

EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE  
JUEGOS NO COOPERATIVOS PARA EL ANÁLISIS DE  
SUBASTAS DE ENERGÍA EN UNA MICRO RED

ANDRÉS FELIPE PÉREZ QUIROGA  
TATIANA ALEJANDRA QUINTERO BARRERA

ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS  
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
BUCARAMANGA  
2015

EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE  
JUEGOS NO COOPERATIVOS PARA EL ANALISIS DE  
SUBASTAS DE ENERGÍA EN UNA MICRO RED

ANDRÉS FELIPE PÉREZ QUIROGA  
TATIANA ALEJANDRA QUINTERO BARRERA

*Trabajo de grado para optar por el título en  
Ingeniería eléctrica*

Director

IVÁN DAVID SERNA SUÁREZ

*Profesor Titular Universidad Industrial de Santander  
Magister en Ingeniería Eléctrica*

Codirectores

GABRIEL ORDÓÑEZ PLATA

*Profesor Titular Laureado Universidad Industrial de Santander  
Doctor en Ingeniería Industrial*

GILBERTO CARRILLO CAICEDO

*Profesor Titular Laureado Universidad Industrial de Santander  
Doctor en Ingeniería Industrial*

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA

2015

*Dedicamos este libro a nuestros padres, quienes con su apoyo impulsaron nuestras ganas de salir adelante y dar lo mejor de sí. También a nuestra familia y amigos que motivaron cada paso de crecimiento que tuvimos a lo largo de esta carrera. Y a nosotros mismos por reconocer este logro como un escalón más que marca la base de un futuro que con ansias construiremos para que sea exitoso.*

*-Tatiana y Andrés.*

---

# AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los profesores que hicieron parte de la guía en este camino. Al profesor Iván Serna Suárez nuestro director de proyecto quién guió y aportó su conocimiento en cada obstáculo presentado. También agradecemos a nuestra familia quienes hicieron parte del crecimiento emocional e integro durante este arduo e interesante trabajo. Y a Dios en quien espiritualmente buscamos apoyo para afrontar cada prueba que nos presentó la vida.

# CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
<hr/>	
1. OBJETIVOS	18
<hr/>	
1.1. OBJETIVO GENERAL . . . . .	18
1.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	18
2. ALCANCE DEL PROYECTO	19
<hr/>	
2.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	19
2.2. JUSTIFICACIÓN . . . . .	20
2.3. ESTADO DEL ARTE . . . . .	21
3. MICRO-REDES	23
<hr/>	
3.1. CONCEPTO DE MICRO-RED . . . . .	23
3.2. COMPONENTES BÁSICOS DE LA MICRO-RED . . . . .	24
3.2.1. Generadores distribuidos . . . . .	24
3.2.2. Almacenadores distribuidos . . . . .	25
3.2.3. Interfaces de electrónica de potencia . . . . .	26
3.2.4. Cargas . . . . .	26
3.3. EXPECTATIVAS FUTURAS PARA LAS MICRO-REDES . . . . .	27
3.3.1. Sistema de micro-redes . . . . .	27
3.3.2. Medidores inteligentes . . . . .	27
4. FUNDAMENTOS DE TEORIA DE JUEGOS	29
<hr/>	
4.1. TEORÍA DE JUEGOS . . . . .	29
4.2. JUEGOS EN FORMA NORMAL . . . . .	30
4.3. JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA . . . . .	32
4.4. EQUILIBRIO DE NASH . . . . .	33
4.5. ESTRATEGIAS . . . . .	33

4.5.1. Estrategias puras . . . . .	34
4.5.2. Estrategias mixtas . . . . .	37
4.5.3. Estrategias estrictamente dominantes . . . . .	41
4.5.4. Estrategias débilmente dominantes . . . . .	44
4.6. CLASES DE JUEGOS SEGÚN EL TIPO DE INFORMACIÓN . . . . .	47
4.6.1. Juegos de información perfecta e imperfecta . . . . .	47
4.6.2. Juegos de información completa . . . . .	50
4.6.3. Juegos de información incompleta . . . . .	50
4.6.4. Juegos bayesianos . . . . .	51
<b>5. SUBASTAS</b>	<b>57</b>
<hr/>	
5.1. CONCEPTO DE SUBASTA . . . . .	57
5.2. TIPOS DE SUBASTA . . . . .	58
5.2.1. Según sus reglas . . . . .	58
5.2.2. Según el número de unidades . . . . .	59
5.3. RELACIÓN SUBASTAS Y TEORÍA DE JUEGOS . . . . .	60
5.3.1. Subastas dinámicas . . . . .	61
5.3.2. Subastas estáticas . . . . .	61
5.3.3. Subastas con información imperfecta . . . . .	62
5.3.4. Subastas estáticas con información completa . . . . .	62
5.3.5. Subastas con información incompleta . . . . .	66
5.4. RELACIÓN SUBASTAS Y JUEGOS BAYESIANOS . . . . .	68
5.4.1. Descripción del juego . . . . .	68
5.4.2. Modelo de referencia . . . . .	69
5.5. APLICACIÓN EN SUBASTAS DE SOBRE CERRADO. . . . .	70
5.5.1. Subasta con información incompleta de sobre cerrado al segundo precio . . . . .	70
5.5.2. Subasta con información incompleta de sobre cerrado al primer precio . . . . .	73
<b>6. METODOLOGÍA</b>	<b>76</b>
<hr/>	
6.1. RECOPIACIÓN DE LA INFORMACIÓN . . . . .	76
6.1.1. Estudio general de la teoría de juegos . . . . .	76
6.2. VERIFICACIÓN DEL ESTUDIO DE JUEGOS BAYESIANOS . . . . .	77
6.2.1. Investigación de la utilidad de juegos Bayesianos . . . . .	77
6.2.2. Planteamiento del juego . . . . .	77
6.3. APLICACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE SUBASTAS . . . . .	78
6.3.1. Análisis de la problemática, desde la óptica de diseño de mecanismos. . . . .	78

6.3.2. Planteamiento de la subasta, con la aplicación del modelo Bayesiano. . . . .	78
<b>7. CASOS DE APLICACIÓN</b>	<b>80</b>
<hr/>	
7.1. JUEGOS BAYESIANOS . . . . .	80
7.1.1. Planteamiento del problema . . . . .	80
7.1.2. Análisis del juego bayesiano . . . . .	84
7.1.3. Resultados . . . . .	86
7.2. SUBASTA ENERGÉTICA. . . . .	92
7.2.1. Planteamiento del problema . . . . .	92
7.2.2. Análisis y resultados de la subasta . . . . .	93
<b>8. CONCLUSIONES</b>	<b>97</b>
<hr/>	
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>101</b>
<hr/>	
<b>ANEXOS</b>	<b>103</b>
<hr/>	

# LISTA DE FIGURAS

3.1. Representación de una micro-red. . . . .	24
4.1. Representación de un juego en forma extensiva. . . . .	32
4.2. Forma extensiva del juego del ejemplo 6 . . . . .	43
4.3. Representación de un juego de forma extensiva con información imperfecta . . . . .	48
4.4. Representación de un juego de forma extensiva con información imperfecta del ejemplo 2 . . . . .	49
4.5. Representación de un juego de forma extensiva con información completa . . . . .	50
4.6. Representación de un juego de forma extensiva con información incompleta e imperfecta . . . . .	52
4.7. Representación del juego del ejemplo con información incompleta10 . . . . .	53
4.8. Representación del juego del ejemplo con información incompleta10 . . . . .	54
7.1. Función de densidad rayleigh para una velocidad media de 5 m/s . . . . .	85
7.2. Diagrama de flujo del juego bayesiano aplicado a una interacción generador-carga . . . . .	91
C.1. Función de densidad Rayleigh (Weibull con factor de forma igual a 2). . . . .	119
C.2. Curva de potencia de los aerogeneradores en función de la velocidad del viento . . . . .	120
C.3. Distribución del parque . . . . .	122
C.4. Estructura temporal del juego . . . . .	139

# LISTA DE TABLAS

4.1. Representación de un juego de forma normal. . . . .	31
4.2. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 1. . . . .	34
4.3. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 2. . . . .	37
4.4. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 3. . . . .	39
4.5. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 2. . . . .	40
4.6. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 5. . . . .	42
4.7. Matriz de pagos del ejemplo 6 . . . . .	43
4.8. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 6. . . . .	44
4.9. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 7. . . . .	45
4.10. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 7. . . . .	45
4.11. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 7. . . . .	46
4.12. Representación de la matriz de pagos del ejemplo 8. . . . .	47
4.13. Representación de la matriz de pagos esperados para el jugador 2 . . . . .	55
8.1. Cumplimiento de los objetivos . . . . .	100
C.1. Potencia distribuida en rangos . . . . .	121
C.2. Intervalos de velocidad y potencia . . . . .	121
C.3. Esta tabla presenta los costos de generación de la central generadora. . . . .	122
C.4. Esta tabla presenta los costos de los componentes. . . . .	123
C.5. Costos totales de producción de energía . . . . .	123
C.6. Esta tabla presenta el precio del 100 % de la energía que produce la central generadora. . . . .	124
C.7. Precio de generación y mantenimiento y el precio de venta de la central generadora. . . . .	125
C.8. Porcentaje de venta, la ganancia y la venta de la bolsa para la central generadora	127
C.9. Presupuesto de inversión. . . . .	128
C.10. Costos de la producción de la carga . . . . .	128
C.11. Presupuesto que queda en la fábrica de cemento. . . . .	128

C.12.Potencia y el porcentaje que la carga compra . . . . .	130
C.13.Presupuesto que queda, la ganancia de compra de energía y los kW de energía que le sobran a la carga . . . . .	131
C.14.kW que faltan y el precio de la venta y compra de energía de la bolsa para la carga. . . . .	133
C.15.Tipo X=3,5 m/s Probabilidad = 0,632120559 . . . . .	135
C.16.Tipo Y=8 m/s Probabilidad = 0,305702917 . . . . .	135
C.17.Tipo Z= 12,5 m/s Probabilidad = 0,06024607 . . . . .	135

# LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. IMPLEMENTACIÓN EN PYTHON DE JUEGO BAYESIANO	104
ANEXO B. MODELO EN PYTHON DE LA SUBASTA	111
ANEXO C. INTERACCIÓN AEROGENERADOR–FÁBRICA DE CEMENTO	117

## RESUMEN

**TÍTULO:**

**EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS NO COOPERATIVOS PARA EL ANÁLISIS DE SUBASTAS DE ENERGÍA EN UNA MICRO RED<sup>1</sup>**

**AUTOR:**

TATIANA ALEJANDRA QUINTERO BARRERA

ANDRÉS FELIPE PÉREZ QUIROGA

<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:**

Teoría de Juegos, Juegos bayesianos, Micro-redes, Estrategias, Equilibrio de Nash

**DESCRIPCIÓN:**

El propósito principal de este proyecto, es demostrar si es posible aplicar el estudio de la teoría de juegos a una Micro-red. Luego de que esto se haya comprobado, se llevará a cabo la implementación de una subasta diseñada para la optimización de energía en dicha Micro-red. Todo esto con el fin de buscar un modelo que se adapte directamente a las necesidades del sistema operativo interno de una Micro-red. Ya que el centro de atención de este proyecto es el despacho de energía por parte de la central generadora, que en el caso de este proyecto es la simulación de una fuente eólica.

El motivo por el cual se diseñó este proyecto, radica en la importancia que tienen las micro-redes en el mundo actual de la ingeniería. Por ello, es importante la búsqueda de nuevos enfoques que se encuentren directamente relacionados con la distribución energética en una micro-red y se hace vital en el desarrollo de nuevas prácticas que agilicen el avance tecnológico de las micro-redes. Al final de este proyecto, se presenta un modelo de juego bayesiano que verifica la funcionalidad del método de la teoría de juegos sobre una micro-red, seguido del diseño de una subasta que simula el despacho de energía entre una micro-red conformada por cargas y un generador.

---

<sup>1</sup>Trabajo de grado.

<sup>2</sup>Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Iván David Serna Suárez. Codirector: Gilberto Carrillo Caicedo, Gabriel Ordoñez Pláta.

## ABSTRACT

### TITLE:

EVALUATION OF THE APPLICATION OF THE NONCOOPERATIVE GAMES THEORY FOR THE ANALYSIS OF ENERGY AUCTION IN A MICROGRID.<sup>3</sup>

### AUTHORS:

TATIANA ALEJANDRA QUINTERO BARRERA  
ANDRÉS FELIPE PÉREZ QUIROGA

<sup>4</sup>

### KEY WORDS:

**Game Theory, Bayesian Games, Microgrids, strategies, Nash equilibrium**

### DESCRIPTION:

The main purpose of this project is to demonstrate whether it is possible to apply the study of game theory to a microgrid. After this has been proven It will carry out the implementation of an auction designed to optimize energy in this Microgrid. All this in order to find a model that fits directly to the needs of the internal operating system of a microgrid. Since the focus of this project is the release of energy from the generating plant, which in the case of this project is the simulation of a wind source.

The reason why this project was designed, lies in the importance of micro-networks in today's world of engineering. Because of that, it is important to search for new approaches that are directly related to energy distribution in a microgrid, this is vital in developing new practices to expedite technological advancement of microgrid. At the end of this project, there is a Bayesian game model that verifies the functionality of the method of game theory on a microgrid, followed by the design of an auction that simulates the release of energy from a microgrid made for a load and a generator.

---

<sup>3</sup>Research work.

<sup>4</sup>Faculty of Physical-Mechanic Engineering. School of Electrical, Electronical and Telecommunications Engineering. Advisor: Iván David Serna Suárez. . Co-advisor: Gabriel Ordoñez Pláta, Gilberto Carrillo Caicedo.

---

# INTRODUCCIÓN

Las micro-redes se han venido convirtiendo en una de las soluciones para la gestión energética en sistemas de distribución gracias a que cuentan con un mecanismo de generación y almacenamiento energético distribuido cerca a los puntos de consumo, lo cual aumenta su confiabilidad y disminuye las pérdidas de operación. Además, se conectan a niveles de distribución y se pueden acoplar a la red de suministro principal en forma de carga o de generación (Lidula & Rajapakse, 2011). La energía generada en las micro-redes está compuesta por tecnologías emergentes –CHP (producción de energía combinada calor y electricidad), celdas de combustible, mini-turbinas eólicas, paneles fotovoltaicos, y micro-turbinas (Ekanayake *et al.*, 2012)– ofreciendo así soluciones innovadoras y económicas basadas en el auto-sostenimiento (Gellings, 2009).

Teniendo en cuenta la importancia que están tomando las micro-redes a nivel mundial, es necesario estudiar estrategias que permitan planificar la operación de estos sistemas de manera eficiente. No obstante, hasta el momento no existen sistemas de pruebas aceptados para el análisis de las micro-redes. La mayoría de investigaciones acerca de este tipo de redes se basan ya sea en bancos de pruebas o simulaciones con diferentes topologías de una micro-red (Hatziaargyriou *et al.*, 2007).

Considerando que la teoría de juegos ha representado un gran avance en la economía gracias a su capacidad de analizar situaciones de conflictos, este proyecto busca determinar si es posible a través de la teoría de juegos obtener un resultado óptimo para la distribución de los recursos energéticos de una micro-red.

Para este proyecto fue necesaria la revisión de conceptos básicos de teoría de juegos, esto con el fin de poder llegar a tener las bases para entender juegos más avanzados, como lo son los bayesianos. Además, se realizó una exploración general del concepto de las micro-redes de energía, su composición y funcionamiento para las posibles subastas que se presentan. A modo de producto, se presenta una aplicación software que simula algunas situaciones que se pueden presentar con fuentes de generación eólica y cargas. Dado que es difícil enfocar la teoría de juegos a temas relacionados con ingeniería eléctrica, otro aporte del proyecto consiste en disminuir la curva de aprendizaje mediante la presentación teórica de conceptos a través de ejemplos concretos.

Este documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 1 se define el concepto de micro-red, sus componentes y características; en la sección 2 se puede encontrar el marco teórico que explica los términos importantes para el entendimiento de la evaluación de la aplicación de la teoría de juegos no cooperativos para el análisis de subastas de energía en una micro-red; posteriormente en la sección 3 se plantean los conocimientos básicos acerca de las subastas; y finalmente se puede observar un análisis de resultados producto del desarrollo de todo el proyecto, seguido de unas conclusiones que resumen los avances y logros del mismo.

# OBJETIVOS

## 1.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar la aplicación de la teoría de juegos no cooperativos para la distribución de recursos energéticos en una micro-red a través de una subasta de energía.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Compilar información básica de la teoría de juegos no cooperativos, con el fin de obtener herramientas para el análisis de juegos bayesianos.
- Verificar la eficiencia de los de juegos bayesianos por medio de un modelo base de una micro-red.
- Aplicar el estudio de juegos bayesianos a una subasta de energía eléctrica en un sistema de distribución, para el análisis de las características que permitirían su implementación en una micro-red.

---

## ALCANCE DEL PROYECTO

---

Este capítulo muestra los motivos por los cuales se planteó el proyecto. También se justifica y se dejan claros los beneficios que el estudio de este proyecto traen a la sociedad donde deseen implementarlo. A continuación en la sección 2.1 se tratará la formulación del problema; seguido de la sección 2.2 que plantea la justificación del proyecto; y finalmente en la sección 2.3 ilustra textualmente el estado del arte que tiene este estudio.

### 2.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Es de gran interés contar con un mecanismo que permita una operación distribuida de energía eléctrica en las micro-redes, teniendo en cuenta las limitaciones individuales y objetivos de cada componente. Por otra parte, hay más literatura que se ocupa esencialmente, ya sea de la gestión de la carga (demanda) o la fuente de energía (oferta) tal como se muestra (Pavlidou *et al.*, 2009; Chen *et al.*, 2011) . En una red inteligente que incluye componentes de energía a pequeña escala, como las micro-redes, es necesario desarrollar un marco genérico que pueda capturar tanto la competencia por los recursos energéticos, que se produzca entre las cargas; como la competencia en el suministro de energía, que surge entre las fuentes.

Desde la perspectiva de la conexión de la red nacional, la ventaja de una micro-red es que es considerada como un sistema autonomamente controlado. La micro-red puede ser operada como una simple carga adicional, garantizando que su implementación no generará ninguna alteración al suministro eléctrico nacional. Las micro-redes pueden ser beneficiosas localmente ya

que satisfacen necesidades energéticas. Sin embargo, para poder lograr una operación estable y segura en este sistema a pequeña escala, se presentan varios problemas del tipo económico, regulatorio y técnicos que deben ser resueltos antes de poner en marcha su funcionamiento. Algunas de estas áreas problemáticas son la dependencia a la variación climatológica en caso de generación a través de fuentes de energía renovable, como la energía solar, eólica e hidráulica; a esto se le debe sumar la falta de estándares y regulaciones para la operación de las micro-redes en un sistema interconectado. Tales problemas requieren la formulación de metodologías que le permitan a las diferentes formas de generación de energía en la micro-red, interactuar de manera precisa en una situación específica de demanda sin tener que solicitar energía de la red principal de suministro. Con esto último se intenta garantizar la gestión eficiente de la energía en un sistema de distribución.

Este trabajo busca probar si es posible utilizar el estudio de la teoría de juegos no cooperativos en la interacción de micro-redes. El propósito es determinar si a través del diseño de mecanismos se puede crear una subasta en donde compiten dos clases de jugadores, los demandantes y ofertantes de energía eléctrica. La subasta tendrá unas reglas que determinarán cuál será la distribución de energía óptima con base en lo que los ofertantes pueden generar y los demandantes consumir. Para esto se investigarán técnicas y algoritmos avanzados de análisis que permitan diseñar una subasta de manera que esta pueda ser aplicada a una micro-red.

## **2.2 JUSTIFICACIÓN**

La necesidad de realizar una investigación del estudio acerca de las micro-redes es relevante dado que el avance tecnológico en la ingeniería obliga a estar en una constante búsqueda por optimizar el funcionamiento de redes energéticas para el beneficio de los usuarios, teniendo en cuenta el impacto ambiental y económico que pueda presentar a la sociedad. La ventaja de la micro-red radica en su función descentralizada con respecto a la red de suministro nacional, es decir, tiene la capacidad autónoma de seleccionar los puntos de generación de los cuales recibe la energía. El objetivo principal de una micro-red es que pueda autosostenerse con las fuentes de generación renovable, dejando a la red de suministro nacional como un servicio auxiliar en caso de que las variaciones climatológicas no permitan satisfacer dicho suministro de energía. El aporte de esta investigación, busca proporcionar un nuevo medio de estudio que puede relacionarse directamente con los componentes que hacen parte de este proceso de generación distribuida, dado que la teoría de juegos se caracteriza por ser una herramienta matemática que utiliza la información disponible tal como: los jugadores, las acciones que

puedan tomar en el juego, y las probabilidades con las que pueden elegir cada una de esas acciones, lo que le permite modelar las interacciones que se puedan presentar y encontrar el camino más efectivo en cuanto a la toma de decisiones que puedan beneficiar a los participantes del juego. Teniendo en cuenta, las ventajas que trae la aplicación de la teoría de juegos, se plantea el uso de una subasta para modelar la interacción entre cargas y generadores ya que su comportamiento se adapta a la realidad, es decir, en la vida real se espera que la energía siempre se distribuya con eficacia, aunque es importante que las cargas primeramente beneficiadas sean aquellas que tengan prioridad que representen en la sociedad (por ejemplo, posos petroleros, hospitales, entre otros), la subasta permite que la energía sea dada al mejor postor (con esto se refiere, a la solicitud de energía con mas demanda económica). Si se aplica la teoría de juegos para obtener una respuesta óptima y se diseña una subasta que se asocia directamente a las acciones de una micro-red, se estará cumpliendo con el propósito del proyecto.

## 2.3 ESTADO DEL ARTE

Existen documentos en los cuales se ha planteado la posibilidad del uso de la teoría de juegos para el análisis de la distribución energética en una micro-red, sin embargo el objetivo de estos documentos es servir de orientación e información para la búsqueda de nuevos campos de aplicación. Uno de los propósitos de este proyecto es asociar directamente la teoría de juegos a la ingeniería eléctrica a través de ejemplos concretos en los cuales se pueda evidenciar el análisis estratégico y la obtención de resultados óptimos, ya que la disponibilidad de información en relación a estos temas no es amplia.

La idea de este proyecto radica en ampliar el enfoque que hay acerca del análisis de la teoría de juegos con respecto a casos específicos de la ingeniería como lo son las micro-redes. Dado que el propósito de una micro-red está diseñada para que esta sea autónoma, otro de los problemas a los que podría dar solución este proyecto con la optimización en la distribución energética es la independencia de la micro-red con respecto a la red de suministro principal, ya que el objetivo es que no haya pérdidas de potencia y que la micro-red cubra el 100 % de su propia demandada. Esto produce beneficios tanto ambientales como económicos, ya que el uso de energías renovables es una alternativa más limpia y respetuosa con el medio ambiente, porque optimizando la energía se obliga a la micro-red a no utilizar la red principal que utiliza generación convencional. Otra ventaja es la reducción de pérdidas energéticas seguida de una reducción de gastos monetarios para el mantenimiento de la micro-red. Existen beneficios técnicos y sociales, ya que el estudio podría abrir el campo de investigación de

la teoría de juegos dado que se ilustran ejemplos relacionados directamente a la ingeniería eléctrica, seguido del diseño de una subasta que modela apropiadamente el comportamiento entre generadores y cargas en una micro-red.

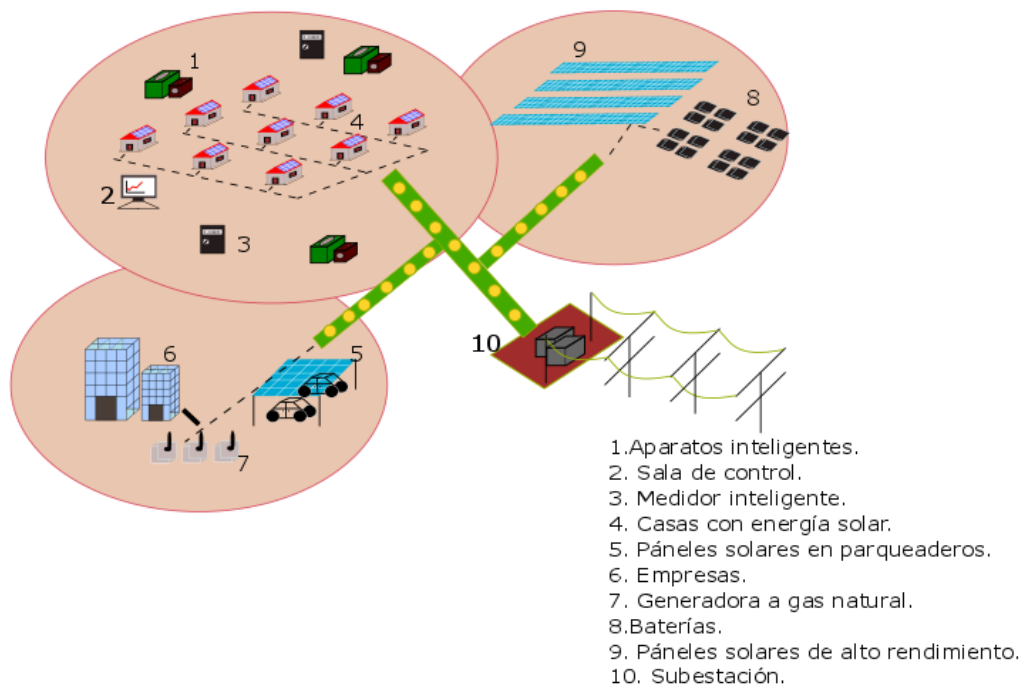
## MICRO-REDES

Este capítulo explica el concepto básico de una micro-red, teniendo en cuenta las características de sus componentes y está organizado de la siguiente manera: en la subsección 3.1 se define el concepto general de una micro-red; posteriormente la subsección 3.2 hace una descripción de los componentes elementales de la misma; y finalmente en la subsección 3.3 se puede observar una idea general de las expectativas futuras para las micro-redes. Para mayor información puede remitirse al documento de (Ekanayake *et al.*, 2012).

### 3.1 CONCEPTO DE MICRO-RED

Las micro-redes son un nuevo sistema de suministro energético reconocido por su capacidad de autoabastecimiento. También cuentan con dos posibles tipos de generación: el primero es el de fuentes renovables (por ejemplo, paneles fotovoltaicos y turbinas eólicas) y el segundo es a base de la generación convencional (por ejemplo, carbón e hidrocarburos). Además, tienen como misión principal mantener el suministro energético de forma segura y confiable con soporte a la regulación de tensión. La figura 3.1 representa una posible distribución de las cargas y fuentes de una micro-red.

Figura 3.1.: Representación de una micro-red.



Fuente: HAWKINS, Jon; and SIMMINS, John and GEORGE, Karen. PNM Shapes Solar. [online] University of New Mexico. [Mexico: D.F] Transmission & Distribution World, Oct. 2013. Available from Internet: <http://tdworld.com/generation-renewables/pnm-shapes-solar?page=3>

La idea actual de las micro-redes es que los sistemas de generación distribuida sean por energías renovables en un 80 y 90 % (Fossati, 2011), esto con el fin de no aumentar el calentamiento global por desechos tóxicos o grandes daños a los ecosistemas existentes.

## 3.2 COMPONENTES BÁSICOS DE LA MICRO-RED

**3.2.1 Generadores distribuidos** Los sistemas actuales son de tipo centralizado, es decir, su estructura se basa en generación, transmisión y distribución con grandes plantas de generación como represas hidroeléctricas, centrales térmicas e incluso plantas nucleares. Estas centrales deben generar grandes cantidades de electricidad para poder suministrar la energía a través de líneas de transmisión a las distintas subestaciones de distribución ubicadas

normalmente en lugares cercanos a las cargas que se desean alimentar, ya sea en media o baja tensión. Lógicamente, el transporte de esta energía por medio de líneas de transmisión genera pérdidas, más aún cuando se satura la capacidad de potencia que tenga el sistema. Por este motivo, las micro-redes de energía presentan una nueva infraestructura que permite aprovechar la generación distribuida, la cual se basa en la implementación de distintas centrales generadoras de energía eléctrica más pequeñas y repartidas por toda la micro-red, de forma tal que se encuentran de una u otra manera cerca a los posibles puntos de consumo. Esto disminuye las capacidades de los equipos eléctricos y las pérdidas ocasionadas por la transmisión de la energía eléctrica (Micheloud *et al.*, 2012).

---

**3.2.2 Almacenadores distribuidos** Dado que la mayoría de las fuentes de energía de una micro-red son de tipo renovable la potencia que generan puede disminuir debido a los diferentes cambios climatológicos, por ejemplo, días lluviosos (paneles fotovoltaicos), bajas corrientes de aire (centrales eólicas) o bajos caudales de los ríos (pequeñas hidroeléctricas). Por ello, es necesario contar con dispositivos que puedan almacenar energía. Hasta el momento los más acertados son: los volantes de inercia, las baterías y los supercondensadores (Fossati, 2011).

*Volantes de inercia:* Son dispositivos que convierten energía eléctrica en mecánica y viceversa (motor-generador o generador-motor) (Ekanayake *et al.*, 2012). El volante de energía esta compuesto por una aleación de carbono-grafito que lo hace resistente a altas velocidades y tiene un sistema vacío que permite eliminar las pérdidas de rozamiento aerodinámico.

*Supercondensadores (EDLC's):* Son condensadores que tienen la capacidad de acumular energía equivalente a la que pueden almacenar 3 condensadores normales al mismo tiempo. La manera como se construyen y funcionan los supercondensadores es similar a un condensador convencional a gran escala, es decir, funciona como un almacenador de energía y esta constituido por dos placas conductoras separadas por un material dieléctrico. Esta clase de supercondensadores se caracteriza por la capacidad de carga y descarga en un período de tiempo. las ventajas principales del uso de supercondensadores en una micro-red son la capacidad puede estar en un rango de [1-5000] F, La densidad energética que esta entre [1-10] Wh/Kg, el rendimiento eléctrico es del 95.99 %, la tensión limitada de trabajo es de [1-500] V y es resistente a altas y muy bajas temperaturas

(Mera, 2011).

*Baterías o pilas de energía:* Son dispositivos diseñados para almacenar energía. Su composición esta dada por celdas electroquímicas que convierten la energía química en electricidad. Las baterías más utilizadas en las micro-redes de energía son las baterías estacionarias, las cuales están compuestas de plomo ácido y bajo contenido de antimonio. Estas poseen normalmente una vida útil hasta de 15 años soportando descargas del 80 %, también se debe tener en cuenta que tienen una autodescarga menor del 3 % y una eficiencia del 75 % (Mera, 2011).

---

**3.2.3 Interfaces de electrónica de potencia** Las micro-redes están compuestas en su mayoría por fuentes renovables de energía, las cuales normalmente generan energía eléctrica DC (corriente continua), por esta razón, es necesario la utilización de inversores rectificadores e inversores de carga para suministrar energía alterna a las cargas, los cuales también pueden cumplir un papel importante a la hora de almacenar energía en los diferentes dispositivos (baterías, volantes de inercia, súper condensadores) dado el caso en el cual se utilicen generadores de tipo convencional, es decir, de AC (alterna) o si se presenta una contribución energética de la red principal de suministro local (Micheloud *et al.*, 2012).

---

**3.2.4 Cargas** Una micro-red está encargada de suministrar energía a diferentes tipos de cargas tales como residenciales, comerciales e industriales. Las cargas residenciales son consideradas como resistivas y de baja importancia, debido a esto, estas cargas son utilizadas para controlar la estabilidad de potencia, frecuencia y regulación (desconectandolas de la micro-red en condiciones de saturación). Las cargas comerciales e industriales son las llamadas cargas sensibles (centros comerciales, hospitales, bancos, etc.), por tal motivo deben tener la mejor calidad energética por parte de la micro-red dado que la importancia de sus servicios en la comunidad es de carácter primordial (Micheloud *et al.*, 2012). Las micro-redes pueden tener dos tipos de cargas: las normales (residenciales) que no tienen mayor problema y las sensibles (industriales o comerciales) las cuales necesitarán de una muy buena atención y mejor calidad en el suministro por parte de la generación distribuida (Pavlidou *et al.*, 2009; Ibars *et al.*, 2010).

### 3.3 EXPECTATIVAS FUTURAS PARA LAS MICRO-REDES

A nivel mundial se han venido presentando diferentes propuestas para mejorar la implementación de las micro-redes en los sistemas energéticos locales. Una de las ideas innovadoras ha sido la unión de micro-redes para la formación de un sistema de micro-redes, la cual sea capaz de controlar grandes regiones territoriales de suministro energético. La segunda opción que se ha presentado seriamente y que en algunas partes ya se está poniendo en práctica es la utilización de medidores inteligentes capaces de monitorear en tiempo real lo que está ocurriendo en la red (Chen *et al.*, 2011). A continuación se hará una descripción de estas dos tecnologías y su relación con las micro-redes:

---

**3.3.1 Sistema de micro-redes** Se trata de una agrupación de micro-redes inteligentes con varios puntos de acople (PCC) entre ellas con un sistema centralizado de control encargado de monitorear los comportamientos de cada una de las micro-redes, esto con el fin de transmitir órdenes por medio de señales de comunicación para mantener una estabilidad de potencia, regulación y frecuencia. Es necesario recordar que las pequeñas plantas de generación convencional solo actuarán en caso de sobrecargas energéticas pero para evitar estas situaciones se adaptarán los medidores inteligentes (Micheloud *et al.*, 2012).

---

**3.3.2 Medidores inteligentes** Debido a que las micro-redes en la mayoría de los casos utilizan generación convencional (por ejemplo, pequeñas plantas térmicas que generan electricidad a partir de combustibles fósiles) cuando existen sobrecargas en la red (horas pico), se trata que los usuarios resistivos o cargas normales disminuyan su consumo durante estos lapsos de tiempo, ya que esto permitiría que las cargas industriales y las comerciales (importante en el desarrollo económico de una población) se mantengan en funcionamiento sin que aumente la generación de energía eléctrica. Los medidores inteligentes son dispositivos capaces de informar en tiempo real una serie de datos tanto para el consumidor como para las entidades de control. Estos medidores llevan incorporado el sistema de tarifas dinámicas con el fin de proporcionar diferentes cobros a los usuarios residenciales (resistivos), los cuales pueden llegar a ser muy altos en horas pico de trabajo, incluso en muchas de las micro-redes no solo se les aplican altas tarifas a los usuarios al consumir en horas críticas sino que el medidor imposibilita el paso de energía eléctrica después de cierto nivel de saturación de la red. Lo anterior se realiza pensando en mantener siempre la red trabajando con fuentes de energía mas económicas y que produzcan menos daños al medio ambiente (Pavlidou *et al.*,

2009).

---

# FUNDAMENTOS DE TEORIA DE JUEGOS

---

Este capítulo contiene los conceptos necesarios de la teoría de juegos para el desarrollo de este proyecto, los cuales serán adaptados a problemas relacionados con la ingeniería eléctrica. Está organizado de la siguiente manera: en la subsección 4.1 se define de manera conceptual la teoría de juegos; en las subsecciones 4.2 y 4.3 se describen los tipos de juegos según la secuencia temporal; posteriormente en la subsección 4.4 se explica el equilibrio de Nash; en la subsección 4.5 se plantea el significado y la forma de ver las estrategias según el tipo de juego; finalmente, la subsección 4.6 muestra las clases de juegos según el tipo de información. Este capítulo es producto de una sintetización y adaptación a casos particulares de ingeniería del libro de (Cerdá *et al.*, 2004).

## 4.1 TEORÍA DE JUEGOS

La teoría de juegos es una importante herramienta de análisis matemático, la cual representa los diferentes tipos de negociación o competencia (también denominados juegos) entre dos o más participantes (jugadores o agentes). Hay dos formas comunes de plantear estos juegos: en forma matricial o en árbol de juego. En estos juegos los participantes son egoístas (individualistas) y racionales (intentan maximizar sus ganancias, y son capaces de hacer todos los cálculos y razonamientos que les conduzcan a ello) (Cerdá *et al.*, 2004). Dependiendo del escenario de juego, se puede analizar bajo que condiciones los jugadores pueden llegar a formar coaliciones (juegos cooperativos), o como es su comportamiento si toman decisiones de manera independiente (juegos no cooperativos) (Leyton & Shoham, 2008).

El fin de este estudio es analizar los resultados que se obtienen al aplicar juegos no cooperativos para la gestión de recursos energéticos en una micro-red. La importancia de la teoría de juegos radica en el beneficio que puede ofrecer la maximización de utilidades a los agentes a causa de la toma de decisiones, la predicción de las mismas y la búsqueda de un resultado óptimo para todos los involucrados.

Dado que la decisión de un jugador se verá afectada por las acciones que tomarán los demás agentes, cada uno de ellos deberá considerar cuál sería su máximo pago teniendo en cuenta las distintas acciones que puedan realizar los otros participantes (considerando que los jugadores son completamente racionales). Dicho esto, se puede introducir una importante herramienta de la teoría de juegos denominada como “el equilibrio de Nash” (Gardner, 1996). Pero antes se deben conocer las maneras de representar un juego, lo cual es descrito a continuación.

## 4.2 JUEGOS EN FORMA NORMAL

Los juegos en forma normal sirven para representar juegos donde los jugadores toman las decisiones simultáneamente. La representación consiste en una matriz de donde se puede observar el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias para cada jugador y los pagos que reciben los jugadores para cada combinación de estrategias.

En los juegos en forma normal también es posible que los jugadores tomen decisiones en tiempos diferentes, pero en este caso cada uno de ellos escoge su acción sin saber cuáles serán las elecciones de los demás. Cuando todos los participantes tengan definida su decisión, tanto la elección hecha por cada uno de ellos como el respectivo resultado serán de dominio público. A continuación en la ecuación 4.1 se indica la utilidad obtenida en el juego según el jugador y las acciones tomadas. La notación que se empleará para señalar las utilidades será la siguiente (para el caso de dos jugadores):

$$u_{k,a_i,j} = u(a_i, a_j) \quad (4.1)$$

$u$ : Utilidad

$k$ : Subíndice para identificar al jugador  $k$

- $i$ : Subíndice que indica la acción tomada por el jugador  $k$
- $j$ : Subíndice que indica la acción tomada por el otro jugador

A continuación en la tabla 4.1 se pueden ver las variables que están dentro de las casillas indican acciones (por ejemplo,  $a_1$ ), y utilidades (por ejemplo,  $u_{1,a_1,1}$  indica la utilidad del jugador uno dado que el mismo escoja la acción  $a_1$  y a su vez el jugador dos escoja la acción  $a_1$ ).

TABLA 4.1.: Representación de un juego de forma normal.

		Jugador 2	
		$a_1$	$a_2$
Jugador 1	$a_1$	$u_{1,a_1,1}, u_{2,a_1,1}$	$u_{1,a_1,2}, u_{2,a_2,1}$
	$a_2$	$u_{1,a_2,1}, u_{2,a_1,2}$	$u_{1,a_2,2}, u_{2,a_2,2}$

En la tabla 4.1 puede verse un ejemplo de la representación de un juego en forma normal. Las variables  $[a_1, a_2]$  son las *acciones* que el jugador 1 y el jugador 2 pueden elegir respectivamente. Los valores que están en cada casilla representan los posibles pagos que se le adjudicarán a cada uno de los jugadores. Los pagos del jugador 1 son el primer elemento de la tupla de cada casilla que están en la fila de cada acción, es decir, para la acción  $a_1$  los pagos son « $u_{1,a_1,1}$ » y « $u_{1,a_1,2}$ » y para la acción  $a_2$  los pagos son « $u_{1,a_2,1}$ » y « $u_{1,a_2,2}$ ». Los pagos del jugador 2 son el segundo elemento de la tupla de cada casilla que están en la columna de cada acción, es decir, para la acción  $a_1$  los pagos son « $u_{2,a_1,1}$ » y « $u_{2,a_1,2}$ » y para la acción  $a_2$  los pagos son « $u_{2,a_2,1}$ » y « $u_{2,a_2,2}$ ».

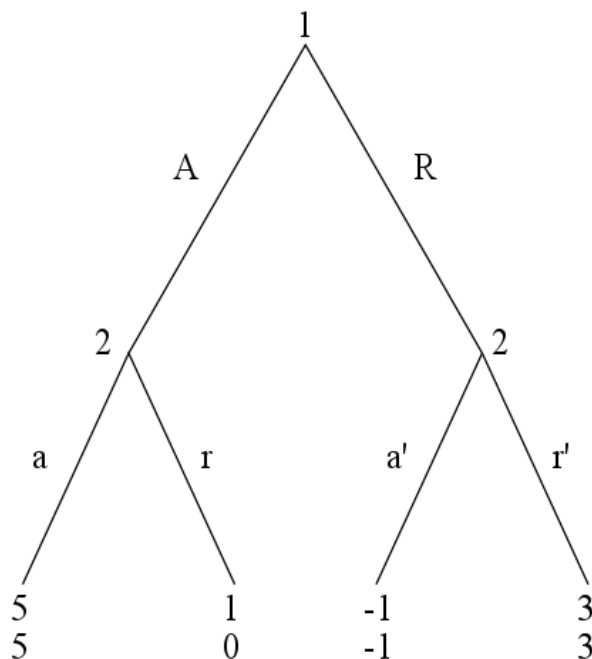
Una notación muy utilizada es tomar  $u_{i,j}$  como la utilidad del jugador  $i$  dado el comportamiento del jugador  $j$ . Aunque esta notación no deja explícita la acción a la que corresponde la utilidad permite en caso de existir más de dos jugadores, declarar la utilidad  $u_{i,-i}$  como la utilidad del jugador  $i$  dado el comportamiento del resto de jugadores (es decir, el subíndice  $-i$  se usa para identificar al conjunto de todos los jugadores excepto el jugador  $i$ ). Esto puede verse con mayor profundidad en la sección 4 de (Cerdá *et al.*, 2004).

### 4.3 JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

Los juegos en forma extensiva son aquellos que son secuenciales, es decir, que los jugadores pueden tomar decisiones en distintos instantes de tiempo en el orden planteado por el juego. Las decisiones que los jugadores toman en un tiempo determinado dependen de las acciones que se hayan llevado a cabo anteriormente por otros participantes, excepto por el jugador que inicia el juego quien es el primero en elegir una acción. De esta manera, en cada paso de la secuencia un jugador diferente debe realizar una elección, la cual al finalizar el juego y dependiendo de las acciones de los demás le adjudicará un determinado pago o utilidad a cada uno de los participantes.

A continuación en la figura 4.1 se puede ver que el juego es iniciado en el nodo raíz por el jugador 1. Cada nodo representa un punto del juego donde alguno de los jugadores toma una decisión. Cada posible camino tiene marcado los respectivos pagos para cada uno de los agentes al final.

Figura 4.1.: Representación de un juego en forma extensiva.



Se debe tener en cuenta que para la figura 4.1 el resultado de las elecciones del agente 2 dependen de la decisión del agente 1 (Las acciones pueden ser diferentes para los jugadores)-deberían seguir y de cuál o cuáles les representan una mayor utilidad. Al final se obtienen los pagos dependiendo de las estrategias (combinación de acciones) seleccionadas por los diferentes jugadores.

Los juegos en forma extensiva o dinámicos se pueden representar en dos formas estáticas: la primera en la forma normal, estratégica o estratégica normal y la segunda en forma multiagente, normal con agentes o estratégica con agentes (Cerdá *et al.*, 2004). Es necesario aclarar que un juego en forma normal no puede ser representado como uno en forma extensiva ya que en este no se puede visualizar una estructura temporal de juego. Si se desea mayor profundidad en este tipo de juego se puede remitir a la segunda parte de (Cerdá *et al.*, 2004).

## 4.4 EQUILIBRIO DE NASH

Los juegos están constituidos por agentes egoístas y racionales, por lo tanto, es importante tener un procedimiento que garantice un resultado óptimo para cada jugador teniendo en cuenta las posibles acciones de los demás participantes. Los resultados de todas las combinaciones de acciones (análisis de todas las posibles acciones de un jugador dadas las elecciones de los demás), se representan por medio de utilidades.

Se denomina equilibrio de Nash a una combinación de acciones donde ningún jugador tenga incentivos a desviarse. Este equilibrio puede estar constituido no solo por acciones elegidas con certeza, sino también por acciones aleatorias a las cuales se les asigna una probabilidad de ocurrencia. A estas acciones se les da el nombre de *soporte*.

Es posible calcular de diferentes maneras el equilibrio de Nash. Para eso, solo se debe tener en cuenta los tipos de estrategias que se están presentando en el juego y luego utilizar el método más adecuado para hallar el equilibrio en cada una de estas. Para más información remitirse al capítulo 2 de (Cerdá *et al.*, 2004).

## 4.5 ESTRATEGIAS

En términos generales a un conjunto de acciones también se le puede denominar estrategia. Específicamente en el equilibrio de Nash, la estrategia seleccionada es un conjunto de acciones

o soporte que maximiza los pagos para cada uno de los jugadores. A continuación se muestra los tipos de estrategias que se pueden presentar en un juego:

---

**4.5.1 Estrategias puras** Cuando cada jugador tiene un conjunto de acciones y elige una con probabilidad de 1, entonces se está jugando una estrategia pura. Pueden existir varios equilibrios de Nash en estrategias puras (considerando un número finito) (Cerdá *et al.*, 2004).

---

*Ejemplo 1.* GESTIÓN DE PAQUETES DE ENERGÍA. Una empresa generadora (empresa 1) propone una promoción energética a dos conjuntos residenciales. Las promociones que dicha empresa ofrece dependen de la decisión de que cada conjunto acepte (opción A) o no (opción B) el suministro de energía. Si ambos conjuntos optan por aceptar (opcion A) el suministro de energía de la empresa 1, los pagos correspondientes son 2 para cada uno debido a que coinciden con los requisitos para tener la promoción (la promoción solo es valida cuando los dos tomen la opcion A). Sin embargo, se debe tener en cuenta que existe una empresa 2 que tiene la capacidad de abastecer de manera eficiente a un solo conjunto en caso de que uno de estos no acepte el suministro de energía de la empresa 1 (tome la opcion B). si uno de los dos conjuntos decide no recibir dicho suministro por parte de la empresa 1, el conjunto que rechace la oferta obtiene un pago de 3 debido a que la empresa 2 puede abastecer totalmente su capacidad ofreciendo la energía a un menor costo (incluso menor al costo de la promoción de la empresa 1) y el otro recibirá un pago de 0 debido a que la empresa 1 restringe la promoción (dado que ya no se cumple los requisitos para ofrecer la promoción). En caso de que ambos conjuntos no acepten el suministro de energía (tomen la opcion B), los pagos serían de 1 para ambos jugdores debido a que la empresa 2 excedería su capacidad de suministro, motivo por el cual aumentaría los costos de la energía. A continuación en la tabla 4.2 se muestran las utilidades para cada conjunto residencial en función de sus posibles acciones:

TABLA 4.2.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 1.

		CR2	
		A	B
CR1	A	2 , 2	0 , 3
	B	3 , 0	1 , 1

El equilibrio de Nash está en la estrategia pura (B,B). Se denotará conjunto residencial 1

y 2 como CR1 y CR2 respectivamente.

Para analizar la mejor decisión de CR1, se deben tener en cuenta las elecciones de CR2. Por ejemplo, si CR2 elige la opción A lo mejor para CR1 es la opción B ya que es mejor un pago de 3 que uno de 2. De la misma manera, si CR2 elige la opción B lo mejor para CR1 es elegir la opción B dado que es mejor un pago de 1 que uno de 0. Ahora, para analizar la mejor decisión de CR2, se deben tener en cuenta las elecciones de CR1. Por ejemplo, si CR1 toma la opción A lo mejor para CR2 es optar por B ya que es mejor un pago de 3 que uno de 2. Del mismo modo, si CR1 elige la opción B lo mejor para CR2 es elegir la opción B dado que es mejor un pago de 1 que uno de 0. Dicho lo anterior, CR1 y CR2 maximizan sus utilidades jugando (B, B) respectivamente, por lo que dicha estrategia pura constituye un equilibrio de Nash. ■

El análisis de este problema es equivalente al del dilema del prisionero mostrado en el ejemplo 2.1 de (Cerdá *et al.*, 2004). Puede observarse que al igual que el dilema del prisionero existe una estrategia tanto para CR1 como para CR2 donde ambos obtienen sus máximos pagos sin importar la decisión del otro jugador, es decir, la opción B. A esto se le denomina estrategia dominante que se explicará con más detalles en secciones posteriores. Otra manera de ver la equivalencia entre el ejemplo y el dilema del prisionero radica en la eficiencia de Pareto. Esta eficiencia es una combinación estratégica donde se aumenta la utilidad de un agente sin decrementar la del otro. En este caso, al igual que en el dilema del prisionero el equilibrio de Nash es ineficiente en el sentido de Pareto. En cambio, dicha eficiencia se encuentra en la estrategia A, A donde ambos jugadores no decrementan la utilidad de otro, por lo tanto son eficientes en el sentido de Pareto.

---

---

*Ejemplo 2.* INTERACCIÓN LADRILLERA-CEMENTO PARA DISMINUIR GASTOS. Dos empresas industriales (empresa ladrillera también conocida como Industria 1 y empresa de cemento también conocida como Industria 2) están conectadas por una misma línea de transmisión trifásica ( $3\Phi$ ) alimentada por una central generadora. Una empresa está conectada después de la otra, es decir, la empresa de cemento (I2) se encuentra ubicada a mayor distancia de la central generadora que la empresa ladrillera (I1). La central generadora ha realizado unas

modificaciones internas permitiéndole presentar nuevas ofertas a las empresas industriales (nuevos paquetes de energía y a un precio más bajo). La decisión de cada empresa es independiente, es decir, ninguna tiene información acerca de cual es la acción que tomará la otra empresa. La condición para que la oferta de la empresa generadora sea rentable para las empresas industriales consiste en que estas acepten el nuevo paquete de energía adjudicando de esta manera una ganancia igual a «5» para cada una de ellas. Dado el caso de que la empresa ladrillera acepte (A) y la empresa de cemento rechace (R), los pagos serían de «1» para la ladrillera (dado que obtiene ciertos beneficios por aceptar la propuesta, sin embargo, son menores a los presentados en caso de que ambos acepten la propuesta) y 0 para la de cemento (debido a que seguirá con el mismo contrato energético con el que ha venido hasta el momento). Ahora, si la situación es contraria, es decir, si la empresa de cemento acepta el paquete de energía y la ladrillera lo rechaza ambas empresas recibirían un pago de «-1» debido que a la central generadora obtiene más pérdidas si transporta esta nueva cantidad de energía únicamente para la industria de cemento la cual queda a una mayor distancia (mas retirada de la central generadora), debido a que sólo ocasionaría pérdidas de potencia y mayores costos de producción, motivo por el cual la empresa generadora responsabilizará a las industrias modificando sus contratos y aumentando el precio que tienen que pagar, generándoles pérdidas a las dos empresas. Finalmente, si ambos deciden rechazar la oferta se quedarán con el contrato anterior, y por el mérito que obtienen con la empresa generadora (debido a no hacerle perder diferentes factores, por ejemplo, potencia, tiempo e inversión.) les reducen a ambas empresas industriales el precio del contrato inicial por lo cual las industrias obtienen una ganancia de «3» cada una. A continuación en la tabla 4.3 se muestran las utilidades de las dos industrias con las correspondientes utilidades dependiendo de las respectivas acciones tomadas por cada jugador, junto con su solución en estrategias puras:

A continuación en la tabla 4.3 se muestran los pagos para cada industria dependiendo de las acciones de los jugadores –Por ejemplo, para la estrategia (A, R) los pagos son (1, 0) para la industria 1 y 2 respectivamente–. Las estrategias (A, A) y (R, R) son los equilibrios de Nash respectivamente. Se denotará Industria 1 y 2 como I1 e I2 respectivamente.

TABLA 4.3.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 2.

		I2	
		A	R
I1	A	5 , 5	1 , 0
	R	-1, -1	3 , 3

Como se muestra en la tabla 4.3 no existen estrategias dominantes como se observó en el ejemplo 1. En este caso, se analizan los equilibrios de Nash buscando el punto donde ningún jugador tenga incentivos a desviarse. Por ejemplo,  $(5, 5)$  – es decir,  $(A, A)$ – es equilibrio dado que I1 no tiene incentivos a moverse de A, ya que el pago se reduciría a 1; de la misma manera I2 recurriría al mismo análisis, ya que si se mueve de A su pago se reduciría a -1. Lo mismo ocurre para  $3, 3$  – es decir,  $(R, R)$ – este también es equilibrio dado que I1 no tiene incentivos a moverse de R, ya que el pago se reduciría a -1; de la misma manera I2 recurriría al mismo análisis, ya que si se mueve de R su pago se reduciría a 0. Por el contrario,  $(1, 0)$  – es decir,  $(A, R)$ – no es un equilibrio dado que I1 esta motivado a cambiar de estrategia, ya que obtendría un pago mejor de 5 si se mueve de A. Del mismo modo, I2 tiene incentivos a moverse, ya que obtendría un pago de 3 si lo hiciera. En el caso de  $(-1, -1)$  – es decir,  $(R, A)$ – tampoco es equilibrio ya que tanto I1 e I2 tienen motivación a desviarse dado que obtendrían pagos de 3 y 5 respectivamente. ■

En conclusión, no existen estrategias dominantes en este ejemplo. Se recurre a solucionar este planteamiento inicialmente a través de un equilibrio de Nash por estrategias puras, para determinar cual es la mejor respuesta donde los jugadores no tengan incentivos a desviarse y ese punto se encuentran donde ambos jugadores coinciden en sus respuestas frente a la aceptación o rechazo del nuevo paquete de energía.

---

**4.5.2 Estrategias mixtas** Cuando un jugador utiliza estrategias mixtas es porque el conjunto de acciones que toma (o el soporte, es decir, un subconjunto de todas las estrategias puras con probabilidad positiva) dependen de una distribución de probabilidades. Cuando un problema no tiene solución por estrategias puras puede darse un resultado a través de la

aplicación de estrategias mixtas y la estrategia pura puede ser considerada un caso especial de la estrategia mixta a la cual se le asigna una probabilidad de 1 a dicha estrategia pura y de cero a las demás.

En el equilibrio de Nash la estrategia seleccionada es un soporte que maximiza los pagos para cada uno de los jugadores. Este equilibrio se determina por medio de intervalos de probabilidades con los cuales se escogerán determinadas estrategias puras como se muestra a continuación:

Para dos jugadores con dos acciones en un juego de forma normal se tiene que el EN (Equilibrio de Nash) estará determinado por  $(q, 1 - q)$  para el jugador 1 y  $(p, 1 - p)$  para el jugador 2 donde  $q, 1 - q, p$  y  $1 - p$  son las probabilidades que van a tener cada una de las acciones de los jugadores.

---

*Ejemplo 3.* COMPRA DE ENERGÍA. Dos empresas industriales deciden que la mejor opción para disminuir el costo de la potencia que le están comprando a una termoeléctrica (sistema de generación centralizado) es unirse y solicitar un solo paquete de energía a una de dos centrales eléctricas nuevas de generación renovable, una constituida por aerogeneradores y la otra por paneles fotovoltaicos, en cuyo caso las nuevas electrificadoras darán un valor menor del precio de energía producido en comparación a la termoeléctrica. El comportamiento de ambas empresas se puede modelar como un juego de normal donde las acciones para cada una de ellas son A (compra de energía a central fotovoltaica) y B (compra de energía a central eólica). La opción A le deja el doble de ganancias a la empresa 1 de las que puede obtener la empresa 2 si deciden unirse y comprar este paquete de energía, la opción B hace lo contrario, es decir, le da el doble de ganancia a la empresa 2 de la que puede obtener la empresa 1. Si las empresas no llegan a un acuerdo entonces sus pagos serán de 0 para cada una de ellas (si no le compran a la misma planta generadora ellas no obtendrán los beneficios que se habían analizado con anterioridad), la posible disminución del precio en el valor del kW con respecto a la termoeléctrica ya no se podrá tener en cuenta. A continuación en la tabla 4.4 se muestran los pagos para cada empresa en función de sus respectivas acciones:

A continuación en la tabla 4.4 se muestran los pagos para cada empresa dependiendo de las acciones de los jugadores –Por ejemplo, para la estrategia (A, B) los pagos son (0, 0) para el jugador 1 y 2 respectivamente.–. Las estrategias (A, A) y (B, B) son los equilibrios de Nash respectivamente. Se denotará a la empresa 1 y 2 como E1 y E2 respectivamente.

TABLA 4.4.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 3.

		E2	
		$p$	$1 - p$
		A	B
		E1	$q$
$1 - q$	B		0, 0    1, 2

Se puede observar que para este caso no existe un único equilibrio de Nash debido a que la opción que escoja cada jugador está condicionada al posible cambio de estrategia que tenga su contrincante. El conjunto de estrategias puras con probabilidad positiva que determinan la estrategia mixta es conocido como soporte y se denota por medio de  $(q, 1 - q)$  y  $(p, 1 - p)$ .

Para determinar las probabilidades de cada una de las acciones que pertenecen al soporte primero se debe encontrar el subconjunto de estrategias puras que conforme el soporte (si el soporte es igual al conjunto de estrategias puras que tenga el jugador entonces se dice que la estrategia mixta es completa). Una vez se determine el soporte se igualaran las utilidades que pueda tener cada jugador en función de una posible probabilidad para cada una de las estrategias puras que conforman dicho soporte, como se muestra a continuación en las ecuaciones 4.2 y 4.3 para E1 y las ecuaciones 4.4 y 4.5 para E2:

$$U_1(A) = U_1(B) \tag{4.2}$$

$$2 \times p + 0 \times (1 - p) = 0 \times p + 1 \times (1 - p) \quad \therefore \quad 2p = 1 - p \quad \therefore \quad p = 1/3 \tag{4.3}$$

$$U_2(A) = U_2(B) \tag{4.4}$$

$$1 \times q + 0 \times (1 - q) = 0 \times q + 2 \times (1 - q) \quad \therefore \quad 2q = 2(1 - q) \quad \therefore \quad 2q = 2/3 \tag{4.5}$$

Por lo tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas estará determinado de la siguiente manera:  $[(2/3, 1/3); (1/3, 2/3)]$ , es decir, la empresa 1 jugará la estrategia A con probabilidad de  $2/3$  y B con probabilidad de  $1/3$ , de la misma manera la empresa 2 jugará A con probabilidad de  $1/3$  y B con probabilidad de  $2/3$ . Se puede observar que la mayor probabilidad de las empresas siempre va a hacia la opción en la que el pago es mayor para cada una de ellas. ■

El análisis del ejemplo 3 es equivalente al de la batalla de los sexos mostrado en ejemplo 2.2 de (Cerdá *et al.*, 2004). Puede observarse que al igual que en la batalla de los sexos, en este caso existen dos equilibrios de Nash ubicados donde las acciones coinciden tanto para la empresa 1 como para la empresa 2, es decir, los EN se encuentran donde ambas empresas optan por la misma estrategia (A, A) y (B, B) respectivamente. Además, la eficiencia en el sentido de pareto coincide con los EN de este juego, dado que los jugadores no empeoran las ganancias de los demás en este conjunto de estrategias.

---

*Ejemplo 4.* INTERACCIÓN LADRILLERA-CEMENTO. A partir del enunciado del ejemplo 2 se resolverá el juego a través de estrategias mixtas, se presentará a continuación en las ecuaciones 4.6 y 4.7 para I1 y las ecuaciones 4.8 y 4.9 para I2::

TABLA 4.5.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 2.

		I2			
		$p$	$1 - p$		
		A	5 , 5	R	1 , 0
		$1 - q$	R	-1, -1	3 , 3

Las estrategias (A, A) y (R, R) son los equilibrios de Nash respectivamente. Esta tabla representa las utilidades para la industria 1 y 2 respectivamente, en función de sus acciones.

$$U_1(A) = U_1(R) \tag{4.6}$$

$$5 \times q - 1 \times (1 - q) = 0 \times q + 3 \times (1 - q) \quad \therefore \quad q = \frac{4}{9} \tag{4.7}$$

$$U_2(A) = U_2(R) \tag{4.8}$$

$$5 \times p + 1 \times (1 - p) = -1 \times p + 3 \times (1 - p) \quad \therefore \quad p = \frac{1}{4} \tag{4.9}$$

Por lo tanto el equilibrio de Nash en estrategias mixtas estará determinado por  $[(4/9, 5/9); (1/4, 3/4)]$ , es decir, la empresa 1 jugará la estrategia «A» (Aceptar) con probabilidad de  $4/9$  y «R» (Rechazar) con probabilidad de  $5/9$ , de la misma manera la empresa 2 jugará «a» (Aceptar) con probabilidad de  $1/4$  y «r» (Rechazar) con probabilidad de  $3/4$ . ■

El resultado indica que lo mejor para ambas empresas es que tomen la misma decisión, es decir, ambas decidan comprar o no comprar el paquete de energía.

---

**4.5.3 Estrategias estrictamente dominantes** Cuando un agente elige una opción de juego independientemente de las posibles decisiones que puedan tomar los otros jugadores es porque sabe que dicha elección máxima su utilidad, es decir, el participante no mejora su recompensa cambiando de estrategia sin importar lo que hagan los demás. Basados en este conocimiento todos los involucrados intentarán buscar su máximo pago entre los posibles movimientos que puedan tener, prestando mucha atención a cuál es la estrategia dominante de su rival. Lo anterior garantiza un equilibrio de Nash en estrategias dominantes puras o mixtas, esta última se da cuando existe al menos una estrategia de un agente que no es dominada por alguna de sus otras acciones (Cerdá *et al.*, 2004).

---

*Ejemplo 5.* DISTRIBUCIÓN ENERGÉTICA. Dos empresas generadoras buscan ser las encargadas de suministrar energía a uno de los tres posibles tipos de cargas eléctricas que se pueden presentar en una ciudad –sector residencial (R), sector industrial (I) o sector comercial (C)– la elección es de libre albedrío (cada empresa puede suministrar energía a la opción que desee). La siguiente matriz de pagos muestra las utilidades que obtendrían cada una de ellas y su competencia para las distintas relaciones de suministro energético que puedan llegar a tener, es decir, que una le genere al sector residencial y la otra al industrial o que una genere para el comercial y la otra para el residencial o que ambas generen energía para un mismo sector como por ejemplo el comercial y así sucesivamente. A continuación se muestran las utilidades y acciones respectivas para cada empresa:

TABLA 4.6.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 5.

		E2		
		R	I	C
E1	R	3 , 0	1 , 3	2 , 0
	I	1 , -1	2 , 2	5 , 0
	C	4 , 1	3 , 4	0 , 1

La estrategia (C, I) es un equilibrio de Nash. Se denotará empresa 1 y 2 como E1 y E2 respectivamente.

Como se puede observar la mejor opción para la empresa numero 2 es escoger el sector Industrial (descartar las otras dos acciones, eliminando una después de la otra) dado que sus utilidades siempre son mayores para este caso sin importar lo que haga la otra empresa, a este procedimiento se le conoce como eliminación por iteración. ■

Teniendo en cuenta todo lo dicho con anterioridad, la empresa 1 debe escoger la opción que le dé mayor utilidad, es decir, la opción C (sector comercial). Esta relación: empresa 1 le suministra energia al sector comercial y empresa 2 le suministra energia al sector industrial, será el equilibrio de Nash en este juego de estrategias estrictamente dominantes.

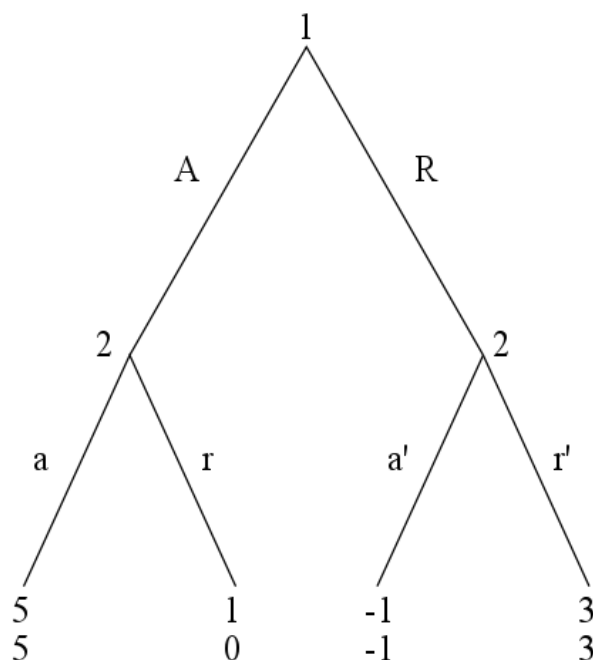
---



---

*Ejemplo 6.* ESTRUCTURA TEMPORAL. En este ejemplo se utilizará el mismo enunciado del ejemplo 2 a excepción de que se dará ventaja al jugador 2 sobre el jugador 1 en cuanto a la estructura temporal de juego , es decir, en este juego se supone que el jugador 2 sabrá que acción llevará a cabo el jugador 1 y luego tomará la decisión que adjudique el mejor pago. A continuación en la figura 4.2 se mostrará la respresentación de este juego como un juego de forma extensiva:

Figura 4.2.: Forma extensiva del juego del ejemplo 6



A continuación la tabla 4.7 muestra la matriz de pagos del ejemplo 6 representando el juego de forma extensiva presentado en la figura 4.2 en forma normal, para hacer más visible el análisis de estrategias estrictamente dominantes.

TABLA 4.7.: Matriz de pagos del ejemplo 6

		E2			
		a a'	a r'	r a'	r r'
E1	A	5, 5	5, 5	0, 0	0, 0
	R	-1, -1	4, 3	-1, -1	4, 3

Si se analiza estrategia por estrategia, puede observarse entre las utilidades del conjunto de acciones del jugador 2 que la estrategia ar' domina estrictamente a la estrategia ra', esto indica que el jugador dos siempre obtendrá mejores pagos eligiendo ar' que ra'. De esta manera, se puede descartar el hecho de utilizar la estrategia ra' en el análisis total del juego. Por lo tanto, el análisis nuevo se hará sobre la siguiente matriz representada en la tabla 4.8. Debido a que

no hay más estrategias estrictamente dominantes, para obtener un resultado óptimo puede aplicarse el procedimiento de extrategias puras o mixtas expuestas en las secciones 4.5.1 y 4.5.2 respectivamente. En este caso, se intentará buscar la estrategia óptima de este juego mediante el método de Equilibrio de Nash en estrategias puras. A continuación se muestran la matriz de pagos con sus respectivos equilibrios de Nash.

TABLA 4.8.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 6.

		E2		
		a a'	a r'	r r'
E1	A	5 , 5	5 , 5	0 , 0
	R	-1, -1	4 , 3	4 , 3

Las estrategias (A, aa'), (A, ar') y (R, rr') son los equilibrios de Nash en estrategias puras. Al eliminar una estrategia dominada, se garantiza que el jugador no va a tomar de ninguna manera esta opción ya que le produciría pérdidas en comparación a la elección de otras acciones. ■

En conclusión, para determinar si una estrategia es dominante, es importante plantear todas aquella acciones que puedan empeorar la utilidad de un jugador con el fin de descartar su presencia en el proceso del análisis estratégico.

---

**4.5.4 Estrategias débilmente dominantes** Son aquellas estrategias en las cuales los pagos para un agente que decide optar por una determinada opción son iguales o mayores a los que obtiene si decide cambiar de decisión. Esto claramente se analiza eligiendo una acción estratégica con el fin de determinar las igualdades o diferencias entre las utilidades correspondientes a la misma y a las demás opciones que tenga el participante, teniendo presente los posibles cambios de decisión de los demás jugadores. Debido a que hay estrategias dominadas débilmente, no puede aplicarse directamente la eliminación por iteración, ya que es posible que se elimine un equilibrio de Nash en cuyo caso se este incurriendo en un error. Por lo tanto, debe emplearse otro procedimiento para hallar la respuesta óptima como se hizo en los ejemplos de estrategias puras y mixtas.

*Ejemplo 7.* NUEVO SUMINISTRO DE ENERGÍA. Para este ejemplo se considera el mismo enunciado del ejemplo 5 la única diferencia es que los pagos de su matriz van a tener valores diferentes como se muestra a continuación en la tabla 4.9:

TABLA 4.9.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 7.

		E2		
		R	I	C
E1	R	3 , 2	4 , 1	2 , 1
	I	2 , 1	2 , 1	5 , 0
	C	0 , 5	5 , 5	0 , 5

Las estrategias (R, R) y (C, I) son los equilibrios de Nash.

Para este tipo de juegos es inadecuado realizar la eliminación de filas o columnas (como se mostró anteriormente para estrategias estrictamente dominantes) debido a que se puede estar excluyendo uno de los equilibrios de Nash mostrados en algunas de las estrategias puras del juego inicial por lo cual se hace énfasis en que es inadecuado realizar el procedimiento de eliminación por iteración.

Como se observa solo existen dos equilibrios de Nash en la tabla 4.9, teniendo en cuenta esto, la mejor opción es que la estrategia C del jugador 2 sea eliminada por las demás estrategias quedando la matriz de pagos como muestra en la tabla 4.10:

TABLA 4.10.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 7.

		E2	
		R	I
E1	R	3 , 2	4 , 1
	I	2 , 1	2 , 1
	C	0 , 5	5 , 5

Las estrategias (R, R) y (C, I) son equilibrios de Nash.

Una vez ocurrido esto, la estrategia R del jugador 1 se vuelve estrictamente dominante sobre la estrategia I dando como resultado una matriz de dos por dos en la cual quedan los dos equilibrios de Nash en estrategias puras débilmente dominantes como lo muestra la tabla 4.11.

TABLA 4.11.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 7.

		E2	
		R	I
E1	R	3 , 2	4 , 1
	C	0 , 5	5 , 5

Las estrategias (R, R) y (C, I) son equilibrios de Nash.



De esta manera, se puede mostrar que si el orden de la eliminación no llega a ser el correcto se puede estar incurriendo en un error eliminando uno de los equilibrios de Nash, además de descartar un resultado en estrategias mixtas. Un ejemplo de ello sería que la primera acción que se llevara a cabo fuera que la estrategia R del jugador dos eliminara la estrategia I del mismo, en cuyo caso el equilibrio de Nash (CI) sería eliminado y el resultado del juego daría una estrategia pura, es decir, el único equilibrio de Nash sería jugar (R,R). (Si se desea profundizar en el tema de estrategias dominantes y débilmente dominantes, remitirse al capítulo 2 de(Cerdá *et al.*, 2004)).

---

*Ejemplo 8.* ESTRATEGIAS DEBILMENTE DOMINANTES. En este ejemplo se aplicará el estudio de estrategias débilmente dominantes al enunciado del ejemplo 6. A continuación se puede observar la matriz de pagos para dicho ejemplo:

TABLA 4.12.: Representación de la matriz de pagos del ejemplo 8.

		E2			
		a a'	a r'	r a'	r r'
E1	A	5 , 5	5 , 5	0 , 0	0 , 0
	R	-1, -1	4 , 3	-1 , -1	4 , 3

Si se analiza la matriz de pagos anterior, puede observarse que para el jugador dos (La empresa de ladrillos) la estrategia ar' domina débilmente a la estrategia aa' y a la estrategia rr' (ya que tiene pagos mayores o iguales como se ha explicado con anterioridad).

---

## 4.6

### CLASES DE JUEGOS SEGÚN EL TIPO DE INFORMACIÓN

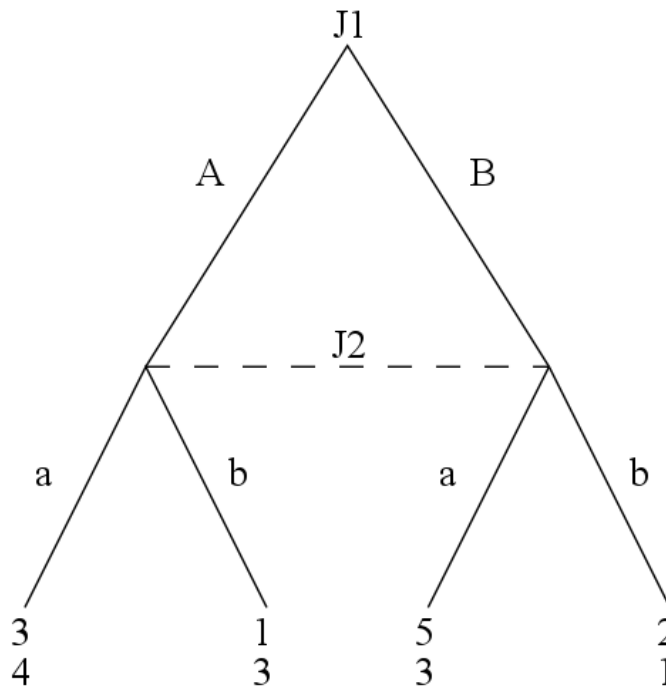
Esta sección se remite a los juegos, que son casos particulares aplicados a juegos extensivos, los cuales se desarrollan dependiendo de la cantidad de información disponible acerca de las reglas, jugadores, acciones, pagos o utilidades. Uno de los temas importantes es la definición de juegos con información perfecta en la cual los jugadores conocen todos los movimientos de los demás antes de la elección de sus estrategias, a diferencia de los juegos de información imperfecta donde carecen de esta información. Posteriormente, se explica en términos generales la definición de información completa donde estos agentes conocen las acciones, estrategias y resultados del juego (todos saben que cada participante del juego dispone de esta información). También se trata el concepto de información incompleta en la cual los jugadores carecen de algún tipo de pauta que pueda describir el juego. A continuación se ilustrará cada uno de estos juegos y sus posibles representaciones para realizar el correcto análisis:

---

**4.6.1 Juegos de información perfecta e imperfecta** Estos juegos son un caso especial de los secuenciales ya que los juegos de información perfecta son aquellos en los que se conoce lo sucedido desde el principio del juego, es decir, un determinado jugador tiene total conocimiento acerca de cada una de las acciones que han sido tomadas por otros participantes o incluso por él mismo pero basándose en una cadena temporal de movimientos, ver figura 4.2.

A diferencia de los juegos de información perfecta en los de información imperfecta al menos un jugador no cuenta con la capacidad de identificar que tipo de acciones o decisiones se han tomado con anterioridad, lo cual da como resultado que el agente no pueda reconocer en qué posición (nodo) se encuentra, por ejemplo, para un caso especial como se muestra a continuación en la figura 4.3 el jugador numero 2 no sabe qué decisión tomó el número 1, si jugó la acción A o la B, por lo tanto, la falta de información se ilustra por medio de una línea punteada lo cual indica que tiene un solo conjunto de información, es decir, el jugador 2 debe tener en cuenta que le conviene más si jugar la acción A o la B considerando que puede estar ubicado en cualquiera de los dos puntos en el que lo posicione el jugador 1 con anterioridad. (Para mayor información remitirse al capítulo 4, definición 4.1 de (Cerdá *et al.*, 2004)).

Figura 4.3.: Representación de un juego de forma extensiva con información imperfecta



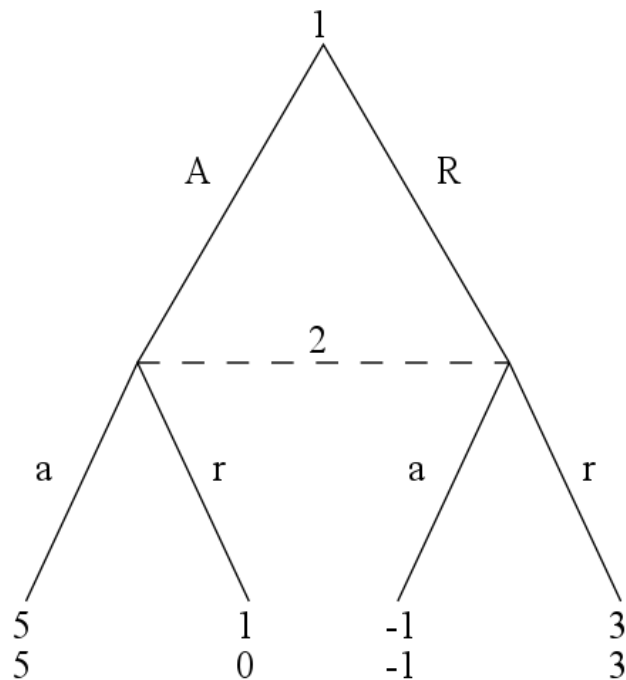
---

*Ejemplo 9.* PRIVACIDAD DE LA INFORMACIÓN. El enunciado del ejemplo 2 se puede considerar como un juego de información imperfecta, considerando el hecho de que el jugador 2 no sabe que tipo de movimiento ha realizado el jugador 1 (cuenta con información imperfecta)

motivo por el cual el jugador 2 actuará de forma independiente, es decir, buscará maximizar su pago sin saber que piensa el jugador 1, de la misma manera el jugador 1 tendrá que elegir de forma individual sin saber lo que pueda realizar el jugador 2 ya que debido a la falta de información este no tendrá un comportamiento seguro o dependiente de la acción del jugador 1, esto hace que este tipo de juegos se puedan considerar como estáticos . A continuación se muestra en la figura 4.4 la representación del juego en forma extensiva :

4.4

Figura 4.4.: Representación de un juego de forma extensiva con información imperfecta del ejemplo 2

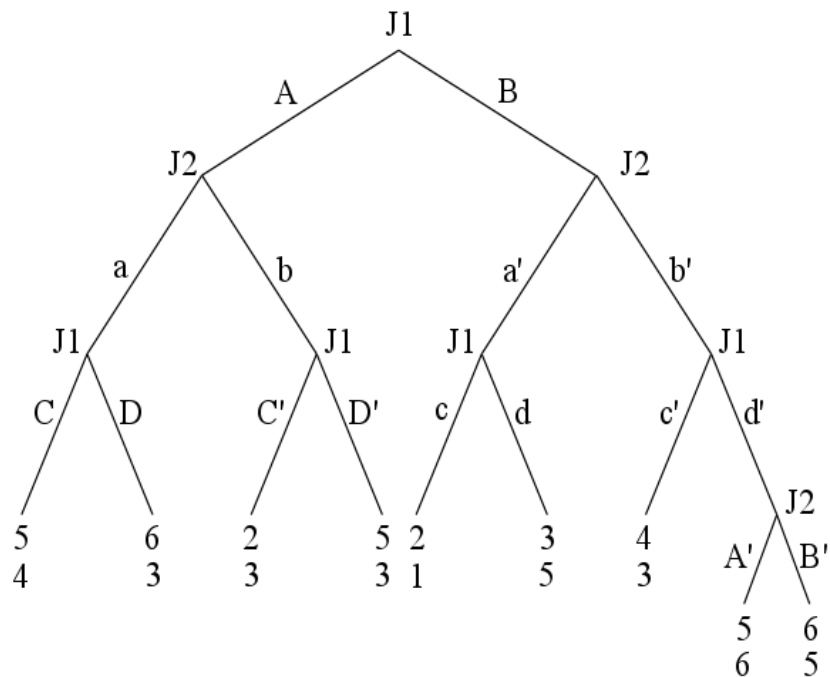


■

Se puede observar la dependencia de uno de los jugadores según la decisión del otro, ya que cualquier camino que se elije incurre en un resultado diferente. El objeto es llegar a un punto donde ambos jugadores maximicen sus utilidades sin empeorar la de los otros jugadores.

**4.6.2 Juegos de información completa** Los juegos de información completa son aquellos en los que se dispone de total información acerca de las reglas del juego, los pagos de cada participante y de los movimientos realizados por cada uno de los agentes, además de la secuencia temporal de los movimientos, es decir, se tiene acceso total a todo lo que se refiera al historial del juegos antes de que cada jugador lleve a cabo su estrategia como lo muestra la figura 4.5 (Para mas inforación remitirse al capítulo 4 de (Cerdá *et al.*, 2004)).

Figura 4.5.: Representación de un juego de forma extensiva con información completa



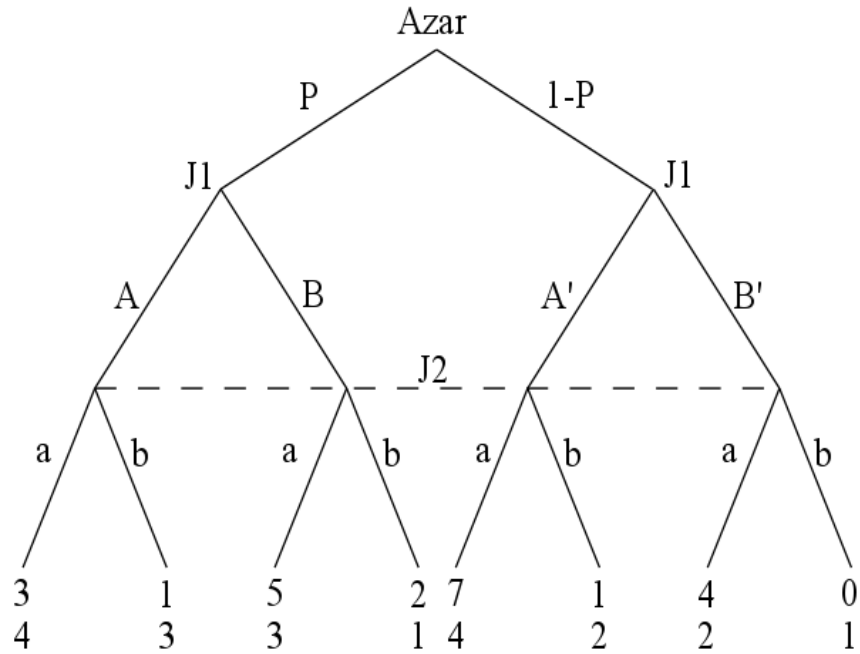
**4.6.3 Juegos de información incompleta** Los juegos anteriormente mencionados (información completa) son por decirlo así la excepción a la regla ya que contar con toda la información en un posible enfrentamiento entre empresas, vendedores, negocios, etc., es más bien casi imposible, normalmente este tipo de agentes no dejan al descubierto sus estrategias, por eso los juegos con información incompleta son la mejor manera de modelar los posibles casos que se pueden presentar en la vida real.

Estos juegos son aquellos en los que los jugadores tienen conocimiento acerca de la estructura y las características del juego, pero además de eso cuentan con ciertas informaciones privadas que pueden ser conocidas por algunos jugadores y desconocidas por otros, las cuales tienen influencia sobre los pagos o las utilidades del juego además de las acciones y los jugadores (Para más información remitirse al capítulo 5 de (Cerdá *et al.*, 2004)).

---

**4.6.4 Juegos bayesianos** Suelen ser de dos formas: dinámicos o estáticos y son una clase especial de juegos de información incompleta e imperfecta en los cuales las jugadas de azar se encuentran en un nodo de decisión no terminal. Debido a que dicha jugada no es conocida por todos los participantes (información asimétrica) este tipo de juegos se comportan de una manera especial (más compleja que lo visto hasta el momento). Sin embargo, el procedimiento de Harsanyi el cual consta de que cada jugador tiene una suposición probabilística de la posible información privada que puedan tener algunos de sus competidores (también llamados tipos) da una mayor percepción acerca del valor de los pagos finales, a esta jugada de azar de conocimiento público se le conoce también como probabilidad a priori. (Para más información remitirse al capítulo 5 de (Cerdá *et al.*, 2004)).

Figura 4.6.: Representación de un juego de forma extensiva con información incompleta e imperfecta

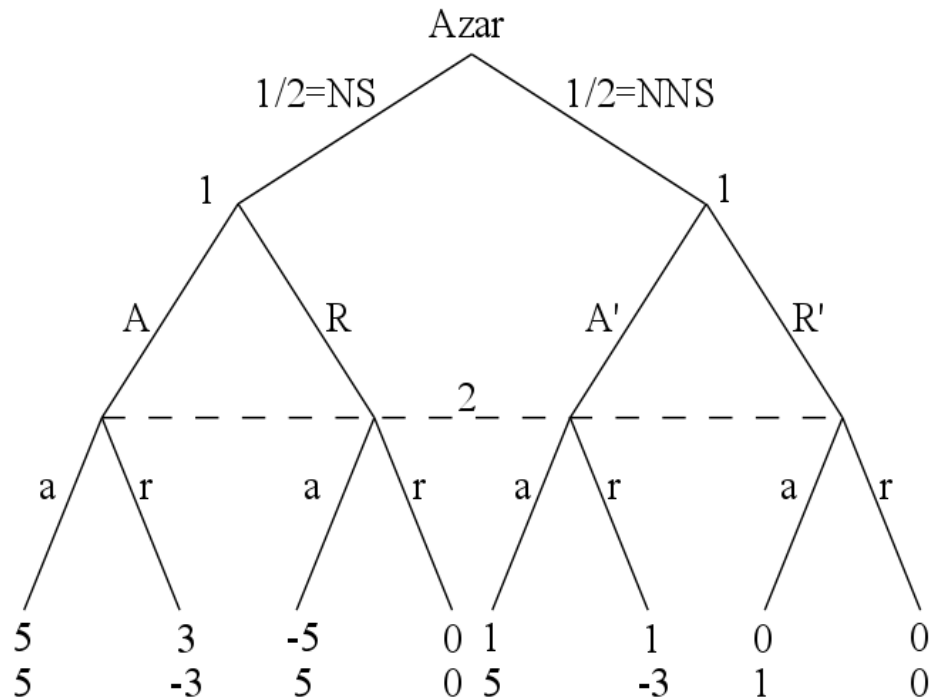


*Ejemplo 10.* ADJUDICACIÓN DE UN NUEVO PAQUETE DE ENERGÍA. En esta parte, se utilizará el ejemplo 2, pero se le harán los siguientes cambios: en este nuevo ejemplo el jugador 1 ( $J1$ ) contará con dos tipos: «necesita nuevo suministro de energía» (tipo 1 con probabilidad  $1/2$ ) y «no necesita nuevo suministro de energía» (tipo 2 con probabilidad  $1/2$ ), es decir, el jugador 2 no sabe con certeza si el jugador 1 ( $J1$ ) necesita o no el nuevo suministro de energía. Dicho esto, se aclara que el jugador 2 ( $J2$ ) se encuentra en desventaja ya que él es de un solo tipo «necesita nuevo suministro de energía» también conocido por el jugador 1 ( $J1$ ), Además, se debe tener en cuenta que las utilidades del jugador 2 ( $J2$ ) son dependientes del tipo del jugador 1 ( $J1$ ).

Como fue nombrado en el ejemplo 2, las posibles acciones de cada jugador son aceptar o rechazar los nuevos paquetes de energía. Se podrá observar en la figura 4.7 los pagos para cada jugador dependiendo de las combinaciones de estrategias que se presenten entre ellos. Es importante dejar claro que cuando los jugadores necesitan el nuevo suministro y su estrategia

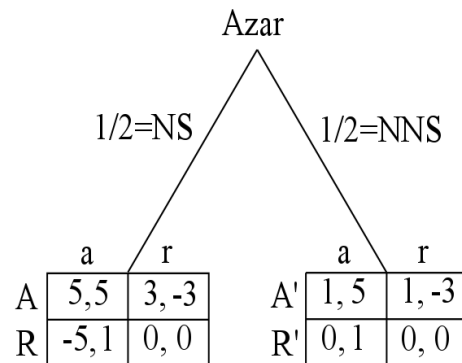
consiste en rechazar la oferta, los pagos son de 0, es decir, no son negativos ya que si ambos declinan a la oferta, se compensa la ausencia de los beneficios que le daría el nuevo paquete de energía con la bonificación dada por la empresa generadora. A continuación, se muestran el respectivo análisis para cada jugador :

Figura 4.7.: Representación del juego del ejemplo con información incompleta



*Análisis para el jugador 1 (empresa ladrillera)* El jugador 1 sabe donde está ubicado, es decir, sabe si necesita el nuevo suministro de energía o no lo necesita. Por lo tanto, su mejor respuesta puede escogerla analizando sus ganancias dependiendo del tipo en el cual se encuentre, tal como se ilustra en la figura 4.8:

Figura 4.8.: Representación del juego del ejemplo con información incompleta<sup>10</sup>



El análisis de la mejor respuesta que hace el jugador 1 acerca de él mismo es de la siguiente manera:

En el tipo NS del J1: si J2 elije «a» lo mejor para J1 es A, si J2 elije «r» lo mejor para J1 es «A». Con esto se puede deducir que para este conjunto de información A es una estrategia dominante para J1. Ahora, En el tipo N.N.S de J1: si J2 elije «a» lo mejor para J1 es A, si J2 elije «r» lo mejor para J1 es «A». De esta manera, se puede llegar a la conclusión que la estrategia A es estrictamente dominante en los dos tipo para el jugador 1.

*Análisis para el jugador 2 (empresa de cemento).* El jugador 2 no sabe cual es el tipo en el cual se encuentra el jugador 1, por lo tanto, su análisis debe ser a través de valores esperados como se muestra a continuación:

- Primero debe determinarse la cantidad de estrategias con las cuales el jugador 1 puede actuar (teniendo en cuenta que tiene dos tipos). A continuación se muestran los parámetros que determinan el número de estrategias utilizadas para el análisis del valor esperado del jugador 2.  $S = A^T$ ,  $S$  =Número de estrategias,  $A$  =Número de acciones,  $T$  =Número de conjuntos de información.

1.  $A = 2$ , las acciones son  $a_i = \text{aceptar, rechazar}$
2.  $T = 2$ , los tipos son  $t_i = NS, NNS$
3.  $i = 2$ , número de jugadores
4.  $S = 2^2 = 4$

Dado lo anterior, el número de estrategias de J1 son 4 (AA', AR', RA', RR').

- Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, se procede a hallar los valores esperados, esto consiste en determinar cuál es el valor que J2 espera dadas las posibles acciones que puede tomar el J1. A continuación se ilustrará el procedimiento para hallar dichos valores

1. J1 cuenta con las siguientes estrategias  $[a_1^1, a_1^2]$ : (A, A'), (A, R'), (R, A'), (R, R'). siendo  $a_1^1$  = acción de J1 en el tipo 1 (NS) ,  $a_1^2$  = acción de J1 en el tipo 2 (NNS)
2. J2 cuenta con las acciones  $(a_2^1) = (a), (r)$ . siendo  $a_2^1$  = acción de J2 en el tipo 1 (dado que J2 es de un solo tipo)
3. Para hallar el valor esperado de J2 dadas las posibles estrategias de J1, debe remitirse a la figura 4.8 y cumplir con la siguiente ecuación : siendo  $p(t_1)$  y  $p(t_2)$  el valor de la probabilidad de que J1 este en NS y NNS respectivamente.

A continuación en la ecuación 4.10 se muestra la utilidad esperada para el jugador 2:

$$U_2^e = p(t_1)u_2(a_1^1, a_2^1) + p(t_2)u_2(a_1^2, a_2^1) \quad (4.10)$$

A continuación en la ecuación 4.11 se muestra un ejemplo donde se calcula la utilidad esperada para el jugador dos para la estrategia (R, A') (r) utilizando la ecuación 4.10:

$$U_2^e = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times -3$$

$$U_2^e = -1,5 \quad (4.11)$$

TABLA 4.13.: Representación de la matriz de pagos esperados para el jugador 2

		E2	
		a	r
E1	AA'	5	-3
	AR'	3	-1.5
	RA'	3	-1.5
	RR'	1	0

El análisis de la mejor respuesta que hace el jugador 2 acerca de él mismo es de la siguiente manera:

si J1 elige «AA'» lo mejor para J2 es «a», si J1 elige «AR» lo mejor para J2 es «a», si J1 elige «RA'» lo mejor para J2 es «a», si J1 elige «RR'» lo mejor para J2 es «a». De esta manera, se puede decir que «a» es una estrategia estrictamente dominante sobre la estrategia «r» para J2. ■

Finalmente, los jugadores pueden tomar con certeza la elección de las estrategias (A, A') y (a) para J1 y J2 respectivamente. Debido a que en ambos análisis dichas combinaciones de estrategias arrojan una respuesta óptima, se dice que esta respuesta es un equilibrio bayesiano, dado que ambos maximizan sus utilidades utilizando estas estrategias y se denota de la siguiente manera: (A, A', a).

---

---

# SUBASTAS

---

Este capítulo introduce los conceptos básicos de subastas, con el fin de relacionarlos con la teoría de juegos. Esta sección está organizada de la siguiente manera: en la subsección 5.1 se define de manera general el concepto de subasta; en la subsección 5.2 se describe los tipos de subastas básicas; en la subsección 5.4.2 se plantea el modelo de referencia; finalmente, en las subsecciones 5.4 y 5.4.2 se explica el equilibrio bayesiano y el teorema del ingreso equivalente respectivamente, con el objetivo de brindar una solución a través de la teoría de juegos a una subasta. El desarrollo teórico ha sido adaptado en su mayoría de (Juez, 2003b; Cerdá *et al.*, 2004).

## 5.1 CONCEPTO DE SUBASTA

Una subasta es una venta o compra de un bien o servicio por medio de una competencia directa entre los interesados en otorgarlo o adquirirlo, es decir, si el subastador es el vendedor entonces los compradores realizarán sus pujas (propuestas) para obtener el producto. Ahora bien en caso de que el subastador sea el comprador los competidores o licitantes serán los vendedores quienes pasarán sus propuestas para que el comprador adquiriera los bienes o servicios que estos ofrecen. También se debe tener en cuenta que existen una clase especial de subastas llamadas subastas dobles en las cuales tanto los vendedores como los compradores presentan sus pujas al mismo tiempo con el fin de obtener un beneficio.

Las subastas básicas se dividen en dos grandes clases la primera de ellas es conocida como estáticas o de sobre cerrado (primer precio y segundo precio), la segunda de ellas es conocidas

como dinámicas dentro de las cuales se encuentran la ascendente (Inglesa) y la descendente (Holandesa).

En cualquiera de estas cuatro subastas pueden existir diferentes tipos de normas como por ejemplo un precio mínimo o un tiempo fijo para presentar las pujas (Juez, 2003b).

## 5.2 TIPOS DE SUBASTA

A continuación se definen los tipos básicos de subastas según sus reglas y el número de unidades a subastar en las subsubsecciones 5.2.1 y 5.2.2 respectivamente. Para mayor información remitirse al libro de (Juez, 2003a).

---

### 5.2.1 Según sus reglas

**Subasta inglesa o ascendente** En este tipo de subasta las valoraciones son públicas. El subastador propone un valor mínimo del bien, de ahí en adelante los competidores (Postores) comienzan a presentar sus ofertas. Los precios u ofertas comienzan a subir de valor tanto como los licitantes tengan la capacidad de ofertar. El ganador es aquel que llegue a una valoración tan alta que solo él pueda o esté dispuesto a suplirla. Este valor pico puede ser modificado en un determinado periodo, es decir, cuando un pujador desea sobrepasar la oferta más alta propuesta por alguno de sus posibles rivales este debe hacerlo en un tiempo límite según haya sido estipulado por el subastador, de lo contrario la apuesta la ganara el licitante que haya realizado la puja más alta con anterioridad dentro del tiempo reglamentario.

**Subasta holandesa o descendente** Este tipo de subasta es inversa a la anterior nombrada, es decir, la subasta holandesa también es de conocimiento público pero a diferencia de la inglesa, está coloca un precio máximo por el bien o servicio subastado y va disminuyendo este valor hasta que alguno de los participantes esté dispuesto a pagar la oferta hecha por el subastador.

**Subasta en sobre cerrado al primer precio** La idea principal de esta subasta es que los participantes pongan en un sobre cerrado la valoración que cada uno de ellos está dispuesto a

pagar por el objeto en cuestión, estos deben tener en cuenta que solo tendrán una oportunidad para ofertar es decir solo presentaran las propuestas una vez. Se abren los sobres y el bien se le adjudicara al mejor postor el cual tendrá que pagar el valor de la puja que este mismo ha propuesto es decir con la cual ha ganado.

**Subasta en sobre cerrado al segundo precio o subasta de Vickrey** En esta subasta al igual que en la del primer precio los participantes también deben poner en un sobre cerrado sus pujas acerca del bien subastado, es decir, tendrán solo una oportunidad de ofertar y ganará el licitante que sea el mejor postor con la diferencia de que este ya no pagara un valor igual a su puja propuesta (la ganadora) si no a la segunda mayor presentada a lo largo de la subasta. En este caso los participantes al tener presente las reglas de la subasta sabrán que sus propuestas solo cumplirán la acción de escoger el ganador y no influirá en el precio que deberán pagar.

---

**5.2.2 Según el número de unidades** Este tipo de subastas suelen ser un caso especial de las anteriores con la única diferencia de que se ofertan múltiples unidades a múltiples competidores, estas unidades en muchas ocasiones hacen parte de un mismo bien o de bienes independientes los cuales pueden ser homogéneos o no. Además de esto se debe tener en cuenta que se pueden presentar empates entre los participantes ganadores que estén presentando pujas por las unidades subastadas, entonces deben existir cierto tipo de reglas o de formas de evaluación propuestas para finalmente determinar cuál o cuáles serán los ganadores (Juez, 2003b).

A continuación se mostrarán dos tipos de subastas con multiples unidades. La subastas discriminatorias y con precio uniforme hacen parte de esta clasificación ya que  $N$  unidades son cedidas a  $N$  pujadores que cumplan los requisitos de la subasta, es decir, los participantes que cumplan con las pautas para ganar la subasta, serán acreedores del objeto subastado.

**Subasta discriminatoria** Es un tipo especial de subastas de múltiples unidades la cual será equivalente a la subasta al primer precio ya que las  $N$  unidades se adjudicaran a los  $N$  participantes que hayan presentado las pujas más altas y cada uno pagará el valor de su puja (propuesta) presentada.

**Subasta con precio uniforme** Este tipo de subasta de múltiples unidades es equivalente a una subasta de segundo precio ya que las  $N$  pujas mayores determinaran los  $N$  participantes ganadores pero todos ellos pagaran el mismo precio el cual tendrá el valor de la puja más alta de las rechazadas. Es importante que el valor de las  $N$  unidades subastadas se determine así ya que de esa manera el precio pagado será independiente del presentado por los  $N$  participantes ganadores manteniendo la estructura de la subasta al segundo precio.

### 5.3 RELACIÓN SUBASTAS Y TEORÍA DE JUEGOS

Los primeros estudios realizados en las subastas revelaron que si las pujas de los competidores eran de tipo sobre cerrado se hacía imposible saber con certeza cuál de ellos podría ser el ganador o el mas oicionado a ganarlo antes de abrir dichos sobres, por lo cual ninguno de los participantes contaba con algún tipo de estrategia para poder presentar ofertas que les pudieran dar una mayor probabilidad de obtener el bien subastado. Por ello Milton Friedman propuso una formula (Ecuación 5.1) para determinar las pujas más optimas en una subasta de sobre cerrado al primer precio (Juez, 2003b).

$$U^e = (V - b)P(b) \quad (5.1)$$

La anterior formula muestra que la valoración que el pujador le da al bien subastado  $V$  menos el valor de la puja o propuesta que presenta para obtenerlo  $b$ , es a lo cual se le conoce como el beneficio; ahora bien esto multiplicado con la probabilidad de que la puja presentada por cierto jugador sea la ganadora  $P(b)$  es a lo que se le llama valor esperado  $U^e$ .

La dificultad de esto radica en encontrar la probabilidad de que la puja presentada sea la ganadora. Para ello Milton Friedman propuso que se debía observar el comportamiento de los competidores en anteriores subastas para estimar la distribución que podría llegar a tener la presentación de pujas para cada uno de ellos, en cuyo caso  $P(b)$  sería la multiplicación de las probabilidades de derrotar a dichos competidores.

Es necesario tener en cuenta que el anterior análisis es únicamente valido en caso de que exista un único agente estratégico y asumiendo que el comportamiento de sus competidores está dado por lo hecho en subastas anteriores. Ahora bien si se presume que todos los competidores tienen un comportamiento racional entonces se tendrían que analizar las estrategias que puedan dar un concepto de equilibrio, es en este momento en el cual se hace tan importante la teoría de juegos, y en cuyo caso el valor esperado mostrado anteriormente ya no

sería el óptimo por lo cual se tendría que ir a analizar lo que podría pasar en una subasta de competidores estratégicos (Juez, 2003b).

Ahora, Existen otros casos la teoría de juegos donde se dá un nuevo enfoque y una solución, planteando el hecho de que el bienestar de cada uno de los competidores depende de las estrategias que puedan tomar ellos mismos y los demás buscando de esta manera que la estrategia óptima para que cada uno de ellos presente un equilibrio, es decir, que dependa no solo de sus acciones si no de las que puedan llegar a tomar los demás participantes, estas últimas estarán representadas en la mayoría de los casos por distribuciones de probabilidad.

Las subastas en este proyecto en particular, se caracterizan por no tener información acerca de los demas jugadores, por lo tanto se necesita una herramienta que permita a los participantes buscar la forma de predecir el comportamiento y las posibles respuestas de los demas participantes. Dado que se cuenta con información incompleta, se remite al procedimiento del equilibrio bayesiano donde los jugadores no disponen de suficiente información entonces consideran a priori las formas en cómo podrían reaccionar los demás participantes y luego así llegar a una respuesta óptima. También se deja claro que el diseño de la subasta se hará a través del uso del modelo de referencia, que garantiza la restricción de ciertas acciones de los participantes para acotar el estudio de manera que se cumpla el objetivo inicial que es demostrar la aplicación del estudio de la teoría de juegos a una subasta en una micro-red (en secciones posteriores se explicará el objetivo del uso del modelo de referencia) (Juez, 2003b).

Para facilitar los cálculos y tener unas pautas básicas para modelar la subasta en una herramienta genérica (Python), se aplicó el modelo de referencia que es una guía para determinar las pujas de una manera racional y a través de un modelo matemático. A continuación se hace una breve descripción de los tipos de subastas analizadas por la teoría de juegos.

---

**5.3.1 Subastas dinámicas** Son aquellas en las cuales los jugadores (pujadores) presentan una cadena temporal de movimientos, es decir, ofertan de manera sucesiva uno después del otro teniendo en cuenta que un mismo participante puede realizar diferentes acciones (presentar pujas) en distintas etapas de un juego.

---

**5.3.2 Subastas estáticas** Son aquellas en las cuales los jugadores deberán realizar sus acciones (presentar sus pujas) al mismo tiempo, esto último es similar a que los jugadores

presenten sus propuestas en tiempos diferentes pero que ninguno sepa que oferta realizó su competencia hasta el momento en el que se define el ganador, un ejemplo de ello son las subastas de sobre cerrado las cuales se pueden presentar por distintos licitantes en tiempos diferentes pero llevando a cabo la apertura de los sobres de una manera simultánea a la hora de elegir el ganador.

---

**5.3.3 Subastas con información imperfecta** Los juegos con información imperfecta son aquellos en los que ninguno o solo algunos de los competidores tienen un conocimiento exacto de que movimientos o acciones han realizado sus rivales, este tipo de juegos se puede modelar como juegos estáticos (subastas de sobre cerrado). Además como se verá posteriormente si se le agrega el hecho de que no conozcan la naturaleza o el tipo de los demás licitantes (de información incompleta), a este tipo especial de juegos se les denomina juegos bayesianos (de información incompleta e imperfecta).

---

**5.3.4 Subastas estáticas con información completa** Las subastas con información completa hacen referencia a que las utilidades de cada uno de los jugadores son de conocimiento común, es decir, que cada participante conoce las funciones de pago de cada uno de sus rivales y a su vez cada uno de ellos sabe que todos cuentan con este tipo de información. Debido a que las funciones de pago dependen de como valoren el bien subastado cada uno de los competidores y de acuerdo con el hecho de que estas funciones son de dominio público, entonces se puede afirmar que todos los jugadores conocen la forma en la que sus oponentes valoran dicho bien, en otras palabras, sería la cantidad máxima que están dispuestos o que pueden pagar sin obtener una utilidad negativa, todos los ofertantes sabrán con certeza las cantidades máximas que sus rivales están dispuestos a dar por el bien que se está subastando.

La teoría de juegos introduce a este tipo de subastas lo que se conoce como el Equilibrio de Nash el cual básicamente está formado por un grupo de estrategias las cuales cumplen con la condición de que para cada uno de los participantes su propia estrategia (la estrategia que se determina por medio del equilibrio de Nash) le da su mejor utilidad, teniendo en cuenta las acciones tomadas por los demás. De esta manera ningún jugador desea desviarse de la estrategia que está tomando ya que esta representa a su mejor pago esperado (Cerdá *et al.*, 2004).

**Subastas al segundo precio en sobre cerrado** El desarrollo temporal para este tipo de subastas se puede representar en teoría de juegos de la siguiente manera:

1. Los compradores presentan sus respectivas pujas en un sobre cerrado las cuales como se especificó con anterioridad se abrirán al mismo tiempo para determinar el ganador y además de eso la mejor puja recibe el bien subastado pero pagara el precio de la segunda oferta más alta presentada en la subasta.
2. Los jugadores realizan sus acciones al mismo tiempo y los pagos de cada uno de los jugadores estarán en función de las acciones tomadas por todos los participantes.

La función de ganancias  $u_i$  de un determinado jugador  $i$  será representada por el valor que tiene para él el bien subastado  $V_i$  menos lo que está dispuesto a pagar por el (su puja)  $b_i$ , a modo de ejemplo y para una subasta al segundo precio si se asume que solo existen dos jugadores, entonces se tendría la utilidad esperada de la subasta como lo muestra la ecuación:

$$U^e = \begin{cases} V_i - b_j & b_i > b_j \\ 0 & b_i < b_j \\ \frac{1}{2}(V_i - b_j) & b_i = b_j \end{cases} \quad (5.2)$$

En el caso que se representa en la ecuación 5.2 (para dos agentes) si el jugador  $i$  logra ganar entonces este pagará  $b_j$ , es decir, el precio que su contrincante ( $j$ ) ofertó debido a que por supuesto es más bajo que la puja presentada por él. Entonces la estrategia dominante consiste en que cada uno de los participantes diga la “verdad” acerca de cuanto realmente están dispuestos a pagar por el bien ofertado. Otra forma de ver esto se da cuando ellos presenta una puja  $b$  menor a  $V$  (máxima valoración del bien) entonces el jugador está disminuyendo sus probabilidades de ganar y aun así, si este lograra ganar, no podría rebajar el precio que tendría que pagar, este valor dependería únicamente del rival que más cerca estuvo de ganarle ósea de la segunda puja más alta presentada en la subasta.

Por lo tanto la estrategia de presentar una puja igual a su máxima valoración del bien subastado se representa como una estrategia debilmente dominante para cada jugador ya que si aumenta o disminuye su puja los resultados pueden ser menores o iguales pero nunca superiores a los obtenidos con la maxima valoración.

Como se puede observar en este tipo de subastas (al segundo precio o subasta Vickrey) los jugadores adoptan estrategias dominantes, es decir, debido a que lo máximo que ellos pueden

ofertar sin recibir pagos negativos dado el caso de ganar es su máxima valoración por el bien subastado  $V_i$ , entonces ellos toman como estrategia que la puja presentada  $b_i$  sea igual a  $V_i$  ya que como se sabe si el jugador llegase a ganar no pagaría el valor de su puja ( $b_i$ ) sino la segunda puja más alta presentada en la subasta (por supuesto en caso de subastas al segundo precio) dándole de esta manera una utilidad siempre positiva y además acotando su máximo valor lo cual no le permitiría de ninguna manera obtener resultados negativos en caso de ser el ganador –para más información, remitirse al capítulo 5.4 de (Cerdá *et al.*, 2004)–.

---

*Ejemplo 11.* SUBASTA DE ENERGÍA AL SEGUNDO PRECIO. Una empresa generadora decide subastar 100 kWh de energía entre dos posibles oferentes, los cuales serán un parque de atracciones (carga 1) y una ensambladora de automóviles (carga 2), se debe tener en cuenta que las valoraciones reales que estas tienen acerca de la energía subastada serán de \$456960 por hora para la carga 1 y de \$571200 por hora para la carga número 2.

En este las cargas optan por presentar su puja como el valor que tiene su máxima valoración es decir  $b_1 = \$ 456960$  y  $b_2 = \$ 571200$ . Dado que  $b_1 < b_2$  la ganancia esperada por la carga 1 es de 0 debido a que su puja es menor a la presentada por la carga 2. Mientras, la carga 2 tiene una ganancia determinada por  $V_2 - b_1 = 571200 - 456960 = 114240$ . ■

En conclusión, la carga 2 a ganado dado que la puja de la carga 1 es inferior. En el caso en que la puja hubiera sido igual las ganancias serían divididas y por lo tanto serían menores para cada jugador.

---

**Subastas al primer precio en sobre cerrado** Al igual que en la subasta de sobre cerrado al segundo precio el ganador es determinado por la mayor puja presentada entre los participantes, es decir, el desarrollo temporal es muy similar la única diferencia es que en este caso el pago que debe hacer el ganador es el mismo que presento en su puja la cual es la más alta de todas como se muestra en la ecuación 5.3:

$$U^i = \begin{cases} V_i - b_i & b_i > b_j \\ 0 & b_i < b_j \\ \frac{1}{2}(V_i - b_i) & b_i = b_j \end{cases} \quad (5.3)$$

De esta forma presentar una puja igual a su máxima valoración ya no representara una estrategia óptima para los jugadores debido a que en caso de ganar estos, a pesar de obtener el bien subastado recibirán un pago de cero ( $V_i - b_i = 0$ ) teniendo en cuenta que  $b_i = V_i$  donde  $V_i$  = máxima valoración del jugador  $i$ . Una posible estrategia óptima para este tipo de subasta es que los jugadores decidan realizar su puja por debajo de su valoración real ( $V_i$ ) es decir  $b_i = V_i - x$ , en la cual en caso de que el jugador  $i$  llegase a ser el ganador además de obtener el premio recibiría un pago de  $x$ , convirtiéndola en una estrategia débilmente dominante con respecto a la de presentar una puja igual a su máxima valoración ( $b_i = V_i$ ) ya que en el peor de los casos (perder) le daría el mismo pago (cero), ahora en el mejor de los casos (ganar) le adjudicaría un pago diferente de cero, igualmente si llegara a empatar con alguno de los competidores ( $b_i = b_j$ ) su pago aunque menor al esperado por ganar seguirá siendo diferente de cero.

Como se ha podido observar en este caso es imposible declarar una combinación exacta de estrategias de equilibrio, es decir, la única fórmula segura es aplicara el concepto de equilibrio de Nash a cada uno de los juegos y determinar de esta manera las acciones más adecuadas para los mismos.

---

*Ejemplo 12.* SUBASTA DE ENERGÍA EN PRIMER PRECIO CON INFORMACIÓN COMPLETA. Para esta subasta la mejor opción que tienen las cargas es la de presentar una puja por debajo de su valoración real, esto con el fin de obtener una ganancia positiva. En este caso, se asume que las cargas disminuirán su puja en un 10 % es decir  $b_1 = 456960 - 45696 = \$411264$  y  $b_2 = 571200 - 57120 = \$514080$ . La carga 2 será la ganadora debido a que  $b_2 > b_1$  y tendrá una ganancia de  $\$57120$ . ■

En conclusión, dado que ambos jugadores saben como limitar el valor de su puja real para lograr obtener una ganancia, se puede observar que se mantiene el hecho de que el jugador con la mayor valoración será quién obtenga el producto energético.

**5.3.5 Subastas con información incompleta** Como se ha visto en subastas con información completa las máximas valoraciones de los posibles bienes subastados hechas por los compradores son de conocimiento público en ese caso y si el vendedor es un poquito racional no tendría sentido plantear una subasta ya que él podría negociar directamente con el pujador que más oferta y llegar a un acuerdo por un precio tal vez un poco menor o incluso igual al máximo que el licitante esté dispuesto a pagar por el bien. La idea de realizar una subasta recae en la falta de conocimiento de los vendedores acerca de las valoraciones que los jugadores tengan sobre el bien, es decir, el vendedor trata de extraer el máximo precio que los ofertantes puedan dar en la subasta sin saber con certeza que piensan estos acerca del bien o cuanto estén dispuestos a dar por él.

Debido a que en las subastas de información incompleta las valoraciones de los jugadores hacia los bienes subastados son privadas implica que las ganancias de los jugadores tampoco son de dominio público. Para un tipo especial de subastas (de sobre cerrado) la falta de información además de la incertidumbre de las valoraciones de los jugadores a cerca del bien subastado las convierte en lo que más adelante se conocerá como juegos bayesianos.

En cada uno de los juegos los participantes pueden tener en cuenta para su análisis el número de competidores, el tipo de juego (subasta), su valoración (la del bien subastado) e incluso deberán pensar acerca de cómo sus rivales pueden valorar ese bien y sobre como realizaran ofertas en función de esas valoraciones, además de analizar lo que posiblemente estos esperan deducir de cómo el mismo va a pujar. Lo anterior puede llegar a ser muy complicado y tedioso, sin embargo gracias a la propuesta de Harsanyi en la cual propone que a los juegos de información incompleta se les añada una jugada ficticia “azar” con cierta probabilidad hace que este análisis sea mucho más fácil, ya que la función de distribución de probabilidad si podrá ser conocida por cada uno de los rivales, es decir, cada jugador sabara con certeza de su propia valoración por el bien subastado (su tipo) y tendrá una función de probabilidad acerca de cuáles pueden ser las valoraciones que sus rivales le den a este bien (tipo de los demás participantes), las cuales serán de dominio público, una propuesta interesante radica en el hecho de todos los participantes tengan el mismo conocimiento en cuanto a las probabilidades de los movimientos realizados por la naturaleza.

El desarrollo temporal para este tipo de subastas se puede presentar en teoría de juegos de

la siguiente manera:

1. La naturaleza le da a cada pujador una valoración del bien subastado (conocido por él pero no por los demás) que se deriva de una variable aleatoria de una función de probabilidad de dominio público (la cual se distribuye en un determinado intervalo  $V_{min}, V_{max}$ ), una vez dado esto los compradores presentan sus ofertas, por último el ganador recibe el bien y paga el precio acordado por las normas de la subasta.
2. La naturaleza "azar" le da a cada jugador el tipo al cual va a pertenecer, este es conocido por él pero no por sus rivales, los jugadores realizan sus acciones de acuerdo a su tipo y a la distribución de probabilidades que tienen acerca del tipo de los otros competidores, cada uno de ellos recibirá el pago el cual se encuentra asociado a su tipo y a las estrategias tanto de ellos mismos como de los demás.

Como ya se ha reconocido con anterioridad en teoría de juegos una estrategia es una acción o conjunto de acciones tomadas por un jugador con el fin de obtener un pago o utilidad, en el caso de las subastas las posibles acciones de cada jugador se refieren a las pujas presentadas por cada uno de los ofertantes. Sin embargo, en las subastas con información incompleta una estrategia representaría una acción para cada uno de los posibles tipos que el jugador podría llegar a tener, es decir, sería una determinada oferta para cada una de las valoraciones que el agente le haya podido dar al bien subastado, en este caso la estrategia no podría ser una única puja  $b_i$  si no que estaría formada por una función en la cual la acción depende de la valoración  $b_i = B_i(v_i)$ , una vez el jugador conozca su valoración (tipo) y dada esta función de puja él conocerá su posible estrategia.

Cuando un jugador está analizando cuál es su puja o acción óptima (la que le da el mejor resultado) necesita tener muy en cuenta las posibles propuestas presentadas por los demás, las cuales dependerán básicamente de la función de densidad de probabilidad con la cual se espera que estos puedan valorar el bien subastado, igual mente cada uno de los competidores calculara su mejor acción en base a una predicción de cómo se comportan el resto de los participantes del juego (para que un jugador pueda intuir acerca del comportamiento que los demás puedan tener el necesita reconoce como ellos analizan el comportamiento que el mismo pueda tener de acuerdo a la distribución de su valoración). En base a lo anterior el equilibrio bayesiano de Nash estará compuesto por un conjunto de estrategias las cuales son las mejores respuestas a las estrategias de sus contrincantes, es decir, ningún jugador estaría dispuesto a cambiar de estrategia ya que esta le representa la mayor utilidad sin importar que hagan los

demás (Juez, 2003a).

## 5.4 RELACIÓN SUBASTAS Y JUEGOS BAYESIANOS

Dado que el propósito del proyecto está en el diseño de una subasta aplicada a una micro-red, es necesario saber cómo es posible encontrar una estrategia óptima en este procedimiento. El equilibrio bayesiano es una respuesta encontrada en juegos de información incompleta, por lo tanto, encaja directamente con la subasta de sobre cerrado ya que se desconoce información de los jugadores. A continuación en las subsecciones 5.4.1 y 5.4.2 se describirá una subasta modelandola como un juego bayesiano y se explicará la función del modelo de referencia en este proyecto respectivamente.

---

**5.4.1 Descripción del juego** La estructura de una subasta puede modelarse directamente como un juego bayesiano. Los elementos básicos que definen una subasta se relacionan con los componentes necesarios para realizar el juego bayesiano de la siguiente manera: los pujadores son lo mismos jugadores, las pujas de cada participante equivalen a las acciones, y las probabilidades con las cuales cada agente de la subasta puede arrojar su puja se interpreta como los tipos. A continuación en los ejemplos 13 y 14 se muestra esta relación.

---

*Ejemplo 13.* SUBASTA DE ENERGÍA AL SEGUNDO PRECIO. En el ejemplo 11 se tiene:

*Jugadores:* Carga 1, Carga 2.

*Acciones:* 456960 (Puja de la carga 1) , 571200 (Puja de la carga 2).

*Tipos:* 1, Para ambos jugadores. ■

Puede observarse que los pujadores representan los agentes del juego bayesiano, las acciones (privadas) son las valoraciones reales y juegan con una probabilidad del 100 %. Los tipos pueden ser diferentes para cada jugador.

---

*Ejemplo 14.* SUBASTA DE ENERGÍA AL PRIMER PRECIO. Se retoma el ejemplo 12, pero

se realizan unos cambios tales como: cada jugador tiene dos acciones, [456960, 411264] para el pujador 1 y [571200, 514080] para el pujador 2, con probabilidad [0.5, 0.5] para ambos participantes.

Jugadores: Carga 1, Carga 2.

Acciones (carga 1): [456960, 411264].

Acciones (carga 2): [571200, 514080].

Tipos: [0.5, 0.5], Para ambos jugadores. ■

Puede observarse la relación directa de los componentes de una subasta de primer precio y un juego bayesiano. Los tipos pueden ser diferentes para cada jugador.

---

**5.4.2 Modelo de referencia** El modelo de referencia es uno de los modelos de la teoría de las subastas donde la información de los jugadores no es de dominio público. La importancia de este modelo radica en que facilita el estudio de una óptima estrategia en un juego, permitiendo a los participantes analizar cómo podrían reaccionar los demás participantes para obtener una solución (Cerdá *et al.*, 2004). Los principales supuestos que lo definen serán los siguientes

*Valoraciones independientes privadas:* Este supuesto indica que cada jugador (individualmente) es el único que conoce con certeza en cuanto el mismo valora el bien subastado, además las variables aleatorias de las que se deriva la valoración hecha por cada uno de los jugadores son independientes y no tienen ningún tipo de correlación o paralelismo, es decir, ningún jugador puede sacar de su propia valoración algún tipo de información sobre las valoraciones que puedan tener los demás.

*Compradores simétricos:* Esto se refiere a que la distribución de probabilidad con la cual se asume que los jugadores pueden valorar el bien es la misma para cada uno de los participantes, es decir, antes de realizar la subasta el vendedor percibirá de igual manera a todos los compradores.

*Compradores neutrales al riesgo:* Esto indica que si los jugadores logran maximizar su utilidad esperada también logran maximizar sus ganancias.

*Los pagos son función únicamente de las pujas:* En este caso se asume que los únicos que pueden ganar la subasta son los jugadores que están presentando las pujas y que los pagos de esta deben darse de acuerdo a lo ofrecido por el ganador sin incluir posibles acuerdos posteriores a la subasta (algún tipo de ingreso al vendedor de producción del bien subastado) un ejemplo de esto sería nivel de petróleo extraído en el caso de una subasta de extracción. No pueden existir acuerdos pactados entre los jugadores dentro de la subasta por lo cual se puede asumir que se comportan de forma no cooperativa, el número de jugadores al igual que la distribución de probabilidad de la valoración del bien por parte de cada uno de ellos y las actitudes hacia el riesgo son de conocimiento público.

Cumplir con el modelo de referencia trae como consecuencia lo que es llamado «El Teorema del Ingreso Equivalente». Este teorema se puede resumir de la siguiente manera: ninguna de las subastas presentadas en la sección 5.2.1 representan un peligro para el vendedor, de hecho, cualquiera de las cuatro subastas le dará al vendedor el mismo ingreso esperado. En consecuencia, este teorema indica que no se necesitan reglas complejas para garantizar los ingresos del vendedor. La demostración de esta poderosa herramienta puede consultarse en (Juez, 2003a). A continuación en la ecuación 5.4 se muestra la ganancia del vendedor.

$$n \int_{v^m}^{\bar{v}} (vF'(v) + F(v) - 1) F(v)^{n-1} \quad (5.4)$$

## 5.5 APLICACIÓN EN SUBASTAS DE SOBRE CERRADO.

A continuación se muestra la aplicación de un juego bayesiano en subastas de sobre cerrado a través del modelo de referencia. Las subastas de interés son la subasta de primer y segundo precio, esto porque se acoplan con mayor precisión a la idea de la privacidad de la valoración. A continuación en las subsecciones 5.5.1 y 5.5.2 se presentan los respectivos desarrollos teóricos.

---

**5.5.1 Subasta con información incompleta de sobre cerrado al segundo precio** En este apartado se tendrá en cuenta que la mejor puja la cual es débilmente dominante para

cada uno de los jugadores, consiste en decir “la verdad” (presentar una puja igual a la máxima valoración que cada licitante tenga sobre el bien subastado), esto finalmente recaerá en que el equilibrio del juego estará compuesto por estrategias débil mente dominantes ya que cada ofertante pujaría con su valoración real. Al igual que lo presentado en la subasta de sobre cerrado al segundo precio con información completa el precio a pagar por el ganador será independiente de la puja que este mismo presente y además el hecho de presentar una puja por debajo o por encima de la valoración máxima que tenga del bien subastado jamás llegara a representarle mejores utilidades que decir “la verdad” ya que en caso de que el jugador presentara una puja menor además de disminuir sus probabilidades de ganar tendría que pagar el mismo valor (en caso de salir victorioso) que si hubiese presentado la máxima valoración. .Ahora, en caso de presentar una puja por encima de su máxima valoración aunque aumentado sus probabilidades de ganar esta podría llegar a representarle utilidades negativas (dado que la segunda valoración mas alta este por en sima de su máxima valoración), es decir, en todo caso los pagos serian menor o iguales pero nunca mayores a los que representa el decir la “verdad”.

Según lo expuesto anteriormente la estrategia de que los jugadores presenten sus pujas por el valor de sus máximas valoraciones no solo da un una estrategia débilmente dominante sino que es la única que real mente vale la pena jugar, por lo tanto el Equilibrio Bayesiano de Nash de este tipo de juegos se mostrará a continuación en la ecuación 5.5:

$$b_i = B_i(v_i) = v_i, \forall v_i, i = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

Lo cual significa que los jugadores deberán presentar un valor de  $v_i$  (su máxima valoración) como su puja  $b_i$  , dado que su mejor estrategia  $B_i$  será decir la verdad (igual a su máxima valoración).

Donde  $N$  representa el número total de licitantes ( Esto se demuestra en el teorema 5.5 de (Cerdá *et al.*, 2004) ).

Las ventajas de este tipo de subastas radican en que sin importar lo que los demás participantes hagan (cambien sus acciones) la estrategia de presentar la puja por el valor de la máxima valoración mantiene su condición intacta es decir siempre es la estrategia débilmente dominante (la mejor) para el ofertante, además de esto se simplifica el análisis de la puja presentada ya que el jugador no tendrá que preocupase por cuál será la estrategia de los demás, el solo tener certeza de su propia valoración bastara para determinar su puja óptima (Para

mayor información, remitirse al teorema 5.5 de (Cerdá *et al.*, 2004)).

Sin embargo, este tipo de subasta es de poco uso debido a que es muy posible que el vendedor introduzca una puja ficticia menor a la del ganador pero mayor a la segunda valoración más alta con el fin de disminuir la utilidad positiva que pueda llegar a tener el que presente la mejor oferta, en otras palabras el vendedor puede tratar de colocar un valor muy cercano al que está presentando el ofertante con mayor probabilidad de triunfo, el cual se espera que sea la máxima valoración que éste le da al bien “la verdad”, para tratar de extraer el mayor pago posible (en caso de subastas de sobre cerrado el vendedor puede basarse en las posibles distribuciones de probabilidad para poder intuir el comportamiento de cada uno de los jugadores y presentar una probable oferta ficticia). Si esto sucede de la forma anterior o mejor dicho si los ofertantes llegasen a sospechar de la fiabilidad del vendedor estos podrían presentar en realidad pujas por debajo de su máxima valoración y si el vendedor llegase a comportarse honestamente el resultado sería que los ingresos esperados serían menores a los de una subasta ascendente.

Por otra parte también se presentan fallos debido a lo celosos que pueden ser algunos de los compradores para revelar sus verdaderas valoraciones (recordando que algunas subastas no son para vender si no para comprar en cuyo caso los pujadores serían los vendedores), en este tipo de casos las ofertas podrían llegar a revelar los costos de producción o importante información sobre la tecnología de la que disponen las empresas lo cual hace parte de una información muy sensible para las mismas e incluso haría que terceros con los que la empresa tenga que negociar obtengan algún tipo de información que pueda darles alguna ventaja en negociaciones futuras. Es por esto que los ofertantes pueden llegar a tener incentivos para proteger su información sensible por lo cual presentarían sus pujas por debajo de la valoración, esto provocaría que los ingresos sean inferiores a los de una subasta de primer precio.

*Ejemplo 15.* SUBASTA DE ENERGÍA EN SEGUNDO PRECIO PARA DOS EMPRESAS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA: Al igual que en la subasta de sobre cerrado con información completa las cargas optan por presentar sus pujas como el precio que tienen sus máximas valoraciones ya que no les interesa conocer las posibles valoraciones de los demás, debido a que su estrategia se basa en concentrarse en su propia valoración. Por lo tanto se pudo analizar que  $b_1=456960\$/h$  (puja de la carga 1) y  $b_2=571200\$/h$  (puja de la carga 2) y como  $b_1 < b_2$  la ganancia esperada por la carga 1 es de cero debido a que su puja es menor que la de la carga 2, mientras que para la carga 2 la ganancia estará determinada por  $V_2 - V_1 = 571200 - 456960 = 114240$ . ■

En conclusión, no hay diferencia entre subasta de segundo precio con información completa e incompleta ya que este estudio no se basa en la cantidad de información disponible acerca de los demás jugadores debido a que la respuesta depende de la propia valoración de cada jugador y no del tipo de información.

---

**5.5.2 Subasta con información incompleta de sobre cerrado al primer precio** Este tipo de subastas a diferencia de las de segundo precio conllevan un gran problema para realizar un análisis directo a cerca de cuáles podrían ser sus mejores estrategias o de cuál podría ser su equilibrio bayesiano, es decir, no se pueden simplemente analizar como las de segundo precio ya que el presentar una puja igual a su valoración aunque aumentaría sus probabilidades de ganar disminuiría al mismo tiempo las utilidades esperadas ya que el pago que el ganador tendría que hacer sería igual al de su máxima valoración. Es por esto que el representar el equilibrio bayesiano para este tipo de subastas es un poco más tedioso dado que cada uno de los licitantes tendrá que analizar el posible comportamiento de sus competidores (sabiendo que no va a ser simplemente el de pujar su máxima valoración) para poder tomar una decisión.

Para este tipo de subastas la mejor respuesta radica en que los jugadores deben analizar cuál sería la valoración más alta que sus contrincantes o rivales puedan ofertar y luego presentar una puja igual a esa valoración (cada jugador asume que su máxima valoración es mayor a la puja más alta que se pueda llegar a presentar uno o varios de los demás participantes, es decir, el asume que tiene la capacidad de ser el ganador indiscutible), entonces el jugador que presente la puja más alta siguiendo esta estrategia conseguirá no solo ganar si no que además garantizará un pago diferente de cero (positivo).

Teniendo en cuenta lo anterior entonces el equilibrio bayesiano de Nash para este tipo de subastas estará representado de la siguiente manera:

$$b_i = B_i(v_i) = v_i - \frac{\int_{V_{min}}^{V_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}} \quad (5.6)$$

Donde  $b_i$  serán las pujas que va a presentar el jugador  $i$ ,  $B_i(V_i)$  será la función de equilibrio que cada uno de los participantes va a considerar para dar el valor de su puja  $b_i$  conociendo su valoración real  $v_i$ ,  $F$  será la función de distribución y  $N$  el número de participantes su demostración se encuentra en el teorema 5.3 del libro (Cerdá *et al.*, 2004).

Como se puede observar hasta el momento tanto para subastas con información completa en las que se habló del equilibrio de Nash, como para subastas con información incompleta las cuales hacen referencia al estudio de equilibrios bayesianos de Nash solo se representan dos tipos de subastas, la de primer precio y la de segundo precio, esto es debido a que como lo muestra en (Juez, 2003a) las pujas para los jugadores de la subasta inglesa son las mismas que para los de la de segundo precio dado que juegan con la misma estrategia, igualmente la subasta holandesa mantiene una equivalencia con la subasta al primer precio, por lo tanto, se asume que las pujas que estas presenten son iguales y el resultado es equivalente.

---

*Ejemplo 16.* SUBASTA DE ENERGÍA AL PRIMER PRECIO. Para este ejemplo se va a suponer que las valoraciones de los compradores se distribuyen de forma uniforme en el intervalo  $(V_{min}, V_{max})$  por lo cual la función de distribución será:

$$F(v_i) = \frac{(v_i - V_{min})}{(V_{max} - V_{min})}$$

Por lo tanto la ecuación 5.6 se transforma en:

$$b_i = B(v_i) = \left[\frac{(N-1)}{N}\right] * v_i + \frac{V_{min}}{N}$$

Y para dos jugadores pasa a ser:

$$b_i = B(v_i) = \frac{(v_i + V_{min})}{2}$$

---

### 5.5. Aplicación en subastas de sobre cerrado.

---

En este caso si se asume un intervalo de  $(0,1)$  entonces la puja según el equilibrio de Nash vendrá determinada por:

$$b_i = B(v_i) = \frac{(v_i)}{2}$$

Es decir, los jugadores pujaran por la mitad de sus máximas valoraciones. La puja para la carga 1 será  $b_1 = 228480\$/h$  y para la carga 2 será  $b_2 = 285600\$/h$ . Por lo tanto, la ganadora una vez más es la carga 2 y esta vez obtiene una ganancia de  $285600\$/h$ . ■

En conclusión, se puede observar que según la cantidad de jugadores la puja se vuelve mas grande ya que debe garantizarse la agresividad de las valoraciones a medida que la competencia crece.

---

# METODOLOGÍA

Este capítulo evidencia el proceso que se llevará a cabo para obtener los resultados esperados de este proyecto. Se especifica claramente las pautas a seguir, y se explica concretamente el objetivo de cada paso. A continuación se puede ver en la sección 6.1 el primer paso que es la recopilación de la información acerca del tema; seguido de la sección 6.2 que plantea la veracidad del estudio; y finalmente la sección 6.3 que define la subasta.

El desarrollo del proyecto incluye una serie de pasos metodológicos, en relación al cumplimiento de los objetivos específicos planteados en el inicio de este documento, y se dividen de la siguiente manera:

## 6.1 RECOPIACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En esta primera etapa del proceso se busca obtener la información necesaria sobre las herramientas teóricas que hayan disponibles para entender y poder desenvolver la temática del proyecto.

---

**6.1.1 Estudio general de la teoría de juegos** En primer lugar, se necesita el entendimiento base de la teoría de juegos. En esta parte inicial del proyecto, se recopila la información suficiente para abordar este campo y comenzar a generar ideas para el emprendimiento del tema principal que es la subasta de energía en una micro-red. El objetivo de la teoría de juegos es describir un conflicto a través de un modelo matemático, de manera que se optimicen las

decisiones de todos los jugadores en dicho conflicto (a lo que llamamos juego) y se expongan y analicen todas las acciones de cada jugador para finalmente conciliar un resultado con dichas decisiones a las que llamamos estrategias. Las actividades propuestas para este paso metodológico son:

- Recopilación de fundamentos generales de la teoría de juegos.
- Estudio de la literatura técnica existente acerca de la teoría de juegos.

## 6.2 VERIFICACIÓN DEL ESTUDIO DE JUEGOS BAYESIANOS

En esta segunda etapa del proceso, se busca comprobar si funciona el estudio de la teoría de juegos de manera eficiente sobre un modelo básico de una micro-red.

---

**6.2.1 Investigación de la utilidad de juegos Bayesianos** Luego de haber finalizado con el estudio de la teoría de juegos en general, se enfocará en particular en los juegos Bayesianos. Los juegos Bayesianos son un modelo de la teoría de juegos que se encarga de entender un juego cuando la información no está completa, y se supone desde el principio que al menos uno de los participantes del juego no está enterado del tipo de estrategia de los otros participantes. En esa parte del proyecto se identificarán los elementos de este tipo de juegos y se buscará la manera de representarlos con base en este modelo específico. Las actividades propuestas para este paso metodológico son:

- Revisión general de los juegos Bayesianos.
- Identificación de los parámetros necesarios para aplicar el modelo Bayesiano a una subasta.

---

**6.2.2 Planteamiento del juego** Luego de que se tengan claras las ideas acerca de los juegos bayesianos, se diseñará un modelo de teoría de juegos que interprete y arroje una respuesta óptima en la interacción de una carga y un generador (estructura básica de una micro-red). Además, se simulará un caso con datos reales que sirve de punto de referencia al cual se le aplicará el modelo anteriormente mencionado para garantizar que los resultados sean los esperados.

- Diseño del modelo de juegos bayesianos

- Comparación de las respuestas del modelo de juegos bayesianos y el caso con datos reales.

## 6.3 APLICACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE SUBASTAS

En esta etapa final, se busca una herramienta genérica para desarrollar subastas y se planea usar el diseño de mecanismos, para la determinación de las características necesarias en la creación de una subasta para aplicarla en la micro-red.

---

**6.3.1 Análisis de la problemática, desde la óptica de diseño de mecanismos.** Terminado el estudio de juegos bayesianos, se comenzará con el análisis de la teoría básica de diseño de mecanismos, esto con el objeto de tener bases sólidas y completas para poder relacionar todos los estudios hechos de juegos bayesianos y diseños de mecanismos con las subastas. El diseño de mecanismos es un campo de la teoría de juegos, que se encarga básicamente de diseñar un juego con base en los perfiles estratégicos de los jugadores. La idea es predecir qué ocurrirá en el juego y qué tipos de estrategias adoptarán los jugadores, todo esto, teniendo en cuenta que la información que hay de los jugadores es privada y por lo tanto para poder entrar al juego hay que manejar un tipo de restricciones que garanticen tener información necesaria para una solución del juego. Esta es la ventaja del diseño de mecanismo, diseñar un juego con reglas en el que las acciones de los demás beneficien directamente a los participantes. Las actividades propuestas para este paso metodológico son:

- Recopilación de información necesaria de diseño de mecanismos para asociarla a la subasta para analizar su respectiva implementación.
- Determinación de las restricciones o reglas de las subastas en una micro-red necesarias para la aplicación del diseño de mecanismos.

---

**6.3.2 Planteamiento de la subasta, con la aplicación del modelo Bayesiano.** Luego de finalizar con el estudio completo de la temática necesaria acerca de la teoría utilizada en el proyecto, se procede a aplicar lo antes dicho para diseñar y seleccionar el tipo de subasta que se adapte al paradigma de la micro-red. En esta fase del proyecto verificaremos si es posible o no aplicar la teoría de juegos no cooperativos en la micro-red, analizando si es benéfico o no utilizar esta área de la matemática en la implementación de una subasta. Las actividades propuestas para este paso metodológico son:

- Establecimiento del tipo de subasta
- Análisis de las características de la subasta mediante la aplicación de teoría de juegos.
- Elaboracion del informe con los resultados y conclusiones.

---

## CASOS DE APLICACIÓN

---

A continuación se muestran dos casos de aplicación, siendo el primero un análisis de una situación de conflicto (sección 7.1) y el segundo una subasta (sección 7.2). Ambos casos son problemas que pueden surgir al analizar la distribución óptima de recursos energéticos en una micro-red, y son analizados con ayuda de la teoría de juegos bayesianos.

### 7.1 JUEGOS BAYESIANOS

Para el estudio de la aplicación de la teoría de juegos no cooperativos en una micro-red se utilizarán dos jugadores: un demandante (carga) y un ofertante (generador eólico). El propósito de esta sección es plantear una solución a través de las herramientas que ofrece los juegos bayesianos y verificar la eficacia de dichos resultados. A continuación se presentan las pautas básicas para el desarrollo de esta parte del proyecto y los resultados obtenidos con su respectiva justificación. Para entender paso a paso el desarrollo de este proceso, en el anexo C se encuentra un ejemplo detallado.

---

**7.1.1 Planteamiento del problema** Para poder aplicar el juego bayesiano y obtener los resultados deseados, es necesario contar con información básica con la cual se logre poner en práctica el estudio. En este caso, los agentes de este juego son una empresa de cemento y una planta de generación eléctrica (modelada como 5 aerogeneradores). Dicho esto, se debe analizar qué factores influyen en la obtención de las utilidades y los tipos de los jugadores. Las

utilidades equivalen a las ganancias que cada jugador obtiene dependiendo de cuánta potencia puede generar el aerogenerador y esta potencia depende de la energía extraída del viento. A continuación se especifica que funciones son necesarias para determinar estas utilidades y tipos respectivamente.

**Curva de potencia** La curva de potencia es necesaria debido a que el resultado de la ganancia depende de la potencia generada, de la misma manera esta última obedece a la velocidad del viento. Los factores que se usan para obtener esta función matemática son: el coeficiente de potencia, eficiencia del sistema eléctrico, eficiencia del sistema mecánico y potencia eólica. Para conocer el cálculo de esta potencia debe remitirse a (Bufano *et al.*, 2012). Dado que el estudio de este proyecto no está centrado en la obtención de esta función matemática, se utiliza una ecuación disponible en catálogo que depende del aerogenerador que se va a montar en el parque eólico y los rangos de velocidades para los que se genera potencia. A continuación en la ecuación 7.1 se presenta la función de potencia:

$$P = 565,75V^2 + 553,37V + 1802,5 \quad (7.1)$$

$P$ : Potencia en kW.

$V$ : Velocidad del viento en m/s.

Esta potencia se utiliza para un aerogenerador Windon de 30 kW que funciona entre un rango de velocidades de [1 m/s, 15 m/s], fuera de estos rangos de velocidad la potencia generada es cero, es decir, para velocidades menores a 1 m/s el aerogenerador no genera energía debido a que esta magnitud no es suficiente para producir un movimiento considerable en sus aspas y para velocidades superiores a 15 m/s se produce un movimiento brusco que desgasta la vida útil del molino, por este motivo se frenan las aspas y la potencia resultante es cero.

**Función Rayleigh** La función Rayleigh es una expresión matemática que se acopla con una alta precisión al comportamiento del viento. Aunque la Weibull es más precisa y versátil, la ventaja de la Rayleigh está reflejada en que solo depende de la media, dado que en este estudio ese valor promedio es la única información que se tiene al alcance. A continuación en la ecuación 7.2 y 7.3 se muestra la función de densidad y la función de distribución acumulativa Rayleigh respectivamente:

$$f(V) = \frac{\pi}{2} \frac{V}{V_m^2} e^{-\frac{\pi}{4} \frac{V^2}{V_m^2}} \quad (7.2)$$

$f$ : Función de densidad.

$V$ : Velocidad del viento en m/s.

$V_m$ : Velocidad media del viento en m/s.

$$F(V) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4} \frac{V^2}{V_m^2}} \quad (7.3)$$

$F$ : Función de distribución acumulativa.

$V$ : Velocidad del viento en m/s.

$V_m$ : Velocidad media del viento en m/s.

Dicho lo anterior, se procede a definir los tipos, esto con el fin de obtener las probabilidades en un determinado rango de velocidades. El objetivo es establecer los 3 estados del generador, en este caso: bajas, medias y altas velocidades respectivamente y el ancho de este rango depende estrictamente de la velocidad media como se explicará posteriormente.

**Acciones de los jugadores y funciones de ganancia** Las acciones del generador son vender el 100 % , 50 % y 30 % de la energía que genera y las acciones de la empresa de cemento son comprar el 100 %, 50 % y 30 % de lo que el generador le vende. Para obtener las ganancias de cada jugador dependiendo de las acciones se utiliza las ecuaciones 7.4 y 7.5:

$$\begin{aligned}
 pg &= P \times \xi \times \eta \times H \\
 \rho &= \tau \times P \times \xi \times \eta \times D \times H \\
 \omega &= (1 - D) \times P \times \beta \times \eta \times H \\
 \varpi &= (1 - H) \times P \times \beta \times \eta \\
 G_{gen} &= \rho - \lambda + \omega + \varpi
 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\varsigma = H \times D \times P - \kappa$$

$$v = \varsigma \times \beta \times \eta$$

$$G_{car} = pt - H \times D \times P \times \xi \times \eta \times \tau + v \quad (7.5)$$

ecuación 5

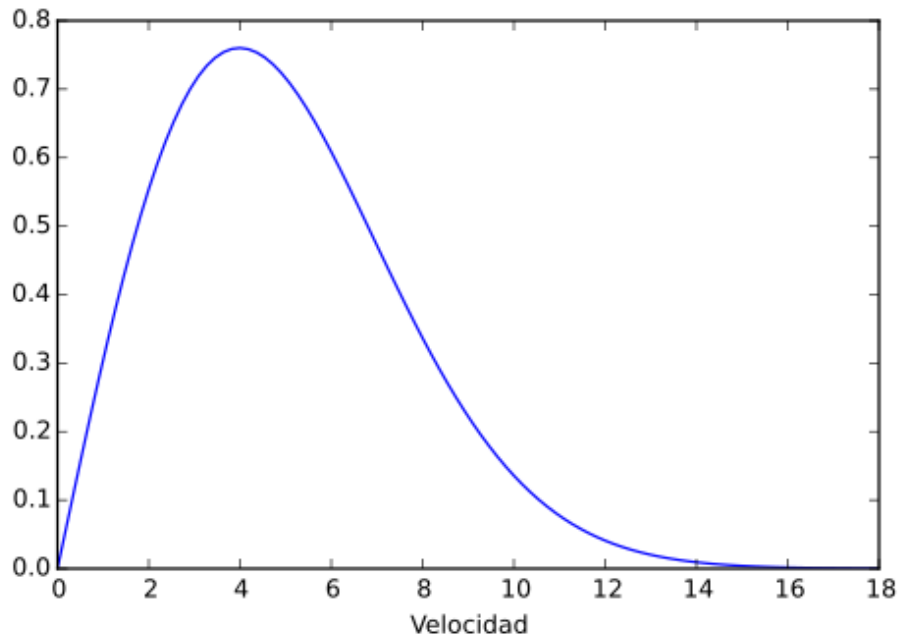
- $P$ : potencia (Ecuación 1).
- $H$ : [1, 0.5, 0.3] acciones que puede elegir el generador.
- $D$ : [1, 0.5, 0.3] acciones que puede elegir la carga.
- $\eta$ : numero de generadores.
- $\xi$ : precio del kW por hora del generador.
- $\beta$ : precio del kW por hora de la bolsa.
- $\tau$ : factor de ganancia.
- $\lambda$ : Precio de generación.
- $\rho$ : Precio de venta
- $\omega$ : venta a la bolsa de la energía que no compra la bolsa.
- $\varpi$ : venta a la bolsa de la energía que no vende el generador.
- $\kappa$ : kW que necesita la fábrica.
- $\varsigma$ : kW que sobran o que faltan cuando se compra al generador.
- $v$ : venta o compra a la bolsa.
- $G_{gen}$ : Ganancia del generador.
- $G_{car}$ : Ganancia de la carga.

**7.1.2 Análisis del juego bayesiano** El análisis para la obtención de resultados se divide en dos partes: planeación y operación. La parte de planeación se encarga de realizar la aplicación del juego bayesiano en base a las pautas nombradas en la subsección anterior y la parte de operación es la simulación de un caso real a través del uso de la función Rayleigh (posteriormente se explicará esto con más detalle). El propósito es encontrar una respuesta óptima que le indique a los jugadores qué es lo mejor que deben hacer en cuanto a la venta y compra de energía.

Ahora bien, la primera parte del proceso para poder verificar que el estudio de la teoría de juegos aplica en un tema de distribución energética, consiste en diseñar un juego bayesiano para un caso general de 3 velocidades específicas (una para cada tipo) que trata de ser lo mas acertado posible dadas las condiciones que se presenten. Estas condiciones son acondicionadas por una velocidad media que indica el evento que ocurre con mas frecuencia en la zona donde se esté haciendo el estudio. como ya se explicó en capítulos anteriores, el juego bayesiano requiere de unas probabilidades para cada tipo, estas se obtienen a través de la integración de la función de densidad rayleigh entre cada rango, es decir, dado que son 3 tipos deben presentarse 3 situaciones ya que el estudio debe hacerse para bajas, medias y altas velocidades. Para esto se debe establecer un rango de velocidades los cuales tienen una probabilidad de ocurrencia, luego de establecidos los rangos se escogerá una velocidad sobre la cual se realizará el estudio, en este caso sera el valor promedio de los rangos y se procederá a realizar el proceso explicado en la sección de juegos bayesianos. Para ver esto ultimo con mayor claridad, a continuación se mostrará este proceso para un caso específico de velocidad media igual a 5 m/s .

$V_m = 5 \rightarrow$  Velocidad media

Figura 7.1.: Función de densidad rayleigh para una velocidad media de 5 m/s



Se puede observar en la figura 7.1 que el rango de velocidades (para  $V_m = 5$  m/s) es de 0 a 15 m/s. Según este comportamiento del viento se elige la clase de aerogeneradores, en este caso se usan generadores eólicos «windon» de 30kW diseñados para funcionar en rango de velocidades de 1 a 15 m/s (fuera de este rango la potencia generada es cero). Dicho lo anterior, se procede a elegir los rangos de probabilidad con los cuales van a trabajar los tipos en el juego, posteriormente se aclarará que existen razones por las cuales los rangos elegidos para determinar las probabilidades son distintos para cada velocidad media debido a la forma que adquiere la función de densidad Rayleigh y los valores de velocidad que puede manejar para cada tipo.

El resultado que arroja planeación es un valor que cada jugador espera obtener aproximadamente si se comporta de la manera que le indica el equilibrio bayesiano en cualquier situación de viento que se presente. Se tiene en cuenta que las velocidades escogidas para cada tipo arrojan un valor cercano de lo que sucede en la vida real para poder ajustarlo de una forma racional. A continuación hallarán las probabilidades dependiendo de los rangos y posteriormente se explicará porque debe tenerse en cuenta la velocidad media para el cálculo

de los mismos:

$$\text{Rango} = [\text{Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3}] = [1-7.5, 7.5-10, 10-15]$$

$$p(t_i) = \text{probabilidad de cada tipo, } i = 1, 2, 3$$

$$p(t_1) = F(7.5) = 0.82$$

$$p(t_2) = F(10) - F(7.5) = 0.12$$

$$p(t_3) = F(15) - F(10) = 0.04$$

El caso que se simula para garantizar que la respuesta del juego bayesiano cumple con las expectativas, es un conjunto de números aleatorios seleccionados a partir de la función rayleigh que indica una posible velocidad del viento, dado esto el jugador elige las acciones que el equilibrio bayesiano propone para cada una de ellas. Por este motivo, los valores que se seleccionan dentro de los tipos para realizar el estudio tienen que ser cercanos a lo que podría ser la realidad, es decir, si la velocidad media es de 5 m/s se sabe que la mayoría de valores están alrededor de esta cifra, por lo tanto se selecciona un tipo con mayor probabilidad de que este evento ocurra y dado que la ganancia en cada tipo depende del valor que se escoge en el rango (en este proyecto es el promedio de los extremos para cada tipo, por ejemplo, tipo 1=1-7.5 el valor de la velocidad que se utiliza es  $\frac{1+7.5}{2} = 4.25$ ) se diseña de manera que el primer tipo para cada media tenga la mayor probabilidad de ocurrencia y que el valor seleccionado sea cercano a dicha media. La probabilidad del segundo rango es mayor que la del tercero por las mismas razones presentadas anteriormente (dada la forma de la weibull, para altas velocidades la frecuencia del evento se hace menor).

---

**7.1.3 Resultados** La veracidad del estudio está dada por la comparación entre el resultado del juego bayesiano (valor esperado tanto para carga como para generador) y la respuesta arrojada por la parte de operación (Valor promedio tanto para carga como para generador). Esta comparación se hace a través del cálculo de los errores entre estas magnitudes, para saber que tan dispersos están los datos. Dado que el valor de las ganancias depende de una distribución de probabilidad de velocidades, el límite de la dispersión de los datos depende de la propia dispersión ( $\sigma$ ) de la Rayleigh (este valor se muestra en la ecuación 7.6). Si los errores son menores o iguales a  $\sigma$  puede decirse que el estudio funciona ya que sabiendo que la estrategia usada para hallar un resultado óptimo en un caso de la vida real es aproximadamente igual al valor esperado según dicho estudio (El error se halla como se muestra en la

ecuación 7.7 y 7.8, repectivamente).

Como se dijo anteriormente, los tipos dependen de un rango de valores. Dado que los resultados del estudio se obtienen con los valores hallados en el promedio de los rangos es importante que el tipo 1 (que tiene la mayor probabilidad de ocurrencia) tenga un promedio cercano a la media.

$$\sigma = \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)^2 V_m \quad (7.6)$$

$\sigma$ : Función de densidad.

$V_m$ : Velocidad media del viento.

$$e_{gen} = \frac{\phi}{\Phi} * 100 \quad (7.7)$$

$$e_{car} = \frac{\varphi}{\Phi} * 100 \quad (7.8)$$

$e_{gen}$ : error del generador.

$e_{car}$ : error del carga.

$\sigma$ : Función de densidad.

$V_m$ : Velocidad media del viento.

Esta parte que verifica las eficacia de los resultados se caracteriza por ser una lista de números aleatorios dependientes de la función Rayleigh (que simulan el comportamiento del viento en la vida real). Estos valores representan una velocidad y para cada una de estas se aplica el equilibrio calculado en la parte de planeación. El resultado del equilibrio es una estrategia para cada tipo (cada rango de velocidades), dependiendo de la magnitud de la velocidad se le aplica dicha estrategia y se obtiene una utilidad. Luego, se hace el mismo proceso para  $n$  valores (en este caso 100) y se haya un promedio. El objetivo del promedio es demostrar que este valor esta cerca al esperado según el equilibrio Bayesiano, de esta manera, se puede decir que el estudio funciona y que el resultado es óptimo.

Continuado con el ejemplo específico para la velocidad media de 5 m/s, para 10 valores aleatorios, como se muestran en la ecuación 7.9, obtenidos a través del software se explicará en términos generales cómo opera esta parte del estudio:

$$\hat{V} = ([3,06, 3,55, 3,43, 3,61, 4,17, 5,82, 2,59, 3,10, 6,41, 8,33]) \quad (7.9)$$

$\hat{V}$  = Valores de velocidad aleatorios.

por ejemplo, para el primer valor de 3.06648421 que pertenece al tipo 1 (ya que esta entre el rango de 1-7.5) se le aplica la estrategia correspondiente y se obtiene una utilidad tanto para la carga como para el generador de 15269201.26065972 y 1646322.71669972 respectivamente. Lo mismo se hace para todos los demás valores aleatorios y se haya un valor promedio de ganancias para ambos agentes del juego como se muestra a continuación en las ecuaciones 7.10 y 7.11:

$$\Phi = ([1646322,71, 2039962,88, 1934331,97, 2092669,39, 2608580,07, 4520535,66, \\ 1316028,40, 1673496,37, 5338832,89, 8541119,53]) \quad (7.10)$$

$$\Psi = ([15269201,26, 15261603,27, 15263642,14, 15260585,94, 15250627,91, 15213723,62, \\ 15275576,55, 15268676,75, 15197928,97, 15136118,90]) \quad (7.11)$$

$\Phi$ : Valores de la ganancia del generador.

$\Psi$ : Valores de la ganancia de la carga.

A continuación en las ecuaciones 7.12 y 7.13 se muestran los promedios de los valores de ganancia tanto de la carga como del generador:

$$\phi = \frac{\sum \Phi}{10} = 2613954,01935 \quad (7.12)$$

$$\varphi = \frac{\sum \Psi}{10} = 15250524,1833 \quad (7.13)$$

$\phi$ : promedio de los valores de la ganancia del generador.

$\varphi$ : promedio de los valores de la ganancia de la carga.

Entonces, para un rango de velocidades definido como [1, 7.5, 10, 15], se tiene que a potencia de salida es:

$$p(t_1) = 0.829180163847$$

$$p(t_2) = 0.127605917889$$

$$p(t_3) = 0.042362479921$$

$$\sigma = \pm 2.613764584$$

- Los resultados de la etapa de planeación son::

Valor esperado para el generador = 4182811.86132

Valor esperado para la carga = 15207214.7866

- Los resultados de la etapa de operación son::

Promedio de ganancias para el generador = 4112917.54888

Promedio de ganancias para la carga = 15221591.718

- Comparando ambos datos se encuentra que los errores cometidos en el promedio de ganancias para el generador son del orden del 1,677%, mientras que el error cometido en las ganancias de la carga es del orden del 0,09%. En ambos casos se ha tomado como referencia los resultados de la etapa de planeación.

Error del generador = 1.670988

Error de la carga = -0.09454

Dado que los errores estan por debajo de la dispersión, el estudio funciona, y se obtienen los datos esperados.

Se sugieren los siguientes intervalos para cada una de las velocidades medias:

$$V_m = 4 \rightarrow \text{Rango} = [1, 6, 8, 11]$$

$$V_m = 6 \rightarrow \text{Rango} = [1, 6, 14, 16]$$

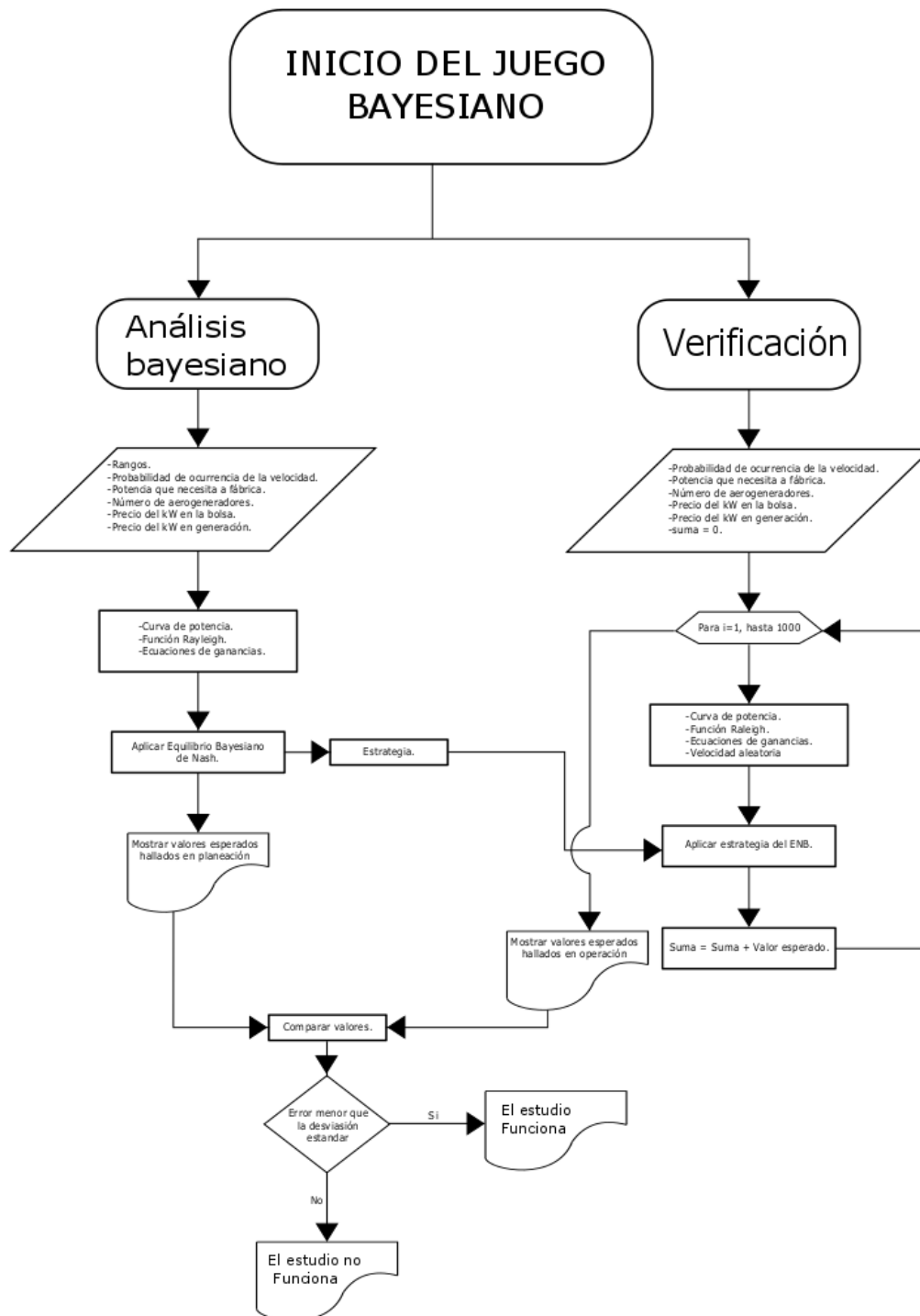
$$V_m = 7 \rightarrow \text{Rango} = [1, 13, 15, 18]$$

$$V_m = 8 \rightarrow \text{Rango} = [1, 15, 18, 22]$$

$$V_m = 9 \rightarrow \text{Rango} = [1, 17, 22, 24]$$

Para entender con mayor claridad el procedimiento de este estudio, a continuación en la figura 7.2 se muestra un diagrama de flujo que simplifica el método de aplicación del juego bayesiano. Además en el anexo C se presenta un caso de Interacción aerogenerador-fábrica de cemento donde se explica paso a paso el procedimiento que se lleva a cabo para desarrollar el juego bayesiano aplicado a una micro-red.

Figura 7.2.: Diagrama de flujo del juego bayesiano aplicado a una interacción generador-carga



## 7.2 SUBASTA ENERGÉTICA.

Debido a que la teoría de juegos ha demostrado ser una herramienta fundamental para el análisis de distintas situaciones de negociación o competencia en la economía, la idea principal de este proyecto se basa en poder enfocar los diferentes métodos analíticos de la teoría de juegos a través de una subasta hacia las diferentes interacciones (negociación) que puedan existir entre un ofertante (central eólica) y varios demandantes de energía (cargas) en una micro-red. El propósito de este análisis es verificar si es posible generar una nueva herramienta capaz de optimizar la distribución energética de una micro-red.

---

**7.2.1 Planteamiento del problema** Es necesario tener en cuenta que en la vida real la valoración exacta que tenga cada una de las cargas de una micro-red a cerca de los paquetes de energía que una central de energías renovables les ofrece son de carácter privado (las cargas son las únicas que saben cuanta energía necesitan y hasta cuanto están dispuestas a pagar por ella), sin embargo, es posible sacar ciertas conjeturas del precio que estarían dispuestas a pagar basándose en los comportamientos anteriores que estas han realizado (pagos que ha llevado a cabo anteriormente por distintas cantidades de energía), es por eso que a pesar de que no se puede conocer con certeza el valor máximo que estarían dispuestas a pagar por ciertos paquetes de energía si es posible asumir la probable valoración que tendrán por los mismos. La valoración de las cargas por los paquetes de energía que la central generadora les ofrece será representada en este caso como una función de densidad normal.

Asumiendo que los jugadores son racionales y que no tienen certeza de en cuanto sus contrincantes valoran los paquetes de energía ofrecidos por la central eólica (cuanto estarían dispuestos a pagar por la energía que necesitan), la decisión que estos tomen (su puja) para obtener el paquete de energía (bien subastado) ofrecido por la central eólica, estará basada en el análisis que cada uno de los agentes haga acerca de cuál es su máxima valoración y en cuanto probablemente los demás valoren el bien subastado, esto hace que la subasta se comporte como una de sobre cerrado, debido a que cada carga tomara una decisión basándose en su propio análisis y no en la decisión que hayan tomado los demás. Sin embargo, como ya se especificó con anterioridad en la sección 3 del libro las pujas para los jugadores racionales de la subasta inglesa son las mismas que para los de segundo precio igual mente las pujas para la subasta holandesa mantiene la equivalencia para la subasta al primer precio.

Considerando que se trata de analizar un caso de la vida real en el cual las cargas no co-

nocen las valoraciones que tendrán las demás a cerca de los paquetes de energía que ofrece la central eólica y que su decisión depende de su propio análisis y no de lo que hagan las otras cargas, entonces la estructura del análisis de la subasta estará representada en forma de juego bayesiano ya que contará con información imperfecta e incompleta de la manera en la que se explicó en el capítulo 2 y 3 del libro.

Para este proyecto se presenta el diseño de mecanismos como el modelo de referencia el cual fue explicado en el capítulo 3 del libro. En este modelo de referencia la subasta inglesa, la holandesa, la de primer y segundo precio proporcionan en media, los mismos ingresos esperados para el subastador a esto se le conoce como el teorema del ingreso equivalente. La ecuación 7.14 determina el ingreso esperado para el vendedor en cualquiera de las 4 subastas.

$$n \int_{v^*}^{\bar{v}} (vF'(v) + F(v) - 1) F(v)^{n-1} \quad (7.14)$$

- $\bar{v}$  : Es la máxima valoración posible de los participantes en la subasta.
- $v^*$  : Es el valor de reserva por debajo del cual ningún participante puede ofertar.
- $n$  : Es el número de participantes en la subasta.
- $F(v)$  : Es la función de distribución de donde se tiene las valoraciones de los participantes.

**7.2.2 Análisis y resultados de la subasta** Como se mencionó en la subsección 7.2.1 en la vida real las cargas no revelan sus verdaderas valoraciones acerca de los diferentes paquetes de energía que serán subastados por la central eólica. En este caso las posibles valoraciones que puedan llegar tener, serán modeladas por medio de una función de densidad normal de media 10 y con una desviación estándar de 2.89.

**Análisis de resultados para una subasta con 2 cargas oferentes.** En este caso las valoraciones reales de la carga 1 y la carga 2 serán de 15\$ y 16\$ respectivamente. Según el teorema del ingreso equivalente la ganancia que el vendedor espera obtener es de 8.33486\$.

*Subasta en sobre cerrado al primer precio:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son de 9.73081961\$ para la carga 1 y de 9.86401187\$ para la carga 2. En este caso el ganador de la subasta de primer precio es la carga numero 2 la cual obtendrá una ganancia de 6,13598813\$.

*Subasta en sobre cerrado al segundo precio o subasta de Vickrey:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son de 15\$ para la carga 1 y de 16\$ para la carga 2. Se puede observar claramente que en este caso las pujas que presentan los jugadores son iguales a sus máximas valoraciones, como ya se ha demostrado en una subasta al segundo precio.

El ganador de la subasta al segundo precio es la carga numero 2 la cual obtiene una ganancia de 1 dado que tiene que pagar la segunda valoración más alta (15\$).

**Análisis de resultados para una subasta con 5 cargas oferentes.** Las valoraciones reales de cada una de las cargas son: carga 1 = 13\$, carga 2= 11\$, carga 3 = 13\$, carga 4 = 15\$ y carga 5 = 16\$. Según el teorema del ingreso equivalente la ganancia que el vendedor espera obtener es de 11,34315\$.

*Subasta en sobre cerrado al primer precio:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son de 11.43576299\$ para la carga 1, 10.05087489\$ para la carga 2, 11.43576299\$ para la carga 3, 12.37232159\$ para la carga 4 y 12.64949891\$ para la carga 5. El ganador de la subasta de primer es la carga numero 5 la cual obtendrá una ganancia de 3.35050109\$.

*Subasta en sobre cerrado al segundo precio o subasta de Vickrey:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son: 13\$ para la carga 1, 11\$ para la carga 2, 13\$ para la carga 3, 15\$ para la carga 4 y 16\$ para la carga 5.

El ganador de la subasta al segundo precio es la carga numero 5 la cual obtiene una ganancia de 1 dado que tiene que pagar la segunda valoración más alta (15\$).

**Análisis de resultados para una subasta con 6 cargas oferentes.** Las valoraciones reales de cada una de las cargas son: carga 1 = 14\$, carga 2= 7\$, carga 3 = 14\$, carga 4 = 10\$, carga 5 = 14\$ y carga 6 = 9\$ . Según el teorema del ingreso equivalente la ganancia que el vendedor espera obtener es de 11.74977\$.

*Subasta en sobre cerrado al primer precio:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son de 12.23817\$ para la carga 1, \$ 6.64965 para la carga 2, \$ 12.23818 para la carga 3, 9.37664\$ para la carga 4, 12.23817708\$ para la carga 5 y 8.4961416\$ para la carga 6. En este caso los ganadores de la subasta de primer precio son las cargas 1, 3 y 5 las cuales obtendrá una ganancia de 0.58727431, 0.58727431 y 0.58727431 respectivamente dado que la ganancia de cada una se divide en 3 ya que existe el empate.

*Subasta en sobre cerrado al segundo precio o subasta de Vickrey:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son: 14\$ para la carga 1, 7\$ para la carga 2, 14\$ para la carga 3, 10\$ para la carga 4, 14\$ para la carga 5 y 9\$ para la carga 6.

En este caso los ganadores de la subasta al segundo precio son las cargas 1, 3 y 5 la cuales obtendrán una ganancia de 1.66666667, 1.66666667 y 1.66666667 respectivamente dado que la ganancia de cada una se dividen en 3 ya que existe el empate.

**Análisis de resultados para una subasta con 7 cargas oferentes.** Las valoraciones reales de cada una de las cargas son: carga 1 = 13\$, carga 2= 11\$, carga 3 = 13\$, carga 4 = 15\$, carga 5 = 16\$, carga 6= 9\$ y carga 7 =8 . Según el teorema del ingreso equivalente la ganancia que el vendedor espera obtener es de 12.06648.

*Subasta en sobre cerrado al primer precio:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son de 11.83365921\$ para la carga 1, 10.32492264\$ para la carga 2, 11.83365921\$ para la carga 3, 12.91129027\$ para la carga 4, 13.24695504\$ para la carga 5, 8.57366378 para la carga 6 y 7.64926179 para la carga 7. El ganador de la subasta de primer es la carga numero 5 la cual obtendrá una ganancia de 2.75304496 \$.

*Subasta en sobre cerrado al segundo precio o subasta de Vickrey:* Las pujas que presentaran los jugadores según el resultado del equilibrio bayesiano de Nash son: 13\$ para la carga 1, 11\$ para la carga 2, 13\$ para la carga 3, 15\$ para la carga 4 16\$ para la carga 5, 9 para la carga 6 y 8 para la carga 7.

El ganador de la subasta al segundo precio es la carga numero 5 la cual obtiene una ganancia de 1 dado que tiene que pagar la segunda valoración más alta (15\$).

Se puede analizar para la subasta de sobre cerrado al primer precio como a medida que la cantidad de pujadores aumentan, las ofertas se vuelven más agresivas, es decir, la puja presentada por cada uno de ellos se asemeja más a lo que sería su máxima valoración a cerca del bien subastado (debido a que la competencia se hace mayor), disminuyendo el pago del ganador. Para subastas de sobre cerrado al primer precio con infinitos jugadores las pujas presentadas por cada uno de ellos estarán determinadas por su máxima valoración dando de esta manera una ganancia de cero al participante ganador. Para la subasta al segundo precio se puede observar que la cantidad de jugadores no interviene en las pujas presentadas por los participantes ya que en este caso el equilibrio bayesiano de Nash determina que la mejor opción que pueden tener es que cada oferente pujan por el valor que tenga su máxima valoración. Dado que el pago que realizara el participante ganador tendrá del valor de la segunda puja más alta presentada en la subasta, las ganancias de este tampoco dependerán del número de jugadores si no de las máximas valoraciones que puedan tener sus rivales. Es preciso notar que el ganador en cualquiera de las dos subastas siempre estará determinado por el participante o los participantes (en caso de empate) que tengan las valoraciones más altas. También se puede observar como en caso de un empate la utilidad será dividida entre el número de participantes ganadores y repartida por igual.

## CONCLUSIONES

1. Teniendo en cuenta la conceptualización del capítulo 4 donde se muestra una estructura organizada e ilustrativa de cómo se relaciona la teoría de juegos con casos asociados a la ingeniería eléctrica, se puede evidenciar la recopilación y estudio de la literatura técnica existente, con la cual se da por cumplido el objetivo específico 1.
2. Se observó que a través del juego Bayesiano aplicado a un caso específico de ingeniería (interacción carga-generador) se pueden obtener resultados útiles, dado que con este estudio se garantiza que los pagos sean óptimos para todos los jugadores teniendo en cuenta las acciones y utilidades de cada uno de ellos. La comparación entre la ganancia esperada obtenida por el juego bayesiano y la ganancia promedio hallada con la simulación de un caso de la vida real arroja un error aceptable. Esta conclusión cumple con el objetivo específico 2, ya que se realiza el diseño del modelo de juegos bayesianos y la comparación de las respuestas del modelo de juegos bayesianos y el caso con datos reales.
3. Se puede concluir que en el juego bayesiano las variables que definen el rango de las velocidades del viento juegan un papel importante en el resultado obtenido. Esta importancia es a causa de la dependencia directa del cálculo de las probabilidades de los tipos con la función de distribución Rayleigh. Ya que debe garantizarse que el viento esperado con mayor frecuencia coincida con el tipo de mayor probabilidad. Esta afirmación coincide con el cumplimiento del objetivo específico 2.

4. Teniendo en cuenta que la teoría de juegos no cooperativos puede realizar un análisis estratégico óptimo en cuanto a la toma de decisiones para la distribución energética en una micro-red y el análisis de las subastas en sobre cerrado, se diseñó un software que calcula de manera rápida las estrategias que forman un equilibrio bayesiano aplicado a una subasta tanto de primer precio como de segundo precio. Este análisis cumple con el objetivo específico 3 ya que el diseño del programa es el resumen del planteamiento y desarrollo de todo lo relacionado a la temática de la subasta.
  
5. Se puede observar que la aplicación de la subasta en una micro-red funciona de manera eficiente, dado que el resultado obtenido es producto de la aplicación del juego bayesiano y como se comprobó anteriormente, este resultado es óptimo bajo ciertas condiciones. En este caso, tales condiciones dependen de un modelo de referencia que plantea unas pautas básicas para poder desarrollar la distribución energética a través de la subasta. Por lo tanto, se garantiza tanto un resultado óptimo como una eficiente interacción entre componentes claves de una micro-red como lo son las cargas y los generadores. Este resultado es evidencia del cumplimiento del objetivo 3.
  
6. Según los resultados obtenidos a través de los programas diseñados para la subasta, se puede observar que la subasta de primer precio depende estrictamente de la cantidad de jugadores ya que a medida que el número de participantes aumente la puja se vuelve más agresiva para aumentar la probabilidad de obtener el producto de la subasta. Como se pudo observar en las utilidades obtenidas con la subasta de primer precio, se determina que la ganancia disminuye a medida que el número de jugadores aumenta ya que la puja se aproxima a la valoración real y esta disminución de ganancia también ocurre en el caso de que los jugadores estén empatados dado a que estas ganancias deben distribuirse en partes iguales según la cantidad de ganadores en el juego. Por el contrario, las ganancias en las subastas de segundo precio dependen del segundo valor más alto y la cantidad de jugadores que empaten. A causa de esto, la preferencia de escoger cualquiera de los dos métodos de subasta se rige bajo las preferencias del jugador y lo que este dispuesto a arriesgar. esto evidencia el cumplimiento del objetivo específico 3.
  
7. Finalmente, Puede llegarse a la conclusión de que se puede modelar una distribución energética a través de una subasta, dado que los resultados son óptimos y en la vida real se cumple que las informaciones de demanda son privadas y solo el jugador conoce sus

---

alcances. Teniendo en cuenta que la teoría de juegos es un análisis estratégico se puede plantear la mejor opción para todos los involucrados en el juego a través de una estrategia que maximice sus utilidades. El planteamiento de este estudio innova la manera de ver los diferentes sistemas de distribución y fomenta nuevos procesos que edifiquen nuevos estándares de conocimiento.

TABLA 8.1.: Cumplimiento de los objetivos

Objetivos específicos	
1	Cumple
Recopilacion de fundamentos generales de la teoria de juegos.	x
Estudio de la literatura tecnica existente acerca de la teoria de juegos.	x
2	Cumple
Revisión general de los juegos Bayesianos.	x
Identificación de los parametros necesarios para aplicar el modelo Bayesiano a una subasta.	x
Diseño del modelo de juegos bayesianos	x
Comparación de las respuestas del modelo de juegos bayesianos y el caso con datos reales.	x
3	Cumple
Recopilacion de informacion necesaria de diseño de mecacnismos para asociarla a la subasta para su analizar su respectiva implementación.	x
Determinación de las restricciones o reglas de las subastas en una micro-red necesarias para la aplicación del diseño de mecanismos.	x
Establecimiento del tipo de subasta	x
Elaboracion del informe con los resultados y conclusiones.	x

---

# BIBLIOGRAFÍA

- Buñano, R., Bonoli, M., Edwards, D., & Gogni, V. 2012. Estimación de potencia anual generada por un generador eólico. *Estimación de potencia anual generada por un generador eólico*.
- Cerdá, E., Pérez, J., & Jimeno, J. 2004. *Teoría de juegos*. Person.
- Chen, L., Li, N., Jiang, L., & Low, S. H. 2011. *Chapter in control and optimization theory for electric smart grids*. in Optimal Demand Response: Problem Formulation and Deterministic Case, A. Chakarabortty and M. Ilic, Eds. New York: Springer-Verlag.
- Ekanayake, J., Jenkins, N., Liyanage, K., Wu, J., & Yokoyama, A. 2012. *Smart Grid: Technology and Applications*. Wiley.
- Fossati, Juan Pablo. 2011. Revisión bibliográfica sobre micro redes inteligentes. *Literature review of Microgrids*.
- Gardner, R. 1996. *Juegos para empresarios y economistas*. Ediciones Modernas.
- Gellings, C. W. 2009. *The Smart Grid: Enabling Energy Efficiency and Demand Response*. The fairmont press, Inc.
- Hatziargyriou, N., Sano, H., Iravani, R., & Marnay, C. 2007. *Microgrids: An overview of ongoing research development and demonstration projects*. Vol. 5. Power Energy Magazine.
- Ibars, C., Navarro, M., & Giupponi, L. 2010. *Distributed demand management in smart grid with a congestion game*. Smart Grid Communications, Gaithersburg, MD.

- Juez, P. Durá. 2003a. *TEORÍA DE SUBASTAS Y PRIVATIZACIONES: UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Juez, P. Durá. 2003b. *TEORÍA DE SUBASTAS Y REPUTACIÓN DEL VENDEDOR*. Comisión Nacional del Mercado de Valores.
- Leyton, K., & Shoham, Y. 2008. *ESSENTIALS OF GAME THEORY*. Morgan and Claypool Publisher.
- Lidula, N.W.A, & Rajapakse, A.D. 2011. Microgrids research: A review of experimental microgrids and test systems. *Elsevier*.
- Mera, Isaac Gil. 2011. DISEÑO DE UN SISTEMA DE ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA HÍBRIDO BASADO EN BATERÍAS Y SUPERCONDENSADORES PARA SU INTEGRACIÓN EN MICROREDES ELÉCTRICAS. *Endesa*.
- Micheloud, Oswaldo, & Vicini, R. 2012. *Smart grid , fundamentos de tecnologías y aplicaciones*. Tecnológico de Monterrey.
- Pavlidou, N., Vinck, A. J. H., Yazdani, J., & Honary, B. 2009. *Smart meters for power grid: Challenges, issues, advantages and status*. Vol. 15. Renewable Sustainable Energy.

---

# ANEXOS

---

A

---

# IMPLEMENTACIÓN EN PYTHON DE JUEGO BAYESIANO

## A.1 CODIGO DEL JUEGO BAYESIANO

```

1 def bay_game(porcentaje, pt_ventas, po_pagar, pb, kw_fab,
2 f_gan, vm, dat, rango, engy_n, ptg_uni, num_gen, show):
3     ptg = ptg_uni * num_gen
4     v = rango
5     dis_ray = num.zeros(4)
6     for i in range(4):
7         dis_ray[i] = 1 - mt.exp(- ( mt.pi / 4 ) * (v[i] / vm)**2)
8     p_t1 = dis_ray[1]
9     p_t2 = dis_ray[2] - dis_ray[1]
10    p_t3 = dis_ray[3] - dis_ray[2]
11    b = num.zeros(3)
12    b[0] = (rango[1] + rango[0]) / 2.0
13    b[1] = (rango[2] + rango[1]) / 2.0
14    b[2] = (rango[3] + rango[2]) / 2.0
15    h = 3
16    kw_sba = num.zeros(h)
17    vbc = num.zeros(h)
18    pot = num.zeros(h)
19    yi = 3
20    pg = num.zeros(h)
21    pv = num.zeros(h)
22    vbg = num.zeros(h)
23    vb1 = num.zeros(h)
24    pt = pt_ventas - po_pagar
25    g_carga = num.zeros((h, yi, yi))
26    g_gen = num.zeros((h, yi, yi))
27    for i in range(3):
28        if b[i] < rango[0]:
29            pot[i] = 0
30        elif b[i] > rango[3]:
31            pot[i] = 0
32        else:
33            pot[i] = 565.75 * (b[i]) ** 2 + 553.37 * b[i] + 1802.5

```

```
34
35     for r in range(yi) :
36         for f in range(yi) :
37             for u in range(h) :
38                 if rango[0] <= b[u] <= rango[3]:
39                     pg[u] = pot[u] * ptg * porcentaje[r]
40                     pv[u] = f_gan * pot[u] * ptg * porcentaje[f] * porcentaje[r]
41                     vbg[u] = (1 - porcentaje[f]) * pot[u] * pb * porcentaje[r]
42                     vbl[u] = (1 - porcentaje[r]) * pot[u] * pb
43                     g_gen[u, f, r] = pv[u] - pg[u] + vbg[u] + vbl[u]
44     #print 'ganancias del generador'
45     #print g_gen
46     ve_gen = num.zeros((27, 3))
47     for z in range(3) :
48         cont = 0
49         for k in range(3) :
50             for i in range(3) :
51                 for j in range(3) :
52                     ve_gen[cont, z] = p_t1 * g_gen[0, z, k] +
53                     p_t2 * g_gen[1, z, i] + p_t3 * g_gen[2, z, j]
54                     cont = cont + 1
55     #print 'Valor esperado del generador'
56     #print ve_gen
57
58     for t in range(yi) :
59         for k in range(yi) :
60             for x in range(yi) :
61                 if rango[0] <= b[x] <= rango[3]:
62                     kw_sba[x] = porcentaje[k] * porcentaje[t] * pot[x] - kw_fab
63                     vbc[x] = kw_sba[x] * pb
64                     g_carga[x, t, k] = pt - porcentaje[k]
65                     * porcentaje[t] * pot[x]* ptg * f_gan + vbc[x]
66     #print g_carga
67     ve_carga = num.zeros((27, 3))
68     for z in range(3) :
```

```

69     cont = 0
70     for k in range(3) :
71         for i in range(3) :
72             for j in range(3) :
73                 ve_carga[cont, z] = p_t1*g_carga[0, z, k] +
74                 p_t2 * g_carga[1, z, i] + p_t3 * g_carga[2,z,j]
75                 cont = cont + 1
76     bus_colum = bu.busqueda_columna(ve_gen, 27, 3)
77     ve_aux = num.matrix(ve_carga)
78     bus_filas = bu.busqueda_columna(ve_aux.T, 3, 27)
79     bus_aux = num.array(bus_filas)
80     bus_filas[0, :] = num.array(bus_aux[1, :])
81     bus_filas[1, :] = num.array(bus_aux[0, :])
82     enb = num.zeros((2, 27))
83     co = 0
84     for i in range(len(bus_colum[0, :])) :
85         for j in range(len(bus_filas[0, :])) :
86             if bus_colum[1, i] == bus_filas[1, j]
87             and bus_colum[0, i] == bus_filas[0, j]:
88                 enb[:, co] = num.array(bus_colum[:2, i])
89                 co = co + 1
90     enb = num.array(enb[:, :co])
91     l2 = num.array(enb[0, 0])
92     l1 = num.array(enb[1, 0])
93     ENB1 = bu.M_func(int(l1))
94     ENB2 = num.concatenate((enb[0], ENB1), axis=0) + 1
95     ENB = ENB2 - 1     # Analisis real de la carga
96     b1 = 1.129*vm*num.random.weibull(2,dat)
97     pot1 = num.zeros(dat)
98     g1_carga = num.zeros((dat, yi, yi))
99     ganancia = num.zeros(dat)
100    kw_sbal = num.zeros(dat)
101    vbc1 = num.zeros(dat)
102    for i in range(dat):
103        if b1[i] < rango[0]:

```

```
104         pot1[i] = 0
105     elif b1[i] > rango[3]:
106         pot1[i] = 0
107     else:
108         pot1[i] = 565.75 * (b1[i]) ** 2 + 553.37 * b1[i] + 1802.5
109     for x in range(dat):
110         if rango[0] <= b1[i] <= rango[1] :
111             k = ENB[0]
112             t = int(l2)
113             kw_sbal[x] = porcentaje[k] * porcentaje[t] * pot1[x] - kw_fab
114             vbc1[x] = kw_sbal[x] * pb
115             g1_carga[x, t, k] = pt - porcentaje[k]
116             * porcentaje[t] * pot1[x]* ptg * f_gan + vbc1[x]
117             ganancia[x] = g1_carga[x, t, k]
118         elif rango[1] < b1[i] <= rango[2] :
119             k = ENB[1]
120             t = int(l2)
121             kw_sbal[x] = porcentaje[k] * porcentaje[t] * pot1[x] - kw_fab
122             vbc1[x] = kw_sbal[x] * pb
123             g1_carga[x, t, k] = pt - porcentaje[k]
124             * porcentaje[t] * pot1[x]* ptg * f_gan + vbc1[x]
125             ganancia[x] = g1_carga[x, t, k]
126         elif rango[2] < b1[i] <= rango[3] :
127             k = ENB[2]
128             t= int(l2)
129             kw_sbal[x] = porcentaje[k] * porcentaje[t] * pot1[x] - kw_fab
130             vbc1[x] = kw_sbal[x] * pb
131             g1_carga[x, t, k] = pt - porcentaje[k]
132             * porcentaje[t] * pot1[x]* ptg * f_gan + vbc1[x]
133             ganancia[x] = g1_carga[x, t, k]
134         else:
135             ganancia[x] = pt- engy_n * pb
136             suma = 0
137     for i in range(dat):
138         suma = suma + ganancia[i]
```

```
139     pg1 = num.zeros(dat)
140     pv1 = num.zeros(dat)
141     vbg1 = num.zeros(dat)
142     vb11 = num.zeros(dat)
143     ganancia_gen = num.zeros(dat)
144     for u in range(dat):
145         if rango[0] <= b1[u] <= rango[1]:
146             f = ENB[0]
147             r = int(l2)
148             pg1[u] = pot1[u] * ptg * porcentaje[r]
149             pv1[u] = f_gan * pot1[u] * ptg * porcentaje[f] * porcentaje[r]
150             vbg1[u] = (1 - porcentaje[f]) * pot1[u] * pb * porcentaje[r]
151             vb11[u] = (1 - porcentaje[r]) * pot1[u] * pb
152             ganancia_gen[u] = pv1[u] - pg1[u] + vbg1[u] + vb11[u]
153         elif rango[1] < b1[u] <= rango[2]:
154             f = ENB[1]
155             r = int(l2)
156             pg1[u] = pot1[u] * ptg * porcentaje[r]
157             pv1[u] = f_gan * pot1[u] * ptg * porcentaje[f] * porcentaje[r]
158             vbg1[u] = (1 - porcentaje[f]) * pot1[u] * pb * porcentaje[r]
159             vb11[u] = (1 - porcentaje[r]) * pot1[u] * pb
160             ganancia_gen[u] = pv1[u] - pg1[u] + vbg1[u] + vb11[u]
161         elif rango[2] < b1[u] <= rango[3]:
162             f = ENB[2]
163             r = int(l2)
164             pg1[u] = pot1[u] * ptg * porcentaje[r]
165             pv1[u] = f_gan * pot1[u] * ptg * porcentaje[f] * porcentaje[r]
166             vbg1[u] = (1 - porcentaje[f]) * pot1[u] * pb * porcentaje[r]
167             vb11[u] = (1 - porcentaje[r]) * pot1[u] * pb
168             ganancia_gen[u] = pv1[u] - pg1[u] + vbg1[u] + vb11[u]
169         else:
170             ganancia_gen[i] = 0
171     sumal = 0
172     for i in range(dat):
173         sumal = sumal + ganancia_gen[i]
```

```
174     eg = 100 - (((suma1 / dat) * 100 ) / ve_gen[int(l1), int(l2)])
175     ec = 100 - (((suma / dat) * 100 ) / ve_carga[int(l1), int(l2)])
176     vec = ve_carga[int(l1), int(l2)]
177     veg = ve_gen[int(l1), int(l2)]
178     prom1 = suma1 / dat     prom = suma / dat
179     if show == 'show' :
180         print 'Equilibrio_Bayesiano'
181         print 'Estrategias_[Carga,_Gen_1_tipo,_Gen_2_tipo,_Gen_3_tipo_]\'
182         print ENB2
183         print 'respuesta_segun_el_juego_bayesiano_para_la_carga\'
184         print vec
185         print 'respuesta_de_la_prueba_real_para_la_carga\'
186         print prom
187         print '-----\'
188         print 'respuesta_segun_el_juego_bayesiano_para_generacion\'
189         print veg
190         print 'respuesta_de_la_prueba_real_para_generacion\'
191         print prom1
192         print '-----\'
193         print 'error_entre_el_valor_real_de_la_carga
194         y_el_valor_esperado_en_el_ENB\'
195         print ec
196         print '-----\'
197         print 'error_entre_el_valor_real_del_generador
198         y_el_valor_esperado_en_el_ENB\'
199         print eg
200         print p_t1, p_t2, p_t3
201     return ENB2, vec, veg , prom1, prom , ec, eg, dis_ray, p_t1, p_t2, p_t3
```

---

B

---

## MODELO EN PYTHON DE LA SUBASTA

## B.1 SUBASTA AL PRIMER PRECIO

```

1 import numpy as num
2 from sympy import *
3 def fun_puj(vi, media, ds, vmin, show):
4     N = len(vi) #Numero de jugadores
5     bi = num.zeros(N) #Vector de pujas
6     v = Symbol('v')
7     F_dis = num.zeros(N)
8     itg_F = num.zeros(N)
9     for i in range(N):
10        F_dis[i] = (0.5 * (1 + erf((vi[i] - media) / (ds * (2 ** 0.5))))) ** (N-
11    for i in range(N):
12        x = (v - media) / (ds * (2 ** 0.5))
13        itg_F[i] = 1.0**(N - 1)*Integral((0.5*erf(x) + 0.5)
14            **N/(0.5*erf(x) + 0.5), (v, vmin, vi[i]))
15    for k in range(N):
16        bi[k] = vi[k] - (itg_F[k] / F_dis[k])
17    def valor(bi):
18        def mayor(lista) :
19            h = 0
20            maximo = max(lista)
21            while lista[h] != maximo :
22                h = h + 1
23            return maximo, h
24        vi_aux = num.array(bi)
25        pujas = num.zeros((2, len(bi)))
26        pujas[0, 0], pujas[1, 0] = mayor(vi_aux)
27        vi_aux[pujas[1, 0]] = min(vi_aux) - 1
28        h = 0
29        while max(vi_aux) == pujas[0, h] :
30            pujas[0, h + 1], pujas[1, h + 1] = mayor(vi_aux)
31            vi_aux[pujas[1, h + 1]] = min(vi_aux) - 1
32            h = h + 1
33            h = 0

```

---

```

34     while pujas[0, h] == pujas[0, h + 1] :
35         h = h + 1
36         Pujas = num.array(pujas[:, : h + 1])
37         return Pujas
38     a = valor(vi)
39     j_gan = a[1, :] + 1
40     p_gan = a[0, :]
41     alfa = len(j_gan)
42     ganancia_j = num.zeros(N)
43     for i in range(N):
44         if vi[i] == p_gan[0]:
45             ganancia_j[i] = (vi[i] - bi[i]) / alfa
46         else:
47             ganancia_j[i] = 0
48     if show == 'show' :
49         print 'pujas_presentadas_por_los_jugadores'
50         print bi
51         print '_____',
52         print 'jugadores_ganadores_en_subasta_de_primer_precio'
53         print j_gan
54         print '_____',
55         print '_____',
56         print 'ganancia_de_cada_jugador_en_subasta_de_primer_precio'
57         print ganancia_j print '_____',
58
59     return F_dis[i], itg_F[i], bi

```

**B.2** SUBASTA AL SEGUNDO PRECIO

```
1 import numpy as num
2
3 def fun_seg_precio(vi , show):
4     N = len(vi)
5     def valor(bi):
6         def mayor(lista) :
7             h = 0
8             maximo = max(lista)
9             while lista[h] != maximo :
10                h = h + 1
11
12            return maximo, h
13     vi_aux = num.array(bi)
14     pujas = num.zeros((2, len(bi)))
15     pujas[0, 0], pujas[1, 0] = mayor(vi_aux)
16     vi_aux[pujas[1, 0]] = min(vi_aux) - 1
17     h = 0
18     while max(vi_aux) == pujas[0, h] :
19         pujas[0, h + 1], pujas[1, h + 1] = mayor(vi_aux)
20         vi_aux[pujas[1, h + 1]] = min(vi_aux) - 1
21         h = h + 1
22         h = 0
23     while pujas[0, h] == pujas[0, h + 1] :
24         h = h + 1
25         Pujas = num.array(pujas[:, : h + 1])
26     return Pujas
27     a2 = valor(vi)
28     j_gan2 = a2[1, :] + 1
29     p_gan2 = a2[0, :]
30     alfa = len(j_gan2)
31     for j in range(N):
32         if vi[j] < p_gan2[0]:
33             seg = vi[j]
```

```
34     ganancia_j2 = num.zeros(N)
35     for i in range(N):
36         if vi[i] == p_gan2[0]:
37             ganancia_j2[i] = (vi[i] - seg) / alfa + 0.
38         else:
39     ganancia_j2[i] = 0
40     if show == 'show' :
41         print 'jugadores_ganadores_en_subasta_de_segundo_preco '
42         print j_gan2
43         print '_____'
44         print 'pujas_ganadoras_en_subasta_de_segundo_preco '
45         print p_gan2
46         print '_____'
47         print 'ganancia_de_los_jugadores_en_subasta_de_segundo_preco '
48         print ganancia_j2
49
50     return j_gan2 , p_gan2, ganancia_j2
```

**B.3** INGRESO DEL VENDEDOR

```
1 def fun_seg_precio(media, ds, n):
2     n1 = n + 1
3     x1 = (vmax - media) / (ds * (2 ** 0.5))
4     f0_1 = (0.5 * (1 + erf(x1))) ** (n1 - 1)
5     x2 = (vmin - media) / (ds * (2 ** 0.5))
6     f0_2 = (0.5 * (1 + erf(x2))) ** (n1 - 1)
7     f3_0 = (vmax * f0_1) - (vmin * f0_2) v = Symbol('v')
8     x = (v - media) / (ds * (2 ** 0.5))
9     f1 = 1.0**(n - 1)*Integral((0.5*erf(x) + 0.5)**n/(0.5*erf(x) + 0.5),
10    (v, vmin, vmax))
11    f2 = 1.0**(n1 - 1)*Integral((0.5*erf(x) + 0.5)**n1/(0.5*erf(x) + 0.5),
12    (v, vmin, vmax))
13    f3 = (1. / n) * (f3_0 - f2)
14    ec_ven = n * (f3 + f2 - f1)
15    return ev_ven
```

---

C

---

INTERACCIÓN  
AEROGENERADOR–FÁBRICA DE  
CEMENTO

El siguiente ejemplo es un análisis estratégico para la adjudicación óptima de paquetes de energía entre ofertante-demandante de una micro-red que intentará reconocer las diferentes acciones o estrategias que los jugadores principales (empresa generadora de energía eléctrica y fábrica de cemento) deberán tomar para maximizar sus utilidades en el momento de la interacción venta-compra de paquetes de energía. También existirá la participación indirecta de un tercer agente realmente ajeno al juego conocido como la bolsa, el cual estará encargado de comprar la energía que sobra en el generador (la central eléctrica no puede perder la potencia generada, de esta manera la energía que no sea vendida a la fábrica de cemento tendrá que venderse a otro agente). La bolsa también participará en la compra o venta de energía que le falte o le sobre a la fábrica de cemento dado que esta necesitará mantener su abastecimiento eléctrico al 100 % para cumplir de forma eficiente con su proceso de producción (la falta de suministro energético o la sobrecarga del mismo no le beneficiará en nada a la fábrica de cemento, por el contrario, lo único que le representará son pérdidas).

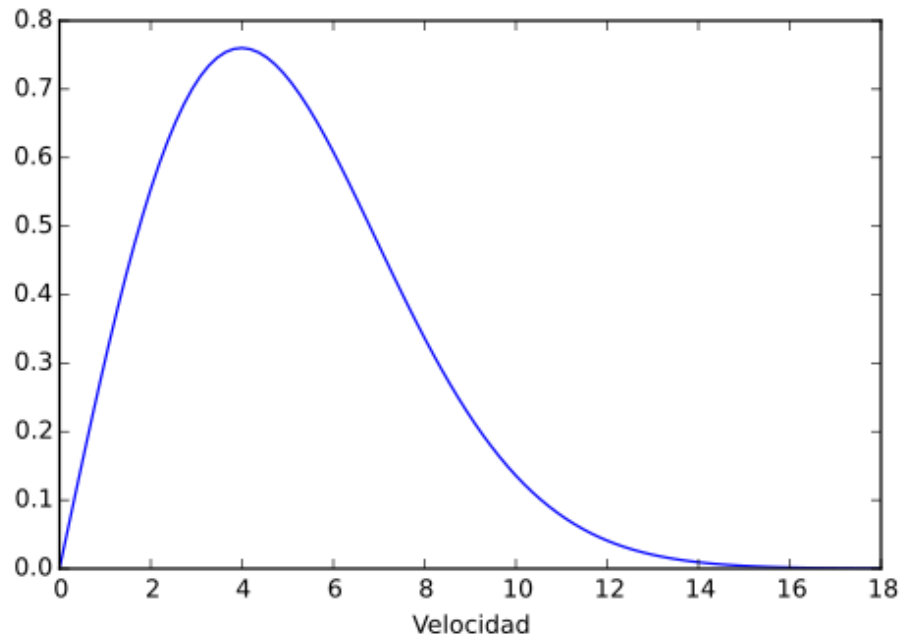
**Problema:** Dos empresas (central generadora y fábrica de cemento) tratan de llegar a un acuerdo basado en compra-venta de paquetes de energía, sin embargo, cada una de ellas intenta determinar cuál es la acción óptima que debe seguir, es decir, cuál es la estrategia que le representará los mejores pagos (ganancias) dadas las posibles opciones de juego que pueda tener su contrincante. Se debe tener en cuenta que existe una ventaja en el análisis de la empresa generadora (planta de generación eólica) dado que ella sabrá con certeza que cantidad de energía puede producir (conoce sus tipos) y que cantidad de energía necesita la fábrica de cemento (tipo de la fábrica). La carga (fábrica de cemento) deberá analizar en inferioridad de condiciones cuál será el posible comportamiento de la empresa generadora (dado que no tendrá conocimiento acerca del tipo en el cual se encuentre la empresa generadora de energía eléctrica) guiándose por medio de una base de datos tomados (velocidad de los vientos) en una determinada zona durante un año, los cuales estarán representados por medio de una función de densidad de probabilidad Rayleigh. Finalmente, se obtendrá la estrategia óptima (la que maximiza los pagos de cada jugador) para cada uno de ellos, a través del Equilibrio Bayesiano de Nash.

**Especificaciones del jugador 2 (Empresa generadora de energía):** Dado que la empresa generadora depende del viento para obtener un valor determinado de potencia, es necesario tener en cuenta qué tipo de aerogenerador se está usando, la curva de potencia, una función que modele el comportamiento del viento y la distribución de los rangos de velocidades para

---

obtener los tipos como se muestra a continuación:

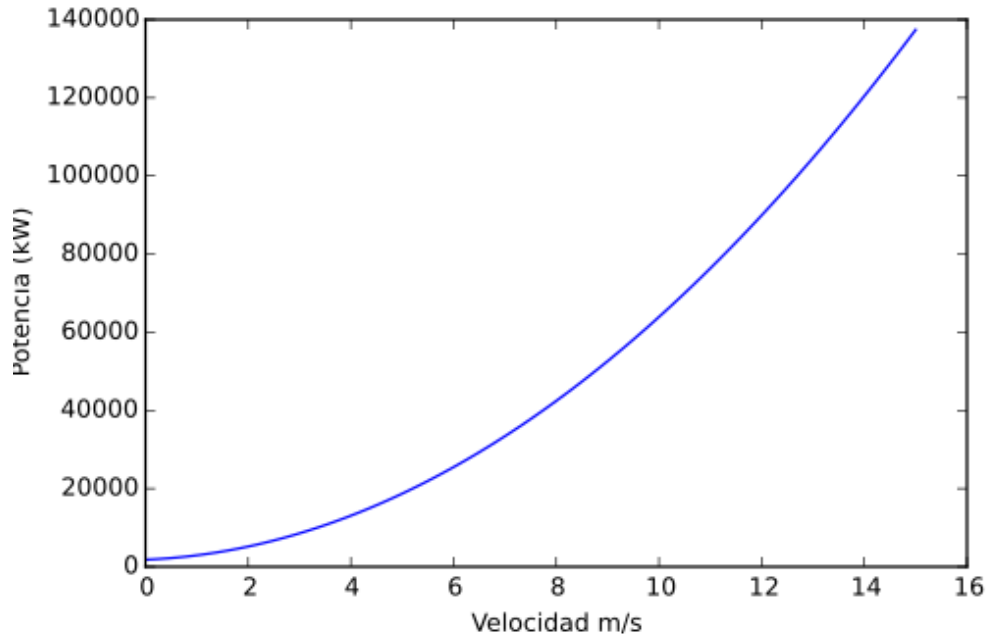
Figura C.1.: Función de densidad Rayleigh (Weibull con factor de forma igual a 2).



La figura C.1 muestra la función de densidad Rayleigh (Weibull con factor de forma igual a 2) la cual simula el comportamiento del viento en un determinado sector donde serán instalados los aerogeneradores de la empresa de generación de energía eléctrica, esta gráfica tiene los siguientes parámetros: Forma  $k=2$  y media  $\mu=5.32$ .

La figura C.2 representa la curva de potencia de los aerogeneradores de marca Windon de 30 kW que la empresa generadora de energía eléctrica piensa utilizar. Como se puede observar en la curva de potencia, el aerogenerador requiere de una velocidad de viento mínima para poder generar (cut-in) la cual será de 1 m/s para este ejemplo, además de esto también se debe tener en cuenta que si la velocidad de viento es muy elevada puede reducir la vida útil del mismo (por ejemplo se pueden presentar daños en los rodamientos). Por ello se considerará que la velocidad máxima de operación (cut-out) para este ejemplo será de 15 m/s.

Figura C.2.: Curva de potencia de los aerogeneradores en función de la velocidad del viento



Se utilizó como ejemplo un aerogenerador Windon de 30 kW desmontado. Tiene aspas de 14.4 [m] de diámetro, la altura del buje es de 24 [m], las palas están hechas de fibra de vidrio, la base o torre es de acero galvanizado con un peso aproximado de 2985 kg y un espesor de 6 [mm].

Para definir los tipos del jugador, es necesaria una distribución de velocidades los cuales tienen asignadas unas probabilidades de ocurrencia como se muestra a continuación en la tabla C.1 y la tabla C.2:

A continuación en la tabla C.1 se muestra las posibles potencias que se pueden llegar a obtener a partir de ciertos intervalos de velocidad de la turbina eólica y también las probabilidades de obtenerlas (dadas por la propuesta de harsanyi). Además, se permite visualizar la cantidad de horas al año con las que se presenta cada uno de los intervalos (frecuencia con la que ocurren las velocidades, teniendo en cuenta las probabilidades) considerando que se tomaran 8760 como el número total de horas en un año.

TABLA C.1.: Potencia distribuida en rangos

<i>Velocidades</i>	<i>Probabilidades</i>	<i>Frecuencia de (h/año)</i>	<i>kW</i>	<i>kW/h</i>
0-6 m/s	0,632120559	5537,376095	1-5	3600-18000
6-10 m/s	0,305702917	2677,957554	5-20	18000-72000
10-15 m/s	0,06024607	527,7555722	20-37,5	72000-135000

TABLA C.2.: Intervalos de velocidad y potencia

<i>Velocidades promedio</i>	<i>Probabilidades</i>	<i>Frecuencia de (h/año)</i>	<i>Potencia en kW/h</i>
3,5 m/s	0,632120559	5537,376095	10800 kW
8 m/s	0,305702917	2677,95755454	45000 kW
12,5 m/s	0,06024607	527,7555722	103500 kW

La tabla C.2 muestra cómo se van a generalizar los intervalos de velocidades y potencias mostrados en la tabla C.1 en promedios con los cuales se determinaran las utilidades para este ejemplo de juegos bayesianos.

Se debe tener presente que tras la turbina de los aerogeneradores los vientos suelen ser turbulentos (vientos que ya han traspasado las aspas del aerogenerador y han convertido su energía cinética en energía mecánica e incluso en eléctrica) lo cual se conoce como el efecto de estela. Estos vientos cuentan con una menor cantidad de energía ya que gran parte de ella se ha convertido en potencia eléctrica, por tal motivo los aerogeneradores deben tener ciertas distancias entre sí para aprovechar mejor la energía cinética del viento y a su vez para no sufrir daños mecánicos por las mismas corrientes turbulentas de aire, estas distancias por norma son de 5 a 9 veces el diámetro de las aspas (14.4 m) si se encuentran una tras de otra o de 3 a 5 veces el diámetro de las aspas (14.4 m) si se encuentran de forma lineal ósea una al lado de la otra.

Teniendo presente lo anterior se espera que el área del parque eólico sea de alrededor de 100.8 [m] de largo (tomando en cuenta una separación de 7 veces el diámetro de las aspas del aerogenerador ubicados de forma perpendicular a las corrientes del viento, es decir, uno tras otro) y 57.6 [m] de ancho (considerando una distancia de 4 veces el diámetro de las las aspas de los aerogeneradores uno al lado del otro), por tanto tendrá 5806.08 [m<sup>2</sup>] de terreno,

considerando solo dos turbinas en dirección a los vientos dominantes como se podrá observar en la figura C.3, a esto se le conoce como distribución del parque.

Figura C.3.: Distribución del parque

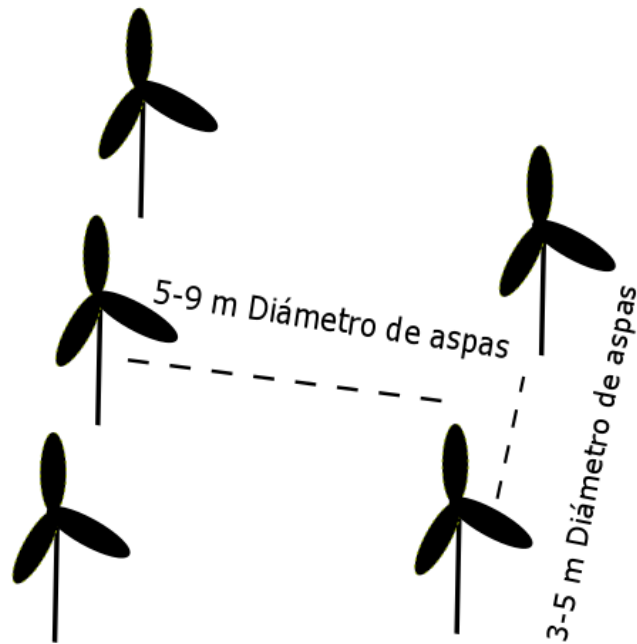


TABLA C.3.: Esta tabla presenta los costos de generación de la central generadora.

<i>Costo de generación</i>	<i>US\$/kWh</i>	<i>\$/kW</i>
Costo nivelado de inversión	15,14	37850
Costo fijo O & M	4,56	11400
Costo variable O & M	0	0
Costo combustible	22,02	55050
Total total precio/kW año	1,101	2752,5
total precio/kW h	0,000125685	0,314212329

TABLA C.4.: Esta tabla presenta los costos de los componentes.

<i>Componentes</i>	<i>US\$/kWh</i>	<i>\$/kW</i>
Equipos	2290	5725000
Obras civiles	290	725000
Ingeniería	56	140000
Instalación	179	447500
Imprevistos	290	725000
Precio total	3105	7762500
Precio total/1 año	155,25	388125
Precio total/h	0,017722603	44,30650685

A continuación en la tabla C.5 se presenta los costos totales de producción de energía (que la central eólica debe gastar para obtener la energía eléctrica) por kWh para la planta de generación eólica. El precio total al cual el generador vende el kWh es:  $\eta * 1.3$  (el valor 1.3 puede ser variable, es decir, depende de cada empresa el valor que desea de ganancia).

TABLA C.5.: Costos totales de producción de energía

<i>Costo total de la energía producida</i>	<i>US\$/kWh</i>	<i>\$/kWh</i>
Costo de generación	0,000125685	0,314212329
Costo de los componentes	0,017722603	44,30650685
total	0,017848288	44,62071918
total de 5 generadores	0,089241438	223,1035959

El generador vende la energía por kw/h a un precio de \$58,00693493 (para un solo aerogenerador). Dado que para este ejemplo la cantidad de aerogeneradores es 5 el precio total al que esta empresa vende el kW/h es de \$290,0346747. Las ganancias de la planta de producción de energía (utilidades) estarán determinadas como:  $(\text{precio de venta}) - (\text{precio de generación y mantenimiento}) + (\text{precio de venta a la bolsa})$  en caso de que la carga compre el 100 % de la energía generada el precio de venta a la bolsa será nulo. A su vez el precio de venta estará dado como:  $(\text{precio de generación y mantenimiento}) * (1,3)$ , es decir, la empresa de generación intentará ganarle el 30 % a la cantidad de energía que pueda producir. Para este ejemplo el precio de venta o compra de energía a través de la bolsa tendrá un costo de 50

\$kW/h.

TABLA C.6.: Esta tabla presenta el precio del 100 % de la energía que produce la central generadora.

<i>Velocidad m/s</i>	<i>Precio del 100 % generada</i>
3,5	2409518,836
8	10039661,82
12,5	23091222,17

TABLA C.7.: Precio de generación y mantenimiento y el precio de venta de la central generadora.

Velocidad	Porcentaje de venta	Precio de generación y mantenimiento	Precio de venta \$
3,5	100-100	2409518,836	3132374,486
	100-50	2409518,836	1566187,243
	100-30	2409518,836	939712,3459
	50-100	1204759,418	1566187,243
	50-50	1204759,418	783093,6216
	50-30	1204759,418	469856,1729
	30-100	722855,6507	939712,3459
	30-50	722855,6507	469856,1729
	30-30	722855,6507	281913,7038
8	100-100	10039661,82	13051560,36
	100-50	10039661,82	6525780,18
	100-30	10039661,82	3915468,108
	50-100	5019830,908	6525780,18
	50-50	5019830,908	3262890,09
	50-30	5019830,908	1957734,054
	30-100	3011898,545	3915468,108
	30-50	3011898,545	1957734,054
	30-30	3011898,545	1174640,432
12,5	100-100	23091222,17	30018588,83
	100-50	23091222,17	15009294,41
	100-30	23091222,17	9005576,648
	50-100	11545611,09	15009294,41
	50-50	11545611,09	7504647,207
	50-30	11545611,09	4502788,324
	30-100	6927366,652	9005576,648
	30-50	6927366,652	4502788,324
	30-30	6927366,652	2701672,994

El porcentaje de venta simboliza (porcentaje de energía que se genera-porcentaje de energía

que se vende, aplica para las demás tablas).

TABLA C.8.: Porcentaje de venta, la ganancia y la venta de la bolsa para la central generadora

Velocidad	Porcentaje de venta	Venta a la bolsa \$	Ganancia \$
3,5	100-100	0	722855,6507
	100-50	1350000	506668,4075
	100-30	1890000	420193,5103
	50-100	1350000	1711427,825
	50-50	2025000	1603334,204
	50-30	2295000	1560096,755
	30-100	1890000	2106856,695
	30-50	2295000	2042000,522
	30-30	2457000	2016058,053
8	100-100	0	3011898,545
	100-50	5625000	2111118,365
	100-30	7875000	1750806,293
	50-100	5625000	7130949,272
	50-50	8437500	6680559,182
	50-30	9562500	6500403,146
	30-100	7875000	8778569,563
	30-50	9562500	8508335,509
	30-30	10237500	8400241,888
12,5	100-100	0	6927366,652
	100-50	12937500	4855572,239
	100-30	18112500	4026854,473
	50-100	12937500	16401183,33
	50-50	19406250	15365286,12
	50-30	21993750	14950927,24
	30-100	18112500	20190710
	30-50	21993750	19569171,67
	30-30	23546250	19320556,34

Especificaciones del jugador 1 (la carga): Teniendo en cuenta que el valor al cual la fábrica de cemento vende el bulto es de 23000 pesos y que a su vez esta tiene la capacidad de producir 2083,33 bultos por hora entonces se estima que el ingreso económico que tiene la misma sera de 47916666,67 \$/h. El 56 % de estos ingresos será utilizado para cubrir el presupuesto de inversión (pago obligatorio) como se muestra continuación en la tabla C.9. el otro 44 % estará repartido entre las ganancias y los gastos energéticos de la fabrica los cuales son de 115647,0919 kW/h. Las ganancias de la fábrica de cemento se obtendrán de la siguiente manera: el ingreso económico de la fábrica de cemento luego de pagar valores obligatorios será conocido como el GSPE (Presupuesto que queda). Ahora, la ganancia neta de la fábrica estará dada por :  $(GSPE - \text{precio de venta del generador} \pm \text{precio de compra/venta a la bolsa})$  en caso de que el generador no le brinde el 100 % de la energía que la fabrica necesita o en caso de que la fabrica haya comprado mas energía de la que necesita.

TABLA C.9.: Presupuesto de inversión.

<i>Fábrica de cemento</i>		
<i>Inversión</i>	<i>Porcentaje</i>	<i>\$/h</i>
Mantenimiento y cambio de maquinaria	37,5 %	10062500
Trabajadores	18,75 %	5031250
Imprevistos	18,75 %	5031250
Insumos (material de trabajo)	25 %	6708333,333

TABLA C.10.: Costos de la producción de la carga

Produccion de fabrica de cemento			
Precio unitario del bulto	Cantidad de butltos/hora	precio total de ventas esperado	Ganacia neta 30 %
23000	2083,333333	47916666,67	14375000

TABLA C.11.: Presupuesto que queda en la fábrica de cemento.

Valor obligatorio de pago	presupuesto que queda
26833333,33	21083333,33

El presupuesto que queda es el resultado de la resta entre el precio total menos el valor

---

obligatorio de pago de la fábrica.

TABLA C.12.: Potencia y el porcentaje que la carga compra

Velocidad	Porcentaje	Porcentaje que se compra
3,5	100-100	46,69378116
	100-50	23,34689058
	100-30	14,00813435
	50-100	23,34689058
	50-50	11,67344529
	50-30	7,00406
	30-100	14,00813435
	30-50	7,004067174
	30-30	4,202440305
8	100-100	194,5574215
	100-50	97,27871075
	100-30	58,36722645
	50-100	97,27871075
	50-50	48,63935538
	50-30	29,18361323
	30-100	58,36722645
	30-50	29,18361323
	30-30	17,51016794
12,5	100-100	447,4820695
	100-50	223,7410347
	100-30	134,2446208
	50-100	223,7410347
	50-50	111,8705174
	50-30	67,12231042
	30-100	134,2446208
	30-50	67,12231042
	30-30	40,27338625

TABLA C.13.: Presupuesto que queda, la ganancia de compra de energía y los kW de energía que le sobran a la carga

Velocidad	Porcentaje	kW que sobra	kW que falta
3,5	100-100	0	12329,41837
	100-50	0	17729,41837
	100-30	0	19889,41837
	50-100	0	17729,41837
	50-50	0	20429,41837
	50-30	0	21509,41837
	30-100	0	19889,41837
	30-50	0	21509,41837
	30-30	0	22157,41837
8	100-100	21870,58163	0
	100-50	0	629,4183747
	100-30	0	9629,418375
	50-100	0	629,4183747
	50-50	0	11879,41837
	50-30	0	16379,41837
	30-100	0	9629,418375
	30-50	0	16379,41837
	30-30	0	19079,41837
12,5	100-100	80370,58163	0
	100-50	28620,58163	0
	100-30	7920,581625	0
	50-100	28620,58163	0
	50-50	2745,581625	0
	50-30	0	7604,418375
	30-100	7920,581625	0
	30-50	0	7604,418375
	30-30	0	13814,41837

A continuación en la tabla C.14 se muestra los kW que faltan y el precio de la venta y compra de energía de la bolsa para la carga. El resultado de compra y venta de la bolsa es esta dado:  $kW_{sobran} \times \text{precio de la bolsa}$  o  $kW_{faltan} \times \text{precio de la bolsa}$

TABLA C.14.: kW que faltan y el precio de la venta y compra de energía de la bolsa para la carga.

Velocidad	Porcentaje	Compra (-) y venta (+) bolsa	Ganacia de compra energía
3,5	100-100	3082354,594	14868604,25
	100-50	4432354,594	15084791,5
	100-30	4972354,594	15171266,39
	50-100	4432354,594	15084791,5
	50-50	5107354,594	15192885,12
	50-30	5377354,594	15236122,57
	30-100	4972354,594	15171266,39
	30-50	5377354,594	15236122,57
	30-30	5539354,594	15262065,04
8	100-100	-5467645,406	13499418,38
	100-50	157354,5937	14400198,56
	100-30	2407354,594	14760510,63
	50-100	157354,5937	14400198,56
	50-50	2969854,594	14850588,65
	50-30	4094854,594	15030744,69
	30-100	2407354,594	14760510,63
	30-50	4094854,594	15030744,69
	30-30	4769854,594	15138838,31
12,5	100-100	-20092645,41	11157389,91
	100-50	-7155145,406	13229184,33
	100-30	-1980145,406	14057902,09
	50-100	-7155145,406	13229184,33
	50-50	-686395,4063	13575940,54
	50-30	1901104,594	14679440,42
	30-100	-1980145,406	14057902,09
	30-50	1901104,594	14679440,42
	30-30	3453604,594	14928055,75

En este juego bayesiano el jugador dos o empresa generadora será el ofertante y el jugador

uno o fábrica de cemento será el demandante, mientras que el jugador tres o bolsa tendrá una participación de forma indirecta debido a que no se trata de un juego cerrado, su función será comprar energía que le sobre al generador o a la carga y vender energía que le falte a la carga.

Se considera un valor de bolsa de 50 \$/kW para la compra y venta de energía a cualquiera de los dos jugadores principales. A continuación se muestran las acciones de cada jugador:

El jugador uno puede elegir entre tres posibles acciones:

1. Comprar el 100 % de la energía que le ofrece la empresa de generación.
2. Comprar el 50 % de la energía que le ofrece la empresa de generación.
3. Comprar el 30 % de la energía que le ofrece la empresa de generación.

El jugador 2 también tiene la posibilidad de escoger tres posibles acciones:

- A. Vender el 100 % de la energía generada a la empresa de cemento.
- B. Vender el 50 % de la energía generada a la empresa de cemento.
- C. Vender el 30 % de la energía generada a la empresa de cemento.

El jugador dos tendrá la capacidad de generar 3 posibles cantidades de kW/h dados ciertas velocidades promedio como se mostró en la tabla C.1y C.2. Este es de un solo tipo mientras que el jugador dos es de tipo X, Y o Z. Dicho jugador uno tiene 3 posibles estrategias ya que este es de un solo tipo, es decir, tiene un solo conjunto de información. Entonces, el número de sus acciones coincide con el de sus estrategias, sin embargo, el jugador dos contiene 27 posibles estrategias debido a que este es de 3 tipos lo cual le da tres conjuntos de información con tres posibles acciones cada uno.

**Estrategias del jugador 2:** El jugador uno sabe que el jugador dos es de tipo X con una probabilidad de 63.21 %, de tipo Y con una probabilidad de 30.57 % y de tipo Z con una probabilidad de 6.024 % (como se mostró en la tabla C.1y C.2). En las tablas C.15, C.16 y C.17 presentamos las utilidades para cada una de las estrategias de los dos jugadores principales (teniendo en cuenta el tipo del jugador 2), es decir, jugador 1 o fábrica de cemento y jugador 2 o empresa de generación eólica.

Debido a que este juego cuenta con información imperfecta (ya que el jugador uno no sabe con certeza en que tipo se encuentra el jugador dos) el jugador 1 llevará a cabo sus acciones sin importar lo que haga el jugador dos, por lo tanto el jugador dos también actuará de la misma

manera ya que los movimientos o acciones del jugador 1 son impredecibles. Sin embargo el jugador dos tiene la capacidad o la ventaja de conocer en que tipo se encuentra por lo cual este podrá escoger su estrategia optima para cada uno de los tipos como ya se había mostrado en el ejemplo de la fundamentacion teorica de los juegos bayesianos. A continuación se verá con mayor claridad este análisis:

TABLA C.15.: Tipo X=3,5 m/s Probabilidad = 0,632120559

	A	B	C
1	14868604.25 , 722855.6507	15084791.5 , 1711427.825	15171266.39 , 2106856.695
2	15084791.5 , 506668.4075	15192885.12 , 1603334.204	15236122.57 , 2042000.522
3	16165737.31 , 420193.5103	15236122.57 , 1560096.755	15262065.04 , 2016058.053

TABLA C.16.: Tipo Y=8 m/s Probabilidad = 0,305702917

	A'	B'	C'
1	13499418.38 , 3011898.545	14400198.56 , 7130949.272	14760510.63 , 8778569.563
2	14400198.56 , 2111118.365	14850588.65 , 6680559.182	15030744.69 , 8508335.509
3	14760510.63 , 1750806.293	15030744.69 , 6500403.146	15138838.31 , 8400241.888

TABLA C.17.: Tipo Z= 12,5 m/s Probabilidad = 0,06024607

	A''	B''	C''
1	11157389.91 , 6927366,.652	13229184.33 , 16401183.33	14057902.09 , 20190710
2	13229184.33 , 4855572.239	13575940.54 , 15365286.12	14679440.42 , 19569171.67
3	14057902.09 , 4026854.473	14679440.42 , 14950927.24	14928055.75 , 19320556.34

Es de aclarar que las utilidades del jugador uno son las ubicadas en la parte derecha de cada uno de los cuadros presentados y las del jugador dos las ubicadas en la parte izquierda, es decir para el cuadro de utilidades de tipo X con probabilidad 0,632120559 si se escoge la estrategia de juego (1, A) la utilidad 14868604,25 es la de la fábrica de cemento y la utilidad 722855,6507 es de la empresa generadora de energía, sin embargo, es necesario recordar nuevamente que este tipo de análisis solo se hace para saber cuál es la mejor opción estratégica que tiene el

jugador 2 (en los ítems posteriores se mostrará otra posible forma de análisis con la que puede contar el jugador 2, con la cual la estrategia óptima para este se determinará por medio de pagos esperados al igual que el jugador 1). Seguidamente, se presentará la forma en la que el jugador 1 determina su estrategia óptima dadas las posibles estrategias que tenga el jugador 2.

**Estrategias del jugador 1** Si se observa con detenimiento se puede ver como en este caso las estrategias C, C' y C'' presentadas en las tablas C.15, C.16 y C.17 son estrictamente dominantes sobre las demás estrategias del jugador 2 en cada uno de sus tipos. Por esta razón, esta será la estrategia que el jugador 2 escogerá como su mejor movimiento (estrategia óptima), es decir, la que maximiza su pago.

A continuación en la figura C.4 se presenta la estructura temporal del juego, además la forma de análisis que va a tener el jugador 1 el cual tendrá que contar con unas probabilidades a priori para poder maximizar sus utilidades debido a que no tiene ni idea de en qué tipo se va a encontrar (X, Y o Z) y se mostrará la matriz total de pagos esperados la cual será de 3 columnas por 27 filas que indican los posibles pagos obtenidos en las 3 estrategias del jugador 1 contra las 27 probables del jugador 2.

**Mejores respuestas para el jugador uno** El jugador uno no conoce el tipo del jugador dos, por lo cual evalúa su pago esperado jugando sus estrategias 1, 2 o 3 para cada una de las posibles estrategias del jugador dos como se muestra en la figura C.4 y el jugador 2 consta de 27 posibles estrategias como se explicó anteriormente. Para determinar el pago esperado se utiliza la ecuación C.1 como se muestra a continuación:

$$U_i^e(a_{J2}, a_{t_1, J1}, a_{t_2, J1}, a_{t_3, J1}) = \quad (C.1)$$

$$U(a_{J2}, a_{t_1, J1}) \times p(t_1) + U_i(a_{J2}, a_{t_2, J1}) \times p(t_2) + U_i(a_{J2}, a_{t_3, J1}) \times p(t_3)$$

$a_{J2}$  : Acción tomada por el jugador 2.

$a_{t_b, J1}$  : Acción tomada por el jugador 1 dependiendo de  $t_b$  para  $b = 1, 2, 3$  ( $t_1$ : tipo 1,  $t_2$ : tipo 2,  $t_3$ : tipo 3).

---

$U_i^e(a_{J2}, a_{t_1, J1}, a_{t_2, J1}, a_{t_3, J1})$  : Utilidad esperada por el jugador  $i$ , dependiendo de las acciones de los jugadores.

$U_i(a_{J2}, a_{t_b, J1})$  : Utilidad esperada por el jugador  $i$ , dependiendo de las acciones de los jugadores en un  $t_b$  determinado.

Como se puede observar en la figura C.4 se representan los pagos esperados que tendrá el jugador uno para cada una de sus 3 acciones, dadas las posibles 27 estrategias del jugador dos. El resultado de la mejor respuesta para el jugador uno fue determinado como se muestra a continuación en la ecuación C.2:

$$\begin{aligned}
 &U_1(3, C, C', C'') \quad (C.2) \\
 &(15262065,04 \times 0,632120) + (15138838,31 \times 0,305702) + (14928055,75 \times 0,06024) \\
 &= 15174808,8
 \end{aligned}$$

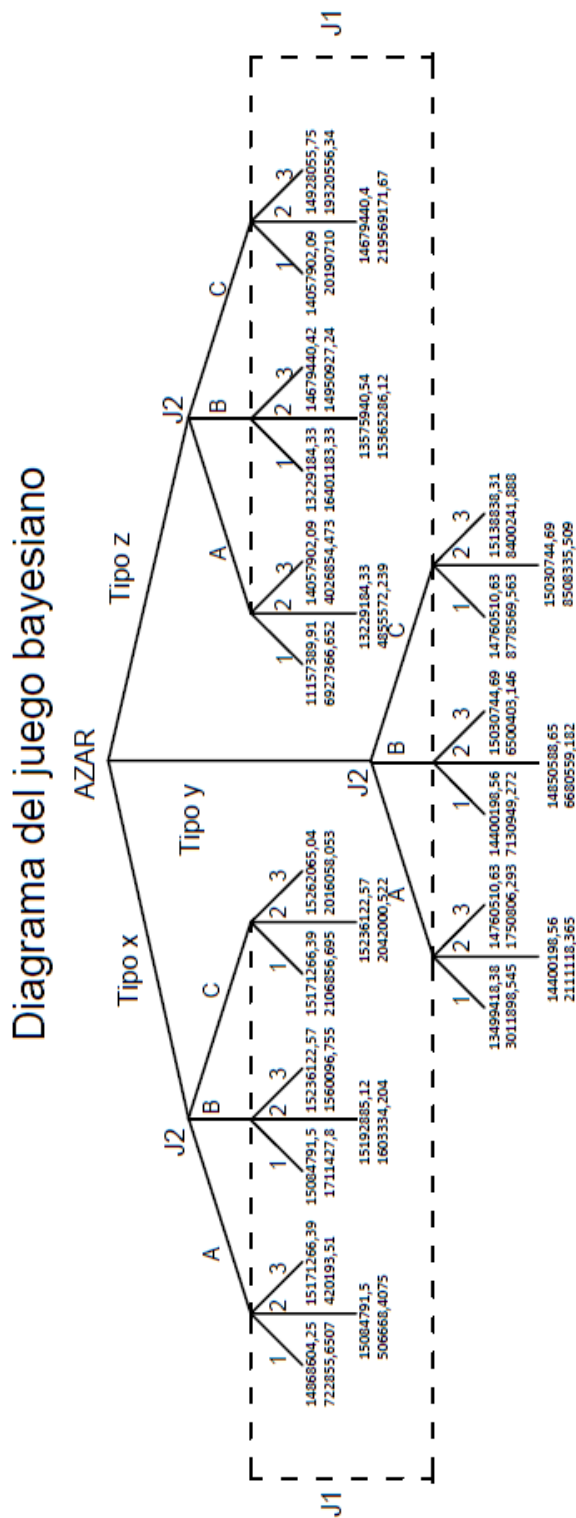
Se puede analizar que para cada una de las 27 posibles estrategias del jugador 2 la opción que mayor utilidad esperada le representa al jugador 1 es la de la acción 3 (comprar el 30 % de la energía que le ofrece la central eólica). ahora dado que la estrategia que maximizaba el pago del jugador 2 era (C,C',C'') el equilibrio bayesiano se presentará en las acciones combinadas (3;C,C',C'') debido a que son las que correlacionan las mejores utilidades para los dos participantes, es decir, la estrategia 3 siempre adjudica mejores valores o utilidades al jugador 1 y una de esas utilidades depende de que el jugador 2 juegue (C,C',C'') por lo tanto, esa será la que represente una conexión directa en la cual los dos puedan alcanzar la estabilidad de pagos deseados.

**Análisis adicional del jugador 2** Como se puede observar en la figura C.4 se representan los pagos esperados que tendrá el jugador dos dadas sus posibles 27 estrategias, para cada una de las 3 acciones estrategias del jugador 1, Estos pagos fueron determinados como se muestran a continuación:

El resultado de la mejor respuesta para el jugador 2 fue determinado como se muestra a continuación en la ecuación C.3:

$$\begin{aligned}
 &U_2(3, C, C', C'') \quad (C.3) \\
 &(2016058,053 \times 0,632120) + (8400241,888 \times 0,305702) + (19320556,34 \times 0,06024) \\
 &= 5006357,78 \\
 &\text{Resultado de la mejor respuesta para el jugador dos}
 \end{aligned}$$

Figura C.4.: Estructura temporal del juego



El análisis para el pago esperado del jugador dos es similar al realizado por el jugador 1, es decir, el jugador dos analiza cual de sus 27 posibles estrategias le representa una utilidad mayor teniendo en cuenta que el jugador 1 tendrá tres opciones de juego (1, 2 o 3). Para la acción 1 del jugador 1 se ve que la estrategia que maximiza el pago esperado del jugador 2 es (A,C',B''), ahora para la acción 2 del jugador 1 la estrategia que maximiza la utilidad esperada de 2 será (C,C',C'') y finalmente la mejor estrategia del jugador 2 a la estrategia 3 del 1 será (C,C',C''). Una vez más analizando el hecho de que los pagos esperados para el jugador 1 siempre tendrán su máximo valor en la estrategia 3 de él mismo, se puede observar que los únicos pagos esperados correlacionados entre estos serán los presentados en la estrategia (3;C,C',C'') lo cual representa un Equilibrio Bayesiano de Nash.