

Desarrollo de pensamiento funcional: un estudio exploratorio de los niveles de sofisticación

Paola Cecilia Delgado Puentes

Trabajo de grado para optar el título de Magíster en Educación Matemática

Directora

Dora Solange Roa Fuentes

PhD. Ciencias en la especialidad de matemática educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2019

Dedicatoria y Agradecimientos

A Dios por regalarme la vida, la familia y la oportunidad de cumplir mis metas académicas.

A mi madre Ana Puentes y mi hermano Carlos Delgado por su apoyo incondicional en cada uno de los proyectos que he decidido emprender.

A Julián Pereira por su valioso amor, creer siempre en mis capacidades y por su continua motivación y apoyo para terminar este trabajo.

A la profesora Solange Roa Fuentes por su apoyo continuo, paciencia y sabiduría en la orientación de este trabajo. Por compartirme su paz y motivación. Admiración total. ¡Gracias!

A mis profesores de la Maestría en educación matemática modalidad profundización por compartir su experiencia y conocimientos en este proceso.

Al colegio Juan Pablo II, por ser la institución educativa que me permitió desarrollarme personal y profesionalmente.

Contenido

	Pág.
Introducción	12
1. Antecedentes	15
1.1 Estándar de álgebra. Una mirada desde la National Council of Teacher of Mathematics.....	15
1.2 Lineamientos curriculares. Una perspectiva nacional de la variación y el cambio	20
1.3 Pensamiento Funcional	21
2. Planteamiento del problema y objetivo.....	27
3. Marco conceptual.....	28
3.1 Pensamiento Funcional	28
3.2 Relaciones funcionales.....	30
3.3 Niveles de sofisticación de las relaciones funcionales	31
4. Diseño Metodológico.....	38
4.1 Participantes.....	38
4.2 Estructura metodológica	39
4.1.1 Selección, rediseño y análisis de las tareas.....	40
4.1.2 Implementación de las tareas y desarrollo de la actividad.....	40
4.1.3 Recolección y selección de datos.....	42
4.1.4 Interpretación y análisis teórico	43
5. Desarrollo de la investigación.....	43

5.1 Selección, rediseño y análisis de las tareas	43
5.1.1 Análisis a priori de las tareas	44
5.2 implementación de las tareas y desarrollo de la actividad.....	60
6. Interpretación y análisis teórico	63
6.1 Primer análisis: Los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales	64
6.2 Segundo análisis.....	84
7. Conclusiones	95
Referencias Bibliográficas	98

Lista de Figuras

	Pág.
<i>Figura 1.</i> Crecimiento gradual de los estándares de contenidos en cada etapa	16
<i>Figura 2.</i> Representación gráfica en la calculadora.....	19
<i>Figura 3.</i> Patrón de Torres hecho por estudiantes de 5 grado	25
<i>Figura 4.</i> Relaciones funcionales	30
<i>Figura 5.</i> Producción de Rebeca sobre la tarea, “Nariz en perros”.	33
<i>Figura 6.</i> Producción de Rebeca sobre la tarea, “Nariz en perros”.	36
<i>Figura 7.</i> Elementos teóricos del Marco conceptual	37
<i>Figura 8.</i> Estructura Metodológica de la Investigación.....	39
<i>Figura 9.</i> Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad.....	42
<i>Figura 10.</i> Producción del E1, ítem 5, tarea 1 del taller diagnóstico final	66
<i>Figura 11.</i> Producción del E2, ítem 1 y 2, tarea 2 del taller 3.....	67
<i>Figura 12.</i> Tarea 1 del primer taller.....	68
<i>Figura 13.</i> Producción del E3, ítem 4, tarea 1 del taller 1	69
<i>Figura 14.</i> Tarea 1 de la prueba diagnóstica.....	70
<i>Figura 15.</i> Producción del E4, ítem 3, tarea 1 del taller diagnóstico inicial	70
<i>Figura 16.</i> Tarea 2, prueba diagnóstica	71
<i>Figura 17.</i> Producción del E17, ítem 3, tarea 1 del taller 1	72
<i>Figura 18.</i> Tarea 2 del taller uno	75

<i>Figura 19.</i> Producción del E10, ítems 2 al 4, tarea 2 del taller 1	76
<i>Figura 20.</i> Tarea 1 del taller diagnóstico final	77
<i>Figura 21.</i> Producción del E13, ítem 4, tarea 1 de taller diagnóstico final	77
<i>Figura 22.</i> Producción del E17, ítem 1, tarea 2 del taller 1	78
<i>Figura 23.</i> Producción del E18, ítem 4, tarea 1 del taller	79
<i>Figura 24.</i> Puesta en común, estudiante E20 la tarea 2 del taller 1	80
<i>Figura 25.</i> Tarea 2 del taller 1	81
<i>Figura 26.</i> Producción del E17, ítem 4, tarea 2 del taller 1	81
<i>Figura 27.</i> Producción del E7, ítem 1, tarea 1 del taller 2	82
<i>Figura 28.</i> Producción del E9, ítem 5, tarea 1 del taller 2	82

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Expectativas para los Estándares de Álgebra en la etapa de 6 a 8</i>	17
Tabla 2. <i>Tabla de los costos de las compañías telefónicas</i>	19
Tabla 3. <i>Extensión de las fases del proceso de Generalización</i>	23
Tabla 4. <i>Tareas, relaciones y tipos de funciones tratadas</i>	32
Tabla 5. <i>Organización de las Tareas</i>	60
Tabla 6. <i>Respuestas del estudiante E9, ítem 4 y 6</i>	86
Tabla 7. <i>Respuestas del estudiante E9, ítem 2 y 3 del taller 1</i>	87
Tabla 8. <i>Respuestas del estudiante E9, ítem 4, tarea 1 del taller 1</i>	88
Tabla 9. <i>Respuestas del estudiante E9, ítem 4, tarea 2 del taller 1</i>	89
Tabla 10. <i>Respuestas del estudiante E9, ítem 5, tarea 1 del taller 2</i>	90
Tabla 11. <i>Respuestas del estudiante E9, ítem 1 y 2, tarea 1 del taller 3</i>	91
Tabla 12. <i>Respuesta estudiante E9, diagnóstica final</i>	92
Tabla 13. <i>Respuesta estudiante E9, ítem 3, tarea 2 de la diagnóstica final</i>	93

Resumen

Título: Desarrollo de pensamiento funcional: un estudio exploratorio de los niveles de sofisticación*

Autor: Paola Cecilia Delgado Puentes**

Palabras Clave: Pensamiento funcional, relaciones funcionales, niveles de sofisticación.

Descripción:

Esta investigación pretende caracterizar a través de los niveles de sofisticación el pensamiento funcional de estudiantes (13 a 15 años), cuando abordan tareas que buscan potenciar la construcción de relaciones funcionales (recurrencia, correspondencia y variación). El análisis de los niveles permite identificar caminos viables de construcción de pensamiento funcional desde edades tempranas y centrar la mirada en el desarrollo de formas de pensamiento más avanzado, transformando el salón de clases en un espacio donde se valore la actividad de discusión y participación de las ideas matemáticas de los estudiantes. Los 20 participantes de este trabajo de aplicación son estudiantes del colegio Juan Pablo II de carácter oficial, ubicado en el corregimiento de San Rafael de Rionegro (Santander, Colombia). La metodología adoptada se desarrolla bajo un enfoque cualitativo lo que posibilita la interpretación y el análisis teórico de las tareas, esta se realiza en cuatro etapas relacionadas de manera cíclica, cada etapa es alimentada por la aplicación completa del ciclo con el fin de entender el sujeto en el salón de clases, el rol del estudiante y del profesor durante los procesos de interpretación y formulación de la actividad matemática generada en el aula. Los resultados de esta investigación muestran que los niveles de sofisticación posibilitan observar el avance de los estudiantes relacionado con el pensamiento funcional y determinar los criterios que permitan alcanzar niveles más complejos por medio de tareas relacionadas con variación, la generalización y el razonamiento desde un contexto de patrones, así como el desarrollo de competencias algebraicas necesarias para la comprensión de conceptos futuros como función, razón de cambio, entre otros.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática Directora: Ph. D. Solange Roa Fuentes

Abstract

Title: Development functional thinking: an exploratory study of the levels of sophistication*

Author: Paola Cecilia Delgado Puentes**

Key words: functional thinking, functional relationships, levels of sophistication.

Description:

This research aims to characterize through the levels of sophistication the functional thinking of students (13 to 15 years), when they address tasks that seek to enhance the construction of functional relationships (recurrence, correspondence and variation). The analysis of the levels allows to identify viable ways of constructing functional thinking from an early age and to focus on the development of more advanced forms of thought, transforming the classroom into a space where the activity of discussion and participation of the students is valued. Mathematical ideas of the students. The 20 participants of this application work are students of the Juan Pablo II school of an official nature, located in the corregimiento of San Rafael de Rionegro (Santander, Colombia). The adopted methodology is developed under a qualitative approach which makes possible the interpretation and theoretical analysis of the tasks, this is done in four stages related in a cyclical way, each stage is fed by the complete application of the cycle in order to understand the subject in the classroom, the role of the student and the teacher during the processes of interpretation and formulation of the mathematical activity generated in the classroom. The results of this research show that levels of sophistication make it possible to observe students' progress related to functional thinking and determine the criteria that allow reaching more complex levels through tasks related to variation, generalization and reasoning from a context of patterns, as well as the development of algebraic skills necessary for the understanding of future concepts as a function, reason for change, among others.

* Graduation paper

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Magister in Education Mathematics Director. Ph. D. Solange Roa Fuentes.

Introducción

Desde el panorama nacional y mundial varios documentos coinciden en la necesidad de trabajar el álgebra desde los primeros niveles, enfocada al estudio de la generalidad, el razonamiento y la comprensión de fenómenos de variación (MEN, 1998, 2006, Thales, 2003, Kaput, 2008). Por tanto, esta investigación centra la mirada en el desarrollo del pensamiento funcional que hace parte del pensamiento algebraico (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016) y se toma como base lo expuesto por Smith (2008) quien define el pensamiento funcional como una actividad cognitiva que pueden desarrollar las personas, centrada en la relación de dos o más cantidades que varían. Este enfoque permitió caracterizar el tipo de Tareas que promueven el pensamiento funcional como un proceso cognitivo en el cual las funciones, los patrones y los sistemas de representación se utilicen no como contenidos matemáticos, sino como herramientas que promueven en los estudiantes de todas las edades el razonamiento a cerca de las cantidades que en general varían y se relacionan en diferentes contextos. Para analizar el desarrollo del pensamiento funcional, se tomó como referente los tipos de relaciones funcionales: la recurrencia, la correspondencia y la covariación (Smith, 2008) y los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales que se presentan como una manera de identificar las etapas de pensamiento que muestran los estudiantes (sin importar la edad o el grado escolar en el que se encuentren) cuando trabajan con identificación de patrones y generalización. Estos niveles propuestos por Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015), están documentados en sus investigaciones con niños de 6 años y se basan en las acciones observadas durante el estudio, es decir las palabras y los escritos de los niños al resolver las tareas.

Se planteó como objetivo caracterizar a través de los niveles de sofisticación el pensamiento funcional de estudiantes (13 a 15 años), cuando abordan tareas que buscan potenciar la construcción de relaciones funcionales (recurrencia, correspondencia y covariación).

Los participantes desarrollaron en total cinco talleres, conformados por máximo tres tareas relacionadas con el uso de patrones, incluían una prueba diagnóstica, tres talleres intermedios y una prueba diagnóstica final, todos los talleres, a excepción de la diagnóstica inicial se implementaron en un primer momento de manera individual, luego en equipos de máximo tres estudiantes y finalmente se realizó una puesta común para permitir la participación, la comunicación y promover el razonamiento.

La metodología se llevó a cabo de manera cíclica y en cuatro etapas: (1) selección, rediseño y análisis de las tareas, (2) implementación de tareas y desarrollo de la actividad, (3) recolección y selección de datos, e (3) interpretación y análisis teórico.

El capítulo *Antecedentes*; expone los elementos curriculares relacionados con el álgebra desde una perspectiva nacional e internacional. Así como investigaciones relacionadas con el *Pensamiento Funcional* definido como un constructo cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico.

Luego, se plantea el *Problema de investigación* resultado de mi experiencia docente con estudiantes de octavo grado (13 a 15 años) en la asignatura de álgebra y el *objetivo* para esta investigación que propone potenciar el desarrollo del pensamiento funcional en los estudiantes; a través de la exploración de los niveles de sofisticación que evidencien durante la solución de las tareas planteadas sobre las relaciones funcionales.

En el tercer capítulo, se presenta el *marco conceptual* conformado por los elementos del Pensamiento funcional y los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales como una

propuesta que busca integrar las tareas propias de este pensamiento, bajo una dinámica de exploración de los niveles desarrollados por los estudiantes.

En el cuarto capítulo, *diseño metodológico*, se hace una breve presentación de cada etapa del método, de los instrumentos para la recolección de los datos y de los participantes, se tienen en cuenta las pautas para el desarrollo de una investigación cualitativa.

En el siguiente capítulo, *desarrollo de la investigación*, se presentan las características de los talleres que se plantearon a los estudiantes, los respectivos análisis a priori de cada una de ellos, así como las reflexiones elaboradas a partir del marco conceptual y mi experiencia como docente investigadora en el aula

En el capítulo, *interpretación y análisis teórico*, se exponen en dos apartados los análisis a posteriori las tareas e intervenciones destacadas y desarrolladas por los estudiantes. En el primer análisis, se analizan en su orden los niveles y las producciones de los estudiantes relacionados con cada nivel, en el segundo análisis se toma un estudio de caso con el fin de observar los niveles de sofisticación y las relaciones funcionales emergentes durante la implementación de los talleres.

Finalmente, en el capítulo de *Conclusiones* se presentan aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento funcional y reflexiones relacionadas con aspectos didácticos de la investigación, su impacto y algunos aportes para futuras investigaciones.

Se espera que la siguiente investigación contribuya al conocimiento de cómo piensan los estudiantes cuando se les presentan situaciones que involucran el estudio de la variación, mediante tareas diseñadas con secuencias de patrones; además, se propone que los niveles de sofisticación pueden ser una manera de caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes, buscando así desarrollar en el aula niveles cada vez más complejos.

1. Antecedentes

Con el propósito de contextualizar en el panorama de la Educación Matemática el problema que interesa abordar en este proyecto, se presentan en esta sección aspectos relacionados con las políticas y planteamientos que guían el desarrollo curricular del Pensamiento Variacional en Colombia (MEN, 1998) y el estándar de Álgebra definido en el documento Principios y Estándares para la Educación Matemática (documento traducido por la Sociedad Andaluza 2002, del texto producido por National Council of Theacher of Mathematics, 2000).

1.1 Estándar de álgebra. Una mirada desde la National Council of Teacher of Mathematics.

En esta investigación interesa identificar los tópicos relacionados con el álgebra en los niveles medios de escolaridad (estudiantes de 13 a 15 años). Además de señalar las habilidades y competencias que se esperan adquieran los estudiantes a medida que avanzan en el ciclo escolar. Por tanto, se analizan algunos documentos internacionales y nacionales que aportan una mejor visión sobre el desarrollo de pensamiento algebraico en el que se inserta el pensamiento funcional. La figura 1, representa la dedicación que deben recibir los estándares de contenido a través del desarrollo de los diferentes niveles

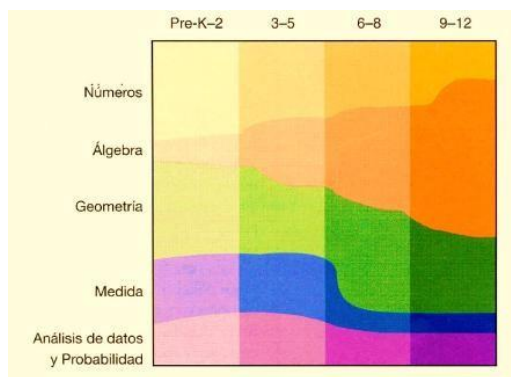


Figura 1. Crecimiento gradual de los estándares de contenidos en cada etapa

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003, p. 32)

Como puede verse en la figura 1, el Álgebra está presente desde los primeros niveles de escolaridad y se intensifica a medida que se avanza de nivel. En la franja que corresponde a la etapa de 6 a 8 se presenta la misma área álgebra y para geometría. “El Estándar de Álgebra se centra en las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio” (Thales, 2003, p. 39). Respecto al desarrollo del Álgebra para los niveles medios se explicita, como fundamental, que los estudiantes adquieran un sólido conocimiento sobre las funciones especialmente aquellas que se relacionan linealmente.

A medida que los alumnos avanzan hacia la escuela secundaria, deberían desarrollar un repertorio de muchos tipos de funciones. En los niveles medios, centrándose en la comprensión de las relaciones lineales. Luego, deberían ampliar el repertorio y estudiar las características de diferentes tipos de funciones. (Thales, 2003, p. 40)

Para la comprensión de las relaciones lineales y los patrones de cambio se proponen tareas donde los estudiantes puedan utilizar diferentes representaciones y descubrir lo que les ofrece cada una de ellas para la resolución de diferentes problemas.

Para el estándar de Álgebra se presentan cuatro estándares que plantean lo siguiente: la comprensión de patrones, relaciones y funciones; representación y análisis de situaciones matemáticas usando símbolos algebraicos; uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y, por último, el análisis del cambio en diversos contextos.

El estudio de los patrones y relaciones en esta etapa debería centrarse en patrones asociados a funciones lineales, que se originan cuando hay una tasa de cambio constante. Los estudiantes deberían resolver problemas en los que se usen tablas, gráficas, expresiones verbales y expresiones simbólicas para representar y examinar funciones y patrones de cambio. (Thales., 2003, p. 227)

Cada estándar de Álgebra incluye un grupo de expectativas que evolucionan en cada nivel.

Para la etapa 6-8, que interesa en este proyecto, se propone:

Tabla 1.

Expectativas para los Estándares de Álgebra en la etapa de 6 a 8.

Estándar	Expectativas
Comprender patrones, relaciones y funciones.	Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones mediante tablas, graficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas.
	Relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación.
	Identificar funciones, lineales o no lineales, y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o ecuaciones.

Estándar	Expectativas
	Iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.	Explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficas de líneas, poniendo especial atención en el significado de la ordenada en el origen y de la pendiente. Usar el Álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, particularmente aquellos que presenten relaciones lineales.
	Reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y resolver ecuaciones lineales.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.	Modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones.
Analizar el cambio en contextos diversos.	Utilizar gráficas para analizar la naturaleza de los cambios cuantitativos en relaciones lineales.

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003, p.226)

Como se evidencia en la tabla 1, el estudio de relaciones y sus diferentes representaciones tiene gran importancia en la construcción de pensamiento matemático en este nivel (aunque en Colombia el estudio de las funciones generalmente se ubica en los últimos grados escolares). En esta investigación no se trata sólo de analizar formas algebraicas de funciones, sino de estudiar los procesos de variación, covariación y representación del cambio. A continuación, se presenta un ejemplo que refleja el trabajo que se espera los estudiantes desarrollen durante esta etapa:

Charles vio anuncios de dos compañías de teléfonos móviles. La compañía *Keep-in- Touch* ofrece servicios con una tarifa básica de 20 dólares al mes, más 10 centavos por cada minuto. La *Chit-Chat* no tiene tarifa mensual, pero cobra 45 centavos de dólar por cada minuto. Ambas compañías disponen de tecnología que les permite precisar el tiempo empleado; no redondean por arriba al minuto más próximo, como hacen muchos de sus competidores. Compárense las facturaciones de las dos compañías durante un mes. (Thales, 2003, p. 227)

Con el problema planteado se espera que los estudiantes utilicen alguna de las representaciones: tabular, gráfica (como se muestra en las figuras 2 y 3), entre otras; e identifiquen un patrón, o intenten obtener una “fórmula”, que relacione las variables con el fin de analizar los costos de cada compañía (Thales, 2003, p.229)

Tabla 2.

Tabla de los costos de las compañías telefónicas

Número de minutos	0	10	20	30	40	50	60
Keep-in-Touch	\$20	\$21	\$22	\$23	\$24	\$25	\$26
Chit-Chat	\$0	\$4.5	\$9	\$13.5	\$18	\$22.5	\$27

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003, p.277)

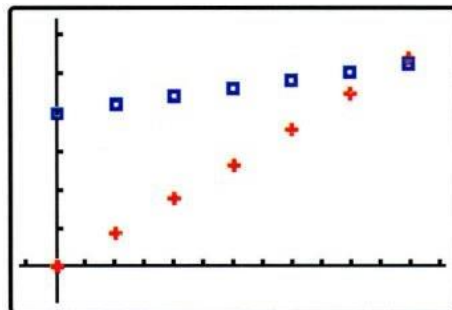


Figura 2. Representación gráfica en la calculadora.

Nota. Adaptado de: (Thales, 2003, p. 228)

Se sugiere en primer lugar, que se planteen preguntas sobre los datos representados en la tabla y la gráfica; esto con el objetivo de estudiar el cambio: qué varía y qué se mantiene constante. Además, se espera que las preguntas ofrezcan una visión sobre cómo los estudiantes reconocen y comprenden las relaciones lineales.

En el documento Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003) también son analizados otros ejemplos, como el presentado, que permiten ampliar la visión del profesor sobre los diferentes contextos y formas en que puede aparecer el pensamiento funcional.

1.2 Lineamientos curriculares. Una perspectiva nacional de la variación y el cambio

Los Lineamientos Curriculares del MEN proponen que se aborde el Álgebra desde los primeros grados con el objetivo de desarrollar en los estudiantes un pensamiento variacional que les permita ir avanzando progresivamente en los núcleos temáticos establecidos. Según el MEN (1998) el estudio de la variación puede iniciarse pronto en el currículo de matemáticas.

El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. Estos escenarios deben permitirle al estudiante la conceptualización de la función, el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, dando prioridad al uso de patrones. (MEN, 1998, p.85)

En los Estándares de Matemáticas (MEN, 2006) relacionan el álgebra con el Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos que comprende todo lo relacionado a la variación, la modelación y la representación. Allí se plantea, para el desarrollo de este pensamiento, el estudio de las regularidades o búsqueda de patrones.

El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. (MEN, 2006, p.66)

En conclusión, se observa que entre la perspectiva internacional acerca del Álgebra, y la perspectiva nacional plasmada en los Lineamientos Curriculares y los Estándares del MEN, existen similitudes en el hecho de que exponen la importancia de desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros niveles. Para el caso de esta investigación, ambos documentos coinciden en la necesidad de crear ambientes que desarrollen el Pensamiento Algebraico, y dentro de él el pensamiento Funcional. Por medio de tareas que favorezcan el estudio de patrones y su generalización a través de las relaciones funcionales.

1.3 Pensamiento Funcional

En la actualidad existen diversos estudios dedicados al pensamiento funcional. Investigadores como Blanton y Kaput (2011), Cañadas y Fuentes (2015), Cañadas y Molina (2016), se han preocupado por documentar aspectos importantes sobre este pensamiento en particular. Con base en sus investigaciones, han definido el pensamiento funcional no como una serie de contenidos relacionados con las funciones o las fórmulas sino como un *constructo cognitivo* que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, pensar acerca de las cantidades que varían y cómo varían.

El pensamiento funcional promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales. Esto hace que se fomente el razonamiento inductivo y como consecuencia facilite herramientas a los estudiantes para la adquisición de conocimiento matemático. (Cañadas y Molina, 2016, p.2)

Castro, Cañadas y Molina (2010) también consideran que el pensamiento funcional utiliza razonamientos inductivos apoyados en el uso de patrones y procesos de generalización. Cuando los estudiantes experimentan las diferentes posibilidades que ofrecen las tareas relacionadas con el estudio de patrones, pueden desarrollar sus capacidades y llegar a sorprenderse con el trabajo que pueden lograr por sí mismos. La actividad que promueve tareas sobre patrones amplía la visión del álgebra relacionada con fórmulas aisladas, a una perspectiva que les permite a los estudiantes explorar diversas estrategias y utilizar diferentes sistemas de representación. Según Blanton y Kaput (2011), “el pensamiento funcional incorpora la construcción, y generalización, de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y representacionales, y tratando relaciones generalizadas, o funciones, que resultan como objetos matemáticos útiles en sí mismos” (p. 8).

Centrar la mirada en potenciar el pensamiento funcional posibilita la actividad con estudiantes de todas las edades, ya que el desarrollo de actividades relacionadas con patrones permite un acercamiento al significado de éstas, como variables que se relacionan y que varían de una manera determinada.

Al respecto los investigadores de *Early Algebra* tienen una visión amplia sobre el pensamiento funcional: consideran que dicho pensamiento incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se puede incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos. (Fuentes, 2014, p. 9)

En las investigaciones de Rivera (2013) se destacan las ventajas de trabajar con tareas relacionadas con patrones, ya que estas permiten una mayor comprensión en temáticas posteriores. Por ejemplo, el autor expone cómo los estudiantes que habían experimentado el trabajo con patrones, al abordar las funciones lineales, mostraron menos dificultades en identificar la relación entre las variables, y de manera exitosa mostraron las habilidades que habían adquirido anteriormente pero ahora con tareas de modelado de funciones. Rivera (2013) afirma que: “Cuando los estudiantes exploraron tareas con patrones expandieron ese conocimiento a la comprensión sobre las funciones” (p.175).

Tabla 3.

Extensión de las fases del proceso de Generalización

Generalización	Extensión Generalizante
Fórmula Directa. Número del término (enteros positivos).	Función. Dominio (números reales).
Resultado (enteros positivos).	Rango (números reales).
Puntos discretos en un plano coordinado.	Línea continua (o una porción de una línea) en un plano coordinado.
Patrones lineales constantes, de incremento y decrecimiento.	Pendiente cero, positiva o negativa.

Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013, p. 177)

Rivera (2013) sistematiza el trabajo que realizan los estudiantes cuando trabajan con funciones después de haber tenido un acercamiento al estudio de patrones, denominada “Primera fase de generalización de patrones”. En ella define los elementos que hacen parte de los patrones: los términos, los resultados y la fórmula; y los relaciona con elementos específicos de la función como

el dominio, el rango y la pendiente, en este caso, para funciones lineales; en la segunda fase denominada “Fase de extensión de la generalización”, Rivera representa las experiencias con patrones y funciones que llevaron a cabo los estudiantes a través de un “Mapeo conceptual”.

El mapeo anterior [el autor hace referencia a los elementos presentados en la Tabla 2 de este documento] muestra las experiencias extensivas de los estudiantes con generalización de patrones lineales que les permitió anticipar y superar posibles dificultades de procesamiento y cuestiones de conversión cuando estuvieron aprendiendo funciones lineales por primera vez.

El conocimiento que adquirieron llegó a ser útil mucho después cuando trataron con funciones lineales decrecientes. (Rivera, 2013, p. 177)

Las investigaciones de Rivera (2013) relacionadas con el proceso de generalización de patrones en estudiantes de 11 años en adelante en diferentes países como Reino Unido, Canadá, Estados Unidos e India, presentan la naturaleza y la complejidad de las tareas con patrones y todas las oportunidades y recursos que este trabajo brinda a los estudiantes. No sólo para el estudio de las funciones lineales, sino para otros tipos de funciones como las cuadráticas, sistemas de ecuaciones y en general funciones de modelamiento.

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo el pensamiento funcional, inmerso en la actividad de generalización de patrones, proporciona una visión más amplia de las variables, puesto que las dota de significado y permite su determinación a través de diferentes métodos. Igualmente, permite observar las habilidades que tienen los estudiantes cuando intentan generar la estructura algebraica (fórmula) que les servirá para representar el patrón. Según Rivera (2013):

La figura ejemplifica tres estrategias de procesamiento figurativo en un patrón que han sido inferidas del trabajo de tres estudiantes australianos de quinto grado (entre 9 y 10 años) quienes

procesaron las etapas [términos de la secuencia] en tres formas diferentes, pero equivalentes.

(p.141)

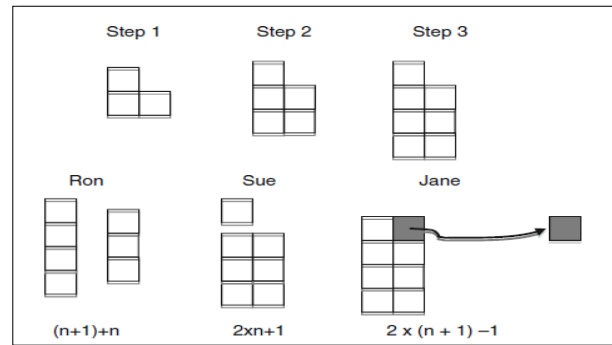


Figura 3. Patrón de Torres hecho por estudiantes de 5 grado

Nota. Adaptado de: (Rivera, 2013, p. 141)

Los estudiantes Ron, Sue y Jane utilizaron tres estructuras algebraicas diferentes pero equivalentes para describir el patrón “de las torres representaciones reflejaron en la construcción de los términos de la secuencia un proceso figurativo. Los tres estudiantes comprendieron operativamente el crecimiento de las torres gemelas conformadas por bloques. Ron vio una torre con altura $(n + 1)$ y otra torre con altura n . Para Sue, la torre consistía en dos columnas de bloques iguales con un bloque extra en la punta de la torre izquierda $2 \times n + 1$. Jane inicialmente imaginó una sola torre de dos columnas que le permitió calcular su altura $2 \times (n + 1)$. Luego restó 1 de la altura total para expresar que estaba apartando el bloque innecesario que fue inicialmente añadido. (Rivera, 2013, p. 140)

Cada uno de los estudiantes, observó de manera diferente el comportamiento del patrón, luego generó la estructura algebraica correspondiente (fórmula). Se evidencia que para la construcción,

descripción y representación del patrón se hace necesario desarrollar un proceso cognitivo que le permita a los estudiantes identificar los elementos que cambian y los que se mantienen constantes.

Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre variables o entre los conjuntos con los que está trabajando, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables. Esta regla puede ser descubierta a través de un proceso inductivo. (Fuentes, 2014, p. 9)

También, según Drijvers (2011) este tipo de problemas facilita la discusión y la argumentación puesto que cada estudiante tiene la oportunidad de defender su propia fórmula; además determina si todas ellas se deben corregir o son equivalentes. De esta manera, los estudiantes no solo hacen uso de su razonamiento inductivo para encontrar la fórmula que describa el patrón, sino que podrán hacer explícita la conversión y procesamiento de patrones utilizados. Cañadas (2007) al respecto menciona la importancia de desarrollar en los estudiantes herramientas lingüísticas y representacionales como fundamento para el desarrollo de pensamiento funcional.

El ejemplo de las “Torres”, es una manera de mostrar que el Pensamiento Funcional inmerso en la generalización de patrones, posibilita el razonamiento, la actividad y la comunicación de los estudiantes en torno al estudio de relaciones. En esta vía, este proyecto busca motivar el camino para la creación de escenarios que permitan desarrollar las competencias algebraicas, definidas por Fuentes (2014) como: exploración, modelización, generalización, discusión, argumentación y justificación, entre otras, vinculadas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas.

2. Planteamiento del problema y objetivo

Con base en el panorama presentado en los capítulos anteriores y la necesidad como docente de matemáticas de transformar la clase de álgebra en un espacio donde se promueva la discusión y participación en actividades relacionadas con el desarrollo de competencias algebraicas, en especial las relacionadas con el pensamiento funcional, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué caracteriza el pensamiento funcional de estudiantes de secundaria (13 -15 años)?

Para dar respuesta a esta pregunta, en primer lugar, se presenta la necesidad de comprender cómo piensan los estudiantes cuando desarrollan tareas relacionadas con cantidades que varían. Cómo potenciar, implica encontrar una manera de comprender las etapas de pensamiento funcional por las cuales transita un estudiante y de esta manera promover formas de pensamiento más avanzado. Por tanto, se considera como objetivo general de la investigación:

Caracterizar a través de los niveles de sofisticación el pensamiento funcional de estudiantes (13 a 15 años), cuando abordan tareas que buscan potenciar la construcción de relaciones funcionales: recurrencia, correspondencia y covariación.

Durante el desarrollo del objetivo general, se plantean algunos retos y contribuciones relacionadas con la transformación del salón de clase en un espacio de discusión y comunicación; además se pretende potenciar el desarrollo de pensamiento funcional a través de la participación de los estudiantes en la identificación de relaciones entre variables, el registro de las cantidades que varían (tabular, gráfica e icónica) y la identificación de un patrón que describa dicha relación.

3. Marco conceptual

En este capítulo se describen los elementos teóricos que fundamentan la investigación y que sirven de guía en el desarrollo de cada una de las fases que se implementan para el cumplimiento de los objetivos.

En primer lugar, se presenta la postura que se toma como base en esta investigación referente al Pensamiento Funcional. A partir de esta se analiza el tipo de Tareas que lo fomentan y la manera como se caracteriza su desarrollo. Estos elementos serán el fundamento para la construcción del análisis a priori de cada tarea y el análisis de la actividad de los estudiantes participantes en esta investigación.

3.1 Pensamiento Funcional

Smith (2008) define el Pensamiento Funcional como una actividad cognitiva que pueden desarrollar las personas. Se centra en estudiar la relación de dos o más cantidades que varían.

Este enfoque permite caracterizar el tipo de tareas que promueven el pensamiento funcional como un proceso cognitivo en el cual las funciones, los patrones y los sistemas de representación se utilicen no como contenidos matemáticos, sino como herramientas que promueven en los estudiantes, de todas las edades, el razonamiento a cerca de las cantidades que en general varían y se relacionan en diferentes contextos.

Este tipo de pensamiento implica la generalización de relaciones entre cantidades covariantes, la representación de esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, las expresiones simbólicas, tablas y gráficos, y razonar de manera fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones. (Cañadas y Molina, 2016, p. 211)

Cañadas y Molina (2016) mencionan que las cantidades, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o utilización de diferentes sistemas de representación, son elementos clave para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros años escolares.

A partir de los elementos teóricos presentados sobre el pensamiento funcional, se hace necesario determinar las *Tareas* que permitan generar en los estudiantes una actividad cognitiva. En este sentido, Cañadas y Molina (2016) citan tres ideas que clasifican el tipo de actividades que se pueden ejecutar en los primeros niveles para fomentar el pensamiento funcional:

Patrones recursivos, que implica encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia de valores, (b) pensamiento covariacional, que se basa en el análisis de cómo dos cantidades varían simultáneamente y en cómo los cambios en valores de una variable producen cambios en otra variable y (c) relaciones de correspondencia, que se basan en la identificación de una correlación entre variables. (p. 4)

Estas actividades concuerdan con la necesidad de desarrollar en los estudiantes formas de pensar la variable, las funciones y los patrones creando escenarios de razonamiento y generalización que permitan generar una actividad cognitiva en el salón de clases y por ende el desarrollo de competencias algebraicas a corto, mediano y largo plazo.

3.2 Relaciones funcionales

Pinto (2016) define las relaciones funcionales como las diferentes maneras como se relacionan las variables presentes en una función. Para analizar el desarrollo del pensamiento funcional, se toma como referente los tipos de *Relaciones Funcionales*: la recurrencia, la correspondencia y la covariación (Smith, 2008). A continuación, se presenta un ejemplo y se identifican las relaciones funcionales presentes en una situación de variación, en este caso en la relación de dos cantidades covariantes: el número de perros y el número de ojos.

Supongamos que estás en un refugio para perros y quieres contar los ojos de todos los perros. Si hay un perro ¿cuántos ojos hay? ¿Y en dos perros? ¿En tres perros? ¿En 100 perros? ¿Ves alguna relación entre el número de perros y el total de ojos? ¿Cómo describirías dicha relación? ¿Cómo puedes explicarlo? (Pinto, 2016, p.15)

En la figura 6, se define y se ejemplifica según el problema anterior los tipos de relaciones funcionales.

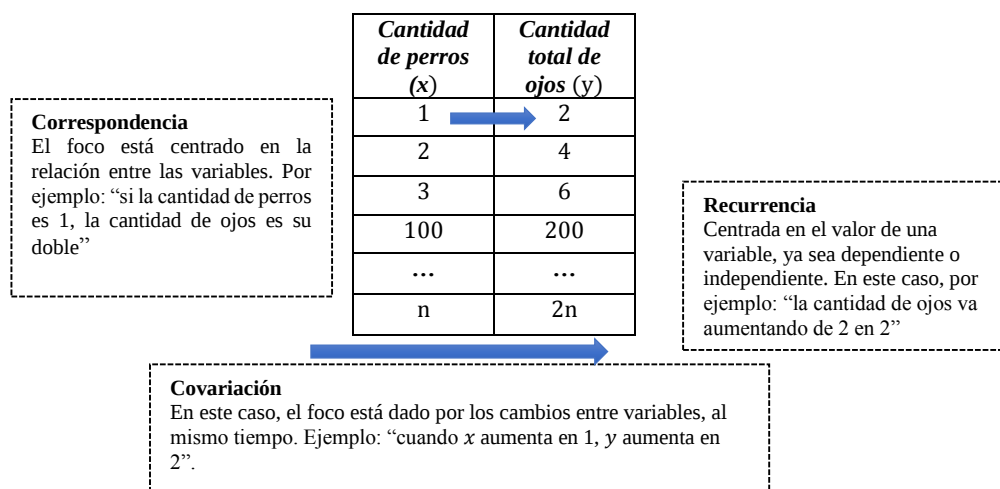


Figura 4. Relaciones funcionales

Nota. Adaptado de: (Pinto, 2016, p. 20)

El pensamiento funcional implica actividades mentales como procesos a través de las cuales el sujeto convierte el registro de una relación entre cantidades variables en una representación generalizada y crea una certeza matemática de la misma relación (Smith, 2008). Las relaciones funcionales son utilizadas por los estudiantes para la construcción de relaciones entre variables y forman parte del razonamiento que permite comprender la variable y las expresiones simbólicas o verbales que estos construyen.

3.3 Niveles de sofisticación de las relaciones funcionales

Los niveles de sofisticación de las relaciones se presentan como una manera de identificar las etapas de pensamiento que muestran los estudiantes (sin importar la edad o el grado escolar en el que se encuentren) cuando trabajan sobre problemas matemáticos que se relacionan con la identificación de patrones y el proceso de generalización. Estos niveles propuestos por Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015), están documentados en sus investigaciones con niños de 6 años y se basan en las acciones observadas durante el estudio; es decir, las palabras y los escritos de los niños al resolver las tareas. El entrevistador también introdujo en los estudiantes la construcción de una tabla para representar el comportamiento de la función y, de esta manera, crear un contexto que le permitiera estudiar el pensamiento de los niños.

Es importante resaltar que los niveles, que se presentarán más adelante, no necesariamente deben ser secuenciales, puesto que los estudiantes pueden saltarse varios niveles o mostrar niveles simultáneos durante la resolución de una tarea. Blanton et al. (2015) expresan que:

Primero, los niveles de sofisticación en el pensamiento de los niños están estrechamente relacionados a las secuencias de instrucción que les dan origen y, como tales, no tienen la intención de representar la única progresión posible en el pensamiento sobre un concepto

particular. Segundo, los niveles no están destinados a ser “etapas” a través de las cuales los niños deban progresar en una secuencia lineal sino como una caracterización de la sofisticación que puede exhibir su forma de pensar. (p. 524)

A continuación, se presentan las definiciones de estos niveles, algunos fragmentos de las entrevistas y análisis a posteriori de las seis tareas desarrolladas por estudiantes de 6 años. Elaborados y documentado por Blanton et al. (2015). En la siguiente tabla se presentan algunas de las tareas analizadas por dichos autores:

Tabla 4.

Tareas, relaciones y tipos de funciones tratadas

Tarea	Problema	Función
“Altura con un sombrero”	La relación entre la altura de una persona sin usar sombrero y con un sombrero de 1 pie (Carragher et al., 2006).	$y = x + 1$
“cantidad de narices en perros”	La relación entre el número de perros y el número de narices de los perros.	$y = x$
“Construcción de Tren Creciente”	La relación entre el número de paradas que hace un tren y el número de vagones que tiene el tren. Si el tren se detiene en las estaciones a lo largo de su ruta y recoge dos vagones en cada estación. Suponga que el motor no se cuenta. (Adicionalmente, considere cómo cambia la relación, si el motor se tiene en cuenta).	$y = x + x$ $y = x + x + 1$

Nota. Adaptado de: (Blanton et al., 2015, p.520)

Nivel 1: Pre-estructural. En este nivel el estudiante habla sobre los datos de un problema sin utilizar ningún tipo de relación matemática. En particular, no describe ningún patrón, ni reconoce cómo están relacionadas las cantidades.

Nivel 2: Recursivo-Particular. Se exhibe cuando el estudiante nota un patrón recursivo en una secuencia de valores, pero solo describe el patrón en términos de una secuencia de casos. Blanton et al. (2015), en la tarea “Nariz en perros” (ver tabla 3), observan como Rebecca evidencia un pensamiento Recursivo particular al expresar que el valor que debería ir para representar cuatro perros es 4 (haciendo referencia a la cantidad de narices según el número de perros), contando y señalando con su dedo en la tabla uno, dos, tres y cuatro.

D	N
100	100
60	60
71	71
0	0
A	100 A
B	B

Handwritten notes to the left of the table:

1	1
2	2
3	3
4	4
100	100
W	W 21
U	U 12

Figura 5. Producción de Rebeca sobre la tarea, “Nariz en perros”.

Nota. Adaptado de: (Blanton et al., 2015, p.523)

Debido a que Rebecca solo expresa “cuatro” para indicar el número que va después del tres, evidencia una única relación de recurrencia sobre una de las variables, ella reconoce el patrón recursivo y cómo este tiene un incremento de uno en uno.

Nivel 3: Recursivo-General. El estudiante muestra este tipo de pensamiento cuando conceptualiza un patrón recursivo como una regla generalizada entre los valores, sin hacer referencia a casos particulares. Por ejemplo, Blanton et al. (2015) señalan que en la tarea “Un tren

creciente”, descrita en la tabla 3, Raymond exhibe un pensamiento recursivo- general al expresar la relación de correspondencia como “agregas dos cada vez” cuando se le preguntó cómo obtuvo la respuesta cuando el tren había realizado 4 paradas.

Nivel 4: Funcional-Particular. Este tipo de pensamiento se evidencia cuando el estudiante conceptualiza una relación funcional como un conjunto de relaciones particulares entre valores específicos. En este nivel el estudiante es capaz de generar el valor de salida de una función dado un valor de entrada. Blanton et al. (2015) refieren que en la tarea “Altura con un sombrero”, Zara determinó la altura del sombrero, pero no pudo encontrar la relación entre las cantidades: altura arbitraria de una persona que no usa sombrero y la estatura de una persona cuando usa el sombrero.

Nivel 5: Primitivo Funcional General. Conceptualiza una relación general entre dos cantidades por medio de un conjunto de casos. En este pensamiento, el estudiante describe la relación haciendo referencia a una observación por medio de casos, pero no articula en palabras o notación simbólica la transformación matemática que relaciona las cantidades. Blanton et al. (2015) señalan que cuando se le pidió a Raymond describir la altura sin sombrero en comparación con la altura de una persona con sombrero, dijo “tiene que ser más alto”. Así caracterizó cualitativamente esta diferencia (alto), sin embargo, no pudo cuantificar que tan alto, expresando por ejemplo “1 pie más alto”. El estudiante vio que existía una relación entre las cantidades, pero su caracterización fue primitiva.

Nivel 6: Emergente Funcional-General. Se reflejan los atributos clave de una relación funcional, aunque su representación de la relación es incompleta; puesto que las representaciones a veces transmiten las cantidades generalizadas, pero no la relación matemática entre ellas o la relación matemática, pero no las cantidades generalizadas.

Otras características de este nivel son:

- (1) Las expresiones hacen referencia solo a una cantidad. (2) Algunos estudiantes representan la relación por medio de una expresión dejando la variable independiente no especificada. Blanton et al. (2015) analizan que en la tarea del tren los estudiantes describen la función por medio de una expresión o lenguaje natural; esto es “ $A + A$ ” donde A representa el número de paradas y “agrega el número de vagones” respectivamente. (3) Los estudiantes describen la relación funcional usando palabras o notación variable, (4) el pensamiento de los estudiantes acerca de las relaciones funcionales se empieza a consolidar. Y, por último, (5) la precisión para describir las relaciones comienza a cristalizarse, sin embargo, no muestran una conciencia de los componentes significativos de las relaciones funcionales.

Nivel 7: Condensado Funcional-General. En este nivel el estudiante puede describir explícitamente las cantidades generalizadas y la transformación matemática entre las cantidades. Identifica las dos cantidades en el escenario del problema y las transforma entre ellas. Cuando utiliza notación variable caracteriza la regla como una ecuación y cuando representa la regla con palabras utiliza oraciones completas que identifican ambas cantidades y su relación. Se diferencia del nivel anterior, porque presenta una mayor flexibilidad y comprensión de la relación entre las variables. Blanton et al. (2015) presentan como Rebecca representó la relación $R + R = V$ donde R era el número de paradas y V la cantidad de vagones; así mismo al solicitarle que la describiera con palabras, la estudiante señaló “cualquiera que sea el número, las paradas que hace, si lo duplico, encuentro cuántos vagones”

$$\begin{array}{r|l}
 S & h \\
 \hline
 1 & 2 \text{ (1)} + 1 = 2 + 1 \\
 2 & 4 \quad 2 + 2 = 4 \\
 3 & 6 \quad 3 + 3 = 6 \\
 4 & 8 \quad 4 + 4 = 8 \\
 R & V + V \quad R + R = V
 \end{array}$$

$+R+R=V$

Figura 6. Producción de Rebeca sobre la tarea, “Nariz en perros”.

Nota. Adaptado de: (Blanton et al., 2015, p.523)

Nivel 8: Función como objeto. En este nivel el estudiante conceptualiza la relación estructuralmente como un objeto. Entiende la regla original y es capaz de construir esa transformación. Blanton et al. (2015) señalan, por ejemplo, que la estudiante Rebecca representó una nueva ecuación cuando se le solicitó que ahora, en la tarea “Un tren creciente” (ver tabla 3) debía agregar el motor, ella respondió que “añadir uno” y escribió una nueva ecuación sin tener que recurrir a la tabla o a la construcción de nuevos ejemplos. La estudiante presentó la regla de la función como $1 + R + R = V$, viendo su regla original ($R + R = V$) como un objeto que podía ser operado para producir una nueva regla.

En resumen, en los primeros niveles los estudiantes evidencian debilidades porque no encuentran una relación matemática que involucre las variables o porque solo tienen en cuenta una de ellas, la dependiente o la independiente; cuando muestran un nivel de sofisticación mayor se observa que su comprensión de la variable es mucho mejor, aunque se les dificulta expresar la relación entre las variables ya sea de manera verbal o mediante notación simbólica. El concepto de función desde el segundo nivel surge como casos particulares, luego de manera emergente hasta llegar a la función como objeto en la cual el estudiante tiene una completa claridad de la relación

entre las variables; esto le permite expresarla de manera simbólica mediante una ecuación o regla que puede manipular y transformar matemáticamente. Finalmente, los elementos aportados por Blanton et al. (2015) permiten sistematizar a través de los niveles el desarrollo de pensamiento funcional que evidencian los estudiantes en el salón de clase cuando trabajan en tareas relacionadas con este pensamiento en particular.

La figura 7 presenta los elementos del marco conceptual relacionados con el Pensamiento Funcional, los Niveles de Sofisticación de las relaciones funcionales, y la Actividad Matemática generada a través de la selección de problemas que fomenten la discusión, argumentación y validación de soluciones o métodos de resolución, relacionados con la actividad de identificación de patrones y el proceso de generalización.

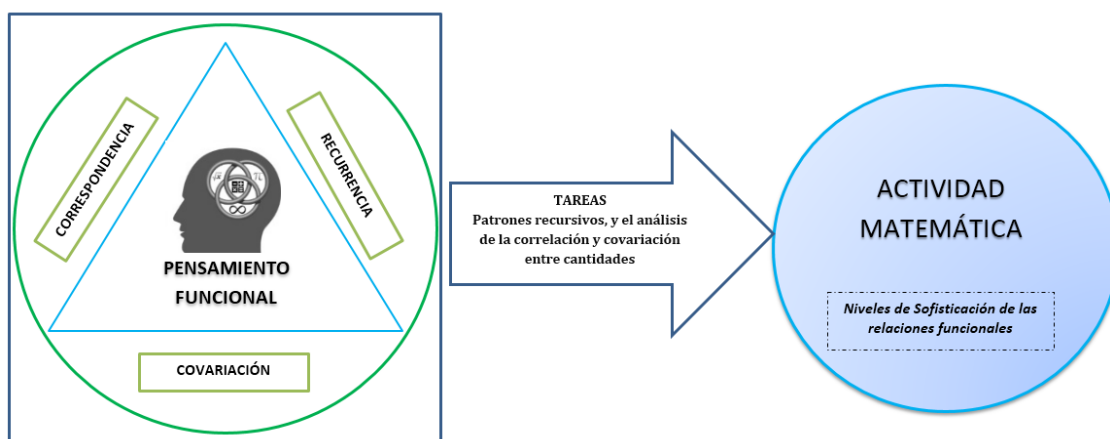


Figura 7. Elementos teóricos del Marco conceptual

Como se ha planteado, desarrollar pensamiento funcional como constructo cognitivo, en el caso de esta propuesta, implica reconocer: Las relaciones funcionales de recurrencia, correspondencia y covariación que establecen los estudiantes de 13 a 15 años. Los tipos de tareas que promueven este pensamiento, las cuales incluyen la generalización de patrones, la correlación

entre variables y el análisis de cambio en las variables. Y finalmente los niveles de sofisticación de las relaciones como una herramienta que permite describir teóricamente el desarrollo del pensamiento funcional.

4. Diseño Metodológico

En este capítulo se presentan las características de los participantes y el proceso metodológico seguido en el trabajo de intervención.

Se busca caracterizar los participantes en tanto que constituyen parte fundamental en el desarrollo de este trabajo, ya que el análisis de sus producciones e intervenciones generan los resultados que permiten evaluar el alcance del objetivo.

En cuanto a lo metodológico, se optó por un proceso cíclico. Este permite entender el sujeto en el aula, estudiar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática y, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como formas de modelar un problema en contexto.

4.1 Participantes

En esta investigación participaron 20 estudiantes del grado octavo del Colegio Juan Pablo II, ubicado en el corregimiento de San Rafael de Rionegro, con edades comprendidas entre 13 y 15

años. Los estudiantes no contaban con conocimientos previos sobre patrones o sistemas de representación.

4.2 Estructura metodológica

La metodología en este trabajo consta de cuatro etapas:

1. Selección, rediseño y análisis de Tareas;
2. Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad;
3. Recolección y Selección de datos, e
4. Interpretación y análisis teórico de los datos.

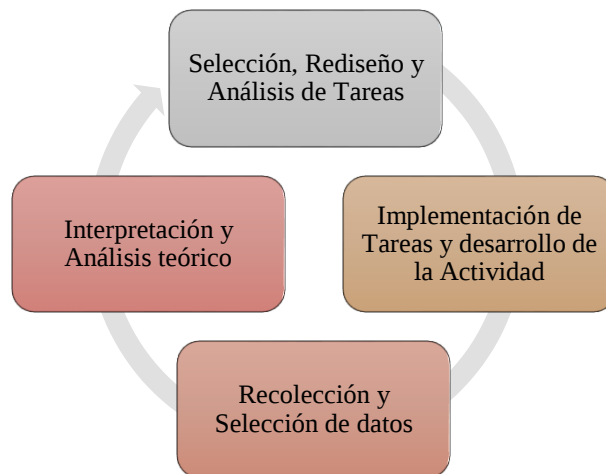


Figura 8. Estructura Metodológica de la Investigación

Como se muestra en la figura 9 la primera etapa está centrada en la selección, rediseño y análisis de Tareas que es retroalimentada por la aplicación completa de las etapas del ciclo. La aplicación de este ciclo de investigación le permite al profesor investigador presentar un conjunto

de Tareas matemáticas validadas que potencian el desarrollo del pensamiento funcional en los estudiantes.

A continuación, se presenta una descripción de las principales características de cada una de las etapas del ciclo:

4.1.1 Selección, rediseño y análisis de las tareas Esta etapa tiene en cuenta los objetivos del currículo y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Además de los resultados obtenidos de la aplicación de una prueba Diagnóstica que es analizada con detalle en el desarrollo de esta etapa.

Desde la perspectiva teórica descrita en la sección anterior el diseño de tareas está relacionado con el uso de patrones lineales como una estrategia para la búsqueda de relaciones entre cantidades y la utilización de los distintos sistemas de representación. Estas situaciones de variación se analizan desde las relaciones funcionales y los niveles de sofisticación exhibidos por los estudiantes durante su desarrollo.

Finalmente, el análisis a priori de las tareas se divide en dos partes: la primera una solución normativa relacionada con la respuesta netamente matemática a las tareas, es decir, la expresión algebraica que relaciona las variables que se identifican en el patrón; y la segunda, un análisis teórico que describe las posibles soluciones, que pueden presentar los estudiantes, relacionadas con los elementos presentes en el marco conceptual de este proyecto.

4.1.2 Implementación de las tareas y desarrollo de la actividad Con base en el rediseño y el análisis a priori sustentado en la etapa anterior se da paso a la implementación de las Tareas en

el aula. El estudiante se concibe como un sujeto activo que es capaz de discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas matemáticas. Esto propicia el desarrollo de los procesos matemáticos fundamentales, que en esta investigación se sustentan en las directrices dadas por la OCDE (2012):

- Formulación matemática de situaciones.
- Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
- Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos. (p.28)

El desarrollo de la Actividad transforma el rol del profesor y del estudiante frente a la construcción de conocimiento matemático. Cada estudiante encuentra en el salón de clase un ambiente que le permite pensar y razonar sobre las matemáticas involucradas en la solución de una tarea, razonar sobre ellas y comunicar sus ideas.

Radford (2013) señala que el desarrollo histórico y epistemológico de las matemáticas muestra que la comunicación y la interacción social son fundamentales para la construcción y consolidación de conocimiento matemático. Por tanto, en esta Etapa de la investigación cada estudiante, así como el profesor, desarrollarán una ética comunitaria donde muestren que:

- Participan activamente.
- Muestran un espíritu abierto a las discusiones y debates.
- Son solidarios con los otros miembros (compañeros y profesores).
- Trabajan por la construcción de una conciencia crítica generada a través del trabajo colectivo que genera la solución de una Tarea.

Estas características propuestas por Radford (2013) transforman la manera de concebir las matemáticas y las formas de conocer en el aula. Este ambiente potencia el desarrollo de una forma independiente de pensar sobre las ideas y/o nociones matemáticas, generando procesos creativos y por tanto formas significativas de construir conocimiento matemático.

La figura 10 muestra los principales constructos que guían el diseño y desarrollo de esta etapa de la investigación.

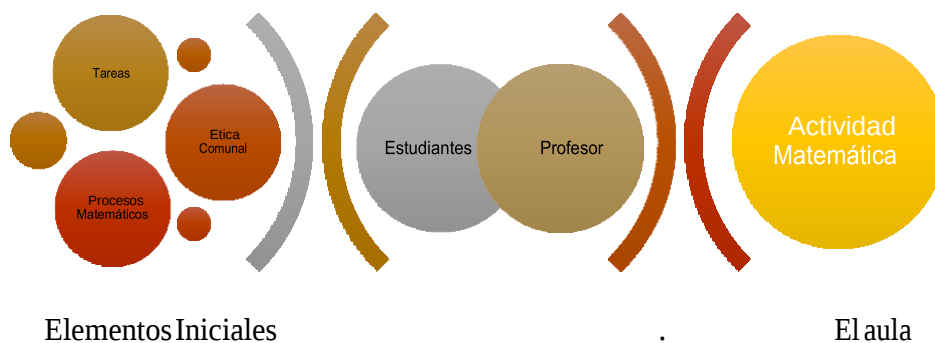


Figura 9. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad

En consecuencia, en el proceso de intervención en el aula, los estudiantes desarrollan las actividades de manera individual; luego se organizan pequeños grupos de trabajo para facilitar la discusión y argumentación de sus respuestas. Y finalmente se realiza una puesta en común, es decir, una discusión grupal, que permita a través de la presentación de ideas y preguntas promover el razonamiento relacionado con las variables involucradas en las tareas, el análisis de las mismas y el uso de lenguaje al describir las cantidades.

4.1.3 Recolección y selección de datos Esta investigación es de tipo cualitativo. Busca dar cuenta del desarrollo de Pensamiento Funcional a través del análisis de la actividad generada por un grupo de estudiantes alrededor de un conjunto de tareas. Para una recolección amplia de la información que permita una selección de datos exitosa se toman como fuente videos de las sesiones de clase y talleres desarrollados por los estudiantes.

4.1.4 Interpretación y análisis teórico En esta etapa, con base en los elementos teóricos que sustentan la investigación se sistematizan los principales resultados de la aplicación. Se realiza una triangulación de la información, es decir se analizan los resultados de las producciones de los estudiantes, teniendo en cuenta el pensamiento funcional y como categorías de análisis los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales. Elementos que hacen parte del marco conceptual de este proyecto; de esta manera se construyen los resultados y verdaderos alcances del trabajo realizado.

5. Desarrollo de la investigación

El desarrollo de la investigación se realizó siguiendo las etapas que se plantearon en el capítulo anterior, en primer lugar, la selección, rediseño y análisis de las tareas, implementación de las tareas y desarrollo de la actividad, recolección y selección de datos y finalmente interpretación y análisis teórico.

5.1 Selección, rediseño y análisis de las tareas

En total son seis talleres, cada uno con mínimo dos tareas relacionadas con la generalización de patrones y el uso e interpretación de las diferentes relaciones entre variables (recurrencia, correspondencia y covariación) tomadas de Rivera (2013) y Drijvers (2013). Los talleres se organizaron así: un diagnóstico inicial, cuatro talleres intermedios y un diagnóstico final.

El *diagnóstico inicial* está formado por una tarea y tiene como propósito identificar en los estudiantes los elementos presentes del pensamiento funcional que según Pinto mediante el planteamiento de tareas relacionadas con la identificación de patrones y el estudio de relaciones entre variables.

Los *talleres intermedios* se caracterizan por aumentar el nivel de complejidad de las relaciones funcionales, cada una de las tareas seleccionadas y rediseñadas que hacen parte de estos talleres están relacionada con secuencias de patrones y tienen como característica la generación de discusiones en torno a:

- Organización de los datos en tablas y preguntas relacionadas con el significado de los datos en la tabla.
- Descripciones de qué sucede con la variable dependiente.
- Predicciones de términos cercanos o lejanos de una secuencia.
- Generalizaciones de las relaciones en palabras o notación variable.
- Y descripciones de los significados de la variable o de las relaciones encontradas.

El *diagnóstico final* está formado por dos tareas, con características similares a los talleres intermedios, y tiene como objetivo principal analizar los alcances en el desarrollo de los anteriores talleres y por tanto del objetivo de esta investigación.

5.1.1 Análisis a priori de las tareas A continuación, se presentan las soluciones normativas y teóricas que hacen parte del análisis a priori de cada una de las tareas.

Diagnóstica inicial (Problema modificado de (Drijvers, 2011, p. 78))

Algunas veces se ven volando los pájaros formando una V



Es más fácil dibujar cada grupo con puntos. Aquí se muestran tres términos de una secuencia que sigue el patrón de vuelo en forma de V.



Figura 1



Figura 2



Figura 3

1. Dibuja la figura 4 de la secuencia.
2. ¿Puede una figura tener 84 puntos? Justifica tu respuesta.
3. ¿Cuántos puntos hay en la figura 6? y ¿cuántos en el número 10?
4. Dibuja la figura con 19 puntos.
5. En algunos casos resulta útil presentar la información en una tabla. La primera parte de la tabla se muestra a continuación.

Figura	Número de Puntos
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	

1. ¿Cuántos puntos habría en la figura 100? ¿qué harías para saber eso?
2. Construye una expresión matemática para determinar el número puntos en la figura n .

Solución normativa: La actividad consiste en identificar el patrón que se forma en el arreglo de puntos $f(n) = 2n + 1$ donde $f(n)$ es la cantidad de aves (representada a través de puntos) y n la posición de la figura dentro de la secuencia. Inicialmente se presenta en el contexto de unos pájaros volando, pero después se solicita a los estudiantes analizar esa misma secuencia a través de su representación pictórica. Luego se pregunta si es posible que una figura tenga un número par de puntos, en este caso 84 puntos. Se pide completar una tabla y finalmente, se solicita la cantidad de puntos de la figura 100 y una expresión que relacione la cantidad de la figura con la cantidad de aves representada en este caso por puntos.

Solución teórica: El estudiante podrá hacer conjeturas referentes a que no es posible un número par de puntos; explicando la relaciones entre la figura y las características que toman los valores cuando se desea hallar la cantidad de puntos de esta manera se observará evidencias de niveles mayores a los recursivos. Cuando el estudiante, utiliza expresiones generalizadas, es decir, especifica las características de cualquier término; por ejemplo, que debe ser un número par, pasaría de un nivel recursivo a niveles superiores, es decir, primitivo funcional general o emergente funcional general. La diferencia entre estos niveles funcionales estaría en la capacidad del estudiante de explicar y utilizar o no una regla verbal o simbólica para argumentar su respuesta.

En los ítems 6 y 7 se presentan actividades relacionadas con los tres tipos de relaciones funcionales (recurrencia, correspondencia y covariación) se pide realizar un cambio en el sistema de representación del patrón, al tabular. En el ítem 9 la figura que se analiza es bastante lejana a las solicitadas anteriormente y además se pide un análisis sobre cómo se obtiene. Por ejemplo, si deciden hacer una tabla o mostrar ejemplos para hallar algunas figuras en particular determinarán aspectos relacionados con los niveles recursivos. También es posible que los estudiantes intenten mostrar una regla de forma simbólica o verbal que relacione las cantidades, y el nivel dependerá

de qué tan completa sea dicha fórmula. De esta manera se evidenciarán niveles funcionales, relacionados con esta expresión que puede ser presentada en palabras o símbolos. Por ejemplo, un estudiante puede describir la regla diciendo “el número de la figura por dos, aumentado en uno” omitiendo una de las variables, en este caso la variable dependiente, exhibiendo así nivel 6 emergente funcional general. Al especificar una regla completa utilizando una frase o una ecuación que represente el patrón que determina los términos de la secuencia, permitirá la evidencia de un nivel mayor.

La diagnóstica inicial no busca clasificar a los estudiantes en un nivel en específico, sino identificar cómo están estructurando las relaciones; además, de familiarizar al estudiante con la generalización de patrones, y los diferentes sistemas de representación de las funciones. De esta manera la prueba diagnóstica permite presentar las primeras características del curso, relacionadas con los niveles de sofisticación.

Taller uno

Tarea 1. Considere la secuencia de las figuras (Problema modificado de (Rivera, 2013, p. 157))



- A. Dibuja los términos 5, 6 y 7.
- B. ¿Cuántos círculos hay en el término 10? Explica tu respuesta.
- C. ¿Cuántos círculos hay en el término 100? Explica tu respuesta.
- D. Escribe un mensaje a un compañero explicando detalladamente qué debe hacer para saber cuántos círculos hay en cualquier término de la secuencia.

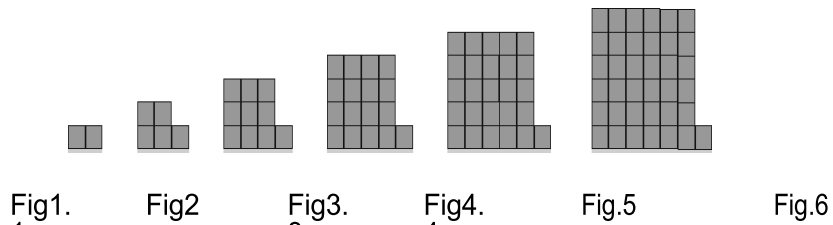
Solución normativa: Los términos están formados por una fila horizontal y una fila vertical de círculos. La fila horizontal tiene la cantidad de círculos que se indican en el número del término, y la fila vertical la cantidad de círculos señalados por el término anterior. Entonces para el término n se tienen en total $2n - 1$ círculos; es decir la expresión $f(n) = 2n - 1$ describe la función, donde $f(n)$ representa el número de círculos, y n el término de la secuencia. Para el análisis de esta relación entre variables, se solicita a los estudiantes en primer lugar, un término cercano y luego un término lejano de la secuencia, el término 100. Finalmente, que escriban un mensaje a un compañero explicando cómo relacionar el término con la cantidad de círculos correspondiente

Solución teórica: En los ítems A, B y los estudiantes podrán contar la cantidad de círculos de los primeros cuatro términos, y luego intentar encontrar un patrón que le permita generar la cantidad de círculos para los otros términos. Al observar, por ejemplo, que la cantidad de círculos de la fila horizontal corresponde al número del término y la horizontal al término quitándole uno. Las respuestas que los estudiantes presenten permitirán evidenciar el nivel de pensamiento recursivo en el que se ubiquen los estudiantes, por ejemplo, la construcción de casos particulares, elaboración de tablas, entre otras y asociarlo así con los niveles 2, 3 o 4.

En los ítems D y E, las respuestas de los estudiantes permitirán determinar si tienen una concepción recursiva de la relación, es decir, si solo usan casos particulares, o utilizan secuencia de casos, determinará niveles menores al cuarto. Si en algún momento expresan o identifican la relación como una función, expresando a través de sus palabras o símbolos una mayor comprensión; se podrá identificar un primitivo funcional general o el emergente funcional general. Estos últimos niveles podrán ser observados dependiendo de qué tan completa sea la expresión que el estudiante escriba al relacionar las variables. Es decir, si, al expresar de manera verbal no

omiten la variable dependiente de la relación e indican que la cantidad de círculos corresponde al doble del número de la figura disminuido en uno.

Tarea 2. Patrones de crecimiento de bloques (Problema modificado de (Rivera, 2013, p. 151))



1. ¿Cuántos bloques son necesarios para formar la figura 8? ¿Cómo obtuvo este resultado?
2. ¿Cuántos bloques son necesarios para formar la figura 35? ¿Cómo obtuvo este resultado?
3. ¿Puede una figura tener 100 bloques? En caso afirmativo ¿cuál figura sería?
4. Escriba una expresión que relacione el número de la figura con la cantidad de bloques.

Solución normativa: Los términos de la secuencia están constituidos por bloques pequeños agrupados. La longitud del lado del bloque grande corresponde al número de la figura, además en cada iteración se añade un pequeño bloque en forma de cuadrado. Entonces para el término n se tienen en total $n^2 + 1$ bloques, es decir, la relación entre la cantidad de bloques y el número de la figura está dada por $f(n) = n^2 + 1$ donde n representa el número de la figura y $f(n)$ corresponde a la cantidad de bloques. Para analizar la relación entre el número de la figura y la cantidad de bloques, se solicitan los términos 8 y 35 de la secuencia. Luego se pide analizar si podría un término tener 100 cuadrados. Finalmente, se solicita a los estudiantes una expresión que relacione estas variables, ya sea de manera verbal o por medio de una expresión simbólica.

Solución teórica: En el ítem 1 se espera que los estudiantes escriban la cantidad de bloques de la figura 8, contando el número de bloques, o identificando el patrón figurativo para obtener la respuesta. En el ítem 2 los estudiantes pueden tener más dificultades para obtener la respuesta debido a que la figura solicitada es un término mucho más lejano de la secuencia que las presentadas anteriormente. Los estudiantes pueden intentar encontrar un resultado e incluso realizar la representación pictórica para obtener la respuesta; también querrán encontrar el total de bloques de figuras cercanas y así determinar una.

En el último ítem se espera que los estudiantes escriban una expresión verbal, sincopada o simbólica en la que intenten relacionar el término de la secuencia con la cantidad de bloques. De tal manera que puedan construir la relación, pero tal vez presenten dificultades en expresarla omitiendo una de las variables. Por ejemplo, la dependiente, en este caso se cree que podrán mostrar solo los primeros cuatro niveles de sofisticación que según Blanton et al., (2015), corresponden al pre estructural, recursivo particular, recursivo general y funcional particular. Las preguntas estarán encaminadas al análisis de cómo el estudiante entiende el patrón, qué elementos tuvo en cuenta para determinarlo, cómo encontró la figura 100, por qué en el último punto cree que esa es la relación entre las variables, cómo la explicaría.

Taller dos

Tarea 1: observe la tabla y responde las preguntas (Problema modificado de (Rivera, 2013, p. 154))

					...
Cantidad de cuadrados	1	2	3	4	...
Cantidad de palillos	4	7	10	13	...

- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar cuatro cuadrados?
- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar cinco cuadrados?
- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar 30 cuadrados?
- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar 40 cuadrados?
- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar n cuadrados?

Solución normativa: La tabla presenta los cuatro primeros términos del patrón constituido por una fila horizontal de cuadrados formados con palillos. La tabla presenta la representación gráfica, la cantidad de cuadrados y la cantidad de palillos.

Entonces para término n habrá en total $1 + 3n$ palillos, es decir $f(n) = 1 + 3n$ es la expresión algebraica que describe la función donde $f(n)$ representa la cantidad de palillos que forman los cuadrados y n el número de cuadrados.

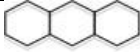
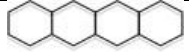
Solución teórica: El estudiante podrá analizar la tabla por columnas es decir para dos cuadrados se asignan siete palillos, para tres cuadrados se requieren 10 palillos, e intentar resolver las preguntas.

Otros estudiantes, pueden analizar de manera horizontal la tabla observando el comportamiento de la secuencia de cuadrados 1, 2, 3, 4, etc., y la secuencia de palillos 4, 7, 10 y 13, y determinar lo que sucede con posiciones más lejanas, evidenciando un nivel recursivo; el

estudiante podrá mostrar una secuencia de casos para la cantidad de palillos de 30 y 40 cuadrados. Un nivel de sofisticación más complejo permitirá a los estudiantes generar un valor de salida, para cualquier figura solicitada, es decir, podrá decir que para la figura 30 hay 91 cuadrados, sin acudir a casos particulares, sin embargo, no podrá articular con sus palabras qué sucede en la relación ni escribirla de manera simbólica, exhibiendo un nivel de sofisticación funcional particular.

Algunos estudiantes podrán presentar dudas sobre si los palillos están sobrepuestos o en la unión de los cuadrados existe un solo palillo, así que, sea cual sea la manera en la que observe el patrón, se permitirá que los estudiantes exploren e intenten determinar la relación entre la cantidad de palillos que se necesitan para construir una cantidad específica de cuadrados.

Tarea 2: Observa la tabla y responde las preguntas (Problema modificado de (Rivera, 2013, p. 154)).

				
Cantidad de Hexágonos	1	2	3	4
Cantidad de palillos	6	11	16	21

- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar 5 hexágonos?
- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar 6 hexágonos?
- ¿Cuántos palillos son necesarios para formar 50 hexágonos?
- Describe la relación entre la cantidad de palillos necesarios para formar cualquier cantidad de hexágonos

e. ¿Cuántos palillos son necesarios para formar n hexágonos?

Solución Normativa: La tabla presenta los cuatro primeros términos del patrón constituido por una fila horizontal de hexágonos cada uno formado con palillos.

Entonces para el término n se tienen en total $1 + 5n$ palillos, es decir $f(n) = 1 + 5n$ es la expresión algebraica que describe la función donde $f(n)$ representa la cantidad de palillos que forman los hexágonos, y n el número de hexágonos.

Solución teórica: se espera que los estudiantes logren construir una expresión que relacione las variables en la tarea 1 e intenten usarla para desarrollar esta tarea. Es decir, si identifican que es suficiente cambiar el 3 de la expresión $1 + 3n$ por 5. Si los estudiantes usan frases como: “la cantidad de palillos es cinco veces la cantidad de cuadrados aumentada en uno”, podremos observar que los estudiantes estarían en un nivel 7 correspondiente al condensado funcional general, puesto que dan significado a cada una de las variables, y comprenden su expresión como un objeto que se puede manipular para producir una nueva, esta expresión puede ser expresada por medio de notación simbólica o mediante una frase que exprese la relación entre las cantidades.

Taller Tres

Tarea 1: Lee atentamente y responde (Problema tomado de Rivera (2013, p. 160))

Una empresa construye barras ensamblando cubos formando una fila, usando una máquina que coloca calcomanías de caritas felices en las barras. La máquina coloca exactamente una etiqueta en cada cara expuesta del cubo. Cada cara expuesta del cubo tiene que tener la calcomanía. Por ejemplo, las barras de longitud 2 (cubos) necesitan 10 calcomanías.



- a. ¿Cuántas calcomanías se necesitan para las barras de longitud 1 al 10? Explique cómo determinarías estos valores.
- b. ¿Cuántas calcomanías se necesitan para una barra de longitud 20? Explique cómo determinarías este valor.
- c. Suponga que necesita para una barra en particular 150 calcomanías. ¿Cuál sería la longitud de la barra? ¿Cómo determinarías esto?
- d. Explique cómo encontrar el número de calcomanías que se necesitan para cualquier longitud de barra. Escribe una fórmula que se pueda usar para determinar esto.

Solución normativa: Los términos están formados por una fila de cubos pegados, cada cara expuesta del cubo tiene una calcomanía. Entonces para el término n se tienen en total $2 + 4n$ calcomanías, es decir $f(n) = 2 + 4n$ es la expresión algebraica que describe la función donde $f(n)$ representa la cantidad de calcomanías y n la longitud de la barra, esto es la cantidad de cubos pegados que la componen.

Otra manera de construir la función es observar los dos cubos de las esquinas y los centrales construyendo la expresión así: $f(n) = 10 + 4(n - 1)$

Solución teórica: En un primer momento se espera que algunos estudiantes presenten dificultades para determinar la cantidad de calcomanías de las caras no expuestas del cubo, podrán hacer preguntas sobre las otras vistas que no se observan. También podrán realizar preguntas sobre el significado de la longitud de la barra. Luego, los estudiantes pueden intentar contar cuántas calcomanías hay en la figura que se presenta y corroborarlas con el enunciado. Serán capaces de realizar una representación tabular para ir escribiendo los datos correspondientes a la cantidad de calcomanías dada la longitud de la barra, para dar respuestas a las preguntas en las que se les solicita barras de diferente longitud. Sí los estudiantes logran obtener el resultado luego de

completar la tabla determinará un nivel recursivo, sin embargo, los estudiantes podrán dar la respuesta de que una barra de longitud 150 tiene N calcomanías sin recurrir a la tabla, de esta manera, se podrá evidenciar un nivel primitivo funcional general. Puede suceder que los estudiantes observen que permanecen constantes 2 de las calcomanías que corresponden a las caras de los extremos de la barra y que en resto el cambio corresponde a cuatro veces la longitud de la barra, dependiendo de qué tan completa sea la expresión que describa esta relación permitirá determinar un nivel seis o siete, especificando que la cantidad de calcomanías depende de cuatro veces la longitud de la barra más dos.

Tarea 2: Estructura de bloques (Drijvers (2011) Problema modificado de la página 92)

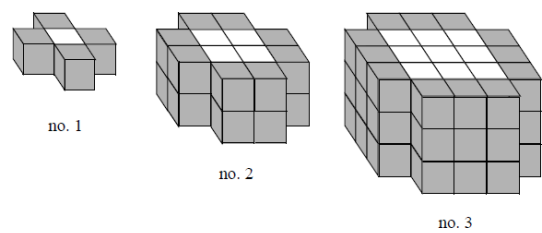


Figura	Cantidad de cubos blancos	Cantidad de cubos Gris
1		
2		
3		
4		
5		
6		
n		

1. ¿Cuántos cubos entre blancos y negros son necesarios para formar la figura 100.
Cómo puedes determinar esto.
2. ¿Cómo se podría determinar la cantidad de bloques blancos para una figura en particular? Explica tu respuesta
3. ¿Cómo se podría determinar la cantidad total de cubos? Explica tu respuesta.
4. Es posible encontrar una expresión que relacione la cantidad de cubos y el número de la figura. En caso afirmativo, explica cómo sería, justificando su respuesta.

Solución normativa: Los términos forman una estructura compuesta por bloques blancos y grises, las columnas de bloques de las esquinas son extraídas. La altura está relacionada con el término es decir con la cantidad de cubos que señala el término uno sobre el otro.

Entonces para el término n habrá en total $n^3 + 4n$ cubos blancos y negros, es decir $f(n) = n^3 + 4n$ es la expresión algebraica que describe la función donde $f(n)$ representa la cantidad de cubos blancos y negros que componen la estructura y n el número del término.

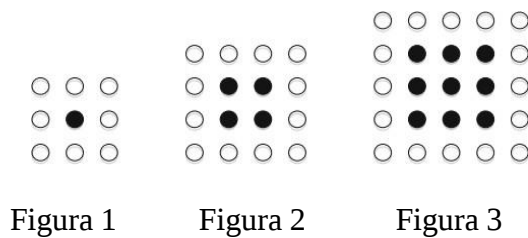
Solución teórica: Los estudiantes en esta tarea cuentan con dos tipos de representaciones del patrón: pictórica y tabular. Sin embargo, en un primer momento podrían presentar dificultades para determinar la cantidad de cubos en las vistas que no les son visibles. Los estudiantes podrán determinar la cantidad de cubos blancos observando solamente las caras superiores y determinando que debajo existen otros cubos.

Los estudiantes podrán analizar la tabla de manera vertical e intentar completarla evidenciando de esta manera un nivel específicamente recursivo; si además expresa esa relación como el cuadrado de la figura, mostrará niveles funcionales superiores. Al dar respuesta sobre la cantidad de cubos blancos y grises, habrán evidenciado niveles de sofisticación mayores, puesto

que se requiere que manipule las cantidades de tal manera que determine que puede sumarlas y operarlas para producir una nueva regla que determine la cantidad total de cubos blancos y grises para cualquier figura.

Diagnóstico final

Tarea 1: Observa la siguiente secuencia de figuras (Problema tomado de Rivera (2013 p. 161)).



1. Siguiendo con el patrón de la secuencia dibuja la figura 4.
2. ¿Cuántos puntos negros hay en la figura 6? Explica tu respuesta.
3. ¿Cuántos puntos blancos y cuántos puntos negros hay en la figura 10?
4. Escribe cómo explicarías a tu mejor amigo cómo encontrar la cantidad de puntos blancos y negros de cualquier figura de la secuencia.

Solución normativa: Las figuras están formadas por círculos blancos y negros. La cantidad de círculos blancos es $4n + 4$, la cantidad de círculos n^2 y el total de círculos está determinado por la expresión $n^2 + 4n + 4$, donde n representa el término de la figura.

Entonces para la figura n habrá en total $n^2 + 4n + 4$ círculos blancos y negros, es decir $f(n) = n^2 + 4n + 4$ es la expresión algebraica que describe la función, donde $f(n)$ representa el número de círculos blancos y negros, y n el término de la figura dentro de la secuencia.

Solución teórica: En esta tarea podrá evidenciarse el razonamiento recursivo cuando los estudiantes comiencen a buscar las siguientes figuras del patrón, puede que utilicen términos cercanos o lejanos lo que nos permitirá observar el aumento en su razonamiento funcional. Además, el trabajo de los estudiantes puede mostrar aspectos relacionados con el cuarto nivel de sofisticación en adelante, si a través de sus palabras o símbolos construye una relación entre las variables. La estructura de dicha expresión puede darnos características de cómo los estudiantes relacionan las variables y cuáles son los significados que le dan a cada una de ellas. Sin embargo, en esta tarea, se observa que la función que relaciona las variables no es lineal, por tanto, se espera que la mayoría de los estudiantes, en un primer momento no logren articular con palabras o notación simbólica la relación entre la figura y la cantidad de puntos blancos y negros. En tareas planteadas anteriormente, se presentan cantidades en las que una de las variables se eleva al cuadrado, aunque en esta tarea aparecen más elementos, es decir el número de la figura al cuadrado, cuatro veces esa figura y una cantidad fija que en este caso es cuatro. Por tanto, escribir una frase o ecuación que relacione las variables mostrará, no solo, niveles de sofisticación funcionales mayores, sino un nivel de comprensión de la correlación y la covariación entre variables más sofisticado.

Tarea 2: Observa la secuencia de figuras y responde (Problema tomado de Rivera (2009, p. 299)).



Figura 1

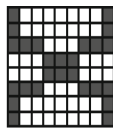


Figura 2

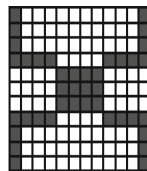


Figura 3

- a. Cómo se vería la figura 4. Descríbela o dibújala en la hoja.
- b. Encuentra una fórmula para el número total de baldosas grises en la figura del patrón.
Explica tu fórmula.
- c. ¿Cuántas baldosas grises hay en la figura 11? ¿Cómo sabes esto?
- d. ¿Cuál figura contiene 56 baldosas grises? Explica tu respuesta.

Solución normativa: Las figuras están formadas por baldosas blancas y negras. La cantidad de baldosas negras en el centro de la figura es $(n + 1)n$ y la cantidad de baldosas negras correspondiente a los brazos de la figura está dada por la expresión $4(2n + 1)$. Entonces la figura n se tiene en total $n^2 + 9n + 4$ baldosas negras, es decir $f(n) = n^2 + 9n + 4$ es la expresión algebraica que describe la función, donde $f(n)$ representa la cantidad de cuadrados negros, y n el término de la secuencia.

Solución teórica: En el ítem c, en el cual se pide a los estudiantes encontrar cuántas baldosas hay en la figura 11, es necesario que el estudiante construya una relación de correspondencia entre el número de la figura y la cantidad de baldosas. Sin embargo, si decide solo mirar las figuras y construirlas hasta la figura 11, sería una evidencia centrada en la recurrencia entre solo una variable en este caso la dependiente. La pregunta ¿cómo sabes esto? permite identificar todas las relaciones de acuerdo a las respuestas que el estudiante exhiba. El ítem d, presenta una mayor dificultad, debido a que se da el número de baldosas y los estudiantes deben indicar el valor de la variable dependiente, de esta manera se verá evidenciado un pensamiento correspondiente a niveles de sofisticación funcionales.

5.2 implementación de las tareas y desarrollo de la actividad

La tabla 5 presenta un resumen de las tareas y la relación analizada mediante su representación simbólica.

Es importante señalar, que la solución de cada tarea no consiste en encontrar la representación simbólica, sino en la actividad cognitiva que se genera cuando los estudiantes intentan encontrar el patrón que define la relación. Por ejemplo, al comprender y generalizar las cantidades, al obtener conclusiones, al aplicar reglas, al ensayar casos particulares, al describir o al explicar a sus compañeros con sus palabras lo que varía, lo que se mantiene constante, la dependencia y los significados que le atribuye a las cantidades relacionadas.

Así mismo, aunque la representación parece sencilla, obtenerla depende del tipo de tarea planteada (patrones figurales o secuencias numéricas), la actividad matemática generada en el aula y el nivel de sofisticación evidenciado por los estudiantes. Por tanto, debe ser una actividad de construcción individual, que debe contar con la participación del profesor, quien, a través del diseño y rediseño de tareas, la descripción de cantidades variables, el planteamiento de preguntas apropiadas promueve la participación en el aula, brindando oportunidades a los estudiantes de participar en instancias de desarrollo del pensamiento funcional (Smith, 2008).

Tabla 5.

Organización de las Tareas

Tareas	Relación analizada
Diagnóstica inicial	
Tarea 1. Relación entre el número de la figura y la cantidad de pájaros en V.	$y = 2x + 1$
Taller 1	

Tareas	Relación analizada
Tarea 1. Relación la cantidad de círculos para cada término de la secuencia.	$y = 2x - 1$
Tarea 2. Relación entre el número de la figura y la cantidad de bloques.	$y = x^2 + 1$
Taller 2	
Tarea 1. Cantidad de palillos necesarios para formar x cantidad de cuadrados.	$y = 1 + 3x$
Tarea 2. Cantidad de palillos necesarios para formar x cantidad de hexágonos.	$y = 1 + 5x$
Taller 3	
Tarea 1. Número de calcomanías para cualquier longitud de la barra.	$y = 2 + 4x$
Tarea 2. Relación entre la cantidad de cubos y el número de la figura.	$y = x^3 - 4x$
Diagnóstica final	
Tarea 1. Cantidad de puntos blancos y negros de cualquier figura de la secuencia.	$y = x^2 + 4x + 4$
Tarea 2. Relación entre la cantidad de baldosas grises y cualquiera figura de la secuencia.	$y = x^2 + 9x + 4$

A continuación, se describen los momentos de implementación de los talleres:

El diagnóstico inicial se desarrolló de manera individual con el fin de recolectar datos para la organización y el desarrollo de los siguientes talleres. Además, para analizar los resultados de la implementación de los talleres y las características en los niveles de sofisticación alcanzados o evidenciados por los estudiantes.

Los talleres intermedios se plantearon en tres momentos:

Primer momento: los estudiantes desarrollan las tareas de manera individual.

Segundo momento: se formaron grupos de máximo tres estudiantes para permitir la discusión sobre el problema y recolectar información para la investigación; los estudiantes debatían sus soluciones, sus representaciones y comparaban la relación encontrada entre las variables, ya sea mediante la representación simbólica o verbal. Los talleres intermedios y la actividad matemática generada en el aula, constituyen el puente para reconocer el nivel de sofisticación en el pensamiento funcional de los estudiantes y posibilitar el tránsito de un nivel inferior a uno mayor.

Tercer momento: se realizaba una puesta en común, que pretendía involucrar aún más a los estudiantes para promover constantemente su participación y comunicación de las ideas matemáticas obtenidas del desarrollo del taller y la discusión con sus compañeros de grupo. De esta manera, los estudiantes, son conscientes de que sus opiniones y preguntas son importantes, y contribuyen significativamente a la solución de la tarea; además era posible identificar errores cometidos que servirán para el desarrollo de los siguientes talleres. Según Radford (2013), esto promueve en los estudiantes procesos creativos y transforman el aula en un espacio donde se generan nociones y significados relacionados con el conocimiento matemático, en este caso, asociado a las funciones.

El rol de la docente investigadora en un primer momento consistía en escuchar los razonamientos de los estudiantes; a medida que avanzaban en el desarrollo de los talleres se planteaban preguntas a los estudiantes sobre: cómo habían desarrollado la tarea, cómo encontraron los términos cercanos o lejanos de la secuencia, qué habían tenido en cuenta para completar la tabla y cómo estaban seguros de esos valores; además se preguntaba sobre los significados de las variables y cuál era la forma correcta o la mejor manera de representar la relación entre ellas.

6. Interpretación y análisis teórico

Con el fin de realizar la caracterización del pensamiento funcional se lleva a cabo una observación detallada de las hojas de trabajo de los estudiantes y los videos de cada uno de los momentos de la secuencia desarrollada en el aula. Para la revisión de los resultados relacionados con el desarrollo de pensamiento funcional, se requiere definir categorías de análisis. En el caso de este trabajo de intervención los niveles de sofisticación y las relaciones funcionales aportan los elementos teóricos fundamentales para esta caracterización. La secuencia desarrollada por los estudiantes estuvo conformada por cinco talleres, que incluían una prueba diagnóstica inicial y una prueba diagnóstica final; el tiempo destinado para el desarrollo de la secuencia fue de cinco horas a la semana. En el análisis de las tareas se hace un seguimiento al trabajo individual, al trabajo en equipo y a puesta en común.

La organización del análisis a posteriori de las actividades se realiza de la siguiente manera: un *primer análisis* que consiste en una breve exposición del nivel de sofisticación, seguida de imágenes y diálogos destacados relacionados con la solución de algunas de las tareas desarrolladas por los estudiantes y la interpretación de ellas a la luz de los elementos teóricos aportados por el marco conceptual de este trabajo. Este primer análisis facilitó la observación detallada de cada nivel de sofisticación evidenciado por los estudiantes y las relaciones funcionales presentes durante el establecimiento y construcción del patrón generado por cada secuencia. La decisión de presentarlo de esta manera se basa en resaltar que los niveles de sofisticación están relacionados

con las secuencias de instrucción que les dan origen y por tanto no hay una única progresión posible y ésta no necesariamente es lineal.

Un *segundo análisis* con la selección de un estudio de caso presentado en una tabla de tres columnas. En la primera columna se especifica la tarea, en la segunda columna las evidencias, es decir imágenes y transcripciones de los episodios más destacados y una tercera columna con los respectivos comentarios interpretativos. La lectura vertical permite observar la evolución del estudio de caso relacionada con la caracterización de los niveles de sofisticación evidenciados durante el desarrollo de los talleres y por tanto la identificación de las características propias del pensamiento funcional como un proceso cognitivo envuelto en la búsqueda del patrón y en las formas de expresarlo ya sea por medio de cálculos, dibujos, de manera verbal o notación algebraica.

Para la presentación de los registros se decide usar un código para cada estudiante, por ejemplo, **E1** que hace referencia al estudiante uno, es decir a todas sus producciones e intervenciones desarrolladas en la secuencia. Para las líneas de transcripción se sigue manteniendo este código.

6.1 Primer análisis: Los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales

A continuación, se destacan las producciones e intervenciones de los estudiantes que permitieron la observación y caracterización del pensamiento funcional utilizando como categorías de análisis los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales propuestos por Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015): (nivel 1) Pre estructural, (nivel 2) Recursivo particular, (nivel 3) Recursivo general, (nivel 4) Funcional particular, (nivel 5) Primitivo funcional

general, (nivel 6) Emergente funcional general, (nivel 7) Condensado funcional general y finalmente, (nivel 8) función como objeto. Además de los elementos del pensamiento funcional y las relaciones funcionales.

Nivel 1. Pre estructural

Los estudiantes no describieron ningún tipo de relación matemática entre las variables, ni un patrón en la secuencia. Se evidencia que no fueron capaces de elaborar tablas de valores o encontrar casos particulares; esto impide que logren describir cómo están relacionadas las variables presentadas en la tarea.

En la tarea 1 del último taller, el estudiante **E1** establece que la relación entre la cantidad de puntos blancos y negros de la figura es igual al número de la figura. En este caso el estudiante elabora una relación de correspondencia pero no hay evidencia de que haya usado una estructura o relación entre las variables, en esta ocasión se observa la no comprensión del patrón que genera secuencia; esto evidencia un nivel de pensamiento pre estructural al no encontrar la relación entre la posición de la figura y la cantidad de puntos blancos y negros que se presentaba en la tarea (ver figura 10)

Tarea 1: Observa la siguiente secuencia de figuras

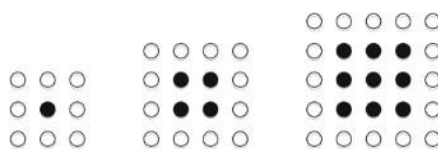


Figura 1 Figura 2 Figura 3

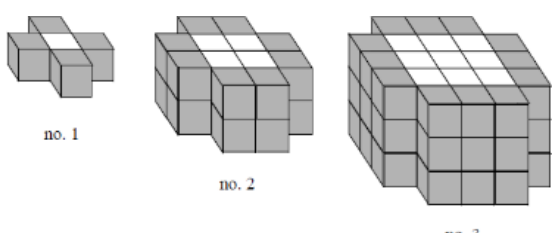
e. Escribe cómo explicarías a tu mejor amigo cómo encontrar la cantidad de puntos blancos y negros de cualquier figura de la secuencia

Fig. 1 = 1 ponto Negro
Fig 2 = 2 " "
Fig 3 = 3 " "

Figura 10. Producción del E1, ítem 5, tarea 1 del taller diagnóstico final

El estudiante E2 en la tarea 2 correspondiente al taller intermedio, señala que son necesarios 1.000.000 de cubos, recurriendo a sus conocimientos previos sobre el cálculo del volumen de un sólido. Sin embargo, este resultado solo corresponde a la cantidad de cubos blancos. En este caso el estudiante no evidencia ninguna relación que describa la cantidad de cubos blancos y negros según el número de la figura; esto corresponde al primer nivel de sofisticación de las relaciones funcionales. En la segunda pregunta expresa que “multiplicando el número que indique la figura”, pero no especifica cómo realizar esta operación; por ejemplo, si es por sí mismo, no señala cuántas veces se debería multiplicar, o si corresponde a otro número (ver figura 11).

Tarea 2: Estructura de bloques



no. 1 no. 2 no. 3

1. ¿Cuántos cubos entre blancos y negros son necesarios para formar la figura 100. Cómo puedes determinar esto.

Se necesitan 1000.000

$$100 \times 100 \times 100 = 1000.000$$

2. ¿Cómo se podría determinar la cantidad de bloques blancos para una figura en particular? Explica respuesta

Multiplicando el número que indique la figura.

Figura 11. Producción del E2, ítem 1 y 2, tarea 2 del taller 3

El pensamiento funcional promueve el análisis de patrones como una herramienta que posibilita generar estructuras que permiten la comprensión de la relación entre las variables y la construcción de expresiones ya sean verbales o simbólicas que representen esa relación. En este caso los dos estudiantes evidenciaron un primer nivel de sofisticación de las relaciones y se destacan elementos como el establecimiento de una relación de correspondencia que encuentran entre las variables; aunque la relación entre las variables no era la correcta constituye un primer paso en la evolución de un proceso cognitivo que le permita avanzar en la comprensión del comportamiento del patrón y en la manera adecuada de representarlo.

Nivel 2: Recursivo particular

En este nivel se observó en los estudiantes el reconocimiento de un patrón de forma recursiva y como una secuencia de casos. Los estudiantes lograron determinar la secuencia como un proceso de conteo y no como una regla general.

Por ejemplo, el estudiante **E3** en la tarea 1 del primer taller observa el patrón como una secuencia de valores, donde los círculos van aumentando estableciendo una relación funcional de recurrencia. El estudiante identifica algunas regularidades, observa que la cantidad de círculos horizontales es mayor que la de círculos verticales, centrando su atención en una única representación de la figura, luego observa el resto de figuras y escribe que asciende o se aumenta un círculo en la vertical y uno en la horizontal (ver figura 13), la observación y descripción que hace el estudiante **E3** de este incremento entre cada término de la secuencia evidencia un pensamiento recursivo particular.



Figura 12. Tarea 1 del primer taller

En la figura 13 se observa que el estudiante **E3** expresa dicha relación de manera numérica e identifica sus componentes como círculos horizontales y círculos verticales. Por otra parte, se infiere que, a partir de su respuesta, **E3** nota un patrón como una secuencia que incrementa, pero finalmente no especifica la relación entre el número del término y la cantidad de círculos.

Tarea 1. Considere la secuencia de las figuras.



4. Escribe un mensaje a un compañero explicando detalladamente qué debe hacer para saber cuántos círculos hay en cualquier término de la secuencia.

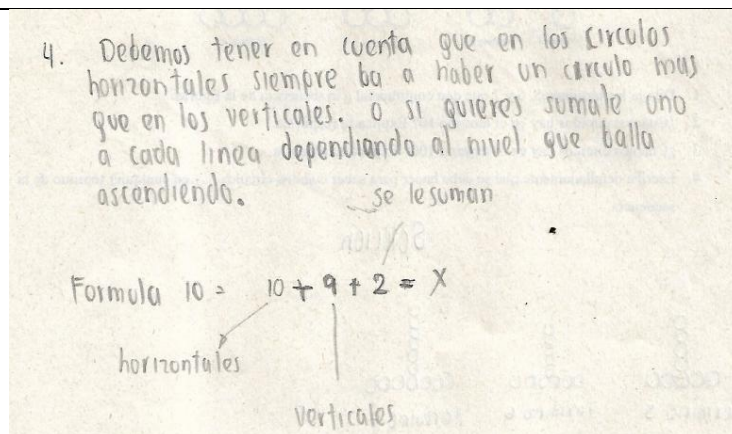


Figura 13. Producción del E3, ítem 4, tarea 1 del taller 1

Durante la solución de la tarea 1 de la prueba diagnóstica el estudiante **E4** decide construir una tabla que incluye los primeros once términos de la secuencia, establece una relación de recurrencia entre los pares que corresponden a la variable, en este caso la cantidad de puntos. (ver figura 15). El estudiante **E4** manipula el patrón de la secuencia como un conjunto de casos particulares sin llegar a una generalización para la cantidad de puntos de cualquier figura; así mismo señala que es necesario sumarle dos puntos a cada figura evidenciando la relación de recurrencia que existe entre figuras sucesivas como se observa en la figura 14.

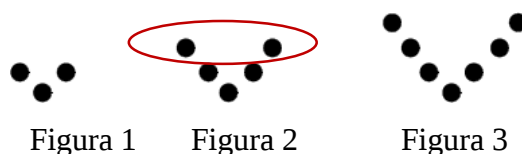


Figura 14. Tarea 1 de la prueba diagnóstica

Esto sugiere que **E4** está creando una estrategia para encontrar el siguiente valor de la secuencia (ver figura 15). Sin embargo, sigue siendo un proceso de conteo, sin lograr estructurar una relación general.

Se muestran tres términos de una secuencia que sigue el patrón de vuelo en forma de V.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

3. ¿Cuántos puntos debe tener la figura 8? y ¿cuántos la figura 11?

La figura #8 Tiene 17 Puntos

La figura #11 Tiene 23 Puntos

se le suman dos puntos a cada figura

Figura:	4	5	6	7	8	9	10	11
Puntos:	9	11	13	15	17	19	21	23

Figura 15. Producción del E4, ítem 3, tarea 1 del taller diagnóstico inicial

En la siguiente transcripción se observa que estudiante **E14** en la tarea 2 de la prueba diagnóstica final en la pregunta cómo determinó la cantidad de baldosas blancas y grises de la figura 7 decide utilizar una secuencia particular de valores para encontrar la cantidad de baldosas blancas y grises de esta figura, comprende el patrón como un proceso de conteo que expresa mediante los dibujos de cada figura. Cuando se le pregunta al estudiante **E14** cómo encontró la

respuesta, el estudiante especifica que solo realizó el dibujo, es decir no pudo describir una relación general (ver figura 16).

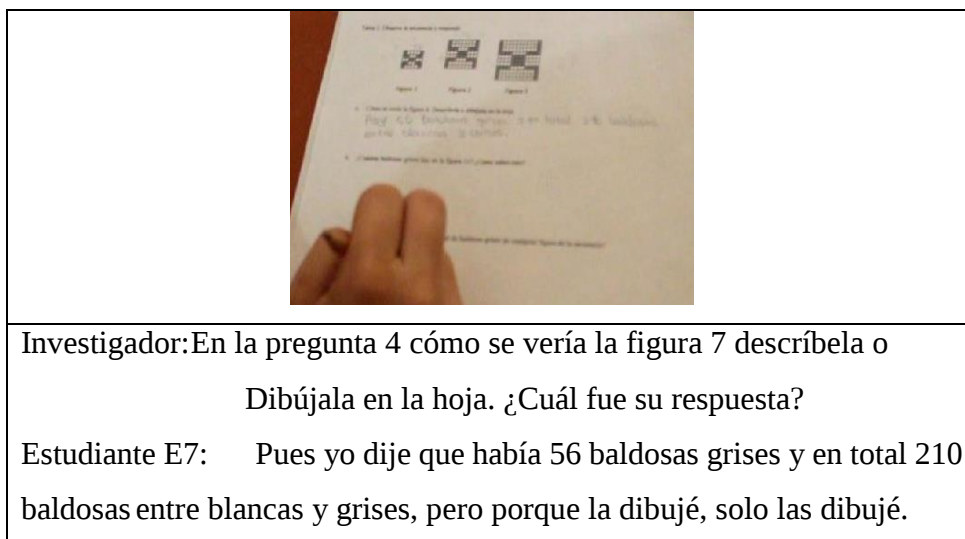


Figura 16. Tarea 2, prueba diagnóstica

Se infiere que los estudiantes **E4** y **E14** utilizaron estrategias de conteo para encontrar los términos o figuras solicitadas en las tareas, y solo una relación funcional, la recurrencia, como secuencia de valores, representados mediante una tabla de valores como en el caso del estudiante **E4** o dibujos de los diferentes términos como el estudiante **E14**. Teniendo en cuenta que los estudiantes nunca habían trabajado con patrones, se observa que estas experiencias les permiten ir evolucionando en su pensamiento, en este caso iniciando con un pensamiento recursivo particular que constituye una primera etapa para alcanzar posteriormente un análisis más general.

Nivel 3: Recursivo general

En este nivel se conceptualiza el patrón de manera recursiva como una regla generalizada entre valores sucesivos arbitrarios sin hacer referencia a un caso en particular. Los estudiantes no

atendieron a relaciones de correspondencia, en su lugar utilizaron un patrón recursivo para determinar el comportamiento de la secuencia.

Durante la tarea 1 del taller 1 el estudiante **E17**, en la pregunta 4 dibuja la cantidad de círculos para la figura 1, la figura 2 y la figura 3 de la secuencia, señalando que agrega siempre dos círculos a siguiente figura. Se observa que su descripción de lo que sucede con el patrón no atiende a una relación de correspondencia, en cambio si utiliza un patrón recursivo para expresar el comportamiento de la variable (cantidad de círculos), por tanto, se evidencia que el estudiante **E17** exhibe un nivel de pensamiento correspondiente al nivel recursivo general, mediante la creación de una regla entre valores sucesivos descrita de manera recursiva (ver figura 17).

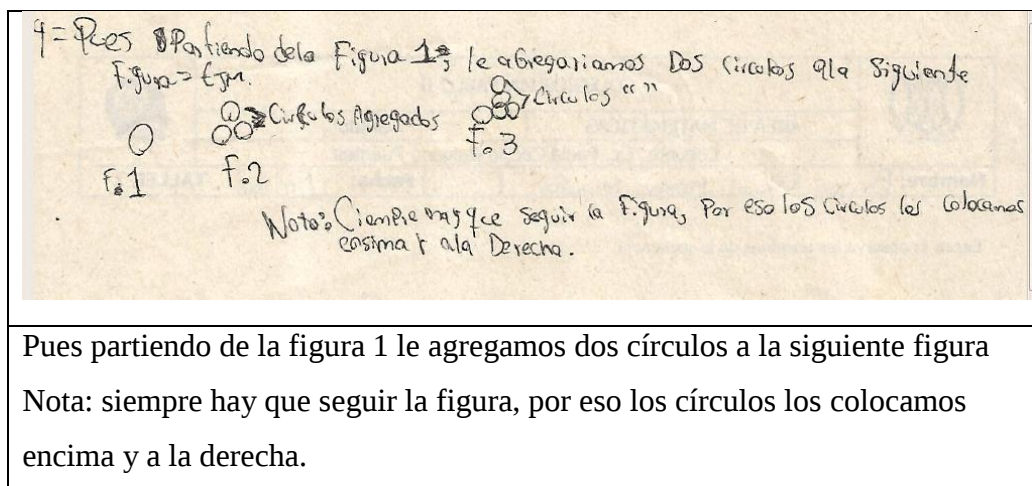


Figura 17. Producción del E17, ítem 3, tarea 1 del taller 1

En la siguiente transcripción se observa que el estudiante **E9** en la tarea 2 de la prueba diagnóstica final utiliza la figura 7 como un caso para explicar su pensamiento sobre la secuencia. Sin embargo, su descripción inicial del patrón refleja una regla general, al explicar cómo ocurre el aumento del número de cuadros grises de la figura y especificando que esto siempre va a ocurrir, ya sea los del centro o los de las esquinas atendiendo a una relación funcional de recurrencia. De

esta manera el estudiante produce una regla general expresada de manera recursiva, que utiliza para encontrar el término solicitado.

Profesora: ¿Cómo podrías encontrar el número de baldosas grises de cualquier figura de la secuencia?

E9: Pues yo escogí un ejemplo, la figura siete, entonces primero hallo la cantidad de baldosas grises del centro y después la cantidad que debe ir en cada esquina y la multiplico por cuatro, que son cuatro esquinas.

Profesora: ¿Cómo realizaste eso?

E9: Entonces verticalmente siempre va a tener el número de la figura y horizontalmente se le agrega un cuadro de más, entonces siete verticales por ocho agregándosele el cuadro de más, entonces 56 este sería la cantidad no de todo sino del centro.

Investigador: ¿y las baldosas de las esquinas?

E9: Para hallar la de las esquinas mirando los ejemplos en cada figura a medida que va aumentando la figura se le va sumando dos cuadros más, por ejemplo en la figura 1 tiene 3, en la 2 tiene 5, en la 3 tiene 7, en la 4 tiene 9, así sucesivamente entonces hasta que llegué a la figura 7, salió que una sola esquina tendría 15, entonces como son 4 esquinas se multiplica por 4, entonces 15 por 4 da 60, entonces sumo los resultados las baldosas del centro y las de las esquinas, 56 más 60 me dio 116 y ese sería el total de todas las baldosas grises.

Transcripción 3. Tarea 2 de la prueba diagnóstica, respuestas del estudiante E9

En la transcripción 3 se observa que al preguntar al estudiante **E9** sobre la cantidad de baldosas grises para cualquier figura de la secuencia, el estudiante toma un ejemplo, pero para explicar lo que ocurre con la secuencia utiliza un patrón recursivo. El estudiante **E9** explica que la cantidad de baldosas grises es “verticalmente siempre va a tener el número de la figura y horizontalmente

se le agrega un cuadro de más”, se observa una comprensión de manera recurrente y la utilización de regla que le permite encontrar los valores de la función.

Se infiere que los estudiantes **E17** y **E9** atendieron a una relación funcional de recurrencia para expresar su comprensión del patrón, una diferencia con el nivel de sofisticación anterior es que en este caso los estudiantes fueron capaces de expresar una regla independiente de valores particulares, evidenciando la secuencia como algo que puede ser expresado con una regla general. El énfasis del pensamiento funcional permite valorar los avances de los estudiantes al razonar a cerca de las funciones, en este caso con una herramienta como los patrones motiva a los estudiantes a realizar generalizaciones, utilizando expresiones verbales que atendieron a las regularidades que ellos iban encontrando durante el desarrollo de la tarea.

Nivel 4: Funcional Particular

En este nivel los estudiantes fueron capaces de encontrar cualquier caso, el valor particular, o término de una secuencia. Sin embargo, no expresaron en palabras o notación simbólica cómo están relacionadas estas cantidades, limitándose a valores específicos y a realizar operaciones para encontrarlos; atendiendo a relaciones de recurrencia y correspondencia de los valores relacionados en la secuencia.

En el análisis de datos se muestra que el estudiante **E10** en la tarea 2 del taller 1 encuentra la cantidad de bloques para las figuras 35 y 100 de la secuencia. En la figura 19 se observa la manera como el estudiante **E10** interpreta el comportamiento del patrón para las figuras que se le solicitan, multiplicando el número de la figura por sí mismo y agregando uno, lo anterior lo expresa con las operaciones que realizó para las figuras solicitadas en la tarea.

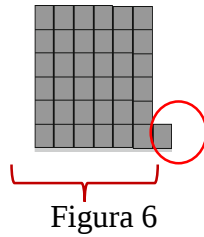
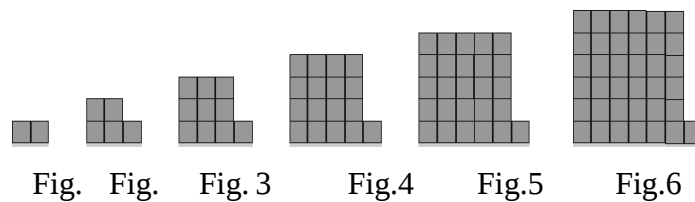


Figura 18. Tarea 2 del taller uno

En este momento el estudiante actúa sobre los valores de entrada y de salida que en este caso son el número de la figura y la cantidad de bloques respectivamente. Sin embargo, cuando se le pide determinar esa relación lo hace de manera incorrecta, evidenciando un nivel de pensamiento funcional particular dado que describe correctamente la relación solo para los casos específicos.

Tarea 2. Patrones de crecimiento de bloques:



¿Cuántos bloques son necesarios para formar la figura 8? ¿Cómo obtuvo este resultado?

¿Cuántos bloques son necesarios para formar la figura 35? ¿Cómo obtuvo este resultado?

¿Puede una figura tener 100 bloques? En caso afirmativo ¿cuál figura sería?

Escribe una expresión que relacione el número de la figura con la cantidad de bloques

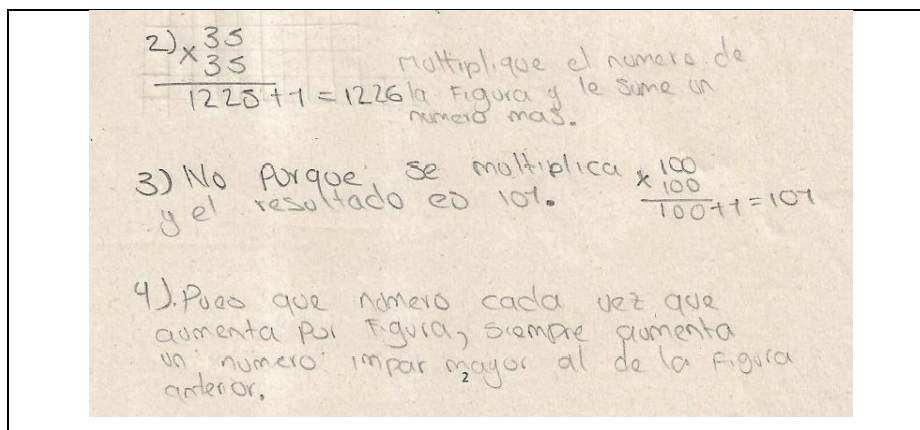


Figura 19. Producción del E10, ítems 2 al 4, tarea 2 del taller 1

El estudiante **E10** claramente es capaz de encontrar la cantidad de bloques para una figura específica evidenciando la correspondencia que construye entre las cantidades, sin embargo, todavía no es capaz de representar mediante una regla como están relacionadas las variables figura y cantidad de bloques dentro de la secuencia, solucionar el problema para casos específicos de la secuencia garantiza que el estudiante **E10** comprende el comportamiento del patrón, es capaz de encontrar la cantidad de bloques para cualquier figura, aunque todavía no exterioriza de manera verbal o simbólica, encontrar mediante operaciones cualquier caso específico de la secuencia constituye un primer paso hacia una reflexión más abstracta de la función.

Nivel 5: Primitivo funcional general

En este nivel los estudiantes expresaron la relación entre las cantidades, sin embargo, al referirse a la relación a través de los casos señalan el patrón de la secuencia como un todo que está relacionado. Aunque los estudiantes tuvieron en cuenta casos específicos los utilizaron para dar una justificación a su afirmación general.

En la figura 18 se evidencia en la tarea 1 del taller diagnóstico final que el estudiante **E13** determina la relación entre la cantidad de puntos blancos y negros para cualquier figura correspondiente a la tarea 1 del taller diagnóstico final; la expresa como una relación general y

cuando utiliza la primera y segunda figura de la secuencia lo hace para justificar su análisis inicial de la relación.

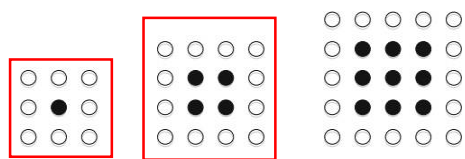


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 20. Tarea 1 del taller diagnóstico final

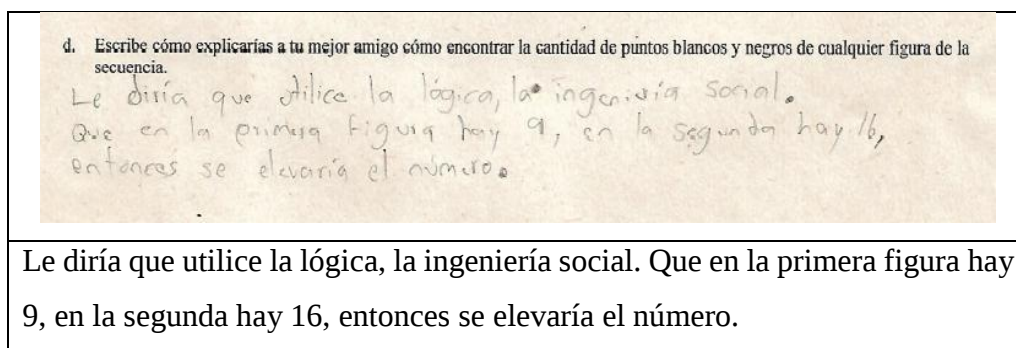


Figura 21. Producción del E13, ítem 4, tarea 1 de taller diagnóstico final

Una diferencia con el nivel de sofisticación anterior consiste que en este caso cuando se le pregunta al estudiante **E13** cómo encontrar la cantidad de puntos blancos y negros de cualquier figura de la secuencia indica que “elevaría el número” y aunque hizo referencia a algunos casos estos fueron para dar una justificación a su afirmación, por tanto, implica que el estudiante **E13** ha superado un nivel funcional particular en el que solo puede expresar el comportamiento de la secuencia por medio de casos, sino que su descripción es una representación verbal de la relación entre la figura y la cantidad de puntos blancos y negros. Aún es un nivel de pensamiento primitivo porque el estudiante expresó o especificó “número de la figura” y “cantidad de puntos blancos y negros” o por ejemplo no escribió $y = x^2$.

Además, el trabajo del estudiante **E13** refleja características de relaciones funcionales como correspondencia y recurrencia, ya que su afirmación verbal y los casos que utiliza muestran la identificación del comportamiento de la secuencia y un avance en su pensamiento funcional que cada vez se acerca a una mayor comprensión de la relación entre las variables.

Nivel 6: Emergente funcional general

Los estudiantes en este nivel de sofisticación comenzaron a tener conciencia de las cantidades y las expresaron por medio de notación simbólica o palabras, sin embargo, en cualquiera de los casos los estudiantes omiten alguna de las cantidades generalizadas o asignan la misma letra para las variables.

En la tarea 2 del taller 1 el estudiante **E17** determina la relación entre la figura y la cantidad de bloques y la expresa mediante una relación simbólica " $x = x^2 + 1$ ". Sin embargo, utiliza una misma letra, pero les asigna un significado distinto, en ese caso el estudiante **E17** expresa la relación matemática pero no las cantidades generalizadas (ver figura 22).

Handwritten student work for Figure 22. The text reads: "En la Figura #8 Se necesitan 65 Bloques. Por que se multiplicaria el numero de la Figura 1 Se le Sumaria 1 que es el que sobra de 64." Below this, there is a diagram of a 4x4 grid of blocks with an additional block to the right, totaling 65 blocks. To the right of the diagram, the equations are written: $x = (x)^2 + 1$, $x = (8)^2 + 1$, and $x = 64 + 1 \quad x = 65$.

Figura 22. Producción del E17, ítem 1, tarea 2 del taller 1

Comparando con el estudiante **E17**, la expresión simbólica del estudiante **E19** omite la variable número de cuadrados, es decir, la variable dependiente, pero al igual que el estudiante anterior esto representa un gran avance en su comprensión y representación de las relaciones, igualmente se distinguen que las relaciones funcionales de recurrencia y correspondencia están

presentes lo que les permite llevar a cabo un proceso de construcción de la regla que representa la secuencia generada por el patrón.

Otro ejemplo de la situación anterior se evidencia en la respuesta del estudiante **E18** ya que también omite una de las variables, aunque determina con sus palabras que está relacionando el número de la figura con la cantidad de cubos; al expresarlo lo hace solo con una expresión, identificando así las cantidades que se comparan en su relación funcional pero no especifica de manera completa la transformación entre estas cantidades (ver figura 23).

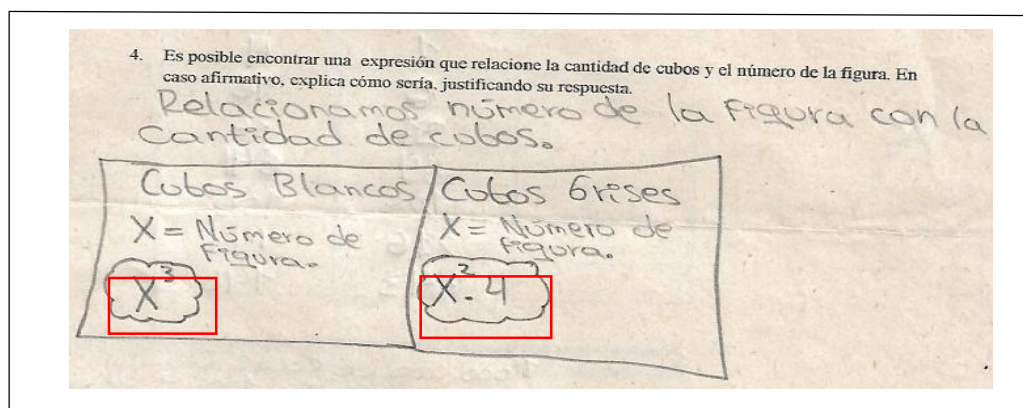


Figura 23. Producción del E18, ítem 4, tarea 1 del taller

Durante la socialización se evidencia que el estudiante **E20**, describe una expresión en dos partes: la cantidad de bloques y el bloque que agrega (figura 24). De esta manera escribe con notación simbólica esta relación, aunque sin especificar una de las variables. Por tanto, el estudiante **E20** es consciente de las cantidades que se están comparando, pero piensa que no es necesaria nombrarlas.

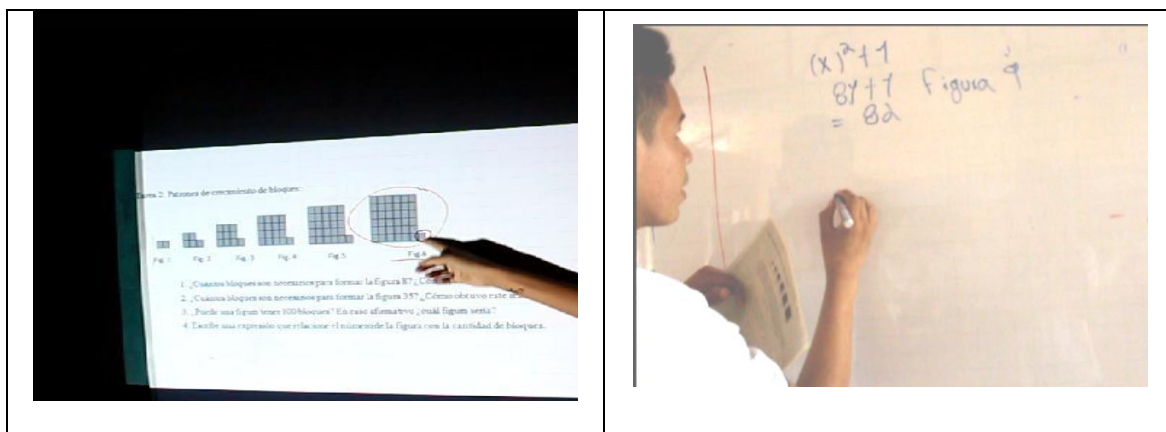


Figura 24. Puesta en común, estudiante E20 la tarea 2 del taller 1

Blanton (2008) considera el pensamiento funcional como un proceso de construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones, por tanto, aunque todos los estudiantes omitían una de las variables o no especificaban las cantidades generalizadas, al designarle una misma letra, se observa una evolución en su pensamiento puesto que las expresiones o fórmulas no fueron dadas sino que emergieron de su comprensión y análisis, evidenciando la existencia de las relaciones funcionales (recurrencia y correspondencia), identificación del patrón y una definición de la variable distinta a la que habían trabajado. Por tanto, estas expresiones o formulas adquieren un mayor significado y constituyen un primer paso en la construcción de representaciones verbales o de notación simbólica más precisas.

Nivel 7: Condensado funcional general

En este nivel los estudiantes identificaron completamente las cantidades generalizadas, lo que les permitió construir una ecuación que relacionara las cantidades involucradas en la secuencia. Algunos estudiantes decidieron utilizar palabras para expresar esa relación, en este caso sus oraciones fueron completas permitiendo identificar las variables involucradas en la relación.

En la tarea 2 del taller 1 (ver figura 26) el estudiante E17 utiliza una frase completa para indicar la relación entre el número de la figura y la cantidad de bloques. En este momento señala

de manera verbal y completa la relación entre ellas, correspondiente al nivel condensado funcional general, ya que explícitamente mediante sus palabras expresa cantidades generalizadas y la transformación matemática entre ellas.

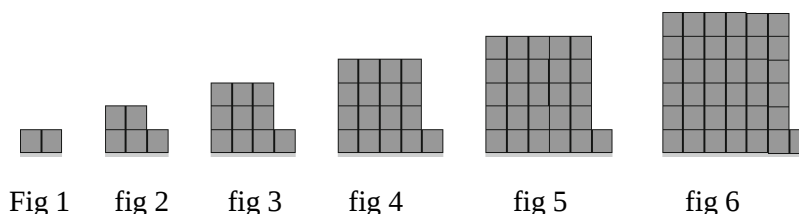


Figura 25. Tarea 2 del taller 1

4 = lo que el número de la figura se multiplica por ese mismo y se le suma 1 que es el bloque que sobresale. Y así es como tendríamos el resultado de cuántos bloques sobran en cada figura.

En que el número de la figura se multiplica por ese mismo y se le suma 1 que es el bloque que sobresale y así es como tendríamos el resultado de cuántos bloques habría en cada figura.

Figura 26. Producción del E17, ítem 4, tarea 2 del taller 1

Para describir la relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos negros el estudiante E7 expresa con palabras esta relación sin omitir ninguna de las variables y determina acertadamente la relación entre estas. El estudiante E17 identifica con exactitud las operaciones matemáticas sobre las cantidades y las explicita en su redacción (ver figura 27).

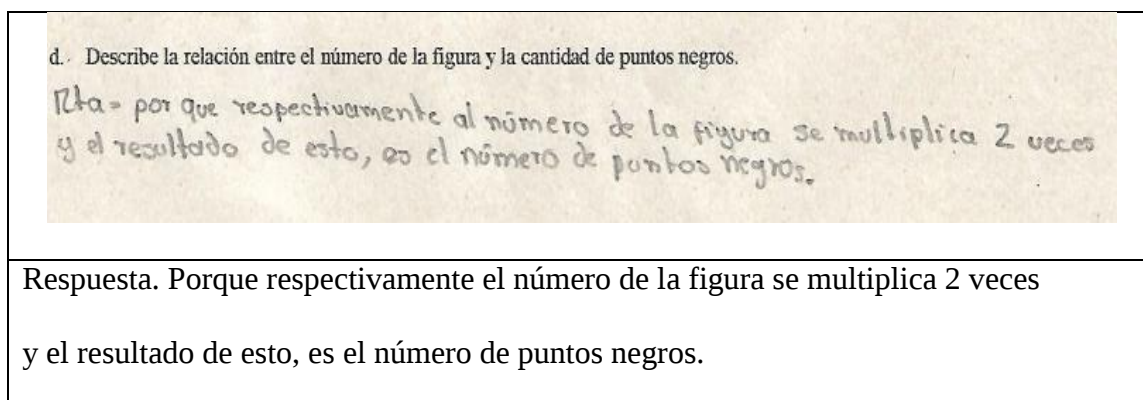


Figura 27. Producción del E7, ítem 1, tarea 1 del taller 2

En la figura 28 se observa que el estudiante **E9** generaliza las cantidades número de la figura y cantidad de bloques de la tarea 2, y las relaciona por medio de notación variable mostrando precisión en la construcción de la transformación matemática que involucra las cantidades y una conciencia del significado de cada una de ellas.

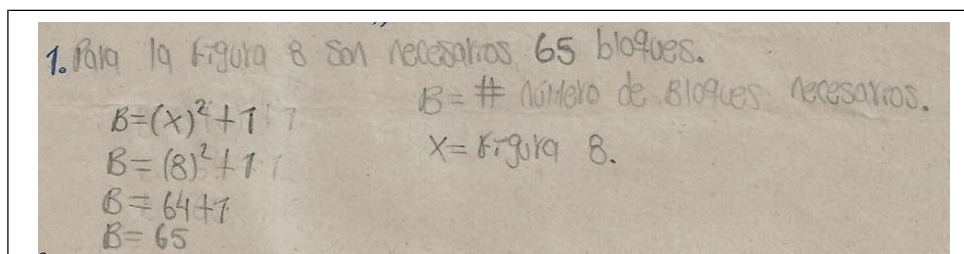


Figura 28. Producción del E9, ítem 5, tarea 1 del taller 2

Se evidencia en este caso que los estudiantes que exhibieron este nivel de sofisticación presentaron las diferentes representaciones de la relación entre las variables, ya sea de manera verbal o simbólica, pero teniendo en cuenta todas las variables y dándoles un significado preciso. Aunque no siempre la meta fue la precisión, esto refleja una comprensión de cómo representan la relación entre dos cantidades involucradas en la secuencia. Los estudiantes pueden abstraer información de la secuencia generada por el patrón y representarla de manera verbal o simbólica.

A diferencia del nivel anterior, los estudiantes en este nivel dieron razón completa de su fórmula y de las cantidades involucradas en el contexto de la tarea planteada.

Finalmente, en este análisis el desarrollo del pensamiento funcional se evidenció en cada una de las producciones de los estudiantes y su evolución se enmarcó en los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales, los resultados evidencian que un porcentaje mínimo se encuentra en el nivel pre estructural, la mayoría de los estudiantes evidencian características correspondientes a los niveles 2 al 4, destacando la relación de recurrencia presente en la búsqueda de casos particulares por medio de operaciones o dibujos y la construcción de tablas como una manera de identificar las características de la secuencia que se les planteó en cada una de las tareas. Algunos son capaces de encontrar términos lejanos en la secuencia, es decir, del 50 en adelante, aunque no pueden explicar de manera simbólica o verbal cómo obtuvieron la respuesta correcta para ese caso en particular. Esto refleja que los estudiantes avanzan en el análisis de la secuencia, en las relaciones de recurrencia y correspondencia, pero todavía les cuesta simbolizar la relación entre las cantidades involucradas. Los estudiantes que alcanzaron los últimos niveles, desde los primeros talleres, evidenciaron un análisis más profundo de las preguntas planteadas en cada una de las tareas, por tanto, en los últimos ítems donde se solicitaba expresar a un amigo la relación entre las cantidades planteadas, eran capaces de expresar con sus palabras esta relación, usando frases completas en las que se identificaron claramente una o todas las variables. Los que usaron notación simbólica omitieron variables, o utilizaron la misma letra para la variable dependiente o independiente, otros fueron más precisos al plantear una fórmula completa, en todos los casos cuando se les preguntaba sobre su expresión daban razón de las cantidades y cómo esa fórmula o expresión verbal era válida para cualquier caso particular de la secuencia. Lo anterior se evidenció no solo en las hojas de trabajo sino en las intervenciones grupales de los estudiantes y en las

socializaciones, puesto que los estudiantes tuvieron la oportunidad de compartir en primer lugar su primera experiencia con patrones y, en segundo lugar, las diferentes estrategias utilizadas para encontrar algún caso en particular o la relación entre las cantidades involucradas en la secuencia llegando a acuerdos sobre si hacía falta una variable o si era necesario utilizar otra letra para definir la variable dependiente. Muchos de los estudiantes, en los primeros talleres no se apartaban de la representación simbólica, sin embargo, a medida que avanzaban en el desarrollo de la secuencia se percataron de que las últimas preguntas de las tareas permitían mayor flexibilidad ya que los invitaba por medio de frases a expresar la relación entre las variables y de esta manera dar significado a las relaciones encontradas. La secuencia desarrollada por los estudiantes no tenía como fin último lograr llegar a la fórmula o expresión verbal precisa, sino generar en los estudiantes procesos de razonamiento y generalización, por medio de los patrones, solicitando casos particulares e incentivando la reflexión de cada uno de los elementos involucrados en la secuencia, así como la valoración de todas sus repuestas, ya que ninguna respuesta estaba incorrecta puesto que lo que se pretendía era caracterizar el pensamiento funcional y su desarrollo por medio de los niveles de sofisticación como categorías que permiten observar la progresión de cada uno en su forma de pensar, razonar y comunicar las ideas relacionadas con las situaciones matemáticas planteadas.

6.2 Segundo análisis

Esta investigación busca caracterizar a través de los niveles de sofisticación el pensamiento funcional de estudiantes de 13 a 15 años. Por esta razón para la interpretación y el análisis teórico se tienen en cuenta las producciones escritas de los estudiantes y las observaciones realizadas

durante el desarrollo de las tareas. Para analizar las producciones y escritos en profundidad se optó para esta segunda parte del análisis por el Estudio de Casos (Stake,2010) lo que permite observar los niveles de sofisticación exhibidos por el estudiante de manera progresiva teniendo en cuenta las características aportadas por el marco conceptual para cada nivel.

A continuación, se muestran algunas respuestas y diálogos del estudiante **E9** relacionados con las tareas planteadas en los talleres. Iniciando con la prueba diagnóstica inicial, algunos talleres intermedios y la prueba diagnóstica final. Así como el respectivo análisis de los niveles exhibidos por el estudiante durante el desarrollo de la secuencia.

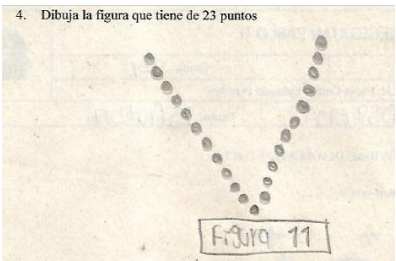
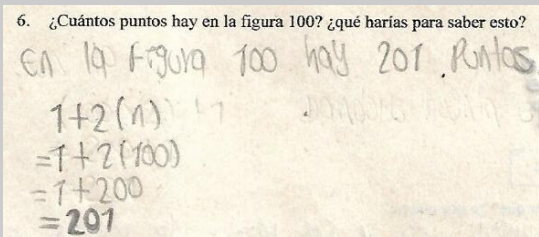
Diagnóstica inicial

En el taller diagnóstico inicial se planteó una tarea conformada por 7 preguntas en las que se les solicitaba a los estudiantes algunos términos de la secuencia, completar una tabla y encontrar la relación entre las variables involucradas, esta prueba, se implementó de manera individual ya que pretendía familiarizar a los estudiantes con los patrones, además de identificar los tipos de relaciones funcionales presentes en el desarrollo de la misma, también se pretendía iniciar la caracterización por medio de los niveles de sofisticación del pensamiento funcional de los estudiantes participantes en esta investigación.

Las siguientes son algunas de las respuestas destacadas del estudiante **E9** en la prueba diagnóstica, que nos permite observar las relaciones funcionales de recurrencia y correspondencia y un nivel de sofisticación funcional. A pesar de ser la primera vez que se enfrenta con este tipo de problemas, la estudiante evidencia una comprensión y un primer paso de representación de la secuencia generada por el patrón.

Tabla 6.

Respuestas del estudiante E9, ítem 4 y 6

Ítem 4 	El estudiante identifica la cantidad de puntos para un caso particular de la secuencia, estableciendo una relación de correspondencia que le permite encontrar el valor de la variable independiente para la variable dependiente dada.
Ítem 6 	La estudiante justifica la cantidad de puntos de la figura 100 utilizando una expresión, sin embargo, esta es incompleta porque omite una de las variables, específicamente la variable independiente (cantidad de puntos).

En sus respuestas se observa que el estudiante **E9** es consciente del comportamiento de la secuencia y por tanto de la relación entre las variables involucradas, puesto que responde correctamente la cantidad de puntos para figuras cercanas o lejanas de la secuencia, además para justificar su respuesta utiliza una expresión que relaciona la figura con la cantidad de puntos, aunque no la escribe, si hay una conciencia entre estas variables. Se infiere un nivel de pensamiento emergente funcional general ya que sus respuestas reflejan una su conciencia de la relación de manera más general pero aún no especifica completamente las variables involucradas.

Talleres intermedios

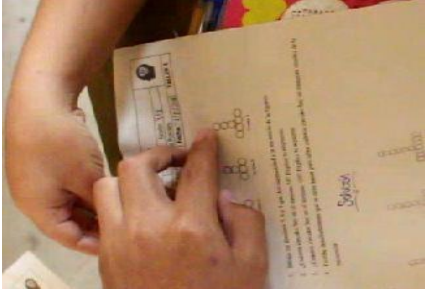
Los tres talleres intermedios se implementaron en un primer momento de manera individual, luego en equipos de máximo tres estudiantes y finalmente se realizó una puesta en común sobre las respuestas a cada uno de los ítems que hacían parte de las tareas. Las tareas que hacen parte de

cada uno de los talleres se caracterizan por realizar preguntas relacionadas con los patrones figurales y van aumentando el nivel de complejidad de las relaciones funcionales.

Taller 1

Tabla 7.

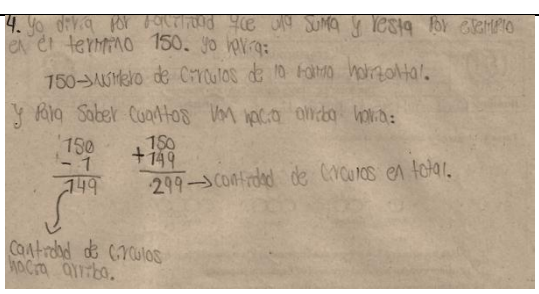
Respuestas del estudiante E9, ítem 2 y 3 del taller 1

Ítem 2, tarea 1		Se le dificulta encontrar una expresión verbal o simbólica para determinar la cantidad de círculos de cualquier término de la secuencia, sin embargo la evolución en su pensamiento funcional se manifiesta en la comprensión recursiva del comportamiento del patrón.
------------------------	---	---

El estudiante E9 establece una relación de recurrencia al expresar las características del término siguiente de la secuencia, se evidencia un nivel recursivo general porque determina la relación indicando cuando disminuyen o aumentan los círculos, el estudiante identifica el patrón de manera recursiva y utiliza esa comprensión para determinar el total de círculos de cualquier término de la secuencia.

Tabla 8.

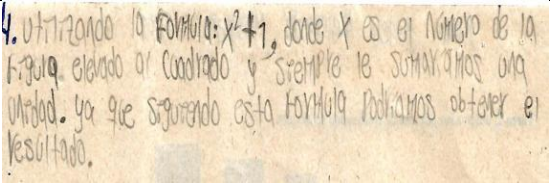
Respuestas del estudiante E9, ítem 4, tarea 1 del taller 1

Ítem 4, tarea 1	 Docente-Investigador: ¿cómo sabes cuántos círculos hay en el término 100? Estudiante E9: Pues yo teniendo lógica y dándome cuenta acá en el patrón, como está pidiendo la figura 100 esos sería los círculos de forma horizontal, y en la vertical, como si fuera el doble, pero se le disminuye uno	El estudiante identifica una relación funcional de recurrencia, y encuentra por medio de operaciones un término en particular, en este caso un término lejano de la secuencia. Durante la puesta en común se le pregunta a al estudiante E9 sobre la cantidad de círculos del término 100 y se esperaría que realice las operaciones anteriores sin embargo exhibe una evolución en su pensamiento al expresar “como si fuera el doble, pero se le disminuye uno”
------------------------	---	---

El estudiante **E9** en su trabajo individual recurre a las operaciones para justificar la cantidad de círculos de un término específico, esto evidencia un nivel de sofisticación recursivo particular, sin embargo, durante la puesta en común expresa la cantidad de círculos de una figura en particular por medio de una expresión verbal, evidenciando un nivel de pensamiento mayor, en este caso un nivel primitivo funcional general puesto que al referirse a el caso en particular del término 100 lo hace para justificar su expresión.

Tabla 9.

Respuestas del estudiante E9, ítem 4, tarea 2 del taller 1

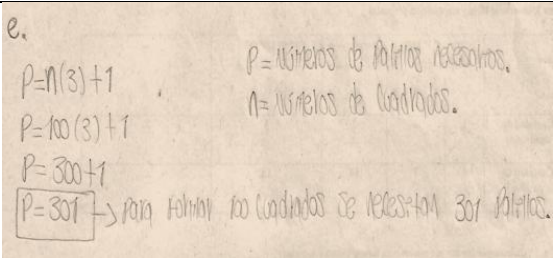
ítem 4, tarea 2	 4. Utilizando la fórmula: $x^2 + 1$, donde x es el número de la figura, elevado al cuadrado y siempre le sumamos una unidad. Ya que siguiendo esta fórmula podríamos obtener el resultado.	Se le solicita el estudiante E9 escribir una expresión que relacione el número de la figura con la cantidad de bloques, el estudiante expresa de manera simbólica esta relación omite la variable independiente. Se evidencia que el estudiante identifica las relaciones de correspondencia y recurrencia y las utiliza para en la última pregunta de la tarea especificar una expresión.
-----------------	--	--

En la respuesta del estudiante **E9** observamos respecto al taller anterior y a la prueba diagnóstica un desarrollo de pensamiento funcional evidenciado en su comprensión del comportamiento de la secuencia, la capacidad de representar ese comportamiento por medio de una expresión simbólica, y de comunicar el significado de la variable y las características propias de su expresión, señalando que es válida para cualquier término de la secuencia, exhibe de esta manera un nivel emergente funcional general debido a que su respuesta muestra atributos propios de una relación funcional pero omite una de las variables.

Taller 2

Tabla 10.

Respuestas del estudiante E9, ítem 5, tarea 1 del taller 2

ítem 5, tarea		Se le solicita al estudiante E9 determinar cuántos palillos son necesarios para formar n cuadrados y se observa que su respuesta en una expresión simbólica caracterizada por relacionar correctamente las variables involucradas, sin omitir ninguna de ellas, en este caso número de palillos y número de cuadrados.
---------------	---	---

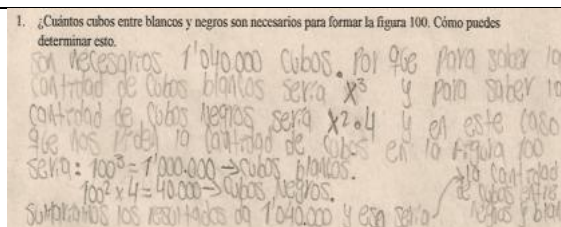
El estudiante **E9** evidencia un mayor nivel de conciencia de las relaciones funcionales presentes en la secuencia, por tanto, es capaz de construir una expresión que representa el comportamiento de la secuencia, su generalización es correcta y la expresión simbólica captura con exactitud la relación entre las variables y la identificación de las mismas para solucionar esta tarea, esto exhibe un nivel condensado funcional general, que hace posible que el estudiante **E9** se aleje de los casos particulares o de expresiones incompletas para representar la generalización del patrón.

Taller 3

Tabla 11.

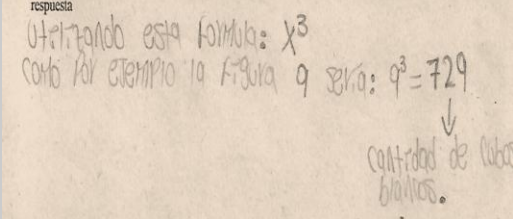
Respuestas del estudiante E9, ítem 1 y 2, tarea 1 del taller 3

ítem 1, tarea 2



Respuesta del estudiante E9 a la pregunta 1 de la tarea 2: son necesarios 1.040.000 cubos porque para saber la cantidad de cubos blancos sería x^3 y para saber la cantidad de cubos negros sería $x^2 \cdot 4$ y en este caso que nos piden la cantidad de cubos en la figura 100 sería: $100^3 = 1000000$ cubos blancos y $100^2 \cdot 4 = 40000$ sumariamos los resultados da 1040000 y esa sería la cantidad de cubos entre blancos y negros.

Cuando se le solicitó al estudiante E9 determinar la cantidad de cubos negros y blancos para la figura 100 se observa que plantea dos expresiones, sin embargo, omite la variable independiente. Evidencia la claridad en las relaciones funcionales de recurrencia y correspondencia presentes en la secuencia a través de la construcción y justificación de su expresión simbólica.

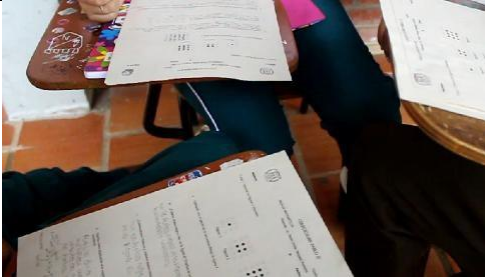
ítem 2, tarea 2	2. ¿Cómo se podría determinar la cantidad de bloques blancos para una figura en particular? Explica tu respuesta 	Para este ítem el estudiante E9, nuevamente recurre a la expresión obtenida en el ítem anterior, además decide mostrar un ejemplo para validar esta expresión
------------------------	---	--

Las respuestas permiten determinar que el estudiante **E9** fue capaz de identificar en primer lugar las cantidades involucradas en este caso número de la figura y cantidad de cubos blancos y negros, además, aunque identificó la relación entre estas variables al representar de manera simbólica esta relación, lo hizo de manera incompleta, omitiendo una de las variables, característico de un nivel de sofisticación emergente funcional general.

Diagnóstica final

Tabla 12.

Respuesta estudiante E9, diagnóstica final

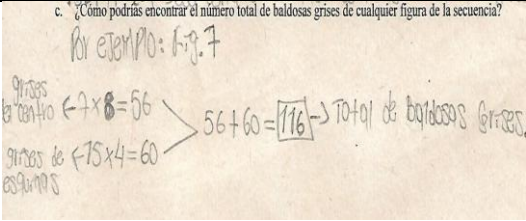
Tarea 2	 Estudiante E9: - como lo entendí y dándome cuenta como lo explicaba para hallar los puntos negros es x al cuadrado. Por ejemplo, en la figura 8 es 8 al cuadrado que es lo mismo 8 por 8 equivale a 64 y ese sería el resultado la cantidad de puntos	Durante la puesta en común el estudiante E9 para determinar la cantidad de puntos negros de cualquier figura de la secuencia construye una expresión incompleta puesto que omite una de las cantidades. Se le dificulta crear otra expresión para la cantidad
----------------	---	--

negros y para hallar la cantidad de los puntos blancos, por puntos blancos pues observando tanto, decide crear un igualmente veo que se guiara con la figura patrón recursivo. uno, veo que en la figura uno habrían 8 entonces a medida que aumenta el número de la figura van aumentando cuatro puntos más blancos
--

En la siguiente respuesta el estudiante **E9** evidencia una dificultad para crear una expresión que permita relacionar la cantidad de puntos blancos y el número de la figura, exhibiendo un nivel de sofisticación recursivo general, sin embargo, cuando se le solicita la cantidad de puntos blancos para cualquier figura de la secuencia decide construir una expresión simbólica incompleta debido a que solo aparece la variable independiente, de esta manera refleja atributos característicos de un pensamiento emergente funcional general. Esto ocurre porque los niveles de sofisticación no son etapas lineales por las cuales debe transitar el estudiante sino son una caracterización de la actividad cognitiva exhibida por el estudiante durante el desarrollo de la secuencia.

Tabla 13.

Respuesta estudiante E9, ítem 3, tarea 2 de la diagnóstica final

Ítem 3, tarea 2		El estudiante identifica una relación de correspondencia entre las variables involucradas, sin embargo, al expresar la relación entre ellas decide utilizar un caso particular. A pesar, que en los ítems
-----------------	--	---

anteriores su forma de dar respuesta era mediante la construcción de una expresión simbólica.

La estrategia del estudiante **E9** de no utilizar los resultados anteriores para dar respuesta al ítem 3 de la tarea dos y en cambio utilizar un caso particular para representar la relación exhibe un nivel de pensamiento recursivo particular.

Se observa que, durante el desarrollo de los talleres en un primer momento, solo tiene encuentra la notación simbólica para expresar la relación, pero luego, decide con palabras expresar los patrones de la secuencia, de manera incompleta, pero evidenciando una mayor comprensión e identificación de las variables presentes en cada tarea. Al socializar con sus compañeros, lo hace de manera verbal, especificando el procedimiento utilizado para encontrar la relación, y construye expresiones que explica y verifica mediante ejemplos que no fueron solicitados en el taller, evidenciando que para el estudiante **E9** no son fórmulas aisladas o letras, sino que ya adquieren un significado dentro de las relaciones o términos solicitados, promoviendo en la estudiante el reconocimiento y construcción de procesos de generalización, caracterizados a través de los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales. Los niveles presentados estuvieron presentes desde el nivel 2 recursivo particular hasta el nivel 7 condensado funcional general, en algunas tareas se presentaron niveles simultáneos.

7. Conclusiones

Se presentan a continuación los resultados del proyecto de intervención relacionado con la caracterización a través de los niveles de sofisticación del pensamiento funcional de estudiantes (13 a 15 años), cuando abordan tareas que buscan potenciar la construcción de relaciones funcionales: recurrencia, correspondencia y covariación.

Se analizaron los resultados teniendo en cuenta las categorías dadas por los elementos presentes en el pensamiento funcional y los niveles de sofisticación de las relaciones funcionales. Estos resultados, evidencian que durante la implementación de la investigación, las tareas relacionadas con la generalización de patrones bajo un enfoque de razonamiento y participación generaron en los estudiantes un proceso cognitivo que se vio reflejado en cada una de sus producciones e intervenciones en el grupo y durante las puestas en común; este proceso cognitivo se documentó mediante un estudio exploratorio teniendo en cuenta los elementos teóricos de cada uno de los niveles y las relaciones funcionales.

Es así como, las hojas de trabajo y los videos de clase exhibieron un trabajo de pensamiento funcional que según Fuentes (2014) permite que los estudiantes sean capaces de detectar “similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa” (p. 9)

Las acciones anteriores permitieron exhibir elementos propios de cada nivel, por ejemplo, solo unos pocos estudiantes mostraron en la solución de sus tareas un nivel pre estructural y ninguno de sus trabajos exhibió atributos para el último nivel, función como objeto. La gran mayoría de los

estudiantes dieron evidencias de encontrarse entre el recursivo particular y el nivel Emergente funcional general. Los trabajos que reflejan niveles recursivos (nivel 2 y nivel 3) tenían como característica principal el uso de tablas, operaciones, y dibujos para hallar casos particulares, es decir algunos de los términos solicitados en la secuencia. Las justificaciones de los estudiantes eran imprecisas y siempre recurrían a ejemplos para validar cada una de sus respuestas. La relación funcional predominante en este caso era la de recurrencia, ya que, en el intento por responder una pregunta relacionada con un término de la secuencia, los estudiantes tomaban como referencia términos anteriores conocidos. En el nivel funcional particular, algunos estudiantes que encontraron “cualquier término de la secuencia”, intentaban mediante operaciones crear una expresión que permitiera justificar sus respuestas. Para el siguiente nivel, primitivo funcional general, los estudiantes notaron en las secuencias, cambios y características que permanecían constantes y las expresaron con sus palabras; sin embargo, no pudieron explicar por qué y cómo sucedían estos cambios. Contrario al siguiente nivel Emergente funcional general, los estudiantes en este nivel de la misma manera notaron las características de la secuencia como un todo; pero además expresaron de manera verbal o simbólica la relación entre las variables. En este caso se destaca la construcción de las relaciones de recurrencia y correspondencia entre las variables involucradas. Otra característica que permitió documentar este nivel fueron las expresiones simbólicas o verbales incompletas, donde en la mayoría de los casos los estudiantes omitían una de las variables, o utilizaban la misma letra para la variable dependiente y la variable independiente dentro de una expresión. Sin embargo, eran capaces de justificar claramente sus expresiones teniendo conciencia del significado de las cantidades y de la validez de fórmulas. Los estudiantes que evidenciaron el nivel condensado funcional general, llegaron a la generalización del patrón y a una representación completa del mismo.

Durante la implementación de los talleres se evidenció el interés de los estudiantes por trabajar sobre tareas relacionadas con patrones, dado que nunca los habían trabajado antes. Este tipo de tareas les permitió apartarse de lo netamente simbólico y empezar a involucrar frases que describían su comprensión del patrón que definía una secuencia.

Por otra parte, el trabajo individual y el compartir los resultados con el grupo de los ítems propuestos en las tareas, posibilitó una actividad centrada en el razonamiento y la comunicación, permitiendo a los estudiantes comparar sus procedimientos, sus expresiones y justificaciones. Por tanto y según el planteamiento de Smith (2008) el diseño de una tarea se convierte en una actividad de construcción individual, que debe contar con la participación del profesor, quien, a través de la creación de actividades, la descripción de cantidades variables, planteamiento de preguntas apropiadas y promoviendo la participación en el aula, proporciona la oportunidad a los estudiantes de participar en instancias de desarrollo del pensamiento funcional (Smith, 2008).

Los niveles de sofisticación permitieron identificar elementos del pensamiento funcional que permiten la reflexión sobre las características para el alcance de niveles más complejos y mediante el planteamiento de tareas con patrones, incentivar las competencias algebraicas necesarias para el aprendizaje de conceptos futuros como función, tipos de funciones, razón de cambio, entre otros, documentados por algunos autores como Rivera (2013) y Drijvers (2011).

Referencias Bibliográficas

- Blanton, M. L. (2008). Algebra and the Elementary classroom: Transforming thinking, Transforming practice. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai y E. Knuth. (Ed.), *Early Algebraization* (pp. 3-21). New York, Estados Unidos: Springer.
- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K & Newman-Owens, A. (2015) A learning trajectory in 6-years-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Educations*, 45(5), 511-558. <http://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>.
- Cañadas, M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.
- Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103.
- Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67
- Cañadas, M. C., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E.

- Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). *Algebra education: exploring topics and themes*. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Los Países Bajos.
- Drijvers, P. (Ed). (2013). *Secondary Algebra Education Revisiting topics and the themes and exploring the unknown*. The Netherlands: Sense Publishers
- Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/6263/>
- Kaput, J. (2008). *What is algebra? What is algebraic reasoning?* En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero primaria*. Universidad de Granada Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada, España.
- Radford, L. (2013). Sumisión, alineación y (un poco de esperanza): hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. (pp. 6-8). Santo Domingo, República Dominicana: Plenary Lecture.
- Rivera, F. (2009). Visualphanumeric mechanisms in pattern generalization. Paper present at the international meeting on pattern. Portugal.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning patterns in School Mathematics*. Springer San José, C.A. USA.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudios de casos*. Morata. Madrid, España.

Thales, S. A. E. M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, SAEM thales.