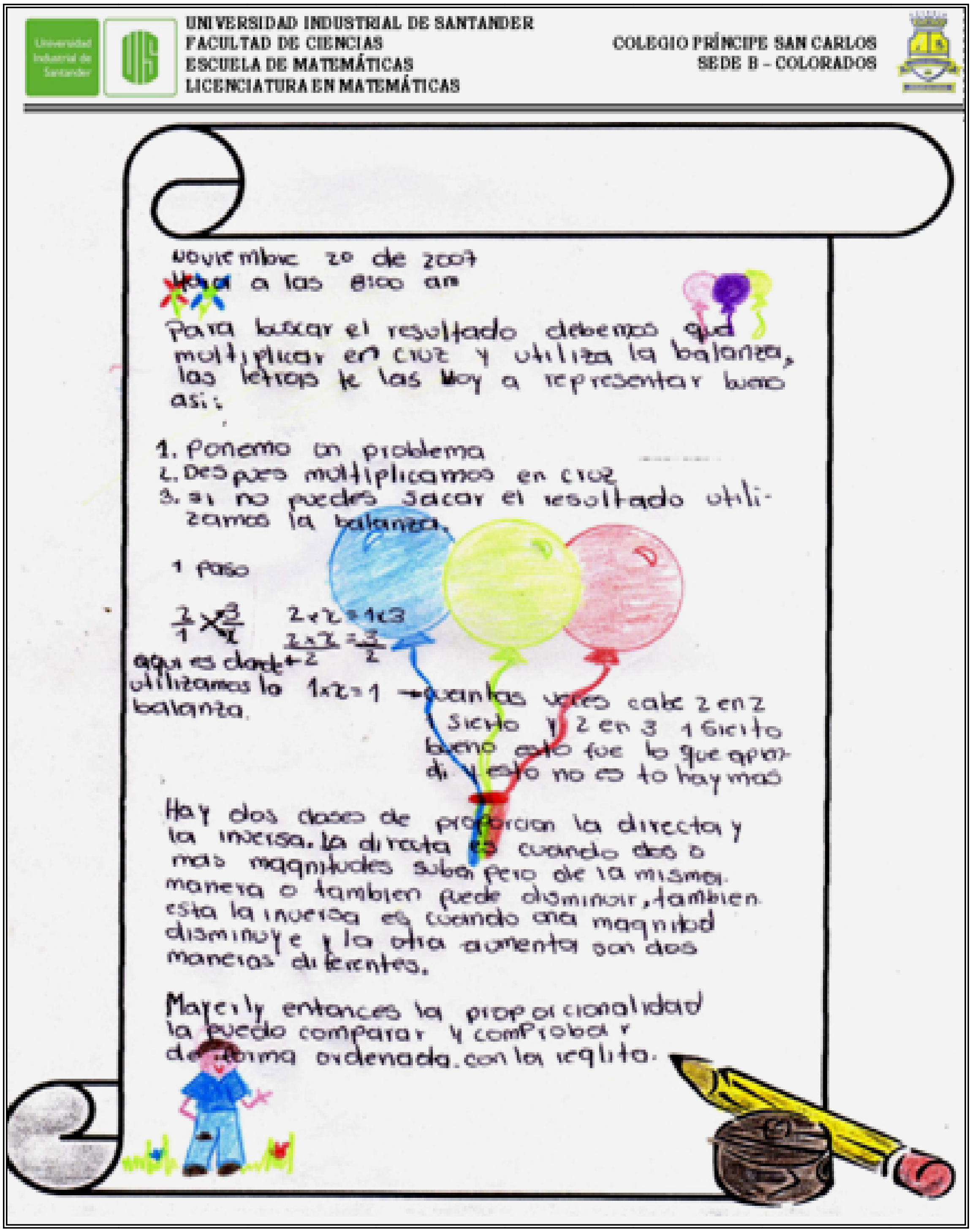
COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Noviembre 30 de 2007
Hora a las 8:00 am

Hola mayerly ¿como te ha ido en el estudio? si, te cuento ami me, hoi ido super bien: pase a octava estamos biendo en matematicas sobre razones fue muy importante ¿qué podémos hacer con ella? es muy sencillo, con ella podemos relacionar diferentes numeros, cantidades y magnitudes. y fue muy importante porque sin ella no habiéramos conocido más adelante la proporcionalidad y primero que todo hay que conocer bien sobre razones para meternos con el tema proporción porezo tenemos que saber muy bien sobre razónes. Por ejemplo tu sabias que una expresion $\frac{a}{b}$ puede ser una razon, fraccion o ambas cosas.

Además, aprendí sobre proporcionalidad que es una coso muy importante para nuestra vida cotidiana, ya sé que usar para cuando nos ponen hacer la limonada, la sopa y en los almacenes cuando nos hace aveces un descuento. La propoción nos sirve para que no nos roben con el descuento correcto, para saber cómo se hace y cómo se puede realizar una proporción te lo muestro y despues te lo explico: bueno, empezamos asi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ te estarás preguntando qué es esto ¡sencillo!

Figura 85.a. Carta de Brenda.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Noviembre 20 de 2007
Hora a las 8:00 am

Para buscar el resultado debemos que multiplicar en cruz y utiliza la balanza, las letras te las voy a representar bueno así:

1. Ponemo un problema
2. Despues multiplicamos en cruz
3. si no puedes sacar el resultado utilizamos la balanza.

1 paso

$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2}$ $2 \times 2 = 1 \times 3$

$\frac{2 \times 2}{\div 2} = \frac{3}{2}$

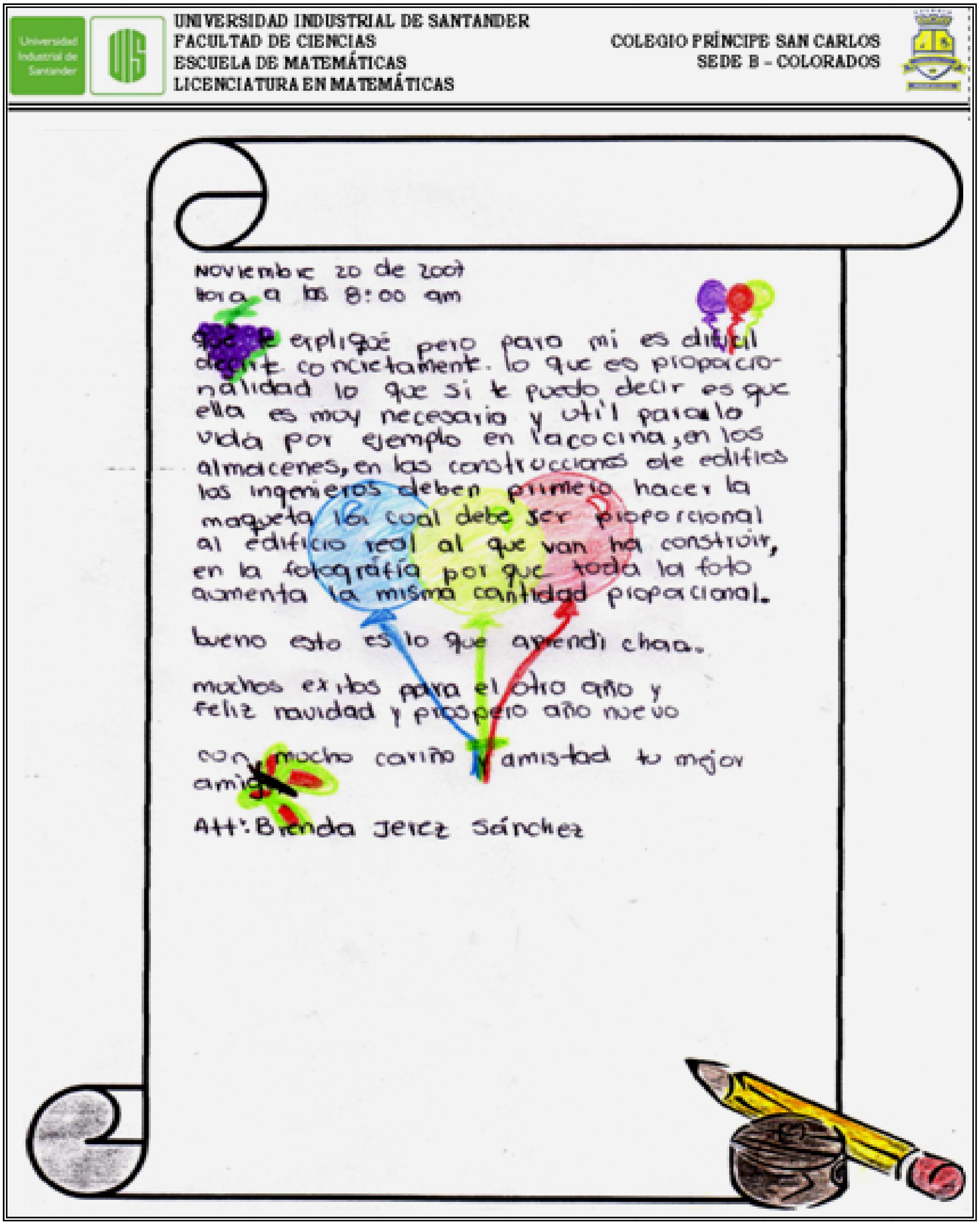
aqui es donde utilizamos la balanza.

$1 \times 2 = 1$ → cuantas veces cabe 2 en 2 1 siento y 2 en 3 1 sieito bueno esto fue lo que aprendi y esto no es to hay mas

Hay dos clases de proporcion la directa y la inversa. la directa es cuando dos o mas magnitudes suben pero de la misma manera o tambien puede disminuir, tambien esta la inversa es cuando una magnitud disminuye y la otra aumenta son dos maneras diferentes.

Mareily entonces la proporcionalidad la puedo comparar y comprobar de forma ordenada. con la reglita.

Figura 85.b. Carta de Brenda



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Noviembre 20 de 2007
hora a las 8:00 am

que te expliqué pero para mi es difícil decirte concretamente. lo que es proporcionalidad lo que si te puedo decir es que ella es moy necesaria y útil para la vida por ejemplo en la cocina, en los almacenes, en las construcciones de edificios los ingenieros deben primero hacer la maqueta la coal debe ser proporcional al edificio real al que van ha construir, en la fotografía por que toda la foto aumenta la misma cantidad proporcional.

bueno esto es lo que aprendí chao.

muchos exitos para el otro año y feliz navidad y prospero año nuevo

con mucho cariño y amistad tu mejor amiga

Att: Brenda Jerez Sánchez

Figura 85.c. Carta de Brenda

"CARTA A LUCECITA", HURTADO Sandra Milena

Como el lector ha de esperar, Sandra realizó una producción de texto muy completa y rica en recursos lingüísticos y conceptos matemáticos gracias a la construcción comprensiva que hizo del concepto de proporcionalidad, tan rica que realizó una carta de *nueve hojas* las cuales son presentadas en este Trabajo en su totalidad.

En la carta de Sandra se palpa lo significativo que resultó su proceso de aprendizaje. Además, cuenta con gran entusiasmo y coherencia el proceso necesario para entender y comprender la proporcionalidad recurriendo a situaciones reales tal cual lo hicieron Brenda y Edwin al recurrir a algunas de las situaciones problemas base usadas en el proceso de aprendizaje.

> [...] la formación de conceptos es un proceso creativo, no mecánico ni pasivo; [...] un concepto surge y toma forma en el curso de una operación compleja encaminada a la solución de un problema, y [...] la mera presencia de condiciones externas favorables a una vinculación mecánica de la palabra y el objeto no basta para producir un concepto [...] (Vygotsky, 1987, p. 119).

También incluye lenguaje simbólico como Brenda lo hizo para explicar cómo comprobar la propiedad fundamental de las proporciones además de que incluyó la regla de los cocientes para determinar si dos relaciones numéricas tienen la misma razón.

Es decir, que en toda la carta Sandra *le enseña* a Lucecita todo lo necesario para comprender la proporcionalidad. De esta manera, se corrobora que la estudiante posee habilidades lecto-escritoras cuyo perfil es, según Carlino (2004), basada en el lector ya que hay un intento deliberado para comunicar algo al lector, lo cual lleva a "crear un lenguaje y un contexto compartidos" entre ambos anticipando los rasgos de su destinatario y, además, analiza qué quiere lograr con su texto.

– ¿Para qué le sirvió todo eso que escribió en el cuaderno?
– Para aprender.
– [...] ¿Y usted se considera buena para escribir o no?
– Más o menos.

> – […] En la carta esa que usted hizo, ¿en qué estuvo pensando usted en el último ejercicio de la carta? ¿Bajo qué propósito usted hizo esa carta?
> – Bajo el propósito… Bueno, en mi caso que le escribí a mi hermana, eso bajo el propósito que ella me entendiera lo que le estaba escribiendo.
> – Cuando usted estuvo escribiendo la carta, ¿siempre sacó todo de acá [señalando la cabeza] o tuvo que recurrir a otra cosa para poder ser explícita, clara, concreta?
> – Bueno, sí hubo una partecita en que tuve que consultar el cuaderno.

Ahora prestemos atención a lo que refirió sobre la toma de apuntes:

> – ¿Usted no notó alguna diferencia entre la manera como tomó sus apuntes [durante el aprendizaje de proporcionalidad] y como lo tomó antes?
> – Sí, claro, diferente. Quizás la forma, o sea, la forma de expresarme aquí.
> – Normalmente, ¿cómo eran sus apuntes antes? ¿Usted que copiaba antes en una clase normal de matemáticas?
> – El concepto y un ejemplo, no más.
> – ¿Y por qué solo eso?
> – Pues porque, Profe, la enseñanza del profesor nos colocaba el ejemplo y a veces él nos dictaba, bueno, por mayoría, nos dictaba.
> – ¿Y sus apuntes en su mayoría son lo que el profesor dice o hay cosas que usted dice: “uy, toca copiar esto”?
> – No, bueno, de este año cambió eso.
> – ¿Qué cambió?
> – Que usted nos explicaba y luego de que nosotros entendíamos, copiábamos lo más importante, o sea, lo más importante que captamos, copiamos.
> – ¿Entonces, cómo *hacíamos* antes?
> – Antes, hacíamos, copiábamos lo que nos dictaban.
> – Y usted como estudiante al ver ese cambio de antes y lo que fue conmigo, ¿en dónde cree que es más significativo el aprendizaje para usted?
> – Con usted.
> – ¿Por qué?
> – Porque así me doy la capacidad de yo misma entender lo que usted me dice y traducirlo y explicarlo en el cuaderno de acuerdo a la manera como usted nos lo explicó; o sea así tengo más *esto,* más *esto*… o sea hay más capacidad para yo entender lo que usted me dijo y yo para copiarlo.
> Bueno, me gusta más esa manera porque, bueno, a lo que el profesor nos dicta, entonces el profesor nos dicta tal concepto, por ejemplo una evaluación, entonces yo cojo el cuaderno y me estudio todos los conceptos; pero, por ejemplo con esta forma yo no me grabo, sino como usted misma me explica, de eso tengo que sacar yo un concepto, entonces una evaluación que usted me hiciera entonces tengo yo el concepto más claro y ya no me es tan difícil ir a coger mi cuaderno, o sea, ya no me queda tan difícil o sea yo llegar y una evaluación quizás, o sea ya no es tan duro el método de aprendizaje del cuaderno, o sea el método que yo aprenderme un concepto por obligación porque, no porque yo ya lo tengo más fijo en la mente y más claro porque yo, o sea, fui la que lo hizo.
>
> (Entrevistas, 3 de diciembre de 2007)

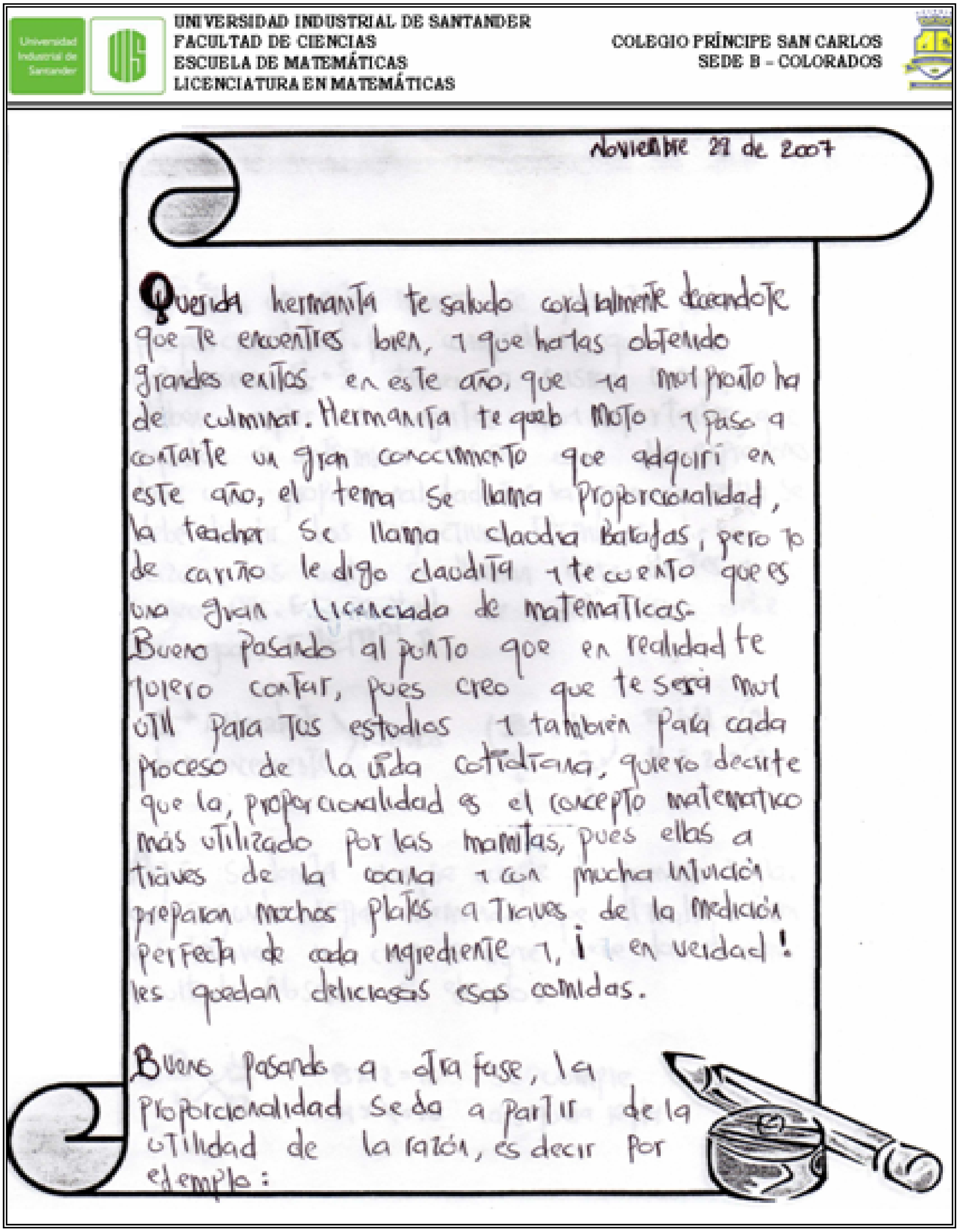
Lo anterior me hace retomar a Obando y Múnera (2003, pp. 12, 15):

> En otras palabras, un paso fundamental [para que una situación cumpla con el papel de dar lugar a la actividad matemática del alumno] está mediado por la capacidad del maestro en lograr que el alumno haga suyo el o los problemas que se le presentan, transfiriendo así la responsabilidad hacia el alumno. Esta transferencia es la garantía de lograr que él sea consciente del trabajo que realiza y, por tanto, su actividad matemática sea significativa. Esta actividad matemática debe fundamentarse sobre lo que ya sabe, para lograr el aprendizaje de nuevos conceptos.
>
> [..] El trabajo en el aula de clase a través de las situaciones problemas, implica, por supuesto, una labor delicada de planeación por parte del maestro y un proceso de seguimiento muy detallado del trabajo de los alumnos, con el fin de lograr un mejor apoyo al trabajo realizado por éstos. En este sentido, el papel de docente se ve redimensionado, pasando de la persona que enseña, a aquella que propicia y conduce situaciones de aprendizaje en los alumnos.

Desde la perspectiva de las situaciones problema, se pone de manifiesto que el profesor debe prestar atención a las concepciones de los estudiantes, no sólo antes de que comience el proceso de aprendizaje, sino también a las que se van generando durante el mismo. Es decir, que es importante observar la actividad matemática de los estudiantes durante todo el proceso. Por otro lado, y para dar paso a las cartas, quiero presentar apartes de entrevista sobre lo que fue para ellos el proceso de producción de texto:

> – Bueno jóvenes, cuénteme cómo les fue en el proceso de escritura de la carta.
> – Uy profe, eso parecía fácil pero [fue] difícil porque me enredaba para explicar por eso a escondidas de usted fue que busqué el libro para entender un poquito más.
> – ¿Y si le ayudó el libro?
> – Más o menos. […] No ve que casi no entendía… Me dio luces en las…, cómo le digo… términos, las palabras para referirme mejor.
> – […] Ah sí, el libro pero no entendía casi por'eso mejor miré lo que yo escribí.
> – Profe, pues yo arranqué en una hoja aparte o sea como para hacer un borrador y siempre me pensé cómo escribir para que Lucecita me entendiera… –hay risas– ¡Ay Dios! Y cuando me di cuenta llevaba 6 hojas y no terminaba –más risas–.
> – Yo preguntaba cuando no entendía preguntaba y también pues o sea iba poniendo atención a lo que escribía pues para no perder el hilo, usted sabe que yo me desconcentro y empiezo a dar vueltas.
>
> (Entrevistas, 30 de noviembre de 2007)

De esta manera, si bien nos encontramos frente a aprendizajes integrales y de nivel superior, éstos tendrán mayor posibilidad de desarrollo en la medida en que los profesores dispongamos de estrategias de enseñanza pertinentes y cada vez más enriquecedoras y centralizadas en favorecer la toma de consciencia del estudiante de cuándo y cómo usar las estrategias y procedimientos para resolver los desafíos propios del aprendizaje.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

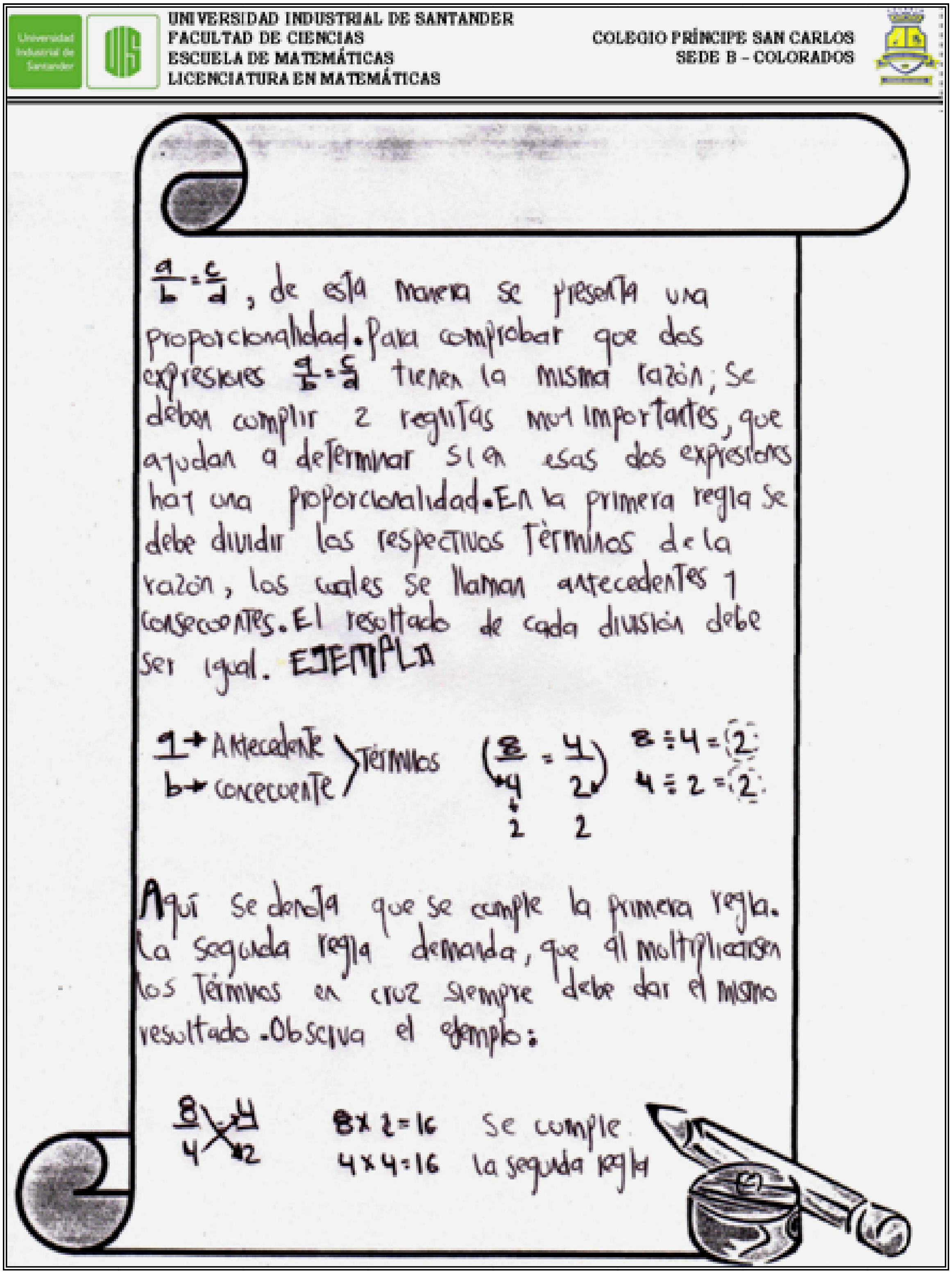
COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B – COLORADOS

Noviembre 29 de 2007

Querida hermanita te saludo cordialmente deseandote que te encuentres bien, y que hallas obtenido grandes exitos en este año, que ya muy pronto ha de culminar. Hermanita te queb moto y paso a contarte un gran conocimiento que adquiri en este año, el tema se llama proporcionalidad, la teacher se llama claudia Batafas, pero yo de cariño le digo claudita y te cuento que es una gran Licenciada de matematicas. Bueno pasando al punto que en realidad te quiero contar, pues creo que te será muy util para tus estudios y tambien para cada proceso de la vida cotidiana, quiero decirte que la, proporcionalidad es el concepto matematico más utilizado por las mamitas, pues ellas a traves de la cocina y con mucha intuición preparan muchos platos a traves de la medición perfecta de cada ingrediente y, ¡ en verdad ! les quedan deliciosas esas comidas.

Bueno pasando a otra fase, la proporcionalidad se da a partir de la utilidad de la razón, es decir por ejemplo:

Figura 86.a. Carta de Sandra.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, de esta manera se presenta una proporcionalidad. Para comprobar que dos expresiones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tienen la misma razón; Se deben cumplir 2 reglitas muy importantes, que ayudan a determinar si en esas dos expresiones hay una proporcionalidad. En la primera regla se debe dividir los respectivos términos de la razón, los cuales se llaman antecedentes y consecuentes. El resultado de cada división debe ser igual. EJEMPLO

a → Antecedente
b → concecuente
Términos

$$\left(\frac{8}{4} = \frac{4}{2}\right) \quad \begin{matrix} 8 \div 4 = 2 \\ 4 \div 2 = 2 \end{matrix}$$

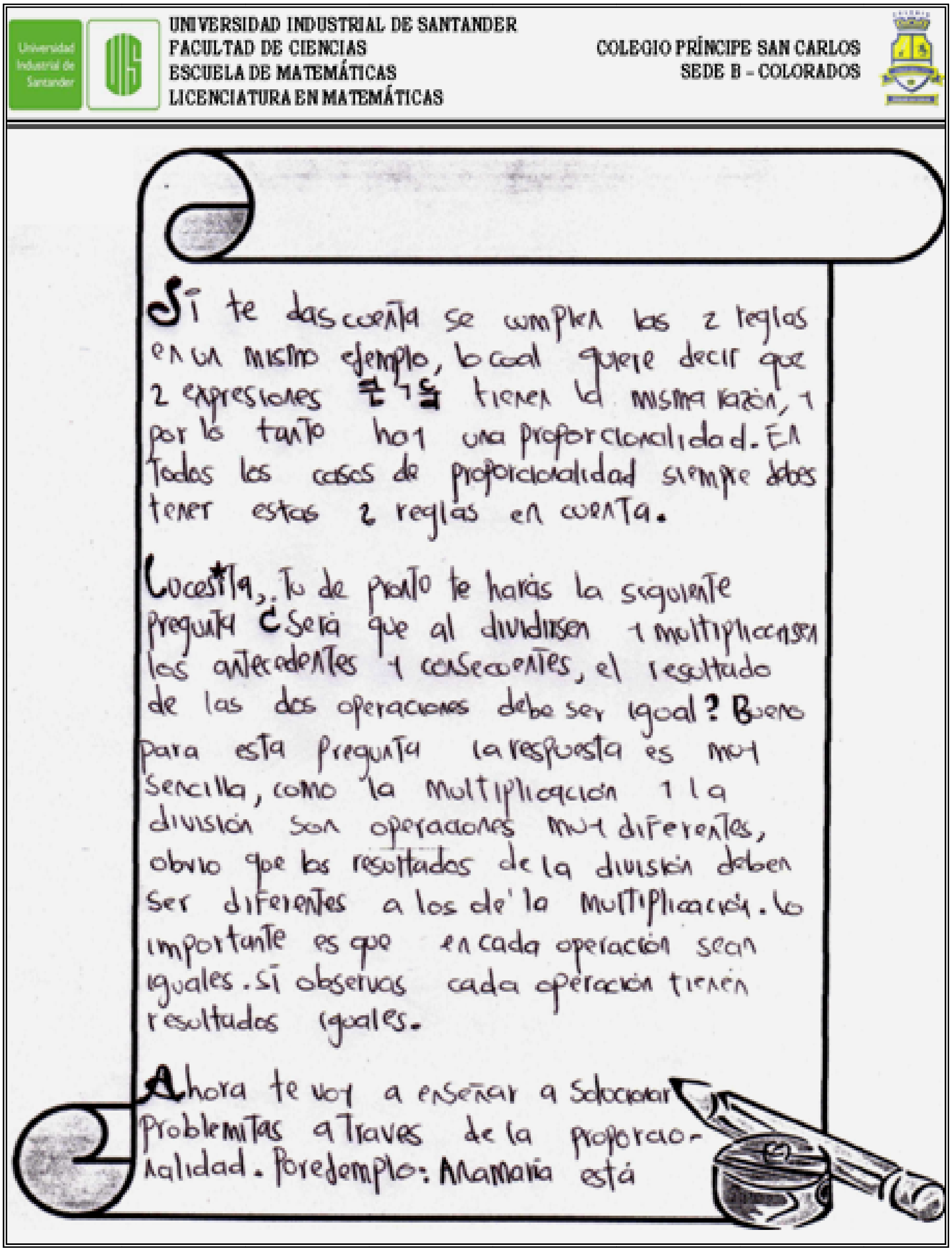
2 2

Aquí se denota que se cumple la primera regla. La segunda regla demanda, que al multiplicarsen los términos en cruz siempre debe dar el mismo resultado. Observa el ejemplo:

$$\frac{8}{4} \times \frac{4}{2} \quad \begin{matrix} 8 \times 2 = 16 \\ 4 \times 4 = 16 \end{matrix}$$

Se cumple la segunda regla

Figura 86.b. Carta de Sandra.


UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

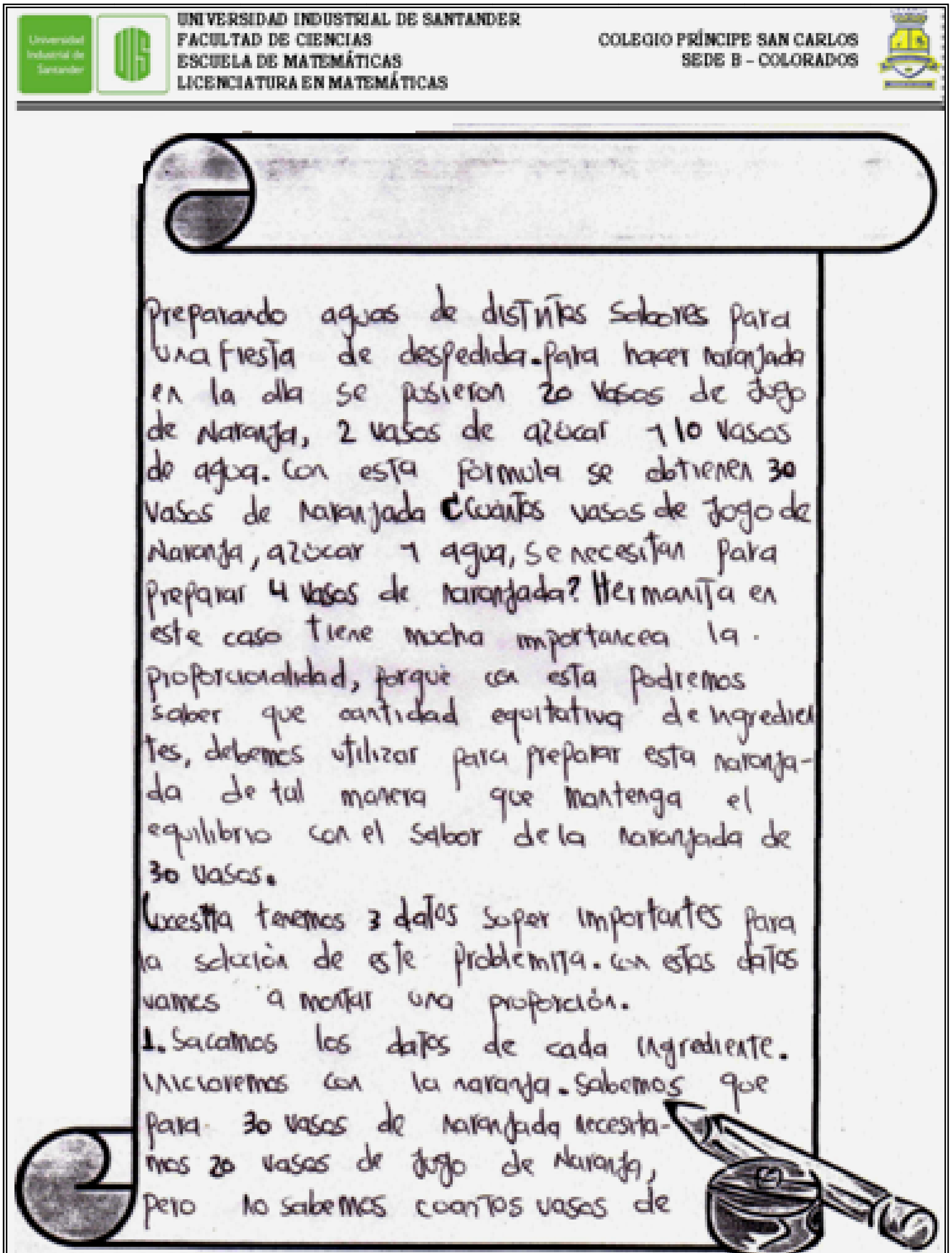
COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Si te das cuenta se cumplen las 2 reglas en un mismo ejemplo, lo cual quiere decir que 2 expresiones $\frac{2}{2}$ y $\frac{5}{[illegible]}$ tienen la misma razón, y por lo tanto hay una proporcionalidad. En todos los casos de proporcionalidad siempre debes tener estas 2 reglas en cuenta.

Lucesita, tú de pronto te harás la siguiente pregunta ¿Será que al dividirsen y multiplicarsen los antecedentes y consecuentes, el resultado de las dos operaciones debe ser igual? Bueno para esta pregunta la respuesta es muy sencilla, como la multiplicación y la división son operaciones muy diferentes, obvio que los resultados de la división deben ser diferentes a los de la multiplicación. lo importante es que en cada operación sean iguales. Si observas cada operación tienen resultados iguales.

Ahora te voy a enseñar a solucionar problemitas a traves de la proporcionalidad. Por ejemplo: Mamaria está

Figura 86.c. Carta de Sandra.

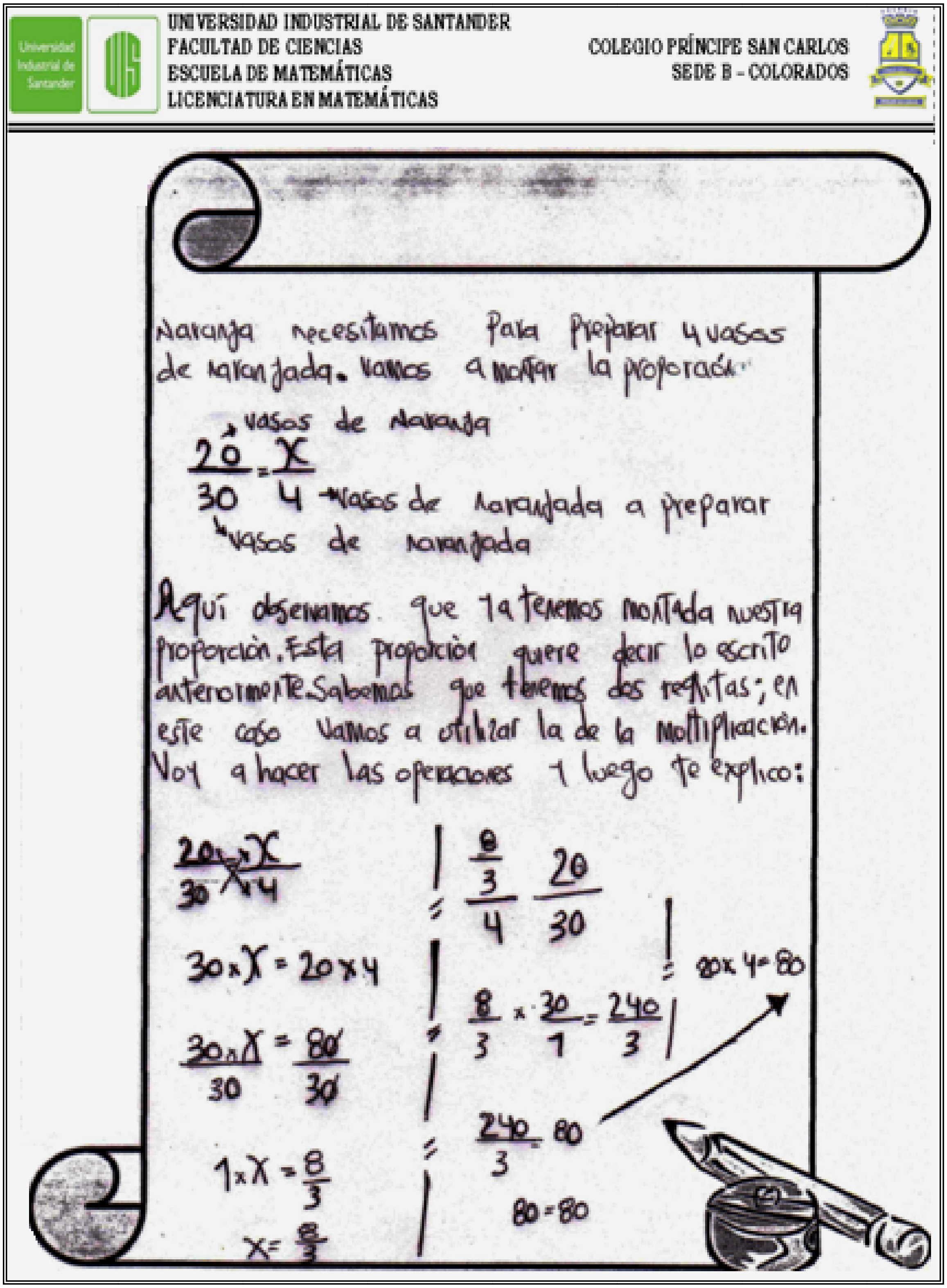


UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Preparando aguas de distintos sabores para
una fiesta de despedida. para hacer naranjada
en la dia se pusieron 20 vasos de jugo
de naranja, 2 vasos de azúcar y 10 vasos
de agua. Con esta formula se obtienen 30
vasos de naranjada ¿Cuántos vasos de jugo de
naranja, azúcar y agua, se necesitan para
preparar 4 vasos de naranjada? Hermanita en
este caso tiene mucha importancea la
proporcionalidad, porque con esta podremos
saber que cantidad equitativa de ingredien
tes, debemos utilizar para preparar esta naranja-
da de tal manera que mantenga el
equilibrio con el sabor de la naranjada de
30 vasos.
Nuestra tenemos 3 datos super importantes para
la solución de este problemma. con estos datos
vamos a montar una proporción.
1. Sacamos los datos de cada ingrediente.
Iniciaremos con la naranja. sabemos que
para 30 vasos de naranjada necesita-
mos 20 vasos de jugo de naranja,
pero no sabemos cuantos vasos de

Figura 86.d. Carta de Sandra.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

naranja necesitamos para preparar 4 vasos de naranjada. Vamos a montar la proporción

vasos de naranja

$$\frac{20}{30} = \frac{X}{4}$$

4 vasos de naranjada a preparar

vasos de naranjada

Aquí observamos que ya tenemos montada nuestra proporción. Esta proporción quiere decir lo escrito anteriormente. Sabemos que tenemos dos recetas; en este caso vamos a utilizar la de la multiplicación. Voy a hacer las operaciones y luego te explico:

$$\frac{20}{30} \times \frac{X}{4}$$

$$30 \times X = 20 \times 4$$

$$\frac{30 \times X}{30} = \frac{80}{30}$$

$$1 \times X = \frac{8}{3}$$

$$X = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{4} \quad \frac{20}{30}$$

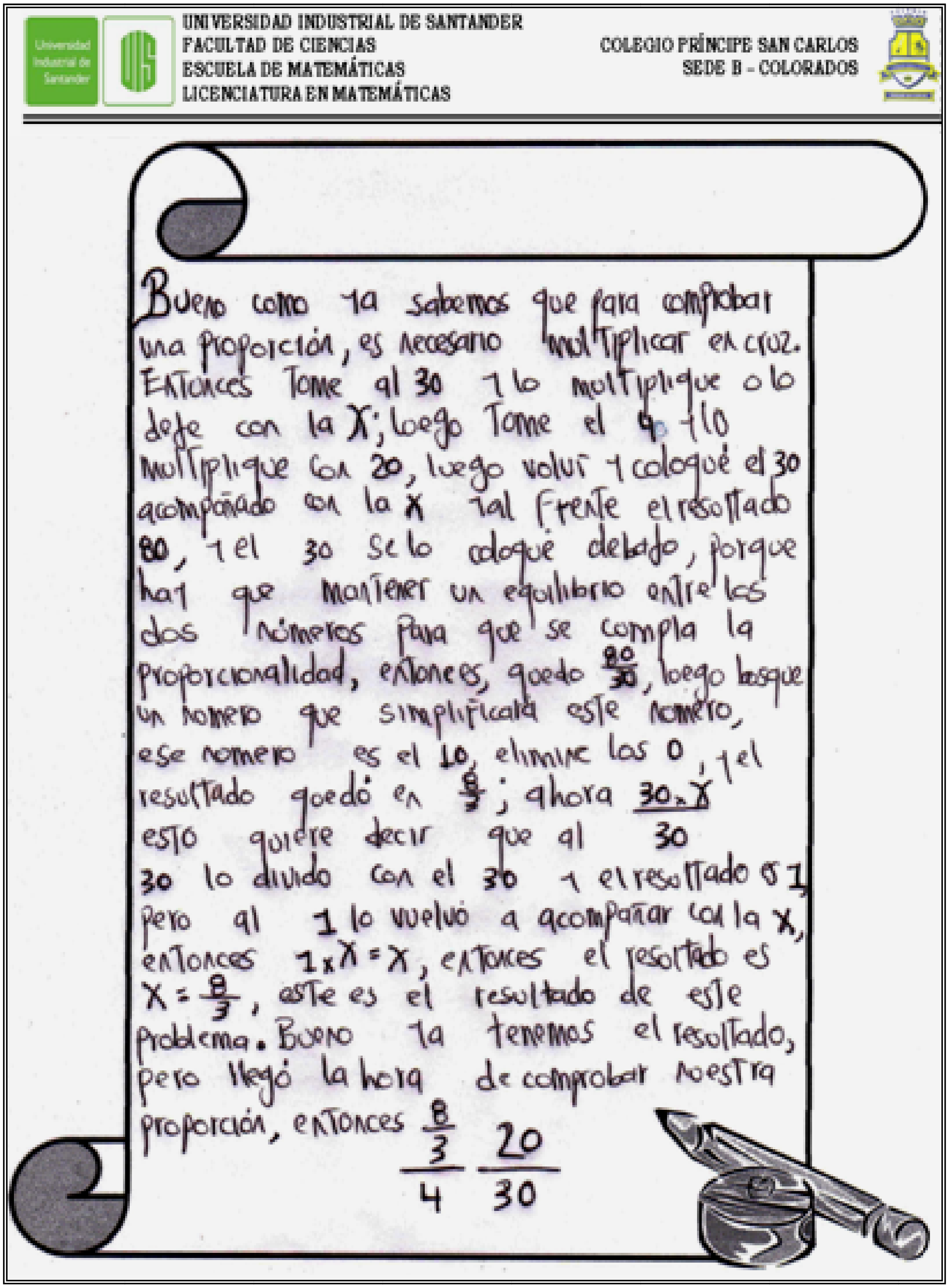
$$\frac{8}{3} \times \frac{30}{1} = \frac{240}{3}$$

$$20 \times 4 = 80$$

$$\frac{240}{3} = 80$$

$$80 = 80$$

Figura 86.e. Carta de Sandra.



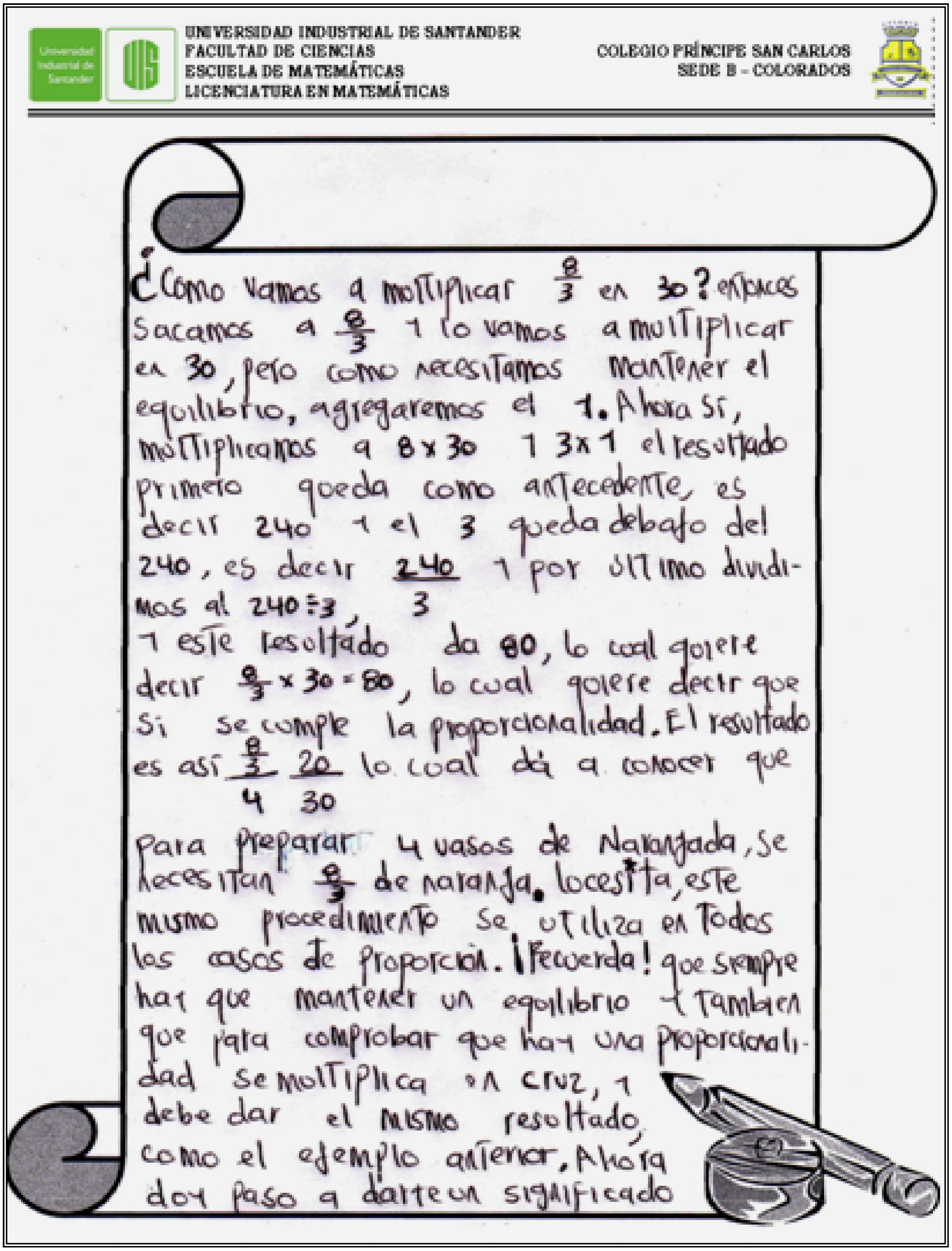
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

Bueno como ya sabemos que para comprobar una proporción, es necesario multiplicar en cruz. Entonces Tome al 30 y lo multiplique o lo deje con la X; luego Tome el 4 y lo multiplique con 20, luego volví y coloqué el 30 acompañado con la x y al frente el resultado 80, y el 30 se lo coloqué debajo, porque hay que mantener un equilibrio entre los dos números para que se cumpla la proporcionalidad, entonces, quedo $\frac{80}{30}$, luego busque un número que simplificara este número, ese número es el 10, elimine los 0, y el resultado quedó en $\frac{8}{3}$; ahora $\frac{30 \cdot X}{30}$ esto quiere decir que al 30 lo divido con el 30 y el resultado es 1, pero al 1 lo volvió a acompañar con la X, entonces $1 \times X = X$, entonces el resultado es $X = \frac{8}{3}$, este es el resultado de este problema. Bueno ya tenemos el resultado, pero llegó la hora de comprobar nuestra proporción, entonces

$$\frac{\frac{8}{3}}{4} \quad \frac{20}{30}$$

Figura 86.f. Carta de Sandra.

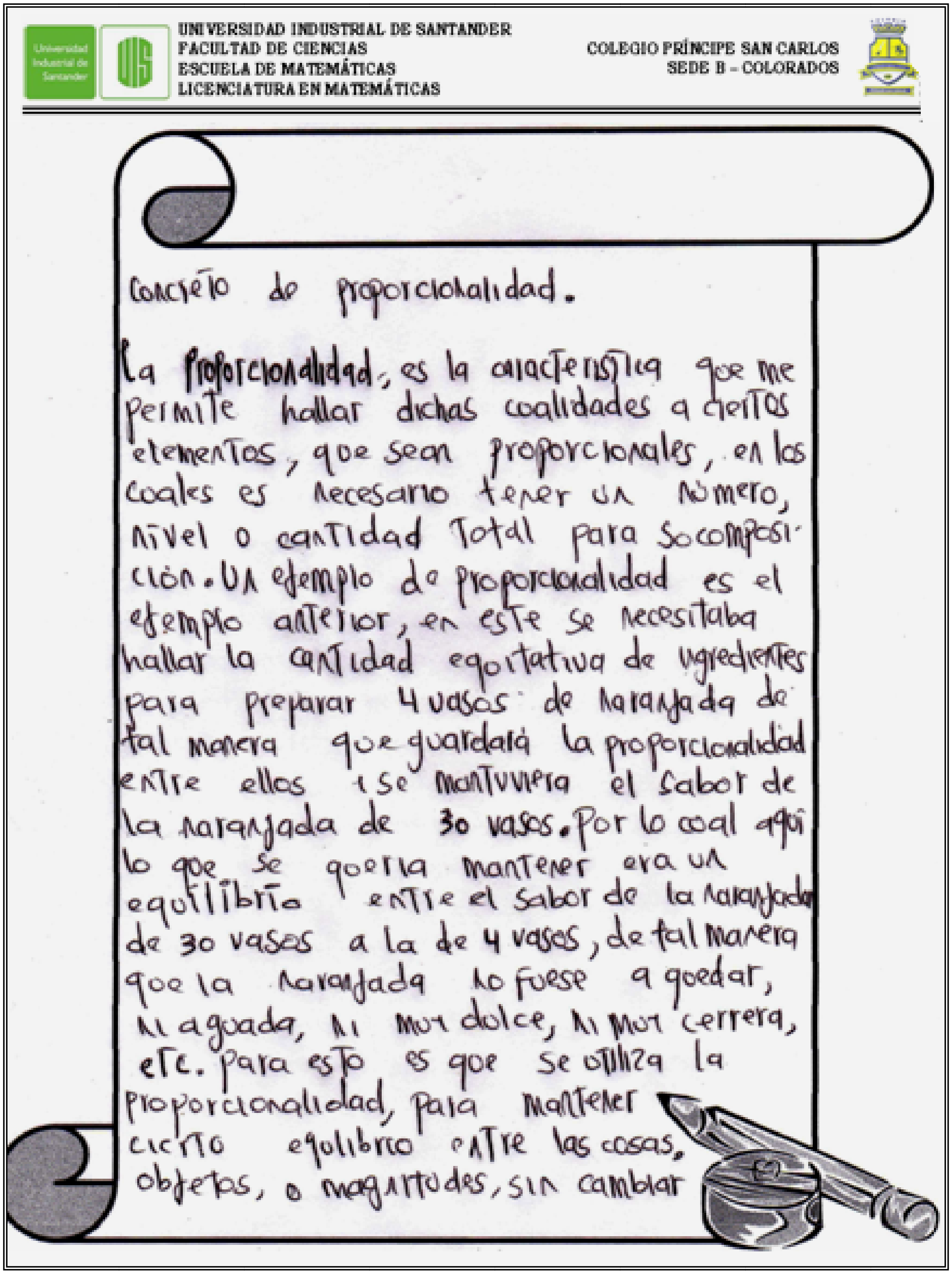


UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

¿Como vamos a moltiplicar $\frac{8}{3}$ en 30? entonces
sacamos a $\frac{8}{3}$ y lo vamos a multiplicar
en 30, pero como necesitamos mantener el
equilibrio, agregaremos el 1. Ahora si,
moltiplicamos a 8 x 30 y 3 x 1 el resoltado
primero qoeda como antecedente, es
decir 240 y el 3 queda debajo del
240, es decir $\frac{240}{3}$ y por oltimo dividi-
mos al 240 ÷ 3,
y este resoltado da 80, lo cual qoiere
decir $\frac{8}{3} \times 30 = 80$, lo cual qoiere decir qoe
si se cumple la proporcionalidad. El resultado
es así $\frac{8/3}{4}$ $\frac{20}{30}$ lo cual da a conocer que
para preparar 4 vasos de Naranjada, se
necesitan $\frac{8}{3}$ de naranja. locesita, este
mismo procedimiento se utiliza en Todos
los casos de proporción. ¡Recuerda! qoe siempre
hay qoe mantener un equilibrio y tambien
qoe para comprobar qoe hay una proporcionali-
dad se moltiplica en cruz, y
debe dar el mismo resoltado,
como el ejemplo anterior, Ahora
doy paso a darte un significado

Figura 86.g. Carta de Sandra.



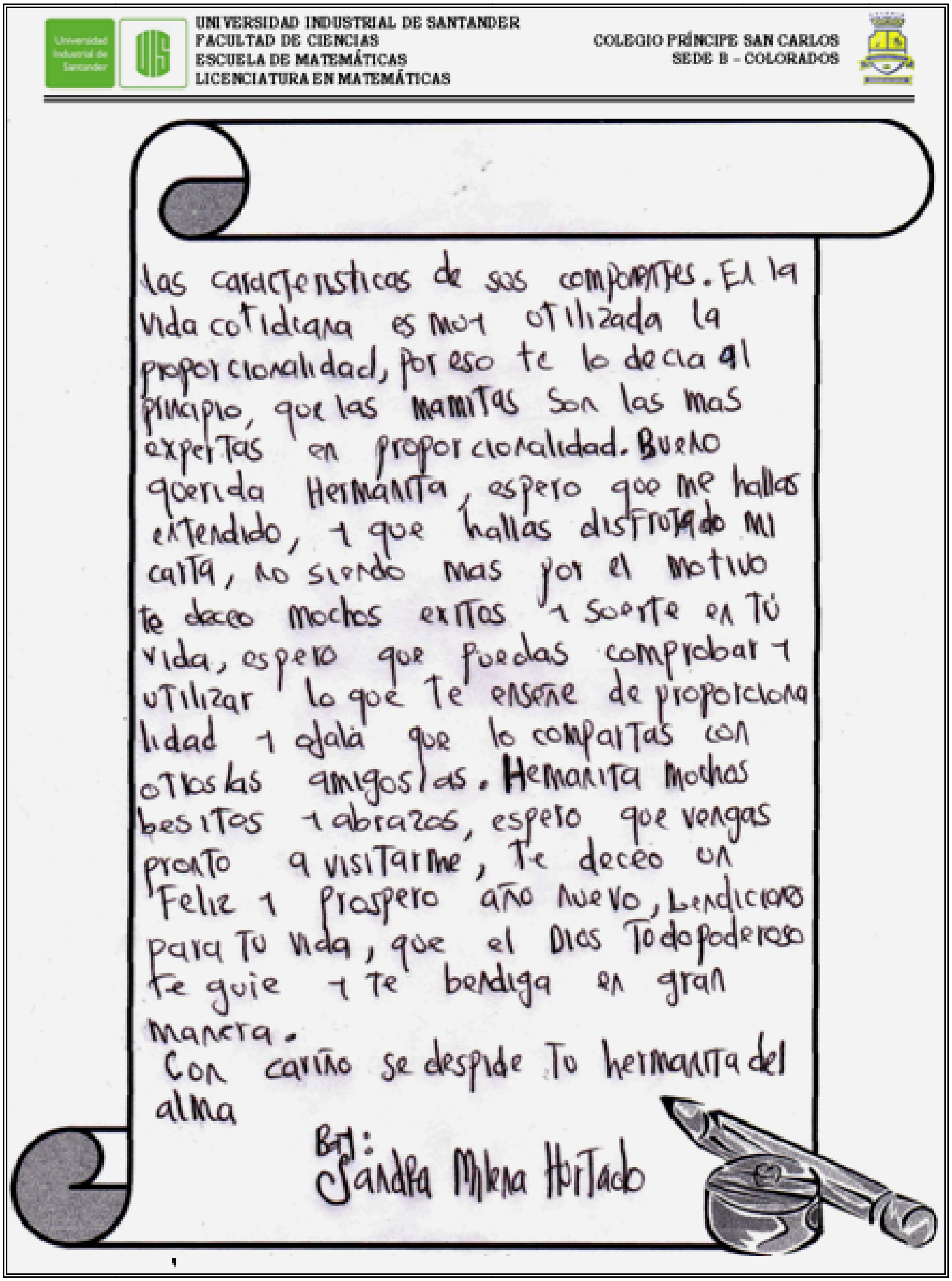
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

concreto de proporcionalidad.

La proporcionalidad, es la característica que me permite hallar dichas coalidades a ciertos elementos, que sean proporcionales, en los coales es necesario tener un número, nivel o cantidad Total para su composición. Un ejemplo de proporcionalidad es el ejemplo anterior, en este se necesitaba hallar la cantidad eqoitativa de ugredientes para preparar 4 vasos de naranjada de tal manera que guardará la proporcionalidad entre ellos y se mantuviera el sabor de la naranjada de 30 vasos. Por lo coal aqoí lo qoe se qoería mantener era un equilibrio entre el sabor de la naranjada de 30 vasos a la de 4 vasos, de tal manera qoe la naranjada no fuese a qoedar, ni agoada, ni mor dolce, ni mor cerrera, etc. Para esto es qoe se otiliza la proporcionalidad, para mantener cierto equlibrio entre las cosas, objetos, o magnitodes, sin cambiar

Figura 86.h. Carta de Sandra.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS
SEDE B - COLORADOS

las caracteristicas de sus componentes. En la vida cotidiana es muy utilizada la proporcionalidad, por eso te lo decia al principio, que las mamitas son las mas expertas en proporcionalidad. Bueno querida Hermanita, espero que me hallas entendido, y que hallas disfrutado mi carta, no siendo mas por el motivo te deceo muchos exitos y suerte en tú vida, espero que puedas comprobar y utilizar lo que te enseñe de proporcionalidad y ojalá que lo compartas con otros/as amigos/as. Hermanita muchos besitos y abrazos, espero que vengas pronto a visitarme, Te deceo un Feliz y prospero año nuevo, bendiciones para tu vida, que el Dios Todopoderoso te guie y te bendiga en gran manera.

Con cariño se despide tu hermanita del alma

Bty:
Sandra Milena Hurtado

Figura 86.g. Carta de Sandra

3.2.4. Algunos apuntes sobre la metodología y el proceso de enseñanza-aprendizaje

Estas cartas como último instrumento para aproximarnos al razonamiento proporcional de los estudiantes de séptimo grado del Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados) nos llevan a reflexionar que, tal cual lo afirman Obando y Múnera (ibídem, p. 15), "la homogenización del tiempo para la adquisición de los aprendizajes en los estudiantes carezca de sentido, por lo tanto, «el tiempo de aprendizaje corresponde al ritmo real del individuo que aprende, es característico de cada individuo y se sabe que no es continuo. Es decir, el tiempo de aprendizaje implica avances y retrocesos, que dependen, entre otras cosas, de las retroacciones»[21]" Es así que la habilidad de leer, escribir, escuchar, preguntar, pensar y comunicar sobre las matemáticas desarrollará y aumentará la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos.

En este punto es pertinente tomar distancia de los apuntes y referirnos concretamente a la construcción matemática realizada –alcanzada– a través de la metodología de enseñanza, esto para verificar el nivel del desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes.

El camino hacia la proporcionalidad en la escuela, según Obando, Vanegas y Vásquez (2007, p. 122), sigue el siguiente esquema:

> En primera instancia, se toma como punto de partida el concepto de razón, entendida ésta como el cociente entre dos números naturales. Este cociente expresa una comparación entre la medida de dos cantidades o magnitudes. […] En segunda instancia, a partir del concepto de razón se define el concepto de proporción, enunciándolo como la igualdad de dos o más razones. Esta igualdad se expresa en términos de una relación de equivalencia: las razones a/b y c/d forman una proporción si y solo si $a \times d = b \times d$, (o en términos un poco menos formales, si el producto de medios es igual al producto de extremos). Finalmente se presenta la proporcionalidad, la cual se orientada como aplicación del concepto de proporción a la solución de problemas. En este caso se estudian básicamente tres tipos de proporcionalidad: la proporcionalidad directa, la proporcionalidad inversa y la proporcionalidad compuesta. Estos tres casos de proporcionalidad se presentan a través de las reglas de tres simple directa, simple inversa y compuesta, respectivamente, las cuales constituyen una estrategia algorítmica aritmética para la solución de los problemas.

[21] Chamorro, C. (1992). *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas*. España, p. 22

Siendo este esquema el abordado por la metodología de enseñanza. Es importante tener en cuenta que aunque el esquema es el mismo, la metodología aplicada hizo del proceso de desarrollo de aquel una presentación diferente de cada uno de los componentes que permiten construir la proporcionalidad dado que los estudiantes fueron quienes paulatinamente, mediados y orientados por el material didáctico y mis orientaciones, realizaron generalizaciones que en el aula regular se dan en el tablero o a través del dictado. Además, desde que el proceso inició, se tuvieron en cuenta las nociones de covariación y variación, aspectos matemáticos que suelen pasarse por alto en la enseñanza regular tal cual lo afirman Obando, Vanegas y Vásquez (ibídem):

> De esta manera no se abordan los problemas de proporcionalidad como problemas de variación (es más, podría pensarse que no se tiene conciencia de la importancia que la noción de variación tiene para el proceso de conceptualización de los conceptos relativos a los diferentes tipos de proporcionalidad).

De igual modo, intuitivamente se trabajó durante el proceso de enseñanza-aprendizaje el vínculo matemático entre la proporcionalidad y las funciones al analizar cualitativamente el comportamiento de las magnitudes en las situaciones problemas presentadas en la Cartilla 2. A esto los autores anteriormente citados se refieren:

> En síntesis, la organización escolar de la multiplicación y la proporcionalidad, se caracterizan por: no mostrar de manera explícita la relación entre la multiplicación y la proporcionalidad; presentar la proporcionalidad al margen del estudio de las magnitudes; estudiar multiplicación y proporcionalidad al margen del análisis de los procesos de covariación entre magnitudes; y finalmente, se deslinda una separación entre la proporcionalidad y las funciones (ibídem).

Además, en dichas situaciones los estudiantes lograron establecer relaciones entre varias magnitudes y al mismo tiempo almacenar y procesar distintos tipos de información, lo cual es característico del razonamiento proporcional; asimismo, de manera implícita se logró relacionar la multiplicación con la proporcionalidad, tanto así que para algunos estudiantes dedujeron la relación antes de trabajar formalmente proporciones que es la etapa en la que se hace tácito este hecho. Respecto a estas consideraciones matemáticas Obando, Vanegas y Vásquez (ibídem, p. 123) refieren que:

> La línea de continuidad desde la multiplicación hasta la proporcionalidad, la cual pasa por el desarrollo del pensamiento proporcional, que puede caracterizarse como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación y comparaciones múltiples, y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente distintos tipos de información (Lesh y otros 1988). El razonamiento proporcional esta estrictamente relacionado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de razonamiento cualitativo como cuantitativo.

Por otro lado, de los resultados y sobre la base del análisis de las producciones estudiantiles, se describe un modo de aprehensión cognitiva de la concepción matemática de razón y, por la otra, se reflexiona de la importancia que le cabe –en el marco de los procesos de enseñanza y de aprendizaje– al uso de estrategias que ponen en acción las potencialidades intelectuales estudiantiles según su etapa de desarrollo, y, al uso cotidiano que estudiantes y profesores damos a la noción de razón.

Así, las herramientas matemáticas de razón y proporción son conceptos básicos en Matemáticas ya que están relacionadas con la mayoría de los contenidos de Matemáticas y con los de otras asignaturas como Física, Biología, Química, entre otras. Por tal razón, es necesario elaborar espacios en los cuales su aprendizaje significativo sea relevante.

En cuanto a las características de la etapa de desarrollo por la que transita el estudiantado de séptimo año, según Piaget apud Barra, Ramírez y Díaz (2006, p. 3), “su capacidad de pensamiento abstracto se ha ampliado debido a la posibilidad que tiene de efectuar combinaciones, correlaciones, proporciones, lo cual representa una conquista cognitiva que le permite el reconocimiento y tratamiento de la realidad con esas herramientas.

Dado que –tal cual se vivenció en el proceso– a través de esas habilidades cognitivas los sujetos son capaces de volver mentalmente y reconocer pasos y procesos que han utilizado en la resolución de un problema o tarea, el aumento de este tipo de estrategias de pensamiento y del grado de conciencia de las mismas, involucra capacidades como planificar y regular el empleo eficaz de los propios recursos cognitivos”.

De este modo, la metacognición de los estudiantes, actuó entonces como un recurso que cooperó con el aprendizaje y con la transferencia de las destrezas intelectuales, colaborando al mismo tiempo con la progresión positiva tanto de su autoimagen como de la actitud frente a sí mismos. Y todo esto, considero yo, como resultado del proceso de aprendizaje ya que los estudiantes, entre otras cosas ya muy mencionadas, escribieron para explicar las respuestas, justificar el razonamiento matemático y describir los métodos para resolver problemas.

De esta manera, teniendo en cuenta el proceso de aprendizaje, las cartas y las consideraciones aportadas por Obando et ali. (2003, 2007), Barra, Ramírez y Díaz (2006), García, y Serrano (1999), entre otros, se puede decir que los estudiantes lograron los siguientes objetivos –entre otros– alrededor del razonamiento proporcional como efecto de la metodología aplicada:

- ⇒ Resolvieron situaciones problemas, estableciendo razones entre partes de una colección u objeto y entre una parte y el todo.
- ⇒ Distinguieron tácitamente razones internas y externas, al igual que magnitudes homogéneas y heterogéneas relacionándolas funcionalmente de manera intuitiva.
- ⇒ Interpretaron y usaron razones expresadas de diferentes maneras.
- ⇒ Identificaron y analizaron razones en situaciones de variación proporcional directa.
- ⇒ Interpretaron el porcentaje como una proporción entre razones de “parte-todo” y calcularon porcentajes en situaciones cotidianas.
- ⇒ Reconocieron y describieron cualidades proporcionales perceptualmente.
- ⇒ Manipularon, interpretaron y expresaron datos y resultados cuyo dominio numérico era los números racionales; particularmente identificaron al número irracional *pi* como el resultado de una razón funcional.
- ⇒ Evaluaron y utilizaron diversas estrategias para solucionar problemas que implican variaciones proporcionales de las magnitudes.
- ⇒ En contextos diversos resolvieron situaciones problemas que implican un razonamiento proporcional.

- ⇒ Explicaron e interpretaron el significado de información habitual expresada en razones, adecuándose al contexto y basándose en razonamientos proporcionales.
- ⇒ Realizaron procesos de inducción y generalización recurriendo al lenguaje matemático.
- ⇒ Integraron conceptos formales a su sistema de definiciones de manera significativa.
- ⇒ …

Se podría continuar listando muchos más objetivos alcanzados, no solo en cuanto a razonamiento proporcional sino además en cuanto al avance significativo que se dio en la toma de apuntes y cómo este favoreció el aprendizaje del concepto de proporcionalidad. No obstante, aunque el material favoreció en gran medida la construcción de la proporcionalidad, la enseñanza de este concepto se dio, en su mayoría, en el campo de los números enteros además de que se omitió la presentación de otros sistemas de representación semántica de la proporcionalidad como lo son las tablas y las gráficas cartesianas. Sin embargo, el trabajo con los enteros facilitó el aprendizaje del concepto y por ende el desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes.

Empero, el presente Trabajo es tan solo una ventana diferente que se abre al trabajo con los apuntes en el salón de clase de estudiantes de Educación Básica y Media Vocacional lo cual resulta favorecedor para ellos incluso para el momento de enfrentarse a la vida universitaria ya que paulatinamente integraran el apunte como estrategia de aprendizaje, una estrategia autónoma y autodirigida que favorece los procesos de cognición y metacognición cuando el ejercicio de escritura que lo compone es consciente y regulado.

Es así que si queremos que los estudiantes adquieran competencia y comprensión sobre los distintos componentes de un contenido matemático, los profesores debemos diseñar situaciones didácticas de diversos tipos para tal propósito. Godino, Batanero y Font (2004, p. 17), citando al investigador francés Brousseau, ofrecen las siguientes opciones para elegir como brújula para el diseño de dichas situaciones:

• [Situaciones de] *Acción,* en donde el estudiante explora y trata de resolver problemas; como consecuencia construirá o adquirirá nuevos conocimientos matemáticos; las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los estudiantes, para que deseen resolverlos; deben ofrecer la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.

• [Situaciones de] *Formulación / comunicación*, cuando el estudiante pone por escrito sus soluciones y las comunicar a otros niños o al profesor; esto le permite ejercitar el lenguaje matemático.

• [Situaciones de] *Validación,* donde debe probar que sus soluciones son correctas y desarrollar su capacidad de argumentación.

• [Y, Situaciones de] *Institucionalización,* donde se pone en común lo aprendido, se fijan y comparten las definiciones y las maneras de expresar las propiedades matemáticas estudiadas.

De esta manera, la metodología de enseñanza de este Proyecto se diseñó ambiciosamente tratando de integrar situaciones de acción, formulación/comunicación y validación por lo cual el proceso de aprendizaje resultó exigente para mis estudiantes. Por tal razón, y como consecuencia del perfil de la metodología, no quiero cerrar este Capítulo sin dejar de mencionar que los estudiantes –todos según sus diferencias individuales– al terminar el Proyecto se mostraron muy seguros de sí mismos lo cual se vio reflejado en otras áreas y, por ende, en su autoestima y autoconcepto.

Ciertamente, este Proyecto –con sus limitaciones y todo– constituyó tácitamente un espacio de formación no solo matemática sino humana ya que a través de las matemáticas los estudiantes se acercaron a sí mismos y desarrollaron habilidades sociales e individuales que los constituyó en sujetos transformados dispuestos al aprendizaje de las matemáticas comprendiendo que este va más allá de “aprender” números y fórmulas.

Un Apunte Final

"Hablar y escribir permite a los estudiantes que no son naturalmente reflexivos involucrarse en los mismos procesos de pensamiento que los buenos estudiantes usan rutinariamente" Guzmán (2004, p. 166).

Desarrollada en los apartados anteriores, tanto la fundamentación teórica como la metodológica y el análisis de los datos obtenidos, procedo en este último Capítulo del Trabajo, a dar cuenta de las conclusiones y las consideraciones generales a las que llegué.

Sería conveniente recordar que partí del hecho de que los estudiantes y los apuntes eran dos islas incomunicadas lo que me llevó a diseñar una metodología de enseñanza en la cual el apunte tuviera un sentido diferente al registro tradicional direccionado por el profesor y se convirtiera en uno de los recursos didácticos que le ayudaría a los estudiantes a construir su aprendizaje matemático y, a mí, a acercarme a su razonamiento a través de estos. Todo esto permeado por el sentido que para mí como profesora tiene el apunte y, más precisamente, la escritura en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

De esta manera, al ser focalizados los apuntes en clase desde una perspectiva diferente al dictado-copiado, se condujo a los estudiantes a desarrollar y desplegar habilidades lecto-escritoras que incluyen los procesos psicológicos básicos que se ubican dentro de los procesos cognitivos centrales del ser humano que permiten lograr el conocimiento los cuales van desde la sensación, la percepción, la atención, la memoria y la motivación hasta poner en marcha los operadores mentales que transforman la información que está en el contenido del pensamiento en un nuevo conocimiento a través del análisis, la síntesis, la abstracción, la comparación, la generalización, la racionalización y la conceptualización, todos estos actuando en pro de la formación de los conceptos.

De esta manera, Sandra, Brenda y Edwin mostraron un fuerte avance en torno a dos aspectos importantes: uno, el desarrollo de su pensamiento cuantitativo a partir del pensamiento cualitativo sobre la razón y la proporción; dos, la carta de sentidos que le dieron al empleo de los algoritmos. Además evidenciaron en la resolución de problemas la fuerza que tuvo el dato perceptual y el apoyo en su experiencia para dar solución a las situaciones problema lo cual incidió significativamente en el desarrollo alcanzado en el razonamiento proporcional.

El trabajo algorítmico permitió explorar el reconocimiento tácito de los operadores en los cuales los estudiantes estaban pensando, tanto el campo de los enteros positivos como en los racionales. Además, las situaciones problemas permitieron que los estudiantes realizaran análisis cualitativos en los cuales estuvo presente la covariación y la noción de funcionalidad entre las magnitudes involucradas lindando sigilosamente así la proporcionalidad con las funciones.

A nivel de la construcción de significados, estos fueron enriquecidos juntos con los procesos de significación llegando así <los estudiantes> a usar los términos matemáticos precisos para designar determinadas actividades. Finalmente, los estudiantes llegaron a construir una comprensión significativa del concepto de proporcionalidad lo cual se percibió continuamente en el proceso de aplicabilidad en distintos ámbitos y por el uso de los distintos modos de representación.

Por otro lado, la Investigación mostró que la separación de la enseñanza y la escritura ha sido en gran parte responsable de la aridez entre el aprendizaje y la toma de apuntes como una herramienta posibilitadora del primero. “Lo cierto es que, a pesar de la escasa atención didáctica, se exige, muy a menudo, al alumnado que su textos tengan competencia comunicativa. Sin embargo, el empleo constante de la escritura como herramienta de evaluación del saber disciplinar no presupone que el estudiante la domine. Se supone –erróneamente– que los estudiantes tienen una habilidad innata para afrontar las características textuales del *discurso académico*, pero la realidad es otra: escribir textos propios del *discurso académico* no es una actividad espontánea, sino que se necesita un aprendizaje formativo que combine tanto los contenidos como la retórica del discurso de la disciplina" (Atienza, 1992, p. 28).

En la clase de matemáticas, se exige al estudiante saber escribir pero poco se atiende al compromiso social que tenemos todos los profesores en la enseñanza del uso del lenguaje como ente favorecedor del aprendizaje. La toma de apuntes es una tarea que acompaña al estudiante durante toda su vida académica llámese a las etapas preescolar, primaria, secundaria, universidad, etc., siendo el común denominador en todas ellas la desatención por parte de los profesores en cómo los estudiantes llevan sus apuntes, qué tanto invierten de sí mismos en la tarea de anotación que posteriormente será la base para estudiar, comprender y profundizar los conceptos formados *a vuelo de pájaro* en clase.

En contraposición, paradójicamente el estudiante debe enfrentarse, a lo largo de su vida escolar, a la organización de un tipo de discurso para el que no ha sido preparado pero con el que se pone en juego la acreditación de su saber.

Desde este punto de vista, según los hallazgos de esta Investigación, hay que favorecer las capacidades del estudiante para que sea capaz de realizar por sí mismo un apunte en el cual ponga en juego tareas metacognitivas básicas como la planificación (ejecutar ciertas actividades, decidiendo cuáles son las más adecuadas en cada caso) y la evaluación (revisar las estrategias para determinar si están favoreciendo o no el aprendizaje). Esto implica que la enseñanza (la metodología de la enseñanza) se centre en los *proceso*s del aprendizaje y no sólo en los productos, ya que esto simultáneamente le permitirá al profesor evaluar, por un lado, el proceso de aprendizaje del estudiante y, por el otro, autoevaluar su proceso de enseñanza.

Esto lleva en muchos casos, por ende, a un cambio en la metodología en donde se involucre al estudiante en el aprendizaje, se diseñen actividades teniendo en cuenta el objetivo y la estrategia necesaria para realizarla, y donde después de llevarlas a cabo, se dedique un tiempo a evaluar los pasos dados. Todo esto teniendo en cuenta que la metodología de enseñanza, influye directamente en la manera en que los estudiantes aprenden y estudian.

No obstante, si bien es cierto que trazarse un objetivo de transformación en un contexto que es reacio a –valga la redundancia– la transformación, requiere de convencimiento del por qué y para qué del objetivo que se pretende, y de sendos esfuerzos para corromper la pasividad de los sujetos inmersos en ese contexto. Es pues la tarea del profesor –de nosotros los profesores– asumir una posición férrea y de reto frente la educación bancaria y tradicionalista que poco le aporta al estudiante no más allá que información suelta que termina arrojando al olvido porque *nunca* descubrió que lo que aprendía tenía sentido.

… En el Colegio Príncipe San Carlos (Sede B – Colorados), no fue absolutamente nada fácil comprometer a los estudiantes participantes del Proyecto con su proceso de aprendizaje. Pero tampoco fue imposible. No fue fácil porque los estudiantes –desafortunamente– no han contado con los espacios necesarios para que aprendan a pensar y reconozcan en esta actividad intelectual la base de su aprendizaje y no la vara con la cual se les "castiga".

Sin embargo, de manera sigilosa, el Proyecto repercutió en el contexto educativo del Colegio: los estudiantes de otros cursos se inquietaron al ver a sus compañeros trabajando con *Cartillas* hechas por la profesora y no con el libro; estudiantes de grados superiores como 9º, 10º y 11º observaron disimulada y cautelosamente esos momentos en los cuales los estudiantes, sumergidos en sus pensamientos, intentaban comprender las situaciones matemáticas propuestas para crear una estrategia para su solución; los padres de familia se mostraron satisfechos por el trabajo que *en matemáticas* sus hijos estaban haciendo porque en la casa hablaban de lo que hacían y preguntaban tratando de encontrar orientación.

Además, los colegas de otras áreas manifestaron que los estudiantes habían mejorado significativamente su comprensión de lectura, su ejercicio de escritura y su análisis; y que algunos estudiantes de muy bajo perfil académico que participaron en el Proyecto paulatinamente abandonaron su desidia mostrándose más activos en las clases.

> *Tal vez aquello haya sonado muy optimisma… Pero en suma solo cuando se ponen en marcha proyectos reales de aprendizaje para los estudiantes es que el profesor reconoce el impacto que desde su clase puede generar.*

De esta manera, se fomentó en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas como resultado de un Proyecto de casi dos meses de trabajo sistemático, progresivo y continuo. Cabe aquí recalcar que si se quiere una mayor transformación en la toma de apuntes y, por efecto, en la escritura y la lectura, se deben diseñar y aplicar otras estrategias que el profesor considere necesarias y acordes con el contexto y las necesidades de sus estudiantes ya que las transformaciones requieren de tiempo y consecución hasta que se consoliden.

Por ende, este Proyecto suscita a dejar de concebir la escritura como una actividad superficial, sobre todo de tipo gramatical, y evitar delegarle la responsabilidad del bajo nivel del alumnado en procesos lecto-escritores a los colegas de Lengua Castellana y, más aún, superar el hecho de que la toma de apuntes esté orientada por *nadie* (ni por el estudiante ni por el profesor).

Es así como se concluye que las acciones didácticas intencionadas, sobre el manejo de los apuntes –no solo para la construcción del concepto de proporcionalidad– promueven el desarrollo y avance, por parte de los estudiantes, en el manejo de la estructura de los mismos además de favorecer su aprendizaje, metacognición, autoconcepto y autoestima.

Finalmente, como parte de estas conclusiones, quiero presentar tres principios que orientan la dinámica de trabajo del movimiento WAC[22] (*Writing Across the Curriculum*), cuyo propósito principal es involucrar a toda la comunidad docente en la enseñanza de la escritura y que resultan oportunos para respaldar algunas consideraciones hechas en este Trabajo (Guzmán, 2004, p. 162):

[22] URL: http://wac.gmu.edu/

1. Aprender a escribir es responsabilidad de toda la escuela. La escuela es una comunidad de aprendices.

2. Escribir es un instrumento epistemológico de aprendizaje y no solo un método de evaluación de conocimientos o de registro de la información.

3. Escribir es un proceso de elaboración de ideas.

Y, por último, quiero decir –a modo de confesión– que los apuntes fueron para mí tan solo una excusa para invitar a los colegas a prestarle atención, siquiera por curiosidad, a la escritura de los estudiantes ya que –tal cual se pudo notar– la escritura extendida sobre un tema resulta muy promisoria porque involucra a los estudiantes en el proceso de pensar, de razonar sobre el papel.

Referencias Bibliográficas

Atienza, E. (1992). *Propuesta de evaluación de textos escritos*. Tesis doctoral para optar al título de doctora en Filosofía y Ciencias de la Educación. España: Universidad de Barcelona. Recuperado el 3 de julio de 2007 de http://www.tdcat.cesca.es/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-1022102-113443/PARTEA.pdf

Baena, J. C. y Vega, R. E. (2007). *Las regletas de Coussinaire como una estrategia en la construcción y aplicación del concepto de proporción*. Tesis de postrado para optar al título de Especialista en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

Barra, A. L., Ramírez, G. y Díaz, L. (2006). *Una estrategia para la aprehensión cognitiva de la razón. Experiencia de Aula. Segundo ciclo básico.* Universidad Mayor. Versión electrónica tomada de http://www.sochiem.cl/jornadas2006/ponencias/37.pdf

Carlino, P. (2006). "El proceso de escritura académica: Cuatro dificultades de la enseñanza universitaria". *Educere, Artículos Arbitrados*. Año 8, No. 26, julio – agosto – septiembre, pp. 321-327.

Carreño, J. (2007). *Pensamiento variacional: De la proporcionalidad directa simple a la noción de función lineal de la forma f(x)=kx*. Tesis de postrado para optar al título de Especialista en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

Cogollo, C. (2006). *La variable: "cosa", "letra acompañante" o "número escondido"*. Tesis de postgrado para optar al título de Especialista en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Freire, P. (1998). P*edagogía de la Autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa.* São Paulo: Paz e Terra AS.

García, J. N. y Fidalgo, R. (2004). "El papel del autoconocimiento de los procesos psicológicos de la escritura en la calidad de las composiciones escritas". *Revista de Psicología General y Aplicación*, pp. 281-297. Universidad de León.

García, G. y Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural.* [Cuadernos de Matemática Educativa No. 3 – Asociación Colombiana de Matemática (ASOCOLME)]. Bogotá: Gaia.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2002, octubre). *Proporcionalidad para maestros.* Manual para el estudiante. Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003, febrero). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemática para Maestros, Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

___________. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* pp. 1-55. En: Godino, J. D. (2004, octubre). *Didáctica de las Matemáticas para maestros.* Manual para el estudiante. Proyecto Edumat-Maestros. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Tesis de postgrado para optar al título de Magíster en Educación – Énfasis en Educación Matemática. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Guzmán, R. J. (2004). "Producción infantil de textos expositivos: una experiencia en el aula". *Educación y educadores*, No. 7, pp. 157-176.

Luria, A. R. (1980). Lenguaje y pensamiento. Barcelona: Fontanella, pp. 69-125

__________. (1984). *Conciencia y Lenguaje*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Martínez, R., Navarro, E., & Zamora, B. (2006). *El uso de los apuntes en Historia de bachillerato (1992-2002) ¿Ha cambiado algo después de dos reformas y una década de observación?* España: Universidad de Murcia. Recuperado el 3 de julio de http://dewey.uab.es/pmarques/dioe/apuntesNICOLAS.pdf

MEN, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá D.C.

__________. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá D.C.

Mojica, A. y Buitrago, M. C. (2007). *Razones y proporciones y su conexión con otras áreas*. Tesis de pregrado. Bucaramanga: UIS.

Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, y Pérez, M. (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México: Cooperación Española.

Obando, G. y Múnera, J. J. (2003). "Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática". *Revista educación y pedagogía*, Vol. XV, No. 35, pp. 1-17 (enero-abril). Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.

Obando, G., Vanegas, M., Vásquez, N. (2007). *Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos* (Módulo 1, 2ª edición). Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, pp. 121-134.

Obando, G. y Vásquez. (2007). *Las estructuras multiplicativas y la proporcionalidad*. En: VII Encuentro Nacional IV Internacional. Popayán.

Orrantia, J. y Sánchez, E. (1994). *Evaluación del lenguaje escrito*. En: M. A. Verdugo (dir.), *Evaluación curricular: Una guía para la intervención psicopedagógica* (pp. 223-326). Madrid: Siglo XXI. Recuperado el 10 de mayo de 2007 de http://sid.usal.es/mostrarficha.asp_Q_ID_E_5040_A_fichero_E_8.11

Pozueta, E. y Guruceaga, A. (2006). *Trabajando con mapas conceptuales el tema de la proporcionalidad de 2º de educación secundaria obligatoria*. Costa Rica. Recuperado el 20 de julio de 2007 de http://cmc.ihmc.us/cmc2006Papers/cmc2006-p10.pdf

Serrano, S. (2000). "El paso del sentido al significado en la composición escrita desde una perspectiva vygotskyana". *Educere, Artículos*. Año 3, No. 9, junio, pp. 44-52.

Valery, O. (2000). "Reflexiones sobre la escritura a partir de Vigostky". *Educere*. Año 3, Nº 9, junio, 2000. Universidad de los Andes. Recuperado el 29 de julio de 2007 de http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/educere/vol4num9/articulo6-4-9.pdf

Valdemoros, M. y Ruiz, E. (2006). "Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime), julio, Vol. 9, No. 002, pp. 299-324. México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M., y Álvarez, S. (2001). "La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje". *OEI Revista Iberoamericana de Educación*. Versión en línea http://www.campusoei.org/revista/did_mat10.htm.

Vygotsky, L. S. (1987). *Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. Buenos Aires: La Pleyade, pp. 83-120, 159-170.