DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Explorando y Descubriendo

DORA SOLANGE ROA FUENTES
2028491

Rosalba Osorio A.
Directora
Profesora Titular Escuela de Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Especialización en Educación Matemática
Bucaramanga, Marzo de 2004

CONTENIDO

TITULO DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA [?]

Solange Roa Fuentes [??]

Palabras Claves: Didáctica, geometría, actividades, origami, poliedros, poliominós, teselados

En este trabajo se presenta una cartilla de "Didáctica de la Geometría", donde aparecen diferentes actividades relacionadas con material didáctico, que permite desarrollar conceptos espaciales en los niños y jóvenes. Esta cartilla está dirigida a docentes y docentes en formación, ya presenta básicamente las características que permiten que el material (origami, poliedros, poliominós, teselados y policubos) sea llevado al aula.

Las actividades aquí planteadas han sido diseñadas, teniendo en cuenta las últimas reformas en educación que desde el Ministerio de Educación Nacional se han propuesto para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Principalmente, la *geometría activa* que plantean los Lineamientos Curriculares en Matemáticas.

Las actividades planteadas fueron implementadas con los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. En el trabajo aparece un análisis de la experiencia vivida con los estudiantes, donde éstos plantearon estrategias para el desarrollo de conceptos geométricos específicos que se pueden desarrollar en el aula con la ayuda del material estudiado.

[?] Trabajo de Grado

[??] Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. Rosalba Osorio Aguillón (Directora)

TITLE DIDACTICS OFGEOMETR Y [?]

Dora Solange Roa Fuentes [??]

Key words : Didactic, geometry, activities, origami, polyhedrons.

In this work appears a record of "Didactics of Geometry", where they appear different activities related to didactic material, that allows to develop to space concepts in the children and young people. This record is directed to teachers and teachers in formation, already it presents basically the characteristics that allow that the material is taken to the classroom.

The activities consider here have been designed, considering the last reforms in education that from the Ministry of National Education have seted to improve the education and the learning of geometry. Mainly, *active geometry that* consider the curricular standards in Mathematics.

The considers activities were implemented with the students of Degree in Mathematics of the Universidad Industrial de Santander. In the work appears an analysis of the experience lived with the stud ents, where these consider strategies for the development of specific geometric concepts that can be developed in the classroom with the aid of the studied material.

[?] Trabajo de Grado

[??] Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. Rosalba Osorio Aguillón (Directora)

PRESENTACIÓN

Es infortunadamente cierto que uno de los rasgos más característicos de las clases de matemáticas, en especial en los grados inferiores es lo aburridas y tediosas que resultan para los niños y jóvenes. Tal vez, esto se deba a que la formación matemática y pedagógica de los maestros no ha sido la más adecuada.

Desde 1984, con la creación de los Marcos Generales, el Ministerio de Educación Nacional ha generado un movimiento cuyo objetivo es recuperar el estudio de la geometría en las aulas de clase, de una manera activa, donde se generen procesos de pensamiento que contribuyan al desarrollo de habilidades matemáticas. Al igual que otras ciencias, la matemática, y en especial la geometría, es una especie de juego donde los mejores son evidentemente aquellos que mejor comprenden las reglas de juego y gozan experimentando la emoción de jugar.

En este trabajo deseo presentar un primer "borrador" de la cartilla "*Didáctica de la Geometría Explorando y Descubriendo*" donde expongo una recopilación de actividades fundamentadas en el uso de material didáctico. Aquí a apartir del juego los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas exploraron y descubrieron mediante sus propias vivencias alternativas innovadoras que les ayudarán a desarrollar conceptos geométricos en sus estudiantes de una manera lúdica y creativa despertando el interés de sus educandos por el estudio de la geometría y por tanto por el estudio de la matemática.

Cada actividad está diseñada para que docentes y estudiantes conozcan y caractericen algunas alternativas de trabajo en el aula como: el origami, los poliedros, los teselados, y los policubos. Estos materiales se exploran y manipulan en cada actividad, analizando algunos conceptos geométricos que se pueden desarrollar con ellos.

Uno de los objetivos del diseño de estos talleres, es lograr que el maestro en formación vivencie y experimente por sí mismo el trabajo con el material, que agregado a su formación en Fundamentación Didáctica y Geometría Euclidiana le permita la integración entre el conocimiento formal del área y su didáctica, ya que de otra manera posiblemente no lograría plantear ninguna actividad sin conocer las características y propiedades que cada uno de estos posee.

Los estudiantes del curso "Didáctica de la Geometría y la Trigonometría" de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander del primer y segundo semestre de 2003 participaron activamente en el trabajo haciendo aportes respecto a los contenidos que se podían desarrollar con el material.

Para el diseño de cada actividad se tuvo en cuenta los aspectos presentados en las últimas reformas que desde el Ministerio de Educación Nacional se han planteado. Entre ellas, los marcos generales, los lineamientos curriculares y los estándares nacionales e internacionales.

Este trabajo se divide básicamente en cuatro capítulos:

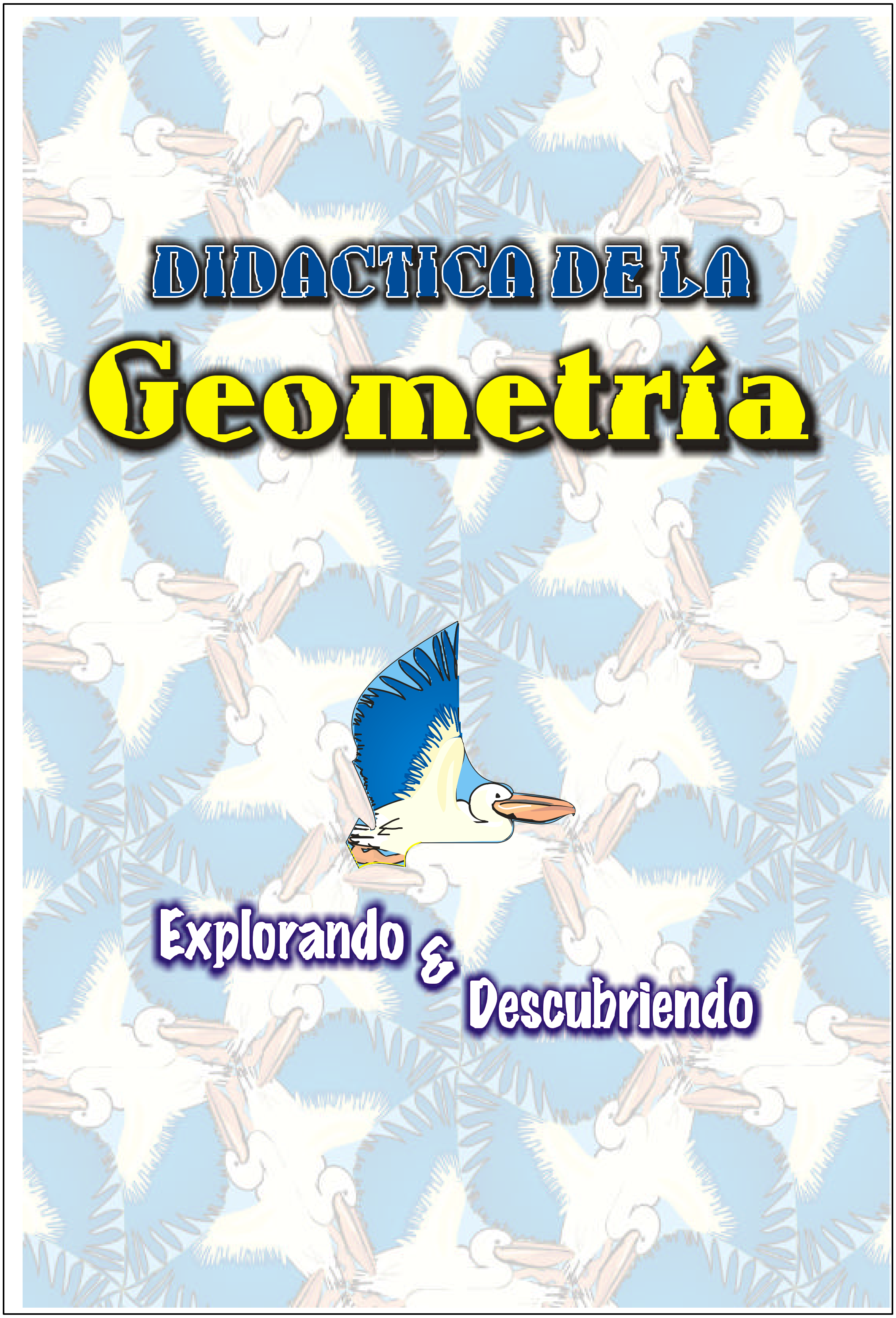
1. ***Marco teórico***. En este capítulo aparece un recuento sobre las reformas que el Ministerio de Educación Nacional se ha planteado en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Desde la "Matemática Moderna" con la abolición de la geometría, hasta los "Lineamientos Curriculares de Matemáticas"con la geometría activa.

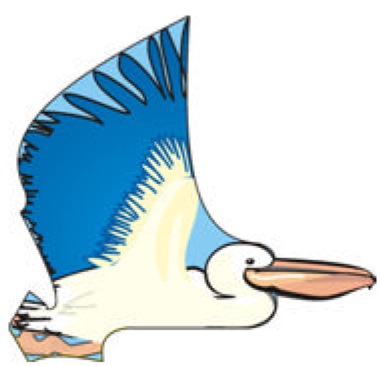
2. ***Actividades***. En este capitulo se plantean las actividades que conforma la cartilla. Cada una de ellas se desarrolló con el grupo de estudiantes de "Didáctica de la Geometría" de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, donde las preguntas permiten la exploración por parte de cada estudiante presentando diferentes alternativas de solución.

3. ***Metodología***. Allí aparece el camino que se ha seguido para la realización de este trabajo, y la manera como fue desarrollado con los estudiantes.

4. ***Implementación y análisis de las actividades.*** Cada actividad presenta algunos comentarios sobre las deficiencias y alcances que se observaron al desarrollarla, aportes que se deben tener en cuenta a la hora de aplicarlas en un grupo y que permiten la constante revisión y mejoramiento de las mismas.

Espero que docentes y estudiantes se sientan motivados a realizar contribuciones a este primer borrador de la cartilla, y que sea un aporte valioso para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.


DIDACTICA DE LA
Geometría
Explorando
&
Descubriendo



CAPITULO 1.
MARCO TEÓRICO

1. MARCO TEÓRICO

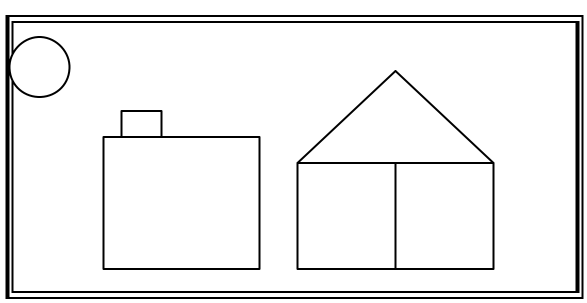
A continuación, presento una síntesis de algunos de los textos trabajados con los estudiantes que fundamentan las actividades diseñadas. En cada uno de ellos se hace mención de los aspectos en los que más hicimos énfasis, ya sea por su gran acierto o por las graves consecuencias que acarrearon. Este marco teórico se basa fundamentalmente en tres aspectos: la exploración del espacio, las reformas curriculares y el desarrollo del pensamiento espacial.

1.1 EXPLORACIÓN DEL ESPACIO

Desde su nacimiento el ser humano explora su entorno. Inicialmente observa, después descubre sus manos y la capacidad que tienen estas para tocar, descubrir y alcanzar las cosas que desea poseer. Con el tiempo el niño aprende a caminar, se empieza a desplazar, hacia delante, hacia atrás, observa arriba y abajo de las cosas y empieza a descubrir y potenciar sus habilidades espaciales (OSORIO, 2002).

Cuando los niños están en edad escolar, es necesario que la escuela continúe brindando ambientes que posibiliten y amplíen los procesos que los niños iniciaron desde su nacimiento. El desarrollo del pensamiento espacial no tiene nada que ver con el cálculo de longitudes o de áreas, está estrechamente relacionado con el desplazamiento, con una posición activa del estudiante que le permita descubrir y modelar su medio.

En 1974 Choat describió una experiencia que vivió con Johnnie un niño de seis años que asistía a la escuela. Johnnie estaba pegando y coloreando papeles para componer una figura. El investigador comenzó un diálogo con el niño sobre lo que estaba haciendo. La conversación que mantuvieron fue la siguiente:



Entrevistador: ¿Puede decirme que figura es esta?

Johnnie: Es un cuadrado

Entrevistador: ¿Qué es un cuadrado?

Johnnie dejó de pegar y miró fijamente los cuadros que componían la casita. Recortó un cuadrado azul, del mismo tamaño de los que habían estado utilizando, lo encajó sobre uno de ellos y lo hizo girar.

Johnnie: tiene cuatro lados

Entrevistador: muy bien, ¿y qué les pasa a los lados?

Johnnie: son lo mismo

Entrevistador: lo mismo... ¿Qué?

El niño trató de mostrar con sus manos que mantenían la misma distancia entre ellas. El niño había captado la relación entre los lados, pero carecía de vocabulario especializado para expresar sus pensamientos. El entrevistador hizo que pasara su dedo por los lados del cuadrado y le dijo "tienen la misma longitud". En esta experiencia, Choat se vale del aspecto visual y perceptivo, reforzándolo contorneando la figura con el dedo. Esto deja ver una clara relación entre la representación espacial y el lenguaje, que forman parte del desarrollo y la comunicación de ideas matemáticas. Investigaciones realizadas por Wheatley y Wheatley muestran que los estudiantes no son necesariamente hábiles en estos dos aspectos. Los estudiantes como Johnnie que presentan un bajo rendimiento encuentran más grato y asequible un enfoque espacial (WHEATLEY y WHEATLEY, 1979)

Un enfoque espacial de las situaciones puede generar un vocabulario adecuado y significativo para el estudiante. Donde la expresión espontánea de ideas permite un aprendizaje de las matemáticas, con la constante comunicación con el docente se pueden generar y recrear ambientes de constante aprendizaje.

Sharma basado en una reseña bibliográfica clasifica las actividades que desempeñan cada uno de los hemisferios del cerebro, donde uno se basa en las funciones lingüísticas y el otro en funciones espaciales, vemos esta clasificación:

El hemisferio izquierdo

- El hemisferio izquierdo piensa en palabras
- Procesa información a razón de un bit por vez
- La información es organizada secuencialmente
- Procesa elaboraciones detalladas, desde las partes hacia el todo
- El hemisferio izquierdo es el centro de comunicación del lenguaje en lo relacionado con lectura y habla, y se ocupa de la comprensión y la organización del lenguaje
- La descripción de los materiales visuales recibidos en el hemisferio izquierdo se hacen en forma hablada o escrita
- La actividad del hemisferio izquierdo se ocupa del procesamiento de información en el nivel abstracto de lenguaje y palabras.

El hemisferio derecho

- El hemisferio derecho "piensa" en imágenes
- Se ocupa de aspectos espaciales y visuales
- La información se procesa en función de su configuración global
- La información visual se procesa y elabora desde el todo hacia las partes
- El hemisferio derecho es el centro de la intuición y la creatividad
- Es capaz de comprender un lenguaje sencillo y elaborar pensamiento abstracto en cierta extensión utilizando símbolos y operaciones mentales asociadas a la aritmética sencilla, pero las respuestas tan sólo pueden ser expresadas señalando opciones presentadas en forma visual.
- El hemisferio derecho memoriza hechos
- El hemisferio derecho parece ser el centro para la información que ha de ser percibida, comprendida y recordada

La información que recibe el hemisferio derecho puede ser comunicada a través del hemisferio izquierdo por medio del lenguaje escrito y hablado.

Sharma identifica dos personalidades en el aprendizaje de las matemáticas: la levohemisférica donde el niño es hábil en el desarrollo de problemas a apartir de algoritmos conocidos, además de ser muy ágil para expresarse y manejar un lenguaje adecuado y, la orientación dextrohemisférica, este niño es más creativo y rápido explora vías globales para llegar a una solución e identifica pautas y regularidades. En las instituciones escolares generalmente se da más importancia a aquellos estudiantes que tienen una orientación levohemisférica ya que tiene mayor y mejor capacidad de expresión. Sin embargo, la orientación dextrohemisférica, brinda mayores habilidades de razonamiento y capacidades matemáticas. Claramente, en matemáticas tanto el lenguaje y los símbolos como las representaciones espaciales son complementarios, por lo tanto ambas deben tener la debida atención en le desarrollo de cada individuo y en todo el proceso de enseñanza de las matemáticas (SHARMA, 1979).

2. PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMA GEOMÉTRICO

Dalaney (1979) comenta sobre la educación matemática que:

- (...) La preocupación y ansiedad existentes en nuestros días porque los niños adquieran destrezas numéricas tiende a oscurecer el hecho real de que casi todo el mundo ha de afrontar con mucha mayor frecuencia problemas espaciales que problemas numéricos, ya que sea trabajando de albañil, de diseñador de ropa o de dibujante, ya en actividades cotidianas como estacionar automóviles, jugar al tenis o montar una estantería
- (...) si, como creemos, las matemáticas ofrecen, al igual que la literatura, una vía para la comprensión y la apreciativa valoración de nuestro entorno, una gran parte de tal apreciación será fruto de la comprensión y captación de lo espacial, por la palmaria razón que nuestro ambiente físico lo és.
- (...) La facilidad y destreza para lo espacial es componente esencial del funcionamiento matemático
- (...) en el corazón mismo de casi todo el pensamiento matemático parece salir un conocimiento intuitivo de las propiedades del espacio.

Analizando esto aspectos, daramente se puede ver que el desarrollo del pensamiento espacial es indispensable para desarrollar pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. Es importante considerar que muchas de las actividades científicas requieren personas que tengan un alto desarrollo de pensamiento espacial.

"Los sistemas geométricos hacen énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones mentales" (MINISTERIO DE EDUCAIÓN NACIONAL, 1998,P.56). Estos sistemas deben construirse a través de la exploración activa y modelación del espacio, donde se desarrolla un proceso cognitivo de interacciones que va desde la intuición (relacionada con la capacidad de actuar en el espacio, donde los niños y jóvenes se desplazan, tocan, calculan e interactúan constantemente con su medio) hasta la capacidad de desarrollar conceptos formalizando de una manera abstracta los objetos geométricos, analizando y reflexionando sobre sus propiedades y relaciones. Este proceso de formación del pensamiento espacial a través de los sistemas geométricos depende de las capacidades individuales y las oportunidades que la sociedad ofrece al estudiante. El objetivo es que el estudiante trate de actuar y argumentar sobre los objetos del espacio apoyándose en modelos y figuras, representaciones concretas de los objetos geométricos que le permitan construir los conceptos de una manera formal y significativa para él.

3. REFORMAS CURRICULARES

Muchas reformas curriculares y metodológicas se han planteado en los programas de matemáticas, en busca del mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la misma. Sin embargo, cuando una nueva reforma es presentada para ser aplicada en el sistema educativo, todas las partes implicadas deben estudiar la eficacia del nuevo material ya que las reformas no se deben imponer, a pesar de la evidencia cierta de que toda innovación debe suponer auténticas mejoras. A continuación haremos un recorrido por estas reformas curriculares desde el plan de estudios tradicional hasta los actuales estándares de calidad, haciendo énfasis en las oportunidades y debilidades que ha presentado cada reforma, tomando los aspectos positivos que actualmente podemos tener en cuenta en el aula.

La Matemática Moderna

En los años 60 y 70 todo el mundo estaba de acuerdo con que la enseñanza de la matemática era insatisfactoria y que el nivel en matemáticas era más bajo que en otras asignaturas. Las personas adultas reconocían que lo que habían “aprendido” en la escuela poco le aportaba en la vida real, ni siquiera recordaban cómo realizar operaciones básicas con fracciones. Esta inconformidad generó en Estados Unidos un movimiento impulsado por el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Los profesores de la escuela secundaria empezaron a escribir sus propios textos, los precursores del nuevo movimiento, aseguraban que se debían abandonar los temas de la matemática tradicional y abordar nuevos campos como: álgebra abstracta, topología, lógica simbólica, teoría de conjuntos y álgebra de Boole.

El nuevo plan era excelente para el estudio formal de las matemáticas, pero no era el más apropiado para la enseñanza escolar. Los contenidos de la reforma debían contribuir a alcanzar los objetivos de la enseñanza primaria y la secundaria y hacer asequible a los niños y a los jóvenes. Su enfoque debería hacer el contenido atractivo y ayudar en lo posible a su comprensión. La nueva matemática debería remediar por lo menos algunas deficiencias del plan tradicional.

Desafortunadamente en educación matemática no se puede afirmar si determinado principio es acertado o no. Aunque la reforma de la enseñanza de la matemática era necesaria, al parecer el plan de estudios no era la componente más débil. En 1958 National Science Foundatión inauguró varios institutos para la formación de docentes. Con el objeto enseñar a los profesores cómo enseñar matemáticas sin haberles mostrados antes en qué consistían estas y si la reforma se ajustaba a la enseñanza escolar (MORRIS)

Marcos Generales

Ante las deficiencias presentadas por la Matemática Moderna, en 1975 La administración del presidente López Michelsen inició una reforma denominada Mejoramiento Cualitativo de la Educación, donde se buscaba renovar los programas, capacitar los docentes y poner a disponibilidad medios educativos que permitieran mejorar la calidad de la educación. En 1976 se creó en el Ministerio de Educación, la Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos, la cual diseñó y experimentó en algunas escuelas del país un currículo para los grados primero atercero.

En 1978 se nombró como asesor del grupo de investigación en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional al doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe, se inició la revisión de los programas, considerando primordial la elaboración de un marco teórico que precisara los criterios que fundamentaban la enseñanza de la matemática en la educación básica, teniendo en cuenta que:

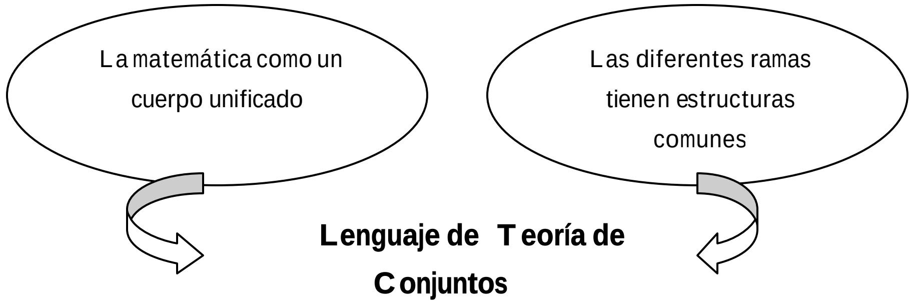
? La matemática ha impulsado de gran manera el desarrollo científico y tecnológico de la humanidad, además, de contribuir al desarrollo de otras ciencias como física, química, economía, geografía, ...

? Lo fundamental en matemáticas es la comprensión de los conceptos y el desarrollo de procesos en la solución de problemas

? Para la comprensión de los procesos y conceptos en matemáticas, es necesario conocer la simbología formal, la que proporciona un lenguaje común para el estudio de diversos sistemas que preparan al estudiante para el estudio de la teoría axiomática

? Un adecuado manejo del espacio es indispensable para el buen desempeño profesional.

Esta reforma busca principalmente: estimular las actividades y operaciones mentales, activar la capacidad de razonamiento y de desarrollar el pensamiento crítico y creativo de los estudiantes mediante la formulación análisis y solución de problemas. Mediante la compresión del lenguaje matemático preciso que está sujeto a reglas estrictas que limitan su significado para disminuir las interpretaciones subjetivas. Esta propuesta se basa en un enfoque por sistemas. (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, 1998)



Un sistema es un conjunto de objetos con sus relaciones y operaciones. Donde a cada sistema podíamos asignar una estructura determinada por las propiedades que cumplen las operaciones y las relaciones definidas. Por ejemplo: (Z, + x, <) tienen estructura de anillo ordenado.

Algunas de las ventajas de este enfoque son:

? Organiza y unifica los diversos contenidos y las diversas ramas de la matemática a través de un lenguaje común

? Facilita la articulación de la matemática con otras ciencias

? Permite desarrollar los contenidos sin caer en un énfasis desmedido en la teoría de conjuntos

Esta propuesta no persigue la formalización, sino la presentación de los conceptos básicos que se deben manejar y desarrollar en cada grado, para que sean más adelante las bases de un pensamiento formal. Esta propuesta organiza los contenidos de la siguiente manera: sistemas numéricos, geométricos, métricos, analíticos, datos, lógicos, conjuntos y relaciones y operaciones.

El sistema geométrico, presenta la geometría activa a partir de la exploración del espacio. Analizando a partir del estudio de los sólidos, las figuras planas, relaciones de paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza. En los primeros años escolares plantea el estudio de las transformaciones. En los grados superiores la representación gráfica de los objetos, las proyecciones y el dibujo técnico. Los contenidos que plantea esta propuesta específicamente para cada grado son:

Contenidos Básicos para la educación Básica Primaria

Grado	Sistemas Geométricos
1	? Relaciones espaciales - Algunos sólidos geométricos regulares ? Figuras planas, bordes rectos y bordes curvos ? Introducción a la simetría ? Líneas (abiertas y cerradas)
2	? Rectas paralelas y perpendiculares ? Rotación y giros, ángulos ? Formas geométricas regulares ? Cuadrados, triángulos ? Noción de perímetro
3	? Superficies (fronteras de sólidos) ? Superficies planas ? Líneas (frontera superficies) ? Puntos ? Caracterización de los triángulos, cuadrados, triángulos y círculo
4	? Modelos de sólidos ? Cuadriláteros y trapecios ? Perímetro (generalizado) ? Radios y diámetros ? Áreas: trapecio, cuadrado, rectángulo ? Cuadrícula
5	? Construcciones con regla y compás ? Polígonos regulares ? Construcciones de algunos sólidos ? Área del círculo ? Área y volumen de algunos sólidos

Contenidos Básicos para la educación Básica Secundaria

Grado	Sistemas Geométricos
6	? Traslaciones y paralelismo ? Rotaciones y ángulos ? Perpendicularidad ? Triángulos y cuadriláteros ? Distancias ? Teorema de Pitágoras
7	? Movimientos rígidos ? Congruencias y semejanzas ? Homotecias ? Polígonos ? Circulo
8	? Simetrías activas ? Grupo de simetrías ? Rotaciones, traslaciones y reflexiones ? Homotecias ? Área del círculo
9	? Proyecciones ? Dibujo técnico ? Cónicas ? Volumen de sólidos

La renovación curricular plantea para el desarrollo de estos contenidos una pedagogía activa que tiene como base la psicología evolutiva. La pedagogía activa basada en la experiencia física y el contacto con los elementos ya conocidos, buscando la activación de la mente y el desarrollo de potencialidades recreando experiencias lógico matemáticas teniendo en cuenta los periodos de pensamiento planteados por la psicología activa: sensoriomotriz, preoperacional, de operaciones concretas y operaciones formales. El paso de una etapa a la otra está directamente relacionado con las condiciones y oportunidades de cada individuo.

En el desarrollo de este programa bajo este enfoque se debería tener en cuenta:

- Sus características: se adecua a la forma de pensar y a las capacidades que el medio de permite desarrollar a cada individuo
- Sus posibilidades: estableciendo metas que le posibiliten al estudiante alcanzar un nivel más alto, de acuerdo a sus necesidades
- Sus necesidades: bajo un estímulo constante, que logre el desarrollo del alumno día a día mediante el desarrollo de sus habilidades de pensamiento

.

Aunque en muchos casos no se considera importante la etapa formal, el docente debe brindar la oportunidad a sus alumnos de desarrollar y estimular pensamiento formal en el área, haciendo un acercamiento a las etapas y edades mentales en que se encuentran sus estudiantes, aunque estas no sean estandarizadas ni generales, dándoles la oportunidad de vivenciar experiencias que enriquezcan su pensamiento y le brinden la oportunidad de profundizar sobre los contenidos.

Es importante reconocer que los niños pequeños son diferentes a los adultos por la manera cono reconocen la realidad, sus ideas sobre el mundo, y su lenguaje entre otras características, lo que es válido para el docente puede que no tenga ningún sentido para el estudiante. Los niños en los primeros años escolares especialmente, necesita actuar sobre las cosas para comprenderlas manipulando, rotando, cortando, etc. Años después él puede representar mentalmente las operaciones que puede realizar con los objetos, ya que más adelante puede hablar de los objetos sin observarlos, lo concreto no es lo material sino aquello que es familiar para él.

En esta propuesta se tiene en cuenta tres tipos de procesos: los cognoscitivos, los afectivos y los sicomotrices. Los procesos más importantes en el desarrollo de los sistemas geométricos son:

Procesos Espaciales:

- Proceso de ubicación espacial
  - Encontrar el camino para llegar a un sitio
  - Representación de objetos tridimensionales en dos dimensiones y de reproyección de objetos tridimensionales a partir de sus representaciones en dos dimensiones
  - Conservación de cantidad o magnitudes concretas

    - Conservación de longitud y distancia
    - Conservación de volumen y cantidad
    - Conservación de áreas
  - o Conservación de las duraciones
- Proceso de medición
- Procesos de estimación

Lineamientos Curriculares

Los Lineamientos Curriculares toman como punto de partida los avances logrados en la Renovación Curricular, teniendo en cuenta el enfoque por sistemas y la importancia de la didáctica en el desarrollo de los mismos.

"El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana" (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, 1998, p. 17)

Este enfoque permite contextualizar la matemática, conectándola con otras áreas del conocimiento y entre ella misma, buscando que los estudiantes, desarrollen actitudes y aptitudes útiles para mejorar su calidad de vida y transformar su contexto dando soluciones prácticas y creativas a problemas de la matemática relacionados con su cotidianidad.

Estas reflexiones han arrojado una nueva visión de las matemáticas escolares presentada en los Lineamientos Curriculares basada en:

- Aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de la evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.
- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

- Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de conocimiento

- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano

- Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica

- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones

- Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas

"Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo adquieren un conjunto de instrumento poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma para actuar en y para ella" (MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, 1998, p. 35). Un aprendizaje significativo de las matemáticas debe permitirle al estudiante la aplicación de sus conocimientos en cualquier contexto (dentro o fuera del aula) en el momento en que sea necesario, realizando razonamiento lógicos que le permitan defender y argumentar sus ideas, aceptando la diferencia. Es por esto que en los Lineamientos Curriculares se consideran tres grandes aspectos para organizar el currículo:

- *Procesos Generales* que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- *Conocimientos Básicos* que tiene que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propias de las matemáticas.

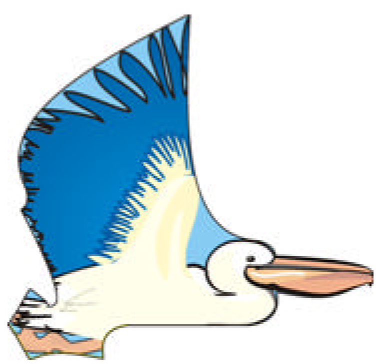
Los procesos se relacionan específicamente con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Los sistemas son los propuestos desde la Renovación Cunicular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos. Los contenidos se convierten en un pretexto para desarrollar habilidades de pensamiento matemático, uno se convierte en el complemento del otro para lograr una fuerte "red" interconectada de conocimientos fuertemente conectados y relacionados.

- *El Contexto* es todo aquello que es familiar para el estudiante, su cotidianidad, donde el puede dar sentido a la matemática que aprende. El contexto se convierte en un recurso generador de situaciones significativas para los estudiantes, donde encuentran sentido a los conceptos y relacionan los contenidos con su vida cotidiana, desencadenando preguntas interesantes y dando la posibilidad de descubrir las matemáticas.

Dentro del desarrollo de los conocimientos básicos, analizaremos solo el *Pensamiento Espacial y los Sistemas Geométricos*. La propuesta de Renovación Curricular, hizo énfasis en la geometría activa como una herramienta de exploración y representación del espacio que permitía desarrollar los sistemas geométricos. La propuesta de los Lineamientos Curriculares para desarrollar pensamiento espacial se basa en tres aspectos fundamentales:

? Geometría activa
? Representación bidimensional del espacio tridimensional
? Las transformaciones

Aspectos que fundamentan las actividades presentadas en este trabajo.



CAPITULO 2.
METODOLOGÍA

METODOLOGÍA

Diferentes hechos han motivado e inspirado para la creación de este proyecto. Haré una mención específica de algunos de ellos, ya que son estos los que dan inicio a la realización de este trabajo.

1. Desde el año 2000 inicié mi trabajo con el Grupo Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT - UIS), donde conocí diferentes aspectos de la matemática y su didáctica, principalmente aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Detectando que existían diversos enfoques que facilitaban el aprendizaje de la geometría y que eran cruciales a la hora de resolver una situación que involucrara conceptos y propiedades geométricas. En este mismo año participe en el proyecto "Introducción de las Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas", que en nuestro departamento (Santander) se enfocó principalmente hacia el estudio de la geometría, mediante el uso del programa Cabri - Geometry en la calculadora TI - 92. Como resultado de esta actividad en el año 2001 presente mi monografía, donde mediante el uso del programa Cabri diseñé y experimente algunas actividades para desarrollar conceptos geométricos en los niños de quinto grado de primaria.

2. En el año 2001, se creó el Semillero Matemático donde tuve la oportunidad de iniciar un trabajo dirigido directamente a estudiantes de diferentes colegios de la ciudad en donde a partir de la matemática recreativa y el uso de material didáctico se busca que los niños y jóvenes mejoren su actitud hacia la matemática y de esta manera mejoren su aptitud matemática. En este grupo de trabajo pudimos detectar que los niños tenían graves dificultades para resolver problemas que involucraban conceptos básicos de geometría y que en algunos casos aunque repetían de memoria algunas definiciones no podían hacer uso significativo de ellas a la hora de resolver una situación que involucrara dichos conceptos. Esto nos motivo a iniciar un proceso de diseño de actividades que desarrollaran conceptos geométricos en los niños y que además potenciaran su capacidad espacial.

3. La Escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander, junto con la

Secretaría de Educación Departamental, inició el proyecto "Acompañamiento. y Fortalecimiento a las Instituciones Escolares", donde diferentes integrantes de EDUMAT participamos como "acompañantes" en el equipo de matemáticas. Este trabajo con docentes y estudiantes de tercero y quinto grado de primaria nos permitió detectar que una de las dificultades que tienen los profesores de primaria, es que no manejan los conceptos básicos de matemáticas, ya que en su mayoría no son especialistas en el área. Estos docentes solicitaban constantemente al equipo información sobre estrategias y metodologías que les permitieran mejorar su práctica docente y despertaran el interés de los estudiantes por aprender.

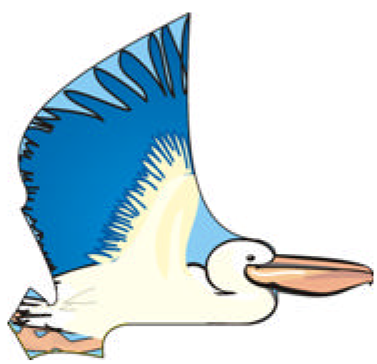
Teniendo en cuenta la necesidad de un documento que recopilara actividades que en alguna medida, contribuyan al mejoramiento de la calidad de la educación y ante la necesidad de presentar un proyecto como requisito para culminar el programa de Especialización en Educación Matemática, inicio el estudio y la recopilación de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría donde mediante la exploración y descubrimiento se presente a los niños y jóvenes la oportunidad de descubrir y reconocer el mundo en que se encuentra, teniendo en cuenta las últimas reformas que desde el Ministerio de Educación Nacional se han generado.

Considero que somos los docentes los encargados de presentar el camino a nuestros estudiantes para que ellos desarrollen conceptos y generen conocimiento, estas actividades que propongo se aplicaron y desarrollaron con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del primer y segundo semestre del 2003, en el curso "Didáctica de la Geometría y la Trigonometría".

El curso "Didáctica de la Geometría y la Trigonometría" fue desarrollado durante cuatro horas semanales, dos teóricas y dos práctica; en las horas teóricas, se hizo el análisis de las reformas educativas que se han dado sobre el currículo y la didáctica de la geometría, desde la llamada "matemática moderna" hasta la presentación de los Lineamientos Curriculares". En las horas prácticas se trabajaron las actividades contextualizando la parte teórica con cada problema planteado, es decir, aquellos aspectos que eran analizados como positivos o negativos se tenían en mente a la hora de desarrollar o plantear una actividad.

Las clases práctica se dividían principalmente en las siguientes fases:

- Presentación de la actividad
- Desarrollo de los problemas planteados durante la clase
- A partir de la experiencia de cada estudiante con el material, ellos debían diseñar una propuesta para desarrollar algún concepto geométrico mediante el material que acababan de conocer. Teniendo en cuenta los aspectos analizados en las clases teóricas, es decir, que las actividades contribuyeran al desarrollo del pensamiento espacial, que tuviera en cuenta el grado y la edad de los estudiantes a los que se presentaba.



CAPÍTULO 3
ACTIVIDADES

Origami

OBJETIVOS

- Construir algunas figuras básicas en origami que permitan a los estudiantes aprender los principios de este arte

- Plantear estrategias que apoyadas en el origami permitan iniciar la familiarización de los estudiantes con algunos conceptos geométricos

METODOLOGÍA

En esta actividad se construyen un grupo de estrellas y figuras geométricas en origami que son la base para desarrollar algunos conceptos geométricos además de ser un pequeño mini –curso que ofrece las bases necesarias para continuar avanzando en la creación y diseño de figuras más avanzadas que despiertan el interés y la creatividad de los estudiantes, mediante el análisis de la forma. A continuación se presenta un ejemplo de la manera como se dirigieron cada una de las clases de origami, buscando siempre desarrollar conceptos geométricos, identificando y clasificando las formas que se podían encontrar, buscando relaciones entre las formas encontradas y las originales. Además se presentan las partituras de las figuras realizadas, en los anexos se encuentra una exposición de estos diseños construidos durante el curso.

Como resultado de esta actividad los estudiantes plantearon algunas actividades que mediante el origami, buscan desarrollar conceptos geométricos en los niños y jóvenes

Algo de Historia

(BUITRAGO, 2001)

El origami es una disciplina, un arte educativo en el cual las personas desarrolan su expresión artística, este arte se vuelve creativo, luego pasa a ser un pasatiempo y en los últimos años esta tomando vuelo desde el punto de vista matemático y científico. En sí, origami es una palabra de origen japonés que significa doblar papel y tomando este significado se creó la palabra de origen europeo: papiroflexia, con la cual se define este arte en España.

El origami tiene varias facetas, se pueden considerar los plegados y el desarrollo del papel por separado, estos tuvieron un inicio poraparte pero luego se fusionaron en lo que conocemos ahora. Siempre se ha pensado que el origami es un juego en donde se hacen figuras sencillas y relacionadas con los seres vivos, esto fue en sus comienzos, pero el origami permite la creación de figuras de dimensiones inimaginables desde elefantes de 2.70 m de altura hasta pájaros hechos de cuadrados cuyo lado tenía 4 milésimas de cm. Hay figuras que toman muchas horas (y días) de trabajo.

En España toma el nombre de papiroflexia y sus figuras tradicionales son la pajarita y el pájaro aleteador. En Europa se desarrolla el plegado en telas, principalmente en Italia en el siglo XVI. El primer libro impreso de origami se publicó en 1797 y se llamó Sembatzuru Orikata (el plegado de las mil grullas). El origami japonés se dio a conocer más cuando luego de 200 años de aislamiento con el mundo, el Japón fue reabierto en 1854 por el comodoro norteamericano Perry. A mediados del siglo XIX en Alemania, Frobel desarrolló cursos de origami a nivel escolar.

Respecto al papel, que en sus inicios se fabricaba de fibras vegetales, fue obteniendo diferentes calidades de acuerdo al sitio de elaboración. En el Japón se fabrica aún el papel de arroz y fue denominado kami-orimono, orisue, origata, tatamigami; y el papel llamado hashi que era blanco y rectangular. A fines del siglo XIX un vendedor europeo llevó a Tokio papel de colores, desconocido allá, este tuvo una amplia acogida que hizo que el origami mejorara su calidad y se impuso sobre todo la forma cuadrada para realizar figuras.

En el siglo XX empezó un mayor auge, el primer libro publicado en Estados Unidos fue "Fun with Paperfolding" en 1928. Luego durante los años 1950-60, Akira Yoshizawa creó un código internacional para representar los dobleces, estaba unificado el origami, de aquí en adelante la publicación de libros aumento considerablemente, inicialmente en el Japón con Isao Honda y luego en Inglaterra con Robert Harbin. Esto hizo que la gente comenzara a agruparse y en 1958 se creó FOCA (Friends of Origami Center of América, actualmente Origami USA), en 1967 la British Origami Society y asi se desarrollaron grupos en todos los países como Francia (1978) y España (1981). Actualmente existen autores de renombre mundial como Kunihiko Kasahara y Tomoko Fuse en Japón, Robert Lang y John Montroll en Estados Unidos, Vicente Palacios en España, Peter Budai en Hungría (quien publicó su primer libro a los 12 años, actualmente tiene 17). Aparte de eso hay muchos origamistas, que aunque no han publicado mucho son muy conocidos en el mundo de origami, como Jeremy Shafer, Tom Hull y Mette Pederson en Estados Unidos, Joseph Wu (quien maneja la página web mundial de origami, http://www.origami.vancouver.bc.ca) en Canadá, Alfredo Guinta en Italia, Marteen Van Gelder en Holanda y otros que se escapan.

En Colombia se están dando los primeros pasos, han existido grupos aislados y se han dictado cursos en los que la respuesta de los participantes al finalizarlos es muy poca. En los últimos años se han publicado artículos divulgativos en revistas y periódicos y apenas están llegando a las librerías y bibliotecas los primeros libros especializados. Ya se han realizado cuatro Encuentros Colombianos de Origamistas y ha habido mucho interés de los participantes.

El interés de los grupos es desarrollar nuevas aplicaciones las cuales se han hecho de diferentes maneras: figuras con movimiento, plegados modulares, es decir, unir varias piezas similares para hacer poliedros, se hacen plegados con los billetes y con formas diferentes al cuadrado: triangulares, hexagonales, pentagonales e incluso circulares.

La actualización de la industria del papel hace que se incluyan nuevos materiales para realizar las figuras. La tecnología ayuda bastante a su divulgación, han salido películas, videos, programas para computador, discos compactos, e inclusive con la popularización de las redes computacionales, han sido creados grupos de discusión de gente interesada que combina estas dos disciplinas y es más, se pretende imponer un código para representar los dobleces sin necesidad de diagramas.

Para hacer un plegado tan solo se necesitan las manos y el papel, pero también hay herramientas como pinzas que ayudan a un mejor manejo del papel, así como escuadras, bisturís y navajas, aunque solo para obtener la forma deseada para iniciar la figura. Los ortodoxos dicen que en el origami los cortes y el uso de pegamento no están permitidos, pero últimamente se cuestiona esto.

El tipo de papel para hacer los plegados no necesariamente tiene que ser especial, cualquier papel sirve, de regalo, empaques de dulces, publicidad, periódico, papel bond, luego con el tiempo se puede utilizar papel de colores como el silueta, silueta mate, iris, arte y por último ya para figuras de exposición, el papel de arroz, el papel japonés de doble faz, es decir dos colores, algunos de estos papeles se humedecen o se les aplica un revestimiento de pegamento diluido en agua antes de doblarlos para conseguir resultados muy buenos. Los nuevos materiales ayudan a que haya modelos de alta calidad, tipo exposición.

Para doblar una figura no se necesita ser un experto, solo hay que recordar unos cuantos consejos al trabajar, los cuales harán de alguien, un buen origamista:

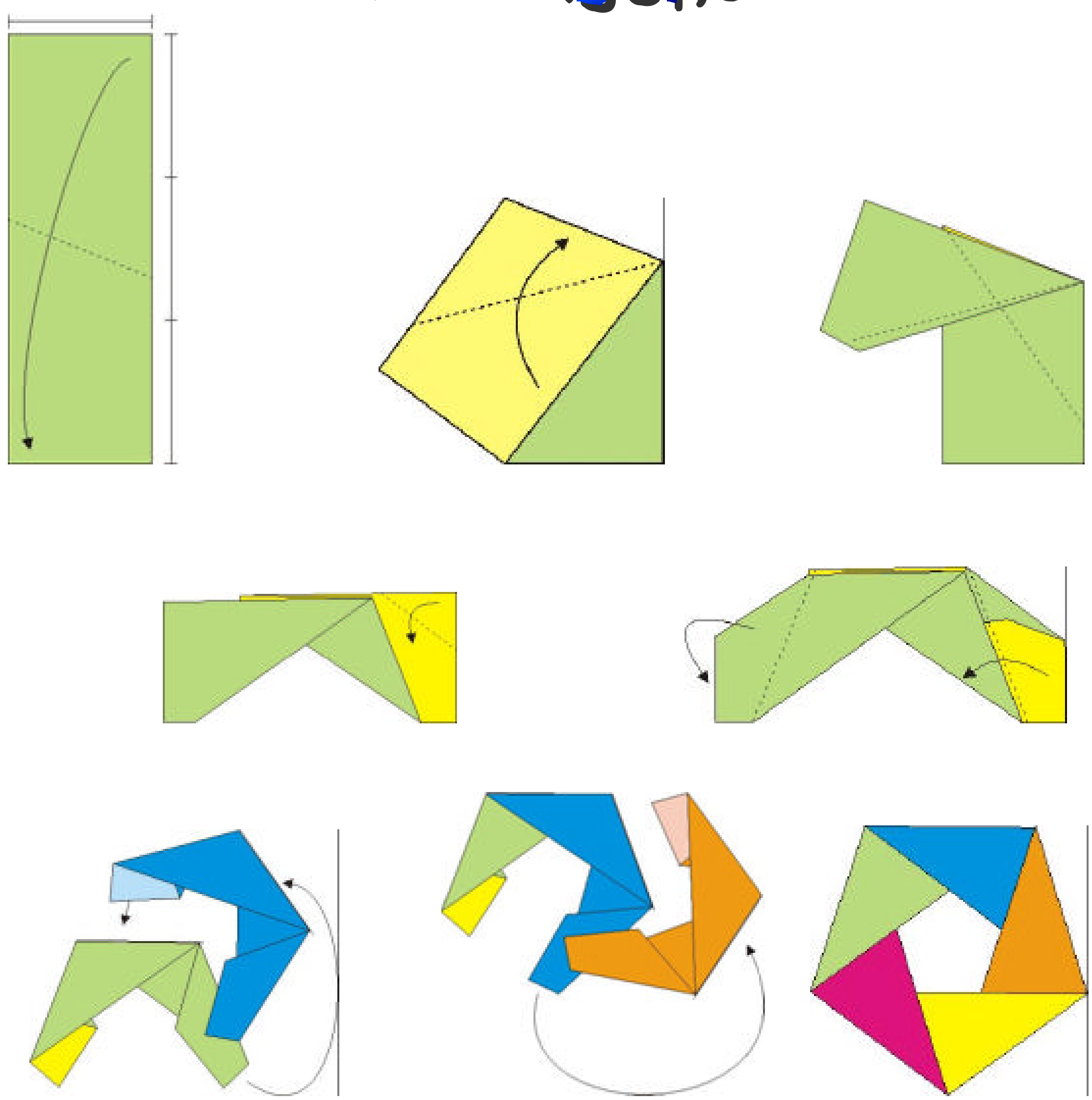
- Utilice papel manejable.
- Realice un plegado cuidadoso y pulcro, especialmente en los vértices.
- Trabaje en una superficie dura y lisa, esto da más exactitud.
- La exactitud se alcanza pasando la uña del dedo pulgar a lo largo del pliegue. Los pasos siguientes serán más fáciles.
- La exactitud mejora la calidad de la figura terminada.
- Siga cuidadosamente la secuencia de cada modelo.
- No elimine pasos.
- Ponga atención a cada paso, su dirección y ejecución.
- Practique y piense como generar nuevas figuras.

El origami está en estos momentos pasando de una manualidad tradicional a una afición intelectual y científica.

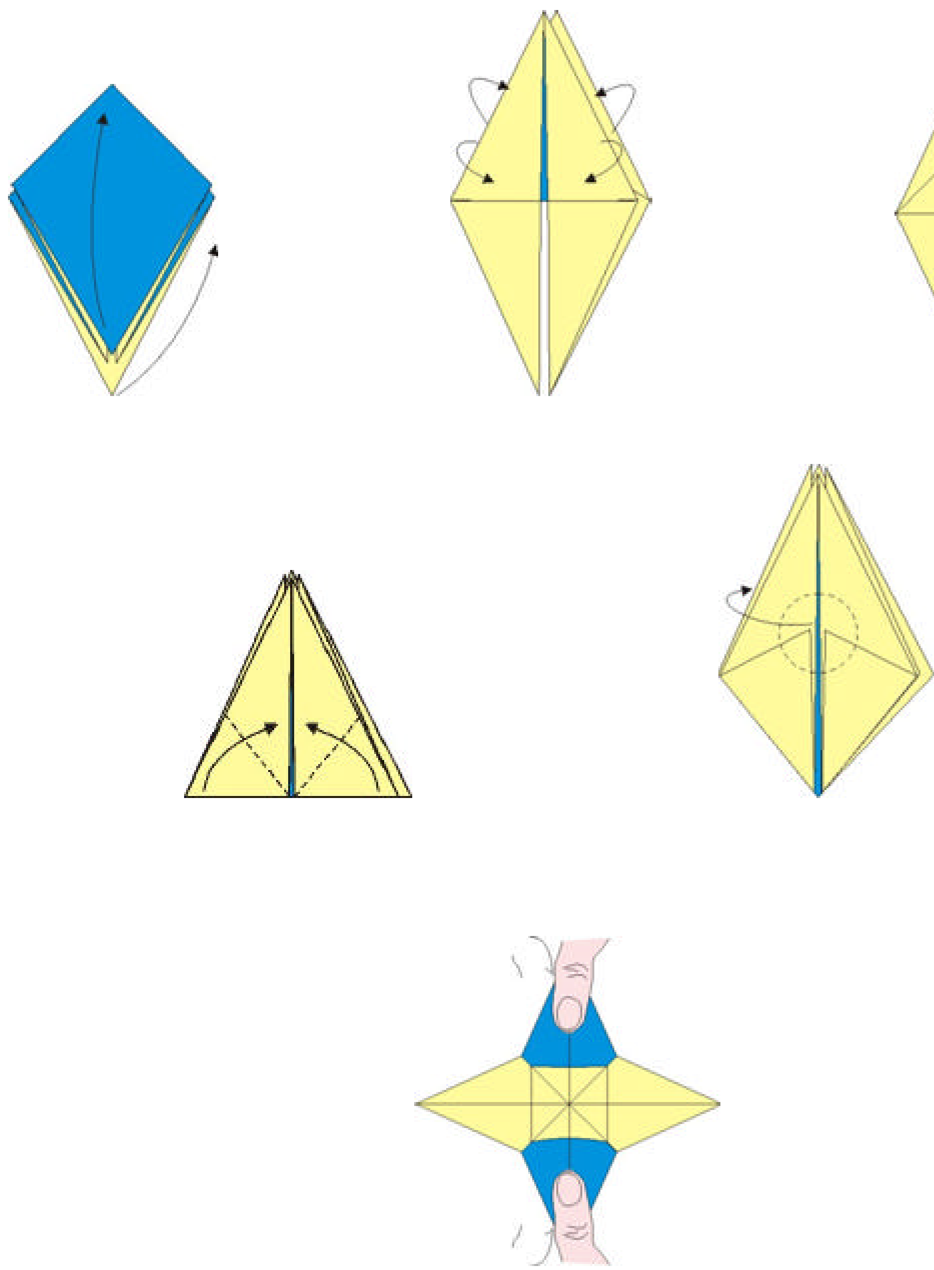
Partituras

A continuación se encuentran cada una de las partituras de las figuras realizadas por los estudiantes. Cada una de ellas muestra los pasos que se deben realizar para obtener cada una.

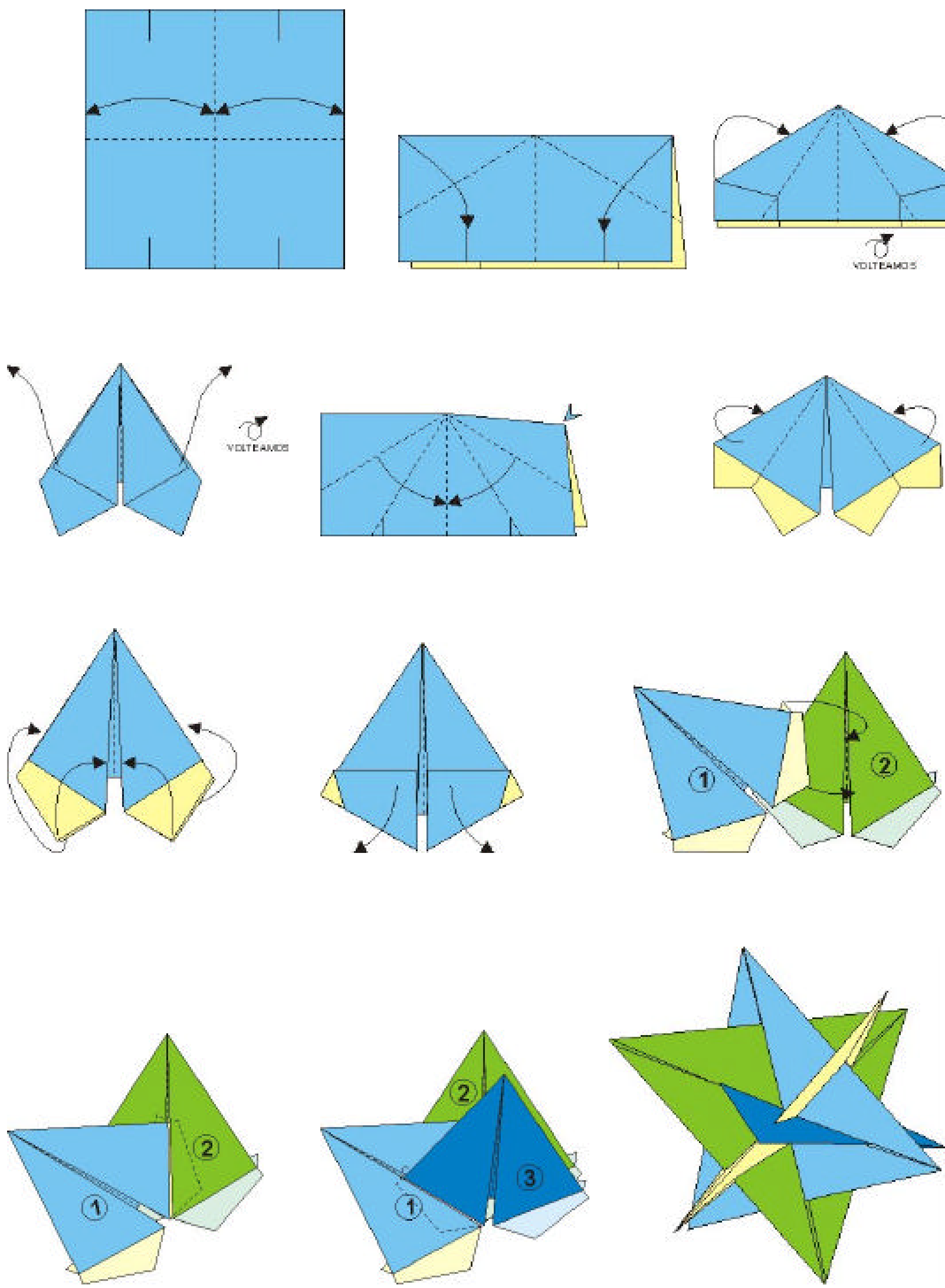
Pentágono



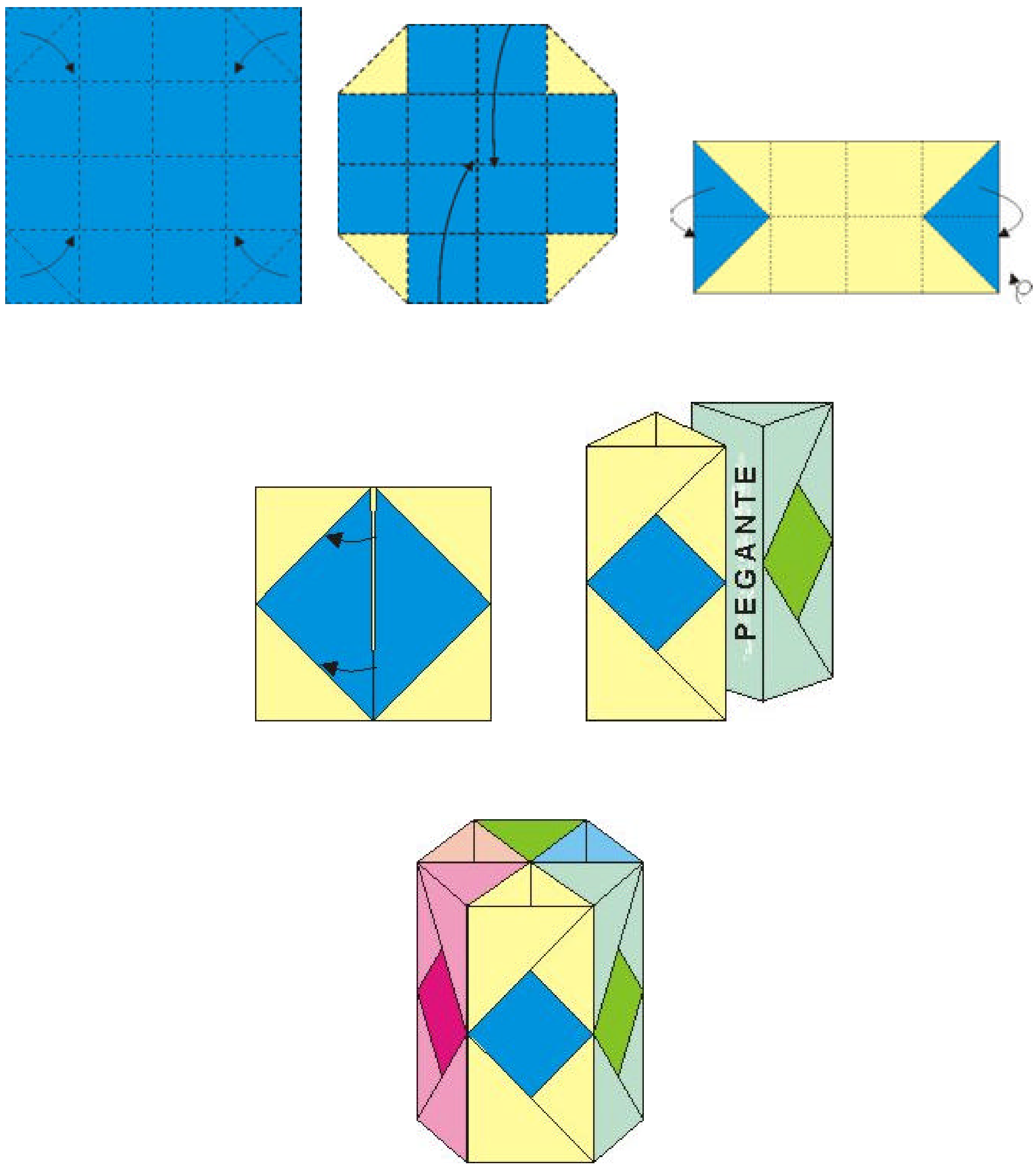
Estrella Múltiple



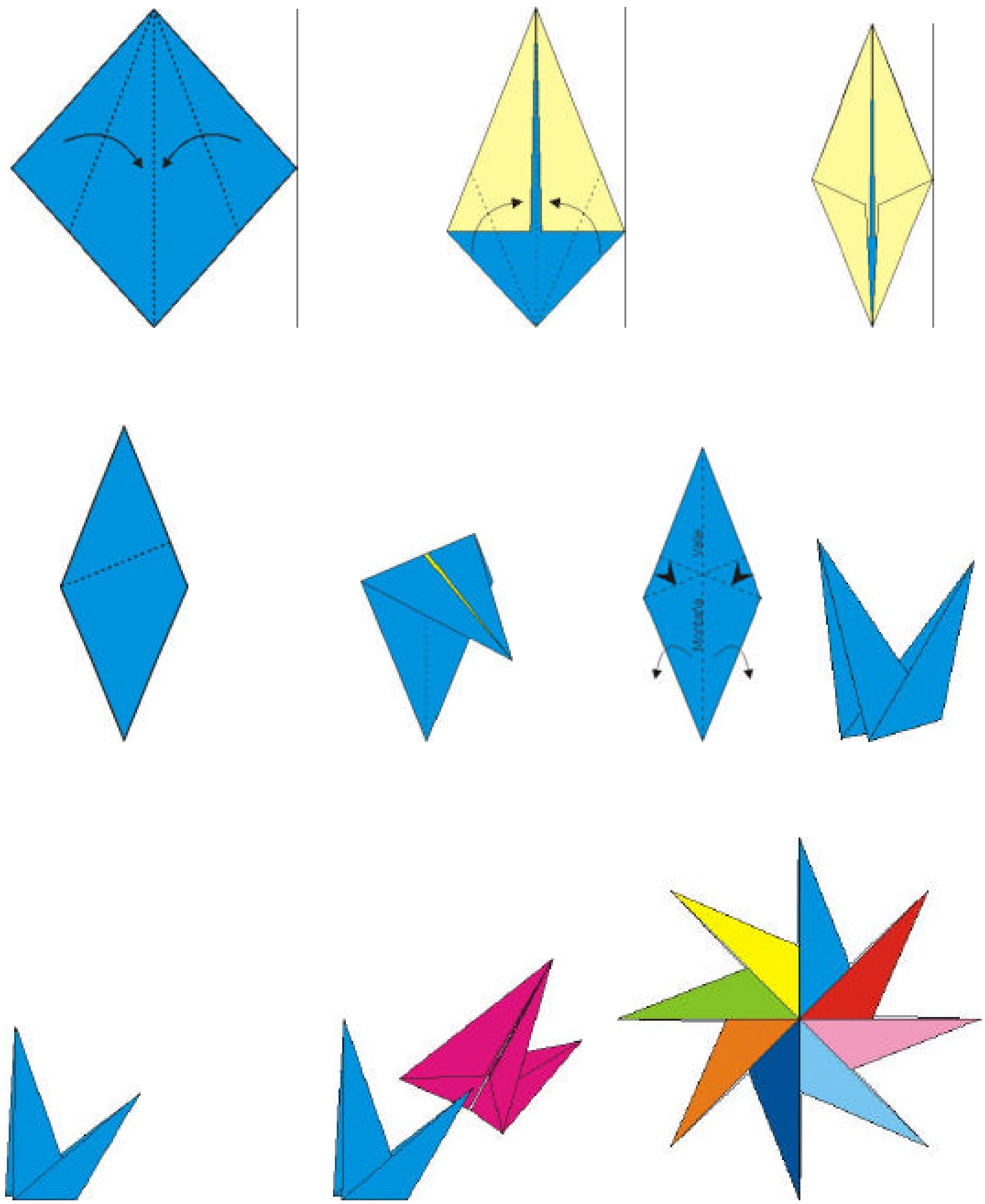
Estrella Multitriangular



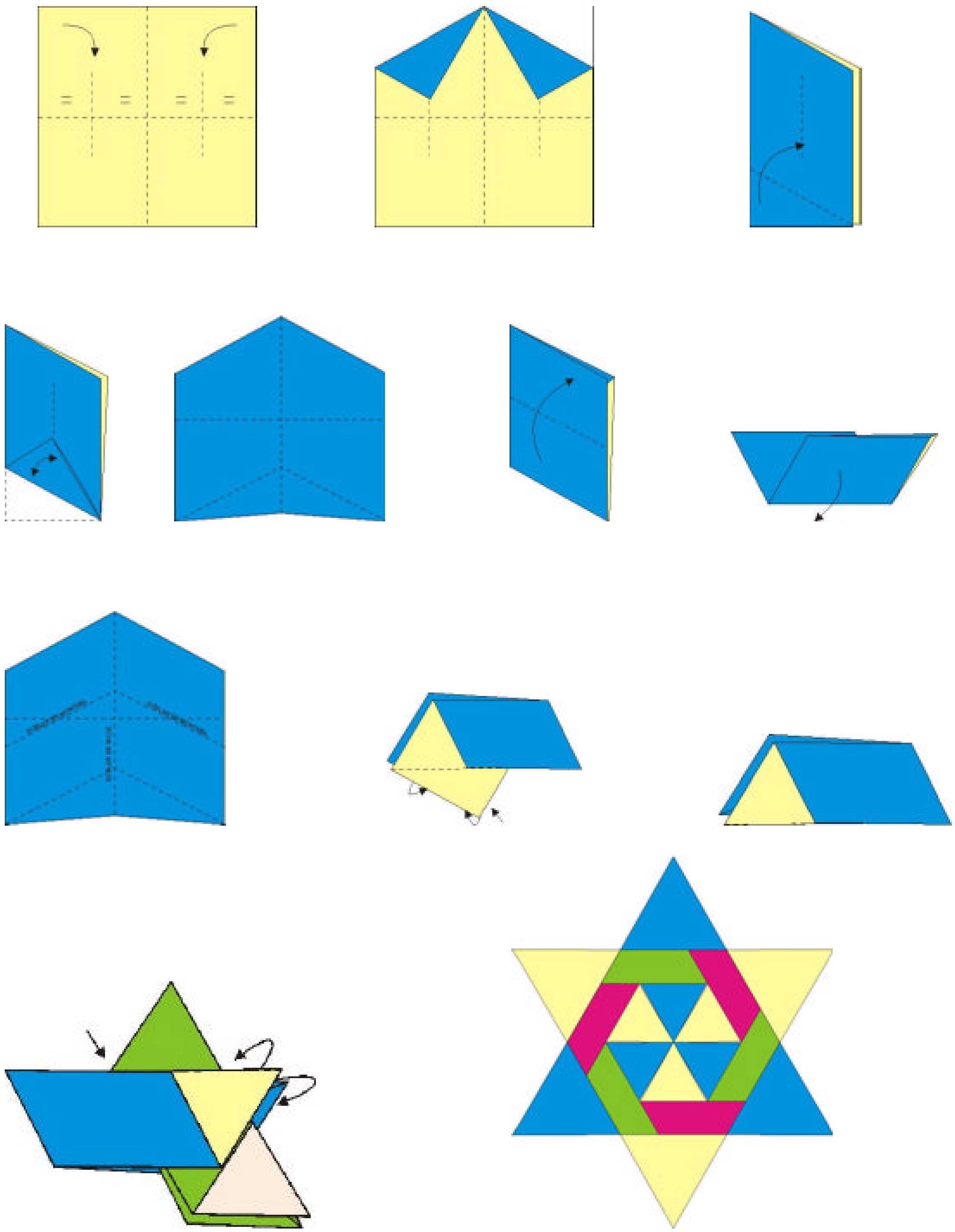
Porta Lápices



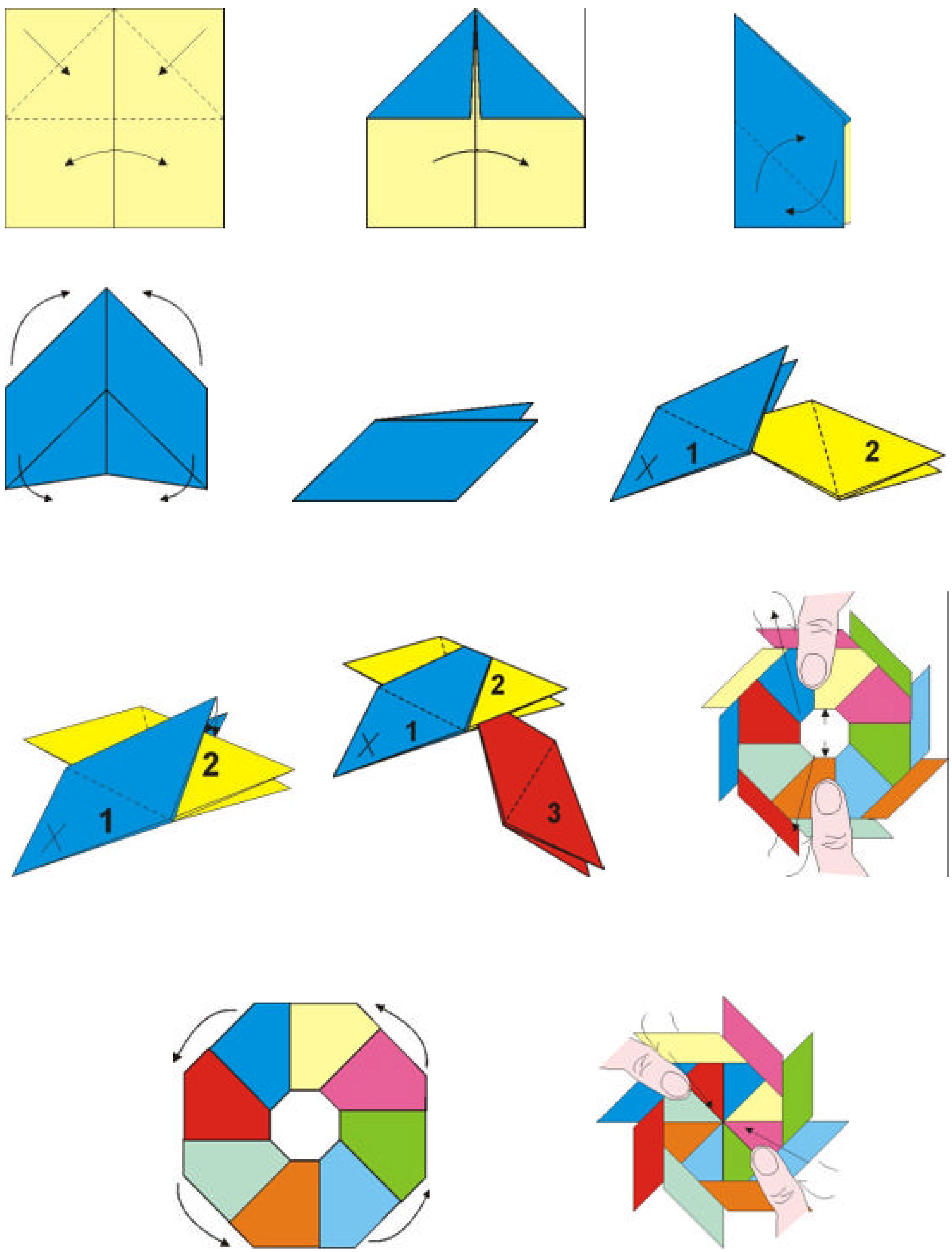
Estrella de Ocho Puntas



Estrella de David



Estrella Corona



POLIEDROS

OBJETIVOS

- Construir diferentes modelos de poliedros
- Clasificar los poliedros caracterizándolos según el número de caras, vértices y aristas
- Realizar un estudio acerca de los poliedros Platónicos (regulares), su historia, existencia y construcción
- Diseñar una propuesta innovadora para la enseñanza de algún concepto geométrico, teniendo en cuenta el estudio de los poliedros

METODOLOGÍA

Inicialmente se construyen los poliedros regulares en origami (tetraedro, hexaedro, octaedro, icosaedro y dodecaedro). Analizando la geometría que se puede identificar mediante el plegado de papel

Los estudiantes construyen además, otros modelos de poliedros lo que permite caracterizarlos mediante la observación.

Los estudiantes plantean actividades didácticas para el desarrollo de conceptos geométricos basados en la observación y creación de los poliedros

POLIEDROS

Una manera interesante de iniciar el estudio de los poliedros es a partir de la construcción de estos en diferentes materiales y distintas formas que permitan explorar sus propiedades y descubrir sus características. Realizando clasificaciones según el numero de caras, vértices y aristas; el número de aristas que converge por cada vértice; el número de lados del polígono base (en caso de que sea regular); en poliedros cóncavos y convexos; es decir, en todas aquellas características que permitan diferencias un poliedros del otro estableciendo diferentes categorías.

Ya que la organización del mundo de los poliedros conocidos y los nombres dados a las clases se hacen a partir de observaciones "ingenuas", una buena manera de comenzar a organizar los poliedros puede ser delimitando previamente las observaciones.

Por ejemplo:

- Poliedros con todas las caras iguales
- Poliedros con caras laterales iguales
- Poliedros con todas las caras regulares
- Poliedros con todas las caras de la misma clase; todas sus caras son triángulos, o rectángulos, ...
- Poliedros con el mismo número de caras.
- Poliedros con todos los vértices del mismo orden. Llamaremos orden de un vértice al número de caras que concurren a él
- Poliedros con vértices de más de una clase
- Poliedros que están inclinados
- Poliedros que tienen "bases". Tienen dos polígonos que los juntamos con una banda de polígonos para formar un poliedros
- Poliedros que tienen claramente una cara donde apoyarse
- Poliedros que cumplen varias de las condiciones anteriores.

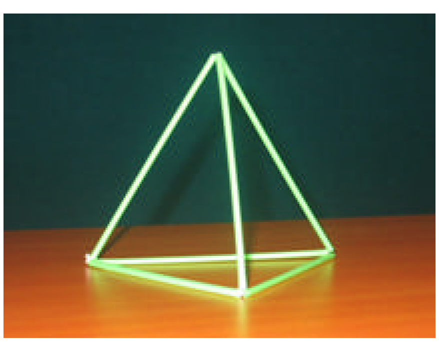
A continuación empezaremos con una breve clasificación de los poliedros Platónicos (Poliedros regulares). Iniciando con la construcción de algunos modelos

Manipulando y Descubriendo

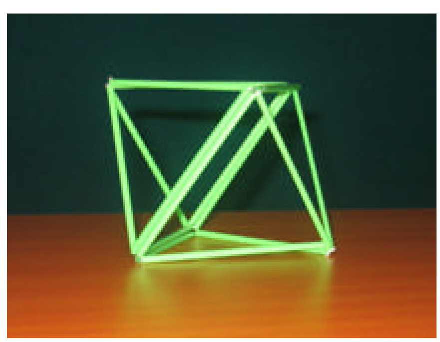
CONSTRUCCIÓN DE LOS POLIEDROS.

1. Esqueleto de los Poliedros Regulares

Diseño basado en un tubo por aristas y ángulos en los vértices. Con este diseño se obtienen los poliedros usando un tubo rígido como aristas y ángulos en los vértices. En cada extremo del tubo encaja con precisión dos ángulos-vértice. Si los vértices son de material flexible no se requiere calcular el ángulo, ya que la pieza se va acomodando según los polígonos base de la figura. Si para los ángulos se emplea un material rígido, como lo sería el alambre y la varilla, se doblan deacuerdo con el polígono regular que conforme el poliedro (60º para el triangulo, 90º para el cuadrado y 108º para el pentágono regular). Para construir este diseño se puede usar como arista pitillos plásticos de gaseosa, y como vértices pitillos plásticos agitadores de café (no quebradizos, ya que van doblados a la mitad, pero deben conservar su tendencia de abrirse para recuperar su forma). También es posible usar como arista tubos rígidos de diversos calibres (pitillos de gaseosa, PVC, bambú, etc.) unidos por vértices rígidos (ángulos de alambre o varilla). A continuación la figura muestra los poliedros resultantes.



Esqueleto del Tetraedro



Esqueleto del Octaedro

Esqueleto del Dodecaedro

Esqueleto del Icosaedro

Nota: Este tipo de modelo permite observar claramente las aristas, y el número y orden (número de aristas que convergen a cada vértice) de los vértices de cada poliedro. Características que más adelante serán clave en la clasificación de los mismos.

2. POLIEDROS EN ORIGAMI

Los poliedros regulares pueden ser construidos por medio del origami modular. A continuación encontrará cómo construir los módulos de cada uno de los poliedros. Los materiales con los que debe contar cada estudiante son: papel y bisturí. Para obtener un buen modelo, al construir los módulos y realizar el ensamble cada estudiante debe tener en cuenta los principios que rigen el origami que son la paciencia y el cuidado, para lograr la perfección. Cada estudiante debe tener su "partitura" (al igual que en la música, la partitura le indica al músico que nota debe tocar y en qué momento, la partitura en origami señala los pasos a seguir para obtener cada módulo).

Nota: en esta actividad el profesor debe aprovechar, para que cada estudiante deslice la mano por las caras del poliedro, pase el dedo por los bordes, reconozca las puntas (vértices), e identifiquen a partir de la observación las características que le permitan diferenciarlos.

Para construir los módulos de los poliedros regulares se necesitan sólo tres módulos base. El primero que es base del tetraedro, el octaedro y el icosaedro, el segundo que es base del hexaedro y el tercero que es la base del dodecaedro.

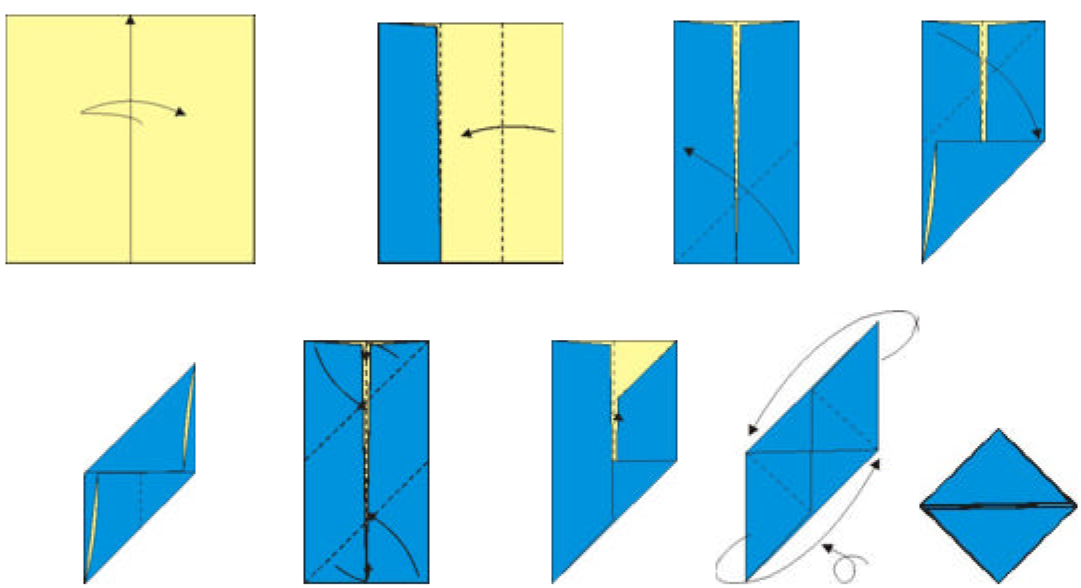
A continuación se presenta la explicación de cada una de las partituras y manera en que debe realizarse el ensamble. Finalmente aparece una fotografía del trabajo final.

- **El Tetraedro** Para la construcción del tetraedro se necesitan dos rectángulos cuyos lados estén en proporción 1:2. A continuación se presenta la partitura de este módulo. Se debe tener en cuenta que uno de los módulos es derecho y el otro izquierdo (el paso 5. las puntas se doblen en sentido contrario).

Partitura del Módulo

- **El Hexaedro** Para la construcción del hexaedro se necesitan seis cuadrados iguales, siguiendo la partitura, se elaboran seis módulos.

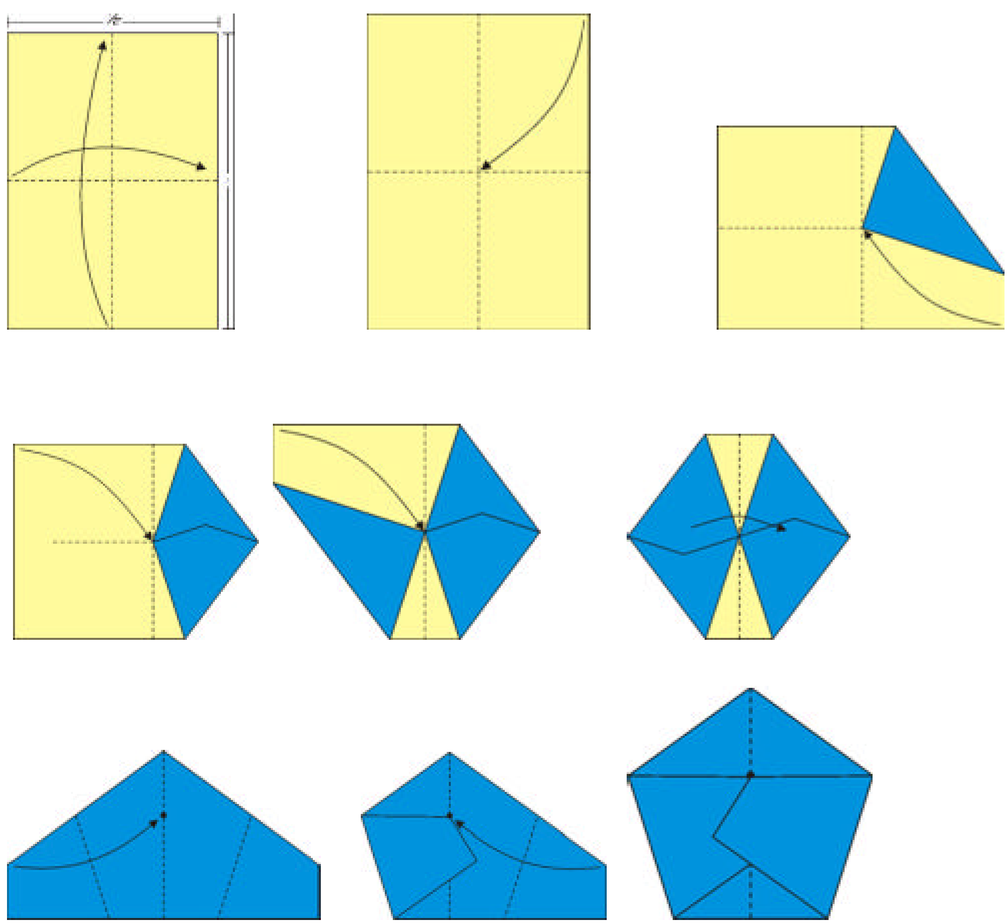
Partitura del módulo

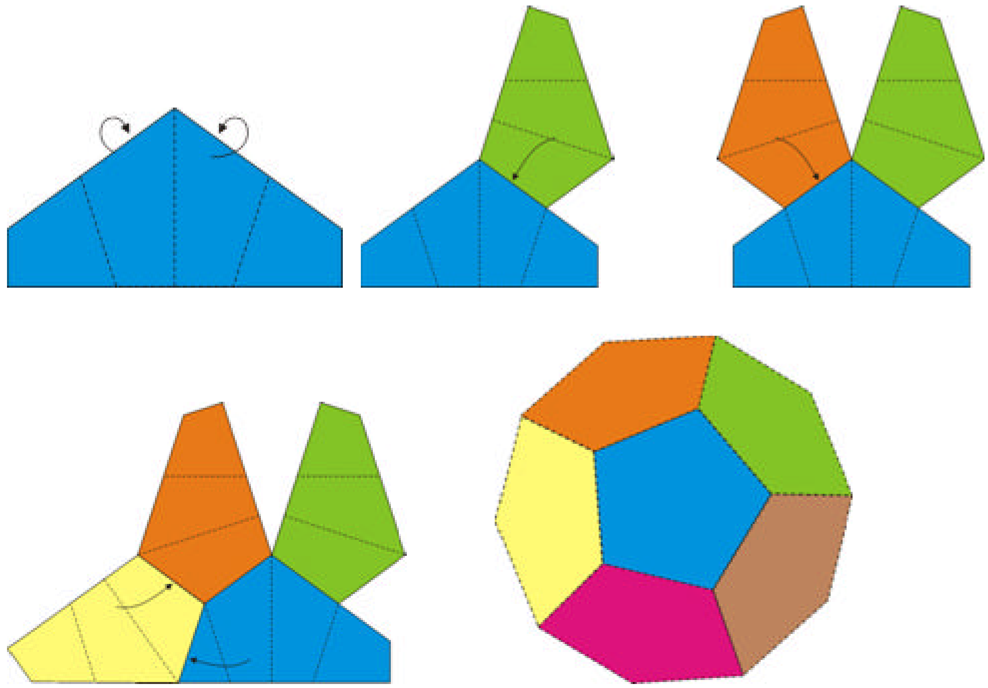


- **El Octaedro** Para la construcción del octaedro se necesitan cuatro módulos derechos iguales a los del tetraedro (ver anexos)

- **El Icosaedro** Para la construcción del icosaedro se necesitan cinco módulos derechos y cinco izquierdos iguales a los del tetraedro. La parte de abajo del icosaedro se construye con los derechos y la parte de arriba con los izquierdos (ver anexos)

- **El Dodecaedro** Para la construcción del dodecaedro se necesitan 12 módulos, siguiendo las instrucciones del profesor diseñe su propia partitura





> **Nota**: la partitura del dodecaedro debe ser diseñada por los estudiantes teniendo en cuenta la construcción realizada en la clase. Sin embargo aquí aparece la partitura como complemento de este trabajo

LOS POLIEDROS PLATÓNICOS
ALGO DE HISTORIA

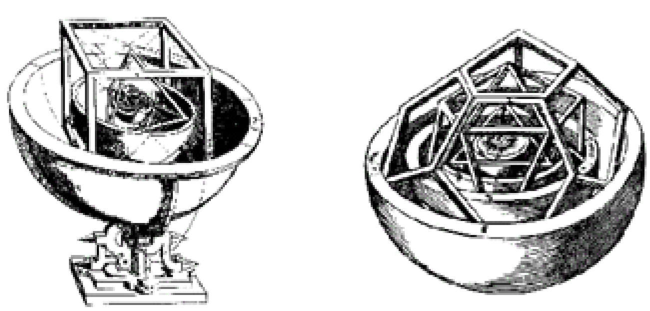
"No se sabe exactamente en qué época llegaron a conocerse los cinco poliedros regulares convexos. Se tiene constancia que el objeto más antiguo hecho por el hombre con forma de dodecaedro es atribuido a tiempos prepitagóricos y hay una tradición que asigna el conocimiento de los cinco poliedros regulares a los pitagóricos. Otros investigadores indican que el cubo, el tetraedro y el dodecaedro -los poliedros más simples, que se obtienen uniendo tres polígonos en cada vértice- pertenecen a los pitagóricos mientras que el octaedro y e icosaedro pertenecen a Teeteto.

Su nombre alternativo, sólidos platónicos se debe a que Platón (427 - 347 a. C.) los cita en el Timeo. Para él, los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares.

Además de ver los poliedros regulares como las superficies, considera que éstas a su vez están descompuestas en triángulos elementales. Estos triángulos elementales son triángulos rectángulos de dos clases: isósceles y escalenos, y representa, en último término, los elementos últimos del universo.

Considera que las figuras de los elementos del fuego, tierra, agua y aire son los cuatro poliedros regulares: tetraedro, cubo icosaedros y octaedro respectivamente. La tierra correspondía al cubo, la forma más sólida y menos móvil. El fuego al tetraedro, por ser la más aguda y más móvil. El aire y el agua correspondían al octaedro e icosaedro respectivamente. Ahora bien, sólo cuatro poliedros se corresponden con los cuatro elementos tradicionales. Pero existe todavía un quinto elemento, el dodecaedro, al que Platón simplemente alude en esta frase un tanto enigmática: "Quedaba sólo una última combinación: Dios la ha utilizado para el todo, cuando dibujó el orden final".

También Durero (1471 -1528) centró la atención en los poliedros, en cuanto que le servían de modelos en sus estudios de perspectiva. Además introdujo el estudio de los poliedros mediante el dibujo de sus desarrollos. Construyó desarrollos para el dodecaedro y para otros poliedros regulares y semirregulares. Después de casi 2.000 años desde Platón, Kepler (1571 - 1630) construyó una cosmología basada esencialmente en los 5 sólidos regulares. Mucho antes de que descubriera las tres leyes que llevan su nombre, en su *Mysterium cosmographicum* publicado en 1595, determinó las distancias entre sí de las órbitas del sistema planetario e intentó reducirlas a los cuerpos regulares alternativamente inscritos y circunscritos a esferas. Además trazó paralelismos entre las propiedades de los planetas y las de los correspondientes cuerpos regulares" (GUILLÉN, 1997, p. 43 -44)



Modelo del Universo de Kepler

Y la historia de los poliedros continuó; su estudio se estancó durante largos periodos y se retomó de nuevo; se encontraron otros poliedros que exigieron que se ampliasen, afinase y revisase la idea que se tenía sobre poliedros en general y sobre poliedro regular en particular.

De los poliedros Platónicos, hay 3 de ellos, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro que, además de formar parte de la familia de los poliedros regulares, forma parte de otra importante familia de poliedros convexos: los deltaedros. Como sugiere su propio nombre genérico - de la letra griega delta, ?- sus elementos son poliedros cuyas caras son todas triángulos equiláteros congruentes. Hasta 1947, en que los matemáticos, Hans Freudenthal y B. L. Vandser Waerden, investigaron y clasificaron los miembros de esta nueva familia, no se había considerado su existencia como tal, sólo se conocían algunos de sus elementos. Parece sorprendente que a nadie se le hubiese ocurrido, hasta fechas tan recientes, el fijar unas condiciones tan simples - sólo triángulos equiláteros y convexidad - y acometer la clasificación sistemática (GILLËN, 1997)

Formalizando 1

1. Construya varios poliedros con diferentes técnicas y materiales.

2. ¿Qué idea o ideas de poliedro se desprenden de las estrategias de construcción?

- El poliedro es su superficie
- El poliedro es su espacio interior
- El poliedros es simplemente la estructura
- El poliedro es su superficie y su interior
- El poliedro es su estructura ysuperficie
- El poliedro es su estructura e interior
- El poliedro es su superficie, su interior y su estructura

3. Considere cada uno de los poliedros construidos en el punto 1. y enumere propiedades que lo caractericen. Para ello indique la forma de las caras y si son regulares o no; el orden de sus vértices; el número de caras, de vértices y de aristas; el tipo de caras que concurren en un vértice; el tipo de caras que bordean a una dada; la altura del poliedro; las diagonales del poliedros y de sus caras; las caras o aristas que sean iguales, las que estén relacionadas por paralelismo o perpendicularidad. Seleccionar los poliedros que puedan considerarse formados por bandas de polígonos y dos caras. Apoyar el poliedro sobre una de estas caras e indicar cómo están dispuestas las caras y vértices en las diferentes bandas. Utilice estas observaciones para contar de manera estructurada el número de caras y de vértices de estos poliedros.

4. Un poliedro tiene dispuestas sus caras de la siguiente manera: un hexágono; 12 triángulos equiláteros; un hexágono. ¿De qué poliedros se trata? Describa la disposición de los vértices y de las aristas de este poliedro.

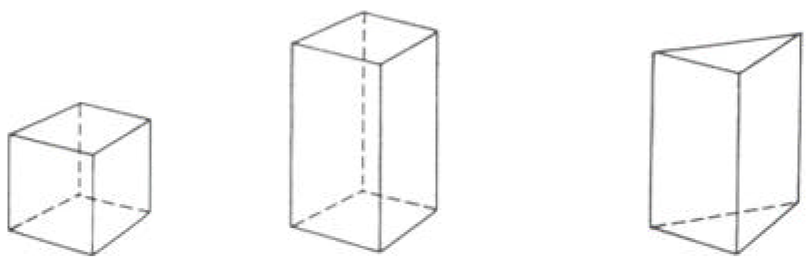
5. Un poliedros tiene las caras dispuestas de la siguiente manera: un octágono; 4 hexágonos y 4 cuadrados alternados; 4 octágonos y 4 cuadrados alternados; 4 hexágonos y 4 cuadrados alternados; un octágono. ¿Qué poliedros obtenemos?

6. Describir un poliedros que tenga 5 vértices y 5 caras

CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS

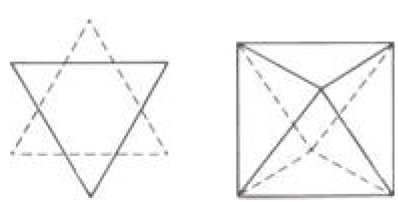
EL MUNDO DE LOS PRISMAS Y LA PIRÁMIDES

Los poliedros más familiares, con los que primero nos encontramos en contacto, son los prismas y las pirámides de base regular. Llamaremos *Prismas* rectos a los poliedros que se forman cuando se juntan con rectángulos los lados correspondientes de dos polígonos iguales. Las dos caras que son polígonos iguales y que están unidas por rectángulos son las bases del prisma y las caras que juntan estas bases son las caras laterales del prisma.



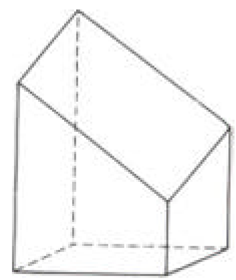
Ejemplos de Algunos Prismas

Los sólidos que llamaremos *Antiprismas* también tienen dos bases, pero están unidas por triángulos. Al igual que en los prismas las bases son polígonos iguales y paralelos, pero en los Antiprismas, el polígono de una base está girado respecto al polígono de la otra base. Las bases están colocadas en los que llamaremos posición opuesta; en los polígonos regulares, los vértices de un polígono se corresponden en los puntos medios de los lados del otro polígono. Al colocar las bases en esta posición no se puede unir con paralelogramos; las uniremos con triángulos. Cada vértice del polígono mas alto lo uniremos con dos vértices consecutivos del polígono de abajo, de manera que las aristas no se entrecrucen.

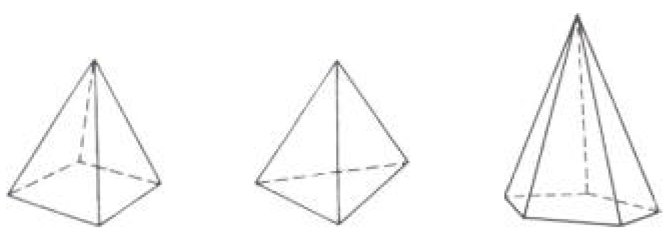


El octaedro un antiprisma

Los poliedros se clasifican en regulares, semirregulares, e irregulares. Los poliedros regulares o perfectos, tan bien llamados sólidos pitagóricos o platónicos, son cinco: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedros, icosaedros y dodecaedro. Los sólidos regulares y semirregulares son cuerpos altamente homogéneos a los que se llega a partir de la línea recta, la cual permite construir los polígonos regulares y posteriormente acceder a su carácter esferoide, ya que todos sus vértices tienden a tocar una esfera. Los poliedros irregulares son aquellos que se logran involucrando al menos un polígono irregular en una de sus caras.

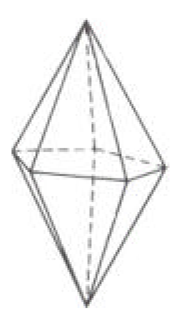


Las *Pirámides* sólo tienen una base. Las caras laterales son triángulos que concurren en un punto que llamaremos ápice.



Ejemplos de algunas pirámides

Las *Bipirámides* son las formas que se obtienen cuando se juntan dos pirámides de bases iguales, de manera que se ajustan totalmente sus bases.



Ejemplo de una bipirámide

Una clasificación "ingenua" de los poliedros podría ser hincar su clasificación a apartir de observaciones sencillas, que se observan a primera vista, por ejemplo:

- **A** = Regularidad de Caras
- **B** = Igualdad de caras

El siguiente diagrama muestra las posibles clasificaciones analizando estas tres características

A
no A

B
no B

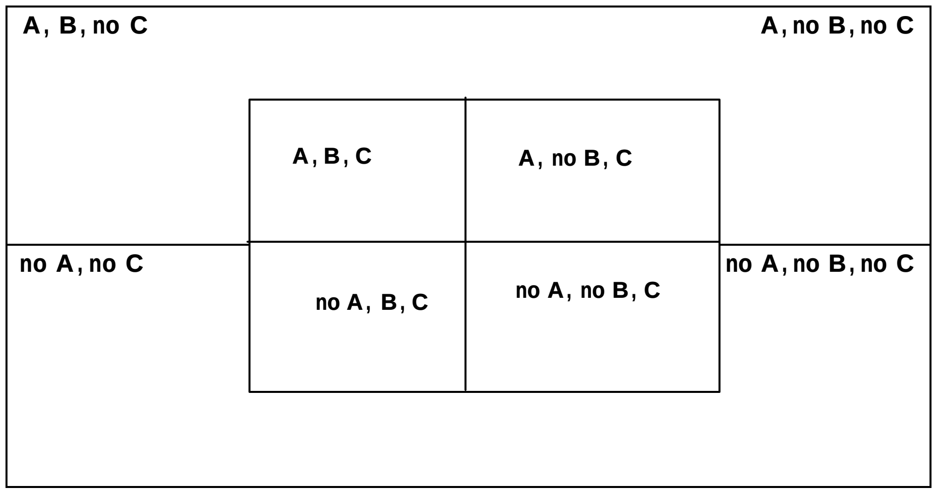
A, B	A, no B
no A, B	no A, no B

La igualdad de caras se puede separar de manera similar al de la regularidad de caras. Claramente, existen poliedros que cumplen dos atributos, sus caras regulares e iguales. Teniendo en cuenta estos dos criterios de clasificación tendríamos:

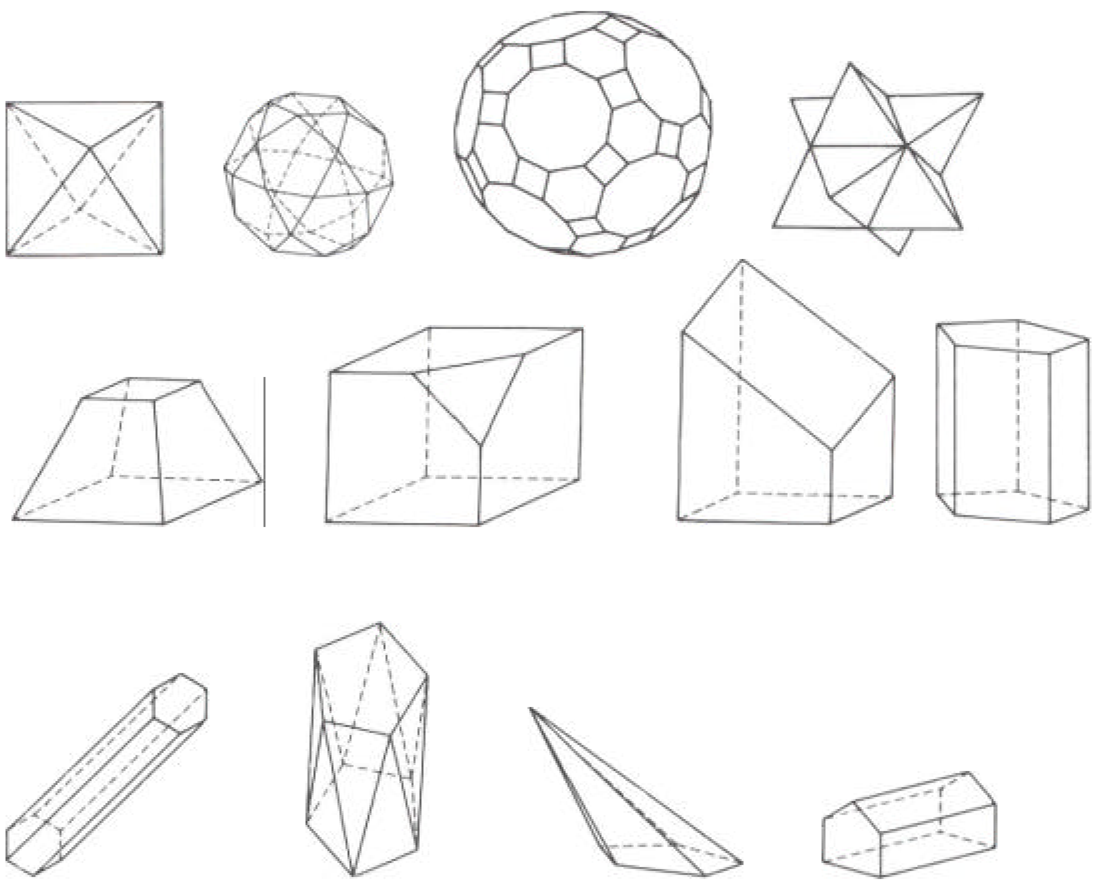
? Poliedros de caras iguales y regulares
? Poliedros de caras regulares pero que no son todas ellas iguales
? Poliedros de caras iguales pero que no son todas ellas regulares
? Poliedros que no tienen todas las caras iguales ni todas las caras irregulares

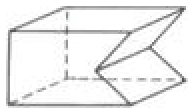
Una nueva característica que podríamos agregar es el orden de los vértices. Esta, puede separar los sólidos en aquellos que tienen sus vértices del mismo orden de los que tienen vértices de orden distinto. Teniendo en cuenta esta nueva característica, tendríamos el siguiente gráfico:

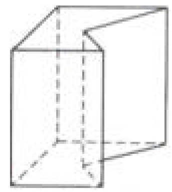
- **C** = Igualdad de vértices



Observe cada uno de los poliedros que aparecen a continuación, clasifíquelos si es posible dentro de las clases encontradas anteriormente, si no es así caracterícelos y realice nuevas clasificaciones







LOS SÓLIDOS REGULARES

Los sólidos perfectos poseen las siguientes características:

- Cada cuerpo está constituido por un solo polígono regular base (sólo triángulos, sólo cuadrados, sólo pentágonos)

- Sobre cada vértice converge el mismo número de aristas.

- El ángulo que conforma la estructura es constante, lo que hace que todos sus vértices toquen una esfera (60º para los poliedros basados en triángulos, 90º para en cubo que está basado en cuadrados y 108º para el dodecaedro, por estar hecho a partir de pentágonos).

Datos de los Sólidos Regulares

Nombre	Símbolo	c	a	v	r	n	Polígono	Ángulo
Tetraedro	Fuego							
Hexaedro	Tierra							
Octaedro	Aire							
Icosaedro	Agua							
Dodecaedro	Cielo							

Donde: **c**: caras **a**: aristas **v**: vértices

r: número de aristas que convergen por vértices

n: número de lados del polígono regular base

> Con polígonos regulares iguales se pueden construir sólidos de manera que todos los vértices sean iguales. ¿Qué poliedros se pueden obtener? ¿Cuántos? ¿Existe alguna explicación para ellos?

La mejor manera de contestar esta pregunta, es iniciando una búsqueda sobre las posibles condiciones que deben cumplir los polígonos regulares (candidatos para ser cara de los poliedros regulares) para formar un poliedro regular teniendo en cuenta las condiciones mencionadas inicialmente.

Cuando se juntan tres cuadrados de un vértice, y se continúan haciendo vértices de tres cuadrados, la forma se cierra en cuanto se han usado 6 cuadrados. El resultado es un cubo.

Y ya yo se puede construir otros sólidos diferentes; en cada vértice tienen que concurrir por lo menos tres caras, y con cuatro cuadrados ya no se pueden formar vértices por que quedan planos; 5, 6, 7, ..., cuadrados tampoco pueden concurrir en un vértice.

Si se consideran triángulos, en cada vértice pueden juntarse 3, 4 ó 5. Si en cada vértice se juntan tres triángulos, se obtiene un tetraedro, con 4 un octaedro, y con cinco un icosaedros. Si se usan 6 triángulos resulta un hexágono plano que cuando se continúa produce un cubrimiento plano de triángulos que no lleva a un modelo cerrado.

Podríamos considerar pentágonos. Si se juntan tres pentágonos en un vértice y se continua se obtienen un dodecaedro.

Considerando el triángulos regulares, cuadrados, pentágonos, hexágonos, nos ha llevado a determinar los cinco poliedros regulares. De aquí en adelante no se puede continuar, vamos porqué:

Para demostrar que no existen más poliedros regulares que los encontrados, nos basaremos en la fórmula de Euler y en algunas características de estos poliedros.

Supongamos que existe un poliedros regular con C caras, V vértices, A aristas, cada cara tiene n lados y los vértices son de orden m. Entonces m ? 3, n ? 3, y además:

a. $C + V - A = 2$ La fórmula de Euler es cierta para todos los poliedros convexos

b. $2A = mV$, ya que de cada vértice salen m aristas -todos los vértices son del mismo orden- y cada arista sale de dos vértices y por lo tanto se cuenta dos veces.

c. $2A = nC$, ya que cada cara tiene n aristas -todos los polígonos tienen n lados- y cada arista pertenece a dos caras, por tanto se cuenta dos veces

d. $(2m - 2n - mn)A = 2mn$ Por lo tanto $2m + 2n - mn$ debe ser positivo; es decir, $2m + 2n - mn > 0$ entonces, $(m-2)(n-2) < 4$.

Esta última condición disminuye las posibilidades considerablemente, luego las únicas posibilidades para m y n son: (3,3), (3,4), (3,5), (4, 3) y (5, 3) que corresponden a vértices de orden 3 y caras triángulos, cuadriláteros o pentágonos; vértices de orden 4 y caras triángulos, vértices de orden 5 y caras triángulos. Lo que muestra que no existe otro poliedros regular diferente a los ya mencionados

> **Nota**: esta exploración que se hace a partir de las preguntas planteadas en el recuadro anterior, no se debe presenta a los estudiantes. El docente debe hacer el seguimiento necesario y las sugerencias precisas para conducir al estudiante a un análisis formal de la situación

Formalizando 2

1 Un poliedro tiene vértices de orden 3. Apoyado sobre una de sus caras los vértices están dispuestos de la siguiente manera: 1 cara, 6 caras, 1 cara. ¿De qué poliedro se trata? Describa la posición de las caras y de los vértices de este poliedro cuando se apoya en uno de sus vértices.

2 Un poliedro tiene los vértices dispuestos de la siguiente manera: uno de orden 4; cuatro de orden 5; dos de orden 4 y dos de orden 5 alternados. ¿A qué poliedro se refiere?

3 Construir 4 triángulos con 6 palillos, 6 triángulos con 9 palillos; 8 triángulos once 12 palillos; 10 triángulos con 15 palillos; 20 triángulos con 30 palillos y 6 cuadrados con 12 palillos. ¿Qué poliedros están relacionados con este problema?

POLIOMINOS, TESELADOS Y POLICUBOS

OBJETIVOS

- Analizar las propiedades de los Poliominós, en especial de los pentaminós resolviendo problemas de recubrimiento y construcción

- Analizar y descubrir los elementos que caracterizan los deslizamientos en el plano (traslaciones y rotaciones).

- Descubrir a partir de la exploraciones las propiedades que debe cumplir un polígono para recubrir el plano

- Construir losetas que teselan el plano a partir de cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos

METODOLOGÍA

Cada estudiante construye su juego de pentaminós y de ajedrez. En grupos de tres estudiantes se inicia el trabajo de exploración y construcción teniendo como guía el siguiente taller. Las generalidades que los estudiantes deduzcan serán socializadas con el resto del grupo, formalizando los aspectos relacionados con los deslizamientos en el plano (rotaciones y traslaciones).

POLIOMINOS

Jugar con poliominós es como jugar con rompecabezas componiendo diversas figuras. Este juego es una fuente de problemas de inteligencia con gran sabor matemático, algunos de ellos rápidos de resolver y otros tan complejos que hasta el día de hoy no se les ha encontrado respuesta.

La historia de los poliominós comenzó en 1954 cuando el matemático norteamericano Solomon W. Golomb publicó su artículo "Checker Board and Polyominoes" (Tableros de Damas y Poliominós). Más adelante Martin Gardner ha publicado múltiples artículos sobre las ricas posibilidades que ofrecen los diferentes Poliominós (BOZAL, 1994)

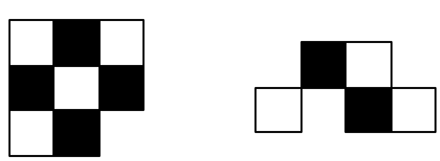
¿Qué es un poliominó?

Los poliominós son polígonos construidos a base de adosar cuadrados unitarios a lo largo de sus lados.

Puesto que una pieza de dominó se compone, desde el punto de vista geométrico, de la unión de dos cuadros, podemos llamar triminós a la unión de tres cuadrados, tetrominós a la de cuatro y así sucesivamente

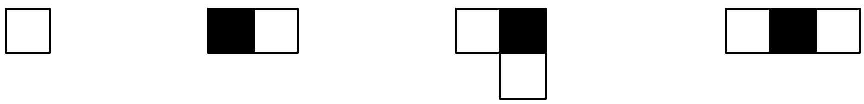
Pero de un modo formal se pueden definir como un conjunto de cuadrados conectados entre sí por uno de sus lados de tal modo que no queden huecos en el interior de la estructura resultante.

Así las siguientes piezas (unos posibles heptómino y pentominó) no serían consideradas como tales.



Además sólo se considerarán poliominós distintos a aquellos que no se pueden obtener a partir de otro dado con una simple función de *rotación* o de *inversión/reflexión*

Con dos cuadrados se obtienen un solo dominó, con tres cuadrados se tienen dos posibles triminós.



Manipulando y Descubriendo

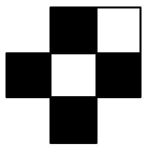
1. Complete la siguiente tabla:

Número de Cuadrados	Número de Poliominós	Nombre de los Poliominós
1		
2		
3		
4		
5		
6		

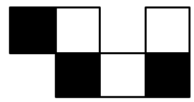
2. Dibuje cada uno de los poliominós que encontró:

3. Con cada uno de los hexaminós distintos que encontró, si se doblasen por los lados que unen dos cuadrados. ¿Cuál serviría para construir un cubo o dado y con cuáles no sería posible?

4. Los hexaminós A y B que aparecen en la figura tienen sus cuadrados sombreados alternativamente como en el tablero de ajedrez: El hexaminó A presenta cuatro cuadrados negros y dos blancos, mientras que el B tiene cuatro negros y tres blancos. Por este motivo, diremos que A es un hexaminó PAR y B es IMPAR.



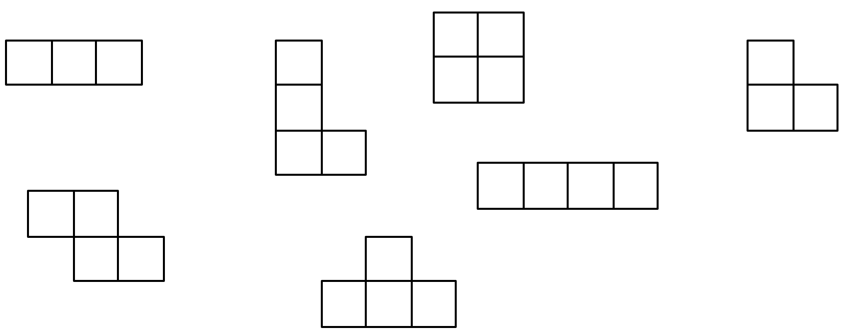
A



B

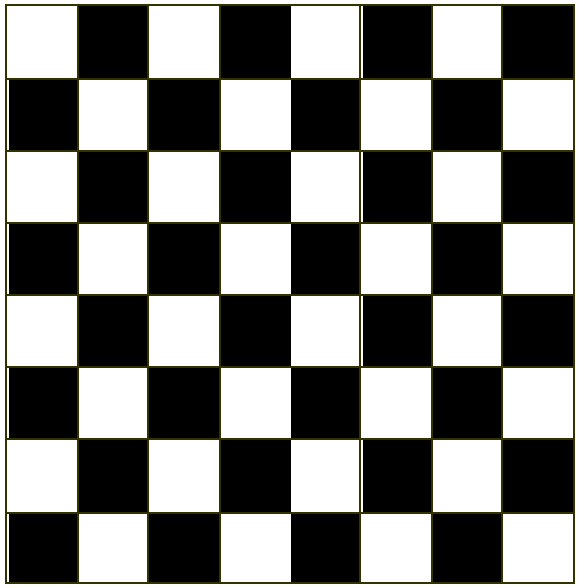
Sombree de la misma manera todos los hexaminós y clasifíquelos en pares e impares ¿Cuántos y cuáles hexaminós pares e impares hay?

5. Con cuáles de los siguientes Poliominós se puede formar un cuadrado



FORMALIZANDO

1. Considere el siguiente tablero de ajedrez:



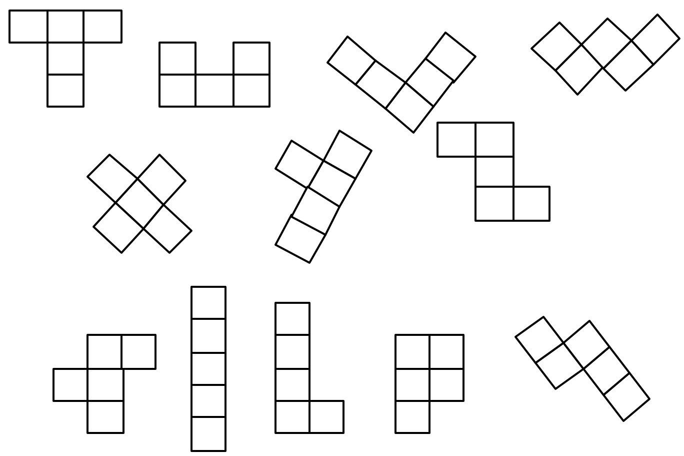
2. Fácilmente puede verificar que el tablero se puede recubrir con dominós. ¿Qué sucede si suprime las dos últimas casillas del tablero?

- ¿Si suprime dos cuadros cualesquiera?
- ¿Si suprime dos cuadrados de distinto color?
- Grafique los posibles recorridos que puede realizar sobre el tablero para recubrirlo tachando los cuadros indicados
- ¿Qué sucede si suprime un número par de cuadrados?
- Realice la misma exploración, utilizando los pentominós
- A partir de las exploraciones anteriores, ¿Qué condiciones se deben cumplir para recubrir un tablero con un determinado poliómino? Generalice estas condiciones.

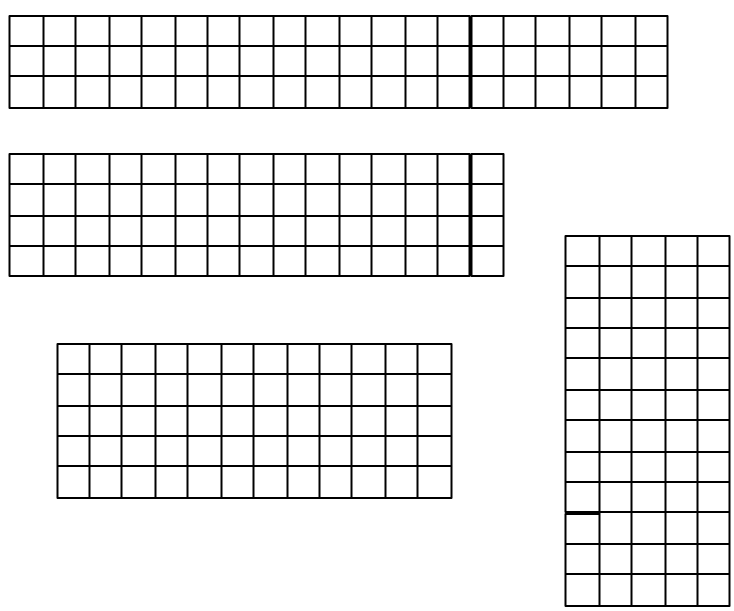
Nota: Considere las relaciones entre las dimensiones del tablero, el número de casillas hábiles y los cuadrados de los que se componen el poliominó.

Jugando con los Pentominós

“Se llaman pentaminós las configuraciones que recubren cinco cuadrados adyacentes de un tablero de ajedrez. Hay en total doce configuraciones de este tipo. Disponiéndolas como se muestra en la figura, se asemejan a algunas letras del alfabeto, que sirven por tanto para nombrarlas cómodamente. Para retenerlos fácilmente en la memoria se dispone de esta sencilla regla mnemotécnica: basta recordar las siete últimas letras del abecedario (T U V W X Y Z) y la palabra FILIPINO” (BOZAL, 1994, p. 12)



1. Recorte los doce pentaminós e intente recubrir cada uno de los siguientes arreglos rectangulares



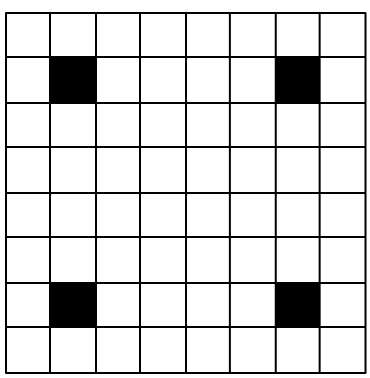
- ? ¿Qué característica tienen estos rectángulos
- ? Numere cada rectángulo y complete la siguiente tabla

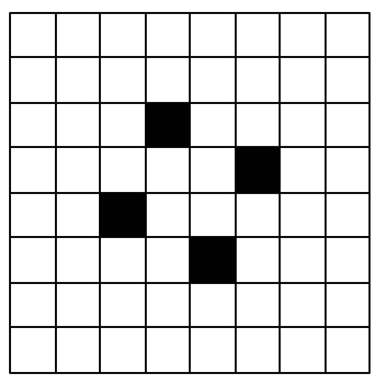
Rectángulo	Área	Perímetro
1		
2		
3		
4		

- ? ¿Cómo puede determinar el área de cada rectángulo? ¿Cómo son las áreas de estos rectángulos?, y ¿sus perímetros?

- ? ¿Existen otros rectángulos que con las características de los anteriores?

2. Con los doce pentaminós y utilizando todos una sola vez, recubra estas figuras. En los tableros de ajedrez deben quedar sin ocupar los cuadrados rellenos.



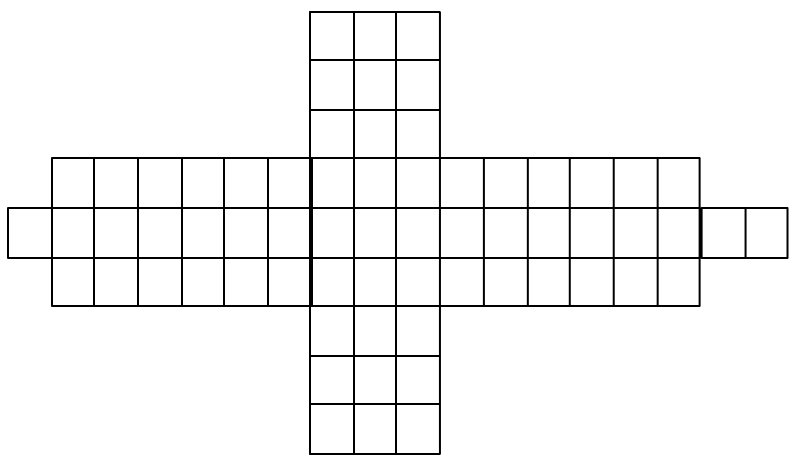


3. NOTA DE INTERÉS: Recientemente se han aplicado los recursos del cálculo electrónico moderno a varios problemas de pentominós. El capítulo sobre pentominós de The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions contiene una breve reseña de cómo Dana S Scott programó el computador electrónico MANIAC de la Universidad de Princeton para que determinara todos los modos de disponer los doce pentominós en el tablero de ajedrez dejando en el centro un hueco cuadrado de dos casillas de lado. Se descubrió que habían 65 soluciones fundamentalmente diferentes, entendiéndose que dos soluciones que puedan deducirse la una de la otra mediante un giro o una simetría no se consideran distintas. Más reciente, C. B. Haselgrove, astrónomo de la Universidad de Manchester, ha programado una calculadora electrónica para que averiguara todos los modos de construir un rectángulo de 6x10 con los doce pentominós. ¡La máquina obtuvo 2.339 soluciones diferentes, sin contar las que se deducirían mediante giros y simetrías de las anteriores! (KURCHÁN, 2000)

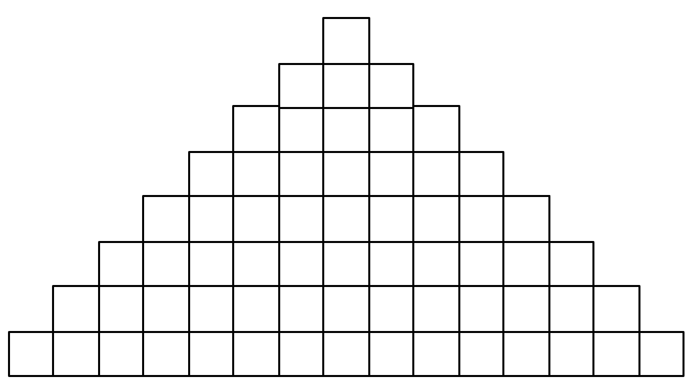
- Encuentre algunas de las soluciones de los problemas modelados por Scott y Haselgrove

Considere las siguientes configuraciones especiales de pentominós y trate de solucionar los problemas de construcción

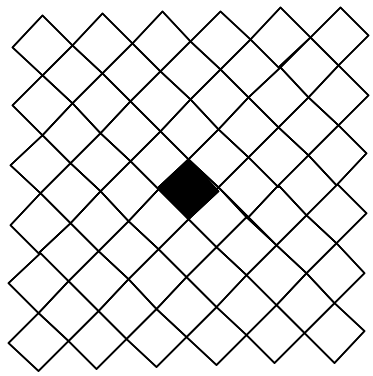
1. Conforme la siguiente cruz sólo con los doce pentominós



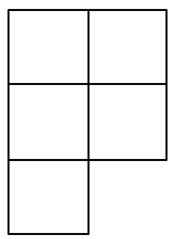
2. Esta es una pirámide de 64 cuadrados, que puede construirse con los doce pentominós y el tetraminó cuadrado de dos por dos



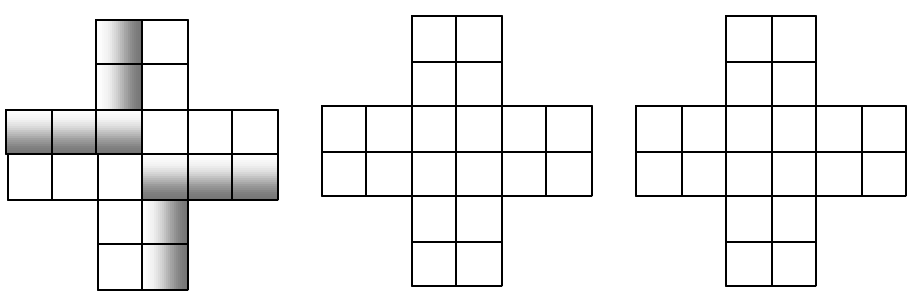
3. Existen problemas abiertos, es decir, ni resuelto ni probado imposible de construir, por ejemplo la siguiente configuración. ¿Qué puede decir acerca del recubrimiento de esta figura? Analice su forma y considere las posibles soluciones



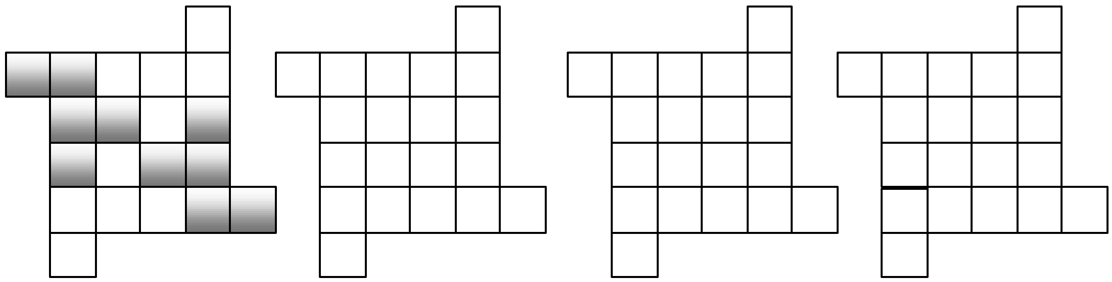
4. Dado el siguiente pentaminó, usando solo nueve de los restantes es posible triplicarlo, es decir, construir un modelo a escala tres veces mayor cuya longitud (3 unidades) y anchura (2 unidades) sean triples de las del pentaminó dado.



5. La siguiente loseta recubre el recubre el plano (¡Compruébelo!). Esta loseta se puede obtener de tres maneras diferentes utilizando en cada una de ellas cuatro pentaminós iguales. Encuéntrelas coloreando los pentaminós



6. Encuentre en cada una de las losetas el pentaminó que la formo y diseñe un mosaico formado por una de estas losetas. Coloréelo.

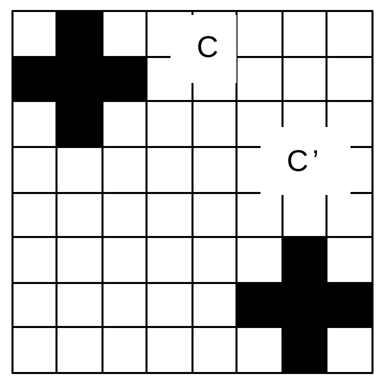


Investigue, con todos los tetrominós, cuáles recubren el plano.

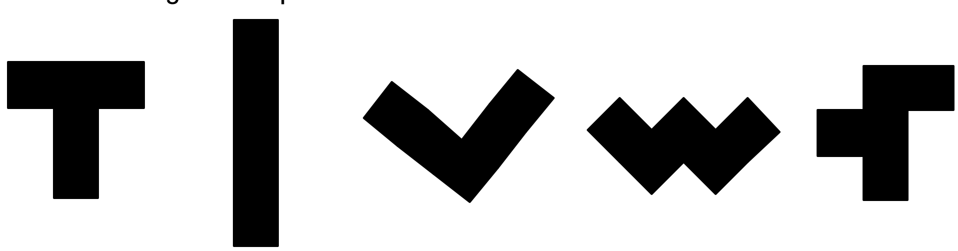
Deslizamientos en el Plano

1. El siguiente dibujo muestra dos pentaminós idénticos. El pentaminó C' es el resultado de una transformación realizada al pentaminó C.

Describa con sus propias palabras como se ha realizado este movimiento y que tipo de movimiento es.



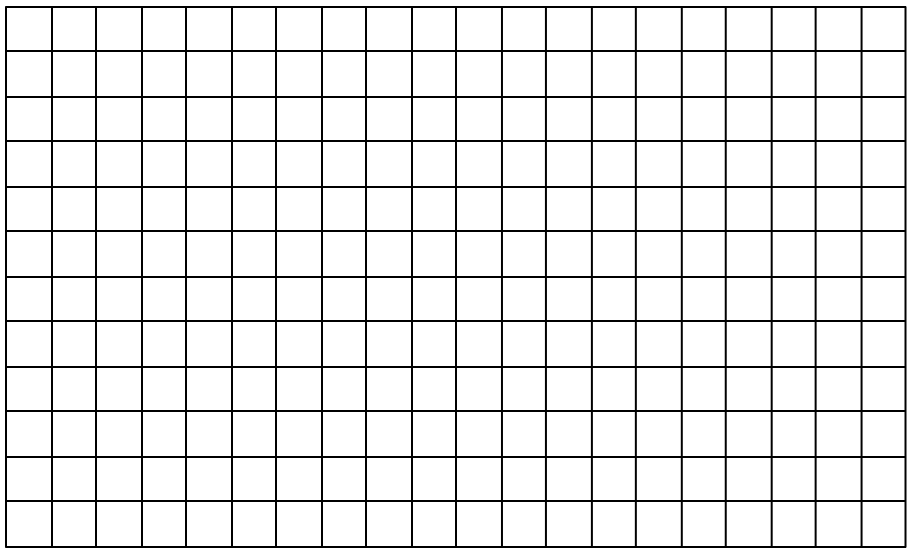
2. Recorte los siguientes pentaminós en cartulina.



? Coloque el primer pentaminó en la parte inferior derecha de la cuadrícula y copie su frontera. Nombre cada vértice del pentaminó con una letra mayúscula. Desde esta posición traslade el poliominó 12 unidades. en dirección horizontal hacia la izquierda y copie su frontera. El punto correspondiente a la traslación del punto A llámelo A', el punto correspondiente a la traslación del punto B llámelo B' y así sucesivamente.

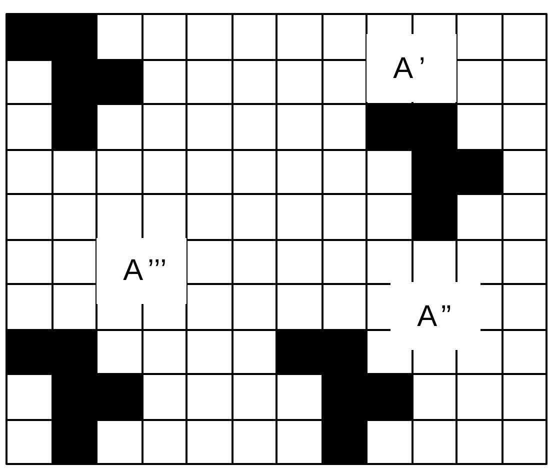
? Trace los segmentos AA', BB', CC', DD', EE' y FF'. ¿Qué relación existe entre ellos? Compare sus longitudes.

? Realice los pasos del punto anterior con los pentaminós restantes ubicándolos inicialmente en las esquinas de la cuadrícula.



3. Dibuje la loseta que diseñó para teselar el plano e indique las respectivas transformaciones que realizó sobre los pentaminós para obtenerla.

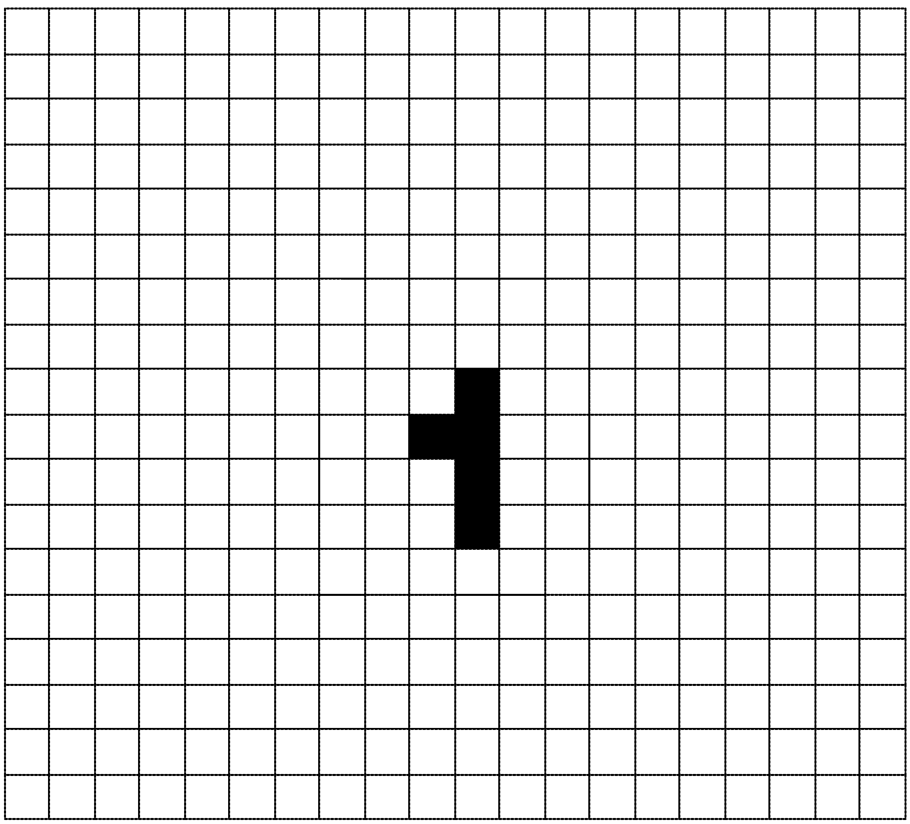
4. En el dibujo puede observar el pentaminó A que ha transformado por tres traslaciones distintas en A', A'' y A'''. Caracterice cada una de estas tres traslaciones.



5. ¿Qué elementos son necesarios para realizar una traslación?

6. En el siguiente dibujo se muestran dos figuras, podemos decir que ellas son ___________________ ya que difieren sólo en la posición que ocupan en el espacio. Describa con sus propias palabras como se ha realizado este movimiento y que tipo de movimiento es.

7. Para realizar esta actividad necesitará un espejo. Nombre cada vértice del poliominó con una letra mayúscula. Coloque el espejo sobre cada segmento y realice una copia de lo que allí se observa. ¿Qué relación existe entre los poliominós resultantes y los que se obtienen al desarrollar la actividad? ¿Qué tipo de movimiento es este?

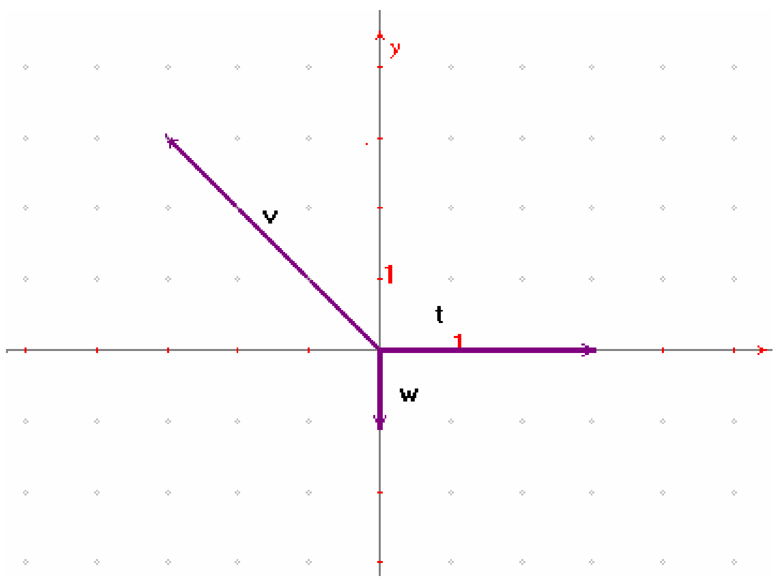


Formalizando

1. En general hemos estudiado tres tipos de movimiento de los pentaminós en el plano: ________________________, ________________________ y ________________________

Estos movimientos se pueden realizar con cualquier clase de polígonos en general
Una traslación se puede representar por una "flecha", denominada vector donde:

- La dirección: está dada por su inclinación
- El sentido: está dado por la posición de la flecha
- La magnitud: está dada por la longitud del vector



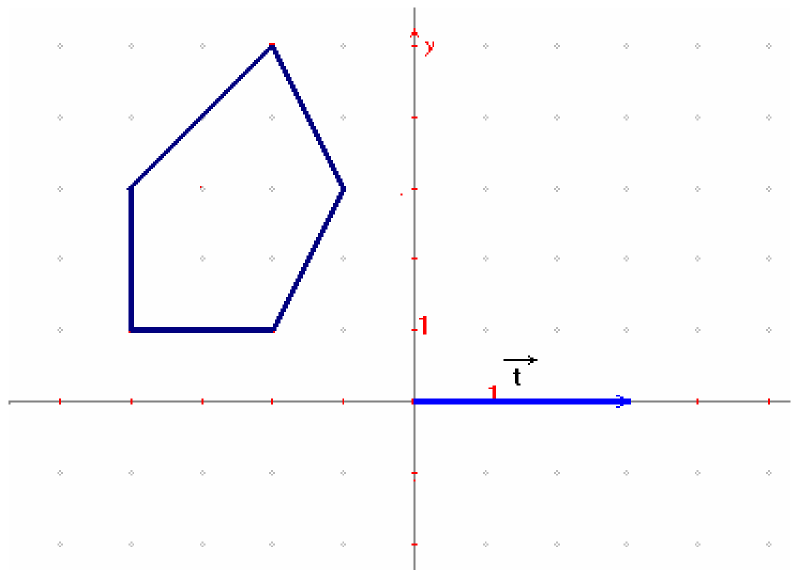
t: indica una traslación de tres unidades en dirección horizontal hacia la derecha o al oriente.

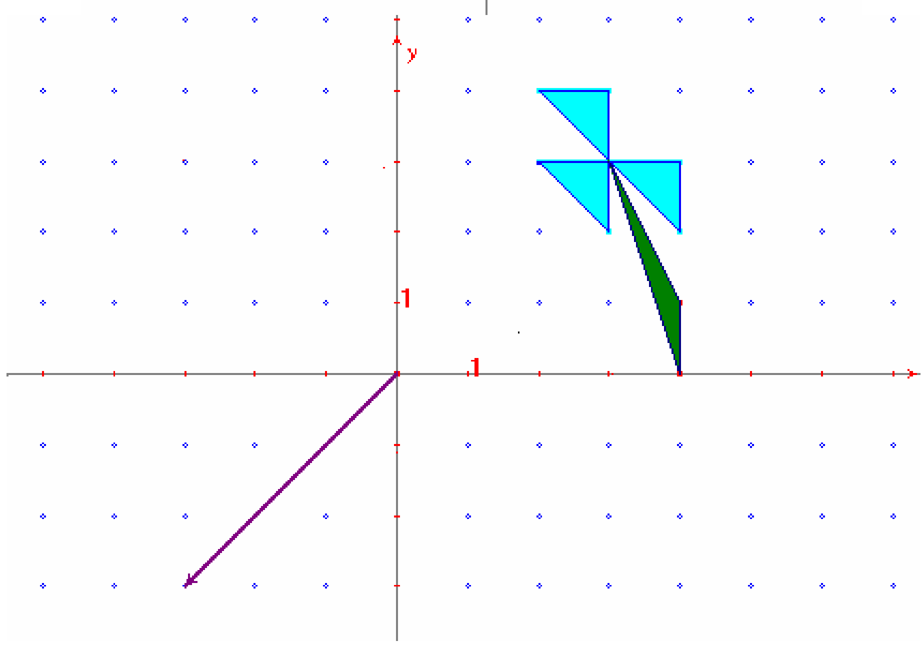
w: indica una traslación de una unidad en dirección vertical hacia abajo o al sur

v: indica una traslación de cinco unidades en dirección noreste. Esta traslación también se puede realizar por dos traslaciones, una de cuatro unidades hacia la izquierda y otra de tres unidades hacia arriba.

Los vectores se pueden representar como parejas ordenas, es decir, t = (3, 0), w = (0, -1) y v = (3, 4)

2. En los siguientes planos determine el nombre de cada uno de los polígonos, determine sus coordenadas y realice las traslaciones indicadas





Una ***rotación*** es un deslizamiento en el plano en donde la figura gira alrededor de un punto fijo llamado "centro de rotación" , que puede ser cualquier punto de la figura o un punto fuera de ella.

En una rotación cada uno de los puntos de la figura recorre un arco de circunferencia de diferente longitud, en una misma dirección e igual amplitud.

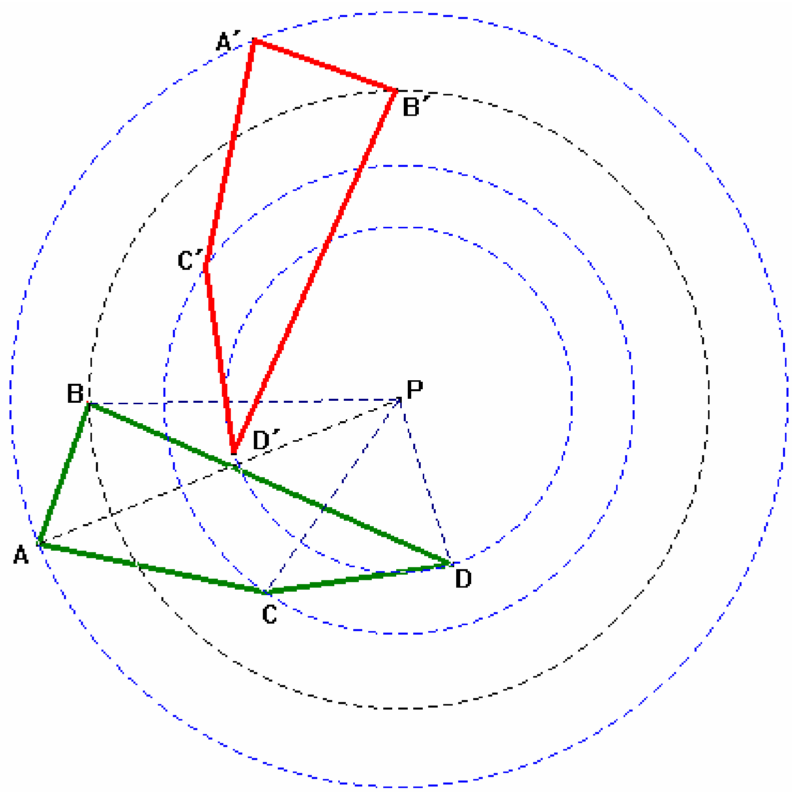
Para realizar una rotación es necesario conocer:
Centro de rotación: es un punto que permanece fijo, puede ser un punto interior o exterior de la figura o un punto sobre la figura

La amplitud: es la medida del ángulo de giro (indica cuánto se va rotar) y puede ser dada en grados o fracciones de vuelta

El sentido: es la orientación del ángulo de giro, la cual casualmente se indica utilizando las manecillas del reloj; es positivo si la rotación es en sentido contrario de las manecillas del reloj o negativo si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj.

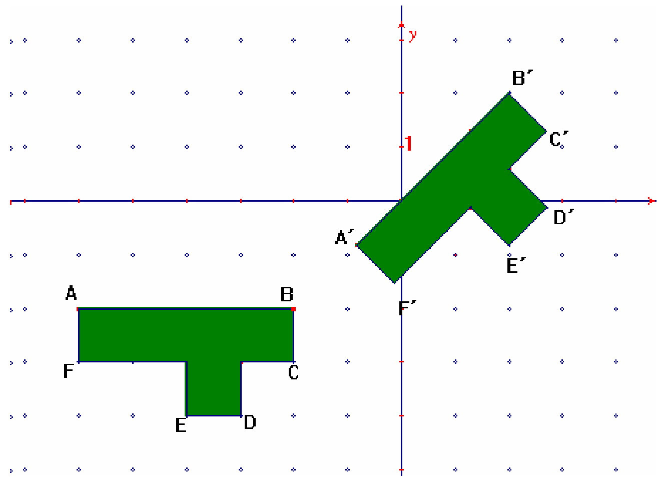
Descubriendo y Formalizando

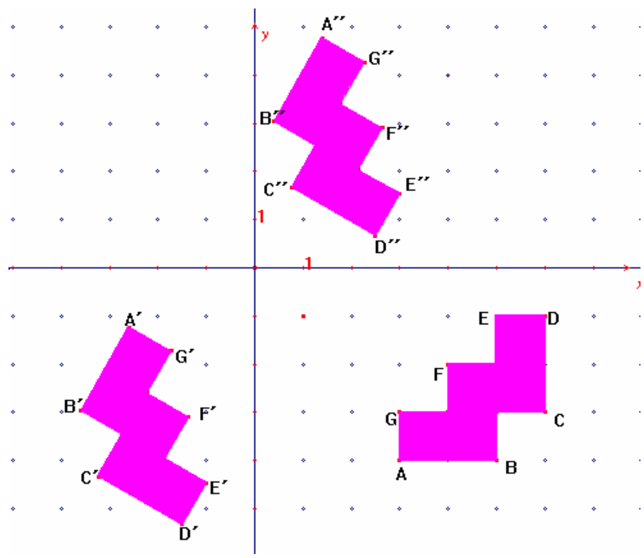
1 Observe el siguiente polígono, ha sido rotado respecto al punto P, identifique la manera como se realizó esta rotación y mencione cada uno de los elementos



2 En un plano cartesiano trace el polígono ABCD cuyos vértices son A = (3, 2); B = (7, 2); C = (7, 5); D = (3, 6) Tome como centro de rotación el vértice A y rote el polígono 3/4 de vuelta en sentido positivo de las manecillas del reloj. Determine las coordenadas del polígono imagen.

3 Observe los siguientes objetos y su imagen. Describa paso a paso que transformación o conjunto de transformaciones se realizaron para obtener el polígono imagen.





4 Ubique en el plano una figura cualquiera y defina un conjunto determinado de transformaciones. Realice diferentes composiciones de tal manera que puede verificar si estas son conmutativas o asociativas.

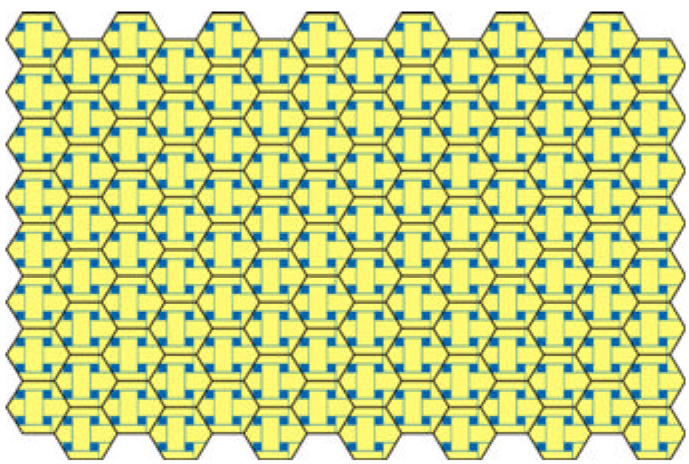
TESELADOS

Los teselados son los diseños de figuras geométricas que por sí mismas o en combinación cubren una superficie plana sin dejar huecos ni superponerse.

Las antiguas civilizaciones utilizaban teselados para la construcción de sus casas y templos, cerca del año 4000 a. C. Por este tiempo los Sumerios realizaban decoraciones con mosaicos que formaban modelos geométricos. El material usado era arcilla cocida que coloreaban y esmaltaba.

La palabra teselado proviene de "tessellae". Así llamaban los romanos a las construcciones y pavimentos de su ciudad.

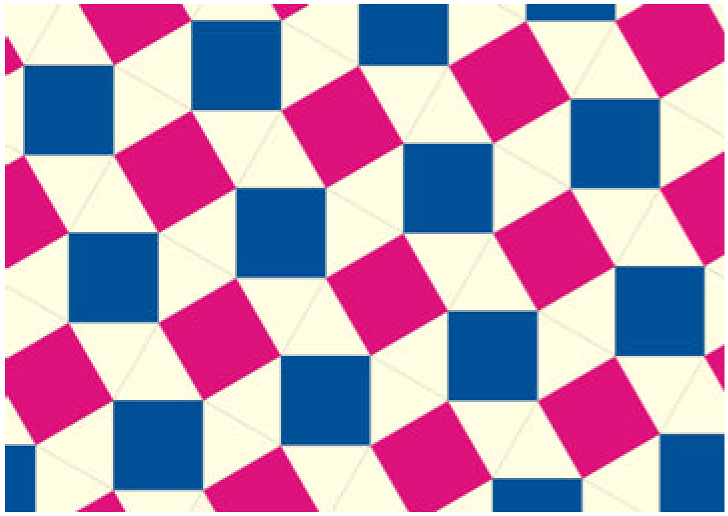
Los teselados pueden ser regulares demirregulares o irregulares. Los *regulares* se logran a partir de la repetición y la traslación de polígonos regulares (BOZAL, 1994).



Teselado Regular

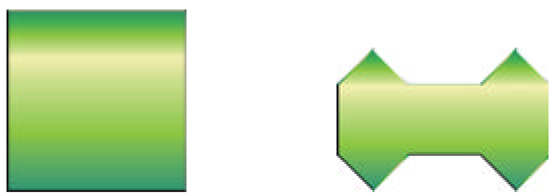
Los *demirregulares* se logran a partir de la combinación de varios tipos de polígonos regulares pero de modo que no todos los vértices tengan la misma distribución.

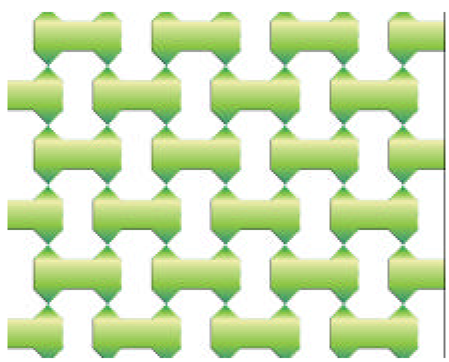
Los *semirregulares* se forman con la combinación de dos o más polígonos regulares pero distribuidos de modo tal que en todos los vértices aparezcan los mismos polígonos y en el mismo orden.



Teselado Semiregular

Los *irregulares* se forman gracias a la deformación de los lados de un polígono regular.

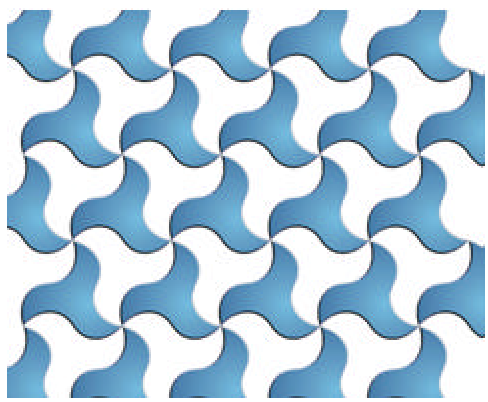




Teselado construido a partir de una loseta construida sobre un cuadrado

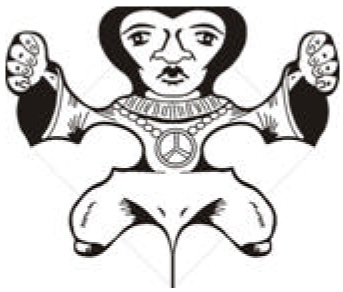
MANIPULANDO Y DESCUBRIENDO

Dentro de los teselados irregulares existen muchos que por su belleza y significatividad geométrica han sido muy famosos y estudiados. Los mosaicos de la Alhambra de Granada (mosaicos nazaríes) y los mosaicos, que, inspirándose en estos, creo el artista holandés Maurits Escher (1898 - 1972).

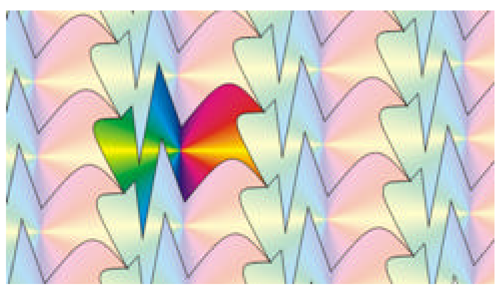


Teselado construido a partir de una loseta construida sobre un triángulo equilátero

Escher, habiendo observado los bellos diseños de mosaicos de la Alhambra, elaboró sus propios mosaicos, en los cuales, partiendo de un polígono que sometía a deformaciones, creaba una figura generadora o loseta que, por repetición, teselaba el plano.



T eselado construido a partir de una loseta
construida sobre hexágono regular



T eselado construido a partir de un rectángulo

FORMALIZANDO

1 ¿Es posible teselar el plano con cualquier polígono o conjunto de polígonos? Si no es así, que condiciones son necesarias. Diseñe un teselado regular y uno demirregular

2 ¿Una loseta puede construirse a partir de cualquier polígono?

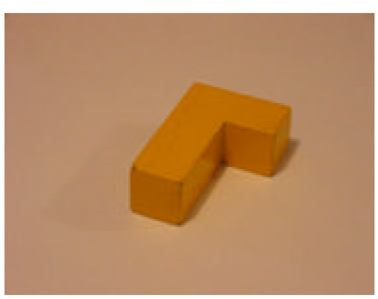
3 Diseñe un mosaico tomando como ejemplo los realizados por Escher. Mencione el conjunto de transformaciones que realizo para lograr su loseta y tesele una superficie donde se observe el diseño.

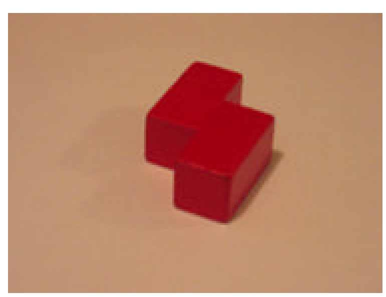
Policubos

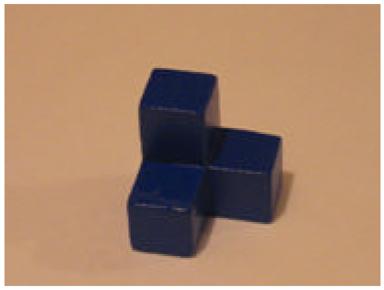
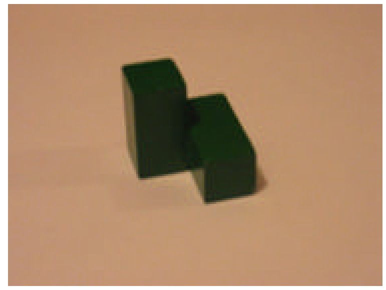
Los policubos son cuerpos geométricos formados por cubos iguales encajados o pegados por medio de sus caras. Unos policubos muy famosos son los descubiertos por el matemático danés Piet Hein con los que construyó el cubo de soma.

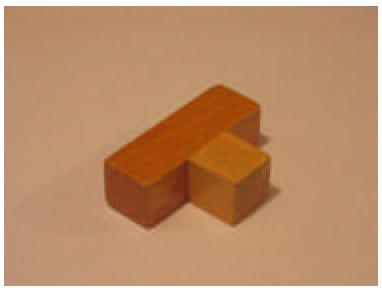
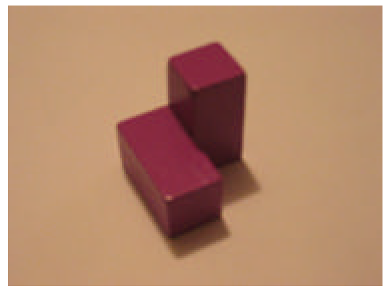
Manipulando y Descubriendo

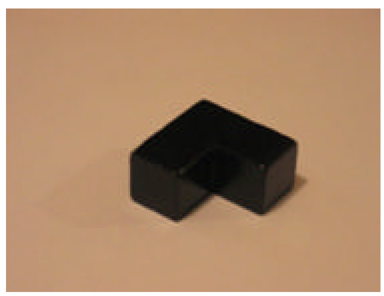
O bserve los policubos con los que está formado el cubo de soma





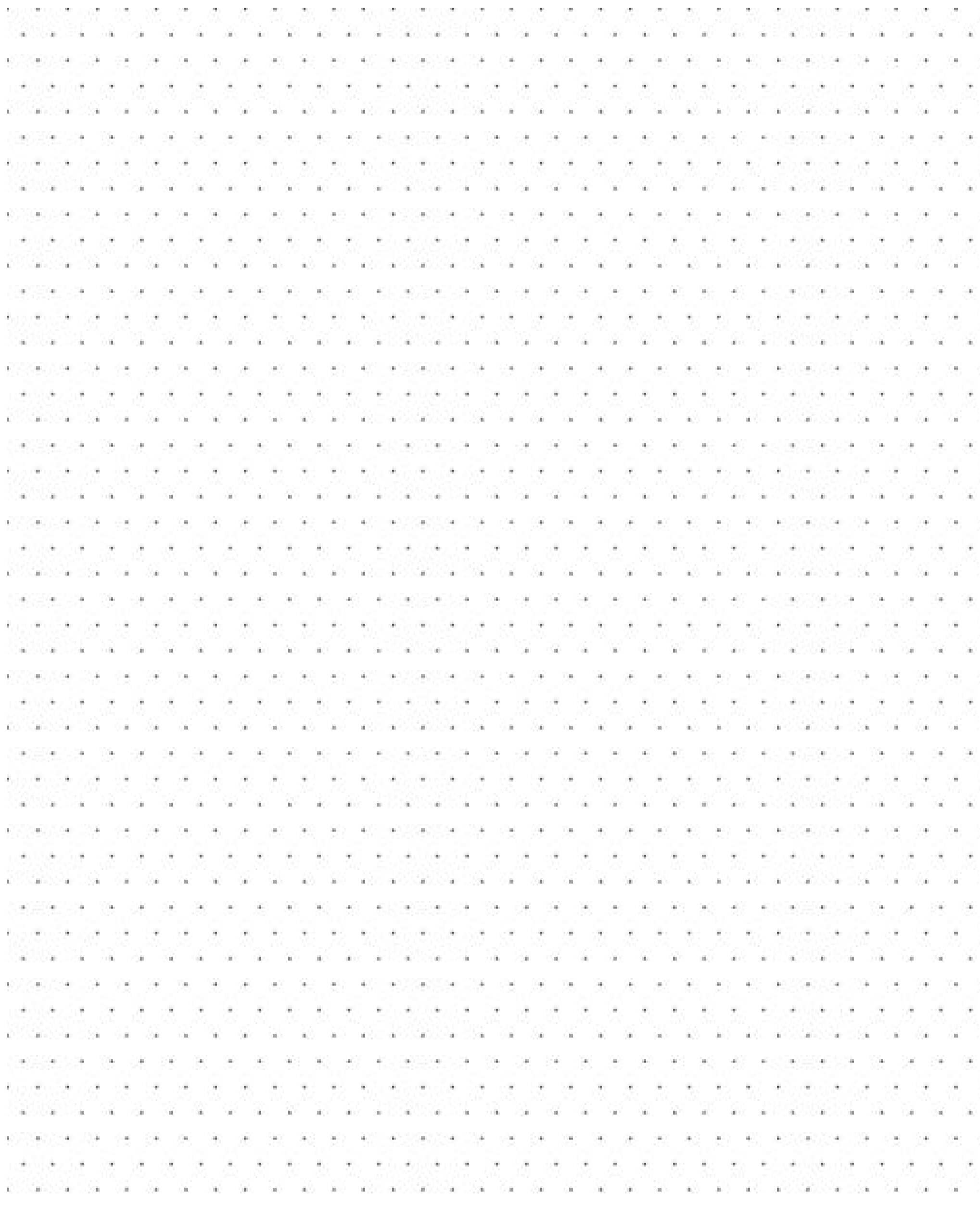
 



¿Por cuantos cubos está formado cada uno de los siete policubos del cubo de soma?
¿Qué relación encuentra entre los policubos y poliominós?

Represente en el plano los siete policubos del cubo de soma utilizando papel isométrico?

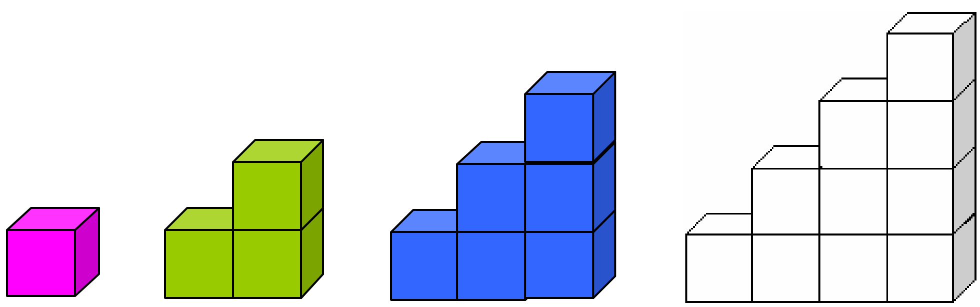


Papel Isométrico

? INVESTIGUE Y DESCUBRA. Ayudándose de los policubos, cuántos policubos diferentes se pueden formar con tres, cuatro y cinco cubos

Cantidad de cubos que la forman	**Número de Policubos**
Tres cubos	
Cuatro cubos	
Cinco cubos	

✍ Observe las siguientes figuras. Estas corresponden a escaleras de 1, 2, 3, y 4 escalones. Construya estas escaleras con los policubos y completa la sigueinte tabla.



N° de escalones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
N° de cubos										

o

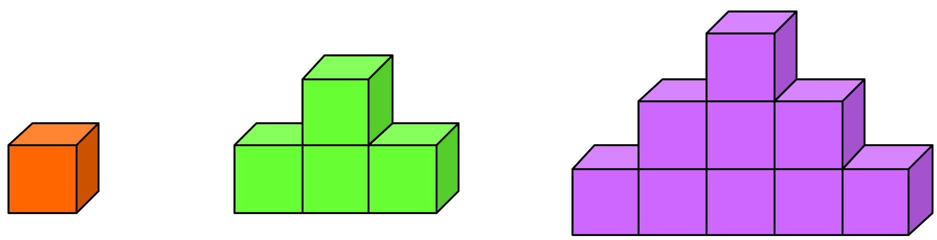
✍ ¿Cuántos cubos se necesitan para construir una escalera con 100 escalones?

✍ Intenta escribir una fórmula con la cual pueda encontrar el número de cubos que necesitaría para construir una escalera de **K** escalones

Sugerencia: - Observe la relación que existe entre el número de escalones y la base de la escalera

- Exprese el número total de cubos como la suma de los cubo que están formando cada nivel de la escalera

? Observe las siguientes figuras. Estas corresponden a escalares dobles construidas con cubos de 1, 2 y 3 escalones. Dibuje en el papel isométrico las siguientes tres escaleras. Construya estas escaleras con los policubos y complete la sigueinte tabla.

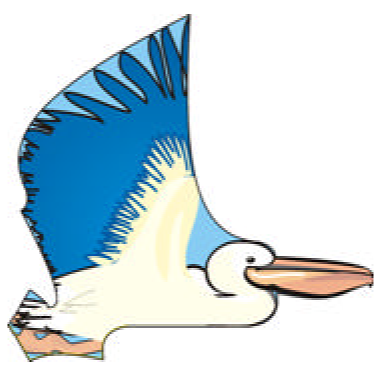


N° de escalones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
N° de cubos										
N° de cubos de la base										

? ¿Qué característica debe tener el número de cubos usados en la base de las escaleras dobles?

? ¿Cuántos cubos en total tendrá la escalera doble cuya base es de 13 cubos?

? Intente escribir una fórmula con la cual pueda encontrar el número de cubos que necesitaría para construir una escalera doble cualquiera



CAPITULO 3.
Implementación y Análisis de las Actividades

Implementación y Análisis de las Actividades

A continuación se comentan algunas de las actividades que los estudiantes realizaron dentro y fuera del aula. Cada actividad presenta algunos de los puntos más relevantes que se desarrollaron en clase, incluyendo los aportes de los estudiantes, que mediante la exploración y el descubrimiento experimentaron las actividades y plantearon alternativas de cambio en la enseñanza de la geometría.

Origami

Las actividades con origami despertaron el interés de los estudiantes, se sintieron muy motivados a trabajar y aprender. Inicialmente se les indicaba paso a paso cada uno de los dobleces que debían realizar para la construcción de la figura. Siempre teniendo en cuenta qué geometría se identificaba en las formas resultantes. Al adquirir algunas habilidades de interpretación de las partituras las figuras se construían a partir de éstas.

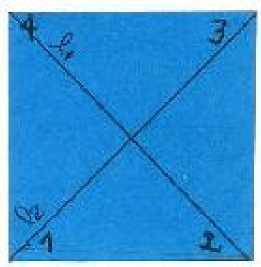
Los estudiantes diseñaron algunas propuestas "metodológicas" donde desarrollaron temas de geometría específicos como: homotecias, rectas y puntos notables de los triángulos rectángulos, simetrías de polígonos y el reconocimiento de algunas figuras geométricas.

A continuación se presentan algunas de los apartes que hacen parte de los trabajos realizados por los estudiantes.

REFLEXIÓN

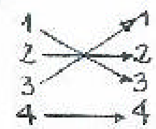
Según la linea de reflexión, el triángulo A se refleja en el triángulo A', es decir si se dobla el papel por la linea de reflexión, todos sus lados y ángulos coincidirían.
También se puede observar colocando un espejo perpendicular a la superficie de la hoja.

Con los estudiantes se puede trabajar este tema con el espejo o maniobrando el papel, ya que por medio de este se pueden ver todas las invariantes. Con el ejemplo del cuadrado se podría enumerar los vértices y observar que reflexión quedaría con cada una de sus diagonales, etc.

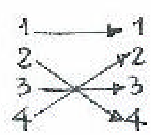


"ESTE TEMA SERIA DE VITAL IMPORTANCIA PARA TRABAJAR FUNCIONES".

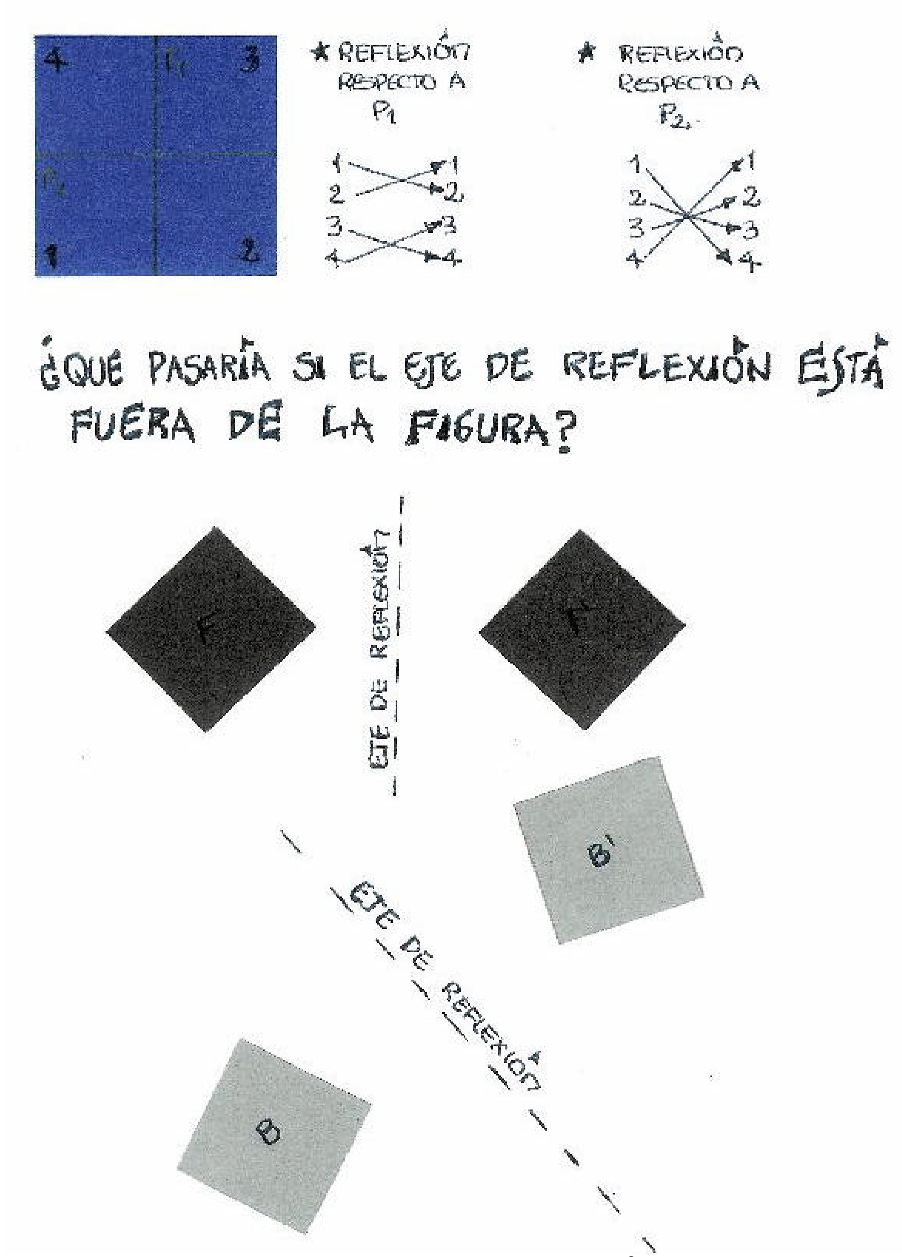
• REFLEXIÓN RESPECTO A l_1:



• REFLEXIÓN RESPECTO A l_2:



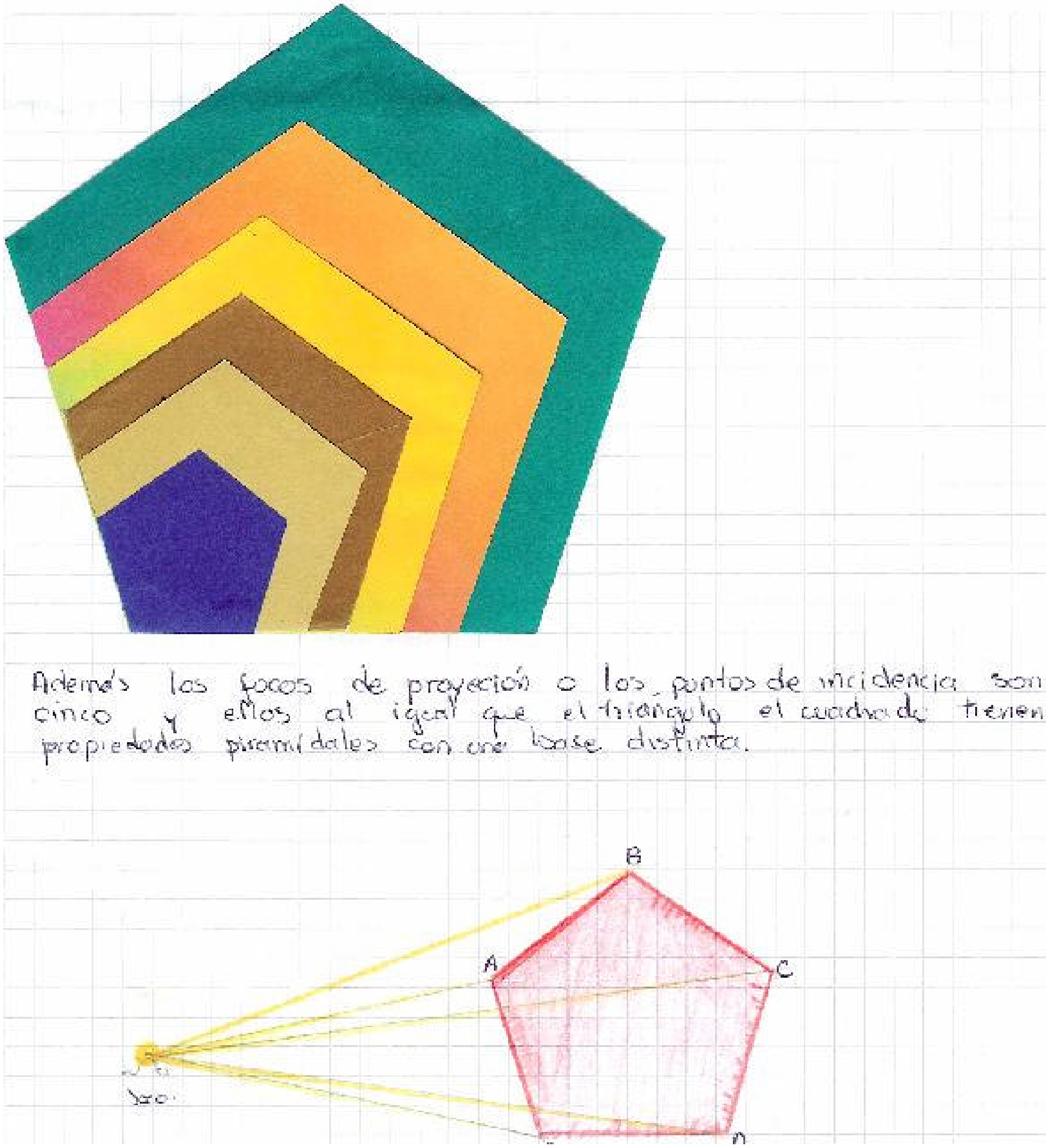
Trabajo realizada por Magda



Trabajo realizado por Magda[?]

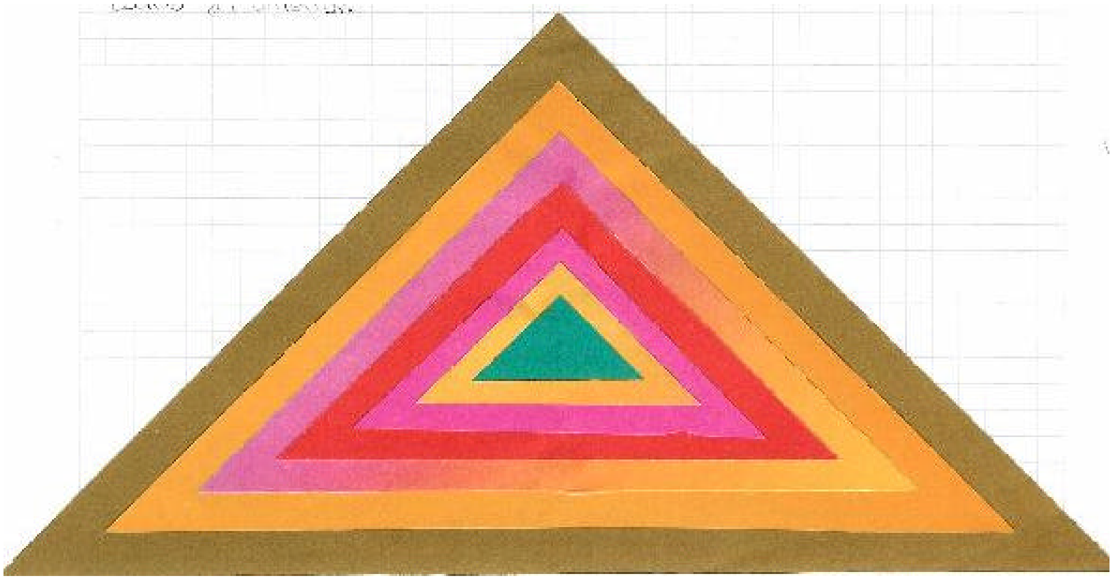
Como se puede ver mediante el plegado de papel se pueden observar claramente los ejes de simetría de un polígono (un cuadrado en este caso).

[?] Este nombre es real, y declaro que de aquí en adelante los nombres utilizados serán reales. Estos pertenecen a los grupos de la Licenciatura en Matemáticas que participaron de la experiencia.



Trabajo Realizado por Albeiro

El trabajo con origami puede ser una oportunidad para despertar el interés de los niños por el estudio de temas geométricos como las Homotecias, que en este caso el estudiante Albeiro intenta apartir de papeles de color iniciar el concepto mediante la formación de figuras.



Trabajo realizado por Albeiro

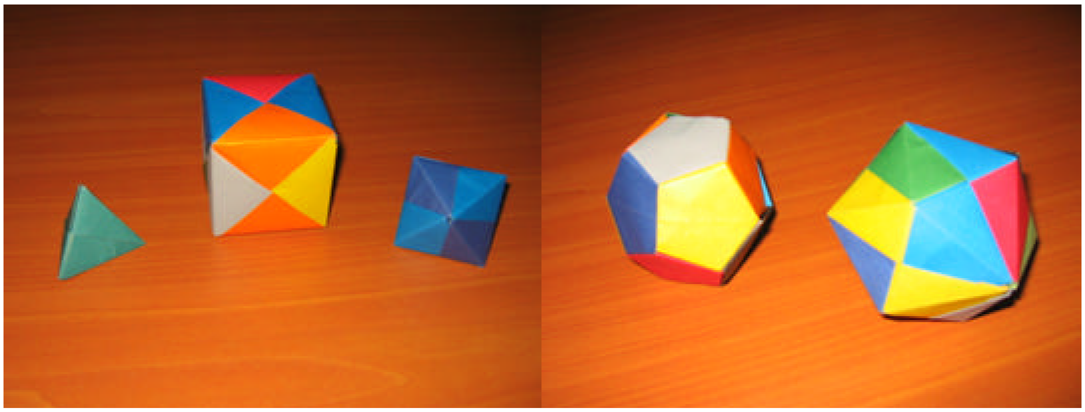
“Veamos también que al tomar cualquiera de los lados del triángulo y al hacer un corte paralelo a uno de sus lados, el triángulo cambia su tamaño pro no su forma, ésta se conserva. Construyendo homotecias del triángulo inicial” (Albeiro, estudiante del curso “Didáctica de la Geometría)

Estas actividades resultan muy enriquecedoras ya que permiten que los estudiantes del grupo (docentes en formación) inicien su proceso de formación docente, cuestionándose sobre los objetivos de la educación, creando y diseñando nuevas estrategias en busca de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Poliedros

- El estudio y la caracterización de los poliedros a partir de la observación, permitió descubrir propiedades y características de una manera más comprensiva, ya que éstas adquirieron significado para los estudiantes. Las propiedades no aparecieron como un listado de fórmulas, sino como la creación de patrones que apartir del análisis de algunos poliedros se pudo llegar a la formalización de los conceptos, realizando generalidades sobre el números de aristas, caras y vértices

- La construcción por parte de cada estudiante del curso "Didáctica de la Geometría y la Trigonometría" de los poliedros en diferente material, les permitió desarrollar habilidades manuales y descubrir la potencialidad que tiene usar material manipulable en el desarrollo de un contenido matemático



Poliedros en origami construidos por los estudiantes del curso "Didáctica de la Geometría"

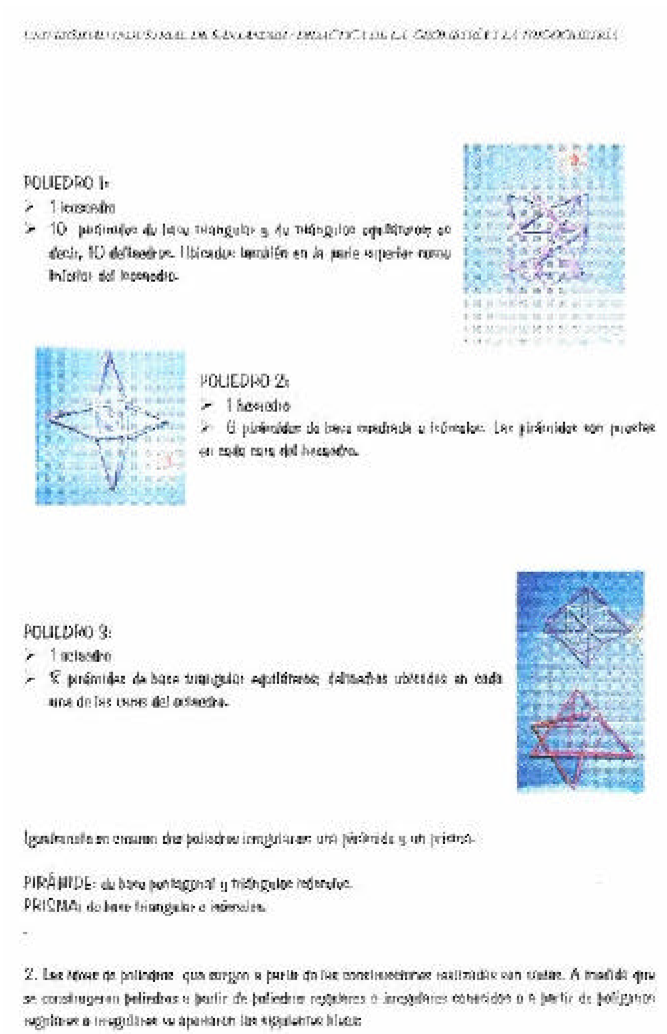
- Continuando la exploración por su cuenta los estudiantes diseñaron nuevos poliedros, que hasta el momento no se habían trabajado en clase, utilizando truncamientos sucesivos de poliedros ya conocidos y la inclinación de algunos de los esqueletos.

- En la actividad Formalizando 1 los estudiantes debían resolver la siguiente situación:

> **4.** Un poliedro tiene dispuestas sus caras de la siguiente manera: un hexágono; 12 triángulos equiláteros; un hexágono. ¿De qué poliedros se trata? Describa la disposición de los vértices y de las aristas de este poliedro.

Los estudiantes tuvieron que realizar el proceso inverso al ejecutado hasta el momento, ya que debían construir y descubrir un poliedro a apartir de condiciones dadas. Esto no fue tarea fácil ya que debían analizar las condiciones sobre las longitudes de los lados de los polígonos que debían componer las caras del poliedro. Además, debían analizar la posición de cada polígono guardando la proporcionalidad entre cada uno de sus lados.

Al realizar el análisis del poliedro obtenido los estudiantes realizaron la siguiente clasificación:



"Se trata de un antiprisma ya que posee dos bases hexagonales regulares, iguales y paralelas, pero a diferencia de un prisma una base está girada respecto al hexágono de la otra base. Las bases están colocadas en lo que llamamos posición opuesta; en este polígono regular los vértices del hexágono se corresponden con los puntos medios de los lados del otro hexágono. En este poliedros cada vértice del hexágono más alto lo unimos con dos vértices consecutivo del hexágono de debajo de manera que las aristas no se entrecrucen" (Mariana Gómez, Esmeralda Jaimes, Mayerli Hernández y Margaret Ramírez. Estudiantes del curso Didáctica de la Geometría y la Trigonometría)

El quinto punto de la misma actividad era similar al anterior.

> **5.** Un poliedros tiene las caras dispuestas de la siguiente manera: un octágono; 4 hexágonos y 4 cuadrados alternados; 4 octágonos y 4 cuadrados alternados; 4 hexágonos y 4 cuadrados alternados; un octágono. ¿Qué poliedros obtenemos?

El poliedro encontrado fue:

Poliedros hallado porlos estudiantes

La descripción que hicieron los estudiantes fue:

"Esta figura es un poco difícil clasificarla pues aunque es bastante interesante es un poco desconocida ya que no está presente ni en los prismas, anti - prismas, pirámides, bipirámides o entre los poliedros regulares; pero es claro que se hace un poco parecida a alguna de los sólidos arquimidianos como es el rombicuboctaedro que tiene 4 octágonos regulares, 10 hexágonos regulares y 12 cuadrados. En realidad no encontramos un nombre específico para él, lo que es cierto es que es un poliedros convexo (ya que descasa sobre una base) y que muy posiblemente está como derivación de los sólidos arquimidianos. Caras: 26, aristas 72, vértices 48, número de aristas que convergen por cada vértice 3." (Carolina, Claudia y Rocío. Estudiantes del Curso Didáctica de la Geometría y la Trigonometría)

"El poliedro formado en esta construcción está clasificado dentro de los poliedros arquimedianos, esto quiere decir que sus caras son polígonos regulares y también tienen vértices iguales aunque no todos los polígonos que los forman son iguales" (Mariana, Esmeralda, Mayerli y Margaret. Estudiantes del curso Didáctica de la Geometría y la Trigonometría.)

Esta exploración de los poliedros a partir de exploraciones sencillas basadas en la observación, en el diseño y la creación de los propios estudiantes permite tener un material interesante para iniciar el estudio de los polígonos y en general de sus características y propiedades. Ofreciendo a los docentes en formación, herramientas didácticas que pueden facilitar su trabajo en el aula. Planteando nuevas y mejores formas de presentar la geometría a sus estudiantes de una manera activa y dinámica donde el aula se convierta en un pequeño laboratorio de exploración y descubrimiento.

Poliominós

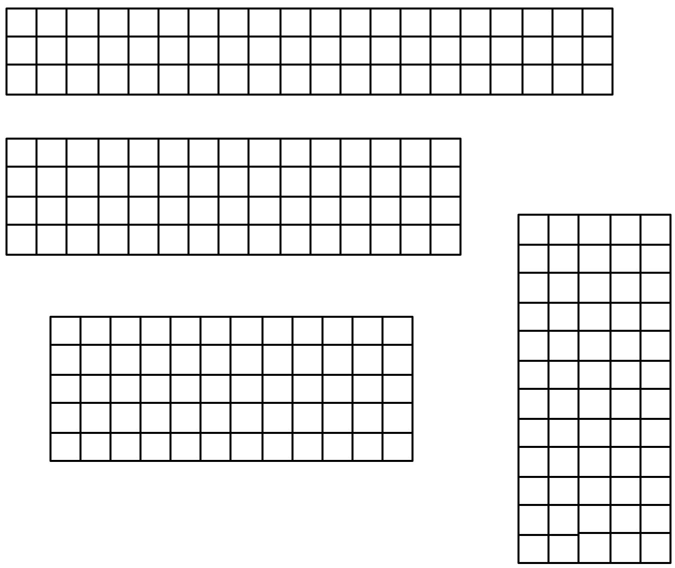
- A partir de las actividades de recubrimiento, los estudiantes pudieron descubrir las relaciones existentes entre la superficie a recubrir y el poliominó que se va a utilizar. Después de plantear diferentes conjeturas todo el grupo pudo concluir que:

  "En general una primera condición para recubrir un tablero es que el número de casillas hábiles sea múltiplo del número de cuadrados que se compone el poliominó"

  "Si alguna de las dimensiones del tablero es par entonces el número de cuadrados restringidos de cada color debe ser el mismo. Si las dos son impares entonces se deberá restringir un número impar de cuadrados"

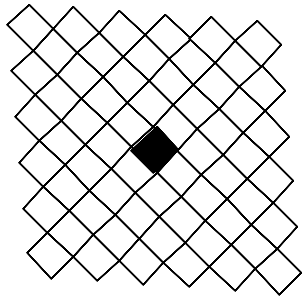
- El cubrimiento de tableros utilizando los doce pentominós, permite analizar relaciones entre forma y superficie. Por ejemplo: los tableros a recubrir con los 12 pentominós necesariamente están constituidos por 60 cuadrados. los diferentes tableros rectangulares de 60 cuadrados son de 1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12 y 6x10. Fácilmente los estudiantes descubrieron que los rectángulos 1x60 y 2x30 no pueden ser recubiertos con pentaminós. Después de analizar algunas de las soluciones planteadas por el curso, pudimos ver que el tablero más difícil de recubrir es el de 3x20 , y después de realizar algunas investigaciones encontramos que:

Dimensiones	N° de soluciones
3x20	2
4x15	368
5x12	1010
6x10	2339

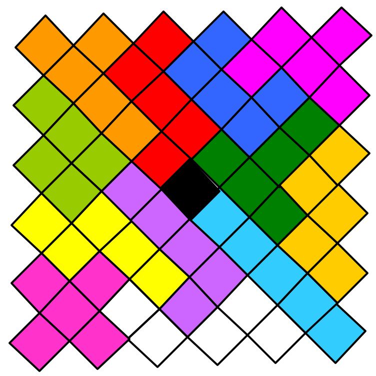


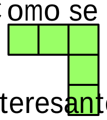
Este tipo de situaciones permite analizar cómo a pesar de que el área se conserva pues las piezas son las mismas, el perímetro no permanece constante. Además, al resolver cada situación, es indispensable que el estudiante analice la forma de los pentaminós y descubra, por ejemplo, cuáles de ellos pueden estar en as esquinas descubriendo diferentes soluciones de una misma situación.

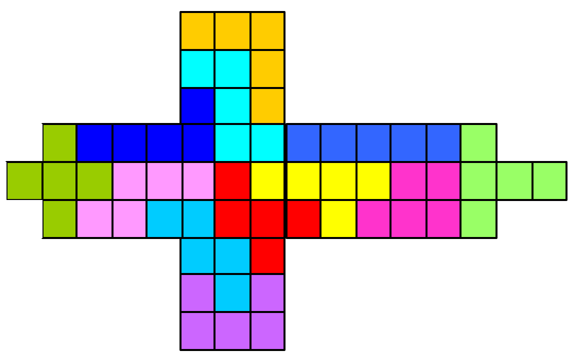
Un caso especial que se muestra en esta actividad es el recubrimiento de la siguiente figura

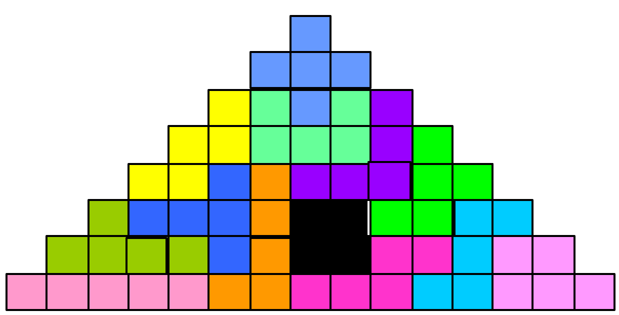


Este es un problema abierto, ya que no se ha resuelto pero tampoco se ha probado que sea imposible de construir, ni siquiera permitiendo que el agujero de un cuadrado ocupe otra posición ha podido hallarse la solución. Una aproximación a esta situación encontrada por un estudiante es:

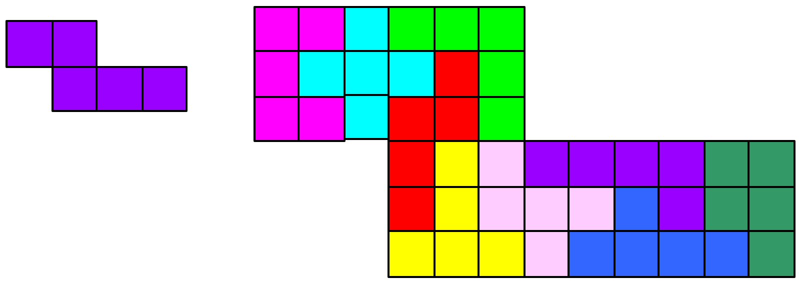


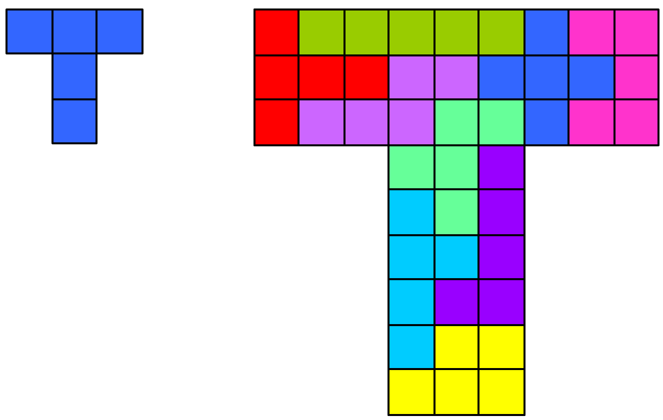
Como se puede ver quedan en el arreglo 11 de los pentominós, pero el pentominó .  no se puede ubicar en el espacio sobrante. Este tipo de problemas son muy interesantes, ya que permiten desarrollar habilidades espaciales analizando y prediciendo las posibles posiciones que podría ocupar un pentominó dependiendo de su forma analizando sus rotaciones y reflexiones. Algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes a los planteamientos de recubrimiento planteados son:





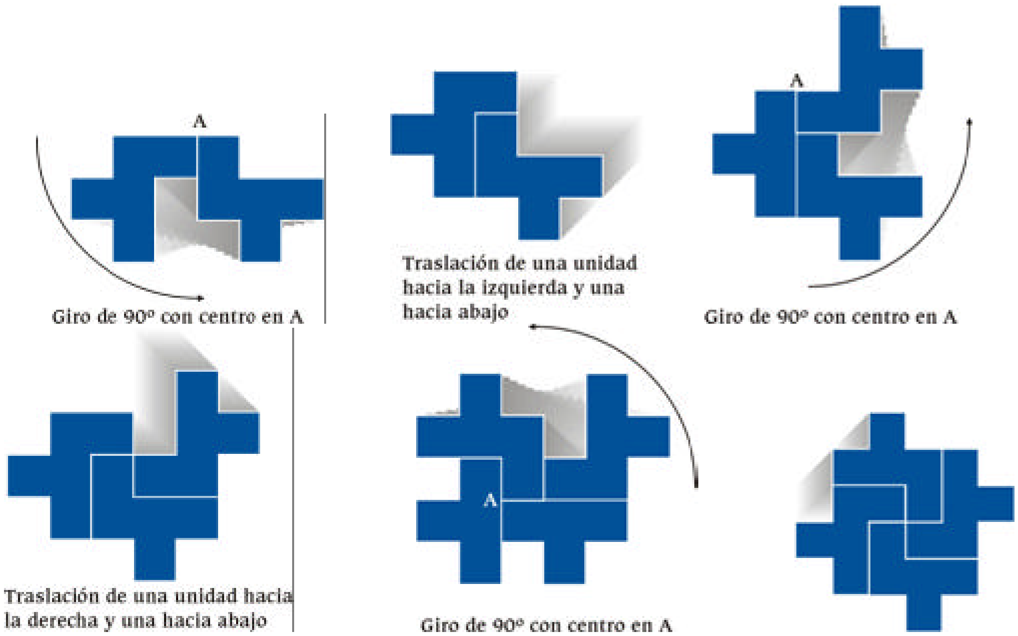
Una interesante propiedad que descubrieron los estudiantes es que los pentominós es que cualquiera de ellos puede ser construido a escala (triplicando el tamaño) usando nueve de los restantes pentominós. Por ejemplo:

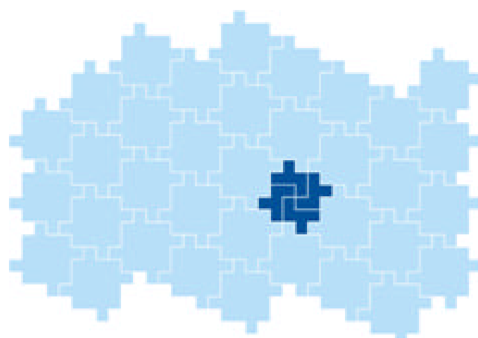




Estas características, que los estudiantes descubrieron en los poliominós y en particular en los pentominós, permiten contar con un material para plantear actividades específicas para el desarrollo de contenidos matemáticos especialmente geométricos.

- En esta actividad se inicia el estudio de las transformaciones tomando como base los poliominós en particular los pentaminós, descubriendo y construyendo losetas a partir de ellos. Por ejemplo en la siguiente loseta los estudiantes encontraron en pentominó que generó la loseta, además de describir cada una de las transformaciones que se realizaron sobre el pentominó original para su diseño.





Trabajo realizado por Alexander

En esta actividad los estudiantes descubrieron los elementos que son necesarios para realizar una traslación y una rotación, realizaron diferentes ejercicios con regla y compás caracterizando las imágenes como objetos congruentes a los iniciales. Además, verificaron mediante ejemplos sencillos que las rotaciones y las traslaciones con la composición cumplen propiedades algebraicas. Estas propiedades definen una estructura que se puede formalizar de la siguiente manera.

Supongamos que se desea girar el punto **x** un ángulo $?$ con respecto a **p** Podemos definir una transformación

$$T(x) \; ? \; A_{?}(x \; ? \; p) \; ? \; p$$

$$T(x) = A_\theta x - A_\theta p + p$$
$$T(x) = A_\theta x + (I - A_\theta)p$$

Donde A es la matriz de rotación definida por: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ i.e. una rotación de un punto x con respecto al punto p está dada por una transformación de la forma $T(x) = A_\theta + b$, donde $b = (I - A_\theta)p$, $b \in R^2$

Por ejemplo: Supongamos que se quiere girar el polígono R un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, con respecto al punto $p = (1,0)$. Entonces $A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$b = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego la transformación sería: $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$T(1,1) = (-1,1) + (1,-1) = (0,0)$$
$$T(0,1) = (-1,0) + (1,-1) = (0,-1)$$
$$T(1,3) = (-3,1) + (1,-1) = (-2,0)$$
$$T(0,3) = (-3,0) + (1,-1) = (-2,-1)$$

Ahora, si se quiere realizar una rotación basta con aplicar una transformación de la forma: $T(x) = A_\theta x + b$ donde b depende del punto de rotación al que se quiera aplicar la rotación.

Las siguientes propiedades son de fácil verificación.

1. $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ para cualquier $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$
2. $A_\theta A_{-\theta} = I$
3. Si $x \in R^2, \|x\| = \|A_\theta x\|$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$

Note que si $? ? 0$, $A_0 ? I$, luego $T(x) ? A_0 x ? b$, es sólo la traslación del punto x, $\|b\|$ unidades en dirección de b.

Considerando el siguiente conjunto:
$L ? ?T : R^2 ? R^2 : T(x) ? A_? x ? b, b ? R^2, ? ? ?0,2? ? ?$ es decir, L es el conjunto de transformaciones (funciones) de R^2 en si misma que rotan o trasladan vectores en R^2.
La propiedad 3. garantiza que los vectores no son dilatados (cualquier polígono al que se le realiza una transformación de este estilo preserva las distancias, es decir; son congruentes).

Sean T, F ? L, defino la operación natural $(T \circ F)(x) ?: T(F(x))$.

De la propiedad 1. se tiene que esta operación es clausurativa. Si se toma $? ? 0$ y $b ? (0,0)$, $I(x) ? A_0 x ? (0,0)$ luego $I(x) ? x$, para cualquier x, y se tiene $I \circ T ? T \circ I ? T$ para cualquier, $T ? L$, es decir, existe $I ? L$ un elemento unidad en L.

Además si $T ? L$, basta tomar $T^{?1}(x) ? A_{??} x ? b?$ con $b? ? ? A_? b$, y tendríamos que $T^{?1} ? L$ donde:

$$
\begin{aligned}
(T \circ T^{?1})(x) &? T(T^{?1}(x)) \\
(T \circ T^{?1})(x) &? T(A_{??} x ? b?) \\
(T \circ T^{?1})(x) &? A_? (A_{??} x ? A_{??} b) ? b \\
(T \circ T^{?1})(x) &? A_? A_{??} x ? A_? A_{??} b ? b \\
(T \circ T^{?1})(x) &? x ? b ? b \\
(T \circ T^{?1})(x) &? x
\end{aligned}
$$

De la misma manera se comprueba la conmutatividad de la transformación T con la transformación inversa.

Por lo que cada elemento de L es invertible.
Con la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices se verifica que L cumple la propiedad asociativa luego L con la operación composición tiene una estructura de grupo.

De esta manera logramos un acercamiento a conceptos formales de álgebra lineal utilizando conceptos básicos de geometría como las rotaciones y traslaciones de polígonos.

Teselados

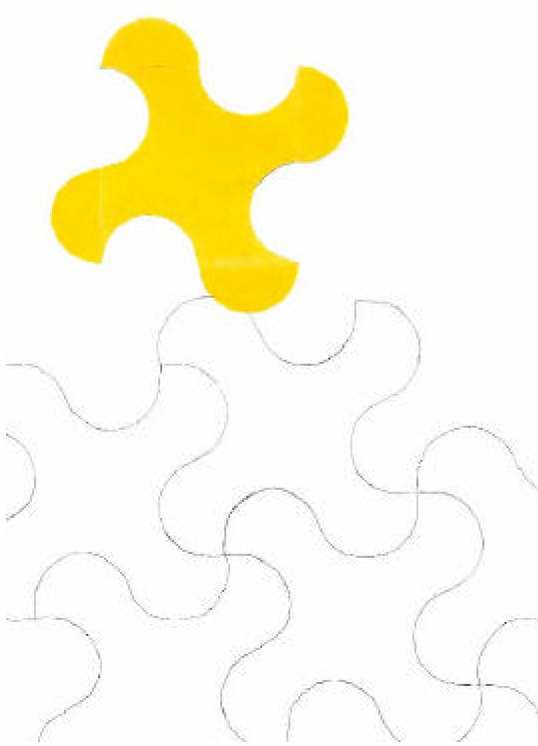
- Las actividades con los teselados además de desarrollar la creatividad y el ingenio de los estudiantes, permite trabajar las rotaciones y traslaciones a partir del diseño de losetas analizando algunas propiedades que deben cumplir los polígonos para recubrir el plano. A partir de la exploración los estudiantes pudieron concluir que:

"No todos los polígonos recubren el plano. Esto debe estar relacionado con la medida de los ángulos internos del polígono"

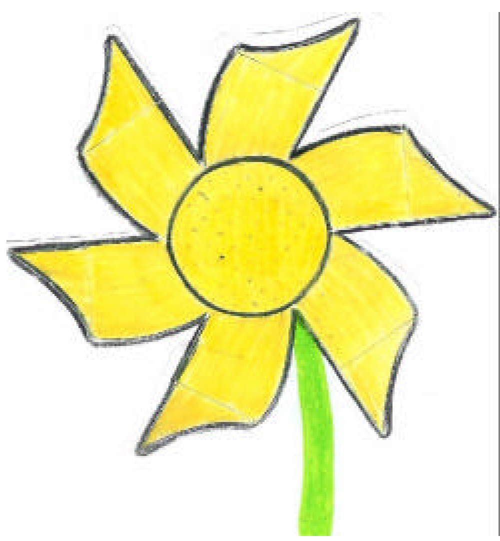
"Todos los cuadriláteros recubren el plano, ya que la condición que deben cumplir los polígonos es que la medida de sus ángulos internos sea 360º de esta manera al unir los vértices no hará faltará ni sobrará espacio para recubrir"

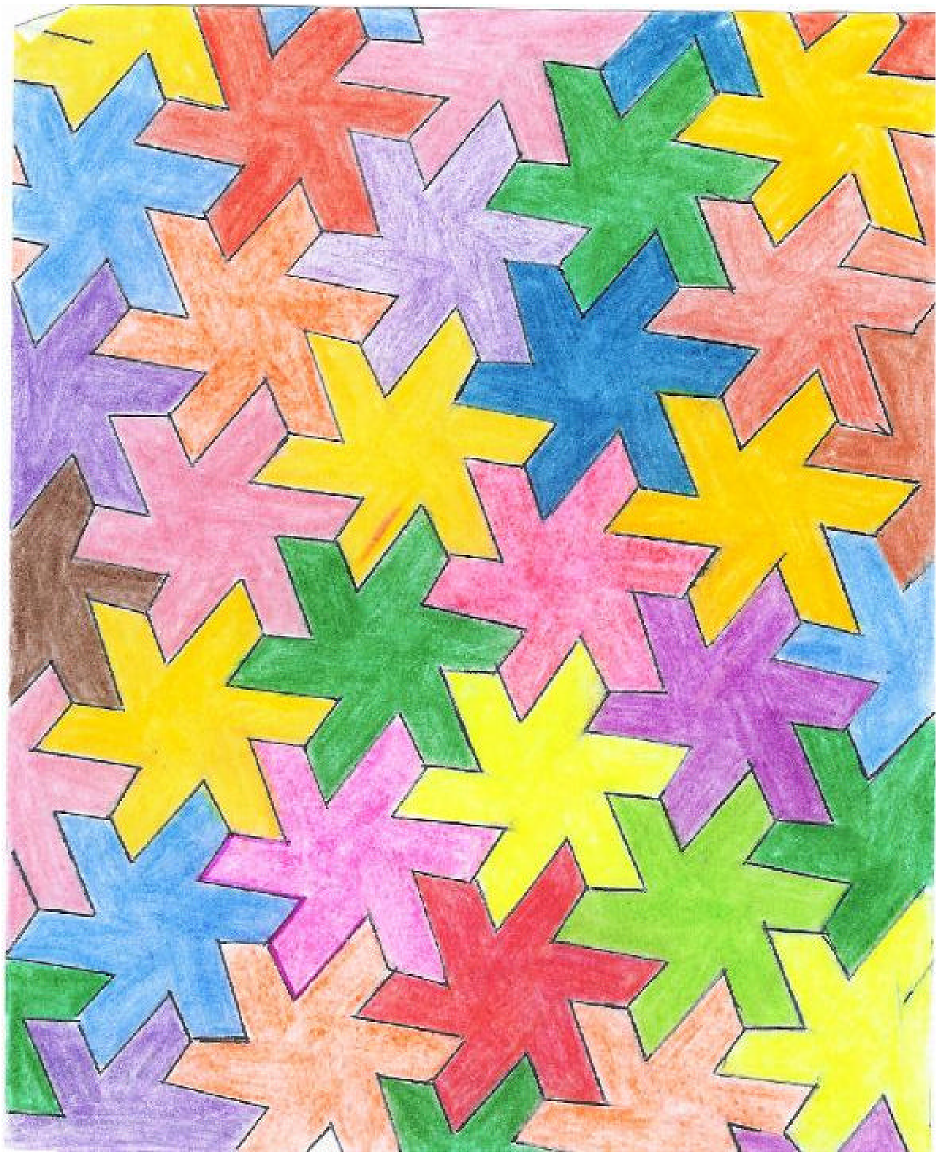
Al plantear la pregunta ¿Qué polígonos regulares teselan el plano? de una manera natural, se lleva al estudiante a investigar cómo hallar la medida de los ángulos internos de un polígono regular, dando lugar a un razonamiento deductivo (a partir del conocimiento de la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo).

- A partir de polígonos regulares, (triángulo equilátero, cuadrado, hexágono regular) los estudiantes del grupo construyeron teselados del plano realizando rotaciones y traslaciones sobre polígonos. A continuación se presentan algunos de los trabajos realizados por los estudiantes



Trabajo realizado por Claudia Patricia





T rabajo realizado por Rocío

TESELANDO EL PLANO

Para teselar el plano es necesario partir de algunas de las figuras como el triángulo, el rectángulo - o el cuadrado - o el hexágono. En esta sección tomaremos el hexágono, le aplicaremos las condiciones necesarias a la transformación, de modo de tesele el plano. -veamos-.

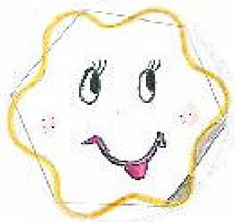


Figura 1.

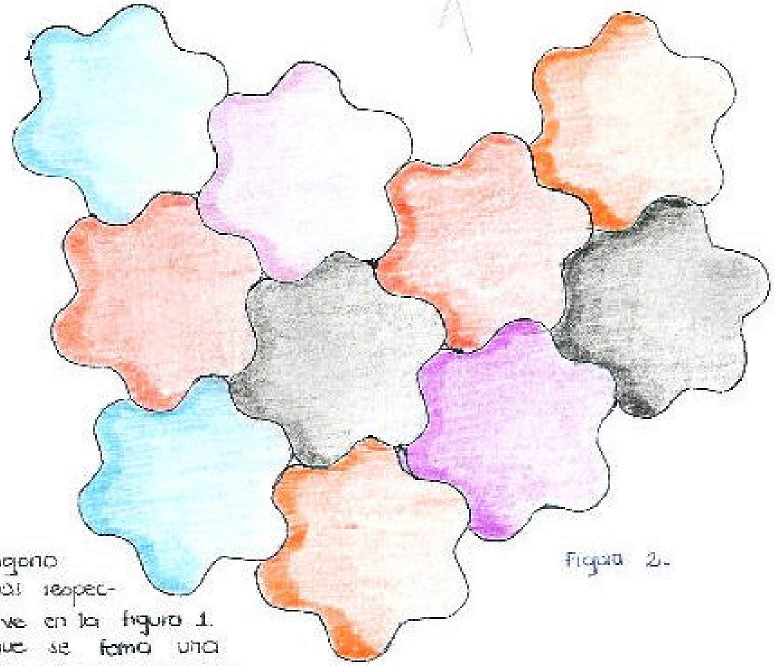
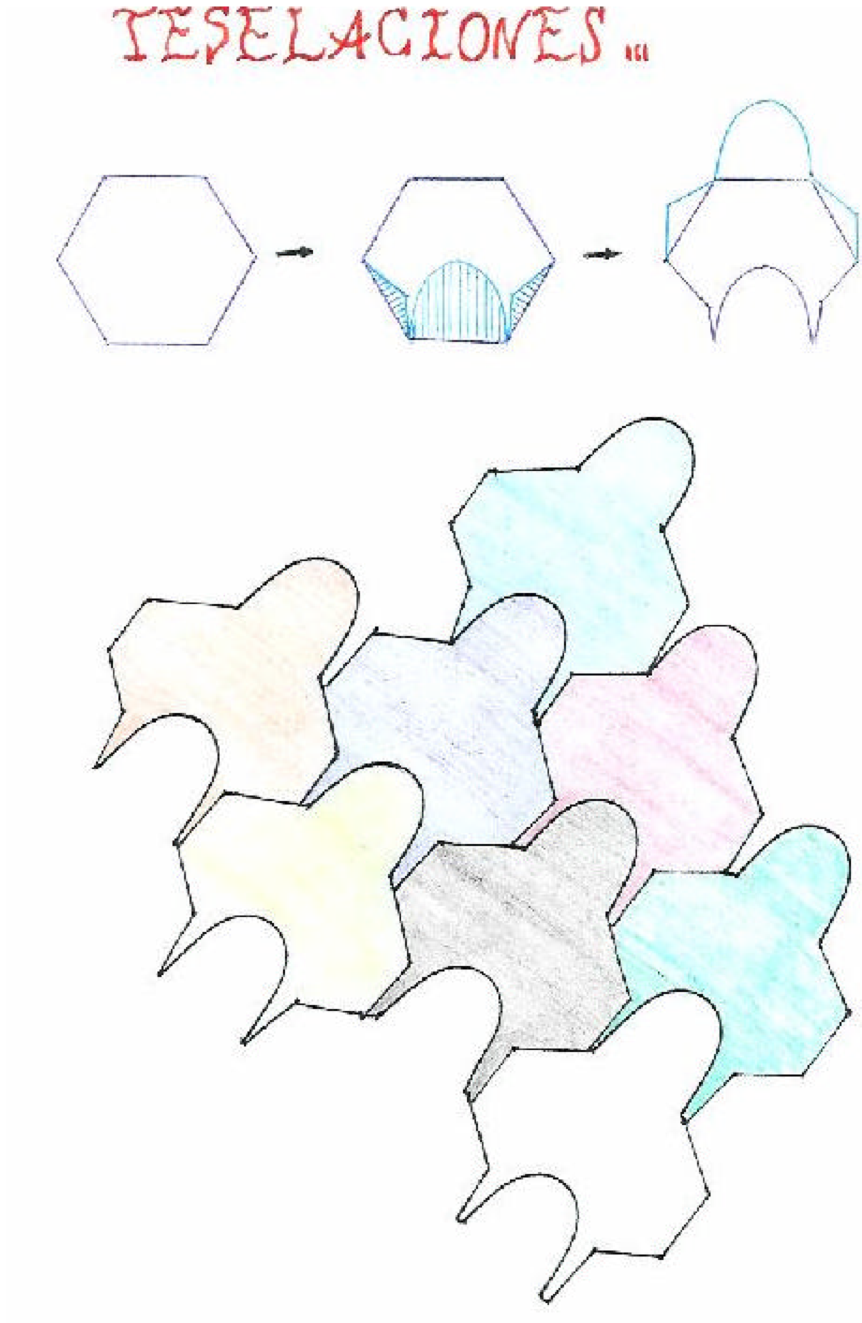


Figura 2.

Al realizarle al hexágono seis cortes y añadimos respectivamente como se ve en la figura 1. nos damos cuenta que se forma una estrella - por así decirlo - que como vemos en la figura 2 tesela totalmente el plano; es decir que esta figura 1 la podemos encajar con todas las que queramos que sean semejantes, algo así como un rompecabezas. Lo motivante de realizar actividades así, es que podemos armar figuras como peces, cocodrilos, con sólo quitar y poner. Esta estrella es una creación muy sencilla.

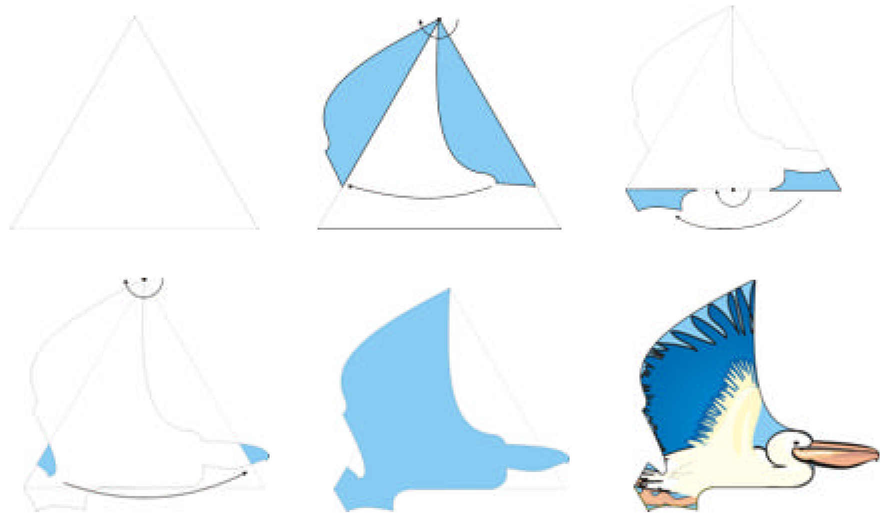
Hecho por: Carolina Rojas Celis.
2020632-

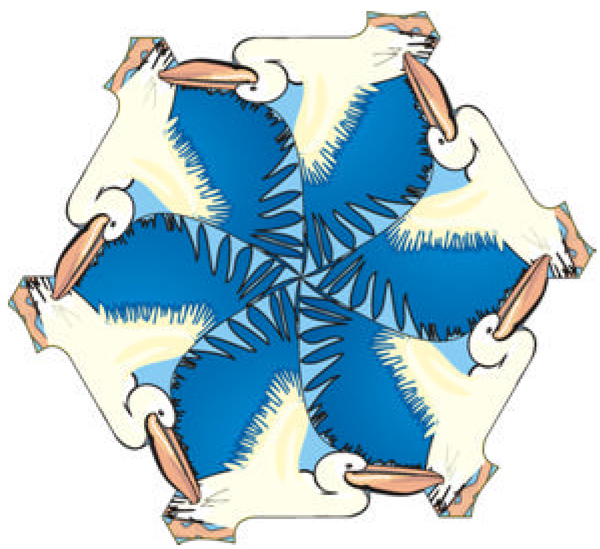
Trabajo realizado por Carolina



T rabajo realizado por C laudia

- La portada de este trabajo fue diseñada por el estudiante Wolfan Alexander como resultado de su experiencia en la construcción de una loseta. Los pasos de su construcción fueron:

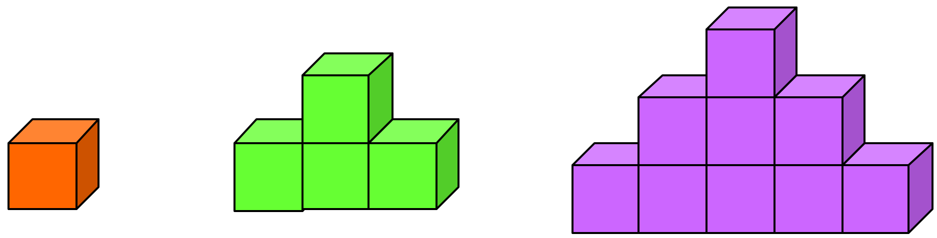




Aquí, se pueden observar las transformaciones que se realizaron sobre un triángulo equilátero , formando una loseta que tesela el plano.

Policubos

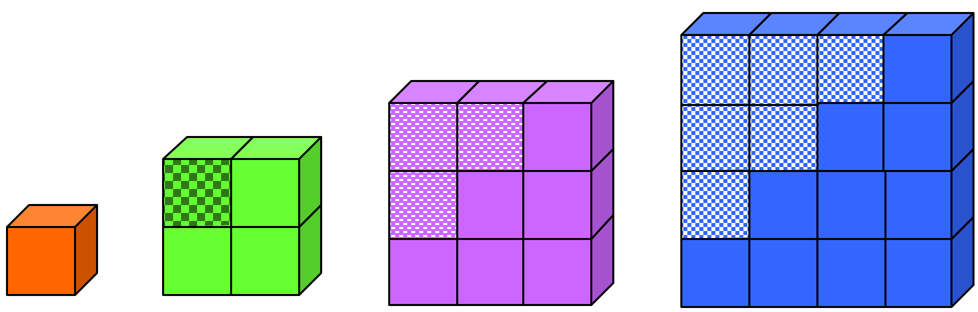
- Inicialmente al trabajar con los policubos, se establecen relaciones entre estos y los poliominós, ya que con ellos se pueden representar los poliominós en el espacio. El trabajo con los policubos permite establecer relaciones numéricas apartir de observaciones geométricas. Por ejemplo en el caso de la escalera doble



Claramente los estudiantes pueden observar que las condiciones que deben cumplir el número de cubos para ser base de una escalera es un número impar. Si se observa los números de cubo de cada escalera se tendría la siguiente sucesión:

1 1+3 1+3+5 1+3+5+7 1+3+5+7+9 … 1+3+5+7+9+… +**<u>(2n-1)</u>**

Encontrando la forma general de los número impares, para la base de una escalera de ***n*** escalones en la base. Al intentar encontrar cuántos cubos están formando la escalera, se puede realizar analizando la forma de la figura de la siguiente manera



Como se puede observar, los estudiantes lograron encontrar una relación entre la forma que se puede encontrar trasladando unos cuantos policubos, formando un cuadrado. Por lo tanto el total de cubos utilizados en la construcción de cada escalera es

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad n^2$$

Por lo tanto:

$$1+3+5+7+9+\ldots+\mathbf{(2n-1)=n^2}$$

Esta manera de construir la sucesión, encontrando las relaciones geométricas y numéricas de una misma situación, permite que los estudiantes realicen conexiones entre la misma matemática y no que aprendan procesos aislados.

A Modo de Conclusiones

A Modo de Conclusiones

- El diseño de esta cartilla está en su primera etapa, considero que este es el inicio de un importante trabajo que en este momento hace su primera presentación para ser

- Considero que es fundamental que docentes en formación experimenten y vivencien actividades relacionadas con su futuro trabajo que les permitan presentar propuestas de trabajo en el aula.

- Convertir el salón de clase en un pequeño laboratorio, puede generar actividades propias de la matemática como conjeturar, argumentar y generalizar mediante el descubrimiento y la exploración de situaciones problemáticas

- Los estudiantes se han convertido en multiplicadores de la experiencia, ya que fueron invitados al Colegio el Carmen a dirigir y acompañar las Jornadas Pedagógicas de los docentes de la institución.

- Este trabajo generó expectativas en los estudiantes en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, expectativas que algunos de ellos esperan socializar en sus barrios o municipios.

Referencias Bibliográficas

BOZAL J. L. Anton y otros. Taller de Matemáticas Centro de Publicaciones MEC. Madrid 1994

BUITRAGO Molina José Tomas. Fundador Asociación Colombiana de Origamistas y Organizador del Encuentro Colombiano de Origamistas. Miembro de Origami USA y British Origami. Society, 2001

GUILLÉN Soler G. Poliedros. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis S.A. Madrid Noviembre de 1997

KURCHÁN, Rodolfo: Diversiones con Números y Figuras Ediciones de Mente. Buenos Aires, 2000

NIKSON Linda y otros. El aprendizaje de las Matemáticas Editorial Labor 1991 España.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas Panamericana Formas E Impresos S. A. Santanfé de Bogotá Colombia Julio de 1998

MORRIS Klein. El fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?

OSORIO Rosalba Hacia una Didáctica de la Geometría. Notas de Clase. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. 2002