LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: EVIDENCIAS DEL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Presentado por:
Doris Evila González Rojas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
2011

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: EVIDENCIAS DEL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Presentado por:
Doris Evila González Rojas

Trabajo presentado
para optar por el título de
Especialista en Educación Matemática

Director:
Dr. Javier Camargo García

Codirectora:
M. en C. Solange Roa Fuentes

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
2011

Dedicado a mis tres amores

Agradecimientos

Ante todo le agradezco a Dios, quien guía nuestro camino cada día.

A los estudiantes de la Sede UIS-Socorro por regalarnos parte de su valioso tiempo en la aplicación de las actividades.

A Sol, por su orientación, su dedicación, apoyo y paciencia en la dirección de este trabajo.

A todas las personas que de una u otra forma hicieron posible la culminación de este trabajo, que me apoyaron y me dieron la fuerza para continuar.

CONTENIDO

RESUMEN

TITULO: Los sistemas de ecuaciones lineales: Evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios*

AUTOR: González Rojas Doris Evila**

PALABRAS CLAVE:

Modos de pensamiento, geométrico, analítico, estructural.

El presente trabajo pretende responder a la pregunta ¿Pueden los estudiantes de un curso de ecuaciones diferenciales transitar entre los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska, en la resolución de situaciones que involucran sistemas de ecuaciones o presentan dificultades para transitar entre dichos modos de pensamiento? Por lo tanto el interés de este trabajo se encuentra centrado en determinar evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento.

Para el desarrollo de este trabajo se interactuó con un grupo de estudiantes de cuarto semestre de programas presenciales de pregrado. Se aplicó una prueba diagnóstico a partir de la cual, se diseñaron actividades para realizar una entrevista con tres estudiantes. La lectura y el análisis de las entrevistas de los estudiantes, teniendo en cuenta los modos de pensamiento en Álgebra Lineal, expuestos por Sierpinska (2000): pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético, analítico-estructural, permitieron detectar las concepciones, estrategias y dificultades que presentan los estudiantes acerca del concepto sistema de ecuaciones lineales y en relación a las posibles soluciones que puede tener un sistema de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, en la representación gráfica y analítica. Se logró establecer que en los estudiantes entrevistados predomina el modo de pensamiento analítico-aritmético.

Finalmente se plantean algunas observaciones de tipo metodológico, con el propósito de mejorar el acompañamiento de los docentes en la construcción pertinente de conocimiento matemático en los estudiantes.

---

* Trabajo de Grado
** Facultad de Ciencias – Escuela de Matemáticas – Especialización en Educación Matemática – Director CAMARGO GARCÍA, Javier Enrique. – Codirectora ROA FUENTES, Dora Solange.

ABSTRACT

TITLE: THE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS: EVIDENCE FROM THE TRANSITION BETWEEN MODES OF THINKING IN UNIVERSITY STUDENTS*

PROPONENT: González Rojas Doris Evila**

KEY WORDS:

Modes of Thought, geometric, analytical, structural.

This paper aims to answer the question: *Can students a course in differential equations move between modes of thinking proposed by Sierpinska, the resolution of situations involving equations or systems have difficulty moving between these modes of thought?* Hence the interest in this work is focused on identifying evidence of traffic between modes of thought.

For the development of this work is interacted with a group of fourth semester of undergraduate programs face. We applied a diagnostic test from which were designed activities for an interview with three students. Reading and analysis of interviews of students, taking into account the modes of thinking in linear algebra, presented by Sierpinska (2000): synthetic-geometric thinking, analytical, arithmetic, analytical and structural, to the recognition of concepts, strategies and difficulties presented by the students about the concept and system of linear equations in relation to possible solutions that can have a system of two and three linear equations with two unknowns in the graphical and analytical. It was established that the students interviewed predominant mode of analytical thinking, arithmetic.

Finally it raises some methodological observations, in order to improve the support of teachers in the construction of mathematical knowledge relevant to students.

*Thesis

** Science Faculty – Mathematics School – Specialization in Mathematical Education – Director CAMARGO GARCÍA, Javier Enrique. – Codirector ROA FUENTES, Dora Solange.

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es un área que tiene aplicabilidad en muchas otras, dentro y fuera de las matemáticas; por ejemplo en análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, ingeniería, etc. Uno de los conceptos que más aplicaciones tiene dentro del álgebra lineal y fuera de ella son los sistemas de ecuaciones lineales. En nuestro sistema educativo este tema es abordado a partir del grado 9º en la educación secundaria y en general en los ciclos básicos de los programas universitarios se estudian temas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales donde se busca desarrollar una teoría más formal sobre los mismos. El énfasis en la secundaria se centra en los métodos de solución de un sistema: reducción, eliminación y sustitución; de tal manera que al ingresar a la universidad los estudiantes conciben que al tener un sistema de ecuaciones basta con aplicar algún método de solución. Esto ha minimizado la importancia de este concepto para resolver problemas y ha hecho de este un proceso mecánico que no permite al estudiante comprender el significado de la solución a un sistema de ecuaciones lineales.

Relacionado con la problemática planteada, nuestro objetivo en este trabajo es identificar los modos de pensamiento con que los estudiantes de ingeniería abordan situaciones relacionadas con sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x2 y 3x2); así como la manera en que pueden transitar de un modo de pensamiento a otro. Para alcanzar nuestro objetivo, diseñamos y aplicamos, a un grupo completo de estudiantes de ecuaciones diferenciales, una prueba diagnóstica que trata de una serie de actividades que buscan desarrollar los diferentes modos de pensamiento (Sierpinska, 2000). Con base en los resultados de dicho diagnóstico seleccionamos a tres estudiantes que participaron en una entrevista didáctica, en la que buscamos principalmente determinar cómo estos estudiantes pueden o no transitar de un modo de pensamiento a otro y las implicaciones que dicho tránsito tiene sobre su manera de concebir la solución de sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación sobre su solución.

Nuestro trabajo está organizado en cinco capítulos de la siguiente manera; en el primero, Planteamiento del problema, describimos y justificamos nuestra pregunta de investigación y el objetivo que nos trazamos. En el capítulo 2, Antecedentes, hacemos un breve recorrido por algunas investigaciones realizadas anteriormente, relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales y que se han desarrollado teniendo en cuenta los modos de pensamiento de Sierpinska (2000), y trabajos que han analizado las dificultades presentadas por los estudiantes para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Un tercer capítulo, Marco Teórico, donde especificamos la base sobre la cual nos apoyamos para realizar nuestro trabajo: los modos de pensamiento en Álgebra Lineal expuestos por Sierpinska (2000), y la conveniencia en lograr el tránsito entre ellos. En el capítulo 4, Análisis Metodológico, presentamos el proceso desarrollado, describimos el grupo de estudiantes que participó en el proyecto, los instrumentos que utilizamos, la prueba diagnóstica y las entrevistas junto con sus análisis a priori y a posteriori. Finalmente en el capítulo 5, Conclusiones y Recomendaciones, exponemos nuestros resultados generales, la forma como respondimos nuestra pregunta y planteamos las recomendaciones que estimamos convenientes para futuros trabajos.

CAPÍTULO 1.
Planteamiento del Problema

1.1 Sobre el problema de investigación

Para Sierpinska (2000) y Dorier (2002), el estudiante que no comprende claramente una definición, porque es muy abstracta para él, tendrá dificultades para entender conceptos, resolver problemas y demostrar propiedades relacionados con esa definición. Este es el principal problema que presenta el álgebra lineal ya que su naturaleza es puramente abstracta y no es posible evadir dicha abstracción para desarrollar sus conceptos básicos.

Por otra parte, algunos investigadores han llegado a la conclusión que una de las dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal se presenta por los diferentes lenguajes que se utilizan para hablar de algunos conceptos, por ejemplo de los espacios vectoriales, transformaciones lineales, matrices, etc. (Hillel, 2000, Sierpinska, 2000) y las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto. Es decir, en un momento dado se puede presentar al conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como un subespacio vectorial y en otro momento ese mismo conjunto se puede presentar como el núcleo de una transformación lineal. Entre esos lenguajes están: *el lenguaje abstracto*; *el lenguaje algebraico* de R^n y *el lenguaje geométrico* de R^2 y R^3 (Hillel, 2000). En particular, Sierpinska (2000) distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal, relacionados con cada tipo de lenguaje: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural y señala que cada uno de estos modos de pensamiento conduce a diferentes significados del objeto porque cada uno de ellos permite una mirada diferente sobre él. Por lo tanto plantea que estos modos de pensamiento podrían ser responsables de algunas dificultades en el estudio del álgebra lineal.

Uno de los conceptos que más aplicaciones tiene dentro del álgebra lineal y fuera de ella son los sistemas de ecuaciones lineales. En nuestro sistema educativo este tema es abordado a partir del grado 9º en la educación secundaria. En general en los ciclos básicos de los programas universitarios se estudian temas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales donde se busca desarrollar una teoría más formal sobre los mismos. La importancia de esta temática ha tenido gran incidencia desde la formación en álgebra lineal; al respecto, Dorier (2000) comenta que se han encontrado evidencias de técnicas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en civilizaciones muy antiguas en todo el mundo. También remite a los escritos de Euler (1750) donde pueden encontrarse las primeras evidencias de que la dependencia de ecuaciones lineales es vinculada a la solución de los sistemas. Por ejemplo, Euler reporta el caso de dos ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$

"…no es posible determinar las dos incógnitas x e y, pues al eliminar x, la otra desaparece también y queda una ecuación idéntica (identidad $0 = 0$*) de la cual no puede ser deducida. La razón para tal incidente es en principio muy obvia: como la segunda ecuación puede ser escrita en la forma 6x – 4y = 10, la cual no es más que el doble de la primera 3x – 2y = 5 y ésta no difiere en nada"* (Euler 1750, en Dorier 2000).

Otras investigaciones como las realizadas por Ramírez (2008); Miranda (2004); Oaxaca, De la Cruz y Sánchez (2003), muestran que los estudiantes presentan dificultades en la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Estos trabajos señalan cómo en algunos casos el estudiante no tiene claro qué significa encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, no tiene claro qué significado tiene el resultado final después de aplicar un algoritmo determinado para resolver el sistema. En particular, Ramírez (2008), muestra que los estudiantes no han desarrollado un modo de pensamiento analítico- estructural ya que no logran abstraer las propiedades de los sistemas que pueden determinar características particulares sobre la solución de los mismos. Por ejemplo, la autora concluye que uno de sus estudiantes cuando resuelve el sistema, $\begin{cases} 4y - 3x = -8 \\ -8y + 6x = 16 \end{cases}$, y llega a la identidad $0 = 0$ inicialmente considera que la identidad significa que el sistema no tiene solución. Pero cuando el mismo estudiante resuelve otro sistema y llega al resultado $0 = k$, con k constante diferente de cero, recuerda que el sistema no tiene solución y que la identidad $0 = 0$ significa que el sistema tiene infinitas soluciones y que gráficamente representa dos rectas coincidentes.

Por otra parte, cuando a otro estudiante se le pregunta cuántas soluciones tiene la ecuación lineal que representa la recta dada (ver figura1), este relaciona la solución de la ecuación lineal con los puntos de intersección de la recta con los ejes, indicando que tiene dos soluciones, como se muestra en la gráfica.

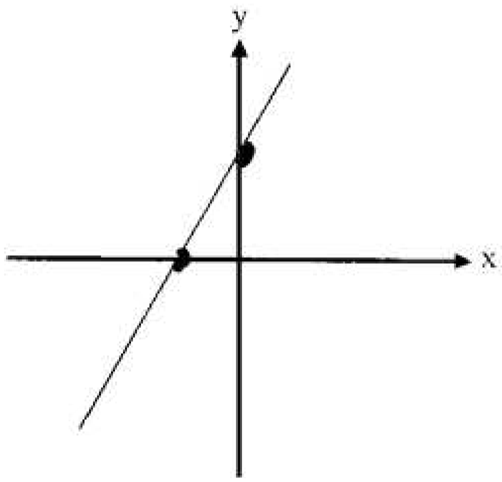


Figura 1. Problema 1, Ramírez (2008).

En este caso podemos decir que el estudiante relaciona la solución de la ecuación lineal con los cortes de la recta con los ejes coordenados. Podemos afirmar que el estudiante no tiene claro, por lo menos geométricamente, en qué consiste la solución de una ecuación y ha memorizado una "regla" en donde dicha solución se determina mediante los puntos de corte.

Particularmente en un curso de Ecuaciones Diferenciales el estudiante se encuentra con que debe resolver sistemas de Ecuaciones diferenciales; aunque los estudiantes que llegan a este curso deben haber aprobado un curso de álgebra lineal donde se aborda la teoría básica referente a los sistemas de ecuaciones y su solución, hemos percibido sus constantes dificultades no sólo al resolver un sistema sino al momento de interpretar su solución. Por ejemplo, al pedir en clase que resuelvan el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 3y \end{cases},$$

algunos estudiantes encuentran $x(t) = e^{-2t} + 3e^{6t}$ o $y(t) = -e^{-2t} + 5e^{6t}$, pero no reconocen la solución como una pareja solución al sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Teniendo en cuenta los aspectos que acabamos de describir, nos interesa determinar cuáles son las concepciones que los estudiantes que llegan a un curso de ecuaciones diferenciales tienen sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales; en particular de dos ecuaciones con dos incógnitas (2x2) o de tres ecuaciones con dos incógnitas (3x2) y la interpretación que logran hacer de dicha solución respecto a la solución de un problema; mediante el análisis del tránsito que pueden hacer entre los tipos de pensamiento planteados por Sierpinska (2000).

Algunas de las preguntas que surgen como orientación para esta investigación son:

- ¿Cómo interpretan los estudiantes la o las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales?
- ¿Qué estrategias emplean los estudiantes para determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

- ¿Qué interpretación hacen los estudiantes de la representación gráfica del conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales? Y en general, ¿qué evidencias muestran los estudiantes sobre el tránsito entre los modos de pensamiento?

Con base en estas preguntas planteamos el siguiente problema de investigación:

> *¿Pueden los estudiantes de un curso de ecuaciones diferenciales transitar entre los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska, en la resolución de situaciones que involucran sistemas de ecuaciones o presentan dificultades para transitar entre dichos modos de pensamiento?*

1.2 Objetivo

Identificar los modos de pensamiento con que los estudiantes de ingeniería que cursan Ecuaciones Diferenciales en la UIS-Socorro, abordan situaciones relacionadas con sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x2 y 3x2); así como la manera en que pueden transitar de un modo de pensamiento a otro.

CAPÍTULO 2.
Antecedentes

A continuación mencionaremos algunos trabajos en los cuales se hace uso del marco de referencia de los modos de pensamiento de Sierpinska respecto al concepto de sistemas de ecuaciones lineales, las dificultades entre el tránsito de razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de ecuaciones lineales, que dan fundamento a nuestro trabajo.

Ramírez (2008) busca *profundizar acerca de las concepciones de los estudiantes de nivel superior respecto a los sistemas de ecuaciones lineales en los modos de pensamiento geométrico y analítico,* enfoca su trabajo en los sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas y muestra que en su mayoría los estudiantes no logran determinar cuándo un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. No lo logran hacer ni de manera algebraica, manera que se enfatiza generalmente en los cursos de matemáticas, al llegar a la identidad $0 = 0$; ni de manera analítica, es decir no pueden determinar que las tres ecuaciones son equivalentes y por tanto tienen infinitas soluciones. Ni mucho menos geométricamente, es decir, que las tres rectas son coincidentes. Aunque la autora habla en términos de rectas coincidentes e incluso pretenda dibujarlas un poco "gruesas", es pertinente aclarar que se refiere a la representación de una única ecuación, ya que al tener un diferente número de ecuaciones equivalentes su representación gráfica es la misma.

De la misma manera, Ramírez (2000) muestra que los estudiantes presentan dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural, ya que no observa las propiedades particulares de los sistemas. Por ejemplo, al pedirle a los estudiantes que resolvieran el sistema $\begin{cases} 12x + 4y = -16 \\ -3x - y = 2 \end{cases}$ la mayoría de los estudiantes resolvieron el sistema y llegaron a la identidad $0 = 0$, sin tener en cuenta que las ecuaciones son equivalentes y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. Este comportamiento como comenta la autora, está relacionado con la dificultad de los estudiantes al transitar entre los modos de pensamiento asignados al álgebra lineal; ya que al tener un sistema determinado parece que la prioridad de los estudiantes es realizar algún tipo de manipulación con los elementos que se presentan sin tener consciencia de la viabilidad de aplicar sobre ellos resultados teóricos. De esta manera la representación utilizada en un enunciado determinado parece incitar un tipo de pensamiento particular; por tanto el tránsito entre dichos modos de pensamiento está limitado por la representación de las situaciones y el tránsito entre ellos queda determinado por la actividad de cada sujeto.

Oaxaca, De la Cruz y Sánchez (2003), mencionan en su trabajo algunas dificultades que tienen los estudiantes de primer semestre de ingeniería al resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y de ahí pasar al de tres por tres y posteriormente a sistemas rectangulares de m ecuaciones y n incógnitas, buscando las alternativas para que ellos puedan desarrollar modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético en la solución de los mismos. Estos autores concluyen que entre los enfoques del pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético hay una separación que es necesario resolver para que los alumnos los usen sin ninguna dificultad. Enfatizan en que los libros de texto favorecen el pensamiento analítico-aritmético y muy pocos abordan ambos o únicamente hacen una introducción a las dos formas de razonamiento pero continúan utilizando en la solución de ejemplos el analítico-aritmético y no se transita entre ellos. Igualmente se tiene predilección por esta forma de pensamiento debido a la facilidad que tienen los estudiantes para desarrollar procesos algorítmicos.

Estos autores plantean que es importante que todo ingeniero pueda interpretar modelos matemáticos lineales a partir de sus gráficas o sus expresiones algebraicas lineales y de esta manera pueda dar solución a modelos más complicados. Los autores encontraron que los alumnos de primer semestre de programas de ingeniería conocen los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales, pero en el momento de pedirles su interpretación, presentan muchas dificultades. Su investigación está orientada a mejorar la práctica de la comunicación y de las estrategias didácticas en el aula, para tratar de superar dificultades cognitivas y afectivas que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje.

Algunas conclusiones a las cuales llegaron estos autores (Oaxaca, De la Cruz y Sánchez 2003) son:

- El alumno tiene la creencia de que la solución gráfica de una ecuación está en la intersección con los ejes "x" y "y".
- La solución del sistema de ecuaciones lo asocia con el valor de x o de y pero no interpreta el punto que forma esta pareja.
- Los profesores debemos ayudar a nuestros alumnos a desarrollar las formas de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético para que ellos puedan transitar en ambas formas.
- El profesor en el aula induce a los alumnos a conocer los diferentes métodos que existen para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero se olvida de instruirlos en sus representaciones geométricas para obtener su ecuación a partir de su gráfica.

Miranda (2004) por su parte, propone generar modelos de enseñanza y aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de la implementación de prácticas pedagógicas que logren articular los diversos lenguajes que se usan para tratar conceptos del álgebra lineal (espacios vectoriales, transformaciones lineales, matrices, etc.). En este trabajo el autor presenta un primer ejemplo para construir un modelo de enseñanza para el tema de transformaciones lineales, que aplicó a algunos estudiantes, teniendo en cuenta los modos de pensamiento descritos por Sierpinska. Después de aplicar el modelo propuesto, el autor concluye que los estudiantes a quienes se les aplicó el modelo tienen suficiente dominio de las propiedades de una transformación lineal, que les permite pensar de manera estructural sobre la solución del problema. Por el contrario aquellos estudiantes que no participaron en su propuesta se clasifican solo en el modo de pensamiento analítico-aritmético ya que resolvieron correctamente los problemas pero no lograron trascender a otro modo de pensamiento. El autor comenta que su tratará de diseñar secuencias de aprendizaje donde se articule el lenguaje geométrico con el algebraico buscando que el estudiante se apoye en figuras geométricas en R^2 o en R^3 (en forma inicial) para que junto con la definición formal del concepto referido pueda demostrar sus propiedades o encontrar contraejemplos apropiados. Por ejemplo, si un estudiante ha aprendido la idea de la cerradura de una operación definida en un conjunto de vectores, entonces en una primera aproximación, con la ayuda de figuras geométricas adecuadas podría decidir si un subconjunto de R^2 o R^3 es o no subespacio vectorial de R^2 o R^3. Y una vez que el estudiante pueda decidir mediante la visualización, entonces deberá adquirir práctica algebraica para que pueda formalizar con símbolos lo que pudo intuir visualmente. La etapa final será cuando el estudiante pueda demostrar en forma generalizada y algebraica, sin recurrir a figuras geométricas, las propiedades del concepto estudiado, para, de este modo, posea un pensamiento analítico. El autor manifiesta que la estructura de este modelo de enseñanza, no necesariamente deba seguir una estructura lineal ya que en cada etapa puede haber retrocesos en donde se tenga que volver a revisar conceptos estudiados en etapas anteriores.

Un primer objetivo del trabajo de Ochoviet (2009), fue estudiar qué concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos (de14-15 años y 17-18 años) cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2x2. Un segundo objetivo de este trabajo fue diseñar una secuencia de enseñanza y de actividades, para los estudiantes de 14–15 años, del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que tiene en cuenta los datos revelados a partir del primer objetivo.

De acuerdo a las dificultades que se detectaron en los estudiantes, Ochoviet (2009) sugiere enseñar el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, no restringido al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones, de tal manera que se puedan ofrecer a los estudiantes diferentes tareas, donde tengan que enfrentar distintos tipos de situaciones que involucren dos o más ecuaciones lineales. También recomienda que los sistemas de ecuaciones deberían ser presentados en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico estructural. Diferentes maneras de pensar sobre los objetos matemáticos permitirán a los estudiantes una comprensión más profunda de ellos. De tal forma que los estudiantes construirán una visión más amplia del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales que les permitirá en el futuro comprender estructuras más generales y abstractas.

Ardila y Montañez (2010), interactuaron con un grupo de estudiantes de noveno grado de básica secundaria y segundo semestre de programas presenciales de pregrado, para determinar las dificultades y fortalezas que presentan los estudiantes al transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico. Ardila y Montañez (2010), argumenta que una de las dificultades que presentaron algunos estudiantes para desarrollar las actividades propuestas en la entrevista, están relacionadas con el manejo adecuado de los procesos algebraicos esenciales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Esto impide que el estudiante asocie la solución con su significado geométrico, de tal manera que no están en capacidad de transitar entre estos modos de pensamiento. Por ejemplo, en la actividad 2 de la entrevista realizada a los estudiantes de noveno grado, los autores plantearon la siguiente situación:

Realizar la representación gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y - 6 = 0 \\ x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la solución del sistema?
b. Determina los puntos de corte de las rectas. ¿Qué representan los puntos de corte?

Los autores determinaron que los estudiantes entrevistados manejan la parte mecánica que se requiere para elaborar la representación gráfica del sistema de ecuaciones dado pero el tránsito del modo de pensamiento aritmético al geométrico es superficial, pues cuando relacionan el punto de corte entre dos de las tres rectas con su significado aritmético, todos coinciden en afirmar que es la solución del sistema. En los estudiantes de pregrado, señalan los autores, fue evidente el desarrollo del pensamiento aritmético. Esto coincide con lo planteado por Miranda (2004), quien afirma que en la mayoría de los casos el énfasis del programa de Álgebra es la eficiencia y aprendizaje de la solución de ejercicios. En este sentido, Ardila y Montañez (2010), recomiendan que los profesores deben brindar los espacios adecuados para que los estudiantes desarrollen habilidades algebraicas al determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales; mediante el diseño de situaciones que les permitan además de determinar la solución de un sistema, analizar la pertinencia de dicha solución respecto al problema propuesto independientemente de la representación en que este aparezca. Comentan, además, que es imprescindible fomentar el ambiente geométrico, reforzándolo en la medida en que desarrollen ejercicios.

Tomando como base lo planteado en este capítulo, nuestro trabajo busca identificar los modos de pensamiento con que los estudiantes de ingeniería que cursan Ecuaciones Diferenciales en la UIS-Socorro, abordan situaciones relacionadas con sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x2 y 3x2); así como la manera en que pueden transitar de un modo de pensamiento a otro. De acuerdo a estos antecedentes esperamos que en nuestros estudiantes predominen los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético. Y que además, los estudiantes den muestras de estar desarrollando un tipo de pensamiento estructural.

CAPÍTULO 3.
Marco Teórico

3.1 Los modos de pensamiento propios del álgebra lineal

En esta sección describiremos los principales aspectos sobre los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), para explicar cómo los estudiantes comprenden los conceptos del álgebra lineal.

Sierpinska (2000) distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: el modo sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural. Históricamente el modo de pensamiento sintético-geométrico apareció primero que el pensamiento analítico-aritmético. Sin embargo esto no quiere decir que uno elimine al otro ni que uno sea más importante. Estos modos de pensamiento son igualmente útiles en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y la idea es que el alumno pueda transitar de un pensamiento a otro sin ninguna dificultad. Según nuestro marco de referencia, este tránsito le permitirá lograr una profunda comprensión de los conceptos del álgebra lineal. Los modos de pensamiento no son etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que son vistos como modos de pensamiento igual de útiles, cada uno en su contexto, y para propósitos específicos especialmente cuando están en interacción (Sierpinska, 2000). Por tanto se dice que si un individuo puede transitar entre los diferentes modos de pensamiento, está dando muestra de comprender realmente los conceptos del álgebra lineal.

Cada uno de estos modos de pensamiento utiliza un sistema de representación. En algunas investigaciones dedicadas al problema del aprendizaje del álgebra lineal se reporta que entre las diversas dificultades que un estudiante enfrenta para aprender la materia están la variedad de lenguajes y representaciones semióticas con los que se estudian los objetos del álgebra lineal. Entre esos lenguajes están: el lenguaje abstracto (correspondiente a la teoría general abstracta del álgebra lineal); el lenguaje algebraico de R^n y ***el*** lenguaje geométrico de R^2 y R^3 (Hillel, 2000). Por tanto, para cada representación es necesario desarrollar una manera de pensar que le permita a cada individuo comprender la información.

Por ejemplo, en el modo de pensamiento sintético-geométrico los objetos se pueden representar mediante el uso de figuras geométricas. En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas estos objetos son planos y líneas.

En el modo de pensamiento analítico-estructural los objetos del álgebra son vistos como un todo estructural, pueden ser identificados a partir de un conjunto de propiedades o a su caracterización a través de axiomas y representaciones analíticas; es decir las propiedades son más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricos.

Y en el analítico-aritmético, los objetos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano se representan como parejas ordenas, los vectores como n-uplas, las matrices se entienden como un conjunto de arreglos, las rectas y planos como ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 10 \\ 8x + 10y = 20 \end{cases}$$

Cada uno de estos modos de pensamiento conduce a diferentes significados de la noción, porque cada uno de ellos permite una mirada diferente del objeto algebraico en cuestión.

Entre los enfoques del pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético hay una separación que es necesario resolver para que los alumnos los usen sin ninguna dificultad. En los libros de texto se favorece al pensamiento analítico-aritmético y muy pocos abordan ambos o únicamente hacen una introducción a las dos formas de razonamiento pero continúan utilizando en la solución de ejemplos el analítico-aritmético y no se transita entre ellos, se tiene predilección por esta forma de pensamiento debido a la facilidad de los procesos algorítmicos.

Por ejemplo, Grossman (1996) presenta los sistemas de ecuaciones lineales a partir de un sistema de ecuaciones lineales general, es decir, de la forma $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son números dados. Hace notar que cada una de las ecuaciones representa una línea recta y que la solución a este sistema es un par de números, denotados por (x, y), que satisface el sistema. Pregunta si el sistema tiene solución y si tiene cuántas son las soluciones. Muestra un ejemplo de un sistema que tiene un única solución, después un sistema con infinitas soluciones y posteriormente el ejemplo de un sistema que no tiene solución (inconsistente). Y después muestra cómo se representan geométricamente estos sistemas (páginas 2 y 3).

Antes de iniciar la sección de ejercicios concluye con el siguiente resultado:

> El sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene solución única o tiene un número finito de soluciones. Esto es:
>
> i. Tiene una solución si y sólo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
>
> ii. No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones si y sólo si: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

Sus ejercicios, tanto ejemplos como propuestos, están planteados del modo analítico-aritmético. Hacemos referencia a este libro pues es uno de los más utilizados al abordar el tema de sistemas de ecuaciones lineales en un curso cualquiera de Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander. Muy pocos textos favorecen el pensamiento analítico-estructural, este tipo de pensamiento parece reducirse sólo a la labor del profesor en el tablero.

La principal diferencia entre los modos de pensamiento sintético y analítico con respecto a los objetos matemáticos es que, en el modo sintético los objetos matemáticos, de alguna manera, son dados directamente a la mente la cual trata de describirlos, es decir, de manera natural, en tanto que, en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente; de hecho, tales objetos solamente se construyen con las definiciones de la propiedades de sus elementos (Sierpinska, 2000).

Sierpinska menciona la coexistencia de tres tipos de lenguaje que dan cuenta de cada modo de pensamiento. *Lenguaje geométrico*: el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en R^2 y R^3; *Lenguaje aritmético*: usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc. y *Lenguaje algebraico*: usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc. (Sierpinska, 1996). A su vez, cada uno de estos tipos de lenguaje desarrolla en forma correspondiente los siguientes tipos de pensamiento necesarios para que un estudiante pueda entender la materia: *Pensamiento sintético geométrico:* Este tipo de pensamiento se da en una persona, por ejemplo, cuando se piensa en las posibles colocaciones de rectas o planos en R^2 o R^3 que representan las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. *Pensamiento aritmético - analítico:* Siguiendo con el ejemplo anterior, si la persona examina el problema en términos de los posibles resultados después de haber reducido la matriz respectiva, se está en el modo de pensamiento aritmético analítico. *Pensamiento analítico estructural:* Cuando se piensa el problema anterior en términos de las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles o de los determinantes del sistema.

Además Sierpinska afirma que algunas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos de la asignatura tienen que ver con la falta de una práctica instruccional que articule estos lenguajes y que la desarticulación puede deberse a los contenidos que propician la coexistencia de esos lenguajes como modos de pensamiento, que algunas veces son intercambiables pero que no son equivalentes. Entonces un estudiante podría entender un problema o concepto solo desde el punto de vista geométrico sin que eso implique que pueda pasar del lenguaje geométrico al lenguaje algebraico para resolver completamente un problema. Por ejemplo, Ramírez (2008) plantea la siguiente situación:

“También analíticamente al resolver un sistema de dos ecuaciones equivalentes si los estudiantes llegan a una identidad $0 = 0$, la mayoría de ellos le dan un significado de ‘no solución’. Esta estudiante después de aplicar tres métodos de resolución y al obtener en cada método la identidad $0 = 0$ concluye que el sistema no tiene solución”.

> M374(Fragmento): …Son rectas paralelas, nunca se van a cruzar y como nunca se van a cruzar, no hay solución, por eso me da 0= 0.
> E377: Entonces, porque siempre te da 0=0, ¿no tiene solución el sistema?
> M378: Sí (risas).
> E379: Y te van a dar rectas paralelas.
> M380: Sí, porque las rectas paralelas son aquellas que nunca se van a cruzar.

De aquí la autora concluye que la estudiante presenta un aislamiento entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético; además tampoco logra estar en un modo de pensamiento analítico-estructural al no observar las propiedades del sistema.

Dorier y Sierpinska (2001) recopilan diferentes trabajos de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal y determinan dos fuentes que dan origen a las dificultades que tienen los estudiantes con el aprendizaje de los conceptos de esta área; una relacionada con la naturaleza misma del álgebra lineal (dificultades conceptuales) y otra determinada por la clase de pensamiento que se requiere para entender el álgebra lineal (dificultades cognitivas). En este escrito los autores reconocen la dificultad de clasificar las investigaciones en matemática educativa que traten con un aspecto y no con el otro, por lo que hacen dos grandes clasificaciones: la naturaleza de la bestia (Expresión usada por Hillel) y la enseñanza del álgebra lineal (Roa, 2008).

CAPÍTULO 4.
ASPECTOS METODOLÓGICOS

4.1 Metodología

A continuación describiremos las fases en las que hemos organizado nuestro trabajo, y con las que buscamos alcanzar el objetivo propuesto y responder a las preguntas planteadas.

Fase 1: Esta fase consiste en la aplicación de una prueba diagnóstico a los estudiantes de un curso de Ecuaciones Diferenciales. En el curso estaban matriculados 28 estudiantes de ingeniería industrial, mecánica y civil. La prueba diagnóstica consiste en un cuestionario de 6 preguntas todas relacionadas con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x2. Las preguntas de la prueba diagnóstica han sido diseñadas abordando los modos de pensamiento presentados en Sierpinska (2000); para esto realizamos un análisis a priori de las situaciones planteadas que posteriormente nos permita hacer un análisis detallado sobre los diferentes modos de pensamiento que los estudiantes desarrollan al intentar resolver las situaciones.

Fase 2: De acuerdo a la información recolectada en la prueba diagnóstica y dado que esta investigación es de tipo cualitativo, seleccionamos 3 estudiantes para realizar una entrevista didáctica que nos permitiera dar respuesta a nuestra pregunta de investigación. Los alumnos seleccionados fueron aquellos que estaban limitados por un tipo de representación sobre los sistemas o aquellos que en sus soluciones mostraron la habilidad de extraer información de diferentes tipos de representación.

La entrevista fue diseñada con base en los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural propuestos por Sierpinska. La entrevista fue video- grabada y se realizó de manera individual. No se dio paso a una pregunta hasta que no se respondió la anterior;

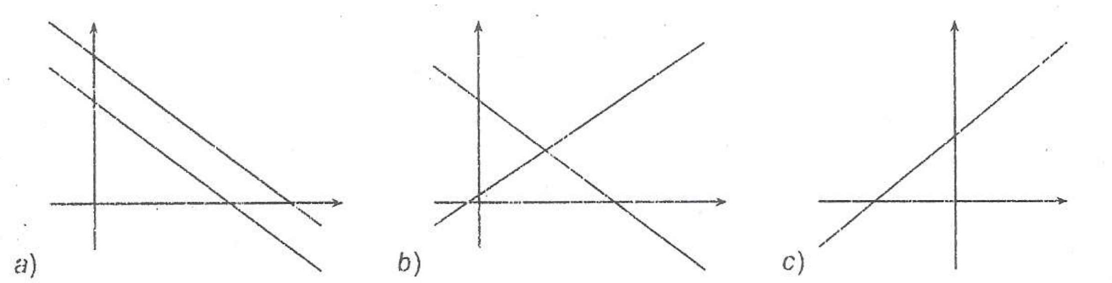
buscamos motivar el razonamiento de los estudiantes, nos interesa motivarlos a pensar sobre los problemas planteados. Estas entrevistas fueron transcritas para realizar un análisis más detallado sobre la manera como los estudiantes pueden o no transitar de un modo de pensamiento a otro.

4.2 Prueba diagnóstica

Con esta prueba pretendemos identificar la manera como los estudiantes abordan situaciones relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x2 para encontrar su solución y cómo la interpretan. A continuación presentaremos el análisis detallado de cada una de las preguntas de la prueba diagnóstica. Plantearemos cada problema y a continuación haremos una descripción de cada uno, mostrando las acciones especificas que los estudiantes pueden realizar y cómo dichas acciones están determinadas por el tipo de pensamiento que los estudiantes utilizan para resolverlos. La prueba diagnóstica completa, tal como se presentó a los estudiantes aparece como anexo 1 de este trabajo. La prueba diagnóstica fue realizada a 28 estudiantes de ingeniería (Civil, Mecánica e Industrial) que cursaban la materia de Ecuaciones Diferenciales.

4.2.1 Análisis a priori

1. *En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2 × 2). Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.*



En este problema se presentan tres sistemas de rectas (dos o una) que representan cada uno un sistema de ecuaciones lineales 2x2. En los numerales a. y b. aparecen dos rectas en cada plano y en el c. sólo una. En general, esperamos que los estudiantes encuentren representaciones analíticas de las rectas que se ajusten a sus características, mediante una aproximación de puntos de corte o de la pendiente. En el caso c, buscamos hacer referencia a sistemas de ecuaciones equivalentes, donde una recta puede tener muchas ecuaciones que la representen.

A continuación haremos una descripción de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al abordar el análisis de cada numeral.

a. Las rectas en este caso son paralelas y por tanto tienen la misma pendiente. Esperamos que esta idea se refleje en los sistemas planteados por los estudiantes. Un estudiante puede plantear un sistema general por ejemplo $\begin{cases} y = mx + b \\ y = mx + b_1 \end{cases}$, o un sistema particular como $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$, por aproximaciones con los puntos de corte. Consideraremos que un estudiante que pueda transitar del modo de pensamiento sintético geométrico al analítico estructural debe generar el sistema de ecuaciones de manera general sin la necesidad de establecer escalas sobre los ejes.

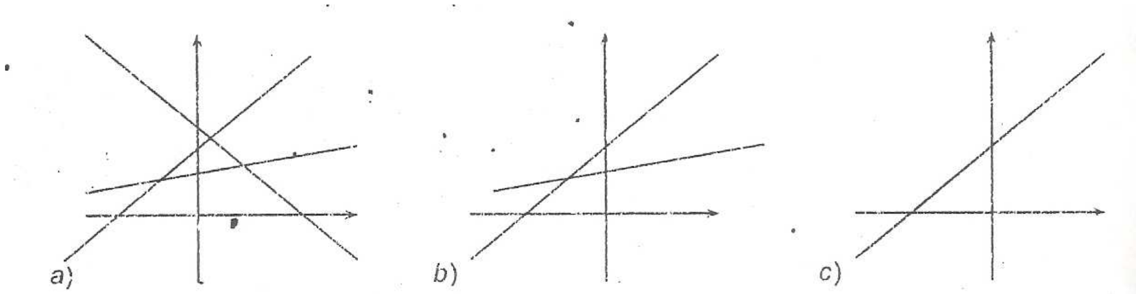
b. En este caso las rectas se cortan en un único punto. Igualmente esperamos que el tránsito del pensamiento sintético geométrico al analítico estructural se dé cuando el estudiante determine un sistema general 2x2 que represente una recta con pendiente negativa y otra con pendiente positiva, además del punto común. Por ejemplo: la formulación del sistema está determinada por el punto de intersección de las rectas. Si un estudiante toma el punto (a, b) como solución del sistema, entonces obtendría el sistema $\begin{cases} b = ma + B \\ b = m_1 a + B_1 \end{cases}$. En este caso las pendientes quedan definidas de manera general. Por otra parte si el estudiante hace una aproximación mediante una escala sobre el plano, por ejemplo

$\begin{cases} y = \left(\frac{-3}{4}\right)x + 4 \\ y = \left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4} \end{cases}$, diremos que está transitando del pensamiento sintético geométrico al analítico aritmético. Donde las pendientes tomarán valores particulares, una positiva y otra negativa.

c. En este plano aparece una única recta. Un estudiante puede determinar que no es posible que este caso represente un sistema de ecuaciones lineales 2x2, ya que aparece una única recta. Esto nos indica que este problema puede ser analizado por él sólo mediante un pensamiento sintético-geométrico. No tiene otro tipo de estructuras que le permitan hacer un tránsito con otro tipo de pensamiento para determinar que un sistema puede estar determinado por ecuaciones equivalentes y que dichas ecuaciones representan una única recta en el plano. Por otra parte si un estudiante determina un sistema de ecuaciones equivalente particular diremos que puede transitar al pensamiento analítico-aritmético y en el caso general al analítico-estructural.

En cuanto a la solución de cada sistema, consideraremos que un estudiante que logre transitar del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural podrá decir que el sistema del numeral a. no tiene solución, sin necesidad de resolverlo de manera específica ya que las rectas no se cortan en ningún punto. Por otra parte como lo reportan Ramírez (2008) y Oaxaca, De la Cruz y Sánchez (2003), es posible que los estudiantes identifiquen los puntos de corte de las rectas con los ejes como soluciones del sistema. En este caso diremos que el estudiante no tiene una concepción clara acerca de la representación gráfica de la solución del sistema; ya que sus análisis se basan en una regla ("la solución son los cortes") sin determinar las condiciones de dicha regla. En el numeral b. las rectas de cortan en un único punto. Si un estudiante determina la solución general como un punto (a, b) diremos que puede transitar del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural. Por otra parte si hace una aproximación por medio de una escala sobre los ejes del punto de intersección por ejemplo: $(3,2)$ diremos que transita al pensamiento analítico-aritmético. Finalmente en el numeral c. la solución del sistema como infinitas soluciones sin que el estudiante plantee casos específicos ni resuelva el sistema será el reflejo de un tipo de pensamiento analítico-estructural.

2. *En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de ecuaciones lineales 3×2. Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.*



En este problema se presentan tres planos con rectas (tres, dos y una) que representan un sistema de ecuaciones lineales 3x2. En el numeral a. aparecen tres rectas en el plano, en b. hay dos rectas en el plano, y en el plano c. aparece una sola recta. Esperamos, en general, que los estudiantes encuentren representaciones analíticas de las rectas que se ajusten a sus características, mediante una aproximación de puntos de corte o de las pendientes. En los casos b. y c., buscamos hacer referencia a sistemas de ecuaciones equivalentes, donde una recta representa ecuaciones equivalentes.

A continuación haremos una descripción de los procedimientos que pensamos que los estudiantes pueden realizar al abordar el análisis de cada numeral.

a. Las tres rectas en este caso se cortan entre sí en tres puntos diferentes, dos de ellas tienen pendiente positiva y la otra pendiente negativa. Esperamos que esta idea se refleje en los sistemas planteados por los estudiantes. Un estudiante puede plantear un sistema general $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \\ y = m_3x + b_3 \end{cases}$, o un sistema particular $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \left(\frac{-5}{6}\right)x + \frac{5}{2} \\ y = \left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{6} \end{cases}$, conseguido por medio de aproximaciones con los puntos de corte con los ejes, o con los puntos de corte entre parejas de rectas; además de determinar el valor de las pendientes. Consideramos que un estudiante que pueda transitar del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural debe generar el sistema de ecuaciones sin recurrir a escalas sobre los ejes. Esperamos que algunos estudiantes consideren los cortes con los ejes como la solución del sistema, o que consideren que el sistema tiene infinitas soluciones, en esos casos estos estudiantes no tienen claro el concepto de solución. O nos podemos encontrar también con estudiantes que no puedan establecer el sistema de manera correcta, por ejemplo, que aunque observe que las rectas son paralelas no tengan en cuenta que las pendientes son iguales. En estos casos podemos establecer que no hay tránsito del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico.

b. En este caso hay dos rectas que se cortan en un único punto, igualmente esperamos que el tránsito del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural se dé cuando el estudiante determine el sistema general 3x2 que representa dos rectas con pendientes positivas, un mismo punto en común y donde una de ella se puede expresar analíticamente por medio de dos ecuaciones equivalentes. Si un estudiante toma el punto (a, b) como solución del sistema, entonces obtendría el sistema $\begin{cases} b = m_1 a + b_1 \\ b = kma + kB \\ b = ma + B \end{cases}$, en este caso las pendientes quedan definidas de manera general. Por otra parte, si el estudiante hace una aproximación mediante una escala sobre los ejes puede llegar a un sistema como por ejemplo $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 4 \\ y = \left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{6} \end{cases}$, diremos que está transitando del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético. También nos podemos encontrar con estudiantes que no puedan plantear el sistema porque les hace falta una recta, esto nos indica que este problema puede ser analizado por el estudiante sólo mediante un pensamiento sintético geométrico. No tiene un tipo de estructura que le permitan hacer un tránsito a otro pensamiento.

c. En este plano aparece una única recta. Un estudiante puede determinar que no es posible que este caso represente un sistema de ecuaciones lineales 3x2, porque hay una sola recta. Nuevamente, esto nos indica que el problema sólo puede ser analizado por él mediante un pensamiento sintético geométrico. Mientras que un estudiante que pueda representar a partir de esta recta un sistema de ecuaciones lineales 3x2 esta transitando entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-estructural. Si algún estudiante necesita una escala numérica para representar el sistema en forma particular, diremos que transita del pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético.

En cuanto a la solución de cada sistema, diremos que un estudiante que transita del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural podrá determinar que el sistema del numeral a. no tiene solución puesto que las tres rectas no cortan en un mismo punto, sin necesidad de llegar a esta conclusión haciendo ningún tipo de operación algebraica. Es posible como lo reporta Ramírez (2008), que algún estudiante reporte la solución del sistema como los puntos de cortes entre dos rectas. En este caso diremos que el estudiante no puede pensar de manera correcta sobre los elementos geométricos que representan la solución de un sistema.

En el numeral b. las rectas se cortan en un mismo punto. Si un estudiante determina la solución general como un punto (a, b) diremos que transita del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural. Por otra parte si el estudiante necesita escalas en los ejes para encontrar la solución del sistema como un punto particular, por ejemplo $(1, -1)$ diremos que el estudiante transita entre el pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético.

En el numeral c. el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, si el estudiante llega a esta conclusión sin hacer ninguna operación o aproximación diremos que el estudiante transita del pensamiento sintético-geométrico al analítico-estructural, ya que puede reflexionar sobre las propiedades generales de un sistema de ecuaciones equivalente sin necesidad de aplicar un método de solución específico.

3. Determine la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y represente el conjunto solución. Justifique su respuesta.

a) $\begin{cases} x-3y=-10 \\ x-2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+5y=100 \\ 8x+10y=200 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 2x-\frac{4}{5}y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=7 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=7 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x-\frac{9}{2}y=\frac{21}{2} \\ -10x+15y=35 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

En este numeral se le pide a los estudiante encontrar la solución a los sistemas de ecuaciones lineales dados (2x2 o 3x2) y además se les pide representar el conjunto solución. Este tipo de ejercicios son los que nos encontramos con frecuencia en los textos, son ejercicios que favorecen de algún modo el pensamiento analítico aritmético. Como lo comentan De la Cruz, Sánchez (2003): "entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético hay una separación que es necesario resolver para que los alumnos los usen sin ninguna dificultad".

En los numerales a., d. y g. esperamos que los estudiantes determinen que el sistema de ecuaciones lineales 2x2 y 3x2 respectivamente tiene única solución. Para ello esperamos que algún estudiante resuelva los sistemas por medio de herramientas algebraicas, como sustitución, igualación, reducción, método de eliminación de Gauss o de Gauss-Jordan, o en el caso del punto a. mediante la regla de Cramer. En cuanto a la solución, esperamos que el estudiante logre expresar la solución como un punto (x,y) y no solo encontrar el valor de x y de y sin saber cómo agruparlos. Es decir, que determinen que ellos determinan una pareja ordenada que representa un punto en el plano cartesiano. (Ramírez, 2008; Oaxaca, De la Cruz y Sánchez 2003)

En los numerales b. y e. esperamos que los estudiantes logren determinar que los sistemas tienen infinitas soluciones; si algún estudiante llega a esta conclusión resolviendo los sistemas por medio de las herramientas anteriormente nombradas, consideraremos que el estudiante maneja los conceptos en un modo de pensamiento analítico-aritmético. Nos podemos encontrar con algún estudiante que al resolver el sistema presente dificultad al interpretar el resultado $0 = 0$ y no logre determinar la solución del sistema.

Si un estudiante llega a esta conclusión observando las características de las ecuaciones, consideraremos que el estudiante maneja los conceptos por un modo de pensamiento analítico-estructural.

En c. y en f. esperamos que los estudiantes puedan determinar que los sistemas son inconsistentes, es decir, no tienen solución. Resultado al cual pueden llegar por medio de procedimientos algebraicos, es decir, resolviendo el sistema, en este caso el estudiante maneja sus conceptos en un modo de pensamiento analítico-aritmético; esperamos que algún estudiante al resolver el sistema de ecuaciones tenga dificultades al interpretar el resultado $0 = k$ y no logre interpretar la solución.

Es posible que algún estudiante obtenga la solución del sistema observando las características de las ecuaciones; en este caso diremos que el estudiante aborda el problema por un modo de pensamiento analítico-estructural.

Es posible encontrar un estudiante que aborde este numeral representando los sistemas de ecuaciones por medio de rectas y así llegar a la solución de cada sistema, en este caso diremos que el estudiante transita de un modo de pensamiento analítico-aritmético a un pensamiento sintético-geométrico.

4. *Encuentre el valor de μ para que el sistema:*

$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga solución.

En este numeral se presenta un sistema de ecuaciones lineales 2x2 donde hay un valor desconocido μ, y se pide a los estudiantes encontrar el valor de μ de tal manera que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución. En este numeral si el estudiante encuentra el valor de μ resolviendo el sistema de ecuaciones lineales utilizando herramientas algebraicas, diremos que el estudiante maneja los conceptos con un modo de pensamiento analítico-algebraico. Si el estudiante encuentra la solución sin hacer cálculos, simplemente analizando las características de las ecuaciones, diremos que su modo de pensamiento es analítico-estructural. Si hace una representación gráfica para encontrar el valor de μ, diremos aborda el problema por un modo de pensamiento sintético-geométrico. Los resultados empíricos obtenidos nos permitirán analizar con mayor detalle la manera como los estudiantes logran pensar sobre el problema en los diferentes modos de pensamiento que hemos planteado.

5. *Resuelva los siguientes problemas:*

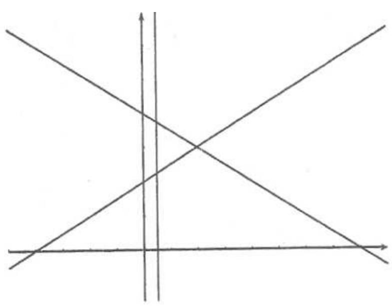
a) Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano?

b) Un departamento de caza y pesca del estado proporciona 2 tipos de comida a un lago que alberga 2 especies de peces. Cada pez de la especie A consume cada semana un promedio de 4 unidades de alimento 1 y 8 unidades de alimento 2. Cada pez de la especie B consume 5 unidades de alimento 1 y 10 unidades de alimento 2. Cada semana se proporciona al lago 100 unidades de *alimento 1 y 200 unidades de alimento 2. ¿Cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?*

c) Es posible que las rectas $L_1 = x + y = 4$, $L_2 = 2x - 3y = 7$ *y* $L_3 = 3x - 2y = 11$ *se intersequen en un mismo punto? ¿Por qué?*

En este punto se plantean tres problemas y se pide resolverlos, sin expresar a los estudiantes qué camino deben seguir para la resolución de ellos. Esperamos encontrar estudiantes que logren abordar los problemas utilizando sistemas de ecuaciones lineales. Además encontrar estudiantes que solucionen los problemas empleando los diferentes modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético o analítico-estructural y que puedan interpretar las soluciones. También nos podemos encontrar con estudiantes que resuelvan los problemas sin emplear sistemas de ecuaciones lineales, o estudiantes que tengan dificultad para plantear los sistemas, o algunos estudiantes que tengan dificultad para interpretar las soluciones del sistema dentro un contexto. En general, en los trabajos previos sobre sistemas de ecuaciones lineales no se plantean situaciones de este tipo. Consideramos que esta clase de situaciones le permite a los estudiantes encontrar la solución empleando el tipo de pensamiento más desarrollado en ellos.

6. *En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales. Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique ampliamente su respuesta. Encuentre la solución al sistema.*



a) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 4y=2 \\ x+2y=8 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

b) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 4x=2 \\ -3x+6y=12 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

c) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 4x=2 \\ x+2y=8 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

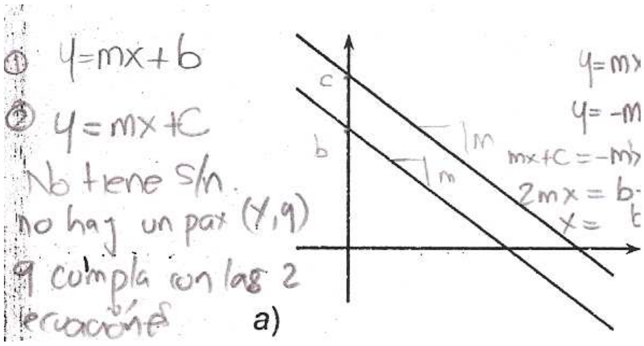
d) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 4x=2 \\ x+2y=8 \\ -3x+6y=12 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

En este punto se presenta la gráfica de tres rectas, una con pendiente positiva, otra con pendiente negativa y la otra vertical. Los ejes coordenados tienen una escala que permite encontrar la ecuación de cada recta. Se presentan además cuatro sistemas de ecuaciones lineales, los tres primeros son 3x2 y el último 4x2. Se pide a los estudiantes que digan si cada sistema representa o no la gráfica dada y que justifique por qué si o no es: En este numeral deseamos ver el tránsito del pensamiento sintético-geométrico a alguno de los otros dos modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural. Para ello le prestamos mucha atención a la justificación que le dan los estudiantes a cada uno de los sistemas.

4.2.2 Análisis a posteriori

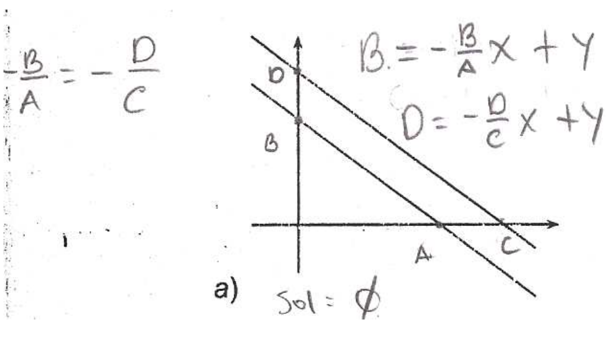
Análisis del primer punto.

En el punto a., 17 estudiantes ubicaron los puntos de corte con los ejes coordenados, mientras que un solo estudiante necesitó manejar una escala en los ejes para plantear el sistema. Es decir, transitan de un modo de pensamiento sintético-geométrico a un modo de pensamiento analítico-aritmético. Ocho intentaron plantear el sistema de manera general, teniendo en cuenta que la pendiente de las rectas es la misma y negativa. Podemos decir que el modo de pensamiento de estos estudiantes transita de lo sintético-geométrico al analítico-estructural ya que no necesitan valores numéricos específicos para determinar ecuaciones que cumplan con las condiciones dadas en la gráfica. Algunos de los 17 estudiantes que ubicaron los puntos de corte, tuvieron en cuenta que las pendientes eran negativas pero no tuvieron en cuenta que eran iguales. Cinco estudiantes no plantearon el sistema. En cuanto a la solución se observa que la mayoría de los estudiantes que plantearon el sistema, y algunos que no lo plantearon (modo de pensamiento es sintético-geométrico), obtuvieron correctamente la solución.



Estudiante E9.

El estudiante 9, señala los puntos de corte de las rectas con el eje y, los puntos $(0,b)$, $(0,c)$, encuentra las ecuaciones de las dos rectas, resalta que las pendientes son iguales, plantea el sistema $\begin{cases} y = mx + b \\ y = mx + c \end{cases}$ y determina que el sistema no tiene solución pues no hay un punto común a las dos rectas.

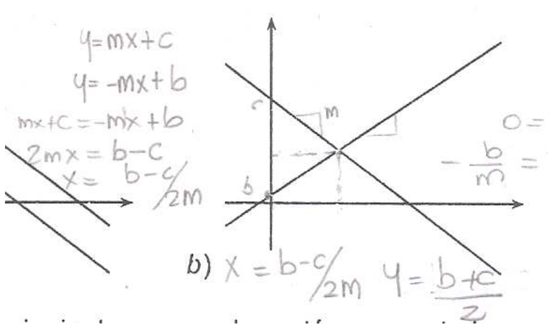


Estudiante E10.

Al igual que la estudiante 9 el estudiante 10 coincide en que las pendientes son iguales, con el signo menos indica que las pendientes son negativas, pero además, encuentra la forma de las pendientes. Coincide en que la solución es vacía, pero no justifica por qué. Pero no plantea correctamente el sistema de ecuaciones lineales.

Los análisis realizados por estos estudiantes muestran la diferencia entre un tránsito y otro ya que el segundo no necesita establecer valores sobre los ejes y puede encontrar de manera general las condiciones sobre las pendientes. Caso contrario al estudiante 9 quien debe determinar una escala numérica para solucionar el problema.

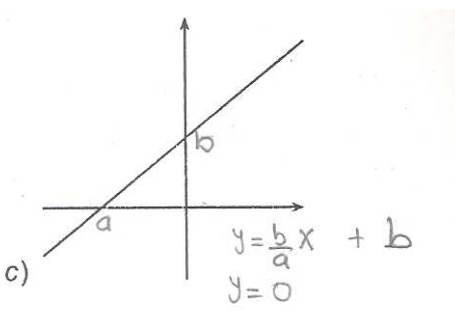
En el problema b., seis estudiantes plantearon el sistema de manera general sin tener en cuenta las pendientes del ejemplo $\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$; se notó gran dificultad en plantear el sistema de ecuaciones lineales, incluso en aquellos que emplearon escala en los ejes coordenados. En cuanto a la solución, los estudiantes llegaron a que el sistema tiene solución única pero algunos tuvieron dificultad al escribirla, decidieron señalar el punto de intersección entre las dos rectas; algunos de los que utilizaron escala, encontraron una aproximación para x e y pero no la escribieron como una pareja ordenada (x, y).



Estudiante E9.

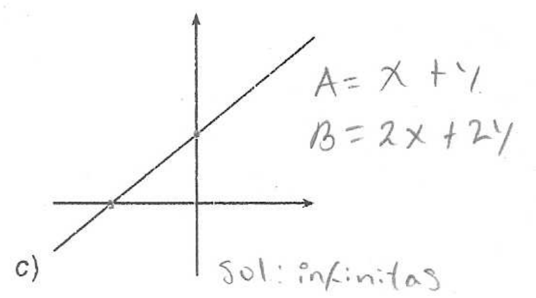
En este caso la estudiante escribe las ecuaciones de las rectas, identifica que las pendientes son diferentes en valor absoluto, es decir, que una es positiva y la otra negativa. Encuentra el valor de x para el cual las dos ecuaciones tienen la misma solución y a partir de ese resultado encuentra el valor y . Es claro, para nosotros, que el estudiante maneja los conceptos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales; por otro lado, diremos que este estudiante transita superficialmente entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico pues aunque reconoce gráficamente la solución como una pareja ordenada, algebraicamente no la expresa así.

En el numeral c., la constante fue que los estudiantes no reconocieron la recta como la representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, algunos manifestaron que faltaba una recta para poder plantear el sistema. Un estudiante planteó el sistema $\begin{cases} y = 0 \\ y = x \end{cases}$, es decir, tomó el eje x y una aproximación de la ecuación de la recta. Dos o tres estudiantes no tuvieron dificultad al plantear el sistema de ecuaciones lineales 2x2, identificando una ecuación como múltiplo escalar de la otra, y ellos lograron obtener la solución del sistema. Podemos afirmar que el modo de pensamiento de estos estudiantes transita entre sintético-geométrico y el analítico-estructural ya que ellos comprenden que una recta puede estar representada por dos o más ecuaciones lineales que son múltiplos escalares entre sí, y que por tanto el sistema tendrá infinitas soluciones, cada punto que pertenece a la recta es solución del sistema,



Estudiante E7.

En este caso el estudiante 7 encuentra una ecuación para la recta pero tiene dificultad al plantear el sistema con esa sola recta, así que lo plantea con la recta y=0. Podemos pensar que el estudiante entienda la solución del sistema con encontrar el punto de corte con el eje x en este caso el estudiante no tiene claro el concepto de solución. O que en el estudiante predomina el modo de pensamiento analítico-aritmético y no transita a los modos analítico-estructural y sintético-geométrico.

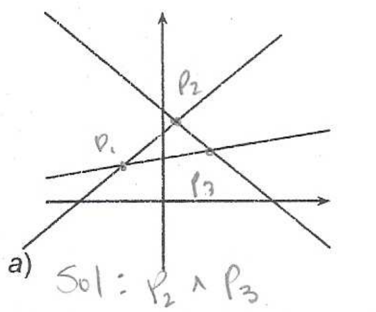


Estudiante E10.

En este caso el estudiante 10 reconoce que la recta puede tener dos representaciones diferentes y trata de expresar que una ecuación es múltiplo escalar de la otra (en este caso por un factor de 2), reconoce que el sistema tiene infinitas soluciones, pero sigue teniendo dificultad al plantear el sistema. Consideramos que conoce algo sobre los sistemas equivalentes pero no puede pensar de manera general sobre el sistema. Aunque reconoce que tiene algo que ver con ser múltiplo, no tiene clara esta idea y persiste un tipo de pensamiento analítico aritmético.

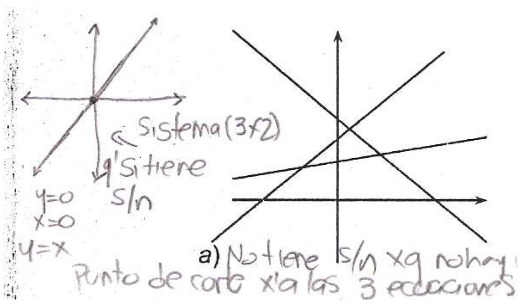
Análisis del punto dos.

En el numeral a., esperábamos que algunos estudiantes señalaran que el sistema representado tiene dos o tres puntos solución, que son los puntos de corte entre las rectas (por pares), estos estudiantes no tienen claro a que se refiere la solución de un sistema 3x2 como lo comenta Ramírez (2008). Algunos estudiantes plantearon el sistema utilizando escala en los ejes coordenados, el modo de pensamiento de estos estudiantes transita entre sintético-geométrico y el analítico-aritmético. Muy pocos plantearon el sistema de ecuaciones de manera general, intentando diferenciar con el signo las pendientes de las rectas.



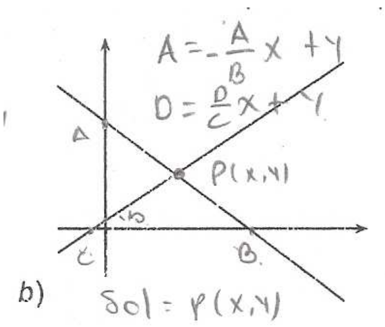
Estudiante E10.

En este caso el estudiante 10 señala en la gráfica tres puntos P1, P2 y P3, los puntos de corte entre dos rectas. Pero no plantea el sistema y da como solución al sistema los puntos P2 y P3. En este caso el estudiante piensa sólo de manera geométrica, pero hace una interpretación errada sobre que los puntos de intersección. No es claro por qué no considera el punto P1 como solución del sistema.



Estudiante E9.

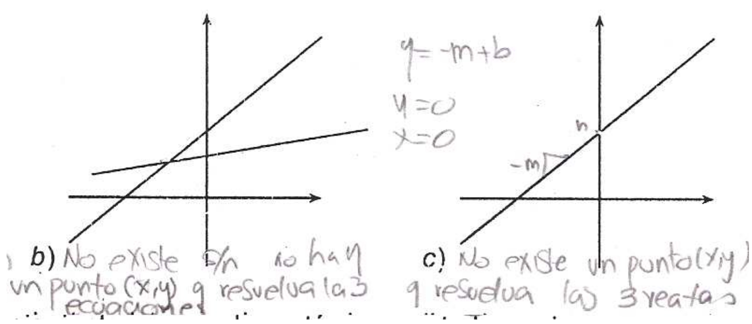
La estudiante 9 señala que el sistema no tiene solución, no plantea el sistema, pero da un ejemplo gráfico (lado izquierdo de la gráfica) de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que si tiene solución única, plantea el sistema y muestra la solución. Esta estudiante aunque no generaliza sobre el sistema dado plantea un caso particular donde el sistema sí tiene solución.



Estudiante E10.

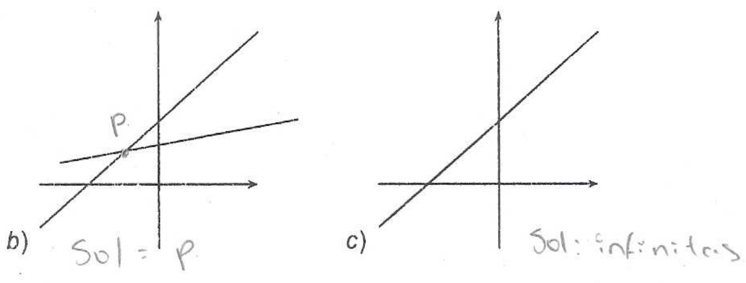
Podemos observar que este estudiante señala correctamente la solución del sistema y la representa como una pareja ordenada, además plantea el sistema de ecuaciones lineales de manera un poco más general pues indica el valor de las pendientes correctamente. Pensamos que este estudiante transita del modo sintético-geométrico al modo analítico-estructural.

En b. y c. En b hay dos rectas y en c. hay una recta, al igual que el punto anterior la mayoría de los estudiantes aseguraron que el sistema no se puede plantear porque faltan rectas; los estudiantes que en 1c. plantearon el sistema de ecuaciones lineales 2x2 no tuvieron dificultad en plantear los sistemas de ecuaciones lineales 3x2 en 2b. y 2c. y encontrar sus soluciones. Podemos considerar que el modo de pensamiento de estos estudiantes transita entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-estructural. Observamos que nuevamente hay un estudiante que en c. plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales 3x2 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = x \end{cases}$, este estudiante encuentra la solución a partir de la intersección entre la recta y los ejes coordenados.



Estudiante E9.

En este caso la estudiante no plantea los sistemas de ecuaciones lineales y además no reconoce que los sistemas tienen solución, única e infinita, respectivamente. No es claro si el estudiante necesita al igual que sus compañeros visualiza las tres rectas para encontrar la solución al sistema o si no tiene claro qué significa encontrar la solución a un sistema de ecuaciones lineales 3x2.



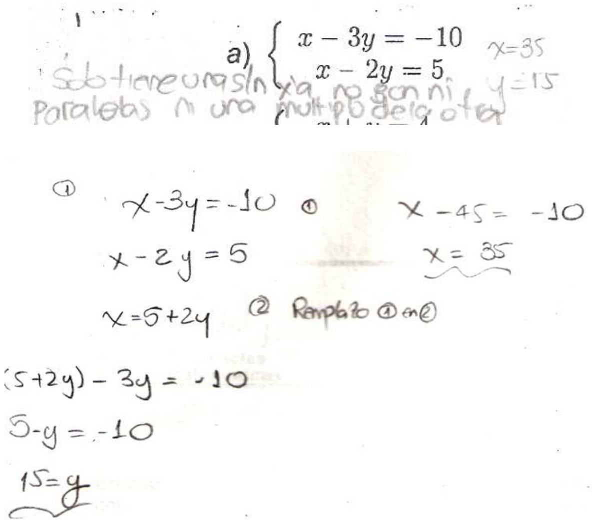
Estudiante E10.

En este caso el estudiante reconoce las soluciones a los sistemas de manera geométrica, pero no plantea los sistemas. Podemos pensar que el estudiante o no leyó el enunciado completo, pues en ninguna de las tres situaciones presentadas en la actividad 2 planteó los sistemas, o que presenta alguna dificultad para hacerlo. Por lo mostrado en esta actividad por el estudiante podemos decir que en él predomina el modo de pensamiento sintético-geométrico.

Análisis del tercer punto.

Este punto todos los estudiantes lo trabajaron, se aprecia que la mayoría de ellos emplean un modo de pensamiento analítico-aritmético para pensar sobre los problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales.

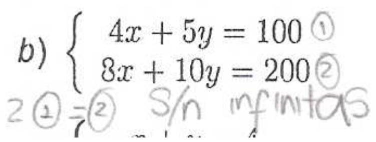
En a. se presenta un sistema de ecuaciones lineales 2x2, que sin dificultad los estudiantes lo resolvieron utilizando varias herramientas algebraicas entre esas el uso de determinantes. Encontraron el valor de x e y, pero presentan dificultad para ver la solución como un par ordenado (x, y).

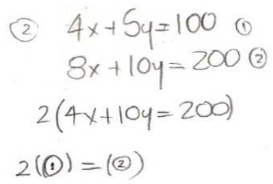


Estudiante E9.

Este estudiante halla la solución del sistema utilizando métodos algebraicos, en este caso sustitución, podemos pensar que ella transita en el modo de pensamiento analítico-aritmético pero observen que además, nos dice que el sistema tiene solución única porque las rectas, creemos, no son paralelas y las ecuaciones no son múltiplos. Podemos pensar entonces que la estudiante puede transitar entre los tres modos de pensamiento, con ella trabajaremos en la entrevista para estar seguros. Sin embargo, ella no reconoce la solución como una pareja ordenada.

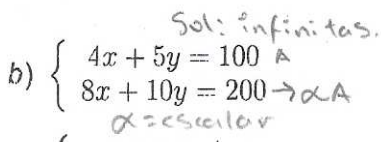
En b. La mayoría de estudiantes resolvieron el sistema utilizando métodos algebraicos y llegaron a la expresión $0 = 0$, algunos determinaron que el sistema tiene infinitas soluciones, pero otros no encontraron la solución. Unos pocos estudiantes analizaron las características de las ecuaciones y llegaron a la solución. Podemos considerar que el modo de pensamiento de estos estudiantes transita entre el pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural.





Estudiante E9.

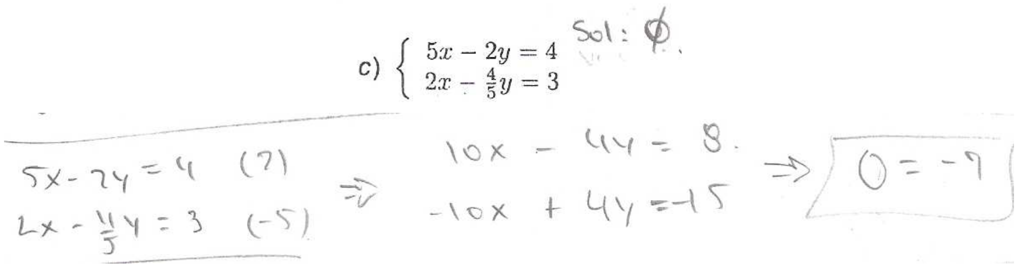
Aquí observamos nuevamente que la estudiante al parecer resuelve el sistema de ecuaciones lineales y llega a la conclusión de que las dos ecuaciones son múltiplos entre sí, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. Al igual que este estudiante 10:



Estudiante E10.

Aunque en este segundo caso el estudiante no hizo ningún tipo de cálculo, podemos pensar que él transita al modo de pensamiento analítico-estructural, ya que el analiza las características de las ecuaciones, son múltiplos escalares entre sí, para encontrar correctamente la solución.

En c. la situación fue similar que en 3b., el problema al cual debieron enfrentarse los estudiantes que llegaron a la solución por medio de herramientas algebraicas fue interpretar $0 = k$. Algunos tuvieron dificultad para interpretar este resultado, pero otros llegaron a la conclusión que el sistema es inconsistente en este caso podemos afirmar que estos estudiantes transitan al modo de pensamiento analítico-estructural.



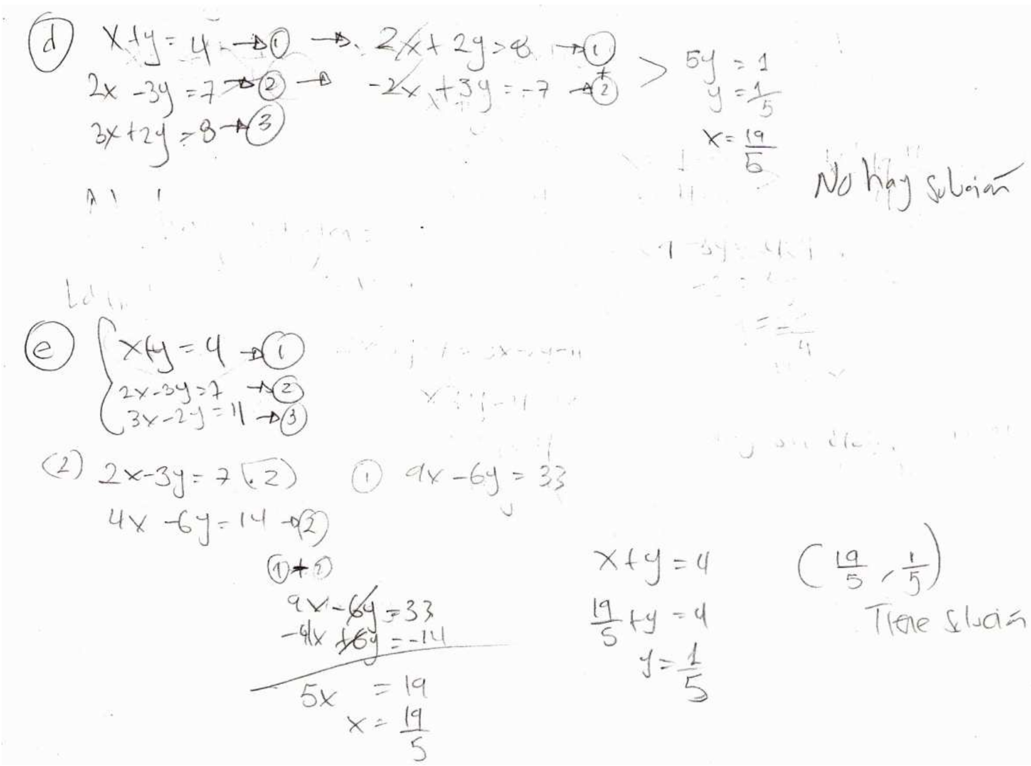
Estudiante E10.

En los planteamientos del estudiante 10 podemos observar que el estudiante reconoce que al encontrar la expresión el sistema no tiene solución, o mejor que la solución al sistema es vacía. Pensamos que en el estudiante predomina el modo de pensamiento analítico-aritmético ya que aborda la situación utilizando cálculos algebraicos y no tiene en cuenta ni la representación grafica del sistema, ni las características estructurales de las ecuaciones.

En d., e. y f., se presentan tres sistemas de ecuaciones lineales 3x2, nos causa curiosidad que varios estudiantes tuvieran dificultad al resolver estos sistemas utilizando herramientas algebraicas, eso nos hace pensar que no tienen claros los conceptos para resolver un sistema de ecuaciones lineales 3x2. Algunos estudiantes resolvieron el sistema 3d. y obtuvieron el valor de x e y, dijeron que el sistema tenía solución única pero no expresaron la solución como un par ordenado (x,y). Esto es muy común en los cursos universitarios, al parecer los estudiantes consideran que frente a un sistema de ecuaciones se debe aplicar un método de solución y ya. No hay una reflexión sobre los valores encontrados y el problema.

En e. se encontraron otra vez con la expresión $0 = 0$, y se presentó la misma dificultad que en 3b.

En f. se encontraron la expresión $0 = k$, y se presentó la misma dificultad que en 3c.



Estudiante E5.

En este caso el estudiante 5 en d. encuentra un valor para x y un valor para y , concluye que el sistema no tiene solución pero no justifica por qué. Mientras que en e. utiliza métodos algebraicos para resolver el sistema, encuentra un valor para x y uno para y, indica que el sistema tiene solución y la representa como una pareja ordenada. Sin embargo, este estudiante en el mismo numeral considera que las ecuaciones representan planos y no rectas. Al observar este hecho y los resultados obtenidos pensamos que el estudiante presenta algunas dificultades conceptuales.

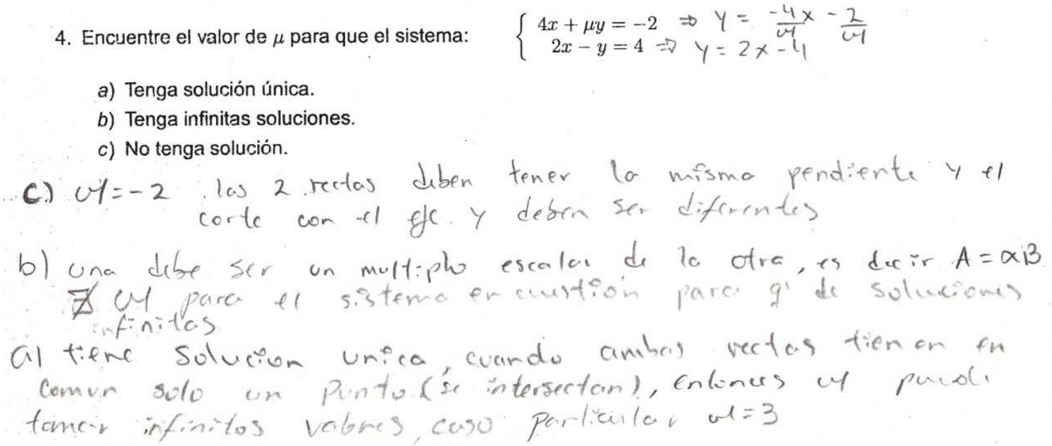
Nuevamente, dos o tres estudiantes a partir de las características de las ecuaciones llegan a la conclusión que el sistema 3e. tiene infinitas soluciones y que el sistema 3f. es inconsistente. Podemos considerar que transitan entre el pensamiento sintético-aritmético y el analítico-estructural ya que tienen en cuenta que las ecuaciones son múltiplos escalares entre sí.

En g. se pedía encontrar la solución al sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, los estudiantes no presentaron dificultad para representar la solución como el punto (0,0). En este caso los estudiantes obtuvieron la solución a partir de ecuación, podemos considerar que el modo de pensamiento es el analítico-estructural, ya que sin ningún tipo de cálculo aritmético o análisis geométrico, solo analizando las características de las ecuaciones, llegan a la solución del sistema.

Análisis del cuarto punto.

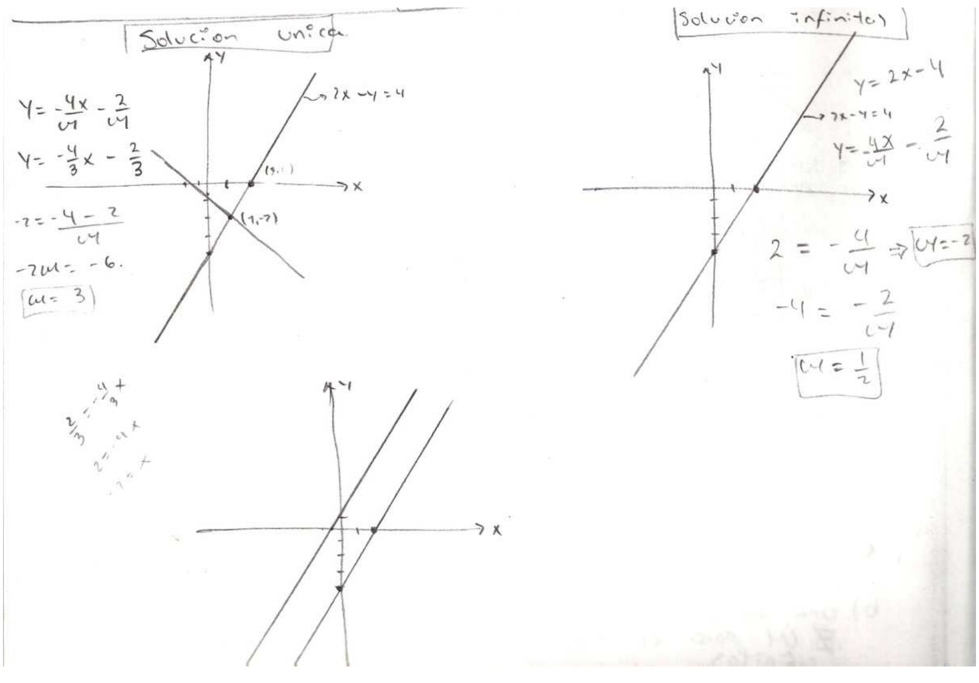
En este punto los estudiantes debían encontrar el valor desconocido de µ, en un sistema de ecuaciones lineales 2x2, de tal manera que el sistema tuviera solución única, infinitas soluciones o inconsistente. El análisis por parte de los estudiantes estuvo dividido, unos lo trabajaron empleando herramientas algebraicas (modo de pensamiento analítico-aritmético), otros analizaron las características de las ecuaciones para encontrar el valor de µ, en ellos se puede considerar un que hay un tránsito entre el modo de pensamiento analítico-aritmético al analítico-estructural.

Dos estudiantes se apoyaron en las graficas de las rectas para encontrar el valor de µ, en ellos se puede considerar que hay un tránsito entre el modo de pensamiento analítico-aritmético al sintético-geométrico.



Estudiante E10.

En este caso el estudiante encuentra el valor de µ estudiando las características estructurales de las ecuaciones, podemos decir que el estudiante transita al modo de pensamiento analítico-estructural. Pero además este estudiante realiza las siguientes gráficas:



Estudiante E10.

Este hecho nos hace pensar que el estudiante transita entre los tres modos de pensamiento, o mejor que transita del modo analítico-estructural a los modos analítico-aritmético y al sintético-geométrico. Lo que según nuestro marco teórico, nos permite asegurar que ha construido el concepto de sistema de ecuaciones y su conjunto solución.

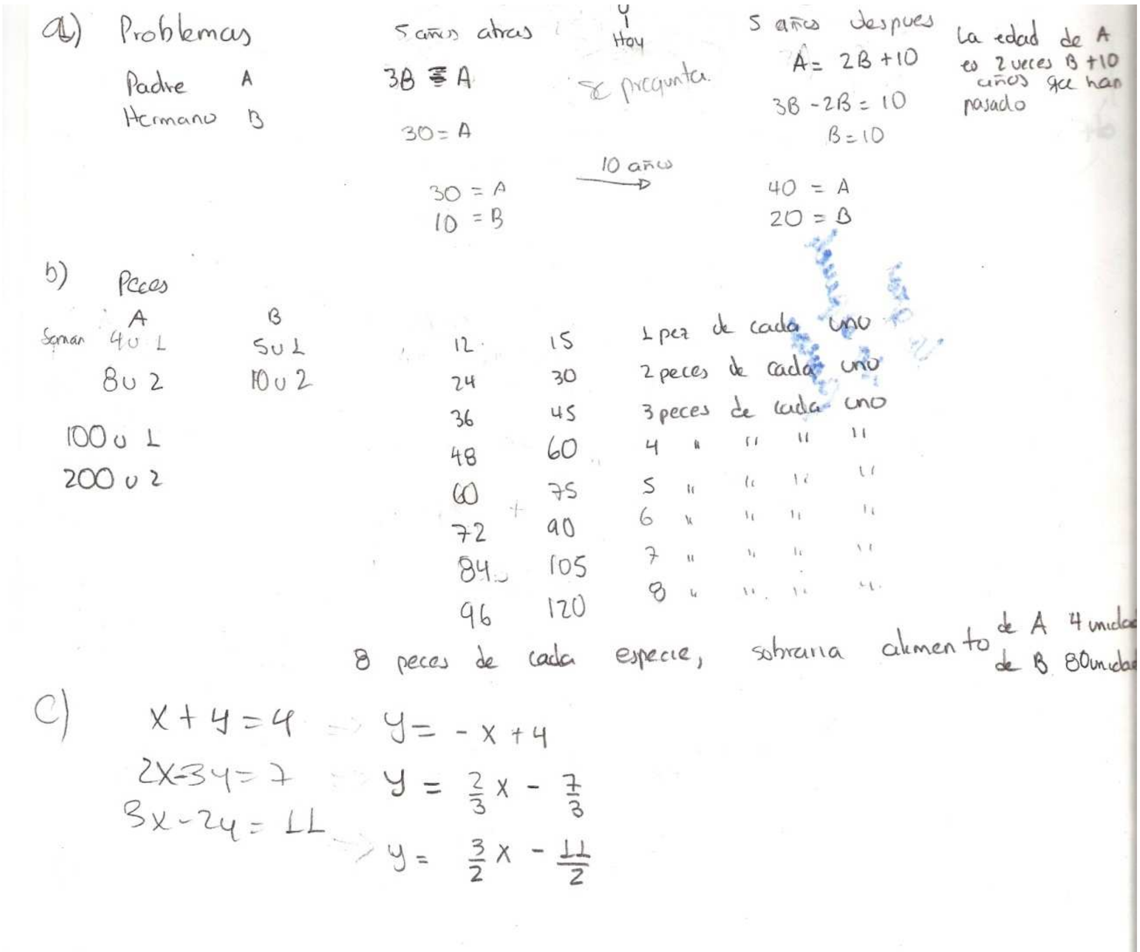
Análisis del quinto punto.

Algunos estudiantes presentaron dificultad para plantear los problemas propuestos.

El problema donde más estudiantes trabajaron fue el a. Plantearon el sistema, lo resolvieron utilizando herramientas algebraicas, encontraron la edad del padre y la del hijo, pero no logran expresar la solución como un par ordenado. Este problema es abordado por los estudiantes por medio de un modo de pensamiento analítico-aritmético.

El segundo problema fue el que menos trabajaron, algunos estudiantes plantearon el sistema y lo abordaron empleando un modo de pensamiento analítico-aritmético. Un estudiante plantea las ecuaciones y analiza sus características, podemos considerar que este estudiante maneja un modo de pensamiento analítico-estructural. Ningún estudiante llega a encontrar y escribir correctamente la solución.

El tercer problema algunos lo resolvieron utilizando herramientas algebraicas (modo de pensamiento analítico-aritmético) y otros lo resolvieron representando gráficamente las ecuaciones de las rectas (modo de pensamiento sintético-geométrico).


a) Problemas

Padre A

Hermano B

5 años atras — Hoy — 5 años despues

$3B = A$ — se pregunta — $A = 2B + 10$

$30 = A$

$3B - 2B = 10$

$B = 10$

La edad de A es 2 veces B +10 años que han pasado

$30 = A$, $10 = B$ $\xrightarrow{\text{10 años}}$ $40 = A$, $20 = B$

b) Peces

	A	B
Seman	4 u 1	5 u 1
	8 u 2	10 u 2

100 u 1

200 u 2

12	15	1 pez de cada uno
24	30	2 peces de cada uno
36	45	3 peces de cada uno
48	60	4 " " " "
60	75	5 " " " "
72	90	6 " " " "
84	105	7 " " " "
96	120	8 " " " "

8 peces de cada especie, sobraria alimento de A 4 unidad de B 80 unidad

c) $x + y = 4 \rightarrow y = -x + 4$

$2x - 3y = 7 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

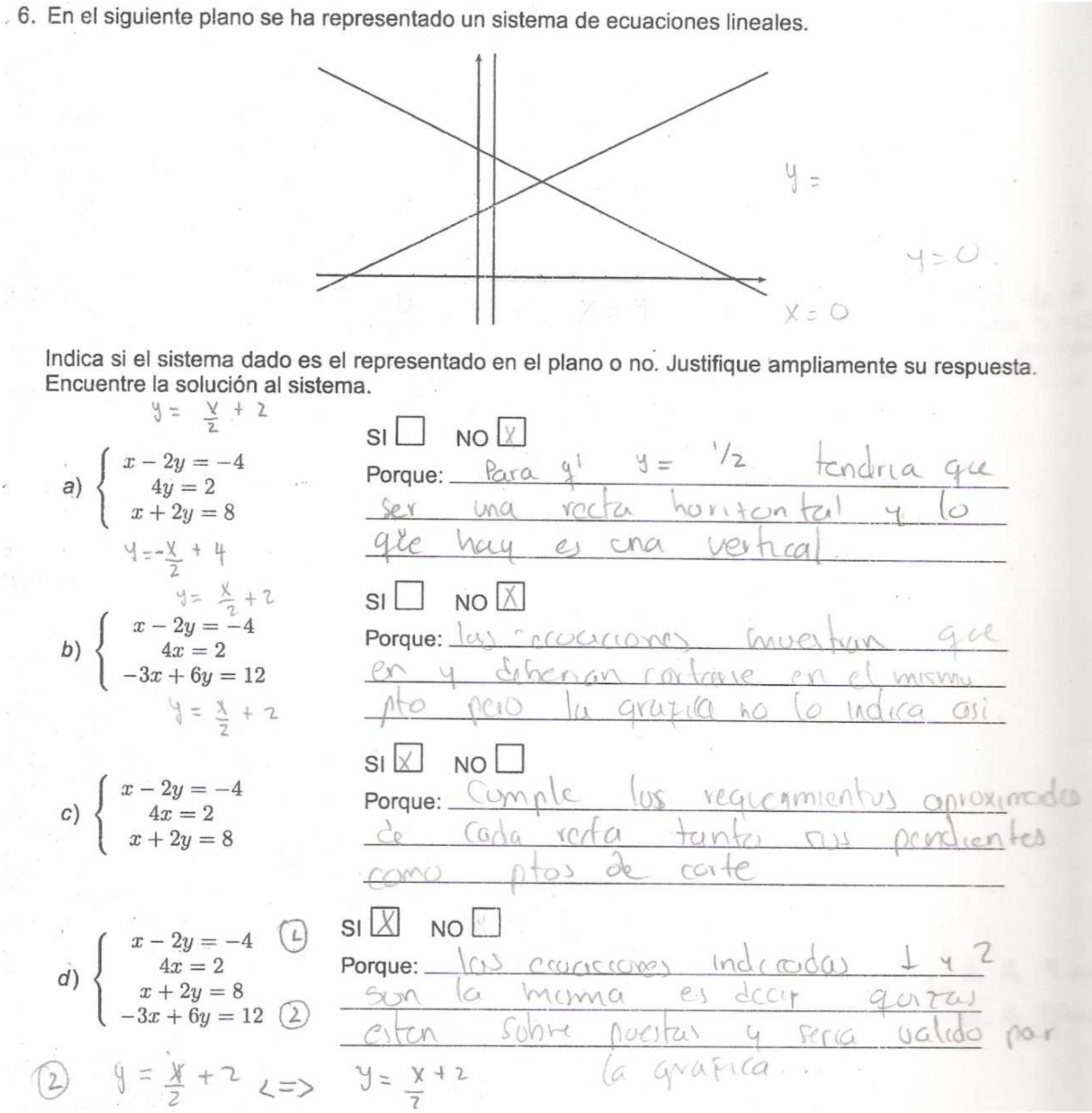
$3x - 2y = 11 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$

Estudiante E7.

Este estudiante fue uno de los pocos que trabajó este punto, y podemos observar que el estudiante resolvió el primer problema sin plantear el sistema de ecuaciones lineales. No resolvió correctamente el segundo problema y en el tercero aunque le dieron las ecuaciones de las rectas no resolvió la situación que se le presentaba.

Análisis del sexto punto.

En este punto pocos estudiantes analizaron las características de las rectas para justificar cada una de preguntas hechas, así como lo hizo este estudiante.



6. En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales.

Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique ampliamente su respuesta. Encuentre la solución al sistema.

$y = \frac{x}{2} + 2$

a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ $y = -\frac{x}{2} + 4$

SI ☐ NO ☒

Porque: Para q' y = 1/2 tendria que ser una recta horizontal y lo que hay es una vertical.

$y = \frac{x}{2} + 2$

b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ $y = \frac{x}{2} + 2$

SI ☐ NO ☒

Porque: las ecuaciones muestran que en y deberian cortarse en el mismo pto pero la grafica no lo indica asi

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

SI ☒ NO ☐

Porque: Cumple los requerimientos aproximados de cada recta tanto sus pendientes como ptos de corte

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 & (1) \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

SI ☒ NO ☐

Porque: las ecuaciones indicadas 1 y 2 son la misma es decir graficas esten sobre puestas y seria valido por la grafica.

(2) $y = \frac{x}{2} + 2 \iff y = \frac{x}{2} + 2$

Estudiante E7.

Pero la mayoría de los estudiantes entregaron este punto marcando las respuestas sin justificar por qué. Podemos pensar que fue falta de tiempo o de pronto que no se encontraban seguros del porqué de su elección. Este punto lo retomaremos en la entrevista.

4.3 Entrevista

En el desarrollo de la entrevista, trabajamos con tres estudiantes que pertenecen a ingeniería mecánica, industrial y civil. Estos estudiantes, como se dijo anteriormente, han aprobado los cursos de Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III, Álgebra Lineal I y están cursando Ecuaciones Diferenciales. Los resultados que ellos presentaron en la prueba diagnóstica fueron los que permitieron que fueran elegidos para realizar la entrevista.

Las entrevistas se desarrollaron de manera individual, fueron video-grabadas y posteriormente transcritas para presentar un análisis más detallado de los procesos realizados por los estudiantes. Las entrevistas tuvieron una duración entre 60 y 90 minutos. Cada problema se presentó en una hoja individual; cómo ya se planteó, la entrevistadora buscó constantemente cuestionar a los estudiantes, con el propósito de que manifestaran sus pensamientos y las ideas que estaban desarrollando sobre los problemas planteados.

El grupo entrevistado: E7, E9 y E10, hace referencia a los estudiantes que presentaron las pruebas diagnósticas numeradas con 7, 9 y 10 respectivamente.

E7 cursa cuarto nivel de Ingeniería Civil; en la prueba diagnóstica se puede apreciar que en él predomina el modo analítico-aritmético. Fue el único que abordo todos los problemas aunque no utilizo sistemas de ecuaciones lineales para dar solución a las preguntas planteadas.

E9 la única mujer entrevistada, cursa cuarto nivel de Ingeniería Industrial. Al igual que E7, abordo los ejercicios de manera aritmética; ella fue la única que dio un ejemplo de un sistema 3x2 con solución única sin que el sistema tenga dos ecuaciones representadas por una misma recta.

E10 cursa cuarto nivel de Ingeniería Mecánica, es una persona que se destaca por su participación en el aula de clase y además en el transcurso del semestre fue tutor de las materias de Cálculo III y Electromagnetismo. En la prueba diagnóstica E10 encuentra la solución a los sistemas de ecuaciones lineales no sólo de manera algebraica, lo hace también teniendo en cuenta las características de las ecuaciones y en algún caso de manera geométrica. Pensamos que este estudiante puede transitar entre los modos de pensamiento sintético y analítico sin ninguna dificultad.

A continuación describiremos los principales aspectos que nos llevaron a decidir entrevistar a estos tres estudiantes, fundamentalmente estos aspectos están relacionados con su desarrollo de la prueba diagnóstica.

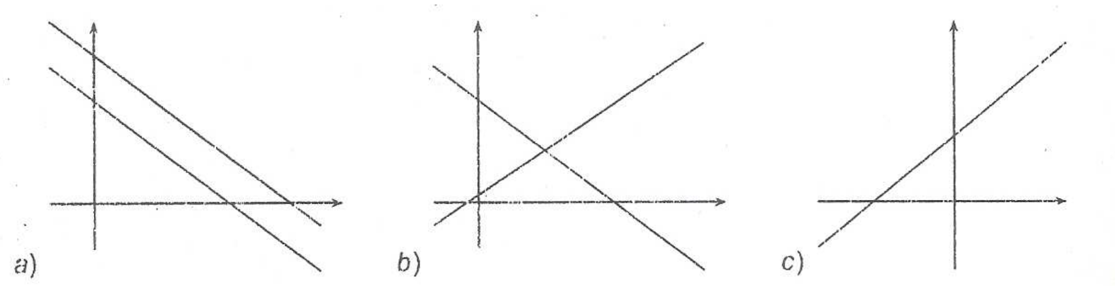
El estudiante E10 durante la realización de la prueba diagnóstica mostró un gran manejo no sólo de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x2, sino que también enfrenta los ejercicios propuestos de manera gráfica y analítica. Este estudiante nos hace pensar que puede transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico estructural.

Los estudiantes E7 y E9, durante la prueba diagnóstica se centraron en realizar los ejercicios empleando diferentes métodos algebraicos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, esto nos hace pensar que ellos no transitan entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-estructural, que se quedan en el modo de pensamiento analítico-aritmético.

4.3.1 Análisis a priori

A continuación presentamos las actividades que se realizaron en la entrevista:

Actividad 1: *En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2 × 2). Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.*



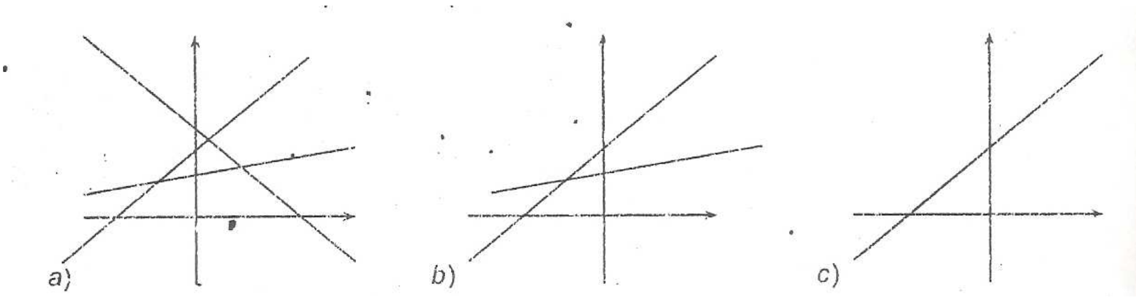
Las gráficas se presentan una por una, no se muestra la siguiente hasta que el estudiante no encuentre la solución de la anterior.

Antes de mostrar al estudiante la gráfica, le formulamos la pregunta:

¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Este punto se plantea con el propósito de analizar las concepciones que el estudiante tiene en cuanto a la solución de un sistema de ecuaciones. Es posible que el estudiante conozca cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales 2x2, pero que gráficamente no pueda identificarlas.

Actividad 2: *En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de ecuaciones lineales 3×2. Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.*



Nuevamente, aquí presentamos las gráficas una a una.

Este punto se plantea con el propósito de analizar las concepciones que el estudiante tiene en cuanto a la solución de un sistema de ecuaciones 3x2, el tránsito del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético o analítico-estructural. Es posible que el estudiante conozca cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales 3x2 pero que gráficamente no pueda identificarlas.

Actividad 3: *Planteamos un sistema 2x2, dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema lo construiremos a partir de una ecuación que dé el estudiante y la otra ecuación la construiremos nosotros.*

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \rightarrow ecuación\ propuesta\ por\ el\ estudiante \\ cx + dy = b_2 \rightarrow ecuación\ propuesta\ por\ nosotros \end{cases}$$

- Encuentre la solución del sistema.

Repetiremos este ejercicio de tal manera que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

Luego planteamos un sistema 3x2, tres ecuaciones con dos incógnitas. Nuevamente el sistema será construido a partir de la ecuación dada por el estudiante y las otras dos las asignaremos nosotros.

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \rightarrow ecuación\ propuesta\ por\ el\ estudiante \\ cx + dy = b_2 \rightarrow ecuación\ propuesta\ por\ nosotros \\ ex + fy = b_3 \rightarrow ecuación\ propuesta\ por\ nosotros \end{cases}$$

- Encuentre la solución del sistema.

Repetiremos este ejercicio cambiando una de las ecuaciones, de tal manera que el sistema tenga única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

En este punto queremos analizar el transito del pensamiento analítico-aritmético al sintético-geométrico o al analítico-estructural que se presenta en el estudiante. Lo visto en la prueba diagnóstico nos hace pensar que los estudiantes E7 y E9 manejan el modo de pensamiento analítico-aritmético y no estamos seguros si logran transitar a los otros dos modos de pensamiento. Después de encontrar la solución invitamos al estudiante a que represente gráficamente el sistema de ecuaciones lineales.

Actividad 4: *Encuentre el valor de µ para que el sistema:*

$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

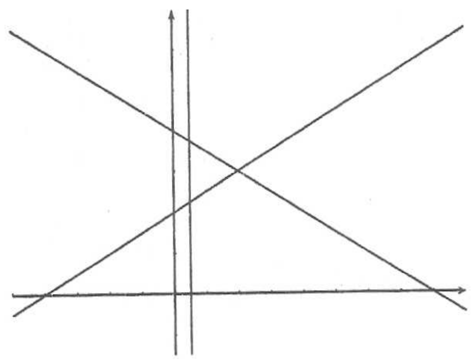
a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga solución.

El objetivo de esta actividad es analizar el modo de pensamiento más predominante en el estudiante, sintético-geométrico, analítico-aritmético o analítico-estructural; es posible que los estudiantes intenten resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando herramientas algebraicas o que lleguen a encontrar el valor de μ a partir de las características estructurales de las ecuaciones y no representen el sistema gráficamente. Para ello pedimos representar gráficamente el sistema para poder observar el tránsito entre los modos de pensamiento; si algún estudiante resuelve los incisos a. b. y c. a partir de la representación gráfica en este caso el modo pensamiento que predomina en él es el sintético-geométrico, en este caso le pediremos al estudiante que plantee el sistema y que mire la relación entre las ecuaciones. Nuevamente, cada sistema se analiza después de haber analizado el anterior.

Actividad 5: En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales. Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique ampliamente su respuesta.
Encuentre la solución al sistema.



a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

Este punto pocos estudiantes lo resolvieron en la prueba diagnóstica. Deseamos ver el tránsito del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético y además queremos que el estudiante observe que una representación gráfica puede ser representación de varios sistemas incluso de un sistema 2x2 y de un sistema 3x2.

A continuación haremos un análisis detallado de cada entrevista.

4.3.2 Análisis a posteriori

En este presentamos un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la entrevista. Consideramos tres apartados: análisis local de cada actividad, un análisis general de cada una de ellas a la luz de nuestro marco teórico y un análisis general de cada uno de los estudiantes.

Análisis por actividad

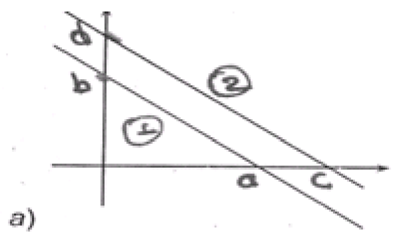
Análisis de la actividad 1

Iniciamos está actividad preguntando a los estudiantes *¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales?* A esta pregunta los estudiantes respondieron sin dificultad que corresponde al conjunto de valores que toman las variables, de tal manera que satisfacen cada una de las ecuaciones que forman el sistema de ecuaciones lineales. Que en el caso de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, la solución, en el caso de ser única, es un punto de R^2.

En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2 × 2). Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.

a. En esta gráfica se presentan dos rectas paralelas. Al preguntarle al estudiante E7, por el sistema y la solución, comentó:

E7: Yo empezaría estableciendo los puntos de corte. Y teniendo en cuenta que en este caso las pendientes son negativas. Y teniendo en cuenta que la ecuación de una recta es $y = mx + b$. Entonces, la ecuación es $y = \left(\frac{b}{a}\right)x + b$ y b que es el punto de corte.



E: ¿Seguro esa es la pendiente?

E7: Pendiente es la variación en y sobre la variación en x. No, la pendiente es $-\frac{b}{a}$. Entonces las ecuaciones son:

E7: Como las rectas son paralelas las pendientes son las mismas. Entonces el sistema me queda…

a) $y = mx + b$

1 $y = -\frac{b}{a}x + b$

2 $y = -\frac{d}{c}x + d$

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = m$

E: Recuerde que además le piden la solución del sistema.

E7: Si, entonces llamemos asterisco y doble asterisco a las dos ecuaciones. Igualamos a asterisco y a doble asterisco y obtenemos que b=d. Falso!

$$\begin{cases} y = -mx + b & (*) \\ y = -mx + d & (**) \end{cases}$$

$*$ en $**$

$$\cancel{-mx} + b = \cancel{-mx} + d$$

$$b = d \text{ Falso!}$$

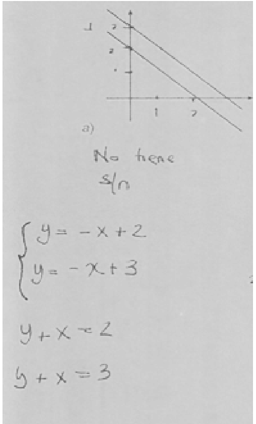
E: Entonces, ¿qué podemos concluir?

E7: Que el sistema es… es indeterminado.

E: ¿Indeterminado o inconsistente?

E7: Inconsistente, no tiene solución.

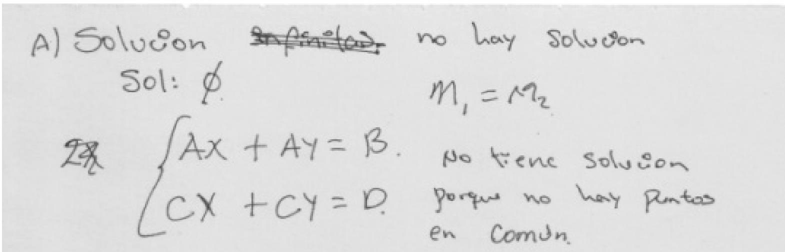
En este caso podemos observar que E7 plantea los sistemas teniendo en cuenta los cortes de las rectas con los ejes coordenados, y que además tiene en cuenta que por ser rectas paralelas tienen las mismas pendientes. Podemos afirmar que el estudiante transita del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético.



Estudiante E9

La estudiante E9 reconoce que el sistema no tiene solución, pero a diferencia de los otros dos estudiantes ella le da valores numéricos a los ejes y plantea un sistema particular para esta situación. Pensamos que esta estudiante transita del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético.

El estudiante E10 por su parte, reconoce que el sistema no tiene solución pues las rectas son paralelas.

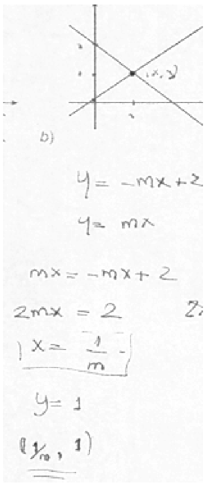


> E10: En a) el sistema tiene soluciones infinitas. No! Miento, en este caso la solución es vacía.
> E: ¿Por qué?
> E10: Bueno que pasaría,… Si hay solución, hay un punto en común. En este caso las rectas son paralelas, nunca se van a cortar.

E10 no necesita ubicar los puntos de corte con los ejes coordenados, él plantea el sistema teniendo en cuenta que las rectas no se cortan y que por tanto el sistema no tiene solución. Podemos afirmar que E10 transita del modo sintético-geométrico al modo analítico-estructural.

b. En esta gráfica las dos rectas que nos presentan se cortan en un solo punto.

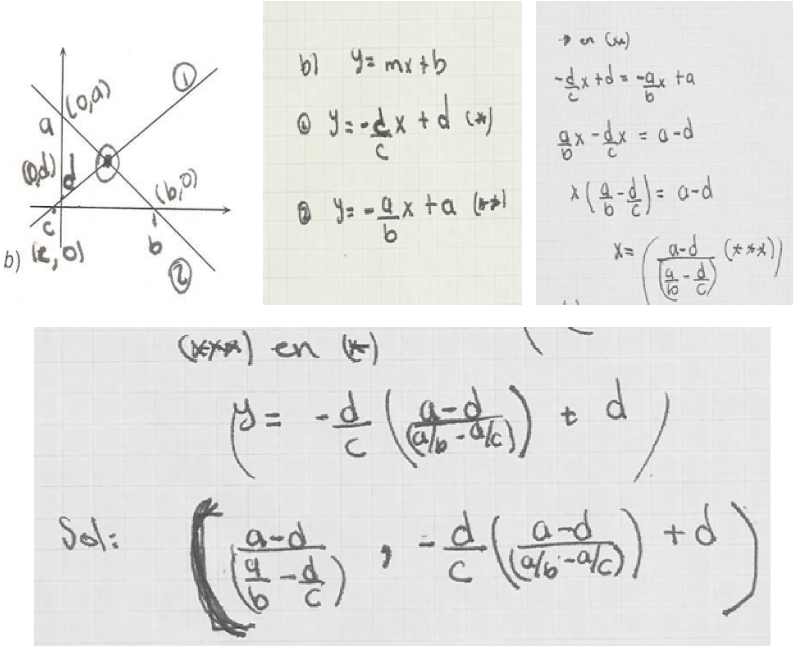
Los estudiantes E10 y E7, plantean el sistema de ecuaciones lineales de manera general, mientras que E9 decide analizar la situación para un sistema en particular.



Estudiante E9

Al igual que en el punto anterior, esta estudiante necesita poner valores numéricos a los ejes coordenados para poder plantear el sistema, no encuentra el valor de las pendientes y de acuerdo a esta gráfica ella considera que las pendientes tienen igual valor absoluto. Representa la solución como una pareja ordenada.

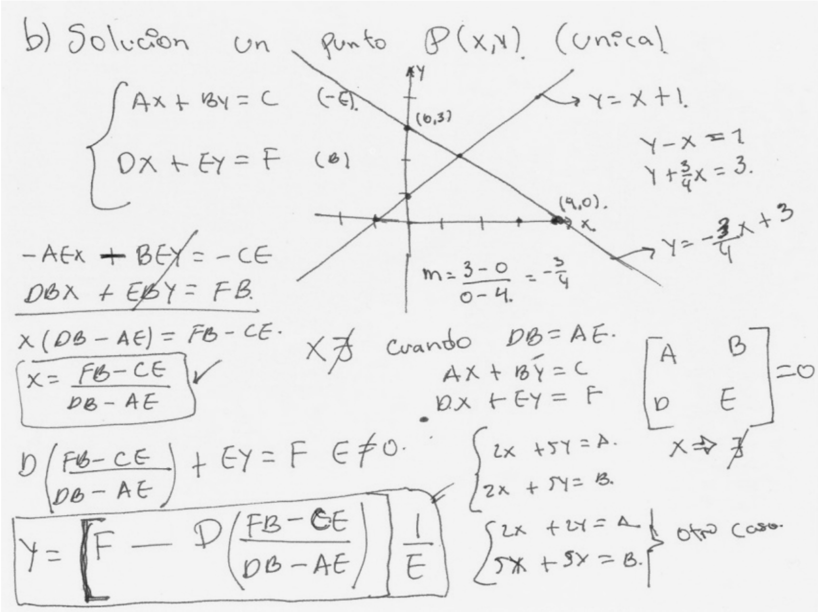
Mostramos a continuación el trabajo realizado por el estudiante E7.



Estudiante E7

Este estudiante ubica los puntos de corte de las rectas con los ejes coordenados, reconoce la intersección de las rectas como la solución del sistema y la escribe como una pareja ordenada. Además plantea el sistema de ecuaciones lineales detallando las pendientes de las rectas.

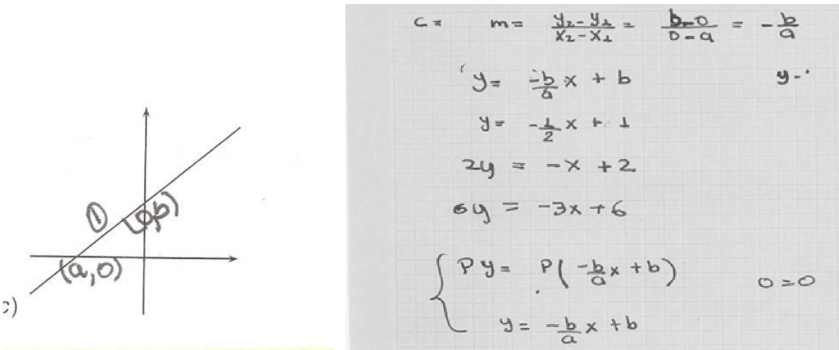
Podemos observar, a continuación, que para encontrar la solución a un sistema de ecuaciones lineales 2x2, E10 recurre a métodos algebraicos vistos con anterioridad, en cursos de Álgebra. Dándole condiciones a las constantes para que el sistema tenga solución única.



Estudiante E10

Podemos observar en este caso, que la estudiante E9 transita del modo sintético-geométrico al modo de pensamiento analítico-aritmético, mientras que los estudiantes E7 y E10 lo hacen al modo analítico-estructural.

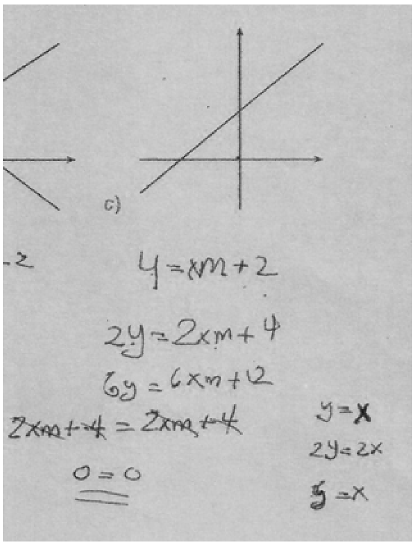
d. En esta gráfica nos muestran una recta que representa un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.



Estudiante E7

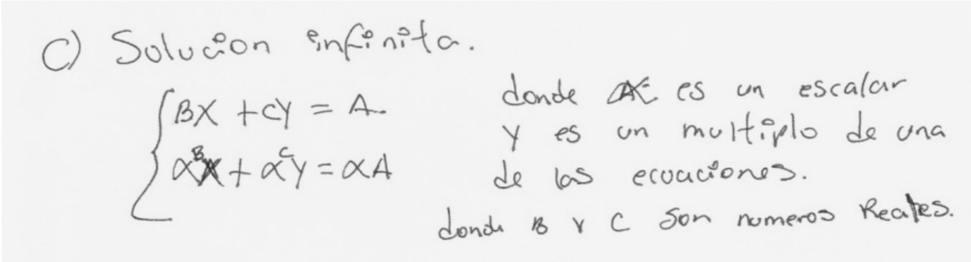
El estudiante E7 planteó inicialmente una ecuación particular posteriormente obtuvo dos ecuaciones múltiplos escalares entre sí y a la primera ecuación, al hacer esto observó que las tres ecuaciones representaban la misma recta; después de esto obtuvo un sistema general de dos ecuaciones con dos incógnitas que son representados por la recta dada. Concluyó que el sistema tiene infinitas soluciones, podemos pensar que este estudiante transita del modo sintético-geométrico al analítico.

Por su parte la estudiante E9, al igual que en los numerales anterior planteó una ecuación particular que representaba la recta dada.



Estudiante E9

A partir de esta ecuación encontró dos ecuaciones que representaban la misma recta, gracias a esto logró plantear un sistema particular de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} 2y = 2xm + 4 \\ 6y = 6xm + 12 \end{cases}$ y así pudo concluir que el sistema tiene infinitas soluciones. Podemos confirmar nuevamente que la estudiante E9 transita del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético. Es de notar que en ninguno de los tres casos la estudiante ha transitado al modo analítico-estructural.



C) Solucion infinita.

$$\begin{cases} BX + CY = A. \\ \alpha^{B}X + \alpha^{C}Y = \alpha A \end{cases}$$

donde α es un escalar y es un multiplo de una de los ecuaciones.

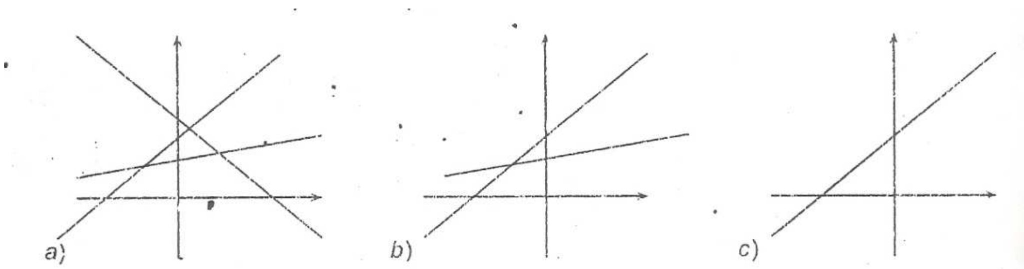
donde B y C son numeros Reales.

Estudiante E10

Sin duda alguna, el estudiante E10 manifiesta que el sistema tiene infinitas soluciones y que las ecuaciones que representan esta situación, deben ser múltiplos escalares entre sí. Podemos observar que este estudiante transita entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-estructural, pues a partir de la gráfica plantea el sistema y obtiene la solución.

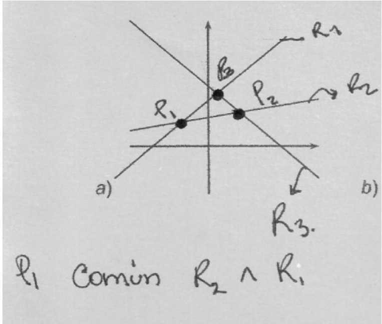
Análisis de la actividad 2

En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (3 × 2). Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.



En esta actividad los estudiantes no presentaron ninguna dificultad al encontrar las soluciones en b) y en c), y al identificar que en a) no hay solución, aunque inicialmente conjeturaron que el sistema podría tener tres soluciones.

Mostramos a continuación el análisis de E10, sobre la gráfica a) cuando se le preguntó por la solución del sistema.



E10: En a) hay tres soluciones.

E: ¿Cuáles serían?

E10: Los puntos en común entre ellas… P1, P2 y P3.

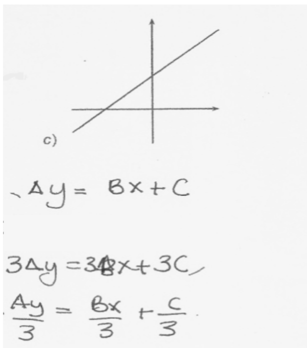
E: ¿Está seguro?

E10: Si, sería, sería,… Los puntos de corte serían la solución del sistema.

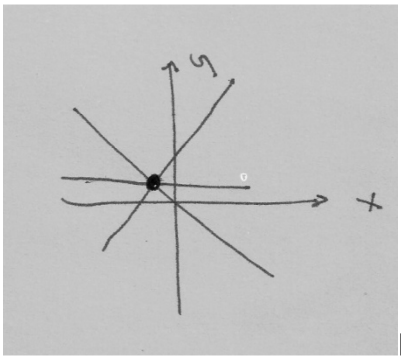
E: Y está seguro que los puntos P1, P2 y P3 son la solución al sistema.

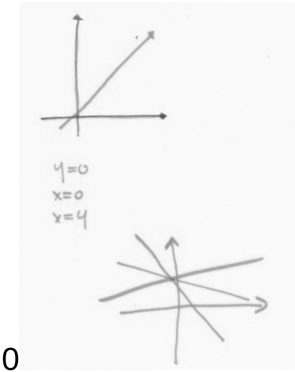
E10: Umm, no. Para que el sistema tenga solución los puntos deben pertenecer a las tres rectas en común. Y aquí, P1 es un punto en común de las rectas R1 y R2, pero no de R3.El sistema no tiene solución.

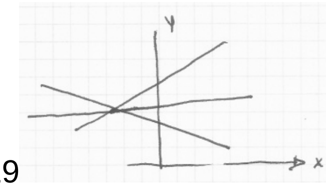
De igual manera no hubo dificultad en plantear los sistemas, pensamos que fue debido a que asimilaron la primera actividad, sobretodo E7 y E9 y que presentaron dificultad al presentárseles una recta y decirles que representaban un sistema 2x2. Sin embargo, E9 en c) planteo un sistema particular:



Como en este numeral no se presento ningún ejemplo de tres rectas que representaran un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, se le pidió a los estudiantes que representaran este caso, ninguno de los tres presentó dificultad en hacerlo. Estas son las gráficas que realizaron:



E10


E9


E7

Podemos apreciar entonces, que los estudiantes transitan entre el modo de pensamiento sintético-geométrico y el modo de pensamiento analítico, E9 transita del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético, mientras que E7 y E10 al modo analítico-estructural.

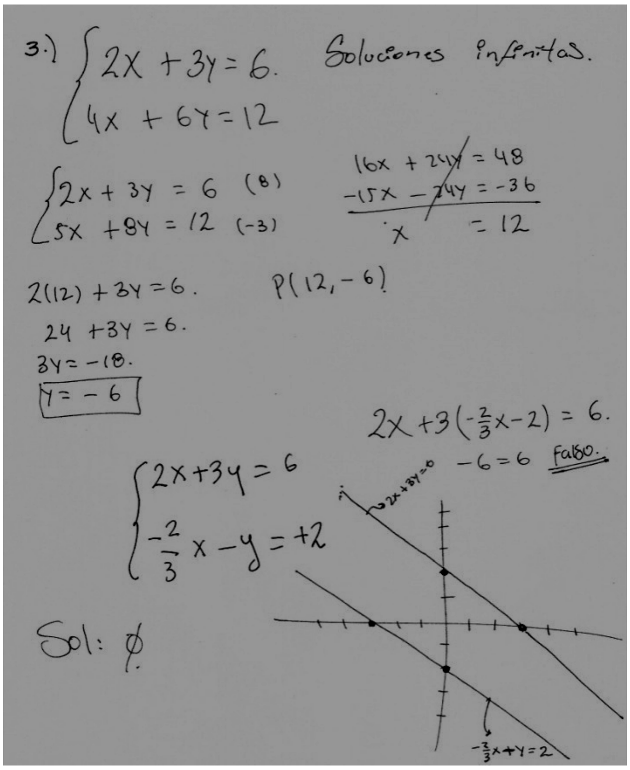
Análisis de la actividad 3

En esta actividad le solicitamos a cada estudiante que escribiera una ecuación con dos incógnitas a partir de la ecuación que ellos escribieron. La entrevistadora escribió otra ecuación y les pidió que determinaran si el sistema tenía solución única, infinitas soluciones o si no tenía solución. Esta actividad E7 y E9 la realizaron aplicando métodos algebraicos conocidos por los estudiantes llegando a encontrarse con resultados como $0 = 0$ y $0 = k$, donde los estudiantes sin ninguna dificultad indicaron que los sistemas tenían infinitas soluciones y ninguna solución, respectivamente. Lo mismo ocurrió cuando se trabajo con sistemas 3x2.

El estudiante E10, nuevamente analizó las características de las ecuaciones y determinó la solución a partir de ellas. Sólo en el caso en que el sistema tiene solución única, él encontró la solución por medio de procesos algebraicos.

Podemos observar que este estudiante transita entre el modo de pensamiento analítico-aritmético y al modo analítico-estructural.

El estudiante E10 propone la ecuación $2x + 3y = 6$, y como expusimos en el análisis a priori de la entrevista, la otra ecuación la propone la entrevistadora. Vamos a analizar los sistemas $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ ax + by = c \end{cases}$, con el que trabajó el estudiante E10.



En el primer caso, el estudiante identifica que el sistema tiene infinitas soluciones pues las ecuaciones son múltiplos escalares entre sí. En el segundo caso, el estudiante recurre a métodos algebraicos para encontrar que el sistema tiene solución única, la cual la expresa como un elemento de R^2, como una pareja ordenada (x, y). En el último caso, el estudiante decide nuevamente determinar la solución por medio de métodos algebraicos y llega a la expresión $6 = -6$, hecho que reconoce como falso. Sin embargo, él refuerza que el sistema no tiene solución, graficando las rectas. Aquí podemos observar que este estudiante puede transitar del modo de pensamiento analítico-aritmético a los modos sintético-geométrico y al analítico-estructural.

Cuando agregamos una tercera ecuación, la situación es muy similar en los tres estudiantes, analizan las características estructurales de las ecuaciones para determinar si el sistema tiene o no solución.

Análisis de la actividad 4

Encuentre el valor de μ para que el sistema:

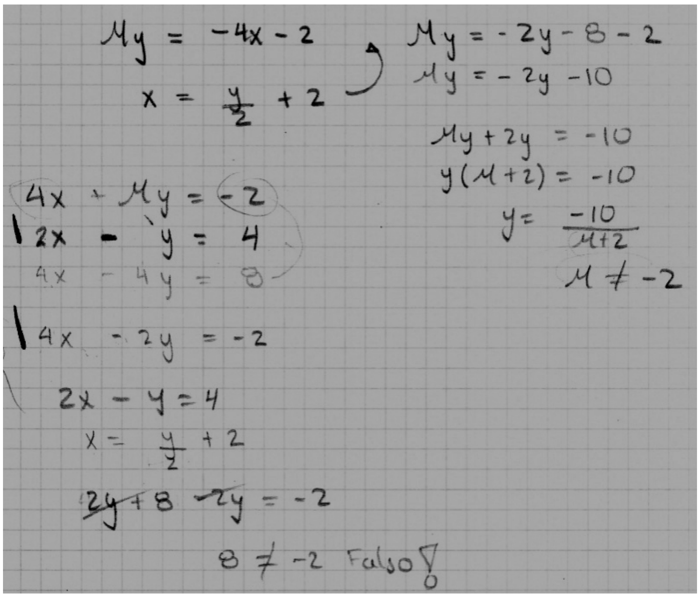
$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga solución.

El estudiante E7, encontró el valor de y en función de μ, y así determinó qué valores podía tomar μ para que el sistema tenga solución única. Posteriormente analizó el sistema para el valor de $\mu = -2$.

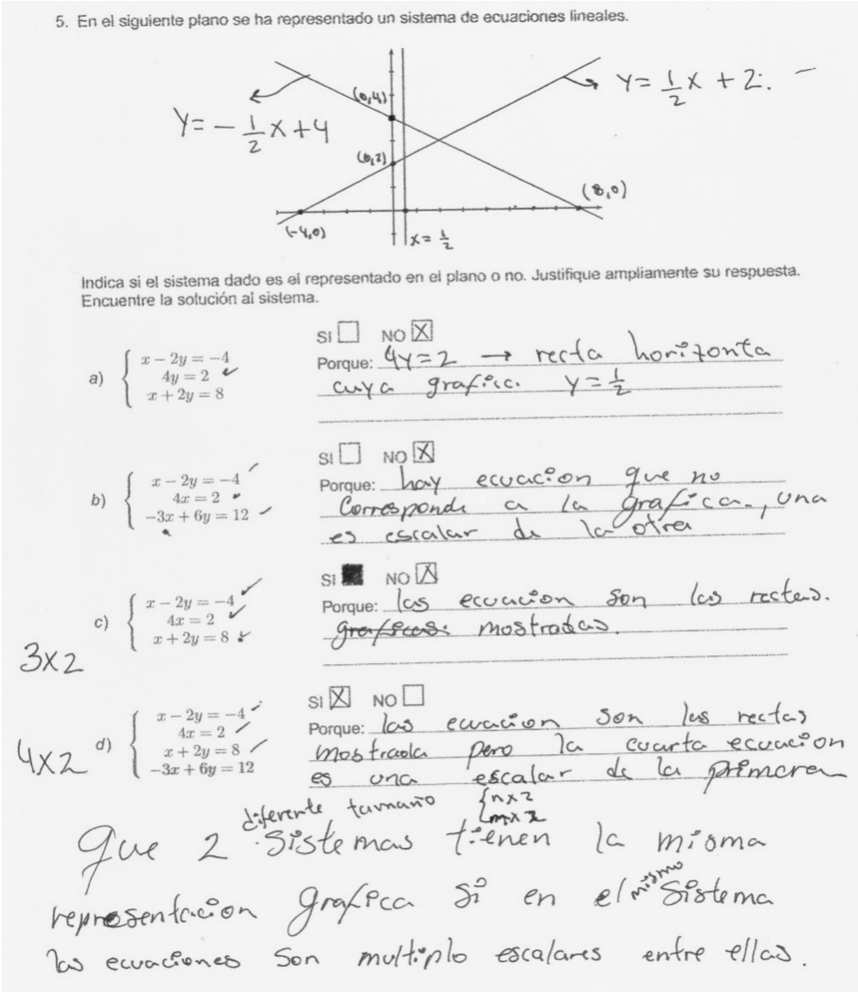


Un procedimiento similar realizaron los otros dos estudiantes, aquí observamos que los estudiantes no analizaron las características de las ecuaciones y tampoco abordaron la situación de manera geométrica. Es decir, aquí no podemos notar el tránsito entre los modos de pensamiento analítico-estructural a los otros dos pensamientos. Es de resaltar que esta actividad se planteó en la prueba diagnóstica y el estudiante E10 la analizó teniendo en cuenta las características de las ecuaciones para determinar cuando el sistema tiene única solución o no tiene solución e incluso graficó las rectas para el valor de $\mu = -2$.

Análisis de la actividad 5

En esta actividad se les presentó nuevamente a los estudiantes la gráfica de unas rectas en el plano, estas rectas representan sistemas de ecuaciones lineales. Se les da a los estudiantes cuatro sistemas de ecuaciones lineales. Los tres primeros 3x2 y el último 4x2. Se pide a los estudiantes que indiquen si cada sistema corresponde o no al sistema representado en el plano y que justifique el por qué de su respuesta. En esta actividad los estudiantes identificaron correctamente cuales sistemas estaban representados en el plano, para ello analizaron tanto las características de las rectas como las características de las ecuaciones. Es decir, una recta vertical no puede tener la ecuación $y = k$. Mostramos en la figura de la siguiente página las respuestas de E10.

Al finalizar esta actividad los estudiantes concluyen que un sistema $m \times 2$ puede representar la situación presentada en el plano, siempre y cuando existan varias ecuaciones que sean múltiplos escalares entre sí. Es decir, que la situación planteada no necesariamente representa un sistema 3x2 o 4x2 como los que son propuestos en la actividad.


5. En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales.

Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique ampliamente su respuesta. Encuentre la solución al sistema.

a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

SI ☐ NO ☒

Porque: $4y = 2 \longrightarrow$ recta horizonta cuya grafica $y = \frac{1}{2}$

b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$

SI ☐ NO ☒

Porque: hay ecuacion que no Corresponde a la grafica, una es escalar de la otra

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ 3x2

SI ■ NO ☒

Porque: los ecuacion son las rectas. ~~graficas~~ mostradas.

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ 4x2

SI ☒ NO ☐

Porque: los ecuacion son las rectas mostrada pero la cuarta ecuacion es una escalar de la primera

diferente tamaño $\begin{cases} n \times 2 \\ m \times 2 \end{cases}$

Que 2 sistemas tienen la misma representacion grafica si en el mismo sistema las ecuaciones son multiplo escalares entre ellas.

Análisis por estudiante

Después de presentar el análisis de cada actividad de la entrevista, presentamos a continuación un análisis de cada uno de los estudiantes entrevistados a la luz de nuestro marco teórico.

Análisis de la entrevista con E7

El estudiante E7 reconoce sin dificultad lo que significa la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Gráficamente, al presentársele en el plano dos líneas paralelas e indicarle que ellas representan un sistema 2x2, el estudiante inmediatamente reconoce que el sistema no tiene solución. Planteó las ecuaciones sin dificultad para el caso general, indicando que las rectas deben tener la misma pendiente. Al presentársele la gráfica donde las rectas se cortan en un punto, él señala que el sistema tiene solución única y que es el punto de corte. Al plantear el sistema también lo hace para el caso general, expresando las pendientes en términos de los puntos de corte con los ejes y representando la solución como una pareja ordenada (x, y). Al preguntarle por la solución al sistema representado por la gráfica donde aparece una sola recta, después de plantear varias ecuaciones a sugerencia de la entrevistadora, logró convencerse que la recta puede estar representada por varias ecuaciones, ecuaciones que van a ser múltiplos escalares entre sí y que además todos los puntos que satisfacen las dos ecuaciones son soluciones al sistema, por tanto que el sistema tiene infinitas soluciones.

Cuando se le pide encontrar la solución al sistema 3x2, representado gráficamente por 3 rectas que se cortan en un punto por pares, 2 rectas que se cortan en un punto y por una recta, el estudiante encuentra la existencia o no de la(s) solución(es) sin ningún tipo de dificultad, podemos pensar que el ejercicio anterior fue de gran ayuda para el éxito en esta actividad. Plantea además, de manera correcta, los sistemas de manera general.

En la actividad 3, cuando planteamos diferentes sistemas a partir de ecuaciones dadas en conjunto por la entrevistadora y el estudiante, y se le pide encontrar la solución y él recurre a hacerlo utilizando los métodos que conoce, pero en ningún caso representa las gráficas. Tampoco tiene en cuenta las características estructurales de las ecuaciones. En la actividad 4, nuevamente para encontrar el valor de μ, para que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución, nuevamente recurre a los métodos vistos en Álgebra Lineal I, pero no grafica ni analiza las características de las ecuaciones. Podemos notar en estos tres puntos, que aunque el estudiante puede transitar del modo de pensamiento geométrico al analítico, está acostumbrado a abordar los sistemas de ecuaciones lineales desde el modo de pensamiento analítico-aritmético. Identifica sin ningún problema que la identidad $0 = 0$ nos indica que el sistema tiene infinitas soluciones y que la identidad k=0, indica que no tiene solución si k≠0.

En la última actividad nuevamente el estudiante muestra que no tiene dificultad de transitar entre el modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico, reconoce qué sistemas pueden representar la gráfica que se le presenta a partir de las características estructurales de las ecuaciones.

De acuerdo a esta información recolectada, podemos concluir que el estudiante E7 transita exitosamente entre los modos de pensamiento descritos por Sierpinska (2000) y que gracias a esto comprende la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

Análisis de la entrevista con E9

La estudiante reconoce que gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, es el punto en común de las dos rectas, y que la solución es una pareja ordenada (x, y) que satisface las dos ecuaciones.

Para encontrar la solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, representado por dos rectas que se cortan, la estudiante no lo hace para el caso general; lo hace para el caso particular, dándole valores a los ejes coordenados y así planteando un sistema particular el cual resuelve. Reconoce la solución del sistema como una pareja ordenada.

En el caso donde hay una recta reconoce que se puede representar la recta con dos ecuaciones donde una es factor escalar de la otra; de manera general presenta dificultad para representar el sistema así que se ayuda de ejemplos particulares para posteriormente generalizar. Y para encontrar la solución debe apoyarse también de los ejemplos, llegando a reconocer que la igualdad $0 = 0$ representa que el sistema tiene infinitas soluciones.

Cuando pasamos a trabajar con sistemas lineales de orden 3x2, reconoce sin dificultad la solución a cada uno de los sistemas, indicando correctamente que si tres rectas se cortan dos a dos, el sistema no tiene solución pues no se cortan en un punto en común.

Si le presentamos dos rectas, reconoce ahora sin dificultad que las dos rectas pueden ser representadas por tres ecuaciones, donde dos de ellas son múltiplos escalares entre sí. Y que el sistema representado en el plano tiene solución única; además, ahora sí se atreve a plantear el sistema de manera general y a encontrar la solución a este sistema. La estudiante muestra un ejemplo de rectas en el plano cuyo sistema tiene solución única.

Al presentársele a la estudiante una recta e indicarle que representa un sistema de ecuaciones lineales 3x2, sin dificultad indica que el sistema tiene infinitas soluciones, que se puede representar por tres ecuaciones que son múltiplos escalares entre sí. Pero nuevamente confirma que el sistema tiene infinitas soluciones resolviendo el sistema e interpretando la expresión $0 = 0$. Podemos pensar que el ejercicio anterior le ayudó a la estudiante a resolver este punto de una manera más ágil y con mayor confianza. Podemos pensar que la estudiante transita del modo de pensamiento sintético-geométrico al analítico, especialmente al analítico-aritmético.

En el tercer punto, donde pedimos a la estudiante que plantee un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas o tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, y que encuentre la solución; ella opta por resolver el sistema aplicando métodos algebraicos conocidos por ella anteriormente, pero no se detiene a mirar las características de las ecuaciones, ni a graficar el sistema. Es decir, podemos afirmar que la estudiante en esta clase de ejercicios no transita a los modos de pensamiento sintético-geométrico ni al analítico estructural. Nuevamente la estudiante llega a la expresión $0 = 0$ y a la expresión $k = 0$, donde no presenta dificultad en asegurar que el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución respectivamente.

Aunque la estudiante para encontrar la solución a un sistema de ecuaciones lineales 2x2, lo hace utilizando métodos algebraicos, en el punto donde le piden encontrar el valor de μ para que el sistema tenga solución única, ella analiza las características de las ecuaciones para encontrar a μ. Sin embargo, termina respondiendo a la pregunta resolviendo el sistema.

En el último punto, a la estudiante se le presenta una gráfica con algunas rectas en el plano y se le pide identificar el sistema que representa la situación dada. Ella analiza los sistemas e identifica las características de las ecuaciones que coinciden con las rectas de manera adecuada.

Podemos concluir, según Sierpinska (2000), que en la estudiante E9 predomina el modo de pensamiento analítico-aritmético, ella transita superficialmente a los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-estructural.

Análisis de la entrevista con E10

En cuanto a la solución de un sistema de ecuaciones lineales identifica que gráficamente es el (los) punto(s) de corte entre la(s) recta(s); que analíticamente es la pareja ordenada, en sistemas de lineales con 2 variables (en el caso trabajado por nosotros sistemas 2x2 y 3x2), que cumplen o satisfacen las dos ecuaciones.

El estudiante no presenta dificultad en reconocer que si nos dan una recta en el plano esa recta me puede representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2 o 3x2, con gran facilidad plantea los sistemas indicando que una ecuación es múltiplo escalar de la otra en un sistema 2x2 y que las tres ecuaciones lineales son múltiplos escalares entre sí en un sistema 3x2. En cuanto a la solución el estudiante inmediatamente ve la gráfica reconoce que el sistema tiene infinitas soluciones.

En el caso de presentársele dos rectas que se intersecan en el plano, reconoce que la solución al sistema es única, y que es el punto donde se cortan las dos rectas. Plantea el sistema general pero presenta un poco de dificultad a intentar describir la solución de manera general, es necesario utilizar un ejemplo particular para extenderlo al caso general.

Cuando se le presenta al estudiante un plano con dos rectas o tres rectas paralelas, sin dificultad indica que el sistema 2x2 y 3x2, respectivamente, no tienen solución; pues no hay puntos de corte entre las rectas, las rectas no tienen puntos en común. Plantea sin dificultad el sistema 2x2 o 3x2, indicando que para que las rectas sean paralelas las pendientes deben ser iguales, que las ecuaciones son múltiplos escalares una de la otra excepto en las constantes.

En la situación donde aparecen tres rectas en el plano que se cortan dos a dos, inicialmente el estudiante afirma que el sistema tiene solución única, pero al recordar que la solución a un sistema 3x2 es el punto de corte, el punto en común entre las rectas, rectifica su respuesta e indica que el sistema no tiene solución, pues no hay punto en común entre las tres rectas. En cuanto al planteamiento del sistema no presenta dificultad, aclara que las ecuaciones no son múltiplos escalares entre sí.

En el caso donde al estudiante se le presenta una gráfica en el plano donde se cortan tres rectas y se le dan además unos sistemas 3x2 y 4x2, el reconoce perfectamente cuales sistemas, 3x2 y 4x2, pueden representar la situación representada en el plano.

Podemos afirmar entonces que el estudiante transita sin aparente dificultad del modo de pensamiento sintético-geométrico al modo de pensamiento analítico.

En los casos donde se tienen las ecuaciones y se pide encontrar la solución a los sistemas 2x2 y 3x2, observamos que el estudiante analiza las características de las ecuaciones, identifica si son múltiplos escalares entre ellas y determina si hay o no solución, si la solución es única o el sistema tiene infinitas soluciones de manera correcta. Además el estudiante indica si las rectas son paralelas o no, e incluso representa el sistema en el plano.

Podemos afirmar entonces que el estudiante transita del modo de pensamiento analítico-aritmético al analítico-estructural, y que transita del modo analítico al sintético-geométrico.

CAPÍTULO 5.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

En general podemos decir que los estudiantes entrevistados muestran una concepción adecuada acerca de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, al determinar que se trata de las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen simultáneamente las ecuaciones que conforman el sistema. En la parte gráfica se observa que el significado geométrico de solución única es claro, identifican el punto de corte entre las rectas. Cuando se trabaja con más de una solución, es decir, cuando en R^2 se presenta una sola recta, los estudiantes E7 y E9 presentan un poco de dificultad al encontrar la solución; se necesitó de la orientación de la entrevistadora para que concluyeran que la solución es infinita puesto que esa recta puede ser representada por diferentes ecuaciones.

Respecto del tránsito entre el pensamiento geométrico y el aritmético podemos observar que en general los estudiantes no tuvieron inconvenientes. Los estudiantes E7 y E10, plantearon los sistemas para el caso general, mientras que la estudiante E9 lo hizo para un caso particular e intento generalizar.

En los tres estudiantes entrevistados se evidencia el buen manejo del pensamiento aritmético. Al resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas cuando éstas tienen, única solución, infinitas soluciones o ninguna solución, el estudiante E10 observa qué tipo de solución tiene cada sistema proporcionado, observando las propiedades de las ecuaciones de cada sistema para analizar qué método de resolución pueden aplicar. Este estudiante maneja elementos de un pensamiento estructural al observar las propiedades de cada sistema. Los estudiantes E7 y E9 resuelven los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 usando métodos algebraicos pero los sistemas de ecuaciones lineales 3x2 los abordan mirando las características de las ecuaciones lineales.

Aunque podemos concluir que los tres estudiantes transitan entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico, es claro que los estudiantes E7 y E9 están más familiarizados con el modo analítico-aritmético mientras que el estudiante E10 transita naturalmente por los tres modos de pensamiento.

Pensamos que debemos brindar a nuestros estudiantes espacios adecuados para que no solo desarrollen habilidades algebraicas al determinar la solución de sistema de ecuaciones lineales, sino además, acostumbrarlos a justificar los algoritmos que emplea en la resolución de estos, con el fin de que su aprendizaje no se vuelva algo mecánico, que cada justificación le ayude a comprender los conceptos trabajados. De esta manera el tránsito entre los modos de pensamiento puede darse de una manera natural. También pensamos que es necesario fomentar en nuestros estudiantes el ambiente geométrico, reforzándolo a medida que desarrollen los ejercicios, esto debemos hacerlo desde los primeros cursos, donde aborden por primera vez los sistemas de ecuaciones lineales.

En cuanto al pensamiento analítico-estructural, observamos que aunque E9 recordó algunas propiedades generales de los sistemas de ecuaciones lineales, siguió abordando las situaciones dadas de manera aritmética. Mientras que los estudiantes E10 y E7 expresan con facilidad sus ideas, poseen un modo de pensamiento analítico-estructural y lo usan para relacionar resultados geométricos y aritméticos. Esperábamos que el tránsito entre los tres modos de pensamiento se diera sin ninguna dificultad debido a la experiencia y madurez académica de estos estudiantes, este hecho lo podemos notar en el estudiante E10.

Pensamos que la manera adecuada de aprender los conceptos de Álgebra Lineal, el caso abordado por nosotros, los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x2, es hacer el tránsito efectivo entre los tres modos de pensamiento.

5.2 Recomendaciones

Para futuras investigaciones, se sugiere el diseño de actividades novedosas en donde los estudiantes logren desarrollar los tres modos de pensamiento, y observar qué estrategias utilizan ante situaciones nuevas. Actividades que puedan complementar en programa tradicional de Álgebra Lineal I con el ánimo de propiciar el ambiente adecuado para que los estudiantes trabajen en los tres modos de pensamiento y comprendan la información que cada uno de ellos ofrece. Propuestas dirigidas no solo a los docentes de Álgebra sino también dirigidas a las editoriales con el ánimo de complementar los textos que se manejan comercialmente.

6. BIBLIOGRAFÍA

Ardila A. Montañez, C. (2010). Evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento geométrico, aritmético y estructural en estudiantes de secundaria y primer año de universidad, el caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Trabajo de especialización , UIS. Colombia.

Dorier, J. (2000). *Epistemological analysis of the theory of vector spaces,* J.-L. Dorier (Ed) *On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers,* 6-11.

Grossman, S. (1996). Álgebra lineal con aplicaciones, Quinta Edición. Editorial Iberoamericana.

Miranda, E. (2004). Generación de los modelos de enseñanza- aprendizaje en el álgebra lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales. www.iberomat.uji.es/carpeta/.../30_**eduardo_miranda_montoya**.doc

Oaxaca, J. De la Cruz, J. y Sánchez, J. (2008). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Ponencia. Foro de Matemáticas. U.N.A.M. México. http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/.../41.pdf

Ramírez, M. (2008). Concepciones de los estudiantes de educación superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAD. México.

Roa, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAD. México.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.) *On the teaching of linear algebra*. Pp. 209 - 246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ANEXOS

ANEXO 1. Prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de pregrado de la Universidad Industrial de Santander.

ANEXO2. Actividades de la entrevista aplicada a los estudiantes de pregrado de la Universidad Industrial de Santander.

ANEXO 1.

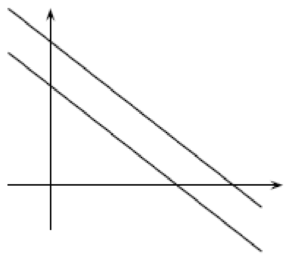
Universidad Industrial de Santander

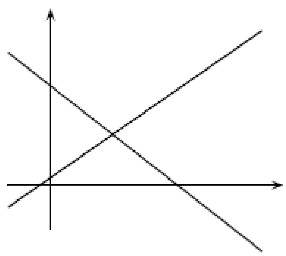
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

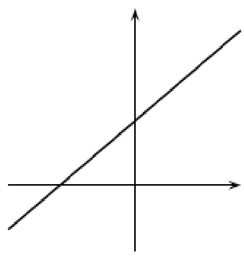
Diagnóstico
Sistemas de Ecuaciones Lineales
Septiembre de 2009
Prof: Doris GONZÁLEZ

Nombre: ______________________________ Código: ______________

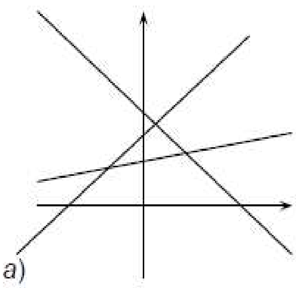
1. En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2×2). Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.

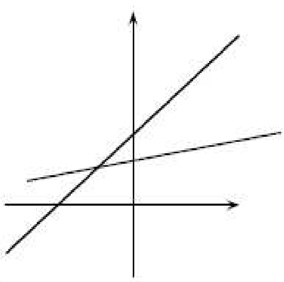
a) 

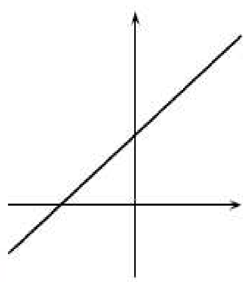
b) 

c) 

2. En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de ecuaciones lineales 3×2. Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.

a) 

b) 

c) 

3. Determine la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y represente el conjunto solución. Justifique su respuesta.

a) $\begin{cases} x - 3y = -10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 5y = 100 \\ 8x + 10y = 200 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x - \frac{4}{5}y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x - \frac{9}{2}y = \frac{21}{2} \\ -10x + 15y = -35 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

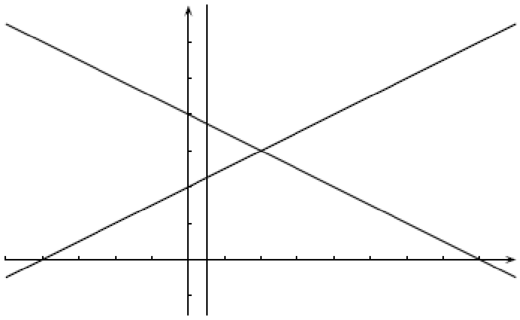
4. Encuentre el valor de μ para que el sistema: $\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

   a) Tenga solución única.
   b) Tenga infinitas soluciones.
   c) No tenga solución.

5. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano?
   b) Un departamento de caza y pesca del estado proporciona 2 tipos de comida a un lago que alberga 2 especies de peces. Cada pez de la especie A consume cada semana un promedio de 4 unidades de alimento 1 y 8 unidades de alimento 2. Cada pez de la especie B consume 5 unidades de alimento 1 y 10 unidades de alimento 2. Cada semana se proporciona al lago 100 unidades de alimento 1 y 200 unidades de alimento 2. ¿Cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?
   c) Es posible que las rectas $L_1 : x + y = 4$, $L_2 : 2x - 3y = 7$ y $L_3 : 3x - 2y = 11$ se intersequen en un mismo punto? Por qué?

6. En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales.



Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique ampliamente su respuesta. Encuentre la solución al sistema.

a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

SI ☐ NO ☐

Porque: ____________________

____

____

b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$

SI ☐ NO ☐

Porque: ____________________

____

____

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

SI ☐ NO ☐

Porque: ____________________

____

____

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$

SI ☐ NO ☐

Porque: ____________________

____

____

ANEXO 2.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

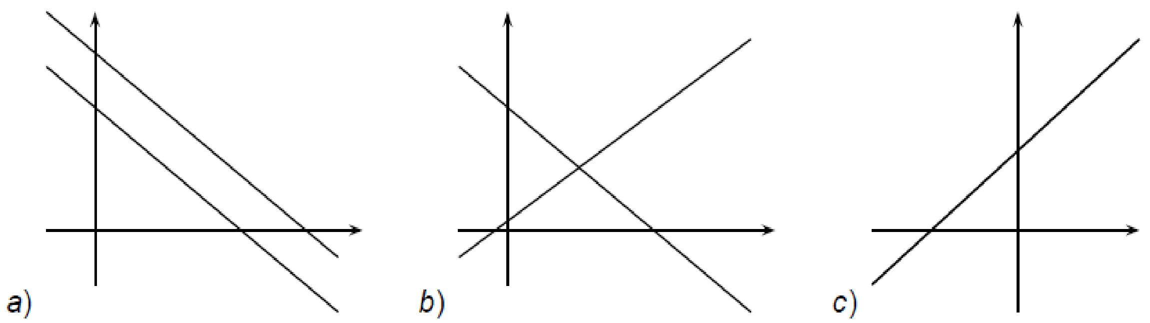
Entrevista
Sistemas de Ecuaciones Lineales
Septiembre de 2009
Prof: Doris GONZÁLEZ

Nombre: ______________________________ Código: ______________

NOMBRE: ____ CÓDIGO: ______________

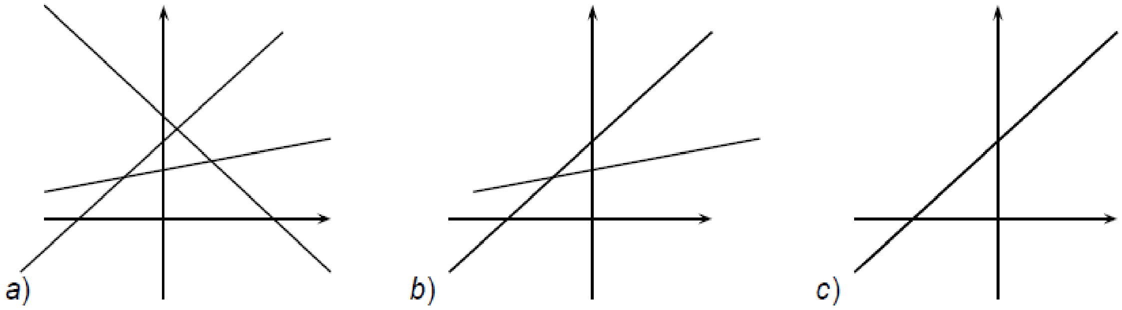
¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Actividad 1: *En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2 × 2). Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.*



Las gráficas se presentan una por una, no se muestra la siguiente hasta que el estudiante no encuentre la solución de la anterior.

Actividad 2: *En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de ecuaciones lineales 3×2. Escribe el sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.*



Actividad 3: *Planteamos un sistema 2x2, dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema lo construiremos a partir de una ecuación que dé el estudiante y la otra ecuación la construiremos nosotros.*

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \rightarrow \text{ecuación propuesta por el estudiante} \\ cx + dy = b_2 \rightarrow \text{ecuación propuesta por nosotros} \end{cases}$$

- Encuentre la solución del sistema.

Repetimos este ejercicio de tal manera que el sistema solución única, infinitas soluciones y sin solución.

Luego planteamos un sistema 3x2, tres ecuaciones con dos incógnitas. Nuevamente el sistema será construido a partir de la ecuación dada por el estudiante y las otras dos las asignaremos nosotros.

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \rightarrow \text{ecuación propuesta por el estudiante} \\ cx + dy = b_2 \rightarrow \text{ecuación propuesta por nosotros} \\ ex + fy = b_3 \rightarrow \text{ecuación propuesta por nosotros} \end{cases}$$

- Encuentre la solución del sistema.

Repetiremos este ejercicio cambiando una de las ecuaciones, de tal manera que el sistema única solución, infinitas soluciones y sin solución.

Actividad 4: *Encuentre el valor de µ para que el sistema:*

$$\begin{cases} 4x + \mu y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

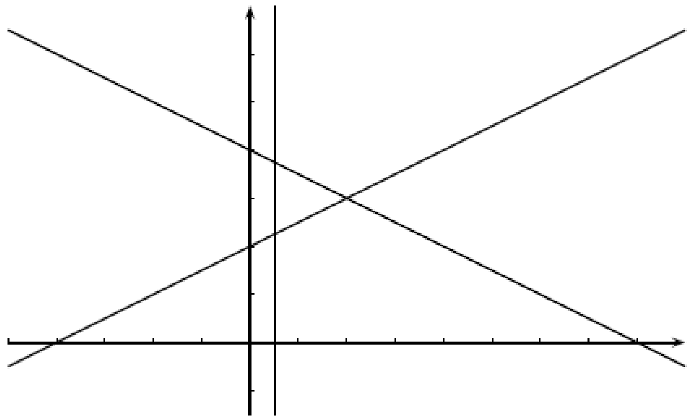
a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga solución.

Actividad 5: *En el siguiente plano se ha representado un sistema de ecuaciones lineales. Indica si el sistema dado es el representado en el plano o no. Justifique ampliamente su respuesta.*

Encuentre la solución al sistema.



a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque*

:

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ *SI_ NO_ Porque:*