

**CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELATIVISTAS DE
DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS
INMERSOS EN UN HALO**

Oscar Mauricio Pimentel Diaz

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2012

**CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELATIVISTAS DE
DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS
INMERSOS EN UN HALO**

Oscar Mauricio Pimentel Diaz

**TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR POR EL TITULO DE FÍSICO**

Director: PhD. Guillermo A. González V.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2012

AGRADECIMIENTOS

El apoyo de aquellas personas a quien mas amamos, hace posible la consecución de metas cada vez mas y mas grandes. Nada podríamos hacer si no contamos con la ayuda, ya sea directa o indirecta de aquellos que desean los mejores éxitos en nuestras vidas.

Antes de agradecer a las personas que estuvieron junto a mi acompañándome en el proceso para conseguir lo que se podría llamar: el primer eslabón en la cadena de metas por cumplir, debo agradecer a aquel de quien todo procede y en quien todo termina. Doy gracias primero a Dios, porque es el quien nos permite entender a través de la física y la matemática, lo grandioso y perfecto de su creación.

Agradezco también a aquellas personas de quien Dios se valió para permitirme alcanzar este logro:

- A mi papá Carlos Alberto, a mi mamá María del Carmen y a mi hermano Carlos Daniel, por darle sentido a mi vida, por ser mis guías y mis modelos a seguir.
- A Paolita, mi novia, por brindarme tanto amor, darme animo en los momentos de debilidad y hacer de cada día un recuerdo inolvidable.
- A cada uno de los miembros del grupo juvenil de la parroquia Divino Salvador: Juventud Activa Salvatoriana "JAS", por sus oraciones y por su amistad incondicional y sin medidas.
- Al profesor Guillermo González por ser un ejemplo a seguir tanto a nivel profesional como a nivel personal. Por su paciencia y dedicación en el desarrollo de este trabajo.
- A todos los profesores, especialmente a los del GIRG, por brindarme todos los conocimientos necesarios para el desarrollo de este trabajo.
- A mis amigos de la Escuela de Física: Carlos, Jose, Jhoanita, Jhoan, Diego Ballen, Diego Acevedo, Liliana, Jhon, Edgar, y todos aquellos con los que compartimos momentos tanto de preocupación como de alegría.

Índice general

Introducción	10
1. Discos Delgados Axialmente Simétricos con Halo	12
1.1. Ecuaciones de Einstein para cascarones delgados de materia.	12
1.2. Soluciones discoidales axialmente simétricas	14
1.3. Interpretación física de los modelos de discos delgados.	15
2. Versión Relativista del Modelo Clásico de Kuzmin-Toomre	20
2.1. Modelo $n = 0$	23
2.2. Modelo $n = 1$	27
2.3. Modelo $n = 2$	31
3. Conclusión	35
Bibliografía	37

Índice de figuras

2.1.	Modelo $n = 0$. Densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función de \tilde{R}	24
2.2.	Modelo $n = 0$. Gráficas de contorno de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ en función de \tilde{R} y \tilde{z}	26
2.3.	Modelo $n = 1$. Densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función de \tilde{R}	28
2.4.	Modelo $n = 1$. Gráfica de contorno de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ en función de \tilde{R} y \tilde{z}	30
2.5.	Modelo $n = 2$. Densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}(\tilde{R})$ en función de \tilde{R}	32
2.6.	Modelo $n = 2$. Gráfica de contorno de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ en función de \tilde{R} y \tilde{z}	34

RESUMEN

TITULO: CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS INMERSOS EN UN HALO ¹

AUTOR: Oscar Mauricio Pimentel Diaz.²

PALABRAS CLAVE: Relatividad General, Discos Relativistas, Halo, Ecuaciones de Einstein, Espacio-tiempo Conformestático, Tensor Momento-Energía, Modelo de Kuzmin-Toomre

DESCRIPCIÓN:

Se presenta una familia infinita de modelos relativistas de discos delgados de polvo, axialmente simétricos, inmersos en un fluido o halo. Los modelos se obtienen a partir de soluciones de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico. Dado que el espacio-tiempo es conformestático, el tensor métrico está caracterizado por una sola función métrica, la cual presenta una discontinuidad en su primera derivada normal a través de un disco delgado. Utilizando las ecuaciones de Einstein, se obtienen las componentes del tensor momento-energía, tanto para el disco como para el halo, a partir de las cuales se determinan las densidades de energía y presiones de los fluidos que conformarán estas dos regiones. Para que las soluciones obtenidas sean físicamente consistentes, aplicamos las condiciones de energía y obtenemos una ecuación para la función métrica, la cual solucionamos por medio de una relación con el modelo clásico de Kuzmin-Toomre, de tal manera que se obtiene una familia relativista de discos de polvo con un halo cuyos esfuerzos principales son diferentes de cero. Demostramos que las masas tanto del halo como del disco en esta familia de soluciones discoidales convergen a una constante.

¹Trabajo de Grado

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: CONSTRUCTION OF AXIALLY SYMETRIC THIN RELATIVISTIC DISKS IMMERSSED IN A HALO¹

AUTHOR: Oscar Mauricio Pimentel Diaz.²

KEY WORDS: General Relativity, Relativistic Disk, Halo, Einstein Equations, Conformastatic Spacetime, Energy-Momentum Tensor, Kuzmin-Toomre Model

DESCRIPTION:

We present an infinity family of axially symetric thin relativistic dust disks models immersed in a fluid or halo. We obtain these Models from solutions of Einstein equations for an axially symetric conformastatic spacetime. Because the spacetime is conformastatic, the metric tensor is characterized only by one metric function, which presents a discontinuity in its first normal derivative through a thin disk. Using Einstein equations, we can obtain energy-momentum tensor components both for the disk and the halo, from which, we determine the energy densities and stresses of the fluids that will shape both regions. In order to obtain physically consistent solutions, we apply energy conditions to obtain an equation for metric function, which we solve through a relation with the clasic Kuzmin-Toomre model, so, we obtain a relativistic dust disks family immersed in a fluid or halo, whose main stresses are different from zero. We show that the mass of the disk and the mass of the halo converge to a constant.

¹Degree work

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

INTRODUCCIÓN

El estudio teórico del campo gravitacional generado por una fuente material ha sido de gran interés no solo desde el punto de vista de la teoría misma sino también desde sus aplicaciones en la astrofísica. A través de los años se han dedicado grandes esfuerzos en la obtención de soluciones que describan sistemas aislados con simetría axial, la cual es característica en objetos como planetas, estrellas, galaxias, discos de acreción y agujeros negros. Estas soluciones han sido obtenidas tanto en el marco de la teoría newtoniana de la gravitación como en el de la teoría general de la relatividad; sin embargo, en el contexto de esta última teoría, la construcción de soluciones físicamente aceptables y auto-consistentes para fuentes materiales y campos gravitacionales generados por estas fuentes es un problema de gran dificultad. Para obtener estas soluciones, debemos resolver simultáneamente el problema exterior, cuya solución determina el campo externo y es básicamente un problema de contorno para las ecuaciones de Einstein de vacío y el problema interior, cuya solución determina la estructura y la dinámica de la fuente en su propio campo gravitacional. Adicional a esto, para que las soluciones sean aceptables desde el punto de vista físico, deben satisfacer ciertas condiciones sobre la fuente como su finitud y positividad, su naturaleza razonable y el tamaño geométrico finito de la fuente.

Ahora, si consideramos que la fuente es un disco infinitesimalmente delgado, el problema se reduce a formular condiciones de frontera adecuadas para la solución exterior y así obtener soluciones auto-consistentes que describan fuentes de materia con un comportamiento físicamente razonable. Aunque los modelos relativistas de discos delgados aun son altamente ideales, estos presentan una importancia astrofísica ya que se pueden usar para modelar discos de acreción, galaxias en equilibrio termodinámico y superposición de discos galácticos y agujeros negros.

De acuerdo a la observación está claro que muchos sistemas astrofísicos son compuestos; es decir, están formados por dos o más partes. Un ejemplo típico son las galaxias, las cuales están formadas por un disco galáctico, un agujero negro central (como es el caso de las galaxias espirales), un bulbo galáctico y un halo que rodea el disco. Este último es de gran relevancia pues la mayoría de la masa de la galaxia se encuentra contenida en él en forma de materia no visible o materia oscura, la cual explica el comportamiento de las curvas de rotación de las estrellas en el disco [33]. Así entonces, el estudio del campo gravitacional generado por esta clase de fuentes compuestas es de gran importancia, no solo desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad misma, sino también desde el punto de vista de sus aplicaciones astrofísicas.

Sin embargo, hasta ahora se han obtenido muy pocas soluciones que describan fuentes discoidales inmersas en halos de materia debido a que la no-linealidad de las ecuaciones de Einstein hace que el problema no se reduzca a una simple superposición como el caso de la gravedad Newtoniana. Esto nos conduce claramente a la importancia de obtener nuevas soluciones exactas de este tipo para realizar un estudio detallado de tales sistemas. En particular, estas soluciones nos permiten obtener de forma explícita la ecuación de estado

que describe el contenido material del halo, proporcionando así importante información que contribuye a alcanzar una comprensión clara de la naturaleza de la materia oscura, considerado probablemente como el problema no resuelto más importante en la astronomía extragaláctica [25].

El problema de resolver las ecuaciones de Einstein y después interpretar las soluciones como discos delgados estáticos y estacionarios ha sido abordado por muchos investigadores debido a que éste presenta un gran interés no solo en el marco de la teoría de la relatividad general y su comprensión sino también en la interpretación y aplicación de las soluciones obtenidas a sistemas astrofísicos como por ejemplo las estrellas de neutrones y las galaxias en equilibrio termodinámico. Sin embargo, este problema es relativamente joven y aun quedan muchas cuestiones que resolver.

Los primeros modelos de discos relativistas fueron obtenidos por Bonnor y Sackfield [36] en 1968 y posteriormente por Morgan y Morgan [32] en 1969. Con esto, el interés por éste tipo de modelos aumento y muchas soluciones diferentes fueron encontradas, tanto para discos estáticos [6, 10, 1, 28, 26, 23, 22, 16, 15], como para discos estacionarios [11, 24, 8]. La estabilidad de este tipo de modelos se ha investigado usando perturbaciones de primer orden en el tensor de momento-energía [27]. Discos relativistas como fuentes de la métrica de Kerr-Newman se presentan en [30]. Discos de fluido perfecto cargados fueron estudiados en [13], [19] y [18]. Discos de polvo han sido estudiados en [20], [9] y [7].

La construcción de modelos relativistas de discos de polvo pero ahora inmersos en halos, no ha sido fácil; lo cual se evidencia en que hay muy pocos trabajos alrededor de este tema. Sin embargo, Vogt y Letelier han realizado algunos aportes importantes en este tema con los modelos de discos de fluido perfecto con halos [12]. Nosotros con el objetivo de continuar con la investigación, desarrollaremos un modelo de discos de polvo, los cuales son consistentes con las observaciones, pero inmersos en un halo de materia oscura partiendo de la métrica conformestática.

Como el objetivo que perseguimos es construir modelos relativistas de discos delgados axialmente simétricos e inmersos en un halo de materia oscura; presentamos en el Capitulo 2, sección 2.1 mediante la aplicación del método de distribuciones, las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo en el cual existe una hipersuperficie Σ que suponemos contiene una distribución de masa y que a demás, divide dicho espacio-tiempo en dos subregiones: M^+ ; es decir, por encima de Σ y M_- , por debajo de la hipersuperficie. Este método permite la obtención de ecuaciones para cada una de las regiones en cuestión.

En la sección 2.2 del mismo capitulo, resolvemos dichas ecuaciones para la métrica conformestática con el objetivo de calcular los tensores de momento-energía correspondientes al disco delgado y al fluido que conforma el halo. En la sección 2.3, interpretamos las componentes del tensor momento-energía correspondientes al halo y al disco, ya que de esta manera, obtenemos expresiones para las densidades de energía y presiones de los fluidos que componen el sistema. También, aplicamos las condiciones de energía, con las cuales, nuestras soluciones quedan restringidas.

En el capitulo 3, obtenemos una familia de soluciones discoidales que cumplen con las restricciones anteriores, mediante una comparación con el modelo clásico de Kuzmin-Toomre. Con la expresión general obtenida, observamos finalmente el comportamiento de las soluciones para diferentes casos particulares.

Discos Delgados Axialmente Simétricos con Halo

1.1. Ecuaciones de Einstein para cascarones delgados de materia.

Para formular las ecuaciones de Einstein correspondientes a un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico en el cual existe una distribución discoidal de materia, la cual esta inmersa en un fluido o halo de materia oscura, introducimos primero las coordenadas cilíndricas, $x^a = (t, R, \varphi, z)$, en las cuales el tensor métrico g_{ab} solo dependerá de R y z .

La distribución discoidal de materia mencionada anteriormente la representamos en el espacio mediante una hipersuperficie Σ definida por la función $\phi(x^a) = z$, la cual divide el espacio-tiempo en 2 regiones: M^+ y M^- ; es decir, por encima (+) y por debajo (-) de Σ . Por lo tanto, es claro que el vector normal a dicha hipersuperficie esta dado por $n_a = \phi_{,a} = \delta_a^z$. Como consecuencia, las componentes del tensor métrico serán funciones simétricas de la coordenada z ; es decir,

$$g_{ab}(R, z) = g_{ab}(R, -z), \quad (1.1)$$

mientras que cuando $z \neq 0$, las primeras derivadas respecto a z de dichas componentes serán funciones impares. Por lo tanto,

$$g_{ab,z}(R, z) = -g_{ab,z}(R, -z). \quad (1.2)$$

De las anteriores ecuaciones está claro que el tensor métrico es continuo en $z = 0$; es decir,

$$[g_{ab}] \equiv g_{ab} \Big|_{z=0^+} - g_{ab} \Big|_{z=0^-} = 0, \quad (1.3)$$

mientras que la primera derivada del tensor métrico respecto a z es discontinua en $z = 0$. Por lo tanto,

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2g_{ab,z} \Big|_{z=0^+}. \quad (1.4)$$

Ahora, utilizando el método de las distribuciones [4, 3, 2] o las condiciones de juntura sobre la curvatura extrínseca de cascarones delgados [34, 35, 14], tenemos que:

$$g_{ab} = (g_{ab})^D, \quad (1.5)$$

$$g_{ab} = (g_{ab,c})^D, \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{bc}^a = (\Gamma_{bc}^a)^D, \quad (1.7)$$

$$\Gamma_{bc,d}^a = (\Gamma_{bc,d}^a)^D + [\Gamma_{bc}^a]n_d\delta(z). \quad (1.8)$$

Supongamos que el tensor métrico, g_{ab} , se puede escribir como

$$g_{ab} = (g_{ab})^D = g_{ab}^+\theta(z) + g_{ab}^-\{1 - \theta(z)\}, \quad (1.9)$$

donde $\theta(z)$ y $\delta(z)$ son las distribuciones de Heaveside y Dirac respectivamente y g_{ab}^\pm , son los tensores métricos para las regiones definidas por $z \geq 0$ (M^+) y $z \leq 0$ (M^-).

Como bien sabemos, el tensor de Ricci lo podemos escribir a partir del tensor de Riemman de la forma

$$R_{ab} = g^{cd}R_{acbd}, \quad (1.10)$$

en donde por definición, el tensor de curvatura se escribe como

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{bd}^e\Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e\Gamma_{ed}^a. \quad (1.11)$$

Con el uso de las ecuaciones (2.9) y (2.10) y las definiciones para el tensor de Riemman, obtenemos para el tensor de Ricci la expresión

$$R_{ab} = R_{ab}^+\theta(z) + R_{ab}^-\{1 - \theta(z)\} + H_{ab}\delta(z), \quad (1.12)$$

en la cual, R_{ab}^\pm son los tensores de Ricci para las regiones definidas por $z \geq 0$ y $z \leq 0$, mientras que H_{ab} es el tensor de Ricci asociado a la hipersuperficie Σ definida por $z = 0$. Este ultimo tensor se escribe en términos de b_{ab} y del vector normal n_a mediante la expresión

$$H_{ab} = \frac{1}{2}\{b_b^z n_a - b_c^c n_a n_b + b_{az} n_b - b_{ab} g^{zz}\}, \quad (1.13)$$

donde todas las cantidades se evalúan en $z = 0^+$.

Suponiendo que el tensor de momento-energía se puede escribir como

$$T_{ab} = T_{ab}^+\theta(z) + T_{ab}^-\{1 - \theta(z)\} + Q_{ab}\delta(z), \quad (1.14)$$

donde T_{ab}^\pm representan el tensor de momento-energía para las regiones $z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente y Q_{ab} es el tensor de momento-energía de Σ , es decir, en la región $z = 0$. Podemos demostrar que las ecuaciones de Einstein en unidades geometrizadas ($c = 8\pi G = 1$),

$$T_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \quad (1.15)$$

son equivalentes al sistema de ecuaciones:

$$T_{ab}^\pm = R_{ab}^\pm - \frac{1}{2}g_{ab}R^\pm, \quad (1.16)$$

$$Q_{ab} = H_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}H, \quad (1.17)$$

el cual facilita el análisis por separado de las regiones $z \geq 0$ y $z \leq 0$ (2,17) y $z = 0$ que corresponde a la hipersuperficie Σ (2,18).

1.2. Soluciones discoidales axialmente simétricas

Como sabemos, la curvatura del espacio-tiempo, la cual se describe por el tensor de Riemman (2.12), da evidencia de la presencia de un campo gravitacional, que a su vez, es generado por una distribución de masa. La relación entre la fuente y la curvatura del espacio-tiempo que hemos estado considerando se describe por las ecuaciones (2.17) y (2.18).

Con el objetivo de generar en la hipersuperficie Σ una distribución discoidal de materia axialmente simétrica, y teniendo en cuenta las ideas anteriores, consideramos que la geometría de nuestro espacio-tiempo está descrita por la métrica conformestatica en coordenadas cilíndricas,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2), \quad (1.18)$$

para la cual exigimos que la función ψ sea continua, dependa sólo de las coordenadas R y z y que además sea una función par respecto a z , es decir,

$$\psi(R, -z) = \psi(R, z), \quad (1.19)$$

lo cual implica que la primera derivada de $\psi(R, z)$ respecto a z es impar

$$\psi_{,z}(R, -z) = -\psi_{,z}(R, z). \quad (1.20)$$

Además, imponemos la condición adicional

$$\psi_{,z} \Big|_{z=0^+} \neq 0. \quad (1.21)$$

De esta manera, con el tensor métrico asociado al elemento de línea (2.19), podemos calcular el tensor momento-energía del disco de acuerdo a la ecuación (2.18). Sin embargo, la única componente no nula del tensor Q_{ab} es

$$Q_t^t = -4\psi_{,z} e^{2\psi}, \quad (1.22)$$

la cual está evaluada en $z = 0^+$.

Con el tensor Q_{ab} ya calculado, podemos determinar el tensor de momento-energía superficial del disco mediante la integral:

$$S_{ab} = \int T_{ab} ds_n = \sqrt{g_{zz}} Q_{ab}, \quad (1.23)$$

donde $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$ y $T_{ab} = Q_{ab} \delta(\phi)$. Con esta integral, demostramos que la única componente no-nula de S_{ab} es

$$S_{tt} = 4\psi_{,z} e^{3\psi}. \quad (1.24)$$

También podemos resolver las ecuaciones de Einstein para las regiones $\phi > 0$ y $\phi < 0$ y así, calcular el tensor de momento-energía T_{ab}^\pm asociado. Al resolver las ecuaciones (2.17) obtenemos que las únicas componentes no nulas son:

$$T_{tt}^\pm = e^{4\psi} \left\{ 2\psi_{,RR} + 2\frac{\psi_{,R}}{R} + 2\psi_{,zz} - \psi_{,R}^2 - \psi_{,z}^2 \right\}, \quad (1.25)$$

$$T_{RR}^\pm = \psi_{,z}^2 - \psi_{,R}^2, \quad (1.26)$$

$$T_{\varphi\varphi}^\pm = R^2 \{ \psi_{,R}^2 + \psi_{,z}^2 \}, \quad (1.27)$$

$$T_{zz}^\pm = \psi_{,R}^2 - \psi_{,z}^2, \quad (1.28)$$

$$T_{Rz}^\pm = T_{zR} = -2\psi_{,R}\psi_{,z}, \quad (1.29)$$

para las cuales, vamos a suponer que nuestro disco, el cual tiene una densidad superficial de materia (2.25) diferente de cero debido a la condición impuesta (2.22), está inmerso en un espacio vacío; es decir, que el tensor de momento-energía T_{ab}^\pm es nulo; por lo tanto,

$$\psi_{,RR} + \frac{\psi_{,R}}{R} + \psi_{,zz} = 0, \quad (1.30)$$

$$\psi_{,z}^2 - \psi_{,R}^2 = 0, \quad (1.31)$$

$$\psi_{,R}^2 + \psi_{,z}^2 = 0, \quad (1.32)$$

$$\psi_{,R}\psi_{,z} = 0. \quad (1.33)$$

Este sistema de ecuaciones tiene como única solución $\psi(R, z)$ constante. Esto a su vez indica que la métrica es de tipo Minkowskiana; es decir, representa un espacio plano sin fuentes de campo gravitacional; pero como sabemos que en el espacio hay un disco con una densidad de masa diferente de cero, eso nos da el argumento necesario para afirmar que la solución de vacío no existe, por lo tanto, el modelo introduce de forma natural la existencia de un halo.

1.3. Interpretación física de los modelos de discos delgados.

El contenido físico del tensor de momento-energía tanto del disco como del halo, se debe analizar desde un marco de referencia localmente Minkowskiano, el cual está definido mediante la tétrada ortonormal de vectores:

$$e_{(0)}^a = e^{-\psi} \delta_0^a, \quad (1.34)$$

$$e_{(1)}^a = e^\psi \delta_1^a, \quad (1.35)$$

$$e_{(2)}^a = \frac{e^\psi}{R} \delta_2^a, \quad (1.36)$$

$$e_{(3)}^a = e^\psi \delta_3^a, \quad (1.37)$$

donde el vector $e_{(0)}^a$ representa la quadri-velocidad del sistema de referencia localmente Minkowskiano.

Con esta tétrada de vectores podemos calcular las componentes de S_{ab} en esta nueva base teniendo en cuenta que

$$S_{(m)(n)} = S_{ab}e_{(m)}^ae_{(n)}^b. \quad (1.38)$$

Por lo tanto, la única componente no nula de $S_{(m)(n)}$ es

$$S_{(t)(t)} = 4e^\psi\psi_{,z}. \quad (1.39)$$

Este resultado nos indica que el fluido presente en la hipersuperficie Σ es de polvo; es decir, es materia compuesta por partículas que no colisionan y por lo tanto, no tiene presiones asociadas.

De la misma manera, las componentes del tensor de momento-energía del halo, escritas en la nueva base se calculan de acuerdo a la expresión

$$T_{(m)(n)}^\pm = T_{ab}^\pm e_{(m)}^ae_{(n)}^b, \quad (1.40)$$

de donde concluimos que las componentes no nulas de $T_{(m)(n)}^\pm$ son:

$$T_{(t)(t)}^\pm = e^{2\psi} \left\{ 2\psi_{,RR} + 2\frac{\psi_{,R}}{R} + 2\psi_{,zz} - \psi_{,R}^2 - \psi_{,z}^2 \right\}, \quad (1.41)$$

$$T_{(R)(R)}^\pm = e^{2\psi} \left\{ \psi_{,z}^2 - \psi_{,R}^2 \right\}, \quad (1.42)$$

$$T_{(\varphi)(\varphi)}^\pm = e^{2\psi} \left\{ \psi_{,R}^2 + \psi_{,z}^2 \right\}, \quad (1.43)$$

$$T_{(z)(z)}^\pm = e^{2\psi} \left\{ \psi_{,R}^2 - \psi_{,z}^2 \right\}, \quad (1.44)$$

$$T_{(R)(z)}^\pm = T_{(z)(R)} = -2e^{2\psi}\psi_{,R}\psi_{,z}. \quad (1.45)$$

Sin embargo, podemos darnos cuenta que el tensor $T_{(m)(n)}^\pm$ es diagonalizable, por lo tanto para determinar el contenido físico del tensor de momento-energía del halo, debemos primero resolver el problema de autovectores y autovalores

$$T_{(m)(n)}^\pm \xi^{(n)} = \lambda \eta_{(m)(n)} \xi^{(n)}, \quad (1.46)$$

donde λ es el autovalor asociado a cada autovector $\xi^{(n)}$.

Al resolver la ecuación característica dada por

$$\left| T_{(m)(n)}^\pm - \lambda \eta_{(m)(n)} \right| = 0, \quad (1.47)$$

obtenemos como resultado los autovalores:

$$\lambda_0 = -T_{(t)(t)}^\pm, \quad (1.48)$$

$$\lambda_1 = T_{(\varphi)(\varphi)}^\pm, \quad (1.49)$$

$$\lambda_2 = T_{(\varphi)(\varphi)}^\pm, \quad (1.50)$$

$$\lambda_3 = T_{(R)(z)}^\pm. \quad (1.51)$$

Ahora, para cada λ se resuelve la ecuación (2.47) y se calculan los autovectores normalizados

$$\xi_0^{(a)} = \left(e^{-\psi}, 0, 0, 0 \right), \quad (1.52)$$

$$\xi_1^{(a)} = \left(0, 0, \frac{1}{R}e^\psi, 0 \right), \quad (1.53)$$

$$\xi_2^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \left(0, e^\psi, 0, -\Omega e^\psi \right), \quad (1.54)$$

$$\xi_2^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \left(0, \Omega e^\psi, 0, e^\psi \right), \quad (1.55)$$

donde $\Omega = \psi_{,R}/\psi_{,z}$.

Con esta base de autovectores, calculamos las componentes del tensor de momento-energía del halo por medio de la ecuación:

$$T_{\hat{m}\hat{n}}^\pm = T_{(a)(b)}^\pm \xi_{\hat{m}}^{(a)} \xi_{\hat{n}}^{(b)}. \quad (1.56)$$

De aquí encontramos que las componentes no nulas de $T_{\hat{m}\hat{n}}^\pm$ son

$$T_{\hat{t}\hat{t}}^\pm = e^{2\psi} (2\psi_{,RR} + 2\frac{\psi_{,R}}{R} + 2\psi_{,zz} - \psi_{,R}^2 - \psi_{,z}^2), \quad (1.57)$$

$$T_{\hat{R}\hat{R}}^\pm = e^{2\psi} (\psi_{,z}^2 + \psi_{,R}^2), \quad (1.58)$$

$$T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^\pm = e^{2\psi} (\psi_{,z}^2 + \psi_{,R}^2), \quad (1.59)$$

$$T_{\hat{z}\hat{z}}^\pm = -e^{2\psi} (\psi_{,z}^2 + \psi_{,R}^2). \quad (1.60)$$

Mediante un análisis detallado del tensor $T_{\hat{m}\hat{n}}^\pm$, podemos determinar que la componente $T_{\hat{t}\hat{t}}^\pm$ es la densidad de energía del fluido en el halo y las componentes $T_{\hat{R}\hat{R}}^\pm$, $T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^\pm$ y $T_{\hat{z}\hat{z}}^\pm$ son los esfuerzos principales. Es decir,

$$T_{\hat{t}\hat{t}}^\pm = \rho = e^{2\psi} (2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi), \quad (1.61)$$

$$T_{\hat{R}\hat{R}}^\pm = p_1 = e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.62)$$

$$T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^\pm = p_2 = e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.63)$$

$$T_{\hat{z}\hat{z}}^\pm = p_3 = -e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi. \quad (1.64)$$

Con estos esfuerzos podemos definir la presión del fluido como

$$p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3); \quad (1.65)$$

por lo tanto se han obtenido 3 propiedades físicas que brindan información clave sobre el comportamiento del disco y del halo. Para el disco se calculo la densidad superficial de masa

$$\sigma = 4e^\psi \psi_{,z}; \quad (1.66)$$

y para el halo se calculo la densidad volumétrica de masa y la presión del fluido

$$\rho = e^{2\psi}(2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi), \quad (1.67)$$

$$p = \frac{1}{3}e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi. \quad (1.68)$$

Como vemos, las soluciones se encuentran todavía en términos de la función ψ , la cual es hasta ahora desconocida, sin embargo, para que las soluciones que se van a obtener tengan un comportamiento físico apropiado, éstas deben satisfacer las condiciones de energía [29], las cuales equivalen a exigir que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\rho \geq 0, \quad (1.69)$$

$$|\rho| \geq |p_i|; \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.70)$$

$$\rho + p_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.71)$$

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0. \quad (1.72)$$

Con estas desigualdades y con los resultados (2.62), (2.63), (2.64) y (2.65), obtenemos dos condiciones adicionales sobre la función ψ , una para el halo y otra para el disco, las cuales son respectivamente

$$\nabla^2\psi \geq \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.73)$$

$$\psi_{,z} \Big|_{z=0^+} \geq 0. \quad (1.74)$$

Las condiciones (2.74) y (2.75) que hemos obtenido sobre la función ψ , presentan restricciones sobre las propiedades físicas tanto del disco (2.67) como del halo ((2.68), (2.69)). Sin embargo, dichas condiciones representan a su vez, una amplia gama de soluciones para la función ψ ; Por lo tanto, es importante, al menos en una primera instancia, buscar alternativas que nos conduzcan a resolver el problema de manera sencilla pero elegante.

Una manera de satisfacer las condiciones (2.74) y (2.75), es considerar funciones ψ que cumplan con la ecuación

$$\nabla^2\psi = k\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.75)$$

con $k \geq 1$ y (2.75) se toma como una condición de contorno al momento de solucionar (2.76). La ecuación anterior nos permite obtener una ecuación de estado, para el fluido contenido en el halo, de la forma

$$p = \frac{\rho}{3(2k-1)}. \quad (1.76)$$

La ecuación de estado que hemos obtenido en (2.77) nos muestra que la relación entre la presión y la densidad de energía del fluido que conforma el halo es el factor de escala $\gamma = \frac{1}{3(2k-1)}$, por lo tanto, al analizar el comportamiento físico de la densidad de energía del fluido estamos también analizando el de la presión, razón por la cual de ahora en adelante solo analizaremos la densidad ρ . Los posibles tipos de fluidos que hemos obtenido para el halo tienen una ecuación de estado de la forma $p = \gamma\rho$. Dependiendo del valor de γ , se tienen diferentes tipos de fluidos: si $\gamma = 0$ se obtiene un fluido de polvo ($p = 0$), si $\gamma = 1/3$ se obtiene un fluido de radiación ($p = \rho/3$) y si γ tiene otro valor diferente, obtenemos otra ecuación que corresponde a otro tipo de fluido. Sin embargo, como en nuestro caso

$k \geq 1$, entonces γ toma valores en el intervalo $(0, \frac{1}{3}]$; es decir, si $k = 1$, $\gamma = 1/3$, lo cual nos representa un fluido de radiación y si $k > 1$, $\gamma < 1/3$, el cual representa otro tipo de fluido diferente. En nuestro modelo, no obtenemos un fluido de polvo ya que γ no puede ser igual a 0.

La ecuación (2.76) la podemos reescribir como

$$\nabla^2(e^{-k\psi}) = 0, \quad (1.77)$$

la cual facilmente podemos identificar con la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$. Sin embargo, consideramos la relación entre la función Φ y la función ψ de la forma

$$e^{k\psi} = \frac{1}{1 - \Phi}, \quad (1.78)$$

con el objetivo de garantizar que la métrica sea asintóticamente plana.

Versión Relativista del Modelo Clásico de Kuzmin-Toomre

Una solución al problema clásico de calcular una expresión para el potencial gravitacional Φ , generado por una distribución discoidal delgada de materia σ , fue propuesta inicialmente por Kuzmin [17] y después generalizada por Toomre en lo que se conoce como el modelo clásico de Kuzmin-Toomre [5, 25].

Para resolver la ecuación (2.78), hacemos uso del modelo clásico de Kuzmin-Toomre de orden n , el cual, propone como solución para el potencial Φ , la expresión

$$\Phi_n(r, \theta) = - \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta); \quad r = \sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}, \quad (2.1)$$

con lo cual, las soluciones quedarían en términos de las constantes A_l .

La expresión anterior se obtuvo mediante el método de desplazamiento, corte y reflexión, el cual consiste en realizar una transformación sobre la coordenada z de la forma

$$z \rightarrow |z| + a, \quad (2.2)$$

con la cual se obtiene una solución para el potencial generado por una distribución discoidal de masa en el plano $z = 0$. Así, obtenemos una solución discoidal diferente para cada n , el cual toma valores de $0, 1, 2, \dots$, es decir, se consigue una familia de soluciones.

De acuerdo a la relación entre las funciones ψ y Φ , impuesta por la ecuación (2.79), podemos escribir las propiedades físicas del sistema en términos de las primeras derivadas de la función Φ respecto a R y z . Por ejemplo, la densidad de energía superficial del disco (2.67) será

$$\sigma = \frac{4}{k} \frac{\Phi_{,z}}{(1 - \Phi)^{\frac{1+k}{k}}}. \quad (2.3)$$

Mientras que la densidad volumétrica de energía del halo (2.68) será,

$$\rho = \frac{2k - 1}{k^2} \frac{\Phi_{,R}^2 + \Phi_{,z}^2}{(1 - \Phi)^{2(1+k)/k}}. \quad (2.4)$$

Las soluciones obtenidas anteriormente describen las distribuciones de masa de un halo de materia oscura y de un disco que está inmerso en dicho fluido; por lo tanto a partir

de estas soluciones se puede obtener como resultado la masa total tanto del halo como del disco. Teniendo en cuenta lo anterior, es interesante demostrar que la masa de nuestro sistema converge; de manera que estas puedan ser calculadas. Para esto hacemos uso del criterio de comparación del límite [31].

Teorema 2.0.1 *Teorema de comparación del límite.* Si dos integrales propias $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ existen para cada $b \geq a$, siendo $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$, y si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \text{ donde } c \neq 0,$$

entonces las integrales $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ o convergen ambas o divergen ambas.

Para calcular las masas tanto del halo como del disco debemos resolver para cada caso la integral

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) m^a \xi_{(t)}^b \sqrt{h} d^3y, \quad (2.5)$$

donde m^a es el vector normal a la hipersuperficie, $\xi_{(t)}^b$ es el vector de killing tipo tiempo, h es el determinante de la métrica inducida y d^3y es el elemento de volumen del espacio [14].

Para el caso de la densidad superficial de masa del disco tenemos que $m^a = e_{(t)}^a$, $\xi_{(t)}^b = e^\psi e_{(t)}^b$, $h = R^2 e^{-6\psi}$, $d^3y = RdRd\varphi$ y $T_{ab} = e^\psi S_{ab} \delta(z)$; por lo tanto, la integral (3.5) se reduce a

$$M_D = \frac{8\pi}{k} \int_0^\infty (k\psi_{,z}) RdR. \quad (2.6)$$

Con la ecuación (2.79), expresamos la integral en términos de Φ ,

$$M_D = \frac{8\pi}{k} \int_a^\infty \left(\frac{\Phi_{,z}}{1-\Phi} \right) r_0 dr_0, \quad (2.7)$$

en la cual se ha realizado la sustitución $r_0^2 = R^2 + a^2$. El término entre paréntesis esta evaluado en $z = 0^+$.

Ahora, debemos demostrar que

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = c, \quad (2.8)$$

con $c \neq 0$, y $\mu_n(r_0) = \frac{\Phi_{n,z}}{1-\Phi_n}$.

Con el objetivo de calcular μ_n y μ_{n+1} utilizamos la solución (3.1) con la cual evaluamos en $z = 0^+$ la función Φ_n y su primera derivada respecto a z

$$\Phi_n |_{z=0^+} = - \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0), \quad (2.9)$$

$$\Phi_{n,z} |_{z=0^+} = \sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0), \quad (2.10)$$

en donde $r_0^2 = R^2 + a^2$. Con lo anterior podemos escribir la función μ_n y μ_{n+1} , las cuales son respectivamente

$$\mu_n(r_0) = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0)}, \quad (2.11)$$

$$\mu_{n+1}(r_0) = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0) + \frac{A_{n+1}(n+2)}{r_0^{n+3}} P_{n+2}(a/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0) + \frac{A_{n+1}}{r_0^{n+2}} P_{n+1}(a/r_0)}, \quad (2.12)$$

y con ellas podemos calcular su relación:

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \left[1 + \frac{\frac{A_{n+1}(n+2)}{r_0^{n+3}} P_{n+2}(a/r_0)}{\sum_{l=0}^n \frac{A_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(a/r_0)} \right] \left[\frac{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{r_0^{l+1}} P_l(a/r_0) + \frac{A_{n+1}}{r_0^{n+2}} P_{n+1}(a/r_0)} \right]. \quad (2.13)$$

Ahora, con el objetivo de calcular (3.8), analizamos el comportamiento de la función (3.13) en el limite cuando $r_0 \rightarrow \infty$; en este limite, tanto el primero como el segundo termino entre parentesis de la ecuación anterior tienden a 1. Así, hemos demostrado que

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} = 1; \quad (2.14)$$

por lo tanto, si logramos demostrar que la masa del disco para el modelo $n = 0$ converge, entonces esperamos que para cualquier n la masa también converja.

Para el caso de la densidad volumétrica de masa del halo, tenemos que en coordenadas esféricas $d^3y = r \sin\theta dr d\phi dz$, la integral (3.5) se reduce a

$$M_H = \frac{4\pi}{k} \int_0^\pi \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_{,R}^2 + \Phi_{,z}^2}{(1-\Phi)^2} \right] r \sin\theta dr d\theta; \quad (2.15)$$

sin embargo, para facilitar la aplicación del teorema de comparación del limite hacemos la sustitución $\tau = \cos\theta$,

$$M_H = \frac{4\pi}{k} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_{,R}^2 + \Phi_{,z}^2}{(1-\Phi)^2} \right] r dr d\tau. \quad (2.16)$$

Ahora, debemos demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = c, \quad (2.17)$$

con $c \neq 0$, y $\eta_n(r, \tau) = \frac{\Phi_{n,R}^2 + \Phi_{n,z}^2}{(1-\Phi_n)^2}$.

Con la ecuación (3.1) y siguiendo un desarrollo similar al realizado para el cálculo de la masa del disco podemos demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = 1, \quad (2.18)$$

lo cual nos indica que independientemente del valor de τ , la integral converge y que si para $n = 0$, $F_0(\tau) = \int_0^\infty \eta_0(r, \tau) r dr$ converge, entonces también lo hará para todo n .

Como la integral en τ va de -1 a 1 , y como suponemos que $F(\tau)$ converge para todo τ , entonces

$$M_H = \frac{4\pi}{k} \int_{-1}^1 F(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

también convergerá. Por lo tanto, si logramos demostrar que para el modelo $n = 0$ la masa del halo converge, entonces también lo hará para cualquier n .

Ahora, es natural pensar en comprobar que las soluciones tengan un comportamiento físico adecuado. Para esto particularizamos la ecuación (3.1) para diferentes valores de n y dejaremos abierta la discusión anterior hasta calcular las masas del disco y del halo correspondientes al modelo $n = 0$.

2.1. Modelo $n = 0$

Para el primer valor de n ($n = 0$), la función Φ (3.1), toma la forma más sencilla reduciéndose a

$$\Phi_0(r, \theta) = -\frac{A_0}{r}, \quad (2.20)$$

donde $r = r(r, z) = \sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}$, como lo habíamos mencionado antes.

Para la función Φ_0 , calculamos las primeras derivadas con respecto a R y a z :

$$\Phi_{0,R} = A_0 \frac{R}{r^3}, \quad (2.21)$$

$$\Phi_{0,z} = A_0 \frac{|z| + a}{r^3} |z|_{,z}. \quad (2.22)$$

Con estas derivadas y haciendo uso de las ecuaciones (3.3) y (3.4), podemos calcular, para este caso, las propiedades que describen físicamente el sistema conformado por un disco inmerso en un halo. Para el caso de la densidad superficial de energía del disco, obtenemos una expresión que viene dada como

$$\tilde{\sigma}(\tilde{R}) = \frac{\left(\tilde{A}_0 + \sqrt{\tilde{R}^2 + 1}\right)^{-(1+k)/k}}{\left(\tilde{R}^2 + 1\right)^{(2k-1)/2k}}, \quad (2.23)$$

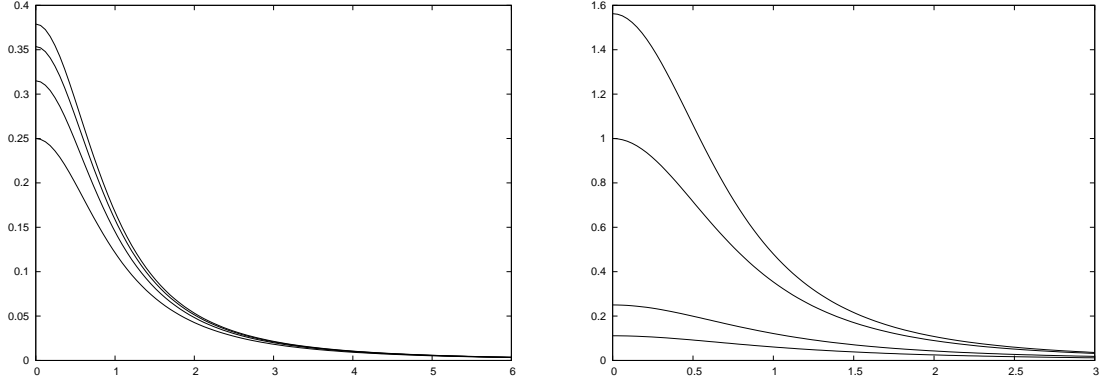


Figura 2.1: Modelo $n = 0$. Densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función de \tilde{R} . En la figura de la izquierda se grafica $\tilde{\sigma}(\tilde{R})$ para $\tilde{A}_0 = 1$ y $k = 1; 1,5; 2; 2,5$, comenzando con la curva inferior hacia arriba respectivamente; mientras que la figura de la derecha se grafica $\tilde{\sigma}(\tilde{R})$ para $k = 1$ y $\tilde{A}_0 = -0,2; 0; 1; 2$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente.

donde $\tilde{R} = R/a$, $\tilde{A}_0 = A_0/a$ y $\tilde{\sigma}(\tilde{R}) = \frac{ka}{4\tilde{A}_0}\sigma(\tilde{R})$.

El comportamiento de la densidad superficial de masa del disco para todos los casos en los cuales k toma diferentes valores es el mismo (figura 3.1); teniendo en cuenta, que de acuerdo a la ecuación (2.76), $k \geq 1$. Lo mismo sucede con los diferentes valores de \tilde{A}_0 ; para los cuales se demuestra fácilmente que están restringidos al subconjunto de los números reales $(-1, \infty)$.

En estas graficas, es evidente la existencia de una región en donde hay una mayor concentración de masa, la cual crece cuando $\tilde{R} \rightarrow 0$. En cambio, cuando \tilde{R} se hace muy grande; es decir, cuando nos alejamos del centro del disco, la densidad de masa se hace muy cercana a cero. Este comportamiento es típico de un disco galáctico, ya que existe una región central o bulbo donde se encuentra concentrada la mayor cantidad de masa del disco, y a medida que nos alejamos en dirección radial del centro galáctico, la densidad de materia tiende a cero.

Ahora, es interesante volver a señalar que el disco que hemos obtenido esta inmerso en un halo o fluido ya que se obtiene una densidad volumétrica de energía diferente de cero; es importante por lo tanto, analizar el comportamiento de dicha densidad que de acuerdo a la ecuación (3.4) tiene la forma

$$\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{\left(\tilde{A}_0 + \sqrt{\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2}\right)^{-2(k+1)/k}}{\left(\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2\right)^{(k-1)/k}}, \quad (2.24)$$

con $\tilde{z} = z/a$, $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{k^2 a^2}{\tilde{A}_0^2 (2k+1)} \rho(\tilde{R}, \tilde{z})$.

Recordemos que de acuerdo a la ecuación de estado (2.77), la diferencia entre la presión del fluido del halo y su densidad de energía es el factor de escala $1/3(2k+1)$; sin embargo, el comportamiento es el mismo.

En la figura 3.2, analizamos el comportamiento de la solución (3.24). En ella observamos que el comportamiento para cada uno de los casos es similar. A medida que nos acercamos al centro del halo, el cual coincide con el centro del disco; es decir, para $\tilde{R} \rightarrow 0$ y $\tilde{z} \rightarrow 0$, la densidad volumétrica de energía se hace máxima. Pero cuando nos alejamos del centro del halo; que es igual a que $\tilde{R} \rightarrow \infty$, o $\tilde{z} \rightarrow \infty$, o ambos casos a la vez, la densidad de energía se hace cero. Cabe resaltar que la densidad volumétrica tiene un comportamiento muy similar a la densidad superficial del disco, lo cual nos hace concluir que la energía para el sistema conformado por un disco inmerso en un halo, esta concentrada en la región central y tiene a cero cuando nos alejamos de ésta.

Las expresiones para la densidad superficial de masa del disco y para la densidad volumétrica de masa del halo que hemos calculado en este modelo son sencillas; por lo tanto, no se presenta ninguna dificultad al momento de resolver tanto la integral (3.7) que corresponde a la masa del disco como la integral (3.15) que corresponde a la masa del halo. Al resolver dichas integrales obtenemos las expresiones

$$M_{D_0} = \frac{8\pi a}{k} \ln \left(1 + \frac{A_0}{a} \right), \quad (2.25)$$

$$M_{H_0} = \frac{8\pi a}{k} \left[\ln \left(1 + \frac{A_0}{a} \right) + \frac{A_0}{a} \right], \quad (2.26)$$

que son soluciones para la masa total contenida en el disco (3.25) y en el halo (3.26). Es claro, al observar las expresiones para la masa del disco M_{D_0} y la masa del halo M_{H_0} , que para el modelo $n = 0$, existe una relación de tipo lineal entre ambas de la forma

$$M_{H_0} = M_{D_0} + \frac{8\pi A_0}{k} \quad (2.27)$$

Retomando la discusión sobre la convergencia de la masa total del disco (3.6) y la masa del halo (3.15), recordemos que probar la convergencia sobre las masas del modelo $n = 0$ implica que todas las demás masas también van a converger. Como las masas del disco y del halo convergen para este primer modelo, entonces podemos asegurar que las demás masas también lo harán. Este resultado es importante pues obtenemos de nuestra familia de discos inmersos en halos una cantidad (masa) que en principio es medible por la observación ya sea directa o indirecta.

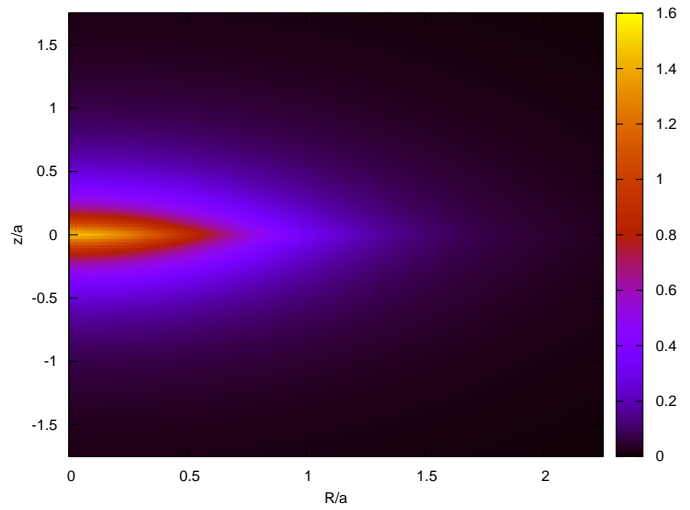
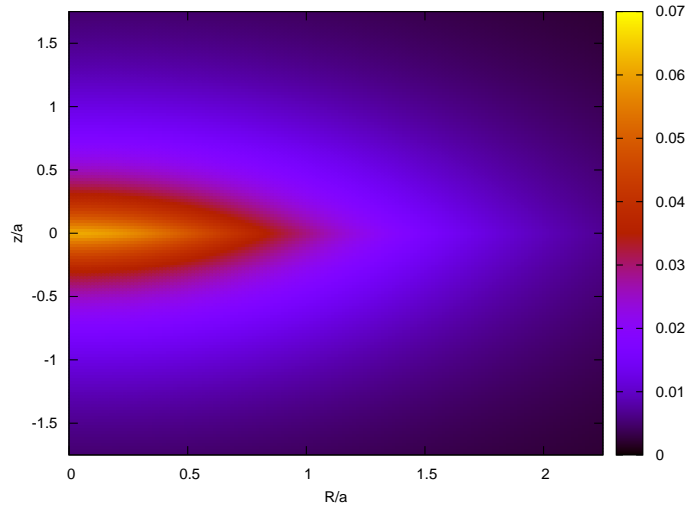


Figura 2.2: Modelo $n = 0$. Gráficas de contorno de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ en función de \tilde{R} y \tilde{z} . En la figura superior se grafica $\tilde{\rho}$ para $\tilde{A}_0 = 1$, $k = 1$. En la figura inferior se grafica $\tilde{\rho}$ para $k = 1$, $\tilde{A}_0 = -0,1$.

2.2. Modelo $n = 1$

Cuando n toma el valor particular de 1, la expresión general para el potencial Φ , se reduce a

$$\Phi_1(R, z) = -\frac{A_0}{r} - \frac{A_1}{r^2} \cos\theta, \quad (2.28)$$

ya que el polinomio de Legendre $P_1 = \cos\theta = \frac{|z|+a}{r}$, y como habíamos mencionado antes, $r = r(R, z) = \sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}$.

Para esta nueva función, calculamos las primeras derivadas con respecto a R y a z , las cuales son respectivamente

$$\Phi_{1,R} = \frac{R}{r^3} \left(A_0 + \frac{3A_1}{r^2} (|z| + a) \right) \quad (2.29)$$

$$\Phi_{1,z} = \frac{|z|_{,z}}{r^3} \left[(|z| + a) \left(A_0 + \frac{3A_1}{r^2} (|z| + a) \right) - A_1 \right]. \quad (2.30)$$

Al realizar el procedimiento descrito para el modelo $n = 0$, podemos calcular la densidad superficial de energía del disco para el nuevo valor de n ; la cual viene descrita por la expresión

$$\tilde{\sigma}(\tilde{R}) = \frac{[\tilde{A}_0(1 + \tilde{R}^2) + \tilde{A}_1(2 - \tilde{R}^2)] [1 + \tilde{R}^2]^{\frac{3-2k}{2k}}}{[(1 + \tilde{R}^2)^{3/2} + \tilde{A}_0(1 + \tilde{R}^2) + \tilde{A}_1]^{\frac{1+k}{k}}}, \quad (2.31)$$

donde $\tilde{A}_0 = A_0/a$, $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$, $\tilde{R} = R/a$, $\tilde{z} = z/a$ y $\tilde{\sigma}(\tilde{R}, \tilde{z}) = (ka/4)\sigma(\tilde{R}, \tilde{z})$.

Para este modelo particular, el comportamiento de la densidad superficial de energía es similar para diferentes valores de k , \tilde{A}_0 y \tilde{A}_1 (Figura 3.3). La elección de las constantes en un principio es aleatoria; sin embargo, debido a que exigimos un comportamiento físico adecuado, se establecen ciertas restricciones sobre los valores numéricos de dichas constantes, lo cual trae como resultado, evitar singularidades en las soluciones o densidades de energía negativas.

El comportamiento para la densidad superficial de energía de este modelo es similar al obtenido anteriormente ($n = 0$) y describe de igual manera un disco en el cual se presenta una densidad de energía máxima en el centro ($R \rightarrow 0$) y cae a cero cuando $\tilde{R} \rightarrow \infty$.

También podemos calcular la expresión analítica para la densidad volumetrica del fluido que conforma el halo, reemplazando las derivadas de la función Φ (3.16 y 3.17) en la ecuación

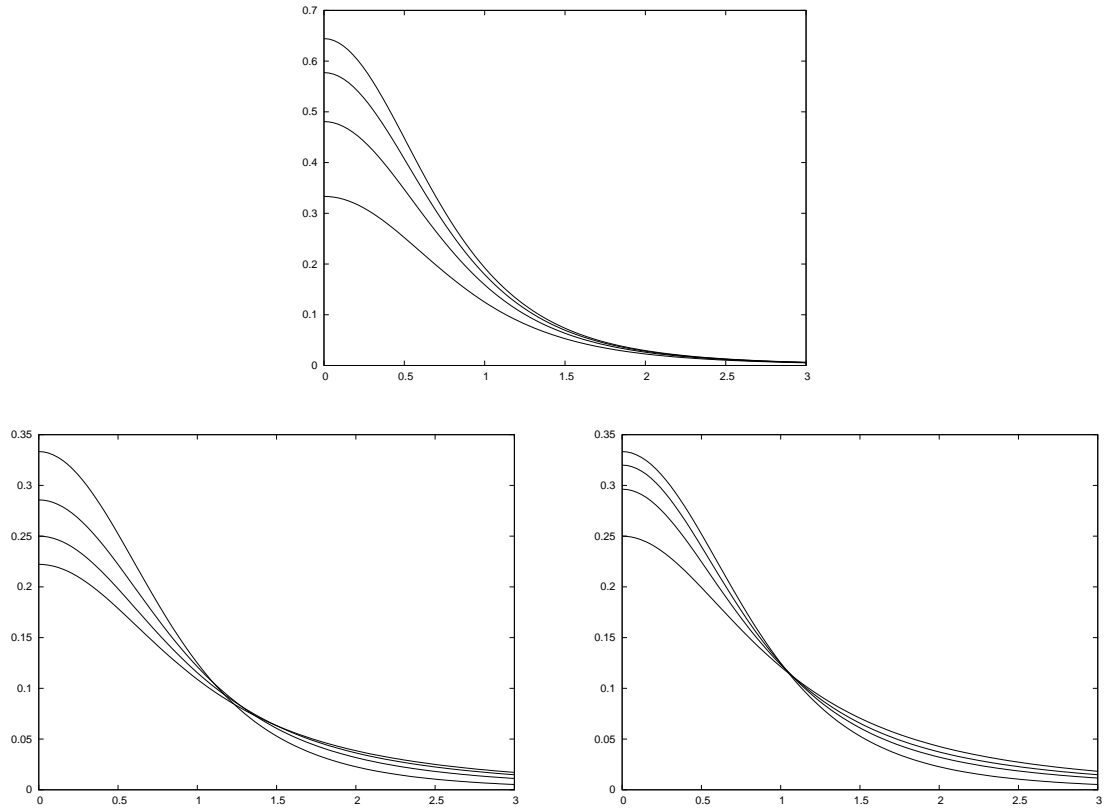


Figura 2.3: Modelo $n = 1$. Densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función de \tilde{R} . En la figura superior se grafica $\tilde{\sigma}$ para $\tilde{A}_0 = 1$, $\tilde{A}_1 = 1$ y para $k = 1; 1,5; 2; 2,5$ comenzando desde la grafica inferior hasta la superior. La figura inferior izquierda muestra las curvas para $k = 1$, $\tilde{A}_1 = 1$ y $\tilde{A}_0 = 1; 1,5; 2; 2,5$, comenzando desde la curva superior hasta la inferior. La grafica inferior derecha muestra las curvas para $k = 1$, $\tilde{A}_0 = 1$ y $\tilde{A}_1 = 0; 0,25; 0,5; 1$, comenzando de la curva inferior a la superior.

(3.4); así, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = & \frac{\tilde{R}^2 \{ \tilde{A}_0 [\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2] + 3\tilde{A}_1 (|\tilde{z}| + 1) \}^2}{[\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2]^{\frac{2k-3}{k}}} \\ & + \frac{\{ [|\tilde{z}| + 1] [\tilde{A}_0 (\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2) + 3\tilde{A}_1 (|\tilde{z}| + 1)] - \tilde{A}_1 [\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2] \}^2}{\{ [\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2]^{3/2} + [\tilde{R}^2 + (|\tilde{z}| + 1)^2] \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 (|\tilde{z}| + 1) \}^{\frac{2(1+k)}{k}}}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde, $\tilde{A}_0 = A_0/a$, $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$ y $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{k^2 a^2}{2k-1} \rho(\tilde{R}, \tilde{z})$.

En la figura 3.4, se presenta la misma situación que en el modelo anterior, ya que en la región central; es decir, cuando $\tilde{R} \rightarrow 0$ y $\tilde{z} \rightarrow 0$, obtenemos un máximo de densidad volumétrica de energía, mientras que si nos alejamos en cualquiera de las direcciones, la densidad de energía tiende a cero.

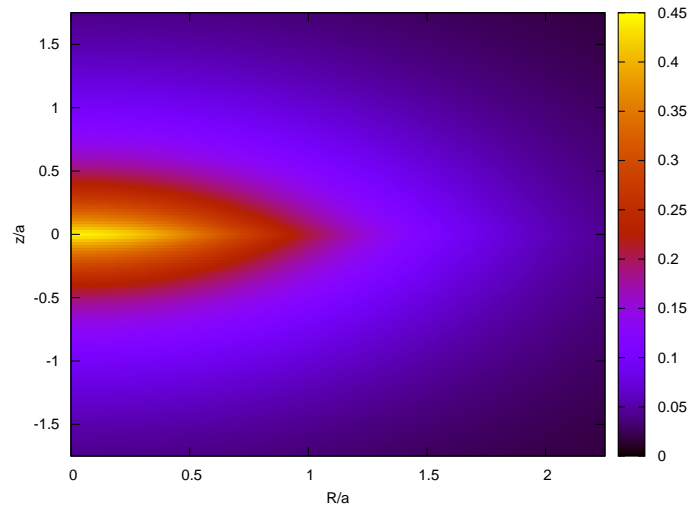
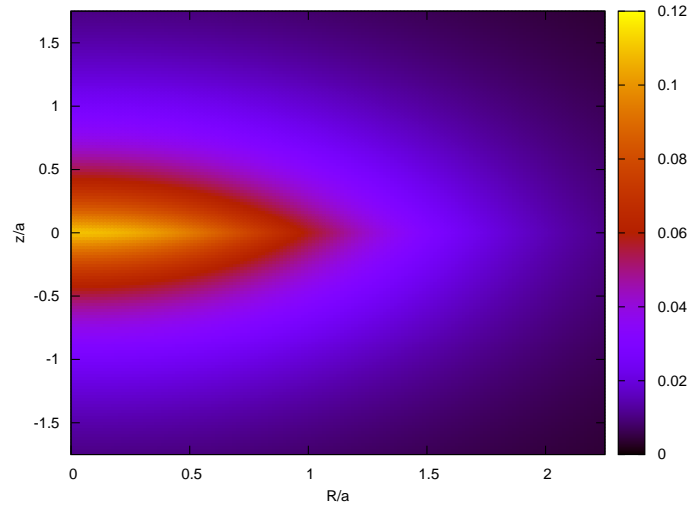


Figura 2.4: Modelo $n = 1$. Gráfica de contorno de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ en función de \tilde{R} y \tilde{z} , para diferentes valores $(k, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$. La grafica superior corresponde a los valores $(1; 1; 1)$ y la inferior a los valores $(3; 3; 3)$.

2.3. Modelo $n = 2$

Para este nuevo valor de n , la función Φ que se muestra en la ecuación (3.1) toma la forma

$$\Phi_2(R, z) = -\frac{A_0}{r} - \frac{A_1}{r^2} \cos\theta - \frac{A_2}{r^3} (3\cos^2\theta - 1), \quad (2.33)$$

donde, $P_1 = \cos\theta = \frac{|z|+a}{r}$ y $P_2 = \frac{1}{2} \left[3\left(\frac{|z|+a}{r}\right)^2 - 1 \right]$ son los polinomios de Legendre y $r = \sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}$.

Calculamos las primeras derivadas respecto a R y z , las cuales tienen la forma

$$\Phi_{2,R} = A_0 \frac{R}{r^3} + 3A_1 \frac{R(|z| + a)}{r^5} + \frac{5A_2 R [3(|z| + a)^2 - r^2]}{2r^7} + A_2 \frac{R}{r^5} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2,z} = & A_0 \frac{|z| + a}{r^3} |z|_{,z} + 3A_1 \frac{(|z| + a)^2}{r^5} |z|_{,z} - A_1 \frac{|z|_{,z}}{r^3} \\ & + \frac{5A_2 [3(|z| + a)^2 - r^2] [|z| + a]}{2r^7} |z|_{,z} - 3A_2 \frac{|z| + a}{r^5} |z|_{,z} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Al remplazar la ecuación (3.35) en (3.3), obtenemos la expresión para la densidad superficial de energía del disco correspondiente al modelo particular $n = 2$:

$$\tilde{\sigma}(\tilde{R}) = \frac{(2\tilde{A}_0 - 2\tilde{A}_1)(\tilde{R}^2 + 1)^2 + 6(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{R}^2 + 1) + 5\tilde{A}_2(2 - \tilde{R}^2)}{\left[2(\tilde{R}^2 + 1)^{5/2} + 2\tilde{A}_0(\tilde{R}^2 + 1)^2 + 2\tilde{A}_1(\tilde{R}^2 + 1) + \tilde{A}_2(2 - \tilde{R}^2) \right]^{\frac{1+k}{k}}} (\tilde{R}^2 + 1)^{\frac{5-2k}{k}}, \quad (2.36)$$

donde $\tilde{\sigma}(\tilde{R}) = (ka/2)\sigma(\tilde{R})$, $R = a\tilde{R}$, $\tilde{A}_0 = A_0/a$, $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$ y $\tilde{A}_2 = A_2/a^3$.

El comportamiento de esta solución es similar al de los modelos anteriores ($n = 0$ y $n = 1$): se presenta una región central ($\tilde{R} \rightarrow 0$), en la cual, existe una mayor concentración de energía, la cual va decreciendo a medida que nos alejamos en dirección radial del centro del disco (figura 3.5).

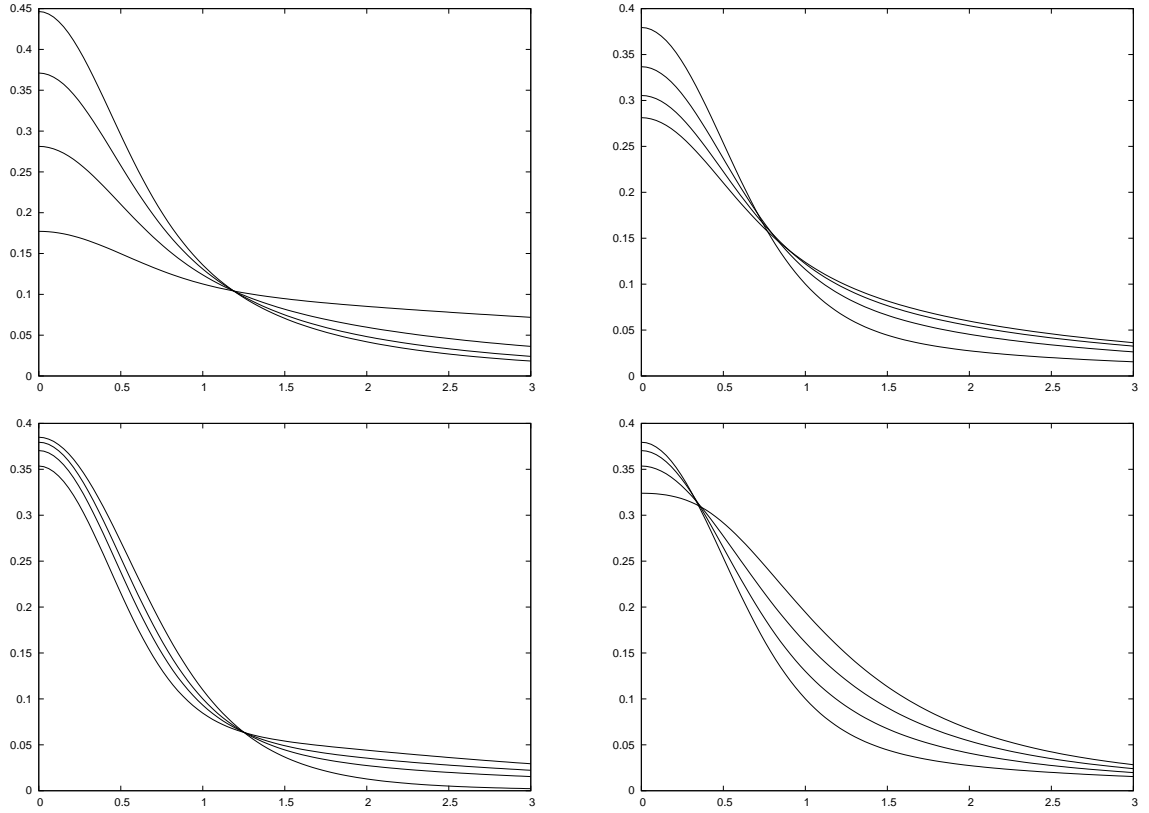


Figura 2.5: Modelo $n = 2$. Densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}(\tilde{R})$ en función de \tilde{R} . En la figura superior izquierda se muestra el comportamiento de $\tilde{\sigma}$ para $\tilde{A}_0 = 5$, $\tilde{A}_1 = 1$, $\tilde{A}_2 = 1$ y para $k = 1,5; 2; 2,5; 3$, comenzando de la curva inferior a la superior. En la figura superior derecha se grafica $\tilde{\sigma}$, para diferentes valores de \tilde{A}_0 : 2; 3; 4; 5, comenzando desde la curva superior hasta la inferior. En la figura inferior izquierda se grafican diferentes valores de $\tilde{A}_1 = 0; 0,5; 1; 2$, comenzando desde la curva inferior hasta la superior. En la grafica inferior derecha se grafica $\tilde{\sigma}$ para diferentes valores de $\tilde{A}_2 = -0,5; 0; 0,5; 1$, comenzando desde la curva inferior hasta la superior.

Al cambiar los valores para las constantes k , \tilde{A}_0 , \tilde{A}_1 y \tilde{A}_2 , cambia el máximo de densidad de energía, que para todos los casos físicamente aceptables se presenta en $\tilde{R} = 0$. También cambia la velocidad de decaimiento de $\tilde{\sigma}$, lo cual es de interés cuando se aplican estos modelos para la descripción de objetos astrofísicos particulares.

Para la densidad volumétrica de energía del fluido que conforma el halo, reemplazamos las primeras derivadas de la función Φ_2 en la ecuación (3.4). Al realizar este procedimiento, obtenemos la expresión,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = & \frac{\left[\tilde{A}_0 \tilde{R} \tilde{r}^4 + (3\tilde{A}_1 \tilde{Z} + \tilde{A}_2) \tilde{R} \tilde{r}^2 + \frac{5\tilde{A}_2}{2} (2\tilde{Z}^2 - \tilde{R}^2) \right]^2}{\left[\tilde{r}^5 + \tilde{A}_0 \tilde{r}^4 + \tilde{A}_1 \tilde{r}^2 \tilde{Z} + \frac{\tilde{A}_2}{2} (\tilde{Z}^2 - \tilde{R}^2) \right]^{\frac{2(1+k)}{k}}} \tilde{r}^{\frac{10-4k}{k}} \\ & + \frac{\left[(\tilde{A}_0 \tilde{Z} - \tilde{A}_1) \tilde{r}^4 + 3\tilde{Z} (\tilde{A}_1 \tilde{Z} - \tilde{A}_2) \tilde{r}^2 + \frac{5\tilde{A}_2}{2} \tilde{Z} (2\tilde{Z}^2 - \tilde{R}^2) \right]^2}{\left[\tilde{r}^5 + \tilde{A}_0 \tilde{r}^4 + \tilde{A}_1 \tilde{r}^2 \tilde{Z} + \frac{\tilde{A}_2}{2} (\tilde{Z}^2 - \tilde{R}^2) \right]^{\frac{2(1+k)}{k}}} \tilde{r}^{\frac{10-4k}{k}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = (ka)^2 / (2k-1) \rho(\tilde{R}, \tilde{z})$, $\tilde{r} = \sqrt{(|\tilde{z}|+1)^2 + \tilde{R}^2}$, $\tilde{Z} = |\tilde{z}|+1$, $R = a\tilde{R}$, $z = a\tilde{z}$, $\tilde{A}_0 = A_0/a$, $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$ y $\tilde{A}_2 = A_2/a^3$.

La figura 3.6 muestra que el comportamiento para la densidad volumétrica de energía ($\tilde{\rho}$) es similar al de los modelos anteriores: cuando \tilde{R} y \tilde{z} tienden a cero; es decir, en la región central, la densidad de energía en el halo es máxima, pero cuando alguna de las coordenadas tiende a infinito, la densidad tiende a cero.

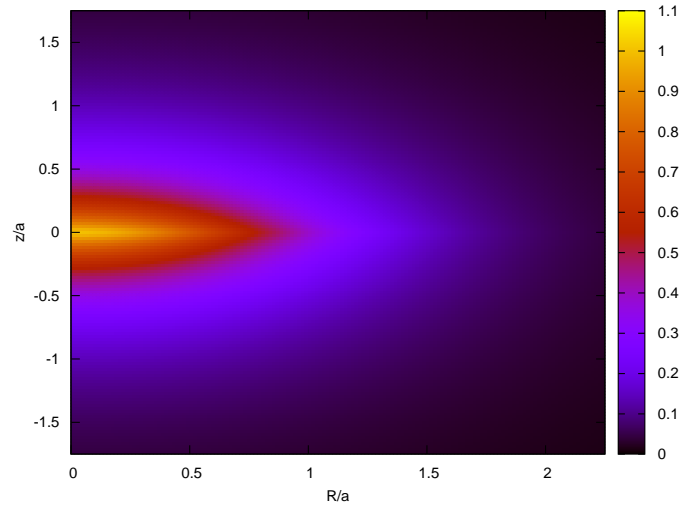
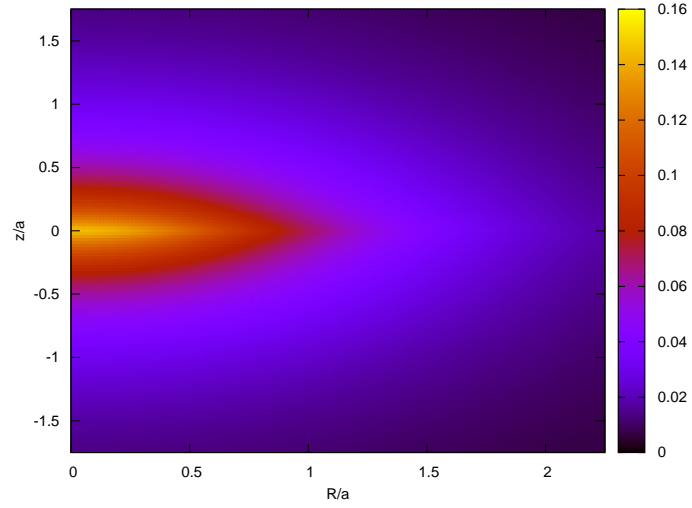


Figura 2.6: Modelo $n = 2$. Gráfica de contorno de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ en función de \tilde{R} y \tilde{z} , para diferentes valores $(k, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$. la grafica superior corresponde a los valores $(2; 2; 0; 0)$ y la inferior a los valores $(5; 1; 3; 0)$.

Capítulo 3

Conclusión

En el presente trabajo hemos obtenido a partir de la métrica conformestática una familia de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo estático axialmente simétrico. Estas soluciones describen las propiedades físicas para un sistema conformado por un disco infinito de polvo; es decir, que no tiene presiones, el cual está inmerso en un fluido o halo, para el cual hemos obtenido una ecuación de estado de la forma $p = \gamma\rho$, donde $\gamma = [3(2k - 1)]^{-1}$, lo cual nos indica que el fluido del halo puede ser de radiación ($\gamma = 1/3$) o de cualquier otro tipo para γ en el intervalo $(0, 1/3)$.

Se obtuvieron soluciones discoidales que cumplen con las condiciones de energía necesarias para obtener un comportamiento físico adecuado, mediante una comparación sencilla con el modelo clásico de Kuzmin-Toomre. Estas soluciones introducen de manera natural la existencia de un fluido ya que para la región del halo la solución de vacío no existe. Además, se logró garantizar que el espacio-tiempo fuera asintóticamente plano.

De acuerdo a las soluciones, se obtuvo para el halo un fluido cuyos esfuerzos principales son diferentes de cero ($p_1 = p_2 = -p_3 \neq 0$) y están orientados en dirección de los ejes principales. Por el contrario, las soluciones obtenidas para el disco describen un fluido de polvo estático el cual no presenta presiones. Otra característica de estas soluciones discoidales, es que de acuerdo a las expresiones analíticas de las densidades de energía y presiones, aunque los modelos obtenidos son infinitos, las propiedades físicas caen rápidamente a cero, permitiendo de esta manera observar una región central bien definida en la cual hay una mayor concentración de masa.

Se analizó el comportamiento físico de dichas soluciones, las cuales reproducen en gran parte las distribuciones de energía y presiones de los fluidos que conforman una gran mayoría de objetos astrofísicos reales como son las galaxias, ya que en ellas, la masa se distribuye de tal manera que en la región central tanto del disco galáctico como del halo, existe una mayor densidad de materia, la cual se hace cero a medida que nos alejamos de dicha región; sin embargo, los modelos obtenidos son infinitos; es decir, no introducen de manera natural un radio de corte en el cual la masa sea cero, como se observa en los objetos astrofísicos.

Se demostró mediante el criterio de comparación del límite que la masa del sistema galáctico conformado por un disco y un halo, para cada uno de los modelos, converge. Esto sucedió al demostrar convergencia sobre la masa del disco (3.25) y del halo (3.26) para el modelo $n = 0$. Para este primer modelo obtuvimos una relación lineal entre la masa del disco y del halo de la forma $M_{H_0} = M_{D_0} + \frac{8\pi A_0}{k}$, en donde es claro que para $A_0 \geq 0$, $M_{H_0} \geq M_{D_0}$.

Bibliografía

- [1] A. Chamorro, R. Gregory y J. M. Stewart. Static axisymmetric discs and gravitational collapse. *Proc. R. Soc. London A*413, 251, 1987.
- [2] A. H. Taub. Space-times with distribution valued curvature tensors. *J. Math. Phys.*, 21:1423, 1980.
- [3] A. Lichnerowicz. Sur les ondes de choc gravitationnelles. *C.R. Acad. Sci.*, 273:528, 1971.
- [4] A. Papapetrou y A. Hamouni. Couches simples de matière en relativité générale. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 9:179, 1968.
- [5] A. Toomre. On the distribution of matter within highly flattened galaxies. *Apj*, 138, 385, 1963.
- [6] B. H. Voorhees. Relativistic disks i. background models. *Phys. Rev. D*, 5:2413, 1972.
- [7] C. Klein y O. Richter. Exact relativistic gravitational field of a stationary counterrotating dust disk. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2884, 1999.
- [8] C. Pichon y D. Lynden-Bell. New sources for kerr and other metrics: Rotating relativistic disc with pressure support. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 280:1007, 1996.
- [9] Christian Klein. Exact relativistic treatment of stationary counter rotating dust disks. 2. axis, disk and limiting cases. *Theor.Math.Phys.*127:767-778, *Teor.Mat.Fiz.*127:418-431, 2001.
- [10] D. Lynden-Bell y S. Pineault. Relativistic disks i. counter-rotating disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 185:679,, 1978.
- [11] D. Lynden-Bell y S. Pineault. Relativistic disks ii. self-similar disks in rotation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 185:695, 1978.
- [12] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D*, 68:084010, 2003.
- [13] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact relativistic static charged perfect fluid disks. *Phys. Rev. D*, 70:064003, 2004.

- [14] E. Poisson. A relativist's toolkit: The mathematics of black-hole mechanics. *Cambridge University Press*, 2004.
- [15] G. A. González y O. A. Espitia. Relativistic static thin disks: The counterrotating model. *Phys. Rev. D*, *68:104028*, 2003.
- [16] G. A. González y P. S. Letelier. Relativistic static thin discs with radial stress support. *Class. Quantum Grav.*, *16:479*, 1999.
- [17] G. G. Kuzmin. *AZh*, *33*, 1956.
- [18] G. García-R y G. A. González. Charged perfect fluid disks as sources of taubnut-type spacetimes. *Phys. Rev. D*, *70:104005*, 2004.
- [19] G. García-R y G. A. González. Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks. *Phys. Rev. D*, *69:124002*, 2004.
- [20] G. Neugebauer y R. Meinel. General relativistic gravitational field of a rigidly rotating disk of dust: Solution in terms of ultraelliptic functions. *Phys. Rev. Lett.*, *75:3046*, 1995.
- [21] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers y E. Herlt. Exact solutions of einstein's field equations. *Cambridge University Press*, 2003.
- [22] J. Bičák, D. Lynden-Bell y C. Pichon. Relativistic discs and flat galaxy models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, *265:126*, 1993.
- [23] J. Bičák, D. Lynden-Bell y J. Katz. Relativistic disk as sources of static vacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, *47:4334*, 1993.
- [24] J. Bičák y T. Ledvinka. Relativistic disks as sources of the kerr metric. *Phys. Rev. Lett.*, *71*, 1669, 1993.
- [25] J. Binney y S. Tremaine. Galactic dynamics. *Princeton Series in Astrophysics*, 2008.
- [26] J. P. S. Lemos. Self-similar relativistic discs with pressure. *Class. Quantum Grav.*, *6:1219*, 1989.
- [27] M. Ujevic y P. S. Letelier. Stability of general relativistic geometric thin disks. *Phys. Rev. D*, *70:084015*, 2004.
- [28] P. S. Letelier y S. R. Oliveira. Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *J. Math. Phys.*, *28:165*, 1987.
- [29] S. W. Hawking. The large scale structure of space-time. *Cambridge University Press*, 1973.
- [30] T. Ledvinka, J. Bičák y M. Zofka. Relativistic disks as sources of kerr-newman fields. In edited by T. Piran, editor, in *Proceeding of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity*, Singapore, 1999.

- [31] T. M. Apostol. Calculus. *Reverté S.A.*, 1965.
- [32] T. Morgan y L. Morgan. The gravitational field of a disk. *Phys. Rev.*, 183:1097, 1969.
- [33] Vera C. Rubin y W.Kent Ford. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophys.J.*159:379-403, 1970.
- [34] W. Israel. Singular hypresurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento*, 44B:1, 1966.
- [35] W. Israel y Erratum-ibid. Erratum-ibid. *nuovo cim.* 44b, 1, 1966. *Nuovo Cimento*, 44b:463, 1967.
- [36] W.A.Bonnor y A.Sackfield. The interpretation of some spheroidal metrics. *Comm. Math. Phys.*, 8:338, 1968.