

RELACIONES ENTRE SISTEMAS ITERADOS DE  
FUNCIONES Y SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

CRISTIAN CAMILO ESPITIA MORILLO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2012.

RELACIONES ENTRE SISTEMAS ITERADOS DE  
FUNCIONES Y SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

CRISTIAN CAMILO ESPITIA MORILLO

Trabajo presentado como  
requisito para optar al título de  
*Magister en Matemáticas*

Dr. Sonia Marleni Sabogal Pedraza  
Directora

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2012.

## Agradecimientos

*Expreso mis más sinceros agradecimientos a mi madre Olga Maria Morillo Arevalo quien siempre me ha apoyado y me ha aconsejado en mis decisiones.*

*A mi familia tías, tíos, primos y abuelos quienes han depositado su confianza en mi y me han apoyado en el cumplimiento de mis metas y propósitos.*

*De manera muy especial quiero agradecer a la profesora Sonia Marleni Sabogal quien con su paciencia y conocimiento me ha enseñado la maravillosa ciencia de la Geometría Fractal, su colaboración en este proyecto ha sido invaluable y dispongo de pocas palabras para manifestarle mi gratitud.*

*Gracias a los profesores Javier Camargo y Rafael Isaccs sus acertadas sugerencias han influenciado positivamente la realización de este trabajo.*

*Finalmente quiero agradecer a la Facultad de Ciencias y a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, institución a la que expreso mi gratitud y reconocimiento.*

# Índice

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>1. Capítulo</b>	<b>12</b>
1.1. Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos. . . . .	12
1.2. Sistema Dinámico $\{\mathbb{R}, ax(1 - x)\}$ $a \in \mathbb{R}^+$ . . . . .	16
1.3. Sistema Dinámico $\{\mathbb{R}, z^2 + c\}$ . . . . .	21
1.4. Dinámicas en el plano complejo y en la esfera de Riemann. . . . .	23
<b>2. SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES CONSTRUIDOS A PARTIR DE SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS</b>	<b>34</b>
2.1. Un <i>SIF</i> para el Sistema Dinámico $\{\mathbb{R}; ax(1 - x)\}$ , $a \in \mathbb{R}^+$ . . . . .	37
<b>3. SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS CONSTRUIDOS A PARTIR DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES</b>	<b>43</b>
3.1. Sobre la definición de <i>SIF</i> totalmente desconexo . . . . .	46
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>62</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>64</b>

## Índice de figuras

1.	Construcción del conjunto de Cantor. . . . .	14
2.	Ejemplo 1.2. . . . .	15
3.	Iteración Gráfica. . . . .	17
4.	Iteración gráfica para tres diferentes valores de $a$ . . . . .	17
5.	10, 50 y 100 pasos para $a = 4$ . . . . .	18
6.	Iteración Gráfica cuando $a > 4$ . . . . .	18
7.	Iteración Gráfica hacia atrás. . . . .	19
8.	Iteración gráfica hacia atrás cuando $a = 4,5$ . . . . .	19
9.	Dinámicas $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ y $z_{n+1} = z_n^2 + c$ respectivamente. . . . .	21
10.	Cuadrado esencial. . . . .	22
11.	Dinámica cuando $c > \frac{1}{4}$ . . . . .	22
12.	Lema 1.2, caso $a$ . . . . .	25
13.	Si $f_c^{-1}(C)$ es una curva cerrada que no es un lazo. . . . .	26
14.	Vecindades alrededor de $z$ y $z_{-1}$ . . . . .	26
15.	Lema 1.2, caso $b$ . . . . .	27
16.	Vecindades alrededor de $c$ y su imagen 0. . . . .	28
17.	Lema 1.2, caso $c$ . . . . .	28
18.	Lazos $\{f_c^{-k}(C)\}_{k \geq 0}$ . . . . .	30
19.	$a)$ Órbita no acotada, $b)$ Lazos $\{f_c^{-k}(C)\}_{k \geq 0}$ . . . . .	30
20.	Conjunto de Julia para $f_i(z) = z^2 + i$ . . . . .	31
21.	Teorema 2.1. . . . .	34
22.	Conjunto de Julia para $f(z) = z^2 + 2,5$ . . . . .	37
23.	Construcción del $SIF$ para $ a  > 4$ . . . . .	38
24.	Conjunto de Julia para $f(z) = z^2 - 1$ . . . . .	42
25.	Construcción del atractor del $SIF$ $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, 1\}$ . . . . .	49
26.	Relaciones referentes a la noción de $SIF$ totalmente desconexo. . . . .	51
27.	Gráfica de $S(x)$ . . . . .	54
28.	Posibles Sistemas Dinámicos Shift asociados al $SIF$ Just-touching. . . . .	55
29.	Triángulo de Sierpinski . . . . .	55
30.	Posibles Sistemas Dinámicos Shift asociados al $SIF$ Overlapping. . . . .	56
31.	Dinámica para el $SIF\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ . . . . .	57
32.	Atractor del $SIF\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ , gráfica tomada de Barnsley [1]. . . . .	60
33.	Dinámica para el $SIF\{\mathbb{R}; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ , gráfica tomada de Barnsley [1]. . . . .	61

**TÍTULO: RELACIONES ENTRE SISTEMAS ITERADOS DE  
FUNCIONES Y SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS\***

**AUTOR: CRISTIAN CAMILO ESPITIA MORILLO\*\***

**PALABRAS CLAVE:** *Sistemas Iterados de Funciones, Sistemas Dinámicos Discretos, Fractal.*

**Resumen**

Este trabajo se enmarca en las áreas de Geometría Fractal y Sistemas Dinámicos Discretos, en particular se trata el caso de dos sistemas de construcción fractal, estos son: Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos, a lo largo de esta exposición se muestra que los sistemas mencionados son en cierta forma "Duales", es decir a partir de un método de construcción se puede obtener el otro y viceversa (esta dualidad se presenta bajo ciertas condiciones, las cuales están consignadas en el trabajo). En el presente trabajo se consideran tres grandes capítulos: en el capítulo 1 se dan algunas definiciones y resultados iniciales los cuales serán de utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos, en el capítulo 2 se aborda el caso de obtener Sistemas Iterados de Funciones a partir de Sistemas Dinámicos Discretos y en el capítulo 3 se considera el caso de obtención de Sistemas Dinámicos Discretos a partir de Sistemas Iterados de Funciones, cada uno de estos capítulos contiene algunos ejemplos ilustrativos tanto de las definiciones como de los resultados los cuales facilitan la lectura, por último se exponen algunas Conclusiones las cuales pretenden resumir lo abordado en cada capítulo y además se menciona un problema abierto, el cual puede ser motivo de una futura investigación.

---

\*Tesis de Maestría.

\*\*Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Maestría en Matemáticas, Directora P.H. Sonia Marlon Sabogal.

**TITLE:** RELATIONS BETWEEN ITERATED FUNCTIONS SYSTEMS  
AND DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS\*

**AUTOR:** CRISTIAN CAMILO ESPITIA MORILLO\*\*

**KEY WORDS:** Iterated Functions Systems, Discrete Dynamical Systems, Fractal.

#### **Abstract**

This work is about the areas of Fractal Geometry and Discrete Dynamical Systems, in particular this work is about the case of two fractal construction systems, these are: Iterated Functions Systems and Discrete Dynamical Systems, this exhibition shows that these systems are "Dual", this means that from one method you can get the other method and vice versa (this duality occurs under certain conditions, which are mentioned in the investigation). This work considers three main chapters, Chapter 1 provides definitions and some initial results which will be useful in the development of the following chapters, Chapter 2 considers the case of Iterated Function Systems obtained from Discrete Dynamical Systems and Chapter 3 considers the case of Discrete Dynamical Systems obtained from Iterated Functions Systems, each of these chapters contains some illustrative examples of both definitions and results which facilitate reading, finally Conclusions are some which are intended summarize what addressed in each chapter and also mentions an open problem, which may be cause for further investigation.

---

\*Graduate Dissertation.

\*\*Industrial University of Santander, Faculty of Science, School of Mathematics, P.h. Sonia Marleni Sabogal Advisor.

# INTRODUCCIÓN

El tema del trabajo se enmarca en las áreas de los Sistemas Dinámicos Discretos y Geometría Fractal, cada una de estas dos áreas es bastante amplia con un desarrollo y estudio formal relativamente reciente. Las dos teorías (Sistemas Dinámicos Discretos y Geometría Fractal) están estrechamente relacionadas en varios de sus aspectos.

Los estudios sobre Sistemas Dinámicos, se originan con los trabajos de dos matemáticos franceses, Gaston Julia [16] y Pierre Fatou [11] hacia 1918. Después de estos años el área estuvo en hibernación, pasando algunas décadas sin grandes avances, salvo los trabajos de H. Cremer [7] en 1932, C. L. Siegel [23] en 1942 y H. Brolin [6] en 1965. A partir de 1974 el I.B.M impulsado por el desarrollo de la computadora digital, renueva el interés en esta área, particularmente el Dr. B. Mandelbrot de la Universidad de Yale con sus experimentos en computadores, logra mostrar al mundo científico las primeras imágenes fractales. Desde la década del 70 este campo ha estado en la vanguardia de los matemáticos contemporáneos, investigadores tales como R. L. Devaney [9], M. Barnsley [1, 2, 3], J. E. Hutchinson [15] entre otros, han estado explorando este campo de las matemáticas con ayuda de los computadores modernos.

Con respecto al estudio de los Sistemas Iterados de Funciones, Hutchinson [15] fue en 1981 el primer matemático que estudiando las propiedades comunes (compacidad, autosemejanza entre otras) de los fractales ya conocidos, elabora una teoría unificada para la obtención de una amplia clase de conjuntos fractales: “los fractales autosemejantes”. Este método permitió estudiar los Sistemas Iterados de Funciones como una generalización del método de Hutchinson, la cual realiza principalmente M. Barnsley [1].

Los Sistemas Iterados de Funciones y los Sistemas Dinámicos Discretos, constituyen dos métodos en cierta forma “duales” para construir fractales: por una parte, fractal como atractor de un Sistema Iterado de Funciones y por otra, fractal como conjunto de Julia asociado a un Sistema Dinámico Discreto. Ejemplos clásicos de fractales, tanto en la recta como en el plano, se pueden obtener de las dos maneras. Así por ejemplo, el conjunto de Cantor usualmente se construye como el atractor de un Sistema Iterado de Funciones y también, como el conjunto de Julia de un Sistema Dinámico Discreto, análogamente sucede con otros fractales clásicos como el triángulo de Sierpinski.

Por supuesto, hay una gran variedad de ejemplos menos clásicos, de obtención de fractales por medio de uno de estos dos métodos, algunas veces usando sólo uno de ellos y otras usando los dos y haciendo notar, aunque no muy enfáticamente, esa especie de dualidad mencionada anteriormente.

Surgen de manera natural, preguntas tales como:

1. ¿Dado un  $SD$  con conjunto de Julia  $J_f$ , bajo qué condiciones existe un  $SIF$  cuyo atractor sea  $J_f$ ?
2. ¿Dado un  $SIF$  con atractor  $A$ , bajo qué condiciones existe un  $SD$  cuyo conjunto de Julia sea precisamente  $A$ ?

En el primer capítulo “Preliminares” se definen algunos conceptos y se referencian teoremas y resultados, los cuales han sido utilizados en el desarrollo de este trabajo. En este capítulo se pretende introducir al lector en lo concerniente a Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos, se muestran algunos ejemplos que clarifican las definiciones dadas y se finaliza mostrando el comportamiento de un Sistema Dinámico Discreto particular para el cual, en el siguiente capítulo se construirá su Sistema Iterado de Funciones correspondiente.

En el segundo capítulo “Sistemas Iterados de Funciones construidos a partir de Sistemas Dinámicos Discretos”, se dan respuestas parciales a la primera pregunta planteada anteriormente, mostrando cómo a partir de un cierto tipo de Sistema Dinámico en la recta real, en el plano complejo y en la esfera de Riemann, se puede obtener un Sistema Iterado de Funciones cuyo atractor sea el conjunto de Julia del Sistema Dinámico dado. Fundamentalmente en este capítulo se exponen algunos teoremas que explican las condiciones que debe cumplir el Sistema Dinámico para construir su Sistema Iterado de Funciones correspondiente y se muestran algunos ejemplos de construcción.

En el tercer capítulo “Sistemas Dinámicos Discretos construidos a partir de Sistemas Iterados de Funciones” se responde parcialmente la segunda pregunta, asociando a cada Sistema Iterado de Funciones con contracciones inyectivas un Sistema Dinámico Discreto. Esto se hace inicialmente clasificando los diferentes tipos de Sistemas Iterados de Funciones, procurando ilustrar los resultados con ejemplos apropiados, lo cual nos llevará a tratar un Sistema Dinámico particular llamado Sistema Dinámico Shift Aleatorio y a la exposición de un hermoso teorema. Finalmente en “Conclusiones” se resume lo que se ha estudiado en el presente trabajo y se plantean algunos problemas abiertos.

El principal aporte original mostrado en este trabajo es la recopilación de estos dos grandes conceptos (Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos) mostrándolos como dos sistemas análogos de construcción de fractales, los cuales se desarrollan en la literatura matemática como dos temas independientes, cada uno con un gran tratamiento formal. Debe mencionarse también que algunas de las demostraciones de los teoremas presentes, se han modificado con el objetivo de ser accesibles a un grupo más amplio de lectores, pues las demostraciones originales que exponen los autores requieren de herramientas un poco más formales. Además se presentan algunos ejemplos los cuales facilitan la comprensión del tema.

# 1. PRELIMINARES

A continuación se presentan conceptos y resultados básicos tanto de la teoría de los Sistemas Iterados de Funciones, como de la teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos, los cuales pueden encontrarse en Barnsley [1], Falconer [10] o Sabogal [22], que se usarán en los capítulos posteriores y constituyen un marco teórico específico para el trabajo.

## Definición 1.1.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función. Diremos que  $f$  es una **contracción** si existe  $r \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1$  tal que para cualesquiera  $x, y \in X$  se tiene que  $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ , en tal caso la constante  $r$  se llama **factor de contracción** de  $f$ .

## Definición 1.2.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mathbb{H}(X)$  la familia de subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ , la función  $h : \mathbb{H}(X) \times \mathbb{H}(X) \rightarrow [0, \infty)$  definida por:

$$h(A, B) := \inf\{r > 0 \mid A \subset N(B; r) \text{ y } B \subset N(A; r)\}$$

Es una métrica conocida como la **Métrica de Hausdorff**, donde  $N(A; \epsilon)$  llamada **Nube** se define como  $\{x \in X \mid \widehat{d}(x, A) < \epsilon\}$  y  $\widehat{d}(a, K) := \min\{d(a, x) \mid x \in K\}$  es la distancia de un punto a un compacto.

## 1.1. Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos.

### Definición 1.3.

Un **Sistema Iterado de Funciones Hiperbólico** (denotado *SIF*) consta de un espacio métrico completo  $(X, d)$  y un conjunto finito de contracciones  $\{w_n, n = 1, \dots, N\}$   $w_n : X \rightarrow X$ , se denota como  $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$ .

El *SIF* se llama Hiperbólico en cuanto a que el conjunto de contracciones  $\{w_n, n = 1, \dots, N\}$   $w_n : X \rightarrow X$  es un conjunto finito, sin ninguna condición adicional a las contracciones más que la mencionada en la Definición 1.1.

La expresión  $W^{on}$  representa la composición de  $W$  consigo misma  $n$  veces, es decir  $W^0$  es la función identidad,  $W^1 = W$ ,  $W^2 = W \circ W$ ,  $W^3 = W \circ W \circ W$  y así sucesivamente. En adelante se denotará  $W^n(x)$  para significar  $W^{on}(x)$ .

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos el atractor de un *SIF*.

**Teorema 1.1.** (Barnsley, [1], Teorema 7.1)

Sea  $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$  un SIF y  $\mathbb{H}(X)$  la familia de subconjuntos compactos no vacíos de  $X$  con la métrica de Hausdorff generada por la métrica de  $X$ . La función

$$W : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$$

$$K \mapsto \bigcup_{n=1}^N w_n(K)$$

es una contracción sobre  $(\mathbb{H}(X), h)$ , su único punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$  satisface

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A),$$

es llamado el **atractor** del SIF y además para cualquier  $K \in \mathbb{H}(X)$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(K) = A.$$

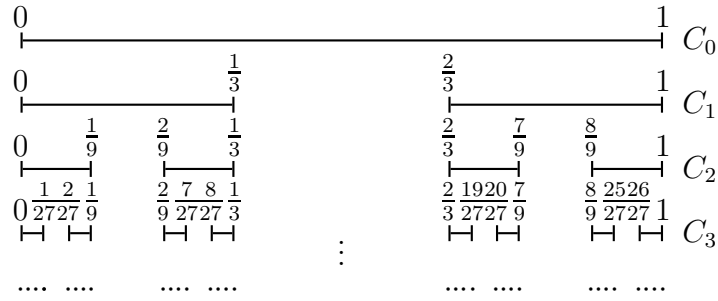
Al respecto obsérvese que  $W$  está bien definida puesto que  $w_n(K)$  es compacto no vacío y unión finita de compactos no vacíos es compacto no vacío. Puede también demostrarse que  $W$  es una contracción sobre el espacio métrico  $(\mathbb{H}(X), h)$ , con factor de contracción  $s = \max\{s_n; n = 1, \dots, N\}$ , donde  $s_n$  es el factor de contracción de  $w_n$  para cada  $n \in \{1, \dots, N\}$  (Sabogal [22], Lema 3.2.11). El espacio  $(\mathbb{H}(X), h)$  es completo pues  $(X, d)$  es completo (Sabogal [22], Teorema 3.2.6), de esta manera por el teorema de punto fijo para contracciones<sup>a</sup> se asegura la existencia y unicidad del punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$ . Por otra parte la expresión  $\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(K) = A$  para cualquier  $K \in \mathbb{H}(X)$ , muestra una manera de calcular dicho punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$ .

En este trabajo se entenderá por **fractal** al atractor de un SIF cuya dimensión de Hausdorff<sup>b</sup> es estrictamente mayor que su dimensión topológica. El atractor  $A$  es comúnmente un fractal, aunque no siempre lo es, es decir, se pueden obtener conjuntos de naturaleza no fractal como atractores de un SIF, como ejemplo; se puede obtener un SIF cuyo atractor sea el cuadrado  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , en este caso su dimensión de Hausdorff y su dimensión topológica coinciden. Debe resaltarse que un conjunto, obtenido como el atractor de un SIF es autosemejante (o autosimilar), pues se obtiene como unión de un conjunto finito de copias reducidas de si mismo (Sabogal [22], capítulo 4, pág. 101).

**Ejemplo 1.1.** Considere el SIF  $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$  donde

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

En este caso  $W : \mathbb{H}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{R})$  se define como  $W(K) = w_1(K) \cup w_2(K)$  para todo  $K \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ . El atractor de este SIF es el conjunto de Cantor que en adelante se denotará  $\mathcal{C}$ , como se muestra en la Figura 1.



$$C_1 = W(C_0) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_2 = W(C_1) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

⋮

Figura 1. Construcción del conjunto de Cantor.

Se demostrará que el atractor de este *SIF* es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ , haciendo uso de la siguiente caracterización: “El espacio de Cantor es el conjunto de todos los números entre 0 y 1, que se pueden representar en base 3, usando únicamente las cifras 0 y 2”, es decir:

$$\mathcal{C} = \{x \in [0, 1] \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, x_i \in \{0, 2\}\}.$$

Se demostrará que  $\mathcal{C} = w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C})$ .

Sea  $x \in \mathcal{C}$ , luego  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$  con  $x_i \in \{0, 2\}$ . Entonces  $x_1 = 0$  ó  $x_1 = 2$ .

- Si  $x_1 = 0$  se tiene que

$$x = \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \dots = \frac{1}{3} \left( \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \frac{x_4}{3^3} + \dots \right) \text{ así } x = \frac{1}{3}y = w_1(y) \in w_1(\mathcal{C})$$

siendo  $y = \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \frac{x_4}{3^3} + \dots \in \mathcal{C}$

- Si  $x_1 = 2$  se tiene que

$$x = \frac{2}{3} + \left( \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots \right) + \frac{2}{3} \text{ así } x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} = w_2(y) \in w_2(\mathcal{C})$$

De esta manera  $\mathcal{C} \subseteq w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C})$ .

---

<sup>a</sup>Véase Sabogal [22], Teorema 2.8.1.

<sup>b</sup>Este concepto alude a conocimientos de teoría de la medida y esta por fuera de los objetivos de este trabajo, para un tratamiento formal puede consultarse Barnsley [1], capítulo 5.

Recíprocamente sea  $y \in w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C})$ . Si  $y \in w_1(\mathcal{C})$  existe  $x \in \mathcal{C}$  tal que  $y = w_1(x) = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$  donde  $x_i \in \{0, 2\}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , luego

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^{i+1}} = \frac{x_1}{3^2} + \frac{x_2}{3^3} + \dots = \frac{0}{3^1} + \frac{x_1}{3^2} + \frac{x_2}{3^3} + \dots \in \mathcal{C}$$

Si  $y \in w_2(\mathcal{C})$  se tiene que  $y = w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  para algún  $x \in \mathcal{C}$ , siendo

$$y = \frac{2}{3} + \frac{x_1}{3^2} + \frac{x_2}{3^3} + \dots \in \mathcal{C}$$

Luego  $w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ .

#### Definición 1.4.

Un **Sistema Dinámico Discreto** (denotado  $SD$ ) consta de una función  $f : X \rightarrow X$  donde  $X$  es un conjunto no vacío, se denota  $\{X, f\}$ . La **órbita** de un punto  $x \in X$  es la sucesión  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .

**Ejemplo 1.2.** En el Sistema Dinámico  $\{\mathbb{R}, P\}$  mostrado en la Figura 2, se tiene que el “conjunto de puntos atrapados (es decir el conjunto de puntos de órbita acotada, el cual se llamará “Conjunto lleno de Julia” asociado a  $P$ , véase Definición 1.7) es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ .”

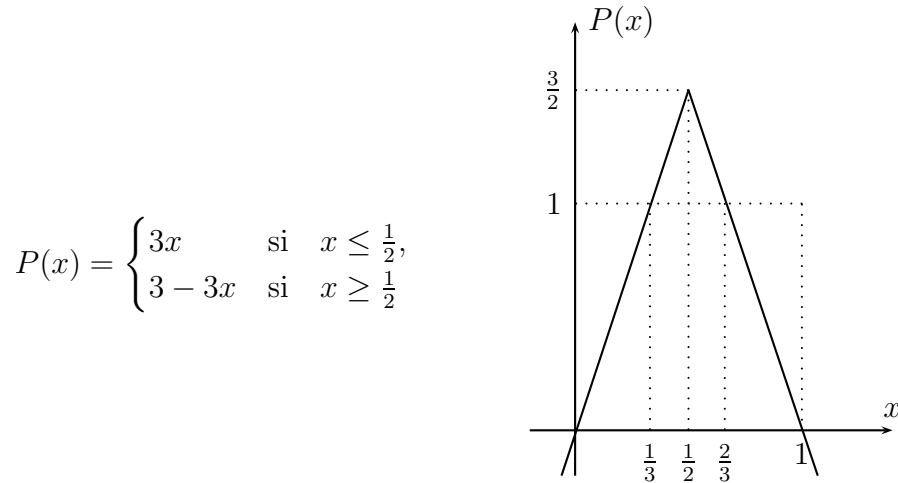


Figura 2. Ejemplo 1.2.

Para ver que el conjunto de Julia asociado a  $P$  es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ , observe que si  $x < 0$  entonces  $P(x) = 3x$ , de esta manera  $P^k(x) = 3^k x \rightarrow -\infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si  $x > 1$  entonces  $P(x) < 0$  y nuevamente  $P^k(x) \rightarrow -\infty$ . Si  $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$  entonces para algún  $k$  tenemos que  $x \notin P^k[0, 1]$ , luego  $P^k(x) \notin [0, 1]$  y nuevamente  $P^k(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Los Ejemplos 1.1 y 1.2 revelan una interesante relación entre *SIF's* y *SD's*; el conjunto  $\mathcal{C}$ , atractor del *SIF*  $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$ , dado en el Ejemplo 1.1, coincide con el conjunto de puntos atrapados del Sistema Dinámico  $\{\mathbb{R}, P\}$ , dado en el Ejemplo 1.2.

**Definición 1.5.**

Dos Sistemas Dinámicos  $\{X_1; f_1\}$  y  $\{X_2; f_2\}$  se dicen **equivalentes**, si existe un homeomorfismo  $h : X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $(f_2 \circ h)(x_1) = (h \circ f_1)(x_1)$  para todo  $x_1 \in X_1$ , es decir que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \end{array}$$

**Definición 1.6.**

Dados  $P$  y  $Q$  polinomios, se dice que son **topológicamente conjugados** en el abierto  $U$ , si existe un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  tal que  $(\varphi \circ P)(z) = (Q \circ \varphi)(z)$  para  $z \in U$  es decir, que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{P} & U \\ \varphi \downarrow & Q & \downarrow \varphi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\quad} & \varphi(U) \end{array}$$

**1.2. Sistema Dinámico  $\{\mathbb{R}, ax(1 - x)\}$   $a \in \mathbb{R}^+$ .**

Existe un procedimiento gráfico para representar la dinámica de un Sistema Dinámico de la forma  $\{\mathbb{R}, f\}$ , el cual utiliza la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , este procedimiento recibe el nombre de “*Iteración Gráfica*”, el cual se enuncia a continuación:

A partir de la gráfica de  $y = f(x)$  y de  $y = x$ , empiece con un punto  $(x_0, 0)$  y conéctelo mediante un segmento de línea recta al punto  $(x_0, f(x_0))$ , a continuación conecte este punto con  $(x_1, x_1)$ , posteriormente con  $(x_1, f(x_1))$  y continúe de manera similar, llamaremos al camino recorrido en este proceso como la trayectoria de la órbita. La órbita de  $x_0$  es la sucesión  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , tal como se muestra en la Figura 3.

La gráfica correspondiente a la función  $f(x) = ax(1 - x)$  es una parábola con vértice en  $(\frac{1}{2}, \frac{a}{4})$  y que pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . La Figura 4 muestra el proceso de iteración gráfica para tres diferentes valores de  $0 \leq a \leq 4$ . Para  $a = 1,45$  la trayectoria de la órbita es en forma de escalera, la cual converge al punto de intersección entre la gráfica de  $y = f(x)$  y la recta  $y = x$ . Para  $a = 2,75$  la trayectoria de la órbita genera una espiral que converge al punto de intersección entre la parábola y la recta  $y = x$ . Para  $a = 3,2$  se observa que la órbita determina un comportamiento en espiral.

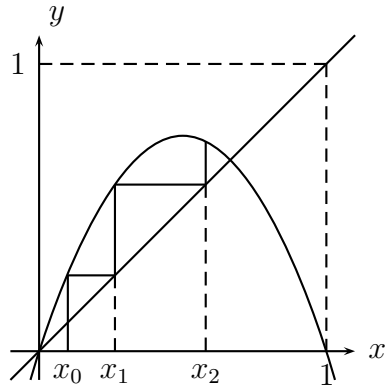


Figura 3. Iteración Gráfica.

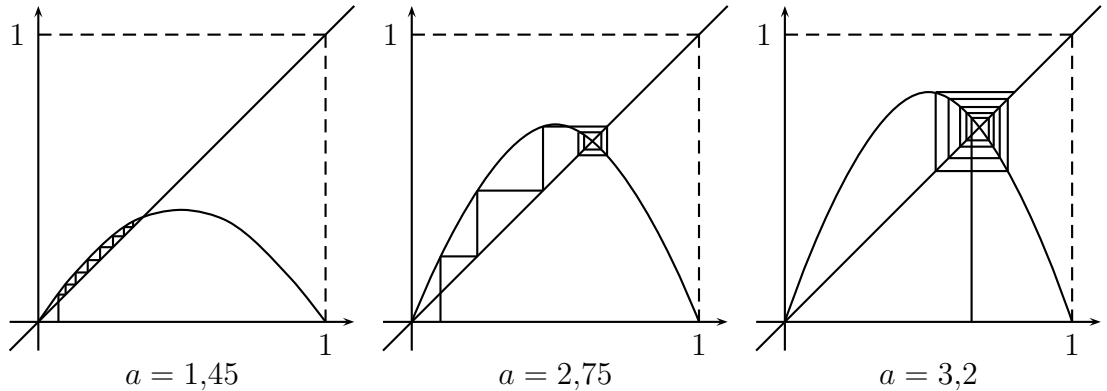


Figura 4. Iteración gráfica para tres diferentes valores de  $a$ .

Cuando  $a = 4$  se tiene que pueden seleccionarse iteradas tal que nunca se repitan y lleguen a llenar las regiones abajo y a la derecha de la parábola, tal como se muestra en la Figura 5. En esta figura de izquierda a derecha se muestran los primeros 10, 50 y 100 pasos de la iteración respectivamente.

Para  $a > 4$ , la iteración gráfica muestra que el cuadrado unidad que contenía la trayectoria de la órbita cuando  $0 \leq a \leq 4$ , ya no la contiene para valores de  $a$  mayores que 4, en efecto un número finito de iteradas se encuentran en esta región, pero existe una iterada la cual sale de este cuadrado, y en adelante las demás también lo harán, en este caso la órbita rápidamente escapa a infinito, véase la Figura 6.

Observe que para cualquier  $x_0 < 0$  la órbita escapa a infinito, para  $x_0 > 1$  se tiene igualmente que la primera iterada es  $x_1 < 0$  y de esta manera las siguientes iteradas crecerán negativamente hacia infinito como en el primer caso, sin embargo para  $x_0 \in [0, 1]$  se sigue que  $0 \leq x_1 = ax_0(1 - x_0) \leq 1$ , cuando  $0 \leq a \leq 4$ . De esta manera para  $0 \leq a \leq 4$  el conjunto de puntos prisioneros es  $A = [0, 1]$ , mientras que para valores de  $a > 4$  se tiene

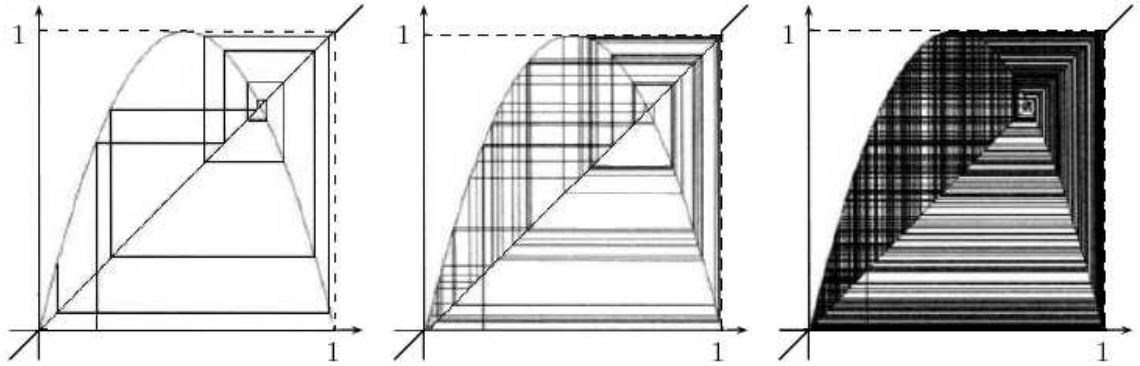


Figura 5. 10, 50 y 100 pasos para  $a = 4$ .

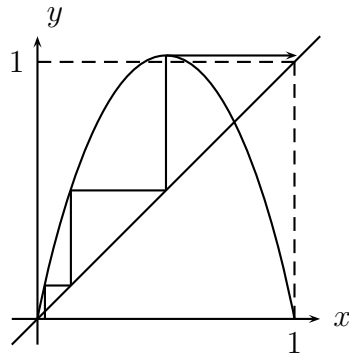


Figura 6. Iteración Gráfica cuando  $a > 4$ .

que el conjunto de puntos prisioneros es no conexo. Para mostrar este hecho mediante un ejemplo, debemos antes introducir un procedimiento gráfico llamado “*Iteración Gráfica hacia atrás*”, este es:

Dado un valor  $y$ , se quiere encontrar  $x$  de manera que  $ax(1 - x) = y$ . Escogemos  $y$  sobre el eje  $y$  y dibujamos la horizontal por este punto, la cual puede intersectar a la gráfica  $f(x) = ax(1 - x)$  en dos puntos, uno o ninguno, como se muestra en la Figura 7. Luego trazamos verticales desde estos puntos de intersección hacia el eje  $x$ , la intersección de estas verticales con el eje  $x$  son las preimágenes de  $y$  y las soluciones a la ecuación.

Si queremos repetir este procedimiento, levantamos verticales desde estos puntos hacia la recta  $y = x$  y dibujamos la(s) horizontal(es) para encontrar la gráfica  $f(x)$  y así sucesivamente como se muestra a la izquierda de la Figura 8, de esta manera podemos generar órbitas hacia atrás las cuales pueden ser representadas por un árbol, obteniendo nuevamente una, dos o ninguna preimagen.

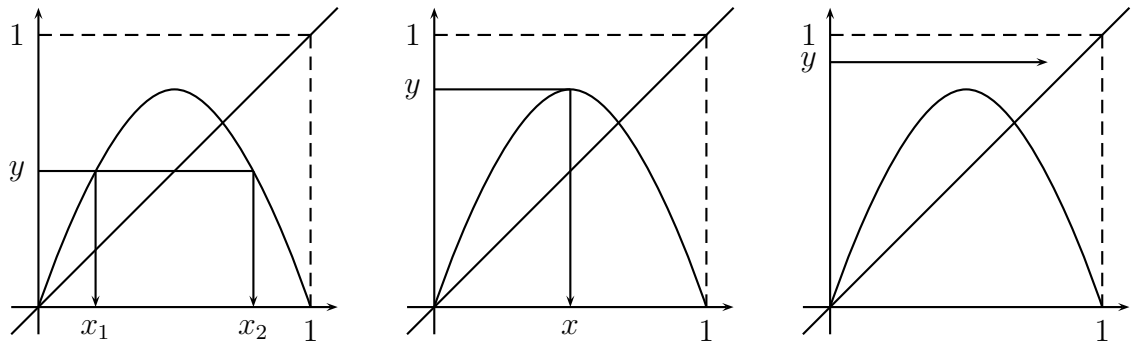


Figura 7. Iteración Gráfica hacia atrás.

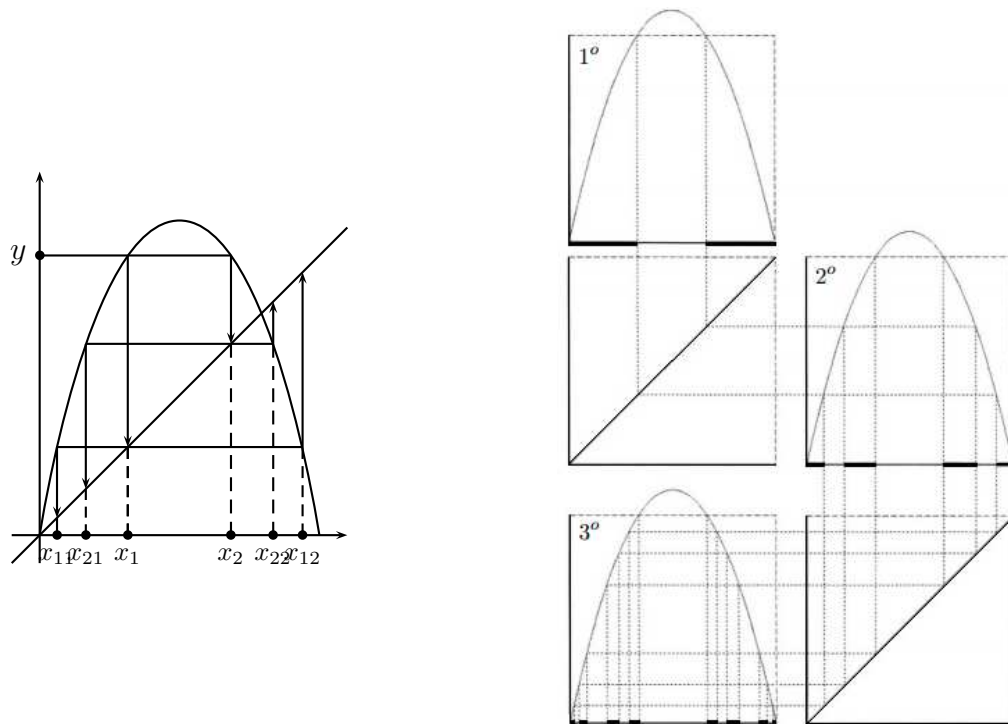


Figura 8. Iteración gráfica hacia atrás cuando  $a = 4,5$ .

Sea  $a = 4,5$ , mediante el método de Iteración Gráfica hacia atrás, tenemos que la preimagen consiste de dos partes disjuntas, como se muestra en el paso 1° a la derecha de la Figura 8, en la paso 2° se muestra la preimagen de las anteriores partes disjuntas, para el paso 3° se observa que la construcción como la que se hizo en el Ejemplo 1.1, y por tanto el conjunto de puntos prisioneros es totalmente desconexo<sup>c</sup>.

<sup>c</sup>Una demostración de este hecho se encuentra en Devaney [9], páginas 34 a 38.

A continuación se muestra la equivalencia entre  $x \mapsto ax(1-x)$  y  $z \mapsto z^2 + c$  cuando  $a, x, z, c \in \mathbb{R}$  y  $c \leq \frac{1}{4}$ . Esto es la equivalencia entre

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (1)$$

y

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \quad (2)$$

Usando la identificación

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{z_n}{a} \quad \text{y} \quad a = 1 + \sqrt{1-4c} \quad (3)$$

A partir de (3) tenemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{z_{n+1}}{a} = \frac{1}{2} - \frac{z_n^2 + c}{a} = \frac{1}{2} - \frac{z_n^2}{a} - \frac{c}{a} = \frac{1}{2} - \frac{z_n^2}{a} - \frac{c(1 - \sqrt{1-4c})}{1 - (1-4c)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z_n^2}{a} - \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{z_n^2}{a} - \frac{2-a}{4} \\ &= \frac{a}{4} - \frac{z_n^2}{a} \end{aligned}$$

Por otra parte, de (2) tenemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n(1-x_n) = a\left(\frac{1}{2} - \frac{z_n}{a}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{z_n}{a}\right)\right) = a\left(\frac{1}{2} - \frac{z_n}{a}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{z_n}{a}\right) \\ &= a\left(\frac{1}{4} - \frac{z_n^2}{a^2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{z_n^2}{a} \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que la dinámica para  $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$  es equivalente a  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . De hecho la iteración de cualquier polinomio cuadrático de la forma  $az^2 + bz + d$  es equivalente a la iteración de  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  (véase Definición 1.6) y por consiguiente a la iteración de  $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ , con un parámetro  $a$  escogido apropiadamente.

Como ejemplo considere el caso  $a = 3$  y  $x_0 = 0,23$ , de esta manera  $z_0 = -0,2025$  y  $c = -\frac{3}{4}$ , como se muestra en la Figura 9.

El punto crítico es decisivo en la forma del conjunto de puntos prisioneros. Observe que la desintegración de la preimagen del intervalo unidad en dos conjuntos disjuntos es causada por el hecho que el vértice de la parábola se ubica por encima del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , la coordenada  $x$  del vértice es llamada *punto crítico* y la coordenada  $y$  es llamada *valor crítico* de la función  $f(x) = ax(1-x)$ . Observe que el valor crítico tiene únicamente una

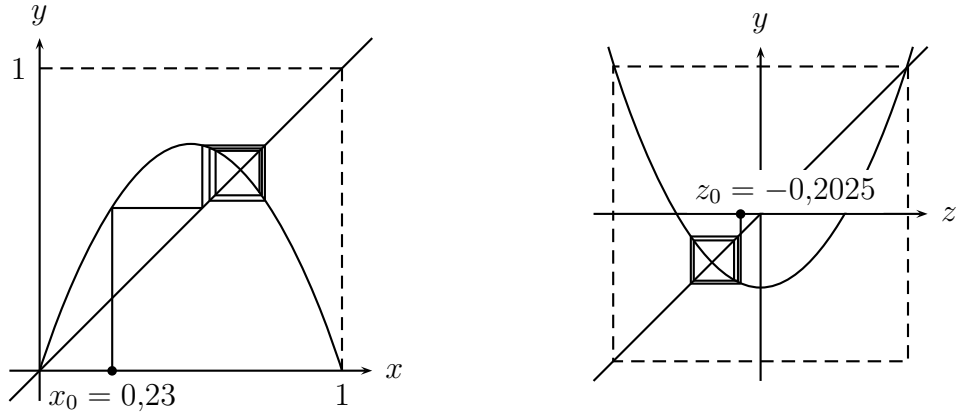


Figura 9. Dinámicas  $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$  y  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  respectivamente.

preimagen y esta es el punto crítico (véase Figura 7). La órbita del punto crítico es llamada *órbita crítica*, esta es:

$$\frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{4a^2 - a^3}{16}, \dots$$

Esta órbita determina cuando el conjunto de puntos prisioneros es un intervalo (una pieza conexas) o un conjunto de Cantor (totalmente desconexo)<sup>d</sup>. Cuando  $a \leq 4$  el valor crítico no excede 1 ya que  $\frac{a}{4} \leq 1$ , de esta manera la órbita crítica permanece en el intervalo unidad para todas las iteraciones, siendo el conjunto de puntos prisioneros el intervalo unidad. Si  $a > 4$  se tiene que  $\frac{a}{4} > 1$  y la órbita crítica escapa a infinito, siendo el conjunto de puntos prisioneros un conjunto de Cantor (este hecho se deducirá posteriormente como Corolario 1.5).

### 1.3. Sistema Dinámico $\{\mathbb{R}, z^2 + c\}$ .

Consideramos un cuadrado de referencia correspondiente al cuadrado unidad para la iteración anterior, este es el determinado por el punto de intersección entre la gráfica de  $f(z) = z^2 + c$  y la recta  $y = z$ , el cual es la solución de  $z = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}$  cuando  $c < \frac{1}{4}$ . Según la ecuación (3) pág. 20, este punto corresponde a  $\frac{a}{2}$  y el cuadrado de referencia es  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ , llamado el *cuadrado esencial*, véase Figura 10.

En el caso anterior el punto crítico era  $x_0 = \frac{1}{2}$ , ahora según la ecuación (3) 20, el punto crítico es  $z_0 = a(\frac{1}{2} - x_0) = a(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0$ , luego la órbita crítica es  $0, c, c^2 + c, \dots$

Si el vértice de la parábola  $f(z) = z^2 + c$  no sale del cuadrado esencial, se tiene que el conjunto de puntos prisioneros es el intervalo  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ . Note que si el valor crítico  $c$  sale del

<sup>d</sup>Devaney [9], páginas 34 a 38.

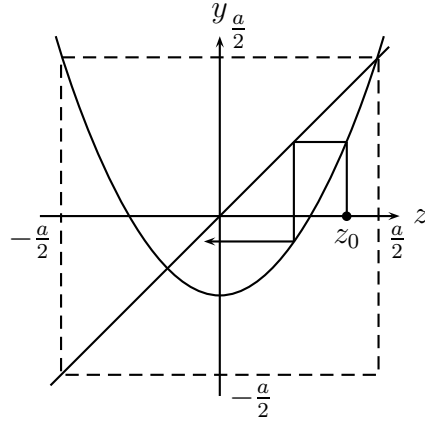


Figura 10. Cuadrado esencial.

cuadrado esencial se tiene como conjunto de puntos prisioneros un conjunto de Cantor.

Cuando el vértice de la parábola toque el lado inferior del cuadrado esencial se tendrá que  $c = -\frac{a}{2}$ , esto es  $c = -\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$  de donde  $4c(c+2) = 0$  siendo  $c = -2$  la única solución, de esta manera el vértice de la parábola excede el cuadrado esencial cuando  $c < -2$ . Por otra parte si  $c$  es grande tal que la parábola se ubique por encima de la recta  $y = z$  se tendrá que la órbita del origen se va a infinito, tal como se muestra en la Figura 11.

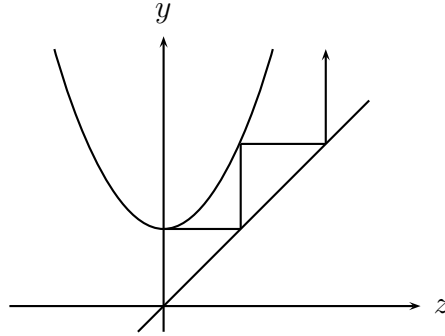


Figura 11. Dinámica cuando  $c > \frac{1}{4}$ .

La órbita crítica permanece en el conjunto de puntos prisioneros, cuando la parábola toca a la recta  $y = z$ , en este caso los puntos de intersección de la parábola con la recta  $y = z$  coinciden, es decir:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

En este caso  $4c = 1$  y  $c = \frac{1}{4}$ , así cuando  $c > \frac{1}{4}$  se tiene que la parábola sobrepasa a la recta  $y = z$  y la órbita crítica se va a infinito. En resumen el conjunto de puntos prisioneros es conexo si  $c \in [-2, \frac{1}{4}]$ .

El caso particular de los Sistemas Dinámicos de la forma  $\{\mathbb{C}; f\}$  o  $\{\hat{\mathbb{C}}; f\}$ , es decir dinámicas en el plano complejo o en la esfera de Riemann, ha sido y sigue siendo ampliamente estudia-

do. Este tipo de dinámicas constituye una fuente muy interesante de conjuntos de naturaleza fractal, incluso para funciones sencillas como polinomios de la forma  $f(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . En la siguiente sección se precisan algunos conceptos y resultados para este caso particular de dinámicas complejas.

## 1.4. Dinámicas en el plano complejo y en la esfera de Riemann.

### Definición 1.7.

Sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  un polinomio de grado mayor que 1.  $F_f$  denota el conjunto de puntos en  $\mathbb{C}$  cuyas órbitas no convergen a infinito. Esto es:

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} : \{|f^{on}(z)|\}_{n=0}^{\infty} \text{ es acotada}\}.$$

Este conjunto es llamado **Conjunto de Julia Lleno** asociado al polinomio  $f$ . La frontera de  $F_f$  es llamada **Conjunto de Julia** del polinomio  $f$ , y se denota como  $J_f$ .

**Ejemplo 1.3.** El ejemplo más simple que ilustra estas definiciones, se tiene al considerar  $f(z) = z^2$ . Si  $|z| < 1$ , como  $f^k(z) = z^{2^k}$  se sigue que  $f^k(z) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , si  $|z| > 1$  se tiene que  $f^k(z) \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , además si  $|z| = 1$  se tiene que  $f^k(z)$  se ubica en la circunferencia  $|z| = 1$  para todo  $k$ . De esta manera el conjunto de Julia lleno  $K_f$  es el disco unitario  $|z| \leq 1$  y el conjunto de Julia  $J_f$  es su frontera es decir,  $|z| = 1$ . Generalmente los conjuntos de Julia  $J_f$  asociados a polinomios son fractales. En este caso especial el conjunto de Julia  $J_f$  no es un fractal.

El estudio dinámico de los polinomios cuadráticos de la forma  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$  resulta, en cierta forma más sencillo, si escogemos un polinomio  $Q$  que guarde las mismas propiedades de  $P$ , esto se establece en la siguiente definición.

Los polinomios cuadráticos de la forma  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$  son topológicamente conjugados a polinomios de la forma  $f_c(z) = z^2 + c$ , la conjugación topológica es un homeomorfismo del plano complejo o una función afín de la forma  $az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$  (véase Gamaliel [13], pág. 8). La ventaja es que estos últimos están parametrizados por el campo  $\mathbb{C}$ , además encontrar los puntos fijos de  $P$  se reduce a encontrar los puntos fijos de  $f_c$  es decir, encontrar las raíces del polinomio  $z^2 - z + c$ , las cuales son:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Para los siguientes resultados sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función racional de la forma  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios de grado  $n \geq 2$  con coeficientes complejos y sin factores comunes.

### Definición 1.8.

Si  $z$  es un punto fijo de  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  en  $\mathbb{C}$  y la derivada  $f'(z)$  esta definida, se tiene que

- a)  $z$  es un punto fijo **atractivo** si  $|f'(z)| < 1$
- b)  $z$  es un punto fijo **repelente** si  $|f'(z)| > 1$  y
- c)  $z$  es un punto fijo **indiferente** si  $|f'(z)| = 1$ .

Las siguientes proposiciones son necesarias en la comprensión de los teoremas, lemas y ejemplos que se muestran en el presente capítulo, para las cuales no se proporcionará su demostración, sin embargo el lector interesado puede consultar Falconer [10], capítulo 14.

**Proposición 1.1.** (Falconer [10], Proposition 14.2)

Sea  $f(z)$  un polinomio. El conjunto de Julia lleno  $K_f$  y el conjunto de Julia  $J_f$  son subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{C}$  con  $J_f \subset K_f$ . Además  $J_f$  tiene interior vacío.

**Proposición 1.2.** (Falconer [10], Proposition 14.3)

El conjunto de Julia  $J_f$  es totalmente invariante bajo  $f$ , es decir  $f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f)$ .

**Corolario 1.2.** (Falconer [10], Corollary 14.8)

- a) Lo siguiente se tiene para todo  $z \in \mathbb{C}$  con a lo más una excepción: Si  $U$  es un conjunto abierto intersecando a  $J_f$ , entonces  $f^{-k}(z)$  interseca a  $U$  para infinitos valores de  $k$ .
- b) Si  $z \in J_f$ , entonces  $J_f$  es la clausura de  $\cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ .

**Teorema 1.3.** (Falconer [10], Teorema 14.10)

Si  $f$  es un polinomio,  $J_f$  es la clausura de los puntos periódicos repelentes de  $f$ .

**Definición 1.9.**

Si  $w$  es un punto fijo atractivo de  $f$ , la **cuenca de atracción de  $w$**  es el conjunto

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow w \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

En el plano complejo ampliado  $\hat{\mathbb{C}}$  se define la cuenca de atracción de  $\infty$  como

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty\}$$

**Lema 1.1.** (Falconer [10], Lemma 14.11)

Sea  $w$  un punto fijo atractivo de  $f$ . Entonces  $\partial A(w) = J_f$ , también se cumple si  $w = \infty$ .

**Definición 1.10.**

El **Conjunto de Mandelbrot  $M$**  se define como el conjunto de parámetros  $c$  para los cuales el conjunto de Julia asociado a  $f_c(z) = z^2 + c$  es conexo, es decir

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\}.$$

Esta definición conocida también como *Definición clásica de  $M$* , no es muy utilizada para graficar dicho conjunto, en vez de eso se proporciona una definición equivalente, la cual es más útil para propósitos computacionales, pues asegura cuándo un parámetro  $c$  está en  $M$ , para demostrar esta equivalencia es necesario conocer el efecto de  $f_c^{-1}$  sobre curvas suaves, la cual se muestra en el siguiente lema.

**Definición 1.11.**

En el plano complejo, una **curva suave** representará una curva diferenciable, si además la curva es cerrada y no tiene puntos de autointersección se llamará un **lazo**, las regiones del plano complejo  $\mathbb{C}$  dentro y fuera del lazo se llamarán el interior y exterior del lazo respectivamente. Una **figura de ocho** es una curva suave, cerrada con un único punto de autointersección.

**Lema 1.2.** (Falconer [10], Lemma 14.13)

Sea  $C$  un lazo en el plano complejo.

- a) Si  $c$  está dentro de  $C$ , entonces  $f_c^{-1}(C)$  es un lazo, con la imagen inversa del interior de  $C$  como el interior de  $f_c^{-1}(C)$ .
- b) Si  $c$  está sobre  $C$ , entonces  $f_c^{-1}(C)$  es una figura de ocho con autointersección en  $0$ , tal que la imagen inversa del interior de  $C$  es el interior de los dos lazos.
- c) Si  $c$  está fuera de  $C$ , entonces  $f_c^{-1}(C)$  consiste en dos lazos disjuntos, con la imagen inversa del interior de  $C$  como el interior de los dos lazos.

*Bosquejo de la demostración*

a) Sean  $c$  un punto en el interior del lazo  $C$  y  $z$  un punto sobre  $C$ , considere un rayo a partir de  $c$ , siendo  $z_0$  la única intersección entre el lazo  $C$  y el rayo, tal como se muestra en la Figura 12. La imagen bajo  $f_c^{-1}(z)$  de este rayo son dos rayos a partir de  $0$ , la imagen de  $z_0$  son dos valores  $f_c^{-1}(z_0)$  simétricos respecto al origen.

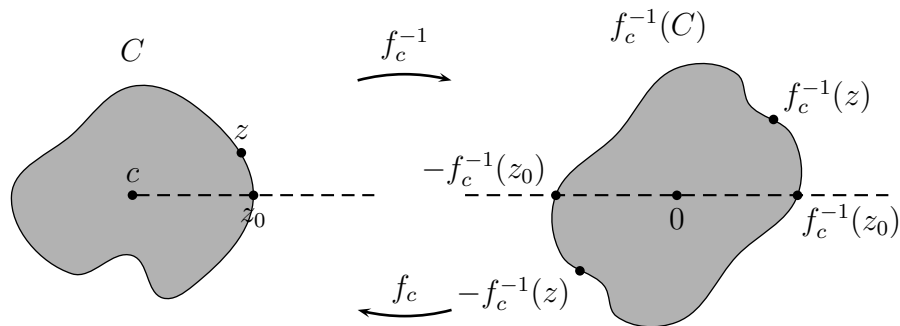


Figura 12. Lema 1.2, caso a.

El lugar geométrico determinado por  $f_c^{-1}(z)$  cuando  $z$  se mueve alrededor de  $C$  es una curva suave cerrada cuando  $z \neq c$ , determinada de la siguiente manera:

Cuando  $z$  recorre  $C$  empezando en  $z_0$ ,  $f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave desde  $f_c^{-1}(z_0)$  hasta  $-f_c^{-1}(z_0)$ . Al mismo tiempo la otra raíz  $-f_c^{-1}(z)$  determina una curva suave desde  $-f_c^{-1}(z_0)$  hasta  $f_c^{-1}(z_0)$ , siendo esta curva simétrica respecto al origen a la curva anterior, pues una

raíz es la negativa de la otra. De esta manera el lugar geométrico determinado por  $f_c^{-1}(z)$  cuando  $z \in C$  es una curva cerrada.

Como  $c \notin C$ , se sigue que  $0 \notin f_c^{-1}(C)$ , así  $f'_c(z) \neq 0$  sobre  $f_c^{-1}(C)$  y de esta manera aplicando el teorema de la función inversa,  $f_c$  es localmente una función inyectiva sobre  $f_c^{-1}(C)$ .

Para demostrar que  $f_c^{-1}(C)$  es un lazo se razona por contradicción, si  $f_c^{-1}(C)$  es una curva cerrada que no es un lazo, entonces existe un punto  $z_{-1} = f_c^{-1}(z)$  de autointersección para algún  $z \in C$ , como se muestra en la Figura 13, ya que  $z_{-1}$  es un punto de autointersección en  $f_c^{-1}(C)$  y  $f_c$  es localmente inyectiva sobre  $f_c^{-1}(C)$ , se sigue que  $z$  debe ser un punto de autointersección de  $C$ , contradiciendo el hecho de que  $C$  sea un lazo.

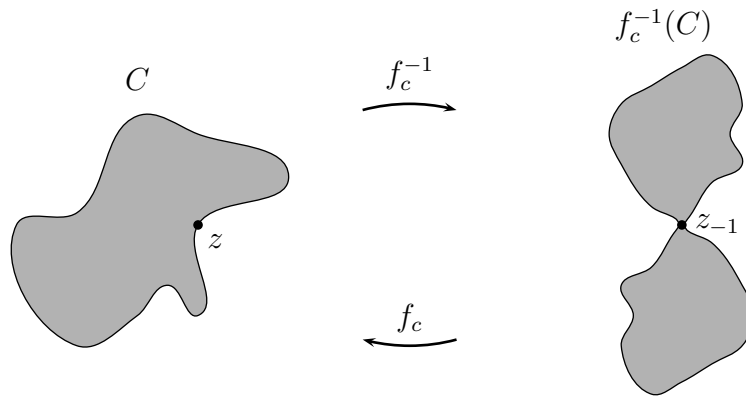


Figura 13. Si  $f_c^{-1}(C)$  es una curva cerrada que no es un lazo.

Es decir, la contradicción surge al considerar vecindades alrededor de  $z$  y  $z_{-1}$ , sean  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  arcos que contienen al punto  $z_{-1}$ , como se muestra la Figura 14. Ya que la imagen bajo  $f_c$  de un arco que contenga al punto  $z_{-1}$ , es un arco  $f_c(\alpha_i)$  que contiene al punto  $z$  y como  $f_c$  es localmente inyectiva sobre  $f_c^{-1}(C)$ , esto implica que los arcos  $f_c(\alpha_i)$  sean distintos en todos sus puntos, excepto en el punto  $z$ , siendo  $z$  un punto de autointersección de  $C$ , lo cual es una contradicción. Así  $f_c^{-1}(C)$  es un lazo.

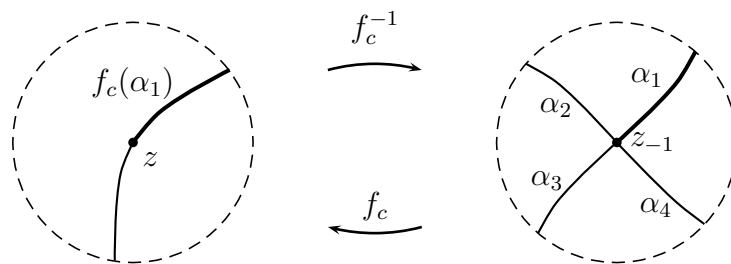


Figura 14. Vecindades alrededor de  $z$  y  $z_{-1}$ .

Como  $f_c$  es una función continua que lleva el lazo  $f_c^{-1}(C)$  en el lazo  $C$ ,  $f_c$  lleva el interior y exterior de  $f_c^{-1}(C)$  en el interior y exterior de  $C$  respectivamente, se sigue que  $f_c^{-1}$  lleva el interior y exterior de  $C$  en el interior y exterior de  $f_c^{-1}(C)$  respectivamente, pues de lo contrario se contradice la continuidad de  $f_c$ .

b) Sea  $c$  un punto sobre el lazo  $C$  y considere un rayo a partir de  $c$ , de manera que  $c$  sea el único punto de intersección entre el rayo y el lazo  $C$ . La imagen bajo  $f_c^{-1}$  de este rayo son dos rayos a partir de  $0$  y la imagen de  $c$  es  $0$ , tal como se muestra en la Figura 15.

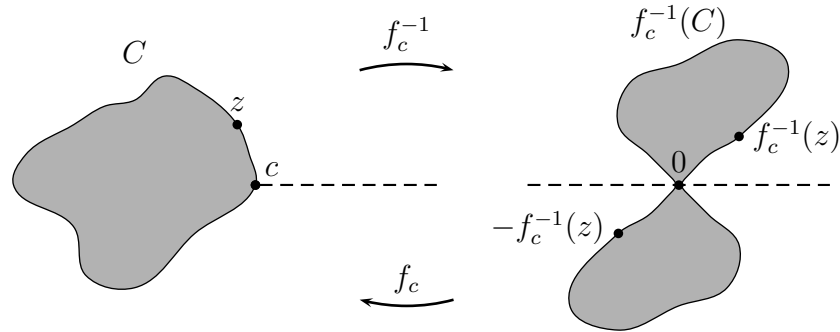


Figura 15. Lema 1.2, caso b.

Sea  $z$  un punto en  $C$  y considere los dos valores de  $f_c^{-1}(z)$ . Al variar  $z$  alrededor de  $C$  tiene que  $f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave, cuando  $z \neq c$ , de la siguiente manera:

Cuando  $z$  se aleja de  $c$ ,  $f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave a partir de  $0$  y cuando  $z$  se aproxima a  $c$  nuevamente (después de haber recorrido el lazo  $C$  por primera vez) la curva suave se cierra en  $0$  nuevamente. Al mismo tiempo la raíz  $-f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave, simétrica respecto al origen a la anterior.

Para demostrar que  $f_c^{-1}(C)$  es una figura de ocho considere vecindades alrededor de  $c$  y su imagen  $0$ , como se muestra en la Figura 16.

A diferencia del anterior caso la función  $f_c$  no es localmente inyectiva sobre  $f_c^{-1}(C)$ , pues  $0 \in f_c^{-1}(C)$  y  $f'_c(z) = 0$  cuando  $z = c$ , sin pérdida de generalidad considere el caso en el que  $f_c(\alpha_1) = f_c(\alpha_4)$  y  $f_c(\alpha_2) = f_c(\alpha_3)$ , de esta manera la imagen bajo  $f_c$  de algún punto  $v \in \alpha_1$  es también la imagen bajo  $f_c$  de algún punto  $w \in \alpha_4$ .

c) Sea  $c$  un punto en el exterior del lazo  $C$  y considere un rayo a partir de  $c$ , de manera que no corte al lazo  $C$ , haga coincidir el rayo con el eje real de manera que el punto  $c$  coincida con el origen, de esta manera la imagen bajo  $f_c^{-1}$  del anterior rayo son dos rayos a partir de  $0$  sobre el eje real, tal como se muestra en la Figura 17.

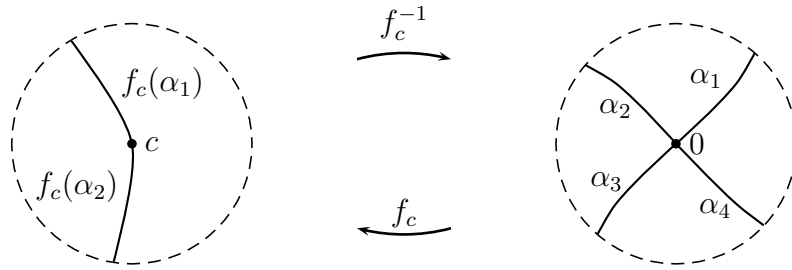


Figura 16. Vecindades alrededor de  $c$  y su imagen  $0$ .

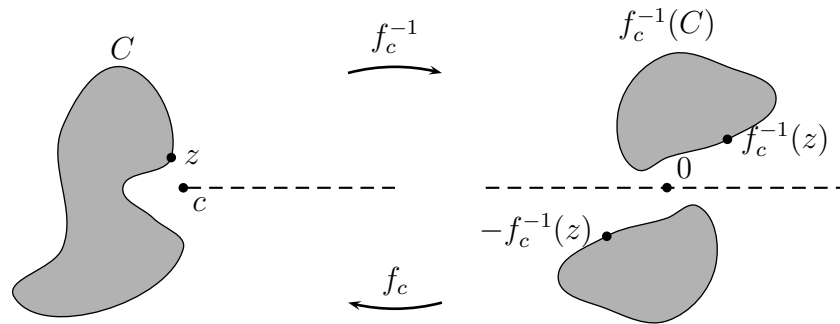


Figura 17. Lema 1.2, caso  $c$ .

Sea  $z$  un punto en  $C$  y considere los dos valores de  $f_c^{-1}(z)$ . Al variar  $z$  alrededor de  $C$  se tiene que  $f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave, de manera tal que cuando  $z$  recorre  $C$  completamente, la raíz  $f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave por encima del eje real y al mismo tiempo la raíz  $-f_c^{-1}(z)$  traza una curva suave por debajo del eje real, siendo esta curva suave simétrica respecto al origen a la curva anterior.

Las curvas simétricas obtenidas por las raíces  $f_c^{-1}(z)$  son disjuntas pues se encuentran en hemisferios diferentes del plano. En el caso en que una de estas curvas interseque al eje real, se implicaría que exista un punto  $z \in C$  de intersección entre el lazo  $C$  y el rayo.

Análogamente al primer caso  $c \notin C$  y se tiene que  $0 \notin f_c^{-1}(C)$  así  $f'_c(z) \neq 0$  sobre el lazo  $f_c^{-1}(C)$ , de esta manera  $f_c$  es localmente una función inyectiva sobre el lazo  $f_c^{-1}(C)$  y del mismo modo, se demuestra que las curvas determinadas por  $f_c^{-1}(z)$  son lazos con la imagen bajo  $f_c$  del interior de los lazos  $f_c^{-1}(C)$  como el interior del lazo  $C$ .  $\square$

Para la demostración del teorema 1.4 se hará uso de las dos siguientes proposiciones

**Proposición 1.3.** (Beardon [4], Proposición 5.1.3) *Un dominio  $D$  es simplemente conexo si y sólo si su complemento es conexo.*

**Proposición 1.4.** (Beardon [4], Proposición 5.1.4) *Un dominio  $D$  es simplemente conexo si y sólo si su frontera  $\partial D$  es conexa.*

El siguiente resultado es conocido como “Teorema fundamental del conjunto de Mandelbrot”, ya que da una caracterización de  $M$  en términos de la órbita de 0 bajo  $f_c$ .

**Teorema 1.4.** (Falconer [10], Teorema 14.14)

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ es acotada}\} \quad (4)$$

$$= \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty\} \quad (5)$$

*Demostración.*

Las definiciones (4) y (5) son equivalentes. El objetivo de la demostración es mostrar que la definición (4) o (5) es equivalente a la definición clásica de  $M$ , esta es:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_{f_c} \text{ es conexo}\}$$

Se demostrará que si  $\{f_c^k(0)\}_{k \geq 1}$  es acotada, entonces  $J_{f_c}$  es conexo.

Sea  $C$  una circunferencia lo suficientemente grande, tal que: 1º todos los puntos de  $\{f_c^k(0)\}_{k \geq 1}$  caigan dentro de  $C$ , 2º  $f_c^{-1}(C)$  este en el interior a  $C$  y 3º los puntos fuera de  $C$  se iteren a infinito bajo  $f_c$ .<sup>e</sup>

Ya que  $c = f_c(0)$  está dentro de  $C$ , el Lema 1.2 parte a) asegura que  $f_c^{-1}(C)$  es un lazo y tal como se consideró esta contenido en el interior de  $C$ . Además  $f_c(c) = f_c^2(0)$  está dentro de  $C$  y como  $f_c$  lleva el exterior de  $f_c^{-1}(C)$  en el exterior de  $C$ , entonces  $c$  no puede estar en el exterior de  $f_c^{-1}(C)$ . Aplicando nuevamente el Lema 1.2 parte a),  $f_c^{-2}(C)$  es un lazo contenido en el interior del lazo  $f_c^{-1}(C)$  <sup>f</sup>, continuando de esta manera se obtiene una sucesión decreciente de lazos  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k \geq 0}$ , cada uno conteniendo al próximo en su interior, como se muestra en la Figura 18.

Sea  $F$  la intersección de los conjuntos cerrados formados por puntos sobre o en el interior de todos los lazos  $f_c^{-k}(C)$ . Si  $z \in \mathbb{C} \setminus F$  alguna iterada  $f_c^k(z)$  para algún  $k$ , cae fuera de  $C$  y así  $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ . De esta manera aplicando la Definición 1.9 con  $\infty$  como punto atractivo, se tiene:

$$\begin{aligned} A(\infty) &= \{z \in \mathbb{C} : f_c^k(z) \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty\} \\ &= \mathbb{C} \setminus F \end{aligned}$$

Por el Lema 1.1 el conjunto de Julia de  $f_c$  es la frontera de  $A(\infty) = \mathbb{C} \setminus F$  que es la misma frontera de  $F$ . Como  $F$  es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos cerrados simplemente conexos,  $F$  es simplemente conexo y por tanto tiene frontera conexa. De esta manera  $J_{f_c}$  es conexo.

Se demostrará que si  $J_{f_c}$  es conexo, entonces  $\{f_c^k(0)\}_{k \geq 1}$  es acotada.

---

<sup>e</sup>Siempre es posible escoger un radio para el cual la órbita de un punto  $z_0$  diverja bajo  $f_c$ , Peitgen [21] sección 13.4 pág 738, lo llama “el punto de no retorno” este valor es  $r(c) = \max(|c|, 2)$ .

<sup>f</sup>El hecho de que este lazo  $f_c^{-2}(C)$  este contenido en el lazo  $f_c^{-1}(C)$ , se sigue de que inicialmente el lazo  $f_c^{-1}(C)$  se consideró contenido en el lazo  $C$ .

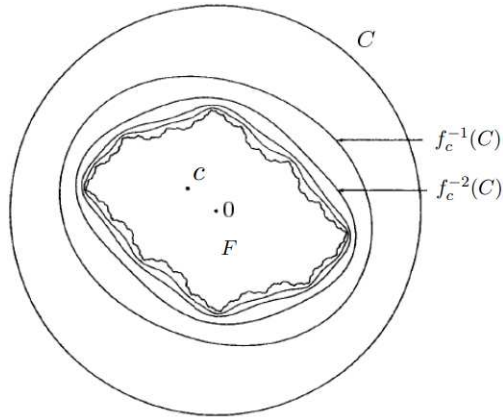


Figura 18. Lazos  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k \geq 0}$ .

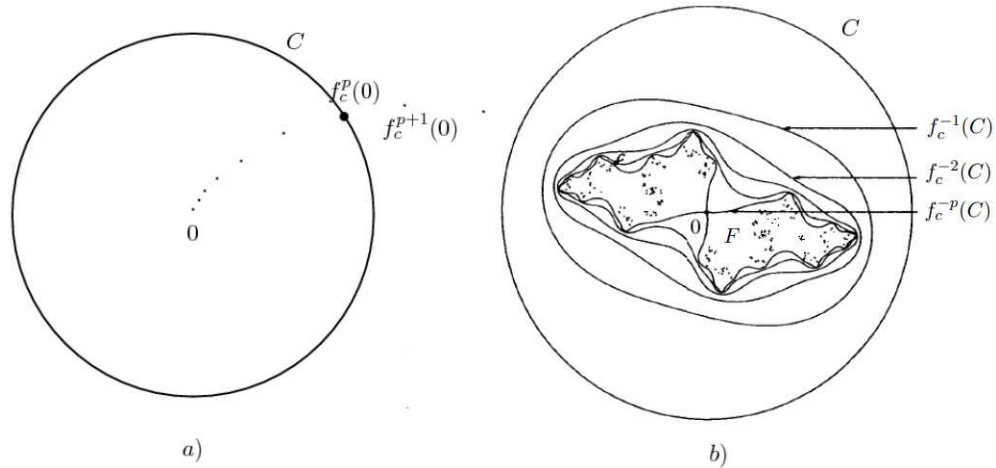


Figura 19. a) Órbita no acotada, b) Lazos  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k \geq 0}$ .

Equivalentemente se probará que si  $\{f_c^k(0)\}_{k \geq 1}$  es no acotada, entonces  $J_{f_c}$  es desconexo. Sea  $C$  una circunferencia suficientemente grande tal que: 1º  $f_c^{-1}(C)$  sea interior a  $C$  y 2º los puntos fuera de  $C$  se iteren a infinito bajo  $f_c$ . En este caso para algún  $p$  el punto  $f_c^p(0) = f_c^{p-1}(c) \in C$ , tal como se muestra en la Figura 19 a), con  $f_c^k(0)$  dentro o fuera de  $C$ , de acuerdo a si  $k$  es menor o mayor que  $p$  respectivamente<sup>g</sup>.

Como en la primera parte se construye una sucesión decreciente de lazos  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k \geq 0}$ , cada uno conteniendo al próximo en su interior como se muestra en la Figura 19 b). El argumento anterior se rompe cuando se obtiene el lazo  $f_c^{1-p}(C)$ , ya que  $f_c^{p-1}(c) \in C$  de donde  $c \in f_c^{1-p}(C)$  y por el Lema 1.2 parte b),  $f_c^{-p}(C)$  es una figura de ocho contenida en el lazo  $f_c^{1-p}(C)$  con  $f_c$  llevando el interior de cada mitad de  $f_c^{-p}(C)$ , en el interior de  $f_c^{1-p}(C)$ .

<sup>g</sup>Obsérvese que con esta construcción se tiene que la órbita de cero es no acotada.

El conjunto de Julia  $J_{f_c}$  está contenido en el interior de cada mitad de  $f_c^{-p}(C)$ , ya que puntos fuera de  $f_c^{-p}(C)$  se iteran a infinito bajo  $f_c$ . Como  $c$  está por fuera de  $f_c^{-p}(C)$ , aplicando el Lema 1.2 parte c),  $f_c^{-p-1}(C)$  desconecta a  $J_{f_c}$ , pues son dos lazos disjuntos conteniendo al conjunto de Julia de  $f_c$ . Así  $J_{f_c}$  es desconexo.  $\square$

El siguiente resultado es consecuencia directa del teorema anterior

**Corolario 1.5.**

*El conjunto de Julia para  $f_c(z) = z^2 + c$  es conexo si y sólo si la órbita de cero es un conjunto acotado.*

**Ejemplo 1.4.** *El conjunto de Julia para  $f_i(z) = z^2 + i$  es conexo.*

*En efecto, la órbita de cero para  $f_i(z)$  es*

$$f_i(0) = i, \quad f_i(i) = -1 + i, \quad f_i(-1 + i) = -i, \quad f_i(-i) = -1 + i, \quad \dots$$

*la órbita de cero es la sucesión  $\{0, i, -1 + i, -i, -1 + i, -i, \dots\}$ , la cual es una sucesión acotada, así por el corolario anterior el conjunto de Julia para  $f_i$  es conexo.*

El conjunto de Julia para  $f_i(z) = z^2 + i$  es el mostrado en la Figura 20, Falconer [10] pág 232, menciona que el conjunto de Julia para  $f_c(z) = z^2 + c$  es una dendrita<sup>h</sup>, siempre que algún término de la órbita de cero sea un punto periódico (de orden diferente a 1), i.e.  $f_c^k(0) = f_c^{k+q}(0)$  para enteros positivos  $k$  y  $q$ , como en efecto se tiene para el Ejemplo 1.4 con el punto  $z = -1 + i$ .

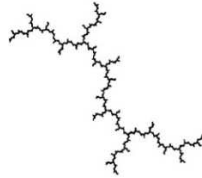


Figura 20. Conjunto de Julia para  $f_i(z) = z^2 + i$ .

**Ejemplo 1.5.** *Para  $f(z) = z^2 - 2$  se tiene que el conjunto de Julia es un subconjunto de la recta real, este es el conjunto conexo  $[-2, 2]$ .*

*La órbita de cero es  $\{0, -2, 2, 2, \dots\}$  la cual es efectivamente acotada, luego por el Corolario 1.5 se tiene que  $J_f$  es un conjunto conexo.*

*Para demostrar que este conjunto de Julia es en efecto  $[-2, 2]$ , considere lo siguiente:*

---

<sup>h</sup>Continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples.

Los puntos fijos de  $f$  son dados por  $z^2 - 2 = z$ , así estos son  $z = -1, 2$ . Como  $f'(z) = 2z$ , tenemos que  $|f'(2)| = 4 > 1$ , así  $2$  es un punto fijo repelente. El Teorema 1.3 asegura que  $z = 2 \in J_f$  así por el Corolario 1.2 b), el conjunto de Julia es la clausura de  $\cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(2)$ . Si  $w \in [-2, 2]$  entonces  $f^{-1}(w) = (w + 2)^{\frac{1}{2}} \in [-2, 2]$ , luego  $f^{-k}(w) \in [-2, 2]$ , y en particular  $f^{-k}(2) \in [-2, 2]$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ . De esta manera el conjunto de Julia está contenido en la clausura de  $[-2, 2]$ , por consiguiente  $J_f \subset [-2, 2]$ .

Como  $f(0) = -2$ ,  $f^2(0) = f(-2) = 2$  y  $z = 2$  es un punto fijo de  $f$ , se sigue que  $f^k(0) = 2$  para  $k = 2, 3, \dots$ , luego  $f^k(0) \rightarrow \infty$  y de esta manera, por el Teorema 1.4  $z = -2 \in M$ , luego el conjunto de Julia es conexo. Como  $z = 2$  y  $z = -2 \in J_f$ , ya que  $f^{-1}(2) = \{2, -2\}$ , y el conjunto de Julia es un subconjunto conexo del intervalo  $[-2, 2]$ , conteniendo los puntos finales  $z = -2$  y  $z = 2$ , entonces  $J_f = [-2, 2]$ .

### Definición 1.12.

Sea  $\{X, f\}$  un Sistema Dinámico, un **punto periódico de  $f$**  es un punto  $x \in X$  tal que  $f^n(x) = x$  para algún  $n$ , el menor entero  $n$  para el cual se cumple esta igualdad, es llamado el **periodo** de  $x$ . La órbita de un punto periódico de  $f$  es llamada un **ciclo**.

### Definición 1.13.

Un **punto periódico** de  $f$  de periodo  $n$  es **atractivo** si es un punto fijo atractivo de  $f^n$ . Un ciclo de periodo  $n$  es un **ciclo atractivo de  $f$**  si el ciclo contiene un punto periódico atractivo de  $f$  de periodo  $n$ .

Una definición topológica equivalente a la de punto fijo atractivo dada en la Definición 1.8 es:

Sea  $\{X, f\}$  un sistema dinámico y  $x_f \in X$  un punto fijo de  $f$ . El punto  $x_f$  se llama punto fijo atractivo de  $f$ , si  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $f(B(x_f, \epsilon)) \subset B(x_f, \epsilon)$  y  $f$  restringida a  $B(x_f, \epsilon)$  es una contracción.

**Ejemplo 1.6.** En el Ejemplo 1.4  $\{-1 + i, -i\}$  es un ciclo periódico de orden 2, pero no es ciclo atractivo puesto que ni  $z = -1 + i$ , ni  $z = -i$  son puntos periódicos atractivos de período 2, para estos se tiene que  $|f_i^2(-1 + i)| = |2((-1 + i)^2 + i)2(-1 + i)| = |4 + 4i| > 1$  y  $|f_i^2(-i)| = |2((-i)^2 + i)2(-i)| = |4i + 4| > 1$  respectivamente.

### Teorema 1.6.

La función  $f_c(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , tiene puntos fijos atractivos si y sólo si  $|1 + \sqrt{1 - 4c}| < 1$  o  $|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$ , donde la raíz cuadrada designa la función raíz cuadrada principal<sup>1</sup>.

*Demostración.*

El punto  $z_0$  es un punto fijo para  $f_c$  si y sólo si  $f_c(z_0) = z_0$ , es decir si y sólo si  $z_0^2 - z_0 + c = 0$ , así las soluciones son

$$z_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad \text{o} \quad z_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

<sup>1</sup>Entiéndase el valor  $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$  donde  $r$  es el módulo del complejo  $z$  y  $\theta$  es el argumento de  $z$ .

Donde nuevamente la raíz cuadrada designa la función raíz cuadrada principal. Ahora,  $z_0$  es un punto atractivo si y sólo si  $|f'_c(z_0)| = |2z_0| < 1$ , combinando estos resultados con las soluciones para  $z_0$ , se obtiene lo que se quiere demostrar.  $\square$

## 2. SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES CONSTRUIDOS A PARTIR DE SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

En este capítulo se muestran dos teoremas en los cuales, a partir de un Sistema Dinámico de la forma  $\{\mathbb{C}, f_c\}$  o  $\{\hat{\mathbb{C}}, f_c\}$ , se obtiene un Sistema Iterado de Funciones cuyo atractor es el conjunto de Julia del Sistema Dinámico dado.

Si  $c \notin M$  por el Teorema 1.4,  $f_c^k(0) \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , así  $f_c$  puede o no contener un ciclo periódico atractivo. Se conjetura (Falconer [10], pág. 228) que el conjunto de parámetros  $c$  para los cuales  $f_c$  tiene un ciclo periódico atractivo coincide con el interior de  $M$ .

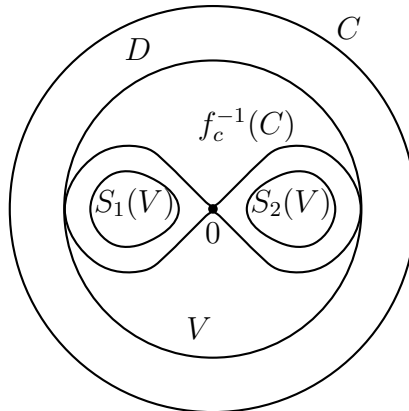
Suponga que  $c$  está por fuera de  $M$ , así  $f_c$  no tiene puntos periódicos atractivos y por definición  $J(f_c)$  es no conexo, de hecho  $J(f_c)$  es totalmente desconexo. El siguiente teorema asegura que  $J(f_c)$  se puede expresar como la unión disjunta  $J = S_1(J) \cup S_2(J)$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son las ramas de  $f_c$  sobre  $J$ .

**Teorema 2.1.** (Falconer [10], Teorema 14.15)

Suponga que  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2,475\dots$ , entonces  $J(f_c)$  es totalmente desconexo y es el atractor (en el sentido del Teorema 1.1) de las contracciones dadas por las ramas  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z - c}$ .

*Demostración.*

Sea  $C$  la circunferencia  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |c|\}$  y  $D$  su interior  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |c|\}$ . Como  $c \in \mathbb{C}$  se tiene por el Lema 1.2 que  $f_c^{-1}(C)$  es una figura de ocho con autointersección en 0, tal como se muestra en la Figura 21.



$$f_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{\frac{1}{2}} : 0 \leq \theta \leq 4\pi\}.$$

Figura 21. Teorema 2.1.

Es una parametrización de la curva suave  $f_c^{-1}(C)$ , observe que la mayor distancia entre los dos puntos más alejados de esta curva es  $2\sqrt{2c}$ .

Si  $|z| > |c|$  y  $|c| > 2$  se tiene que

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &\geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \\ &> |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) \\ &> |c| \end{aligned}$$

Así si el punto  $z$  está por fuera de  $C$ , la imagen bajo  $f_c$  está también por fuera de  $C$ . Como se mostró en el Lema 1.2 parte b), la función  $f_c$  lleva el interior de cada uno de los lazos de la figura de ocho  $f_c^{-1}(C)$  en el interior del lazo  $C$ .

Defina  $S_1, S_2 : D \rightarrow D$  como las ramas de  $f_c$  dentro de cada lazo de la figura de ocho, entonces  $S_1(D)$  y  $S_2(D)$  son los interiores de la figura de ocho  $f_c^{-1}(C)$ .

Sea  $V$  el disco  $\{z : |z| < |2c|^{\frac{1}{2}}\}$ , para este se tiene que su adherencia contiene exactamente a la figura de ocho  $f_c^{-1}(C)$ , puesto que como se había mencionado la mayor distancia entre dos puntos más alejados de  $f_c^{-1}(C)$  es  $2\sqrt{2c}$ . De esta manera  $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$ . Se sigue que  $S_1(V), S_2(V) \subset V$  con  $S_1(\bar{V})$  y  $S_2(\bar{V})$  disjuntos, ya que  $c$  esta por fuera de  $V$ .

Para  $i = 1, 2$  se tiene:

$$|S_i(z_1) - S_i(z_2)| = |(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} - (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}| = \frac{|z_1 - z_2|}{|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}|}.$$

Se sigue que si  $z_1, z_2 \in \bar{V}$ , entonces:

$$\frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}.$$

La explicación de esta cota superior es porque el valor máximo del cociente

$$\frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} = \frac{1}{|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}|}$$

sucede cuando  $z_1 \rightarrow z_2$ , luego escribiendo  $z$  en vez de  $z_1$  y  $z_2$ , tenemos

$$\frac{1}{|(z - c)^{\frac{1}{2}} + (z - c)^{\frac{1}{2}}|} = \frac{1}{|2(z - c)^{\frac{1}{2}}|} = \frac{1}{2}(|z - c|)^{-\frac{1}{2}}$$

Ahora como  $|z - c| \geq |z| - |c|$  y  $|z - c| = |c - z|$ , entonces:

$$\begin{aligned}
|c - z| &\geq |c| - |z| \\
(|c - z|)^{\frac{1}{2}} &\geq (|c| - |z|)^{\frac{1}{2}} \\
2(|c - z|)^{\frac{1}{2}} &\geq 2(|c| - |z|)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{1}{2(|c - z|)^{\frac{1}{2}}} &\leq \frac{1}{2(|c| - |z|)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Ya que  $z \in \overline{V}$ , se tiene que  $|z| < |2c|^{\frac{1}{2}}$ , de esta manera

$$\frac{1}{2(|c| - |z|)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \text{ es la cota superior mostrada anteriormente}$$

A partir de  $\frac{1}{2}(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} < 1$  se tiene que  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$  el cual es el valor mostrado en la hipótesis inicial.

Si  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$  se tiene que

$$\frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} < \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} < 1$$

De esta manera  $S_1$  y  $S_2$  son contracciones sobre el disco  $\overline{V}$ . Por el Teorema 1.1 existe un único compacto no vacío  $F \subset \overline{V}$  llamado atractor, para el cual

$$S_1(F) \cup S_2(F) = F$$

Ya que  $S_1(\overline{V})$  y  $S_2(\overline{V})$  son disjuntos, se sigue que  $S_1(F)$  y  $S_2(F)$  son disjuntos también, implicando que  $F$  sea desconexo.

El conjunto  $F$  coincide con el conjunto de Julia  $J_{f_c}$ , ya que como  $\overline{V}$  contiene al menos un punto  $z \in J_{f_c}$  por el Corolario 1.2 parte b), se tiene que  $J_f$  es la clausura de  $\cup_{k=i}^{\infty} f_c^{-k}(z)$  y además esta contenido en  $\overline{V}$ ,  $J_{f_c}$  es un subconjunto compacto no vacío de  $\overline{V}$  (Proposición 1.1), satisfaciendo  $J_{f_c} = f_c^{-1}(J_{f_c})$ , además  $J_{f_c} = S_1(J_{f_c}) \cup S_2(J_{f_c})$  (Proposición 1.2). De esta manera  $J_{f_c} = F$  es el único conjunto compacto no vacío que satisface  $S_1(F) \cup S_2(F) = F$ .  $\square$

**Ejemplo 2.1.** Para la función  $f(z) = z^2 + 2,5$  se tiene que  $|2,5| = 2,5 > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ , luego el Teorema 2.1 asegura que el SIF  $\{\mathbb{C}; \sqrt{z - 2,5}, -\sqrt{z - 2,5}\}$  tiene como atractor al conjunto de Julia asociado a  $f(z) = z^2 + 2,5$ , el cual se muestra a la izquierda de la Figura 22, la figura de en medio muestra una ampliación de la región especificada a la izquierda y la figura de la derecha es también una ampliación de la región especificada en la figura de en medio.

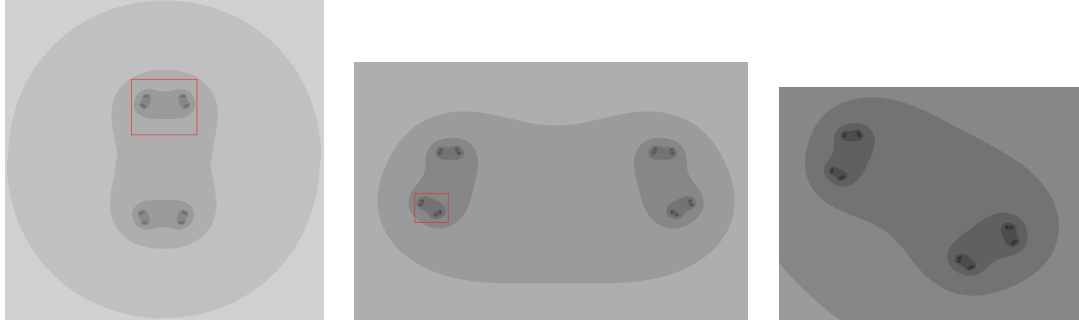


Figura 22. Conjunto de Julia para  $f(z) = z^2 + 2,5$ .

## 2.1. Un *SIF* para el Sistema Dinámico $\{\mathbb{R}; ax(1-x)\}$ , $a \in \mathbb{R}^+$ .

¿Es posible encontrar un *SIF* para el cual el atractor coincida con el conjunto de puntos atrapados del Sistema Dinámico  $\{\mathbb{R}; ax(1-x)\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ? si es así ¿Cómo son las contracciones y cuál es la relación con los conjuntos de Julia asociados a la familia  $f(z) = z^2 + c$ ?

El proceso de construcción de este *SIF* es similar al anterior en el cual se quería construir un *SIF* cuyo atractor fuera el conjunto de Julia asociado a  $f(z) = z^2 + c$ , en este caso se requería que el conjunto de Julia fuera totalmente desconexo, similarmente sucede en este caso, es decir se necesita que el conjunto de puntos atrapados de  $f_a(x) = ax(1-x)$  sea totalmente desconexo y esto sucede cuando  $a > 4$ , de esta manera el vértice de la parábola  $f_a(x) = ax(1-x)$  esta por encima de la recta  $y = 1$  como se muestra en la Figura 23.

Para este propósito hallamos los puntos de intersección entre la recta  $y = 1$  y la parábola, es decir resolvemos la ecuación  $f_a(x) = 1$

$$ax(1-x) = 1 \quad \text{de donde} \quad x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}}$$

Sea  $\lambda = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}}$ , de esta manera  $1 - \lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}}$ .

La función  $f_a$  lleva los intervalos  $[0, \lambda]$  y  $[1 - \lambda, 1]$  en el intervalo  $[0, 1]$  de forma biyectiva, luego las ramas de  $f_a$  (inversas en algún sentido, aunque debe mencionarse que la función  $f_a$  no es inyectiva) son

$$S_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{a}} \quad \text{y} \quad S_2(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{a}}$$

Las cuales llevan el intervalo  $[0, 1]$  en los intervalos  $[0, \lambda]$  y  $[1 - \lambda, 1]$  respectivamente.

Para  $i = 1, 2$  se tiene:  $|S'_i(x)| = \frac{1}{2a}(\frac{1}{4} - \frac{x}{a})^{-\frac{1}{2}}$ , luego  $\frac{1}{a} \leq |S'_1(x)| \leq \frac{1}{2a}(\frac{1}{4} - \frac{1}{a})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - a)^{-\frac{1}{2}}$  si  $0 \leq x \leq 1$ . Por el teorema de valor medio:

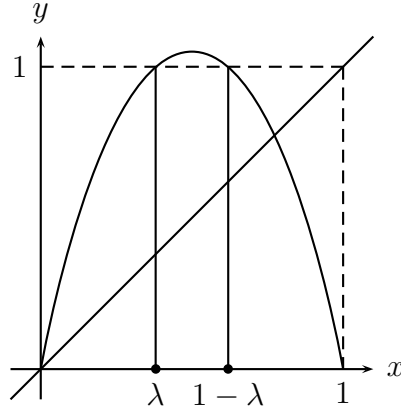


Figura 23. Construcción del  $SIF$  para  $|a| > 4$ .

$$\frac{1}{a}|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} - a\right)^{-\frac{1}{2}}|x - y|.$$

Para que las ramas  $S_i$  sean contracciones, se requiere que  $|\frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} - a)^{-\frac{1}{2}}| < 1$ , de donde  $|a| > 2 + \sqrt{5}$ .

De esta manera las ramas  $S_i$  son contracciones sobre  $[0, 1]$  y  $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$  es un  $SIF$  cuyo atractor es el conjunto de puntos atrapados del Sistema Dinámico Discreto  $\{\mathbb{R}; ax(1-x)\}$  cuando  $|a| > 2 + \sqrt{5}$ .

Los siguientes resultados se utilizarán en la demostración del Teorema 2.6.

**Teorema 2.2.**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \in \mathbb{H}(X)$ ,  $y \epsilon > 0$ . La nube (tal como se menciona en la Definición 1.2)  $N(A; \epsilon)$  es un conjunto abierto en  $X$ .

*Demostración.*

Sea  $x \in N(A; \epsilon)$ , entonces  $\exists a \in A$  tal que  $d(x, a) < \epsilon$ , claramente  $x \in B(a; \epsilon)$ . Obsérvese que  $B(a; \epsilon) \subseteq N(A; \epsilon)$ , pues  $y \in B(a; \epsilon)$  luego  $d(y, a) < \epsilon$  y como  $a \in A$  se sigue que  $y \in N(A; \epsilon)$ , así  $x$  es punto interior de  $N(A; \epsilon)$  y la nube  $N(A; \epsilon)$  es un conjunto abierto.  $\square$

**Teorema 2.3.**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente de compactos no vacíos de  $X$ , tales que  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ . Si existe un abierto  $O$  de  $X$  tal que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq O$ , entonces  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $A_N \subseteq O$ .

*Demostración.*

Como  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq O$  se tiene que  $X - O \subseteq X - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - A_n)$ . Como  $X - O$  es cerrado y  $X$  es compacto, entonces  $X - O$  es compacto y como cada  $A_n$  es compacto, se

sigue que  $A_n$  es cerrado y  $X - A_n$  es abierto, de modo que  $\{X - A_n\}_{n=1}^{\infty}$  es un recubrimiento abierto del compacto  $X - O$ , por tanto existen  $n_1, n_2, \dots, n_p$  tales que

$$X - O \subseteq \cup_{i=1}^p (X - A_{n_i}) = X - \cap_{i=1}^p A_{n_i} \quad \text{luego} \quad \cap_{i=1}^p A_{n_i} \subseteq O.$$

Sea  $N = \max\{n_1, \dots, n_p\}$  de modo que  $N \geq n_i$  para todo  $i = 1, \dots, p$  así  $A_N \subseteq A_{n_i}$  para todo  $i = 1, \dots, p$  y por tanto

$$A_N \subseteq \cap_{i=1}^p A_{n_i} \subseteq O$$

.

□

**Teorema 2.4.**

Si  $X$  es un espacio métrico compacto y  $\{A_n\}_n$  una sucesión decreciente en  $(\mathbb{H}(X), h)$ , tal que  $A_1 \supset A_2 \cdots \supset A_n \supset \cdots$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

*Demostración.*

Probaremos por definición de límite de una sucesión que: dado  $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ , tal que si  $n \geq N$  entonces

$$h(A_n, \cap_{n=1}^{\infty} A_n) < \epsilon$$

La anterior desigualdad es equivalente a afirmar que

$$1^\circ \quad A_n \subseteq N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon) \quad \text{y} \quad 2^\circ \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq N(A_n; \epsilon) \quad \text{véase Sabogal [22], Lema 3.22.}$$

Para demostrar  $1^\circ$ , es claro que  $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon)$  donde la nube  $N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon)$  es un conjunto abierto, según el Teorema 2.2, tómese  $N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon) = O$ , por el Teorema 2.3  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $A_N \subseteq O = N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon)$ . Luego si  $n \geq N$   $A_n \subseteq N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon)$ .

Para demostrar  $2^\circ$ , sea  $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$  así  $x \in A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y esto implica que  $d(x, A_n) = 0 < \epsilon$ . Luego  $x \in N(A_n; \epsilon)$ .

En conclusión si  $n \geq N$ ,

$$A_n \subseteq N(\cap_{n=1}^{\infty} A_n; \epsilon) \quad \text{y} \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq N(A_n; \epsilon).$$

□

**Teorema 2.5.** (Barnsley [1], Teorema 4.1)

Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico y  $X \subset Y$  compacto no vacío. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y tal que  $f(X) \supset X$ . Entonces la transformación  $W : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  definida por

$$W(A) = f^{-1}(A) \quad \forall A \in \mathbb{H}(X)$$

posee un punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$ , este es  $A = \cap_{n=0}^{\infty} f^{\circ(-n)}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(X)$ . Suponga que  $f$  obedece la condición adicional que  $f(O)$  es un subconjunto abierto del espacio métrico  $(f(X), d)$  siempre que  $O \subset X$  es un subconjunto abierto del espacio métrico  $(X, d)$ , entonces  $W$  es una transformación continua del espacio métrico  $(\mathbb{H}(X), h(d))$  en si mismo.

*Demostración.*

Primero se mostrará que la función  $W : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  esta bien definida.

Sea  $B \in \mathbb{H}(X)$ , así  $B \subset X \subset Y$  y como  $f : X \rightarrow Y$  se tiene que  $f^{-1}(B) \subset X$ . Al ser  $B$  compacto se tiene que  $B$  es cerrado en  $(X, d)$  y  $X \setminus B$  es abierto, por continuidad de  $f$  se tiene que  $f^{-1}(X \setminus B)$  es abierto

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(X \setminus (X \setminus B)) = X \setminus f^{-1}(X \setminus B)$$

Luego  $f^{-1}(B)$  es cerrado en el espacio métrico compacto  $(X, d)$  y  $f^{-1}(B)$  es compacto.

Ahora se mostrará que  $W$  tiene un punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$ .

Como  $f(X) \supset X$  se sigue que  $X \supset f^{-1}(X)$  y en general

$$X \supset f^{-1}(X) \supset f^{-2}(X) \supset \dots \supset f^{-n}(X) \supset \dots$$

Así  $\{f^{\circ(-n)}(X)\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión decreciente de compactos, la cual por el Teorema 2.4 converge a la intersección

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{\circ(-n)}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(X)$$

Para mostrar que  $A$  es punto fijo de  $f$ , se necesita mostrar que  $A = f(A)$  o equivalentemente  $f^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$  donde  $A_n = f^{\circ(-n)}(X)$  para  $n = 1, 2, \dots$

Se demostrará que  $f^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

Sea  $x \in f^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$  entonces  $f(x) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$  y  $f(x) \in A_n$  para todo  $n$ , luego  $x \in f^{-1}(A_n) = A_{n+1}$  y  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ .

Se demostrará que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq f^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$

Sea  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$  así  $x \in A_{n+1} = f^{-1}(A_n)$  para todo  $n$ , luego  $f(x) \in A_n$  para todo  $n$ , se sigue que  $x \in f^{-1}(A_n)$  para todo  $n$  y de esta manera  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$ .

Por lo tanto  $f^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$  y  $A$  es punto fijo de  $f$ .

La demostración de que  $W$  es una función continua puede encontrarse en Barnsley [3].  $\square$

El siguiente resultado muestra cómo construir un *SIF* a partir de un Sistema Dinámico de la forma  $\{\hat{\mathbb{C}}, f_c(z) = z^2 + c\}$ , donde la función  $f_c$  puede tener o no tener ciclo atractivo (en el sentido de la Definición 1.13). Obsérvese que este es un caso más general, pues el espacio es  $\hat{\mathbb{C}}$  la esfera de Riemann, donde  $\infty$  es un punto fijo atractivo.

**Teorema 2.6.** (Barnsley [1], Teorema 2.1)

Sea  $c \in \mathbb{C}$ . Suponga que el Sistema Dinámico  $\{\hat{\mathbb{C}}; f(z) = z^2 + c\}$  posee un ciclo atractivo  $\{z_1, z_2, \dots, z_p\} \subset \mathbb{C}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $X$  la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  con  $(p+1)$  bolas de radio  $\varepsilon$  removidas, centradas en cada punto del ciclo y en el infinito. La estructura

$$\{X; w_1(z) = \sqrt{z-c}, w_2(z) = -\sqrt{z-c}\}$$

es un SIF, donde la función  $W : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$ , definida por

$$W(K) = w_1(K) \cup w_2(K)$$

es continua con respecto a la métrica de Hausdorff sobre  $\mathbb{H}(X)$ . Además  $W$  posee un único punto fijo  $J_f$ , y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(K) = J_f \quad \forall K \in \mathbb{H}(X)$$

Estas conclusiones también se tienen si la órbita del origen  $\{f^{on}(O)\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $\infty^j$  y en este caso  $X = \hat{\mathbb{C}} \setminus B(\infty, \varepsilon)$ .

*Demostración.*

La demostración de la continuidad de  $W$  se encuentra en Barnsley [3]. Para probar que  $W$  posee un único punto fijo hacemos uso del Teorema 2.5, considere el límite  $A \in \mathbb{H}(X)$  de la sucesión decreciente de conjuntos  $\{W^{on}(X)\}_n$ , llamando

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{o(-n)}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(X)$$

Se tiene que  $W(A) = A$ . De Brolin [6] Lema 6.3, se sigue que  $A = J_f$  es el conjunto de Julia asociado a  $f$ .  $\square$

Una de las justificaciones por la cual se suprimen  $p+1$  bolas de radio  $\varepsilon$ , es para establecer la unicidad del punto fijo  $J_f$  tal como se establece en el Teorema 1.1, pues de lo contrario se tendría que  $\hat{\mathbb{C}} = w_1(\hat{\mathbb{C}}) \cup w_2(\hat{\mathbb{C}})$  es también un punto fijo, contradiciendo la unicidad. Para un tratamiento más formal y justificaciones adicionales del por qué se suprimen estas bolas, se recomienda el artículo de Brolin [6], sección 6.

**Ejemplo 2.2.** Considere el Sistema Dinámico  $\{\hat{\mathbb{C}}; f(z) = z^2\}$ . El origen  $O$  es un ciclo atractivo de periodo 1, el teorema anterior nos dice que el SIF

$$\{X = \hat{\mathbb{C}} \setminus (B(O, 0,00000001) \cup B(\infty, 0,00000001)); w_1(z) = \sqrt{z}, w_2(z) = -\sqrt{z}\}$$

posee un único atractor, el cual resulta ser el conjunto de Julia  $J_f = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

---

<sup>j</sup>Si la órbita del origen converge a infinito se tiene que  $c \notin M$ , Teorema 1.4 y  $f$  no posee ciclo atractivo.

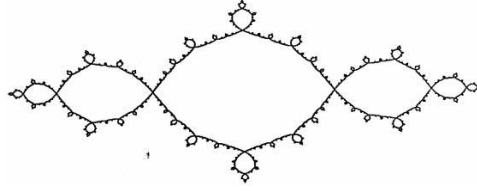


Figura 24. Conjunto de Julia para  $f(z) = z^2 - 1$ .

**Ejemplo 2.3.** La función  $f(z) = z^2 - 1$  tiene un ciclo atractivo de orden 2, pues  $f^2(0) = 0$  y  $f(0) = -1 \neq 0$ , así  $z = 0$  es punto periódico de orden 2 y como  $|f'(0)| < 1$  se tiene que el ciclo  $\{0, -1\}$  es atractivo. El teorema anterior asegura que la estructura  $\{X; \sqrt{z+1}, -\sqrt{z+1}\}$  donde

$$X = \hat{\mathbb{C}} \setminus (B(0; 0,0000001) \cup B(-1; 0,0000001) \cup B(\infty; 0,0000001))$$

es un SIF en el sentido del Teorema 1.1 cuyo atractor es el conjunto de Julia  $J_f$  asociado a la función  $f(z) = z^2 - 1$ , el cual se muestra en la Figura 24.

El caso del Sistema Dinámico  $\{\mathbb{C}; f_c\}$ , donde  $f_c$  no tiene ciclo atractivo, se examinó en el Teorema 2.1, mientras que para el Sistema Dinámico  $\{\hat{\mathbb{C}}; f_c\}$ , donde  $f_c$  no tiene ciclo atractivo, se requiere suprimir únicamente una bola centrada en  $\infty$  tal como se indica al final del Teorema 2.6.

### 3. SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS CONSTRUIDOS A PARTIR DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES

**Definición 3.1.**

Dado un SIF  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ , el **espacio de códigos asociado al SIF** es el espacio métrico  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ , donde  $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$ .

Considere sobre  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  la métrica dada por

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \quad \text{para todo } \alpha = \alpha_1\alpha_2\dots, \beta = \beta_1\beta_2\dots$$

La demostración del Teorema 3.1 utiliza el siguiente Lema, el cual se cita textualmente

**Lema 3.1** (Sabogal, Lema 4.3.4). *Sea  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF con factor de contracción  $\lambda$  (es decir  $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  donde  $\lambda_i$  es el factor de contracción de  $w_i$ ). Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de los códigos asociado al SIF y  $\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X \rightarrow X$ , para cada  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , definida por*

$$\phi(\alpha, n, x) := w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)$$

Sea  $K \in \mathbb{H}(X)$ . Entonces existe una constante  $D$  tal que

$$d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) < D\lambda^{\min\{m, n\}}$$

para todo  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , para todo  $m, n \in \mathbb{N}$  y para todo  $x_1, x_2 \in K$ .

**Teorema 3.1.** (Sabogal [22], Teorema 4.3.5)

Sean  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF y  $A$  su atractor. Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de códigos asociado al SIF. Para cada  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$ , sea

$$\varphi(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x)$$

Entonces  $\varphi(\alpha)$  siempre existe, pertenece a  $A$ , es independiente de  $x$  y la función

$$\begin{aligned} \varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} &\rightarrow A \\ \alpha &\rightarrow \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva.

*Demostración.* Sean  $x \in X$ ,  $K \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $x \in K$  y  $\tilde{K} \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $K \subset \tilde{K}$ . El atractor  $A$  se puede obtener como

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(K)$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha, 1, x) &= w_{\alpha_1}(x) \in W(K) \\
\phi(\alpha, 2, x) &= w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2}(x) \in W^2(K) \\
&\vdots \\
\phi(\alpha, n, x) &= w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x) \in W^n(K) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La sucesión  $(\phi(\alpha, 1, x))_n$  es de Cauchy en  $\tilde{K}$  el cual es un espacio métrico completo (Sabogal [22], Lema 4.3.3), y aplicando el Teorema de Completez de  $\mathbb{H}(X)$  (Sabogal [22], Teorema 3.2.6), se tiene que dicha sucesión converge a un elemento del atractor  $A$ , es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x) \in A$$

A continuación se demuestra que la función  $\varphi$  es continua

Sea  $\epsilon > 0$ , por la propiedad arquimediana existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda^{n_0} D < \epsilon$  ( $\lambda$  es el factor de contracción del  $SIF$  y  $D$  es el diámetro de  $\tilde{K}$ ). Para  $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  que cumplan

$$d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^{n_0+1}} = \delta > 0$$

se tiene

$$\begin{aligned}
(N+1)^{n_0+1} \left[ \sum_{i=1}^{n_0} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \right] &< 1 \\
\sum_{i=1}^{n_0} |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n_0+1-i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n_0+1-i} &< 1
\end{aligned}$$

Sea  $t = \sum_{i=1}^{n_0} |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n_0+1-i}$  el cual es un entero positivo o cero. Necesariamente  $t = 0$  puesto que  $d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^{n_0+1}} = \delta > 0$ , de modo que  $\alpha_i = \beta_i$  para todo  $i = 1, \dots, n_0$  es decir  $\alpha$  y  $\beta$  coinciden en sus primeras  $n_0$  cifras.

Para  $m \geq n_0$  se tiene que  $\lambda^m \leq \lambda^{n_0}$ , por lo tanto si  $x_1, x_2 \in \tilde{K}$

$$\begin{aligned}
d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\beta, m, x_2)) &= d(w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \cdots \circ w_{\alpha_m}(x_1), w_{\beta_1} \circ w_{\beta_2} \circ \cdots \circ w_{\beta_m}(x_2)) \\
d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_2)) &\leq \lambda^m D \leq \lambda^{n_0} D \leq \epsilon
\end{aligned}$$

y tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$

$$d\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \phi(\alpha, m, x_1), \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(\beta, m, x_2)\right) < \epsilon$$

Luego  $d(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) < \epsilon$  y  $\varphi$  es continua.

A continuación se demuestra que  $\varphi$  es sobre

Sea  $a \in A$ , como  $\{x\} \in \mathbb{H}(X)$  se tiene que

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\{x\})$$

Considere la sucesión de compactos

$$\begin{aligned} W(\{x\}) &= \{w_1(x), \dots, w_N(x)\} \\ W^2(\{x\}) &= \{w_1 \circ w_1(x), \dots, w_1 \circ w_N(x), \\ &\quad w_2 \circ w_1(x), \dots, w_2 \circ w_N(x), \dots, w_N \circ w_1, \dots, w_N \circ w_N\} \\ &\vdots \\ W^n(\{x\}) &= \{w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_N}(x) \mid \alpha_i \in \{1, \dots, N\} \ 1 \leq i \leq N\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como  $W^n(\{x\})$  es convergente, claramente es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{H}(X)$ , usando el teorema de completitud de  $\mathbb{H}(X)$  (Sabogal [22], Teorema 3.2.6) debe existir una sucesión  $(a_n)_n$  tal que  $(a_n)_n \rightarrow a$  y  $a_n \in W^n(\{x\})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así para cada  $n$   $a_n = w_{\alpha_1}^n \circ w_{\alpha_2}^n \circ \dots \circ w_{\alpha_n}^n(x)$ .

Se determina entonces una sucesión de códigos  $(\alpha^n)_n$  donde  $\alpha^n = (\alpha_m^n)_m$ . Como  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto  $(\alpha^n)_n$  admite una subsucesión convergente, sea esta  $(\alpha^{k_n})_n \rightarrow \alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , por la última convergencia los segmentos iniciales de los códigos  $\alpha^{k_n}$  coincidentes con los de  $\alpha$ , se van haciendo cada vez más largos de modo que

$$d(\phi(\alpha, n, x), \phi(\alpha^{k_n}, n, x)) \leq \lambda^{t(n)} D$$

donde  $t(n) = \#\{j \in \mathbb{N} \mid \alpha_k^{k_n}, 1 \leq k \leq j\}$ . Tomando límite en los dos lados de la desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha^{k_n}, n, x) \\ \varphi(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1^{k_n}} \circ \dots \circ w_{\alpha_n^{k_n}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \end{aligned}$$

□

*Nota.* En general la función  $\varphi$  no es inyectiva.

### Definición 3.2.

El conjunto  $\varphi^{-1}(a) = \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \varphi(\alpha) = a\}$  es llamado el **conjunto de direcciones de**  $a \in A$ .

### 3.1. Sobre la definición de *SIF* totalmente desconexo

La clasificación de *SIF*'s en totalmente desconexos, Just-touching y Overlapping es debida a Barnsley [1], Definición 2.2. Un error en el enunciado y la demostración del Teorema 2.2 de Barnsley [1] (pues hace falta la hipótesis de que las contracciones sean inyectivas), llevó a plantear las siguientes afirmaciones y analizar las interrelaciones entre ellas, dado un *SIF*  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  con atractor  $A$ .

- (1)  $A$  como espacio topológico es totalmente desconexo.
- (2) Cada punto de  $A$  tiene una única dirección (i.e.  $\varphi$  es inyectiva).
- (3)  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N$ .
- (4) Las contracciones  $w_i$  del *SIF* son inyectivas.

Los siguientes resultados muestran las interrelaciones entre las afirmaciones dadas

#### Proposición 3.1.

*A como espacio topológico totalmente desconexo no implica que cada punto de  $A$  tenga una única dirección.*

Se utilizará el Teorema 4.1 de Hata [14], el cual se cita textualmente:

#### Teorema 3.2. (Hata [14], Teorema 4.1)

Sea  $\{f_j\}_{i \leq j \leq n}$  un conjunto finito de contracciones de  $X$  que satisfacen  $\sum_{i=1}^n Lip(f_i) < 1$ . Entonces  $K = K(f_1, \dots, f_n)$  es totalmente desconexo y por tanto  $dim_T(K) = 0$ .

El conjunto  $K = K(f_1, \dots, f_n)$  que se menciona anteriormente es el atractor del *SIF*  $\{X; f_1, \dots, f_n\}$ , la expresión  $\sum_{i=1}^n Lip(f_i) < 1$  se refiere a la suma de los factores de contracción de las contracciones  $f_j$ .

*Demostración.*

Considere el *SIF*  $\{[0, 1]; \frac{x}{4}, \frac{x}{4} + \frac{3}{5}, \frac{x}{4} + \frac{3}{4}\}$  para el cual  $\sum_{i=1}^3 Lip(f_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$ , de esta manera por el resultado anterior el atractor  $A$  es totalmente desconexo. Observe que  $Fix(w_2) = Fix(w_3 \circ w_1)$  donde  $Fix(w_i)$  denota el conjunto de puntos fijos de  $w_i$ .

$$w_2(x) = x \quad \rightarrow \quad \frac{x}{4} + \frac{3}{5} = x \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}x = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

así  $Fix(w_2) = \{\frac{4}{5}\}$ .

$$(w_3 \circ w_1)(x) = x \quad \rightarrow \quad \frac{x}{16} + \frac{3}{4} = x \quad \rightarrow \quad \frac{15}{16}x = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

así  $Fix(w_3 \circ w_1) = \{\frac{4}{5}\}$  y de esta manera se tiene un punto en  $A$  con dos direcciones.  $\square$

Este ejemplo también muestra que si cada punto de  $A$  tiene una única dirección no se implica que  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N$ .

**Proposición 3.2.**

Si cada punto de  $A$  tiene una única dirección, entonces  $A$  como espacio topológico es totalmente desconexo.

*Demostración.*

Si  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$  es inyectiva, para ser homeomorfismo sólo resta demostrar que es abierta o cerrada, pues es continua y sobreyectiva (Teorema 3.1) que junto con la hipótesis de inyectividad se implica que  $\varphi$  es biyectiva. En efecto, sea  $F \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$  cerrado, entonces  $F$  es compacto pues  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es compacto (por ser homeomorfo a Cantor), como  $\varphi$  es continua  $\varphi(F)$  es compacto dentro de un Hausdorff (por ser espacio métrico), así  $\varphi(F)$  es cerrado.

Luego  $\varphi$  es un homeomorfismo y  $\Sigma^{\mathbb{N}} \cong A$ , de esta manera  $A$  es homeomorfo a Cantor y por consiguiente totalmente desconexo.  $\square$

**Proposición 3.3.**

Si cada punto de  $A$  tiene una única dirección, entonces  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ .

*Demostración.*

Suponga por contradicción que  $w_i(A) \cap w_j(A) \neq \emptyset$ , es decir  $\exists i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$   $i \neq j$ , tales que  $w_i(A) \cap w_j(A) \neq \emptyset$ , de esta manera existen  $a, b \in A$  con  $w_i(a) = w_j(b)$ .

Como  $\varphi$  es sobreyectiva existen  $\alpha$  y  $\beta$  en  $\Sigma^{\mathbb{N}}$ , tales que  $a = \varphi(\alpha)$  y  $b = \varphi(\beta)$ , entonces

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x) \\ w_i(a) &= w_i\left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_i \circ w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x) \\ &= \varphi(i\alpha) \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene  $w_j(b) = \varphi(j\beta)$ .

Por tanto  $\varphi(i\alpha) = \varphi(j\beta)$  lo cual contradice la inyectividad de  $\varphi$ , porque se está mostrando dos códigos diferentes que tienen la misma imagen bajo  $\varphi$ .  $\square$

**Proposición 3.4.**

Si cada punto de  $A$  tiene una única dirección, entonces las contracciones  $w_i$  del SIF son inyectivas.

*Demostración.*

Se probará que  $w_1 : A \rightarrow A$  es inyectiva (de manera análoga se probaría para cualquier  $w_i$ ). Por contradicción suponga que  $w_1$  no es inyectiva. De esta manera existen  $a, b \in A$   $a \neq b$  tales que  $w_1(a) = w_1(b)$ . Recuerde que la función de direccionamiento

$$\begin{aligned}\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} &\rightarrow A \\ \alpha &\rightarrow \varphi(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x), \quad x \in X\end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva, por tanto existen códigos  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots$ ,  $\beta = \beta_1\beta_2\dots$  tales que  $\varphi(\alpha) = a$  y  $\varphi(\beta) = b$ . Como  $a \neq b$  se sigue que  $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ , a partir de la inyectividad de  $\varphi$  se tiene que  $\alpha \neq \beta$ . Obsérvese que

$$\begin{aligned}\varphi(1\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1 \circ w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x) \\ &= w_1(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x)) \\ &= w_1(\varphi(\alpha)) \\ &= w_1(a)\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\varphi(1\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1 \circ w_{\beta_1} \circ \cdots \circ w_{\beta_n}(x) \\ &= w_1(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\beta_1} \circ \cdots \circ w_{\beta_n}(x)) \\ &= w_1(\varphi(\beta)) \\ &= w_1(b)\end{aligned}$$

Como  $w_1(a) = w_1(b)$ , se sigue que  $\varphi(1\alpha) = \varphi(1\beta)$  con  $1\alpha \neq 1\beta$  (pues  $\alpha \neq \beta$ ), con lo cual  $\varphi$  no es inyectiva.  $\square$

**Proposición 3.5.**

$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N$  no implica que cada punto del atractor tenga una única dirección.

Considere el *SIF*  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, 1\}$ , para este se tiene lo mostrado en la figura 25

Por el Teorema 2.4 se tiene que el límite es  $A = \{\frac{1}{2^n} | n \geq 0\} \cup \{0\}$ .

Para este *SIF*,  $w_1(A) = \{\frac{1}{2^n} | n \geq 1\} \cup \{0\}$  y  $w_2(A) = \{1\}$ , luego  $w_1(A) \cap w_2(A) = \emptyset$ . Para  $2\alpha_1\alpha_2\dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , se tiene

$$\varphi(2\alpha_1\alpha_2\dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_2 \circ w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_2(y) = 1$$

Donde  $y = w_{\alpha_1} \circ \cdots \circ w_{\alpha_n}(x)$ , de esta manera  $1 \in A$  y tiene infinitas direcciones.

Este ejemplo también justifica las Proposiciones 3.6 y 3.7 siguientes.

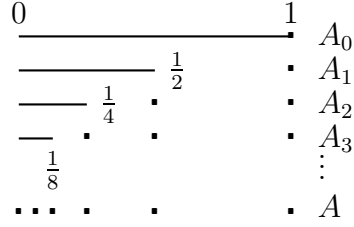


Figura 25. Construcción del atractor del  $SIF \{[0, 1]; \frac{1}{2}x, 1\}$ .

**Proposición 3.6.** *A como espacio topológico totalmente desconexo no implica que las contracciones  $w_i$  del SIF sean inyectivas.*

**Proposición 3.7.**  *$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N$  no implica que las contracciones  $w_i$  del SIF sean inyectivas.*

**Proposición 3.8.**

*Si  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N$  y las contracciones  $w_i$  del SIF son inyectivas, entonces que cada punto del atractor  $A$  tiene una única dirección y viceversa.*

*Demostración.*

Por contradicción suponga que  $\varphi$  no es inyectiva, es decir existen 2 códigos  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha \neq \beta$  y  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Sea  $k$  el menor entero positivo, tal que  $\alpha_k \neq \beta_k$ , así

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \\ \beta &= \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k \beta_{k+1} \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots) &= \varphi(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k \beta_{k+1} \dots) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_{k-1}} \circ w_{\alpha_k} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_{k-1}} \circ w_{\beta_k} \circ \dots \circ w_{\beta_n}(x)) \\ w(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_k} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)) &= w(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\beta_k} \circ \dots \circ w_{\beta_n}(x))\end{aligned}$$

Siendo  $w = w_{\alpha_1} \circ \dots \circ w_{\alpha_{k-1}}$ , la cual es continua e inyectiva pues es composición de funciones continuas e inyectivas, así

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_k} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\beta_k} \circ \dots \circ w_{\beta_n}(x) \\ w_{\alpha_k}(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_{k+1}} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)) &= w_{\beta_k}(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\beta_{k+1}} \circ \dots \circ w_{\beta_n}(x)) \\ w_{\alpha_k}(a) &= w_{\beta_k}(b) = c\end{aligned}$$

Siendo  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_{k+1}} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)$  y  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\beta_{k+1}} \circ \dots \circ w_{\beta_n}(x)$ . De esta manera  $c \in w_{\alpha_k}(A) \cap w_{\beta_k}(A)$ , la cual es una contradicción pues recuérdese que  $\alpha_k \neq \beta_k$ .

Recíprocamente, por la Proposición 3.3 y la Proposición 3.4 se tiene que si cada punto del atractor  $A$  tiene una única dirección, entonces  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq N$  y las contracciones  $w_i$  del  $SIF$  son inyectivas.  $\square$

**Proposición 3.9.**

*El hecho de que las contracciones del  $SIF$  sean inyectivas no implica que el atractor  $A$  como espacio topológico sea totalmente desconexo.*

Considere el  $SIF \{\mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\}$  cuyo atractor es el triángulo de Sierpinski, para este se tiene que las contracciones son inyectivas, sin embargo su atractor  $A$  como espacio topológico no es totalmente desconexo .

**Proposición 3.10.**

*El hecho de que las contracciones del  $SIF$  sean inyectivas no implica que cada punto del atractor  $A$  tenga una única dirección.*

**Proposición 3.11.**

*La inyectividad de cada una de las contracciones  $w_i$  del  $SIF$ , no implica que  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq N$ .*

Para justificar las Proposiciones 3.10 y 3.11 considere la Proposición 4.4.13 de Sabogal [22], la cual se cita textualmente:

**Proposición 3.12.** (Sabogal [22], Proposición 4.4.13)

*El triángulo de Sierpinski es el único (salvo homeomorfismos) espacio topológico que se puede obtener como el atractor  $A$  de un  $SIF \{X; w_1, w_2, w_3\}$  que cumple:*

1.  $w_1, w_2, w_3$  son inyectivas
2.  $w_1(A) \cap w_2(A) = \{p\}, w_1(A) \cap w_3(A) = \{q\}, w_2(A) \cap w_3(A) = \{r\}$  donde  $p = w_1(x_2) = w_2(x_1), q = w_1(x_3) = w_3(x_1), r = w_2(x_3) = w_3(x_2)$  son tres puntos distintos y  $x_1, x_2, x_3$  son los puntos fijos de  $w_1, w_2, w_3$  respectivamente.
3.  $p, q$  y  $r$  tienen exactamente dos códigos cada uno.

Por el numeral 3 se tiene que  $\varphi$  no es inyectiva (i.e cada punto del atractor puede tener más de una dirección), de esta manera se justifica la Proposición 3.10. Por el numeral 2 se tiene que  $w_i(A) \cap w_j(A) \neq \emptyset \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq N$ , lo cual justifica la Proposición 3.11.

El diagrama mostrado en la Figura 26, establece las relaciones entre las afirmaciones referentes a la noción de  $SIF$  totalmente desconexo con atractor  $A$ .

De esta manera parece razonable definir a un  $SIF$  totalmente desconexo como en la afirmación (2), en la cual cada punto del atractor  $A$  posee una única dirección.

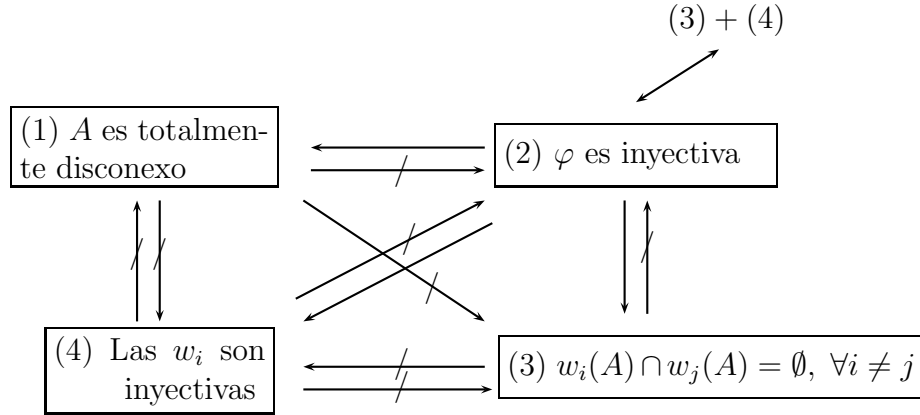


Figura 26. Relaciones referentes a la noci3n de SIF totalmente desconexo.

**Definici3n 3.3.**

Sea  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  un SIF con atractor  $A$

El SIF se llama **totalmente desconexo** si la funci3n de direccinamiento correspondiente ( $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ ) es inyectiva, es decir a cada punto del atractor  $A$  le corresponde una 3nica direcci3n.

El SIF se llama **Just-touching** si no es totalmente desconexo y existe un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subseteq A$  que satisface las siguientes condiciones

1.  $w_i(\mathcal{O}) \cap w_j(\mathcal{O}) = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \text{con } i \neq j$
2.  $\cup_{i=1}^N w_i(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ .<sup>k</sup>

El SIF se llama **Overlapping** si no es ni totalmente desconexo ni Just-touching.

**Ejemplo 3.1.**

- a) Como se demostr3 en el Ejemplo 1.1, el atractor del SIF  $\{\mathbb{R}; w_1(x) = \frac{1}{3}x, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$  es el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ . Para este SIF se tiene que las contracciones  $w_1$  y  $w_2$  son inyectivas y como  $\mathcal{C} \subseteq [0, 1]$ , entonces  $w_1(\mathcal{C}) \subseteq w_1([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}]$  y  $w_2(\mathcal{C}) \subseteq w_2([0, 1]) = [\frac{2}{3}, 1]$  por lo tanto

$$w_1(\mathcal{C}) \cap w_2(\mathcal{C}) \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \emptyset$$

De esta manera como se demostr3 en la Proposici3n 3.8, se sigue que todo punto del atractor tiene una sola direcci3n y el SIF es totalmente desconexo.

<sup>k</sup>Tambi3n llamada ‘‘Condici3n del conjunto abierto’’.

b) El atractor del SIF  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\}$  es el conjunto  $A = [0, 1]$ , obsérvese que  $w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = [0, 1]$ . Este SIF no es totalmente desconexo ya que  $w_1(A) \cap w_2(A) = \{\frac{1}{2}\}$  y de esta manera el punto  $x = \frac{1}{2}$  tiene dos direcciones.

Existe un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subseteq A$  que satisface las condiciones para ser un SIF Just-touching en efecto, tómesese  $\mathcal{O} = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ , para este  $w_1(\mathcal{O}) = (0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  y  $w_2(\mathcal{O}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$ , siendo  $w_1(\mathcal{O}) \cap w_2(\mathcal{O}) = \emptyset$  y  $w_1(\mathcal{O}) \cup w_2(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ .

c) El atractor del SIF  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$  es el conjunto  $A = [0, 1]$ , puesto que  $w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, 1] = [0, 1]$ . Claramente no es totalmente desconexo pues  $w_1(A) \cap w_2(A) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \neq \emptyset$ . El SIF no es Just-touching, ya que no existe un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subseteq [0, 1]$ ,  $\mathcal{O} \neq \emptyset$ , que cumpla:

$$a) w_1(\mathcal{O}) \cap w_2(\mathcal{O}) = \emptyset \quad y$$

$$b) w_1(\mathcal{O}) \cup w_2(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}$$

Para demostrar que no existe tal conjunto abierto se utilizará el concepto de conjuntos de Borel y teoría de la medida<sup>1</sup>. Supóngase que tal conjunto abierto  $\mathcal{O}$  si existe, entonces este conjunto abierto  $\mathcal{O}$  es un conjunto de Borel y de medida estrictamente positiva, pues  $\exists(a, b) \subseteq \mathcal{O}$ , donde  $0 < b - a = \mathcal{M}(a, b) \leq \mathcal{M}(\mathcal{O})$ , como  $w_1 : \mathcal{O} \rightarrow w_1(\mathcal{O})$  y  $w_2 : \mathcal{O} \rightarrow w_2(\mathcal{O})$  son homeomorfismos, se tiene que  $w_1(\mathcal{O})$  y  $w_2(\mathcal{O})$  también son conjuntos de Borel, luego son todos medibles. Además  $\mathcal{M}(w_1(\mathcal{O})) = \frac{1}{2}\mathcal{M}(\mathcal{O})$  y  $\mathcal{M}(w_2(\mathcal{O})) = \frac{3}{4}\mathcal{M}(\mathcal{O})$ . Por las condiciones a) y b) anteriores y por propiedades de la función medida  $\mathcal{M}$  se tiene:

$$\mathcal{M}(w_1(\mathcal{O}) \cup w_2(\mathcal{O})) = \mathcal{M}(w_1(\mathcal{O})) + \mathcal{M}(w_2(\mathcal{O})) \leq \mathcal{M}(\mathcal{O})$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{M}(\mathcal{O}) + \frac{3}{4}\mathcal{M}(\mathcal{O}) \leq \mathcal{M}(\mathcal{O})$$

$$\frac{5}{4}\mathcal{M}(\mathcal{O}) \leq \mathcal{M}(\mathcal{O})$$

Lo cual es un absurdo, pues  $\mathcal{M}(\mathcal{O}) > 0$ . De esta manera el SIF es Overlapping.

### Definición 3.4.

Sea  $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$  un SIF totalmente desconexo con atractor  $A$ . **La transformación Shift** asociada a  $A$  es la función  $S : A \rightarrow A$  definida por

$$S(a) = w_n^{-1}(a) \quad \forall a \in w_n(A)$$

El Sistema Dinámico  $\{A, S\}$  es llamado el **Sistema Dinámico Shift** asociado al SIF.

---

<sup>1</sup>En el presente trabajo no se estudiará este concepto puesto que se aleja del objetivo de esta investigación, sin embargo para un tratamiento más formal puede consultarse Robert G. Bartle (1995). *The Elements of Integration and Measure Theory*. Editorial Wiley.

Es importante observar que la condición de que el  $SIF$  sea totalmente desconexo (i.e.  $\varphi$  es inyectiva), implica que las contracciones del  $SIF$  sean inyectivas. Las contracciones se pueden restringir al atractor  $A$ , de esta manera  $w_i : A \rightarrow A$  para todo  $i = 1, \dots, N$ , y además se tiene que  $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , de esta manera se sigue que  $S$  queda bien definida.

**Teorema 3.3.**

Sea  $\{X; w_1, \dots, w_N\}$  un  $SIF$  totalmente desconexo y sea  $\{A; S\}$  su Sistema Dinámico Shift asociado. Sea  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  el espacio de códigos asociado al  $SIF$  y  $T : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$  definida por

$$T(x_1x_2x_3\dots) := x_2x_3\dots$$

Entonces los Sistemas Dinámicos  $\{A; S\}$  y  $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; T\}$  son equivalentes. El homeomorfismo que produce esta equivalencia es la función de direccionamiento  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ , la cual se abordó en el Teorema 3.1.

*Demostración.*

Se debe probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\varphi} & A \\ T \downarrow & & \downarrow S \\ \Sigma^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

Sea  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} (S \circ \varphi)(\alpha) &= S(\varphi(\alpha)) = S(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)) \\ &= S(w_{\alpha_1}(\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_2} w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x))) = S(w_{\alpha_1}(a)) \\ &= w_{\alpha_1}^{-1}(w_{\alpha_1}(a)) = a \end{aligned}$$

Siendo  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_2} w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x)$ .

Por otra parte

$$(\varphi \circ T)(\alpha) = \varphi(T(\alpha)) = \varphi(\alpha_2\alpha_3\dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x) = a$$

□

**Ejemplo 3.2.** Como se mostró en el ejemplo 1.2, el  $SIF$  que genera el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  es  $\{\mathbb{R}; w_1(x) = \frac{1}{3}x, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$ , su función de direccionamiento es  $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}$  donde

$$\Sigma = \{1, 2\}$$

Por ejemplo, para ver de quién es dirección el código  $1\bar{2} = 122222 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , se calcula

$$\begin{aligned} \varphi(1\bar{2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1 \circ w_2 \circ w_2 \circ w_2 \circ \dots \circ w_2(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(1) = w_1(1) = \frac{1}{3} \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

luego  $1\bar{2}$  es dirección de  $\frac{1}{3}$ .

Este SIF es totalmente desconexo, luego según la Definición 3.4, la estructura  $\{\mathcal{C}; S\}$  donde

$$S(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in w_1(\mathcal{C}) \\ 3x - 2 & \text{si } x \in w_2(\mathcal{C}) \end{cases}$$

es un Sistema Dinámico cuyo conjunto de puntos atrapados es  $\mathcal{C}$ . La función  $S$  se representa gráficamente en la Figura 27.

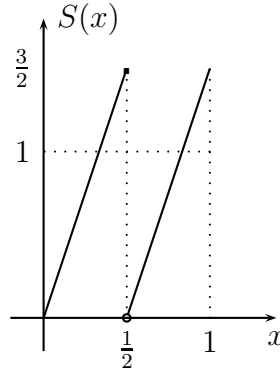
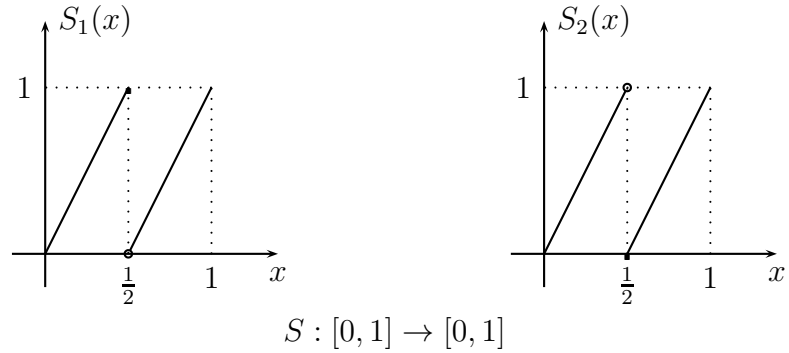


Figura 27. Gráfica de  $S(x)$ .

El objetivo ahora es extender la definición de Sistema Dinámico Shift asociado con un SIF totalmente desconexo, para cubrir también los casos Just-touching y Overlapping. Esto nos llevará a la idea de Sistema Dinámico Shift Aleatorio y al descubrimiento de un hermoso teorema llamado el “Teorema de la sombra”.

### Ejemplo 3.3.

- a) Considere el SIF Just-touching del ejemplo 3.3 parte b), este es  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\}$  cuyo atractor es  $A = [0, 1]$ , dos posibles Sistemas Dinámicos Shift asociados al SIF son los mostrados en la Figura 28.



$$S_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad S_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Figura 28. Posibles Sistemas Dinámicos Shift asociados al *SIF* Just-touching.

- b) *El SIF cuyo atractor es el triángulo de Sierpínski (denotado  $\mathcal{S}$ ) con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  es  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$  donde*

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) \\ w_2(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right) \\ w_3(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) \end{aligned}$$

*El atractor de este SIF Just-touching es mostrado en la Figura 29.*

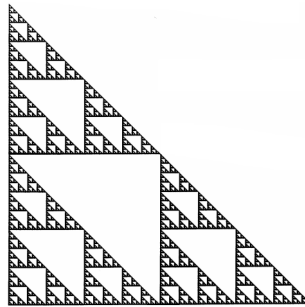


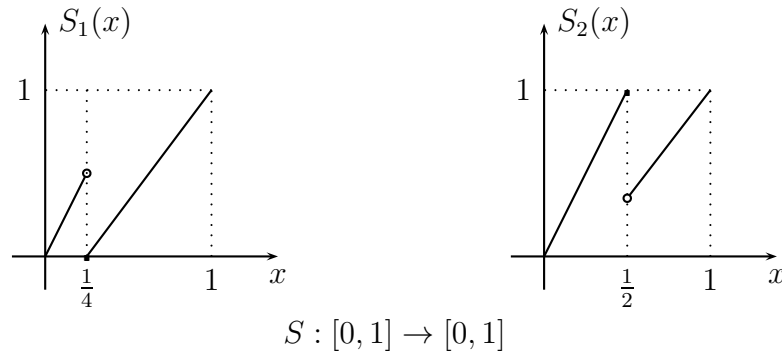
Figura 29. Triángulo de Sierpínski

*Un posible Sistema Dinámico correspondiente es  $\{\mathcal{S}, S\}$ , donde*

$$S(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y - 1) & \text{si } (x, y) \in w_1(\mathcal{S}) \setminus \{(0, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \\ (2x - 1, 2y) & \text{si } (x, y) \in w_2(\mathcal{S}) \setminus \{(\frac{1}{2}, 0)\} \\ (2x, 2y) & \text{si } (x, y) \in w_3(\mathcal{S}) \end{cases}$$

El caso en el que el *SIF* es *Overlapping* se considera a continuación.

- c) Considere el *SIF Overlapping* del ejemplo 3.3 parte c), este es  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$  cuyo atractor es  $A = [0, 1]$ , en este caso  $w_1(A) \cap w_2(A) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ , dos posibles *Sistemas Dinámicos Shift* asociados al *SIF* son los mostrados en la Figura 30.



$$S_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases} \quad S_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Figura 30. Posibles *Sistemas Dinámicos Shift* asociados al *SIF Overlapping*.

Para dar igual importancia a las dos alternativas, en los casos de *SIF Overlapping* y *Just-touching* se sugiere definir la dinámica en la región de “traslape” de una manera aleatoria es decir, cuando un punto se ubique en la región de traslape se da la posibilidad de que el siguiente punto de la órbita sea obtenido aplicando una cualquiera de las transformaciones inversas disponibles, esto se especifica en la siguiente definición (para simplificar la notación se considera el caso de un *SIF* con dos contracciones).

**Definición 3.5.**

Sea  $\{X; w_1, w_2\}$  un *SIF* con atractor  $A$  y tal que  $w_1 : A \rightarrow A$  y  $w_2 : A \rightarrow A$  sean invertibles. Una sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  en  $A$  se llama una órbita del **Sistema Dinámico Shift Aleatorio asociado con el *SIF*** si:

$$x_{n+1} = \begin{cases} w_1^{-1}(x_n) & \text{si } x_n \in w_1(A) \text{ y } x_n \notin w_1(A) \cap w_2(A) \\ w_2^{-1}(x_n) & \text{si } x_n \in w_2(A) \text{ y } x_n \notin w_1(A) \cap w_2(A) \\ \text{uno cualquiera de } \{w_1^{-1}(x_n), w_2^{-1}(x_n)\} & \text{si } x_n \in w_1(A) \cap w_2(A) \end{cases}$$

para cada  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Se usará la notación  $x_{n+1} = S(x_n)$ , aunque la transformación  $S : A \rightarrow A$  que determina esta sucesión pueda no estar bien definida. Análogamente la notación  $\{A; S\}$  denota la colección de las posibles órbitas definidas aquí y se llamará a  $\{A; S\}$  el **Sistema Dinámico Shift Aleatorio asociado al SIF**.

En el caso de que  $w_1(A) \cap w_2(A) = \emptyset$ , se procede a hallar el Sistema Dinámico Shift asociado al SIF que se mencionó en la Definición 3.4, puesto que en este caso el SIF es totalmente disconexo (pues las contracciones son invertibles y por consiguiente inyectivas).

Para el caso del SIF  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$  cuyo atractor es  $A = [0, 1]$ , se tiene lo mostrado en la Figura 31, de esta manera cuando el SIF no es totalmente disconexo, la idea será volverlo totalmente disconexo, haciéndolo actuar en un espacio de dimensión mayor y de tal forma que su proyección en el espacio original produzca justamente la dinámica aleatoria que se definió anteriormente.

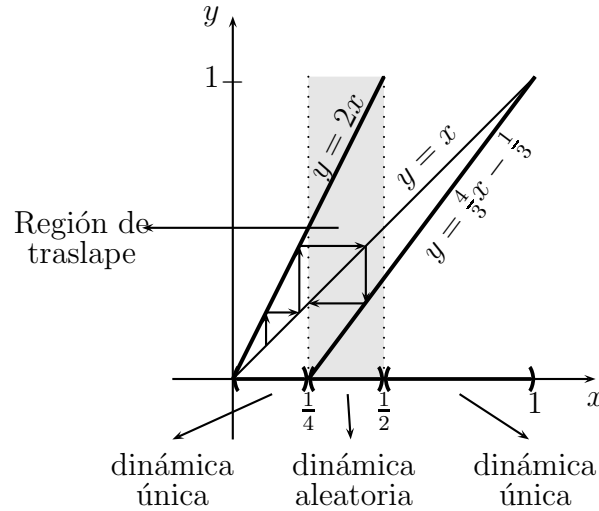


Figura 31. Dinámica para el SIF  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ .

### Definición 3.6.

El **Sistema Iterado de Funciones levantado** (SIF levantado) asociado con el SIF  $\{X; w_1, w_2\}$  es el SIF  $\{X \times \Sigma^{\mathbb{N}}; \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$  donde  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es el espacio de códigos sobre  $\{1, 2\}$  y  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 : X \times \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$  se definen por:

$$\tilde{w}_1(x, \sigma) = (w_1(x), 1\sigma) \quad \forall (x, \sigma) \in X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$$

$$\tilde{w}_2(x, \sigma) = (w_2(x), 2\sigma) \quad \forall (x, \sigma) \in X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$$

$\tilde{A} \subset X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$  denotará al atractor de este SIF levantado.

De esta manera la proyección del atractor del *SIF* levantado sobre el espacio  $X$  es el atractor  $A$  del *SIF* original, y la proyección del atractor del *SIF* levantado sobre el espacio  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es el mismo  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  y como  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  es equivalente a Cantor, entonces el atractor del *SIF* levantado  $\tilde{A}$  es totalmente desconexo. Es decir si  $\tilde{A}$  es el atractor del *SIF* levantado  $\{X \times \Sigma^{\mathbb{N}}; \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$  entonces  $\Pi_1(\tilde{A}) = A$  y  $\Pi_2(\tilde{A}) = \Sigma^{\mathbb{N}}$ .

Para el espacio de códigos  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  considere la métrica  $d$  definida por:

$$d(\alpha, \beta) := \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ \frac{1}{2^k} & \text{donde } k \text{ es el menor entero positivo para el cual } \alpha_k \neq \beta_k \end{cases}$$

Observe que  $d(1\sigma, 1\alpha) = \frac{1}{2}d(\sigma, \alpha)$  en efecto, si  $\sigma = \alpha$  se obtiene trivialmente la igualdad, si  $\sigma \neq \alpha$  se tiene que  $d(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2^k}$  donde  $k$  es el menor entero positivo tal que  $\sigma_k \neq \alpha_k$ , por tanto:

$$d(1\sigma, 1\alpha) = d(1\sigma_1\sigma_2 \dots \underbrace{\sigma_k}_{\text{cifra } k+1} \sigma_{k+1} \dots, 1\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\alpha_{k+1} \dots) = \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}d(\sigma, \alpha)$$

Para la demostración del Lema 3.2 se utilizará la siguiente métrica:

$$d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = d_1(x_1, z_1) + d_2(x_2, z_2)$$

Donde  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son espacios métricos completos,  $x_1, z_1 \in X_1$  y  $x_2, z_2 \in X_2$ . Note que  $(X_1 \times X_2, d)$  es un espacio métrico completo.

**Lema 3.2.** (*Barnsley [1], lemma 6.1*)

Sea  $\{X; w_1, w_2\}$  un *SIF* hiperbólico con atractor  $A$  y las contracciones  $w_1 : A \rightarrow A$  y  $w_2 : A \rightarrow A$  invertibles. Entonces el *SIF* levantado asociado es hiperbólico y totalmente desconexo.

*Demostración.* Es claro que  $X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$  es un espacio métrico completo, pues es el producto de dos espacios métricos completos.

Se prueba que  $\tilde{w}_1 : X \times \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$  es en efecto una contracción (análogamente se probaría para  $\tilde{w}_2$ ), sean  $(x, \sigma), (y, \alpha) \in X \times \Sigma^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} d(\tilde{w}_1(x, \sigma), \tilde{w}_1(y, \alpha)) &= d((w_1(x), 1\sigma), (w_1(y), 1\alpha)) \\ &= d(w_1(x), w_1(y)) + d(1\sigma, 1\alpha) \\ &\leq r_1 d(x, y) + \frac{1}{2}d(\sigma, \alpha) \\ &\leq td(x, y) + td(\sigma, \alpha) \\ &= td((x, \sigma), (y, \alpha)) \end{aligned}$$

Siendo  $r_1$  el factor de contracción de  $w_1$  y  $t = \max\{r_1, \frac{1}{2}\} < 1$   $0 \leq t < 1$ , de esta manera  $\widetilde{w}_1$  es contracción.

Se prueba ahora que el *SIF*  $\{X \times \Sigma^{\mathbb{N}}; \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\}$  es totalmente desconexo

- a) Las contracciones  $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$  son inyectivas, en efecto si  $\widetilde{w}_1(x, \sigma) = \widetilde{w}_1(y, \alpha)$ , por definición  $(w_1(x), 1\sigma) = (w_2(y), 1\alpha)$ , luego  $w_1(x) = w_1(y)$  y  $1\sigma = 1\alpha$ , como  $w_1$  es invertible se sigue que  $x = y$  y  $\sigma = \alpha$  de esta manera  $(x, \sigma) = (y, \alpha)$ , análogamente se prueba para  $\widetilde{w}_2$ .
- b) Debe probarse además que  $\widetilde{w}_1(\widetilde{A}) \cap \widetilde{w}_2(\widetilde{A}) = \emptyset$  siendo  $\widetilde{A}$  el atractor del *SIF*  $\{X \times \Sigma^{\mathbb{N}}; \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\}$ . Por contradicción suponga que existe  $(x, \sigma) \in \widetilde{w}_1(\widetilde{A}) \cap \widetilde{w}_2(\widetilde{A})$ , luego existen  $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2) \in \widetilde{A}$  tales que

$$\begin{aligned}(x, \sigma) &= \widetilde{w}_1(a_1, \alpha_1) = \widetilde{w}_2(a_2, \alpha_2) \\ (x, \sigma) &= (w_1(a_1), 1\alpha_1) = (w_2(a_2), 2\alpha_2)\end{aligned}$$

implicando que  $1\alpha_1 = 2\alpha_2$ , lo cual es una contradicción.

De a) y b) se concluye que el *SIF* levantado es totalmente desconexo.

□

### Definición 3.7.

Sean  $\{X; w_1, w_2\}$  un *SIF* con contracciones invertibles,  $\widetilde{A}$  el atractor del *SIF* levantado. Entonces el Sistema Dinámico Shift  $\{\widetilde{A}; \widetilde{S}\}$  asociado al *SIF* levantado, es llamado **Sistema Dinámico Shift levantado** asociado al *SIF*, donde

$$\begin{aligned}\widetilde{S} : \widetilde{A} &\rightarrow \widetilde{A} \\ (x, \sigma) &\mapsto \widetilde{S}(x, \sigma) = (w_{\sigma_1}^{-1}(x), T(\sigma)) \quad \forall (x, \sigma) \in \widetilde{A}\end{aligned}$$

siendo  $T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots) = \sigma_2\sigma_3\dots$  para todo  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$

### Teorema 3.4. (Barnsley, [1] Teorema 6.1, Teorema de la sombra)

Sea  $\{X; w_1, w_2\}$  un *SIF* hiperbólico de transformaciones invertibles  $w_1, w_2$  y atractor  $A$ . Sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  cualquier órbita del Sistema Dinámico Shift Aleatorio  $\{A; S\}$ . Entonces existe una órbita  $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$  del Sistema Dinámico Shift levantado  $\{\widetilde{A}; \widetilde{S}\}$  tal que la primera componente de  $\tilde{x}_n$  es  $x_n$ , para toda  $n$ .

*Demostración.* Se construye la órbita  $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$  como sigue:

Dado  $x_0 \in A$  y  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , sea

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \tilde{S}(\tilde{x}_0) = \tilde{S}(x_0, \sigma) = (w_{\sigma_1}^{-1}(x_0), T(\sigma)) = (x_1, \sigma_2 \sigma_3 \dots) \\
\tilde{x}_2 &= \tilde{S}(\tilde{x}_1) = \tilde{S}(x_1, \sigma_2 \sigma_3 \dots) = (w_{\sigma_2}^{-1}(x_1), T(\sigma_2 \sigma_3 \dots)) = (x_2, \sigma_3 \sigma_4 \dots) \\
&\vdots \\
\tilde{x}_n &= \tilde{S}(\tilde{x}_{n-1}) = \tilde{S}(x_{n-1}, \sigma_n \sigma_{n+1} \dots) = (w_{\sigma_n}^{-1}(x_{n-1}), T(\sigma_n \sigma_{n+1} \dots)) = (x_n, \sigma_{n+1} \sigma_{n+2} \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Obsérvese que tal como se construyó la sucesión  $\tilde{x}_n$ , la primera componente de esta es  $x_n$  para toda  $n$ . □

**Ejemplo 3.4.** a) Para el SIF  $\{w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z)\}$ , donde:

$$\begin{aligned}
w_1(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z + \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \right) \\
w_2(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z - \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) \\
w_3(z) &= \frac{1}{2} z + \frac{3}{10}i \\
w_4(z) &= \frac{1}{2} z - \frac{3}{10}i
\end{aligned}$$

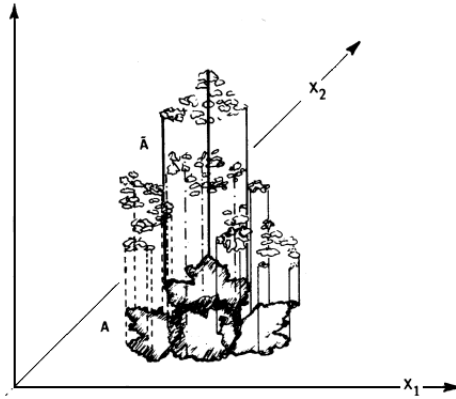


Figura 32. Atractor del SIF  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ , gráfica tomada de Barnsley [1].

*El atractor de este SIF se parece a una hoja de arce como se muestra en la Figura 32, la cual esta constituida por cuatro “hojuelas” que se taslapan y las cuales son como entidades distintas separadas a diferentes alturas sobre el atractor. A su vez, cada hojuela consiste de cuatro hojuelas más pequeñas de nuevo a diferentes alturas, y así sucesivamente. De esta manera se obtiene un conjunto de alturas distribuidas*

sobre un conjunto de Cantor, de tal manera que la sombra de la colección total de hojuelas infinitesimales es precisamente la hoja atractor en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . El atractor levantado es totalmente desconexo y por tanto podemos formar su Sistema Dinámico Shift.

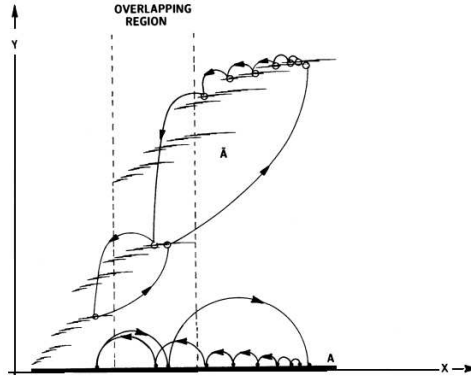


Figura 33. Dinámica para el  $SIF\{\mathbb{R}; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ , gráfica tomada de Barnsley [1].

b) Para el  $SIF$  Overlapping  $\{\mathbb{R}; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$  se tiene que el  $SIF$  levantado es

$$\{\mathbb{R} \times \Sigma^{\mathbb{N}}; \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}, \text{ donde } \tilde{w}_1(x, \sigma) = \left(\frac{1}{2}x, 1\sigma\right) \text{ y } \tilde{w}_2(x, \sigma) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}, 2\sigma\right).$$

Una imagen del atractor  $\tilde{A}$  y su dinámica se muestra en la Figura 33. En esta se observa lo enunciado en el Teorema 3.4 “Teorema de la sombra”, en cuanto a que la proyección de la dinámica sobre el atractor  $\tilde{A}$  del  $SIF$  levantado, es la dinámica sobre el atractor  $A$  del  $SIF$  inicial.

# CONCLUSIONES

1. Como se observa en el presente trabajo los algoritmos para generar fractales: Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos están relacionados en varios de sus aspectos, de esta manera la principal guía para desarrollar este trabajo fue tratar de responder las siguientes preguntas:
  - ¿Es posible construir Sistemas Iterados de Funciones a partir de Sistemas Dinámicos Discretos de modo que el atractor del Sistema Iterado de Funciones este relacionado con el conjunto de Julia del Sistema Dinámico Discreto? En el capítulo 2 se vio que es posible construirlo bajo ciertas condiciones, las cuales implicaban que las funciones consideradas en el Sistema Iterado de Funciones fueran efectivamente contracciones, esto fundamentalmente ocurría escogiendo un parámetro apropiado, el cual implicaba que el conjunto de puntos atrapados o el conjunto de Julia asociado al Sistema Dinámico fuera totalmente desconexo. Es decir para construir Sistemas Iterados de Funciones a partir de Sistemas Dinámicos Discretos se consideran 2 casos: 1<sup>o</sup>. Para la familia de Sistemas Dinámicos de la forma  $\{\mathbb{C}, f_c\}$  donde  $f_c = z^2 + c$  y el conjunto de Julia asociado a  $f_c$  es totalmente desconexo y cuando  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2,475$ , se tiene que las ramas de la función son efectivamente contracciones y de esta manera se tiene un Sistema Iterado de Funciones cuyo atractor es el conjunto de Julia de  $f_c$ , es decir se aplica el Teorema 2.1 y 2<sup>o</sup>. Para la familia de Sistemas Dinámicos de la forma  $\{\hat{\mathbb{C}}, f_c\}$  donde el conjunto de Julia asociado a  $f_c$  es conexo (esto es  $f_c$  tiene un ciclo atractivo), se aplica el Teorema 2.6, en este caso se suprimen  $(p + 1)$  bolas en cada punto del ciclo atractivo.
  - ¿Es posible construir Sistemas Dinámicos Discretos a partir de Sistemas Iterados de Funciones de modo que el conjunto de Julia del Sistema Dinámico Discreto este relacionado con el atractor del Sistema Iterado de Funciones? En el capítulo 3 se vio que la respuesta es afirmativa, y que existen diferentes formas de construcción del Sistema Dinámico dependiendo del tipo de Sistema Iterado de Funciones es decir, a partir de un Sistema Iterado de Funciones totalmente desconexo se puede construir un Sistema Dinámico Discreto, llamado el Sistema Dinámico Shift asociado al Sistema Iterado de Funciones, este Sistema Dinámico Shift se construyó con las inversas de las contracciones del Sistema Iterado de Funciones cuando estas eran inyectivas, en efecto el requerir que el Sistema Iterado de Funciones fuera totalmente desconexo implicó que las contracciones fueran inyectivas, se debe recalcar que el espacio métrico considerado en este Sistema Dinámico no es el mismo espacio métrico completo considerado en el Sistema Iterado de Funciones, en este caso el espacio considerado era el atractor del Sistema Iterado de Funciones el cual puede demostrarse que es un espacio métrico completo, véase Sabogal [22] capítulo 2. Sin embargo existen otras clases de Sistemas Iterados de Funciones, dependiendo de la naturaleza de su atractor,

estos son Sistemas Iterados de Funciones Just-touching y Sistemas Iterados de Funciones Overlapping para los cuales es también posible construir un Sistema Dinámico correspondiente, en efecto en este caso se requirió extender la definición de Sistema Dinámico Shift para cubrir también los casos Just-touching y Overlapping. Esto nos llevó a la idea de Sistema Dinámico Shift Aleatorio el cual era el Sistema Dinámico requerido.

2. Uno de los problemas abiertos es obtener Sistemas Iterados de Funciones a partir de Sistemas Dinámicos Discretos más generales (o viceversa) en particular, el lector podría interesarse en responder la pregunta: ¿Cómo construir un Sistema Dinámico Discreto a partir de un Sistema Iterado de Funciones cuyas contracciones no son necesariamente inyectivas? El capítulo 3 responde parcialmente esta pregunta, sin embargo existe una gran cantidad de Sistemas Dinámicos Discretos y Sistemas Iterados de Funciones para los cuales esta relación es desconocida. De esta manera el abordar esta pregunta se convierte en un futuro tema de investigación para aquellos que quieran adentrarse en este maravilloso mundo de la Geometría Fractal.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Barnsley, M. (1993). *Fractals Everywhere*, second edition. Academic Press. San Diego.
- [2] Barnsley, M. (2006). *Superfractals*. Cambridge University Press. Cambridge.
- [3] Barnsley, M. (1988). *The Escape Time Algorithm*. School of Mathematics, Georgia Institute of Technology.
- [4] Beardon, A. (1991). *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag. Cambridge.
- [5] Blanchard, P. (1984). *Complex Analytic Dynamics On the Riemann Sphere*. Bulletin of the American Mathematical Society **11** : 88-144.
- [6] Broiln, H. (1965). *Invariant sets under iteration of rational functions*. Arkiv for Matematik **6** : 103-144.
- [7] Cremer, H. (1932) *uber die Schridersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem*, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **84** : 291-324.
- [8] Conway, J. (1978). *Functions of one complex variable*, second edition. Espringer-Verlag. New York.
- [9] Devaney, R. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Ssystems*, second edition. Addison Wesley Publishing Company. Canada.
- [10] Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, second edition. Wiley. Scotland.
- [11] Fatou, P. (1920). *Sur les equations fonctionnellesons*, Bulletin of the Society Mathematics, **47** : 161 - 271.
- [12] Gamaliel, B. (2005). *Dinámica de los polinomios cuadráticos*, Revista de Ciencias Básicas UJAT, **4**(1) : 3 - 15.
- [13] Gamaliel, B. (2010). *Dinámica Holomorfa*, Emalca 2010, Villahermosa Tabasco.
- [14] Hata, M. (1985) *On the estructura of Self-Similar Sets*, Journal of Applied Mathematics, **2** : 381 - 414.
- [15] Hutchinson, J. E. (1981) *Fractals and self-similar*, Indiana University Journal of Mathematics, **30** : 713 - 747.
- [16] Julia, G. (1918) *Memoire sur litération des fonctions rationnelles*, Journal of Mathematics pures et appliques, **8** : 47 - 245.

- [17] Katagata, K. (2008) *Disconnected Julia sets of quartic polynomials and a new topology of the symbol space*, Proceedings Japan Academy, **84** : 117 - 122.
- [18] Katagata, K. (2008) *On a certain kind of polynomials of degree 4 with disconnected Julia set*, Discrete and Continuous dynamical systems, **20** : 975 - 987.
- [19] Mathews, J. & Howell, R. (2006) *Complex Analysis, for Mathematics and Engineering*, fifth edition. Jones and Bartlett Publishers, Toronto.
- [20] Milnor, J. (1991). *Dynamics in one complex variable*. Vieweg Verlag. New york.
- [21] Peitgen, O. H. (1990). *Fractals and Chaos, new frontiers of science*. Springer Verlag. New York.
- [22] Sabogal, S. & Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*, Ediciones UIS. Bucaramanga.
- [23] Siegel, C. L. (1942). *Iteration of analytic functions*, Annals of Mathematics. **43** : 607- 612.