

**EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO SOBRE EL ESPECTRO
DE UN ELECTRÓN EN PUNTOS CUÁNTICOS
AUTO-ENSAMBLADOS**

FERNANDO ANDRÉS QUIÑÓNEZ GRANADOS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005**

**EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO SOBRE EL ESPECTRO
DE UN ELECTRÓN EN PUNTOS CUÁNTICOS
AUTO-ENSAMBLADOS**

Trabajo de grado para optar al título de Físico:

FERNANDO ANDRÉS QUIÑÓNEZ GRANADOS

Director:

ILIA DAVIDOVICH MIKHAILOV PH.D

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005**

a Dios,

*a mi querida madre,
Esperanza Granados de Quiñónez,*

*a mi querido padre,
Luis Jesús Quiñónez Cristancho,*

*a mi hermana
Aurelia Patricia Quiñónez Granados,*

a toda mi familia,

*a la memoria de mis abuelos: Adán Quiñónez y Silvia Cristancho, y de mi
bisabuela Josefina Jiménez*

*por apoyarme en todo momento, y ayudarme
a cumplir la primera parte del sueño; ojalá
sea de su altura y os sea de agrado,
este humilde obsequio.*

AGRADECIMIENTOS

Desde mis primeros días como estudiante de física, tuve la fortuna de tener la colaboración de un gran hombre llamado Ilia Davidovich Mikhailov, el cual con sus sabios consejos y su basto conocimiento de la ciencia, fue casi un oráculo a la hora de prestarme su ayuda incondicional (siempre que la necesité). Él, a pesar de conocer mi torpeza accedió a dirigir mi proyecto de grado, para que involuntariamente terminara de convencerme de su grandeza. De todo corazón quiero decirle: muchisisimas gracias profesor Ilia.

Quiero agradecer a quienes ayudaron de una u otra forma a la realización de este trabajo, esto es a:

Dr. Carlos Ramirez

Dr. Harold Paredes

Dr. Javier Betancur

Dr. Francisco García

Msc. Jairo Marín Cadavid

Willian Gutierrez

Mi hermano de tintas Juan Carlos Piña

Framsol “la calidad” Lopez

Cesar Alonso Valenzuela

Freddy Dubeibe

Jorge Armando Rueda

Victor Basto

Grupo de Física Computacional en Materia Condensada FICOMACO

Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación GIRG

Universidad Industrial de Santander UIS

Websense Enterprise.

Tambien quiero dar las gracias a los amigos y familiares que me apoyaron durante los últimos seis años. Gracias a:

Paolo Ospina
Fabio Lora
Carlos Eliecer Estupiñan
Cesar Valenzuela
Jerson Reyna
Javier Ramos
Diego Cogollo
Framsol López
Genny Noguera
Victor Basto
Alvaro Instan
Camilo Guerrero
Carlos Jaimes
Freddy Dubeibe
Javier Marquez
Yesid Jaramillo
Carlos Arturo Acosta
Magdalena Rojas
Adriana Godoy
Martín Godoy
Zayra Pérez
Jaime Granados
Javier Granados
Sixto Granados
Antonio Granados (Hijo)
Miriam Granados
Eulalia Granados
Claudia Granados
Eva Carvajal
Plutarco Marquez
Norma Marquez
Lencyta Marquez;
con cariño a mis abuelos: Antonio Granados y Aurelia Tamayo.

TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	X
SUMMARY	XI
INTRODUCCIÓN	1
1. MODELO DE CONFINAMIENTO	5
1.1. Perfiles de punto cuántico (QD)	5
1.2. Parámetros: masa efectiva \mathbf{m}_0^* , permitividad eléctrica ϵ y potencial \mathbf{V}_0 para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$	9
1.3. Hamiltoniano para un electrón en unidades efectivas	10
2. APROXIMACIÓN ADIABÁTICA	12
3. MÉTODO DE BARRIDO TRIGONOMÉTRICO PARA SISTEMAS CON SIMETRÍA AXIAL	15
4. NIVELES ENERGÉTICOS	21

4.1. Clasificación	22
4.2. Resultados	24
5. EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO	32
6. CONCLUSIONES	44
7. ANEXOS	46
BIBLIOGRAFÍA	62

LISTA DE FIGURAS

1.1. Perfil de un disco cuántico.	6
1.2. Perfil de un anillo cuántico.	7
1.3. Perfil de una pirámide cuántica.	7
1.4. Perfil de una pirámide truncada cuántica.	8
1.5. Perfil de una lente cuántica.	8
4.1. Valores en Ry^* de los tres primeros niveles de energía para un pozo de potencial de altura $40 Ry^*$ y ancho variable z dado en a_0^*	22
4.2. Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en un disco cuántico de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$	25
4.3. Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en un anillo cuántico de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$	26
4.4. Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en una pirámide cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$	26
4.5. Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en una pirámide truncada cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$	27

4.6.	Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en una lente cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$	28
4.7.	Isolíneas de densidad de distribución electrónica de la sección transversal de un disco cuántico de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 2 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$	29
4.8.	Distribución electrónica en una pirámide cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 2 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$	30
4.9.	Distribución electrónica en una lente cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 2 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$	31
5.1.	Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en un disco cuántico. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.	35
5.2.	Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en un anillo cuántico. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.	36
5.3.	Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en una pirámide cuántica. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.	37
5.4.	Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en una pirámide cuántica. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.	38

5.5. Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en una lente cuántica. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.	39
5.6. Comparación de los valores de la energía de los estados 1s, para diferentes formas de punto cuántico auto-ensamblado. .	43

LISTA DE TABLAS

4.1. Valores en Ry^* de los tres primeros niveles de energía para un pozo de potencial de altura $40 Ry^*$ y ancho variable z dado en a_0^*	23
4.2. Energías en Ry^* para los primeros tres estados de los primeros tres valores de n_ρ , correspondientes a cada sistema de punto cuántico auto-ensamblado	25
5.1. Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en un disco cuántico.	40
5.2. Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en un anillo cuántico.	41
5.3. Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en una pirámide cuántica.	41
5.4. Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en una pirámide truncada cuántica. . .	42
5.5. Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en una lente cuántica.	42

TITULO: EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO SOBRE EL ESPECTRO DE UN ELECTRÓN EN PUNTOS CUÁNTICOS AUTO-ENSAMBLADOS*

AUTOR: Fernando Andrés Quiñónez Granados **

PALABRAS CLAVES: Punto Cuántico, Punto Cuántico Auto-Ensamblado, Aproximación Adiabática, Pozo Cuántico.

DESCRIPCIÓN: Se calculó el espectro de energía para un electrón confinado en puntos cuánticos auto-ensamblados de morfologías diferentes, estas son: disco, anillo, pirámide, pirámide truncada y lente. Estos puntos cuánticos se obtienen mediante la técnica de Stranki-Krastanov utilizando dos materiales base, siendo los más usados $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}$. Adicionalmente, se analiza el efecto de un campo magnético externo orientado en dirección perpendicular a las interfaces de los dos materiales.

La ecuación de Schrödinger para los sistemas de un electrón confinado en puntos cuánticos auto-ensamblados fueron resueltas por medio del método de aproximación adiabática, el cuál permite separar el movimiento del electrón en uno en dirección vertical y otro en el plano perpendicular a dicha dirección; la parte de la ecuación que corresponde al movimiento vertical se resolvió de forma analítica, mientras que para resolver la ecuación que describe el movimiento en el plano se utilizó el método numérico basado en el procedimiento del barrido trigonométrico.

Para analizar el efecto Zeeman, se calcularon las energías de diferentes estados en función del campo magnético considerando las diferentes formas geométricas mencionadas de puntos cuánticos auto-ensamblados; por último, los resultados fueron analizados con base a como varían los espectros hallados con cada una de las formas de los puntos cuánticos auto-ensamblados.

* Proyecto de Grado.

** Universidad Industrial de Santander, Facultad de ciencias, escuela de física, Dir: PH.D Ilia Davidovich Mikhailov.

**TITLE: EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON THE ELECTRON'S SPECTRUM
IN SELF ASSEMBLED QUANTUM DOTS***

AUTHOR: Fernando Andrés Quiñónez Granados**

KEY WORDS: Quantum dot, Self-assembled quantum dot, adiabatic approximation, Quantum Well.

ABSTRACT: The energy spectrum of one electron confined in a self-assembled quantum dots with different morphologies, these are: disk, ring, pyramid, truncated pyramid or lens was calculated. These quantum dots are usually fabricated by using the Stranski-Krastanov growth technique. The most important materials used in order to fabricate the quantum dots are the semiconductors $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$. Additionally, an external magnetic field along of axial direction is applied and its effect on the electronic spectrum is analyzed.

The Schrödinger's equation for the systems of one electron confined in self-assembled quantum dots were solved by means of the adiabatic approximation method, which allows to separate the movement of the electron in both vertical it and the perpendicular plane directions; the part of the equation that corresponds to vertical movement was solved in analytical form, whereas for to solve the equation that describes the movement in the plane was used a numerical method based on the trigonometrical sweeping procedure.

In order to analyze the Zeeman effect, the energies of different states were calculated in function of the magnetic field taking in account the different geometric forms of self-assembled quantum dots; finally, the results were analyzed upon the basis of the spectrums' variation found with each one of the shapes of the self-assembled quantum dots.

*Senior thesis project.

**Universidad Industrial de Santander, department of sciences, school of physics, Dir: PH.D Ilia Davidovich Mikhailov.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas los investigadores han empezado a trabajar en Sistemas de Baja Dimensionalidad, conformados por semiconductores compuestos con separaciones entre junturas de orden nanométrico. Los parámetros físicos en junturas cambian bruscamente, y como los espacios entre las junturas son del mismo orden que las longitudes de ondas de De Broglie correspondientes a los portadores de carga, esto ocasiona el efecto de confinamiento cuántico, cambiando esencialmente las propiedades electrónicas y ópticas de los semiconductores. La posibilidad de cambiar las propiedades de los semiconductores en una forma controlada variando la forma geométrica de las junturas y composición de aleaciones abre una gran oportunidad para fabricar nuevos materiales para dispositivos micro- y opto-electrónicos de tamaños nanométricos y con mayor rendimiento.

Sistemas de baja dimensionalidad conocidos como los pozos cuánticos (QWs), Hilos Cuánticos (QWWs), y Puntos Cuánticos (QDs) con dimensionalidad dos, uno y cero respectivamente están formados por dos tipos de compuestos A y B. Los electrones y huecos son confinados en la interfase de juntura ABA, el *emparedado de semiconductores*. Si el emparedado es en una sola dirección, se habla entonces de un QW, si existe emparedado en dos direcciones ortogonales, se habla entonces de un QWW y si el emparedado se forma en tres direcciones diferentes, se dice entonces que la estructura semiconductor es un QD. Esta última por su menor tamaño es la estructura semiconductor más importante de todas, ya que dentro de ella es posible confinar una cantidad arbitraria de impurezas donadoras, aceptadoras, electrones y huecos de tal forma que podemos obtener unos sistemas con propiedades muy similares a las que poseen los sistemas atómicos. Extendiendo de uno en uno ascendentemente el número de los electrones confinados en un QD, permitimos al semiconductor ser un análogo de átomos como el de Hidrógeno, Helio, Litio, etc. Incluso podríamos decir que nosotros los seres humanos dedicados al estudio de la ciencia física estamos creando la primera versión de *átomos hechos por el hombre!*. Se puede considerar que los puntos cuánticos son

átomos artificiales en los cuales el campo de Coulomb de un núcleo ha sido reemplazado por un potencial de confinamiento artificial. El otro grupo de los sistemas de baja dimensionalidad es el de las Superredes. Una superred es una estructura periódica compuesta por capas de dos semiconductores diferentes, o lo que es lo mismo es un súper-emparedado de semiconductor donde el semiconductor de tipo A se puede decir que es el “Pan” y el semiconductor de tipo B se puede decir que es el “Jamón”, de manera que su estructura sería así: ...ABABABABA..., es importante destacar la relevancia que tiene el efecto de tunelamiento entre diferentes QWs sobre las propiedades individuales de cada QW.

Entre las diferentes técnicas experimentales de fabricación de los QDs encontramos los siguientes sistemas para la deposición de películas delgadas: pulverización catódica (sputtering), epitaxia por haces moleculares (MBE), deposición de vapor químico metal-orgánico (MCVD), etc. [1, 4].

El caso de crecimiento sobre moldes de sustrato, manejado por esfuerzos sobre un sustrato plano se conoce como la técnica de crecimiento 3D Stranski-Krastanov [5] que consiste en aplicar una capa de InAs de ancho de 1 molécula (capa húmeda) sobre un sustrato de GaAs plano, luego se aplica otra capa de este mismo compuesto, si la capa es de ancho igual o superior a la distancia ocupada por dos moléculas de InAs, esto conlleva a la formación de islas de este compuesto; luego se aplica una capa de GaAs de ancho necesario para formar puntos cuánticos (en este caso auto-ensamblados). Se ha encontrado que los puntos cuánticos auto-ensamblados (SAQDs) presentan formas muy parecidas a las formas geométricas de discos, anillos, pirámides, lentes, toros y volcanes [6, 8]; además de estas formas, ellos también se han encontrado con formas irregulares muy parecidas a las jorobas de un camello.

Debido a la simetría axial que tienen los QDs de formas regulares los potenciales de confinamiento en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) son independientes de la coordenada φ . Entre los modelos utilizados para analizar el potencial de confinamiento en QDs se encuentran el Rectangular [10] que sirve para analizar Discos, el Parabólico [11] (que por lo general se toma como el término del oscilador armónico) sirve para analizar Anillos, y el de Borde Suave (Soft Edge) el cuál es una mejora del Rectangular [12]. Para calcular el espectro electrónico de partículas confinadas dentro de los potenciales de confinamiento mencionados anteriormente se utilizaron: el método Variacional [13], el método de Diagonalización [11], el método de Monte-Carlo [14] y el método de Barrido Trigonométrico [15], el cuál es utilizado en este trabajo. Otra herramienta usada en la resolución del problema de los SAQDs es el de hacer uso de la aproximación adiabática (AA) propuesta

por Peters y Zhu [16, 17] la cuál hace posible expresar la función de onda del electrón como el producto de dos funciones de onda, una que describe el movimiento rápido en la dirección vertical y la otra el movimiento lento en planos transversales. Este procedimiento nos permite desacoplar la ecuación inicial en dos ecuaciones más fáciles de resolver. Recientemente se ha venido utilizando esta metodología en los trabajos del grupo FICOMACO para analizar QDs de formas de pirámide, lente, anillo y disco [18].

Existen varios artículos sobre el cálculo directo de un electrón en QDs de diferentes formas. En [19] se resolvió la ecuación de Schrödinger para la región semi-elíptica y se trató de encontrar la solución al problema de Dirichlet considerando el modelo de QDs con una barrera infinita. En [20] se plantea el problema de una forma más real considerando una barrera finita y se resuelve numéricamente para QDs de formas cilíndrica, semiesférica, semi-elíptica y conoidal utilizando el hecho de que los potenciales presentan una simetría axial y reducen el problema a una ecuación de onda bidimensional y escriben el problema de valores propios correspondiente para una matriz de banda. Es importante destacar el hecho de que en las dos formas anteriores de atacar el problema, se han presentado serios inconvenientes, por ejemplo en [19] el modelo de confinamiento no es adecuado para QDs reales; en [20] se requiere el uso de una computación muy pesada que en ocasiones no permite mostrar las características fundamentales que conducen a los resultados obtenidos. Luego se hace imprescindible elaborar un método sencillo y confiable que sea aplicable a QDs de diferentes formas, que nos permita establecer la relación entre las propiedades físicas y las formas de QDs.

La partición de las líneas espectrales correspondientes a átomos en campos magnéticos externos, fue observado por primera vez en 1896 por Pieter Zeeman. Los campos magnéticos producidos por laboratorios son tan débiles, que el término cuadrático en \mathbf{B} puede ser ignorado, y debido a esto *el término de la interacción magnética es más pequeño, o comparable con la interacción espín-órbita*. En un sistema atómico con un campo magnético uniforme B dirigido paralelamente al eje z el Hamiltoniano es:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r} + \frac{eB}{2m_0}(L_z + 2S_z) + \xi(r)\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} \quad (1)$$

con

$$\xi(r) = \frac{1}{2m_0^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{2m_0^2c^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r^3} \quad (2)$$

en donde encontramos los tres diferentes casos en que se puede clasificar el sistema atómico según las componentes del Hamiltoniano; estos son:

- (i) El efecto Zeeman de campo fuerte (normal), en el cuál el término magnético es mucho mayor que el término de la interacción espín-órbita; luego se ignora esta última.
- (ii) El efecto Paschen-Back en donde tenemos un campo fuerte, pero esta vez el término de la interacción espín-órbita es significativo, y podemos tratarlo como una perturbación.
- (iii) El efecto Zeeman de campo débil (Anómalo) en donde el término de la interacción espín-órbita es mucho mayor que el término magnético, el cuál debe ser tratado como una perturbación.

En este trabajo se realiza el análisis pertinente al primer caso incluyendo el término cuadrático del campo magnético, y sin tomar el término de desacoplamiento debido al espín, para sistemas nanoscópicos de SAQDs.

En cuanto a los trabajos sobre la interacción espín-órbita en QDs, realmente es muy poco lo que se ha hecho. En el trabajo realizado en [21] se calcula numéricamente el espectro electrónico teniendo en cuenta la interacción espín-órbita de un QD en una forma descrita a través de las funciones Gaussianas que permiten variar la forma geométrica desde un disco hasta un anillo. Según los autores, el efecto de interacción espín-órbita da un aporte significativo en la energía de los estados electrónicos en los QDs, pero al parecer los autores superestimaron este efecto. Este es el motivo por el cuál se puede omitir el término de la interacción espín-órbita para un primer acercamiento al estudio de los efectos del campo magnético en dichos sistemas, aunque es perentorio decir lo importante que sería analizar los resultados que pudieran tener los efectos de la interacción espín-órbita en QDs de diferentes formas, sin mencionar las posibles aplicaciones tecnológicas que implicaría una clara comprensión y utilización de estos análisis, por lo que nos respecta, el problema sigue abierto. En este trabajo se utilizó el modelo de aproximación adiabática modificado por el grupo de investigación de física computacional en materia condensada FICOMACO de la Universidad Industrial de Santander para calcular los valores de energía de los estados base y excitados en presencia de campo magnético externo y analizar el efecto de Zeeman sobre estos estados.

1

MODELO DE CONFINAMIENTO

1.1. Perfiles de punto cuántico (QD)

Existen diferentes formas regulares de SAQDs, entre ellas tenemos las formas de, disco, anillo, pirámide, pirámide truncada, lente, volcán y toro; y de las formas irregulares conocidas se tiene la forma de joroba de camello, en [6, 8] se pueden encontrar mejores detalles sobre la verdadera forma de SAQDs. Las formas regulares de los SAQDs descritos arriba se pueden describir mediante un modelo bidimensional, el cual será su perfil de revolución, para ello se utilizan coordenadas cilíndricas $z(\rho, \varphi) = d(\rho)$, dado que estos sistemas de SAQDs son axialmente simétricos. En este trabajo se analizó solamente SAQDs con formas de disco, anillo, lente, pirámide, pirámide truncada y lente.

Los perfiles de revolución de las diferentes formas geométricas de los SAQDs son descritas por:

para disco

$$d(\rho) = \begin{cases} d_b + d_0, & \text{para } \rho < R_{ext} \\ d_b, & \text{para } \rho \geq R_{ext} \end{cases} \quad (1.1)$$

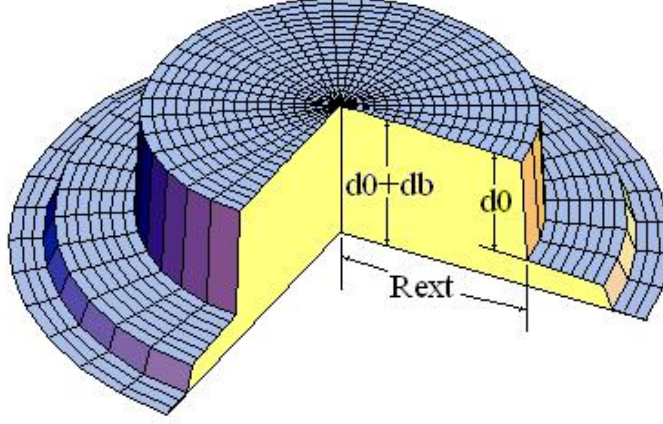


Figura 1.1: Perfil de un disco cuántico.

para anillo

$$d(\rho) = \begin{cases} d_b + d_0, & \text{para } R_{int} < \rho < R_{ext} \\ d_b, & \text{para } \rho \leq R_{int} \wedge \rho \geq R_{ext} \end{cases} \quad (1.2)$$

para pirámide

$$d(\rho) = \begin{cases} d_b + d_0(1 - \rho/R_{ext}), & \text{para } \rho < R_{ext} \\ d_b, & \text{para } \rho \geq R_{ext} \end{cases} \quad (1.3)$$

para pirámide truncada

$$d(\rho) = \begin{cases} d_b - d_0(\rho - R_{ext})/(R_{ext} - R_{int}), & \text{para } R_{int} < \rho < R_{ext} \\ d_b, & \text{para } \rho \geq R_{ext} \end{cases} \quad (1.4)$$

para lente

$$d(\rho) = \begin{cases} d_b + d_0\sqrt{1 - \rho^2/R_{ext}^2}, & \text{para } \rho < R_{ext} \\ d_b, & \text{para } \rho \geq R_{ext} \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $d_b = 0.1d_0$ es el espesor de la capa húmeda en la que se encuentra el SAQD, $d_0 = 4$ nm es la distancia medida desde la capa húmeda hasta el tope

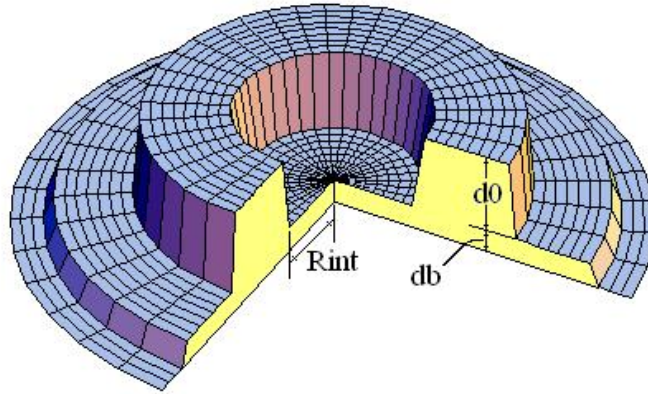


Figura 1.2: Perfil de un anillo cuántico.

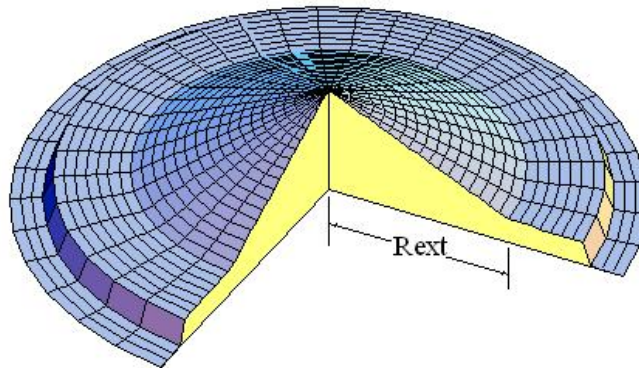


Figura 1.3: Perfil de una pirámide cuántica.

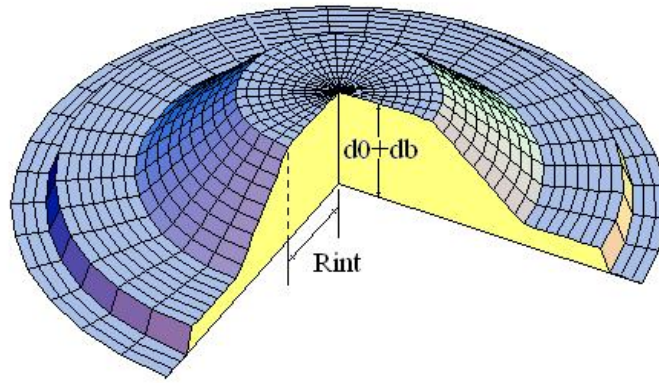


Figura 1.4: Perfil de una pirámide truncada cuántica.

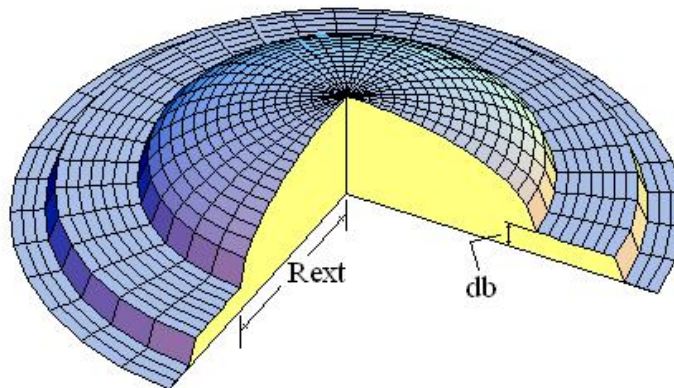


Figura 1.5: Perfil de una lente cuántica.

del SAQD, $R_{ext} = 40$ nm es el máximo valor de ρ para el cual tenemos un potencial $V(\rho, z) = 0$ y $R_{int} = 20$ nm usado en anillos y pirámides truncadas es el mínimo valor de ρ para el cual tenemos un potencial $V(\rho, z) = 0$.

1.2. Parámetros: masa efectiva m_0^* , permitividad eléctrica ϵ y potencial V_0 para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$

En este trabajo se ha utilizado el mismo material que se utilizó en [22]. En cuanto al tratamiento teórico de los QDs se ve claramente en la literatura que se ha utilizado y se sigue utilizando el modelo de aproximación de masa efectiva que primeramente utilizó Bastard en [9] para analizar una donadora neutra D^0 . La aproximación consiste en reemplazar el potencial cristal del semiconductor, por un potencial constante V acorde al sistema cuántico que se esté analizando, sea disco, anillo, pirámide, pirámide truncada o lente; en todos los casos $V = 0$ dentro del SAQD, es decir, en la banda de conducción del material que hace de “Jamón” en el “emparedado de semiconductor”, y $V = V_0$ por fuera de él o en las bandas de conducción de los materiales que juegan el rol de “Pan” en el “emparedado semiconductor”. Luego se sustituye la masa del electrón libre por una masa efectiva m_0^* que permita bajarle el dramatismo a la no utilización del potencial cristal. El potencial $V(\rho, z)$ de cada SAQDs dependerá naturalmente de la forma de su perfil $d(\rho)$, como:

$$V(\rho, z) = V_0[\vartheta(-z) + \vartheta(z - d(\rho))] \quad (1.6)$$

Donde $\vartheta(x)$ es la función paso de Heaviside.

Este V_0 resulta ser la diferencia entre los toques de las bandas de conducción de ambos materiales, o lo que es lo mismo, es la mitad de la diferencia de las energías de brecha de los dos materiales. Los ordenes de m_0^* varían entre 10^{-1} y 10^{-2} masas del electrón. Naturalmente la permitividad eléctrica ϵ del material se debe tomar diferente a la permitividad eléctrica en el vacío en un factor adimensional ϵ_r llamado permitividad eléctrica relativa, que por lo general varía entre 10 y 20 para semiconductores. Para este material particular se tiene que $m_0^* = 0.0758m_0$ y $\epsilon_r = 12.69$.

En este trabajo se usaron dos aproximaciones, la primera fue tomar la masa efectiva del electrón m_0^* sin variación alguna a lo largo de toda la heteroestructura, ya que esta varía entre uno y otro semiconductor; y la segunda fue dejar constante el valor de la permitividad eléctrica a lo largo de toda la heteroestructura, ya que obviamente ϵ varía entre materiales diferentes.

1.3. Hamiltoniano para un electrón en unidades efectivas

En la mayoría de las ramas de la Física se acostumbra a trabajar con unidades efectivas acordes a los ordenes de magnitud típicos con los que ellas tratan, la física de los semiconductores no es la excepción; para lograr este cometido tomaremos como base el Hamiltoniano de un electrón afectado por un campo Coulombiano debido a un protón (átomo de Hidrógeno) y lo cambiaremos a uno adimensional que nos facilite la manipulación de nuestros cálculos, además de proporcionarnos las unidades efectivas que estamos buscando. El problema de valores propios es:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m_0^*}\nabla^2\psi - \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)\epsilon_r r}\psi = E\psi, \quad (1.7)$$

expresando las variables r y E como producto de su valor numérico y sus unidades

$$r = a_0^* \tilde{r} \quad E = Ry^* \tilde{E} \quad H = Ry^* \tilde{H} \quad (1.8)$$

donde a_0^* contiene las unidades de distancia, y Ry^* contiene las unidades de energía; reemplazando 1.8 en 1.7 y obligando la igualdad:

$$\frac{\hbar^2}{2m_0^* a_0^{*2}} = \frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0)\epsilon_r a_0^*} = Ry^* \quad (1.9)$$

obtenemos el Hamiltoniano adimensional actuando sobre ψ , que escribiremos a continuación con sus variables atildadas, ya que sabemos de antemano que

sus variables son adimensionales

$$-\nabla^2\psi - \frac{2}{r}\psi = E\psi. \quad (1.10)$$

De 1.9 se ve que el radio de Bohr efectivo es:

$$a_0^* = \frac{\hbar^2(4\pi\epsilon_0)\epsilon_r}{m_0^*e^2} = \epsilon_r \left(\frac{m_0}{m_0^*} \right) a_0 \quad (1.11)$$

y el Rydberg efectivo es:

$$Ry^* = \frac{1}{\epsilon_r^2} \left(\frac{m_0^*}{m_0} \right) \left(\frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0)a_0} \right) = \frac{1}{\epsilon_r^2} \left(\frac{m_0^*}{m_0} \right) Ry. \quad (1.12)$$

Numéricamente $Ry^* = 6.4 \text{ meV}$ y $a_0^* = 8.86 \text{ nm}$ para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

2

APROXIMACIÓN ADIABÁTICA

Procedimiento

Aprovechando la simetría axial de los potenciales debidos a los SAQDs, se utilizan coordenadas cilíndricas para el modelamiento del problema, así se obtiene la ecuación de Schrödinger en unidades adimensionales

$$-\nabla^2\psi(\rho, \varphi, z) + V(\rho, z)\psi(\rho, \varphi, z) = E\psi(\rho, \varphi, z) \quad (2.1)$$

con $V(\rho, z)$ dado por la Ec. 1.6; de manera explícita la Ec. 2.1 es:

$$-\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi(\rho, \varphi, z) + V(\rho, z)\psi(\rho, \varphi, z) = E\psi(\rho, \varphi, z). \quad (2.2)$$

Si se denotan los operadores:

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

$$\Delta_{\rho\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.4)$$

junto con $z = d_0 \tilde{z}$, $\rho = R_{ext} \tilde{\rho}$ y $\varphi = \tilde{\varphi}$; y teniendo en cuenta que $\tilde{\psi} = \psi(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi}, \tilde{z})$, $\tilde{V} = V(\tilde{\rho}, \tilde{z})$ se obtiene el escalamiento de las variables que describen el tamaño de los SAQDs. Ahora, reemplazando las variables escaladas, 2.3 y 2.4 en 2.2 queda

$$-\frac{1}{d_0^2} \Delta_{\tilde{z}} \tilde{\psi} - \frac{1}{R_{ext}^2} \Delta_{\tilde{\rho}\tilde{\varphi}} \tilde{\psi} + \tilde{V} \tilde{\psi} = E \tilde{\psi} \quad (2.5)$$

Y dado que no es de importancia con que variables se trabaja, se cambia \tilde{z} por z , y $\tilde{\rho}$ por ρ , obteniendo así una Ec. Debidamente escalada

$$-\Delta_z \psi - p_{AA} \Delta_{\rho\varphi} \psi + V(\rho, \varphi) \psi = d_0^2 E \psi \quad (2.6)$$

Donde $p_{AA} = (d_0/R_{ext})^2$ es el parámetro de la AA, el cual si es cercano a cero, significa que la AA utilizada es muy buena; dicho sea de paso, para estos sistemas $p_{AA} \approx 0.01$; lo cual nos permite separar la función de onda en:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \psi_R(\rho, z) \psi_L(\rho, \varphi) \quad (2.7)$$

Donde $\psi_R(\rho, z)$ describe el movimiento rápido del electrón en el plano ρz , y $\psi_L(\rho, \varphi)$ describe el movimiento lento del electrón en planos paralelos $d = z_0$.

Dado que $\Delta_{\rho\varphi} \psi_R(\rho, z) \approx 0$. Reemplazando 2.7 en 2.1, se puede obtener:

$$\begin{aligned} -\Delta_z [\psi_R(\rho, z) \psi_L(\rho, \varphi)] - \Delta_{\rho\varphi} [\psi_R(\rho, z) \psi_L(\rho, \varphi)] + \\ V(\rho, \varphi) \psi_R(\rho, z) \psi_L(\rho, \varphi) = E \psi_R(\rho, z) \psi_L(\rho, \varphi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

simplificando queda:

$$-\frac{\Delta_z \psi_R(\rho, z)}{\psi_R(\rho, z)} - \frac{\Delta_{\rho\varphi} \psi_L(\rho, \varphi)}{\psi_L(\rho, \varphi)} + V(\rho, z) = E, \quad (2.9)$$

de aquí se puede obtener las dos Ec. correspondientes a los dos tipos de movimiento del electrón

$$-\frac{\Delta_z \psi_R(\rho, z)}{\psi_R(\rho, z)} + V(\rho, z) = E_z(\rho) \quad (2.10)$$

$$-\frac{\Delta_{\rho\varphi} \psi_L(\rho, \varphi)}{\psi_L(\rho, \varphi)} + E_z(\rho) = E \quad (2.11)$$

3

MÉTODO DE BARRIDO TRIGONOMÉTRICO PARA SISTEMAS CON SIMETRÍA AXIAL

El método de Barrido Trigonométrico¹, es un método numérico que permite resolver la Ec. de Schrödinger unidimensional, analizar los diagramas de Poincaré en coordenadas polares para obtener la Ec. trascendente para los niveles de energía de sistemas en los cuales esta no se pueda hallar por medio de los métodos convencionales. En este trabajo usaremos esta técnica para resolver para la energía E la Ec. 2.11 correspondiente al movimiento lento del electrón. Otra forma de escribir 2.11 es:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \psi_L(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_L(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + E_z(\rho) \psi_L(\rho, \varphi) = E \psi_L(\rho, \varphi) \quad (3.1)$$

si se realiza la separación de variables:

$$\psi_L(\rho, \varphi) = e^{im\varphi} P_m(\rho) \quad (3.2)$$

¹Una completa descripción de este método se puede encontrar en [15]

y denotando $P'_m(\rho) = dP_m(\rho)/d\rho$ y $P''_m(\rho) = d^2P_m(\rho)/d\rho^2$ se obtiene:

$$P''_m(\rho) + \frac{1}{\rho}P'_m(\rho) + [E - E_z(\rho)]P_m(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2}P_m(\rho) = 0 \quad (3.3)$$

y dado que:

$$E_z(\rho) = \begin{cases} V(\rho), & \text{para } 0 < \rho < R_{ext} \\ V_0, & \text{para } \rho \geq R_{ext} \end{cases} \quad (3.4)$$

como el máximo valor de $V(\rho)$ es V_0 , de 3.4 se puede ver claramente que existen dos regiones en donde cambian las propiedades físicas del material, esto es, las propiedades de la región II confinan al electrón dentro de la región I puesto que sus propiedades así lo permiten.

Región II $E_z(\rho) = V_0$

la Ec. 3.3 se vuelve:

$$P''_m(\rho) + \frac{1}{\rho}P'_m(\rho) - \left[\frac{m^2}{\rho^2} + \varkappa^2 \right] P_m(\rho) = 0 \quad (3.5)$$

con

$$\varkappa = \sqrt{V_0 - E}. \quad (3.6)$$

Si se hace el cambio de variable: $x = \varkappa\rho$ obtenemos:

$$\frac{d^2P_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dP_m}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) P_m = 0 \quad (3.7)$$

3.7 es conocida en la literatura matemática como la Ecuación Modificada de Bessel, con solución $P_m(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x)$, y como $I_m(x \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$

significa que para poder tener una solución convergente se debe cumplir que $c_1 = 0$, luego

$$P_m(\rho) = cK_m(\varkappa\rho) \quad (3.8)$$

derivando 3.8 con respecto a ρ se ve que:

$$P'_m(\rho) = c\varkappa K'_m(\varkappa\rho), \quad (3.9)$$

tomando el cociente de 3.9 y 3.8, se obtiene la Ec. trascendente:

$$\frac{P'_m(\rho)}{P_m(\rho)} = \varkappa \frac{K'_m(\varkappa\rho)}{K_m(\varkappa\rho)}. \quad (3.10)$$

Las formulas utilizadas por nuestro software para calcular los niveles energéticos de un electrón en un QD en la región II son: 3.5, 3.6 y 3.10. Y para hallar las funciones de onda en esta región se usó: 3.2, 3.6 y 3.8

Región I $E_z(\rho) = V(\rho)$

la Ec. 3.3 se vuelve:

$$P''_m(\rho) + \frac{1}{\rho}P'_m(\rho) + \left[E - V(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2} \right] P_m(\rho) = 0 \quad (3.11)$$

escribiendo $P_m(\rho)$ como:

$$P_m(\rho) = \rho^m u_m(\rho) \quad (3.12)$$

se encuentra la útil relación:

$$\frac{P'_m(\rho)}{P_m(\rho)} = \frac{m}{\rho} + \frac{u'_m(\rho)}{u_m(\rho)} \quad (3.13)$$

reemplazando 3.10 en 3.13 para $\rho = R_{ext}$ se obtiene:

$$\frac{u'_m(R_{ext})}{u_m(R_{ext})} = \varkappa \frac{K'_m(\varkappa R_{ext})}{K_m(\varkappa R_{ext})} - \frac{m}{R_{ext}} \quad (3.14)$$

y sustituyendo 3.12 en 3.11 se obtiene:

$$u''_m(\rho) + \left[\frac{2m+1}{\rho} \right] u'_m(\rho) + \alpha(\rho) u_m(\rho) = 0 \quad (3.15)$$

con

$$\alpha(\rho) = E - V(\rho) \quad (3.16)$$

y $\alpha'(0) = 0$.

Ahora se analiza el comportamiento de $u_m(\rho)$ para valores cercanos a cero; considérense dos subregiones A y B dentro de la región I, la región A corresponde a los valores de ρ para los cuales $0 \leq \rho < \varepsilon$, y la región B comprende los valores de ρ para los cuales $\varepsilon < \rho < R_{ext}$, donde $\varepsilon \approx 0.001$. Realizando la expansión de Maclaurin (en la subregión A) para la función $u_m(\rho)$

$$u_m(\rho) = u_m(0) + \frac{u'_m(0)}{1!} \rho + \frac{u''_m(0)}{2!} \rho^2 + \dots \quad (3.17)$$

si se representan las variables de Poincaré $u_m(\rho)$, $u'_m(\rho)$ en términos de coordenadas polares

$$\left. \begin{aligned} u_m(\rho) &= A(\rho) \cos(\theta(\rho)) \\ u'_m(\rho) &= A(\rho) \sin(\theta(\rho)) \\ \tan(\theta(\rho)) &= \frac{u'_m(\rho)}{u_m(\rho)} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

de 3.18 se puede ver claramente que para 3.17 el término en ρ desaparece, y si además de esto, se desprecian los términos de la serie para los cuales ρ

sea de orden mayor que dos; queda:

$$u_m(\rho) \approx c_1 + c_2\rho^2 \approx c(1 + \beta\rho^2) \approx 1 + \beta\rho^2 \quad (3.19)$$

reemplazando 3.19 en 3.15 para $\rho = 0$ se obtiene:

$$2\beta + 2\beta(2m + 1) + \alpha(0) = 0 \quad (3.20)$$

despejando β de 3.20 y colocándola en 3.19 se obtiene para ρ en la región A

$$\left. \begin{aligned} u_m(\rho) &= 1 - \frac{\alpha(0)}{4(m+1)}\rho^2 \\ u'_m(\rho) &= -\frac{\alpha(0)}{2(m+1)}\rho \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

haciendo uso de la aproximación para $\theta(\rho)$ pequeña $u'_m(\rho)/u_m(\rho) \approx u'_m(\rho)$ se obtiene la Ec. trascendente para $\rho = \varepsilon$

$$\frac{u'_m(\varepsilon)}{u_m(\varepsilon)} = -\frac{\alpha(0)}{2(m+1)}\varepsilon \quad (3.22)$$

luego las formulas utilizadas por nuestro software para calcular los niveles energéticos de un electrón en un QD en la región I redefinida ($\varepsilon < \rho < R_{ext}$) son: 3.14, 3.22, 3.6, 3.16 y 3.15. Ahora corresponde encontrar el valor de $\theta(\rho)$ y $A(\rho)$ para poder hallar las funciones de onda correspondientes a esta región. Como:

$$\frac{u''_m}{u_m} = \left(\frac{u'_m}{u_m} \right)' + \left(\frac{u'_m}{u_m} \right)^2 \quad (3.23)$$

reemplazando 3.23 y 3.18 en 3.15 se obtiene:

$$\theta(\rho)' = - \left[\sin^2(\theta(\rho)) + \frac{2m+1}{\rho} \sin(\theta(\rho)) \cos(\theta(\rho)) + \alpha(\rho) \cos^2(\theta(\rho)) \right] \quad (3.24)$$

para ρ pequeño θ es pequeño, y $\theta \approx \sin(\theta) \approx u'_m(\rho) \approx u'_m(\rho)/u_m(\rho) \approx \tan(\theta)$ luego el problema de Cauchy de 3.24 es:

$$\theta(\varepsilon) = -\frac{\alpha(0)}{2(m+1)}\varepsilon \quad \theta(R_{ext}) = \arctan \left[\varkappa \frac{K'_m(\varkappa R_{ext})}{K_m(\varkappa R_{ext})} - \frac{m}{R_{ext}} \right] - n_\rho \pi \quad (3.25)$$

Las Ec. 3.24 y 3.25 se solucionan en nuestro software por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden. En este punto solo queda hallar $A(\rho)$, esto se logra realizando la derivación indicada en la Ec. 3.18

$$\frac{d}{d\rho} [A(\rho) \cos(\theta(\rho))] = A(\rho) \sin(\theta(\rho)) \quad (3.26)$$

desarrollando 3.26 y luego de un poco de calculo se obtiene:

$$A(\rho) = A \exp \left[\int \left[(1 - \alpha(\rho)) \sin(\theta(\rho)) \cos(\theta(\rho)) - \frac{2m+1}{\rho} \sin^2(\theta(\rho)) \right] d\rho \right] \quad (3.27)$$

ya con 3.27, 3.24, 3.25, 3.15 y 3.12 se pueden obtener las funciones de onda para la región I modificada.

El software mencionado en todo este capítulo es el correspondiente al anexo 7.2

4

NIVELES ENERGÉTICOS

Los niveles energéticos para los SAQDs son encontrados al resolver numéricamente las ecuaciones 2.10 y 2.11 por medio de los programas anexos 7.1 y 7.2, respectivamente. En 7.1 se hallan las raíces de k en las ecuaciones trascendentes para el caso de funciones pares

$$\tan\left(k\frac{z(\rho_i)}{2}\right) = \frac{\sqrt{V_0^2 - k^2}}{k} \quad (4.1)$$

y para el caso de funciones impares

$$\tan\left(k\frac{z(\rho_i)}{2}\right) = -\frac{k}{\sqrt{V_0^2 - k^2}} \quad (4.2)$$

del problema del pozo de potencial con ancho $z(\rho_i)$ y altura V_0 , con i corriendo desde uno hasta el número de nodos de la malla; luego interpolamos los valores de

$$E_0(\rho_i) = \begin{cases} k^2, & \text{para } \rho_i > 0 \quad \cup \quad \rho_i < R_{ext}, \text{ por dentro del SAQD} \\ V_0, & \text{para } \rho_i = 0 \quad \cup \quad \rho_i \geq R_{ext}, \text{ por fuera del SAQD} \end{cases} \quad (4.3)$$

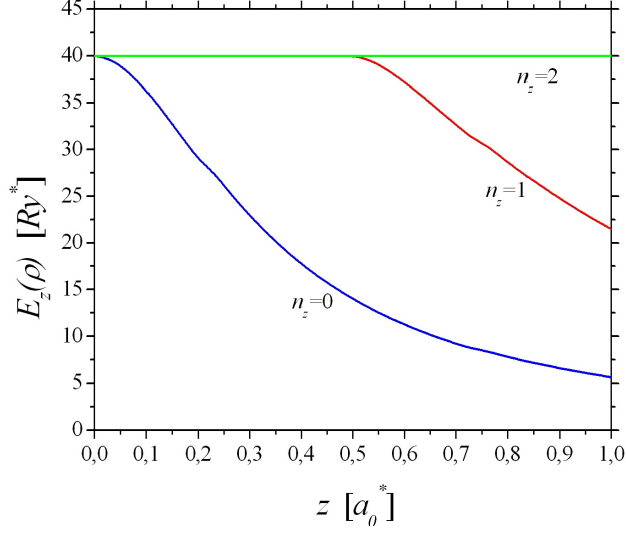


Figura 4.1: Valores en Ry^* de los tres primeros niveles de energía para un pozo de potencial de altura $40 Ry^*$ y ancho variable z dado en a_0^* .

para cada valor obtenido de k ; y así poder obtener las funciones $E_z(\rho)$ ¹, cuyo total es igual a la suma del número de raíces pares e impares.

El valor de la energía E se haya reemplazando cada una de las funciones $E_z(\rho)$ en la Ec. 2.11 y resolviendo mediante las técnicas descritas en el capítulo anterior.

4.1. Clasificación

En cuanto a la clasificación de los niveles de energía, tenemos que para las dimensiones típicas de los SAQDs, y para el radio de Bohr efectivo de nuestra aleación, encontramos según 7.1 que para todos los perfiles, con z variando entre 0 y un radio de Bohr efectivo, hay un nivel energético de $E_z(\rho)$; dado que para la máxima altura $d_b + d_0 = 4.4 \text{ nm} = 0.4966 \cdot a_0^*$, tal como se puede observar en la tabla 4.1 y visualizar en la figura 4.1, donde también se muestra, un segundo nivel de energía a partir de $z = 0.51 \cdot a_0^*$, y un tercer nivel de energía el cual comienza justo en $z = 1 \cdot a_0^*$.

¹En el anexo 7.1, se explica detalladamente el procedimiento por medio de comentarios del programa.

TABE.DAT							
z	$n_z = 0$	$n_z = 1$	$n_z = 2$	z	$n_z = 0$	$n_z = 1$	$n_z = 2$
0.00	40.0000	40.0000	40.0000	0.51	13.7082	39.9272	40.0000
0.02	39.8181	40.0000	40.0000	0.53	13.1067	39.5997	40.0000
0.04	39.3177	40.0000	40.0000	0.55	12.5414	39.0735	40.0000
0.06	38.5295	40.0000	40.0000	0.57	12.0098	38.4037	40.0000
0.08	37.4986	40.0000	40.0000	0.59	11.5095	37.6322	40.0000
0.10	36.2775	40.0000	40.0000	0.61	11.0384	36.7908	40.0000
0.12	34.9198	40.0000	40.0000	0.63	10.5943	35.9040	40.0000
0.14	33.4754	40.0000	40.0000	0.65	10.1754	34.9902	40.0000
0.16	31.9869	40.0000	40.0000	0.67	9.7799	34.0635	40.0000
0.18	30.4894	40.0000	40.0000	0.69	9.4062	33.1347	40.0000
0.20	29.0098	40.0000	40.0000	0.71	9.0529	32.2118	40.0000
0.23	27.5676	40.0000	40.0000	0.73	8.7184	31.3010	40.0000
0.25	26.1766	40.0000	40.0000	0.76	8.4017	30.4066	40.0000
0.27	24.8455	40.0000	40.0000	0.78	8.1014	29.5320	40.0000
0.29	23.5794	40.0000	40.0000	0.80	7.8166	28.6795	40.0000
0.31	22.3805	40.0000	40.0000	0.82	7.5462	27.8505	40.0000
0.33	21.2491	40.0000	40.0000	0.84	7.2892	27.0461	40.0000
0.35	20.1838	40.0000	40.0000	0.86	7.0449	26.2668	40.0000
0.37	19.1826	40.0000	40.0000	0.88	6.8125	25.5127	40.0000
0.39	18.2427	40.0000	40.0000	0.90	6.5911	24.7839	40.0000
0.41	17.3609	40.0000	40.0000	0.92	6.3802	24.0799	40.0000
0.43	16.5339	40.0000	40.0000	0.94	6.1791	23.4005	40.0000
0.45	15.7584	40.0000	40.0000	0.96	5.9872	22.7450	40.0000
0.47	15.0311	40.0000	40.0000	0.98	5.8039	22.1128	40.0000
0.49	14.3487	40.0000	40.0000	1.00	5.6289	21.5032	39.9839

Tabla 4.1: Valores en Ry^* de los tres primeros niveles de energí a para un pozo de potencial de altura $40 Ry^*$ y ancho variable z dado en a_0^* .

Para los valores propiamente dichos de la energía E encontramos que esta se halla representada por tres números cuánticos, el axial n_z , el radial bidimensional n_ρ , los cuales son mal comportados, y el número cuántico orbital magnético m , el cual es bien comportado. Teniendo en cuenta que para nuestro caso solo hay un nivel $E_z(\rho)$, n_z sólo puede tomar el valor de 0; además de esto, el número cuánticos radial bidimensional puede tomar valores desde cero hasta ∞ , y el número cuántico orbital magnético puede tomar valores de $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty$; luego para un valor dado del número cuántico n_z obtenemos estados: 1s si $n_\rho = m = 0$, 1p si $n_\rho = 0$ y $m = \pm 1$, 2s si $n_\rho = 1$ y $m = 0$, y así sucesivamente para todos los valores de m y n_ρ . A continuación mostramos la nomenclatura de 16 estados que corresponden a valores de m , y n_ρ , desde cero hasta tres.

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$	$m = \pm 3$
$n_\rho = 0$	1s	1p	1d	1f
$n_\rho = 1$	2s	2p	2d	2f
$n_\rho = 2$	3s	3p	3d	3f
$n_\rho = 3$	4s	4p	4d	4f

4.2. Resultados

Los resultados de nuestro software después de solucionar las Ec. 2.10 y 2.11, para cada sistema de SAQD, son mostrados a continuación mediante la tabla 4.2 y las figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6.

Como se puede apreciar en la figura 4.2, los niveles energéticos para el disco cuántico son bastante bajos y además se encuentran muy cerca unos de otros; también se puede apreciar que no ocurre solapamiento de los seis niveles mostrados.

En la figura 4.3 se puede observar la formación de dos bandas de niveles de energía en el anillo cuántico, cada una corresponde a un mismo valor de n_ρ ; también se observa que los valores de las energías son superiores que en el caso del disco cuántico.

La figura 4.4 presenta un solapamiento de los niveles de energía para la pirámide cuántica, además se puede apreciar que los valores de los niveles con mayores que los correspondientes al anillo cuántico.

ESTADO	DISCO	ANILLO	PIRÁMIDE	P. TRUNCADA	LENTE
1s	15.9634	16.2435	20.3268	20.4768	17.0529
1p	16.3633	16.5913	23.6677	21.3950	18.4658
1d	16.8886	17.0587	26.6382	22.4653	19.9426
2s	17.0723	19.5094	26.3234	31.4598	20.0109
2p	17.9134	19.9371	29.0303	31.8906	21.6254
2d	18.8830	20.5291	31.5710	32.5127	23.3052
3s	19.0633	25.9083	31.3493	39.4761	23.2823
3p	20.3431	26.3429	33.7020	39.6659	25.2120
3d	21.7505	26.9530	36.0445	39.9393	27.1121

Tabla 4.2: Energías en Ry^* para los primeros tres estados de los primeros tres valores de n_ρ , correspondientes a cada sistema de punto cuántico auto-ensamblado

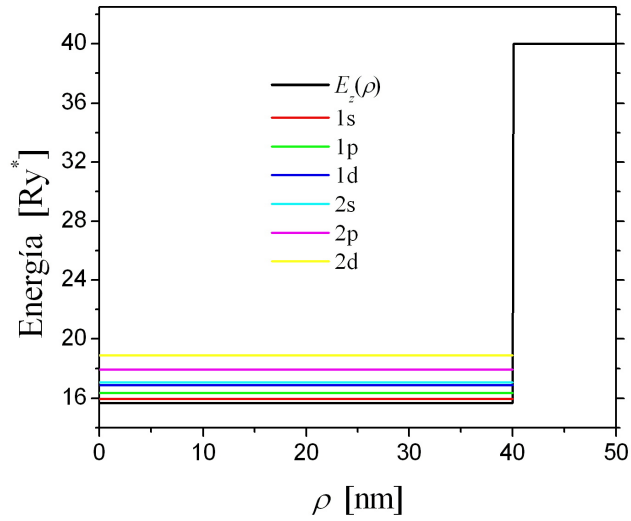


Figura 4.2: Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en un disco cuántico de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$.

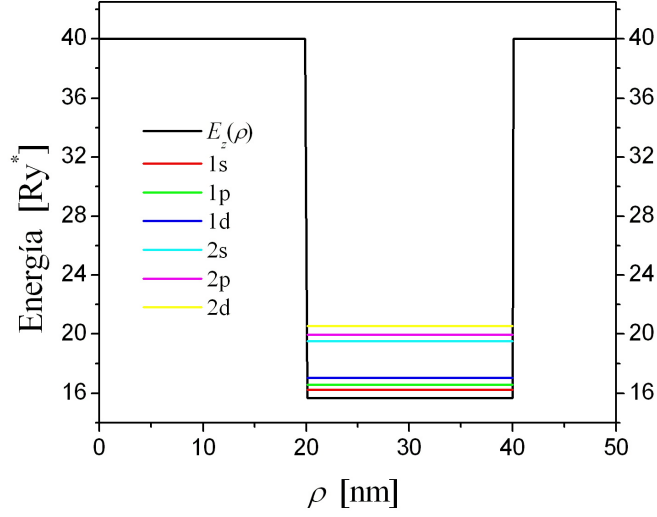


Figura 4.3: Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en un anillo cuántico de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

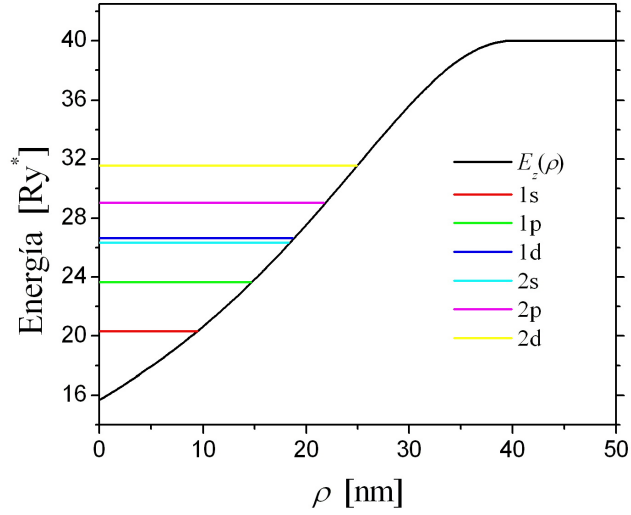


Figura 4.4: Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en una pirámide cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

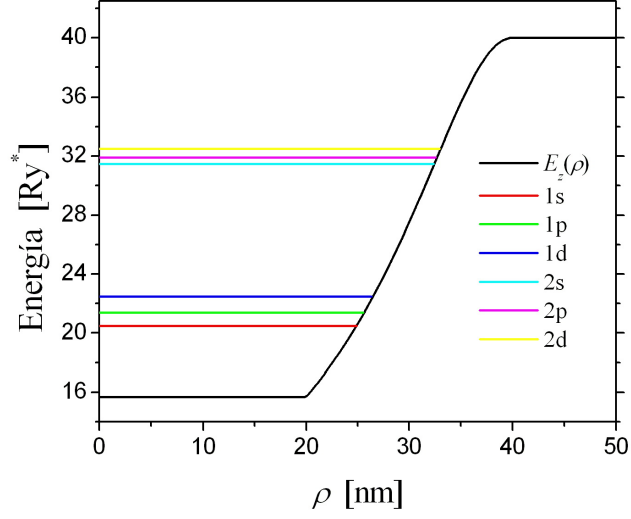


Figura 4.5: Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en una pirámide truncada cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

En 4.5 se observa que para la pirámide truncada los niveles de energía son más altos que en los otros sistemas de puntos cuánticos auto-ensamblados; al igual que en el caso del anillo, se observan bandas de los niveles de energía para cada valor de n_ρ mostrado.

Para la lente se observa en 4.6 que los valores de sus niveles energéticos se encuentran entre los correspondientes al del disco (mayores que los del disco) y a la pirámide (menores que los de la pirámide); además se observa la cercanía entre el estado 1d y el 2s.

En las figuras 4.7, 4.8 y 4.9, se pueden observar las isolíneas de densidad de distribución electrónica para los primeros tres valores de n_ρ de la sección transversal de un disco, pirámide y lente cuántica respectivamente. En todas las figuras se puede observar la poca probabilidad de encontrar el electrón en $\rho = 0$, esto es por causa del factor $2\pi\rho$ que afecta a la densidad de distribución en la sección transversal.

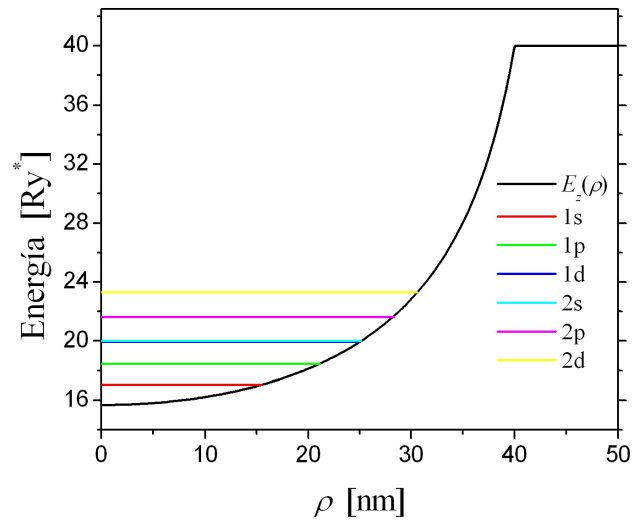


Figura 4.6: Representación esquemática de los niveles energéticos de un electrón en una lente cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 0.4 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

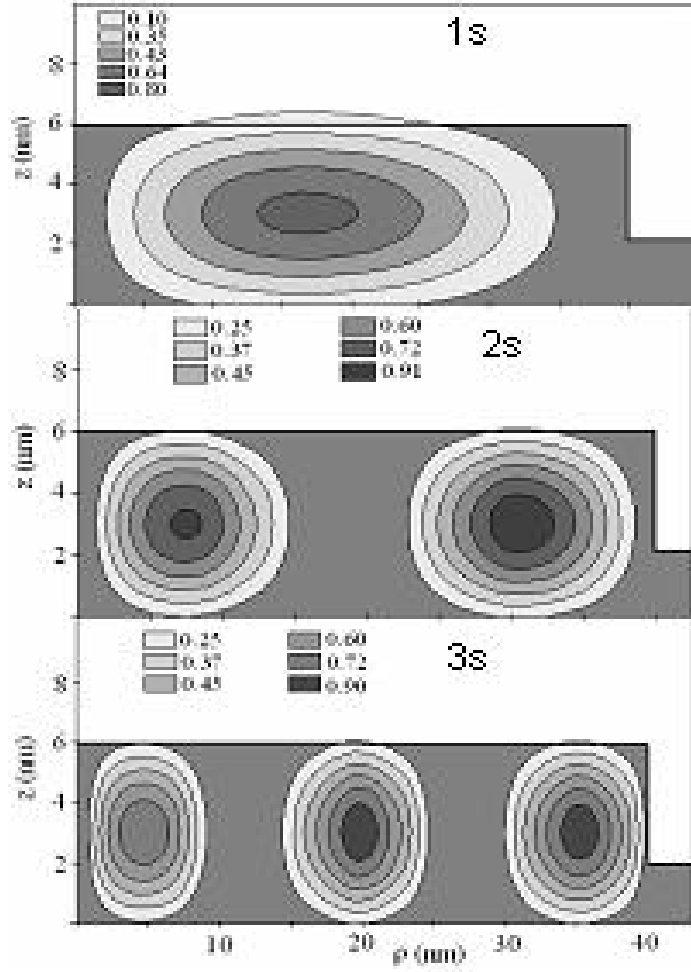


Figura 4.7: Isolíneas de densidad de distribución electrónica de la sección transversal de un disco cuántico de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 2 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

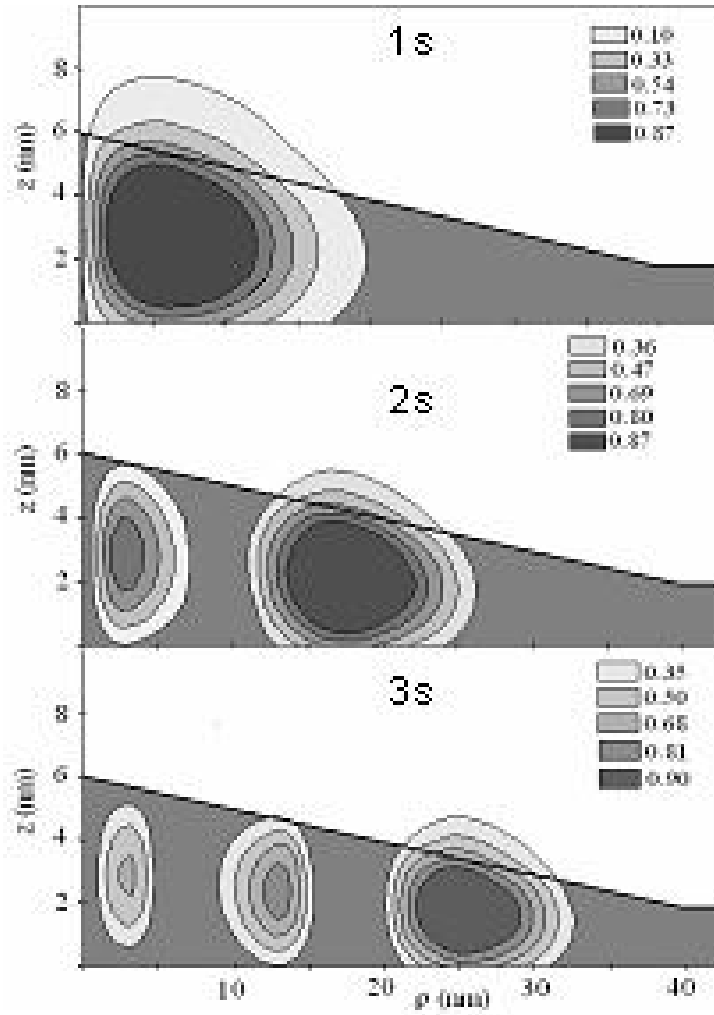


Figura 4.8: Distribución electrónica en una pirámide cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 2 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

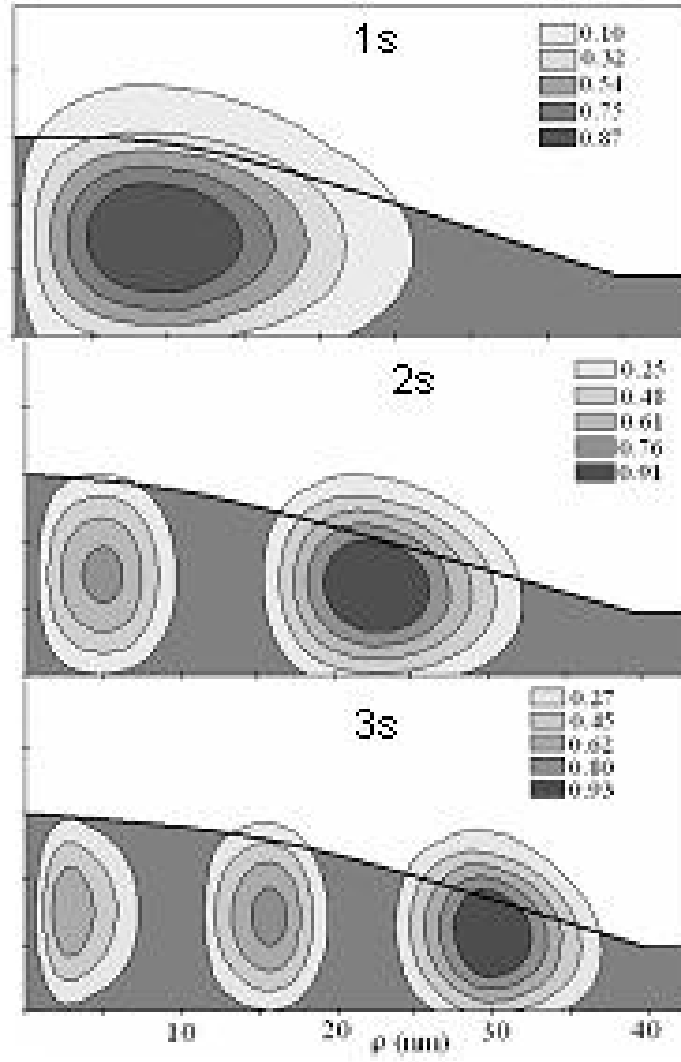


Figura 4.9: Distribución electrónica en una lente cuántica de radio 40 nm, altura 4 nm y capa húmeda 2 nm para $\text{In}_{0.55}\text{Al}_{0.45}\text{As}/\text{Ga}_{0.65}\text{Al}_{0.35}\text{As}$.

5

EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO

En un sistema conformado por un electrón en un campo magnético constante, el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2m_0}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V = \frac{1}{2m_0}(-\hbar^2 \nabla^2 - i\hbar e \mathbf{A} \cdot \nabla - i\hbar e \nabla \cdot \mathbf{A} + e^2 \mathbf{A}^2) + V \quad (5.1)$$

haciendo uso de: $\nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) = \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + (\nabla \cdot \mathbf{A})\psi$, y del gauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, se obtiene:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - \frac{i\hbar e}{m_0} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2m_0} \mathbf{A}^2 + V \quad (5.2)$$

tomando $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$, y utilizando propiedades vectoriales, 5.2 se vuelve:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + \frac{e}{2m_0} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}) + \frac{e^2}{8m_0} ((rB)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2) + V. \quad (5.3)$$

Para nuestros propósitos se toma el campo magnético en la dirección z , y se reemplaza la masa del electrón por la masa efectiva, y el potencial V se

hace corresponder con 1.6 para conseguir el siguiente Hamiltoniano:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0^*} \nabla^2 + \frac{eB}{2m_0^*} L_z + \frac{e^2 B^2}{8m_0^*} \rho^2 + V(\rho, z). \quad (5.4)$$

Para convertir el Hamiltoniano anterior a uno con unidades adimensionales, primero se hace uso del cambio de variable usado en 1.8 junto con $V(\rho, z) = Ry^* \tilde{V}(\tilde{\rho}, \tilde{z})$ para obtener:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m_0^* a_0^{*2}} \left[-\tilde{\nabla}^2 - i \frac{eBa_0^{*2}}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2 a_0^{*4}}{4\hbar^2} \tilde{\rho}^2 \right] + Ry^* \tilde{V}(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \quad (5.5)$$

seguido, se utiliza la igualdad 1.9, y se define el parámetro adimensional

$$\gamma = \frac{eBa_0^{*2}}{\hbar} \quad (5.6)$$

que puestos en 5.5 nos brinda finalmente el Hamiltoniano en unidades adimensionales para un electrón en presencia de un campo magnético homogéneo dirigido en la dirección z :

$$H = - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho, z). \quad (5.7)$$

Realizando el problema de valores propios $H\psi = H\psi_R\psi_L = E\psi_R\psi_L$, y usando 3.2 tenemos:

$$-\frac{\Delta_{\rho\varphi}\psi_L(\rho, \varphi)}{\psi_L(\rho, \varphi)} + E_z(\rho) + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + m\gamma = E \quad (5.8)$$

con $E_z(\rho)$ dado en 2.10. El término:

$$\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} \quad (5.9)$$

es llamado diamagnético, mientras que el término:

$$m\gamma \quad (5.10)$$

es llamado paramagnético. Para hallar los valores de la energía se aplica la técnica de barrido trigonométrico difiriendo del caso en el que no hay campo magnético, en la definición del nuevo potencial $\tilde{E}_z(\rho) = E_z(\rho) + \gamma^2 \rho^2/4$, y de la nueva energía $\tilde{E} = E - m\gamma$. Luego 5.8 se puede escribir como:

$$-\frac{\Delta_{\rho\varphi}\psi_L(\rho, \varphi)}{\psi_L(\rho, \varphi)} + \tilde{E}_z(\rho) = \tilde{E}. \quad (5.11)$$

La Ec. 5.11 es la que se utiliza en el programa 7.2 para hallar E . Por otra parte, de la Ec. 5.6 se puede ver que el campo magnético viene dado por:

$$B = \frac{\hbar}{ea_0^2} \cdot \gamma = (8.3849 \text{ T}) \cdot \gamma. \quad (5.12)$$

Es importante decir que en presencia de campo magnético solo se analizaron los niveles en los cuales el número cuántico de orbital magnético m fuera negativo, ya que para valores positivos, los niveles no se encuentran ligados.

A continuación se pueden observar las gráficas de los valores de la energía de los niveles energéticos en función de la intensidad de campo magnético adimensional γ , para cada forma de SAQD en las figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5; también se pueden observar en las tablas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 los valores de la energía de los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d correspondientes a diferentes valores enteros de γ .

En 5.1 se puede apreciar que para el disco, los niveles de energía (1s, 1p y 1d) convergen para $\gamma = 1$, mientras que para los estados (2s, 2p y 2d) convergen para $\gamma = 1.35$. También se puede decir que hay dos bandas de niveles energéticos, una para cada valor de n_ρ .

Para el anillo se puede observar en 5.2 que existen dos bandas de niveles energéticos, una para cada valor de n_ρ ; además de esto se ve que ocurre el fenómeno de inversión de niveles para cada banda en $\gamma = 0.45$. Este último

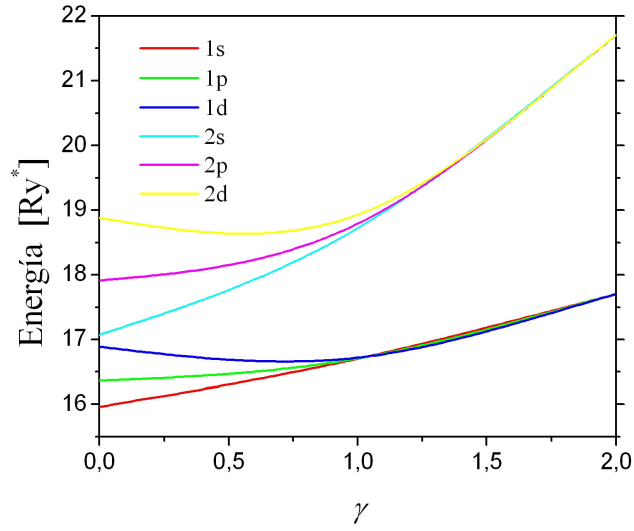


Figura 5.1: Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en un disco cuántico. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.

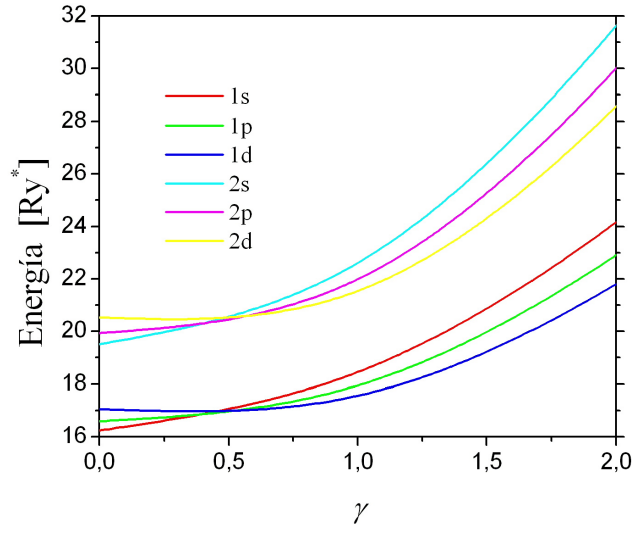


Figura 5.2: Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en un anillo cuántico. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.

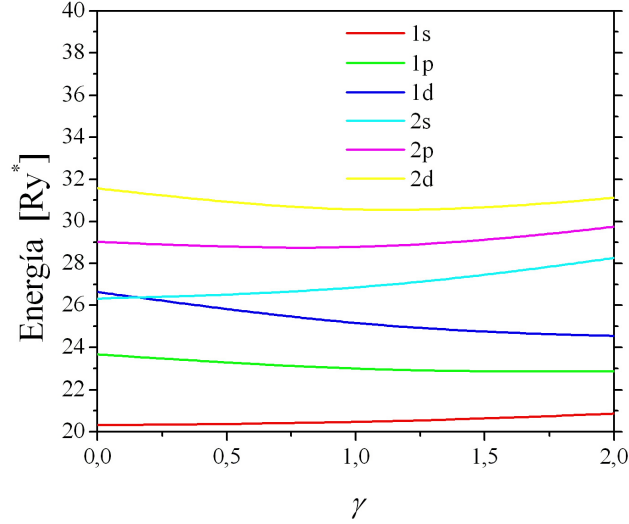


Figura 5.3: Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en una pirámide cuántica. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.

es debido a la acción conjunta de los efectos diamagnético y paramagnético, en donde el término diamagnético es el responsable del incremento de todos los niveles de energía conforme el campo magnético aumenta, y el término paramagnético es el responsable de la disminución de los niveles de energía de todos los estados diferentes al 's'; este efecto actúa más fuertemente para los niveles de mayor valor absoluto del número cuántico orbital magnético m .

En el caso de la pirámide se puede observar en 5.3 que no existen bandas de niveles, incluso se puede notar un solapamiento (inversión de dos estados de diferente n_ρ) del estado 1d y 2s a partir de $\gamma = 0.15$. Es notable la gran separación entre todos los niveles.

Para la pirámide truncada se observa en 5.4 una tendencia similar a la observada en el anillo, con la diferencia de que las bandas están más separadas, que los valores de los niveles de energía son mayores y que esta vez, la inversión de los niveles ocurre en cada banda para valores diferentes de γ , es decir para $n_\rho = 0$ ocurre a $\gamma = 1$ mientras que para $n_\rho = 1$ ocurre a $\gamma = 0.6$.

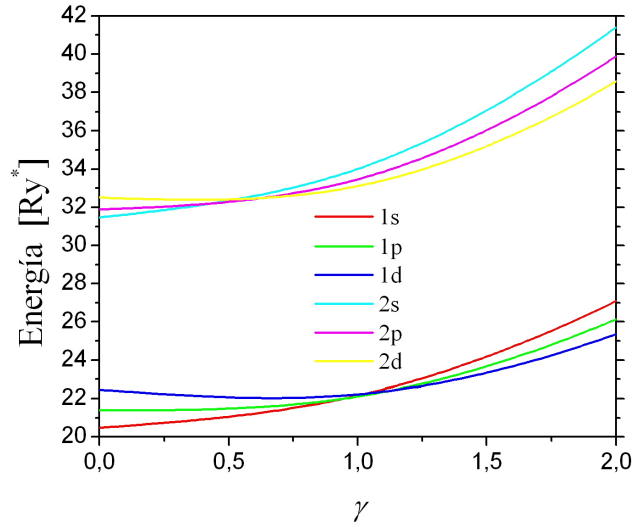


Figura 5.4: Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en una pirámide cuántica. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.

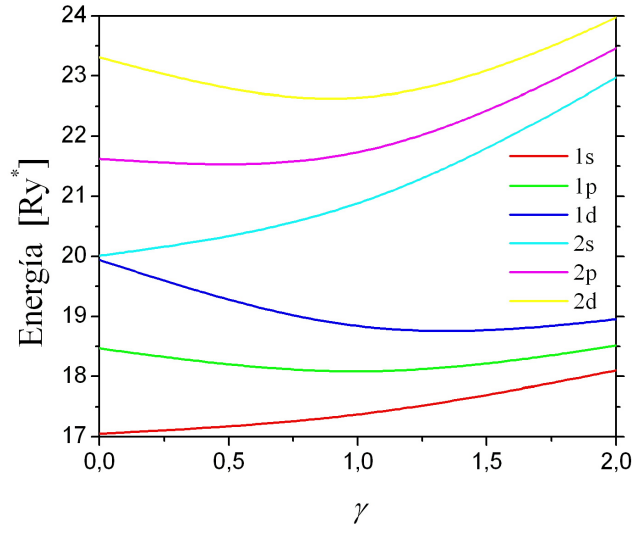


Figura 5.5: Energía en función de la intensidad de campo magnético γ de los tres primeros estados de los dos primeros valores de n_ρ debido a un electrón en una lente cuántica. El comportamiento de las curvas se define por la interacción de los efectos diamagnético y paramagnético.

DISCO						
γ	1s	1p	1d	2s	2p	2d
0	15.9634	16.3633	16.8886	17.0723	17.9134	18.8830
1	16.7037	16.7064	16.7177	18.7264	18.7916	18.9328
2	17.7034	17.7034	17.7034	21.7035	21.7035	21.7039
3	18.7034	18.7034	18.7034	24.7034	24.7034	24.7034
4	19.7034	19.7034	19.7034	27.7034	27.7034	27.7034
5	20.7034	20.7034	20.7034	30.7034	30.7034	30.7034
6	21.7034	21.7034	21.7034	33.7035	33.7034	33.7035
7	22.7034	22.7034	22.7034	36.7035	36.7034	36.7035

Tabla 5.1: Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en un disco cuántico.

En el análisis hecho a la figura 5.5 se observó una gran separación de los niveles para valores pequeños de la intensidad de campo magnético γ ; pero a medida que esta aumenta, se ve una rápida tendencia a formar bandas; si se observa en la tabla 5.5 se puede ver que para γ muy grande, no ocurre inversión de los niveles.

En la figura 5.6 se observa el efecto del confinamiento sobre los valores de los estados base para cada una de las diferentes formas analizadas en este trabajo en el caso $\gamma = 0$.

ANILLO						
γ	1s	1p	1d	2s	2p	2d
0	16.2435	16.5913	17.0587	19.5094	19.9371	20.5291
1	18.4585	17.9500	17.5618	22.6088	21.9919	21.5461
2	24.1598	22.9113	21.8028	31.6327	30.0131	28.5722
3	32.7185	30.6995	28.8344	31.6327	30.0131	28.5722
4	44.0437	41.2281	38.5747	44.9370	42.3899	40.0424
5	58.0990	54.4693	51.0077	61.5658	58.0924	54.8368
6	74.8603	70.4039	66.1199	104.1359	98.7890	93.6854
7	94.3104	89.0177	83.9004	129.9433	123.6527	117.6146

Tabla 5.2: Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en un anillo cuántico.

PIRÁMIDE						
γ	1s	1p	1d	2s	2p	2d
0	20.3268	23.6677	26.6382	26.3234	29.0303	31.5710
1	20.4721	22.9929	25.1610	26.8560	28.7889	30.5716
2	20.8701	22.8677	24.5469	28.2626	29.7551	31.1344
3	21.4465	23.1080	24.4827	30.2195	31.4409	32.5803
4	22.1390	23.5733	24.7464	32.5021	33.5411	34.5142
5	22.9073	24.1792	25.2105	34.9824	35.8923	36.7438
6	23.7264	24.8765	25.8030	37.5888	38.4031	39.1636
7	24.5811	25.6363	26.4819	40.2796	41.0204	38.6409

Tabla 5.3: Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en una pirámide cuántica.

PIRÁMIDE TRUNCADA						
γ	1s	1p	1d	2s	2p	2d
0	20.4768	21.3950	22.4653	31.4598	31.8906	32.5127
1	22.1530	22.1095	22.2201	34.0219	33.4693	33.1129
2	27.0912	26.1473	25.3618	41.3987	39.8859	38.5799
3	35.1130	33.3022	31.6546	53.0125	50.5490	48.3044
4	46.0683	43.4043	40.9079	68.3965	64.9847	61.8033
5	59.8586	56.3452	53.0030	87.2480	82.8878	78.7680
6	76.4224	72.0586	67.8692	109.3759	104.0663	99.0057
7	95.7198	90.5031	85.4632	134.6542	128.3937	122.3900

Tabla 5.4: Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en una pirámide truncada cuántica.

LENTE						
γ	1s	1p	1d	2s	2p	2d
0	17.0529	18.4658	19.9426	20.0109	21.6254	23.3092
1	17.3731	18.0848	18.8404	20.8860	21.7388	22.6448
2	18.1003	18.5172	18.9554	22.9769	23.4622	23.9748
3	18.9775	19.2620	19.5575	25.5685	25.8879	26.2209
4	19.9112	20.1250	20.3453	28.3517	28.5858	28.8276
5	20.8702	21.0410	21.2159	31.2201	31.4038	31.5924
6	21.8426	21.9845	22.1293	34.1322	34.2831	34.4373
7	22.8227	22.9441	23.0675	37.0697	37.1975	37.3279

Tabla 5.5: Valores de la energía para los estados 1s, 1p, 1d, 2s, 2p y 2d en función de la intensidad de campo magnético γ correspondientes a un electrón en una lente cuántica.

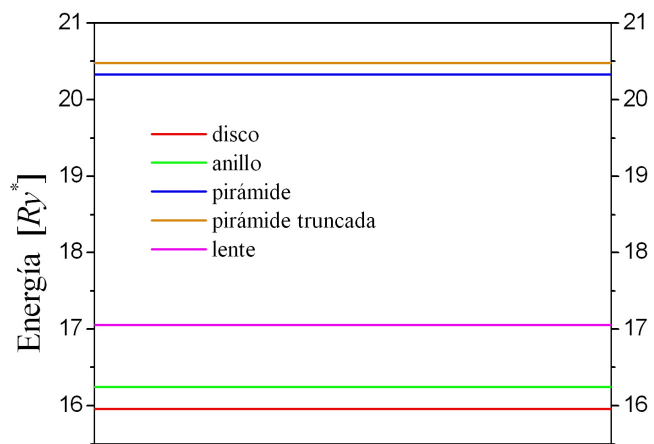


Figura 5.6: Comparación de los valores de la energía de los estados 1s, para diferentes formas de punto cuántico auto-ensamblado.

6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se aplicó la aproximación adiabática para calcular los niveles energéticos de un electrón en puntos cuánticos auto-ensamblados de diferentes perfiles con simetría axial, y se estudió el efecto de campo magnético sobre estos niveles.

Se demostró que la aproximación adiabática se puede aplicar en puntos cuánticos auto-ensamblados debido al valor pequeño de la razón altura a radio.

La utilización de la aproximación adiabática permitió desacoplar los movimientos en la dirección axial y radial, y de esta manera reducir el problema bidimensional a dos problemas independientes en la dirección z y en la dirección radial. El primero de estos problemas se resolvió en forma analítica. El segundo es un problema de campo central bidimensional cuyo potencial está relacionado con el perfil del punto cuántico. La solución de este último problema se encuentra en forma numérica por medio del método de barrido trigonométrico.

Se elaboró un software que permite calcular los niveles energéticos y funciones de onda correspondientes a un electrón en puntos cuánticos auto-ensamblados con formas de: disco, anillo, pirámide, pirámide truncada y lente. Además los programas elaborados permiten analizar el efecto del campo magnético en dichos sistemas.

Se presentaron los resultados del cálculo de los niveles de energía más ba-

jos en función del radio de base y de la altura de puntos cuánticos auto-ensamblados y la intensidad del campo magnético. Se encontró que el efecto de confinamiento que consiste en disminución del radio de base y la altura del punto cuántico auto-ensamblado produce un aumento significativo de las energías de todos los niveles y el incremento de la separación entre los niveles. El mayor confinamiento del electrón, y el mayor aumento de las energías, lo produce el punto cuántico en forma de pirámide truncada, seguido por pirámide, seguido por lente y disco (con las mismas alturas y radios de base).

El análisis del efecto de campo magnético muestra que existen dos tendencias opuestas, una relacionada con el término paramagnético, y otra con el término diamagnético del Hamiltoniano del sistema. El primero produce disminución de las energías de los niveles más bajos mientras que el término diamagnético aumenta la energía de todos los niveles. De acuerdo con los resultados en las curvas de energía de todos los niveles en función de la intensidad del campo magnético obtenido en los cálculos, se observan las intersecciones e inversiones de los niveles energéticos.

El método aplicado para el análisis de los niveles energéticos de un electrón en puntos cuánticos auto-ensamblados permite analizar sistemas más complicados tales como excitones, triones, etc.

7

ANEXOS

POZO.FOR

(7.1)

\$debug \$large c programa que encuentra los niveles energticos
para una partcula c en un pozo potencial de ancho d y altura de
la barrera V0 c programa-test para Raiz1

```
implicit real*8(a-h,o-z)
parameter(nro=50,nlmax=20)
dimension ro(nro),Ep(nro,nlmax)
common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
external dfun
c radio de Bohr efectivo en nanometros
aefec=8.86
V0=40.0
d0=4.0/aefec
db=0.1*d0
Rint=20.0/aefec
Rext=40.0/aefec
write(*,*)'digite Nshape'
write(*,*)'1-disco'
write(*,*)'2-lente'
write(*,*)'3-piramide'
write(*,*)'4-piramide truncada'
write(*,*)'5-anillo'
write(*,*)'6-volcan'
```

```

        write(*,*)'7-toro'
        read(*,*) Nshape
        open(1,file='potentes.dat')
        call potenciales(dfun,nro,nlmax,nl,ro,Ep)
        do i=1,nro
            write(1,11)ro(i),(Ep(i,j),j=1,nl)
        end do
11  format(1x,f5.2,10f9.4)
        close(1)
        stop
        end
c
-----
c subrutina potenciales calcula los valores de la energia
dependiendo c de ro, despliega la tabla E(ro(i)). c Para este
proposito invoca a la subrutina Eniveles que calcula c los niveles
de energia para un pozo cuantico
        subroutine potenciales(dfun,nro,nlmax,nl,ro,Ep)
            implicit real*8 (a-h,o-z)
            dimension ro(nro),Ep(nro,nlmax),Epar(20),Eimpar(20)
            common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
C definir el nmero de curvas de potenciales
            call Eniveles(d0,V0,npar,nimpar,Epar,Eimpar)
            nl=npar+nimpar
c llenar matriz Ep con V0
            do i=1,nro
                do j=1,nl
                    Ep(i,j)=V0
                end do
            end do
c formar malla
            h=Rext/(nro-1)
            do i=1,nro
                ro(i)=h*(i-1)
            end do
c calcular los niveles energticos de cada nodo
            do i=1,nro
                d=dfun(ro(i))
                call Eniveles(d,V0,npar,nimpar,Epar,Eimpar)
                do k=1,npar
                    Ep(i,2*k-1)=Epar(k)

```

```

        end do
        do k=1,nimpar
            Ep(i,2*k)=Eimpar(k)
        end do
    end do
    return
end

c
-----
subroutine Eniveles(d,V0,npar,nimpar,Epar,Eimpar)
    implicit real*8 (a-h,o-z)
    parameter (n=100)
    dimension Epar(n),Eimpar(n)
c    common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
    external funp
    external funimp
c    a=1.0d-10 c    a=db+1.0d-10
    a=0.4/8.86+1.0d-10
    b=V0-1.0d-3
    eps=1.0d-8
c    hraiz=h c    np=(b-a)/hraiz c calculo de los valores de
las raices para la funcion par
    call allraiz1(a,b,funp,d,V0,eps,npar,Epar)
c clculo de los valores de las raices para la funcion impar
    call allraiz1(a,b,funimp,d,V0,eps,nimpar,Eimpar)
    return
end

c----- c La funcin externa para
programa-test para Raiz1
    function funp(d,V0,E)
        implicit real*8 (a-h,o-z)
        ak=dsqrt(E)
        x=ak*d/2.0
        akp=dsqrt(V0-E)
        funp=ak*dsin(x)-akp*cos(x)
        return
    end

c ----- c La funcin
externa para programa-test para Raiz1
    function funimp(d,V0,E)
        implicit real*8 (a-h,o-z)

```

```

    ak=dsqrt(E)
    x=ak*d/2.0
    akp=dsqrt(V0-E)
    funimp=ak*dcos(x)+akp*dsin(x)
    return
end

c-----
c clculo de la funcin de onda en el punto x para el pozo de
c ancho c al, altura de la barrera V0, nivel de energia E y nPa toma
c los c valores 0 si es la solucin par y 1 si es la solucin impar
function fonda_par(d,V0,E,x)
implicit real*8(a-h,o-z)
ak=dsqrt(E)
if(x.gt.0.0.and.x.lt.d)then
    fonda_par=dcos(ak*(x-d/2.0))
else if(x.lt.0.0)then
    akp=dsqrt(V0-E)
    fonda_par=dcos(d*ak/2)*exp(akp*x)
else if(x.gt.d)then
    akp=dsqrt(V0-E)
    fonda_par=dcos(d*ak/2)*exp(-akp*(x-d))
end if
return
end

c----- c
funcion de onda impar
function fonda_impar(d,V0,E,X)
implicit real*8(a-h,o-z)
ak=dsqrt(E)
if(x.gt.0.0.and.x.lt.d)then
    fonda_impar=dsin(ak*(x-d/2.0))
else if(x.lt.0.0)then
    akp=dsqrt(V0-E)
    fonda_impar=dsin(d*ak/2)*exp(akp*x)
else if(x.gt.d)then
    akp=dsqrt(V0-E)
    fonda_impar=dsin(d*ak/2)*exp(-akp*(x-d))
end if
return
end

c-----

```

```

        Subroutine allraiz1(a,b,fun,d,V0,eps,nraiz,xraiz)
        parameter (n=200)
        implicit real*8 (a-h,o-z)
logical existe
        dimension xraiz(n)
        external fun
        h=(b-a)/(n-1)
        nraiz=0
        xl=a
        xr=a+h
        fl=fun(d,V0,xl)
10      fr=fun(d,V0,xr)
        existe=.false.
        call raiz1(fun,xl,xr,eps,d,V0,existe,xraz)
        if(existe) then
            nraiz=nraiz+1
            xraiz(nraiz)=xraz
        end if
        xl=xr
        fl=fr
        xr=xl+h
        if(xr.lt.b) go to 10
        return
        end

c----- c El
subprograma Raiz1 busca la solucin de la ecuacin func(x)=0 c
dentro del intervalo (a,b) con la precisin eps, c usando el
mtodo de biseccin c
        subroutine Raiz1(func,a,b,eps,d,V0,existe,xraiz)
        implicit real*8 (a-h,o-z)
        logical existe
        existe=.false.
c los parametros del extremo izquierda
        xl=a
        fl=func(d,V0,xl)
c los parametros del extremo derecho
        xr=b
        fr=func(d,V0,xr)
c comparacin de los signos de la funcin en los extremos
        if(fl*fr.le.0.0) then
            existe=.true.

```

```

c inicializacin del proceso de biseccin 10      x=(xl+xr)/2.0d0 c
si la distancia entre los extremos es menor que eps c entonces ya
el centro del intervalo x define la raiz c con la precisin
sugerida
      if((xr-xl).le. eps) go to 40
c definicin el valor de la funcin en el centro del intervalo
      f=func(d,V0,x)
c comparacin de los signos de la funcin en el centro del c
intervalo y en el extremo izquierda
      if(f*f1) 20,40,30
c si signos son diferentes se escoge el subintervalo izquierda 20
xr=x
      fr=f
c volver al siguiente paso del proceso biseccin
      go to 10
c si signos son iguales se escoge el subintervalo derecha 30
xl=x
      fl=f
c volver al siguiente paso del proceso biseccin
      go to 10
40      xraiz=x
      end if
c salir de subprograma
      return
      end
c----- c funcion que
describe el perfil del punto cuantico
      function dfun(ro)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
      x=ro/Rext
      dfun=db
c disco
      if(Nshape.eq.1) then
        if(ro.le.Rext) dfun=db+d0
c lente
      else if(Nshape.eq.2) then
        if(ro.le.Rext) then
          dfun=db+d0*dsqrt(1.0-x**2)
        end if
c piramide

```



```

        else if(Nshape.eq.3) then
        if(ro.le.Rext) then
            dfun=db+d0*(1-x)
        end if
c piramide truncada
        else if(Nshape.eq.4) then
        if(ro.le.Rext.and.ro.ge.Rint) then
            dfun=db-d0*(ro-Rext)/(Rext-Rint)
        end if
        if(ro.lt.Rint) dfun=db+d0
c anillo
        else if(Nshape.eq.5) then
            if(ro.ge.Rint.and.ro.le.Rext) then
                dfun=db+d0
            end if
c volcan
        else if(Nshape.eq.6) then
            if(ro.gt.Rint.and.ro.lt.Rext) then
                R0=(Rext+Rint)/2.0
                cvol=log((db+d0)/db)/(Rext-R0)**2
                dfun=(db+d0)*dexp(-cvol*(ro-R0)**2)
            end if
c toro
        else if(Nshape.eq.7) then
            if(ro.ge.Rint.and.ro.le.Rext) then
                R0=(Rext+Rint)/2.0
                a=(Rext-Rint)/2.0
                dfun=db+d0*dsqrt(1.0-((ro-R0)/a)**2)
            end if
        else
            write(*,*)'no hay correspondencia'
        end if
    return
end

```

RADIAL1.FOR

(7.2)

\$debug

c-----

c programa test

```

parameter(np=100,mp=1,nm=500)
parameter (ncurv=2)
parameter (niz=20,nro=20)
parameter(nsp=50)
parameter (nzmax=2,nrmax=3,mrmax=4)
implicit real*8(a-h,o-z)
common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
common/Espl/x(nsp),y(nsp),b(nsp),c(nsp),d(nsp),e(nsp)
common /estate/ nz,nr,mr
common /LIMITS/ Vmin,Vmax
common /fi_radial/ xonda(nm),fi_onda(nm)
common/Fspl/fonda(nm),bf(nm),cf(nm),df(nm),ef(nm)
common /ground/ Elibre
common /Anorm/ Snorm
real tab_ener(8,5)
open(2,file='rtesis.dat')
write(*,*)'digite Nshape'
write(*,*)'1-disco'
write(*,*)'2-lente'
write(*,*)'3-piramide'
write(*,*)'4-piramide truncada'
write(*,*)'5-anillo'
write(*,*)'6-volcan'
write(*,*)'7-toro'
read(*,*) Nshape
aefec=8.86
V0=40.0
d0=4.0/aefec
db=0.1*d0
Rint=20.0/aefec
Rext=40.0/aefec
c Numero de curva de potencial nz
  nz=1
  nr=1
c Encontrar los coefficients de funcion de spline para c curva de
potencial correspondientes
  call pre_spline(nz,x,y,b,c,d,e)
c Encontrar el minimo y maximo de curva de potencial
  Vmin=V0
  Vmax=0.0
  Rmin=0.0

```

```

Rmax=1.2*Rext
Hpasso=(Rmax-Rmin)/(np-1)
do i=1,np
ro=Rmin+hpasso*(i-1)
Ena=Ez(ro)
    if(Ena.gt.Vmax) Vmax=Ena
    if(Ena.lt.Vmin) Vmin=Ena
end do
c Nmeros cuanticos mr
do mr=0,3
do ngam=1,8
    gam=ngam-1
    tab_ener(ngam,1)=gam
    tab_ener(ngam,mr+2)=Energy(nz,nr,mr)-gam*mr
    write(*,*) mr,ngam, tab_ener(ngam,mr+2)
end do
end do
do ngam=1,8
    write(2,13) (tab_ener(ngam,k),k=1,5)
end do
13 format(3x,f5.1,7f10.4)
close(2)
stop
end

c-----
subroutine pre_spline(Niv,x,y,b,c,d,e)
parameter(nsp=50)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension x(nsp),y(nsp),b(nsp),c(nsp),d(nsp),e(nsp)
c tabe.dat es la tabla del numero de soluciones posibles del QW.
En su c primera columna lleva el ancho del pozo d (altura del QD),
y en las c siguientes columnas lleva los diferentes valores de las
Energas
open(1,file='TabE.dat',status='old')
KPR=0
do i=1,nsp
    read(1,*)x(i),(a,j=1,niv-1),y(i)
end do
CALL SPLINE(NSP,x,y,B,C,D,E,KPR,INT)
close(1)
return

```

```

end
c-----
function Ez(ro)
parameter(nsp=50)
implicit real*8(a-h,o-z)
common/Espl/x(nsp),y(nsp),b(nsp),c(nsp),d(nsp),e(nsp)
da=dfun(ro)
KPR=0
Ez=SEVAL(KPR,Nsp,da,X,Y,B,C,D,E)
return
end
c-----
function dfun(ro)
implicit real*8(a-h,o-z)
common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
x=ro/Rext
dfun=db
c disco
    if(Nshape.eq.1) then
        if(ro.le.Rext) dfun=db+d0
c lente
        else if(Nshape.eq.2) then
            if(ro.le.Rext) then
                dfun=db+d0*dsqrt(1.0-x**2)
            end if
c piramide
            else if(Nshape.eq.3) then
                if(ro.le.Rext) then
                    dfun=db+d0*(1-x)
                end if
c piramide truncada
            else if(Nshape.eq.4) then
                if(ro.le.Rext.and.ro.ge.Rint) then
                    dfun=db-d0*(ro-Rext)/(Rext-Rint)
                end if
                if(ro.lt.Rint) dfun=db+d0
c anillo
            else if(Nshape.eq.5) then
                if(ro.ge.Rint.and.ro.le.Rext) then
                    dfun=db+d0
                end if

```

```

c volcan
    else if(Nshape.eq.6) then
        if(ro.gt.Rint.and.ro.lt.Rext) then
            R0=(Rext+Rint)/2.0
            cvol=alog((db+d0)/db)/(Rext-R0)**2
            dfun=(db+d0)*dexp(-cvol*(ro-R0)**2)
        end if
c toro
    else if(Nshape.eq.7) then
        if(ro.ge.Rint.and.ro.le.Rext) then
            R0=(Rext+Rint)/2.0
            a=(Rext-Rint)/2.0
            dfun=db+d0*dsqrt(1.0-((ro-R0)/a)**2)
        end if
    else
        write(*,*)'no hay correspondencia'
    end if
c   dfun=db c   if(ro.le.Rext.and.ro.ge.Rint)then c       x=ro/Rext
c Disco c       dfun=db+d0 c Lente c
dfun=db+d0*dsqrt(1.0-x**2) c Piramide c       dfun=db+d0*(1.0-x)
    return
    end
c----- c
Funcion de onda radial no normalizada
function fro1(ro)
parameter(nm=500,nmax=10)
implicit real*8(a-h,o-z)
    common /fi_radial/ xonda(nm),fi_onda(nm)
    common/Fspl/fonda(nm),bf(nm),cf(nm),df(nm),ef(nm)
    common /ground/ elibre
    common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
    common /estate/ nz,nr,mr
    common /LIMITS/ Vmin,Vmax
    dimension BI(0:nmax), DI(0:nmax), BK(0:nmax), DK(0:nmax)
    if(ro.le.Rext) then
        KPR=0
        fro1=SEVAL(KPR,Nm,ro,Xonda,Fonda,BF,CF,DF,EF)
        if(mr.ne.0) fro1=fro1*ro**mr
    else
        KPR=0
        rot=Rext-0.00001d0

```

```

        frot=SEVAL(KPR,Nm,rot,Xonda,Fonda,BF,CF,DF,EF)
        if(mr.ne.0) frot=frot*rot**mr
c        if(mr.ne.0) fro1=fro1*ro**mr
    rz=Vmax-Elibre
    if(rz.le.0.0)rz=1.0d-20
        akap=dsqrt(rz)
        xx=akap*Rext
        if(mr.eq.0) then
            call IK01A(XX,BI0,DI0,BI1,DI1,BK0,DK0,BK1,DK1)
            BA=BK0
c            write(*,*) 'BA= ',BA
        else
            CALL IKNA(mr,xx,NMax,BI,DI,BK,DK)
            BA=BK(mr)
        end if
        xx=akap*ro
        if(mr.eq.0) then
            call IK01A(XX,BI0,DI0,BI1,DI1,BK0,DK0,BK1,DK1)
            BB=BK0
c            write(*,*) 'BB= ',BB
        else
            CALL IKNA(mr,xx,NMax,BI,DI,BK,DK)
            BB=BK(mr)
        end if
        fro1=frot*BB/BA
    end if
    return
end
cc Normalizar la funcion de onda fro1
c----- c
funcion de onda del estado base para electron en direccion radial
c NORMALIZADA
    function fro(ro)
    implicit double precision(a-h,o-z)
    common /Anorm/ Snorm
    fro=fro1(ro)*Snorm
    return
    end
c----- c
funcion de onda del estado base c para electron en direccion
transversal

```

```

function fz(z,ro)
implicit double precision(a-h,o-z)
common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
common /LIMITS/ Vmin,Vmax
d=dfun(ro)
ak=dsqrt(Ez(ro))
akap=(Vmax-ak**2)
cs=dcos(0.5*ak*d)
if(akap.lt.0.0d0) akap=1.0d-20
akap=dsqrt(akap)
if(z.lt.0.0d0) then
    fz=cs*dexp(akap*z)
else if(z.lt.d) then
    fz=dcos(ak*(z-0.5*d))
else
    fz=cs*dexp(-akap*(z-d))
end if
c normalizar
AN=cs*cs/akap+d/2.0+dsin(ak*d)/(2*ak)
fz=fz/dsqrt(AN)
return
end

c----- c
funcion de onda bidimensional del estado base c para electron en
direccion radial
function ff(z,ro)
implicit double precision(a-h,o-z)
ff=fz(z,ro)*fro(ro)
return
end

c-----
c Calcula los valores de funcion de onda radial sobre la malla
subroutine F_malla (NM,xonda,fi_onda,fonda)
implicit double precision(a-h,o-z)
common /ground/ Elibre
common /estate/ nz,nr,mr
common/qdot/d0,Rint,Rext,db,V0,Gam,Nshape
dimension xonda(nm),fi_onda(nm),fonda(nm)
dimension sbfun(1000)
E=Elibre
c c Calcular la funcion subintegral para A(z) en los puntos d e

```

la malla c Calcular los valores de la funcion subintegral sobre la malla

```

      do kk=1,nm
        ro=xonda(kk)
        Vpot=Ez(ro)+gam**2*ro**2/4
        sbfun(kk)=(1.0+Vpot-E)*
$      dsin(2*fi_onda(kk))/2.0d0-
$      (2*mr+1)/ro*(dsin(fi_onda(kk)))*2
      end do
c Calcular integrales con DQSF
      H=xonda(2)-xonda(1)
      CALL DQSF (H,sbfun,sbfun,NM)
c Calcular funcion de onda sobre la malla
      SM=0.0
      do kk=1,nm
        fonda(kk)=dcos(fi_onda(kk))*dexp(sbfun(kk))
        SM=sm+FONDA(KK)**2
      end do
      SM=SM*H
      fm=1.0/dsqrt(sm)
      do kk=1,nm
        fonda(kk)=fm*fonda(kk)
      end do
      SM=SM*H
      return
      end

c----- C Calcula el
vector dev integrales C
      SUBROUTINE DQSF(H,Y,Z,NDIM)
C C
      DIMENSION Y(1),Z(1)
      DOUBLE PRECISION Y,Z,H,HT,SUM1,SUM2,AUX,AUX1,AUX2
C
      HT=.3333333333333333D0*H
      IF(NDIM-5)7,8,1
C C      NDIM IS GREATER THAN 5. PREPARATIONS OF INTEGRATION LOOP
1 SUM1=Y(2)+Y(2)
      SUM1=SUM1+SUM1
      SUM1=HT*(Y(1)+SUM1+Y(3))
      AUX1=Y(4)+Y(4)
      AUX1=AUX1+AUX1

```



```

    AUX1=SUM1+HT*(Y(3)+AUX1+Y(5))
    AUX2=HT*(Y(1)+3.875D0*(Y(2)+Y(5))+2.625D0*(Y(3)+Y(4))+Y(6))
    SUM2=Y(5)+Y(5)
    SUM2=SUM2+SUM2
    SUM2=AUX2-HT*(Y(4)+SUM2+Y(6))
    Z(1)=0.D0
    AUX=Y(3)+Y(3)
    AUX=AUX+AUX
    Z(2)=SUM2-HT*(Y(2)+AUX+Y(4))
    Z(3)=SUM1
    Z(4)=SUM2
    IF(NDIM-6)5,5,2
C C      INTEGRATION LOOP
2 DO 4 I=7,NDIM,2
    SUM1=AUX1
    SUM2=AUX2
    AUX1=Y(I-1)+Y(I-1)
    AUX1=AUX1+AUX1
    AUX1=SUM1+HT*(Y(I-2)+AUX1+Y(I))
    Z(I-2)=SUM1
    IF(I-NDIM)3,6,6
3 AUX2=Y(I)+Y(I)
    AUX2=AUX2+AUX2
    AUX2=SUM2+HT*(Y(I-1)+AUX2+Y(I+1))
4 Z(I-1)=SUM2
5 Z(NDIM-1)=AUX1
    Z(NDIM)=AUX2
    RETURN
6 Z(NDIM-1)=SUM2
    Z(NDIM)=AUX1
    RETURN
C      END OF INTEGRATION LOOP C
7 IF(NDIM-3)12,11,8
C C      NDIM IS EQUAL TO 4 OR 5
8 SUM2=1.125D0*HT*(Y(1)+Y(2)+Y(2)+Y(2)+Y(3)+Y(3)+Y(3)+Y(4))
    SUM1=Y(2)+Y(2)
    SUM1=SUM1+SUM1
    SUM1=HT*(Y(1)+SUM1+Y(3))
    Z(1)=0.D0
    AUX1=Y(3)+Y(3)
    AUX1=AUX1+AUX1

```

```

      Z(2)=SUM2-HT*(Y(2)+AUX1+Y(4))
      IF (NDIM-5) 10,9,9
9     AUX1=Y(4)+Y(4)
      AUX1=AUX1+AUX1
      Z(5)=SUM1+HT*(Y(3)+AUX1+Y(5))
10    Z(3)=SUM1
      Z(4)=SUM2
      RETURN
C C      NDIM IS EQUAL TO 3
11    SUM1=HT*(1.25D0*Y(1)+Y(2)+Y(2)-.25D0*Y(3))
      SUM2=Y(2)+Y(2)
      SUM2=SUM2+SUM2
      Z(3)=HT*(Y(1)+SUM2+Y(3))
      Z(1)=0.D0
      Z(2)=SUM1
12    RETURN
      END

```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Brunner K., Abstreiter G., Böhm G., Trnkle G., Weimann G., *Appl. Phys. Lett.* **64** 3320 (1994)
- [2] Brunner K., Abstreiter G., Böhm G., Trnkle G., Weimann G., *Phys. Rev. Lett.* **73** 1138 (1994)
- [3] Zrenner A., Butov L.V., Hang M., Abstreiter G., Böhm G., Weimann G., *Phys. Rev. Lett.* **72** 3382 (1994)
- [4] Jacak L., Hawrylak P., Wojs, “*Quantum Dots*” Springer Verlag 1998
- [5] Nag B. R., “*Physics of Quantum Well Devices*” Kluwer Academic Publisher, 2001
- [6] Lorke A., Luyken R. J., Govorov A. O., Kotthaus J. P., *Phys. Rev. Lett.* **84** 2223 (2000)
- [7] Raz T., Ritter D., Bahir G., *Appl. Phys. Lett.* **82** 1706 (2003)
- [8] Granados D., García J. M., *Appl. Phys. Lett.* **82** 2401 (2003)
- [9] Bastard G., *Phys. Rev. B* **24** 4714 (1981)
- [10] Matulis A., and Peeters F.M. *J. Phys. Condens. Matter* **6** 7751 (1994)
Szafran B., Adamowski J., Bednarek S., *Phys. Rev. B* **59** 13036 (1999)
- [11] Johnson N. F., *J. Phys: Condens Matter* **7** 965 (1995)
- [12] Ciurla M., Adamowski J., Szafran B., Bednarek S., *Phys. E* **15** 261 (2002)
- [13] Szafran B., Adamowski J., Bednarek S., *J. Phys. Condens. Matter* **14** 73 (2002)
Szafran B., Adamowski J., Bednarek S., *Phys. E* **5** 185 (2000)

- [14] Pang T. and Pang S. G. *Phys. Rev. Lett.* **65** 1635 (1990)
Zhu J. L., Yu J. Z., Kawazoe Y. *J. Phys: Condens. Matter* **8** 7857 (1996)
- [15] Betancur F. J., Mikhailov I. D., Oliveira L. E., *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31** 3391 (1998)
- [16] Peeters F. M. and Schweigert V. A., *Phys. Rev. B* **53** 1468 (1996)
- [17] Zhu J. L., Dai Z. and Hu X., *Phys. Rev. B* **68** 045324 (2003)
Hu H., Zhu J. L. and Xiong J. J., *Phys. Rev B* **62** 16777 (2000)
- [18] Marín J. H., García F. and Betancur F. J., *Electron-hole pair in a quantum pyramid* Congr. Nac. Medellin
García F., Betancur F. J., Mikhailov I., Gutiérrez W., Robayo R. and Marín J. H., *Negatively charged donor and trion in quantum disks* SLAFES, Habana
F. García, J. H. Marín, H. Paredes Gutiérrez and I. D. Mikhailov, *Low-lying states of two-electron quasi-one-dimensional ring* SLAFES, Habana
- [19] Broek M. V., Peeters F. M., *Phys. E* **11** 345 (2001)
Lew Yan Voon L. C. and Willatzen M., *J. Phys: Condens. Matter* **16** 1087 (2004)
- [20] Rodríguez A. H., Trallero - Gier C., Ulloa S. E. and Marín Antuña J., *Phys. Rev. B* **63** 125319 (2001)
- [21] Voskoboynikov O., Huang H.C., Shi C.F., Lee C.P., *Solid State Commun* **59-62** 119 (2001)
- [22] Mikhailov I. D., Marín J. H., and García F., *Phys. Stat. Sol. (b)* **242**, No. 8, 1636-1649 (2005)
- [23] Gutiérrez W., Piña J. and Quiñónez F., *Comparative study of the one-electron energy spectrum in nanoscopic quantum lens, pyramid and ring.* Segundo Encuentro Nac. de Computación e Información Cuántica.