

**ANÁLISIS DE INESTABILIDAD TERMOACÚSTICA Y  
CONTROL REALIMENTADO CON RETARDOS USANDO  
EL PARADIGMA DEL TRATAMIENTO EN GRUPO DE  
RAÍCES CARACTERÍSTICAS (CTCR)**

NAREN ARLEY MANTILLA RAMÍREZ  
VÍCTOR ALFONSO AMAYA FERREIRA



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA

2017

ANÁLISIS DE INESTABILIDAD TERMOACÚSTICA Y  
CONTROL REALIMENTADO CON RETARDOS USANDO  
EL PARADIGMA DEL TRATAMIENTO EN GRUPO DE  
RAÍCES CARACTERÍSTICAS (CTCR)

NAREN ARLEY MANTILLA RAMÍREZ  
VÍCTOR ALFONSO AMAYA FERREIRA

*Trabajo de grado para optar al título de  
Ingeniero Electrónico*

Director  
DANIEL ALFONSO SIERRA BUENO  
PhD en Ingeniería Biomédica

Codirector  
RUDY CEPEDA GÓMEZ  
PhD en Ingeniería Mecánica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA

2017

*Dedicado a*

*Dios, por la vida, por sus bendiciones y por los talentos que me concedió.*

*mis padres, Irma y Luis, por formarme con entrega y sacrificio; por transmitirme su fortaleza y sabiduría; por el amor incondicional y la confianza en mí, fundamentales para perseguir mis sueños.*

*mi hermana, Naydu, por su admiración y su cariño, por darme la fortaleza necesaria; luz en los momentos más oscuros.*

*mi familia, por ser refugio y compañía; por sus consejos y palabras de aliento.*

*“doña Mercedes”, por abrirme las puertas de su hogar; por su amabilidad y su aprecio, durante estos años.*

*mis profesores y amigos, por las lecciones, enseñanzas y experiencias compartidas en la universidad, que quedaran grabadas en mi mente para siempre.*

*mi compañero, Víctor, por su camaradería; por su coraje y gallardía, dignos de admiración; y a su familia, por su amistad desinteresada, su humor y su alegría.*

*todos aquellos que han puesto su granito de arena en mi crecimiento como persona, como profesional y como miembro de la sociedad. Ustedes: luz de guía en aguas ignotas, en mi travesía rumbo al puerto de mis metas.*

**Naren Arley Mantilla Ramírez**

*Dedicado a*

*mi madre, María Helena Ferreira, por ser ejemplo de perseverancia y excelencia, por su amor incondicional y sus enseñanzas, las cuales me llevaron a seguir mis sueños hasta alcanzarlos.*

*mi hermana, María Fernanda, quien me ha motivado a ser mejor cada día y por confiar ciegamente en mí.*

*mis familiares, quienes me acompañaron en todo momento y me dieron su apoyo.*

*mis compañeros y amigos, por el trabajo en equipo y los momentos compartidos. Gracias a estas experiencias, ustedes se han convertido en una familia, mi nueva familia, durante esta etapa de mi vida.*

*mi novia, Silvia Juliana, quien me ha acompañado desde el comienzo y ha sido mi soporte en momentos difíciles.*

*todas las personas que formaron parte de este proceso de aprendizaje como profesional y persona, pues han dejado una huella imborrable y tengo claro que este logro además de mío también es de ustedes.*

**Víctor Alfonso Amaya Ferreira**

## *Agradecimientos*

Al profesor **Daniel Sierra**, por su asesoría, por ser un gran profesional y un gran amigo; por sus enseñanzas que trascienden las dimensiones académicas y toman la forma de acertados consejos, valiosos en el momento de tomar decisiones. Un verdadero **MAESTRO**.

Al profesor **Nejat Olgac** y al codirector del proyecto **Rudy Cepeda**, por su valiosa contribución, por poner a nuestra disposición sus conocimientos y por separar parte de su tiempo para atender nuestras inquietudes.

A la secretaria de la escuela, **Ingrid García** y a la secretaria del centro de estudios, **“Yolandita”**, por su gran colaboración, por su disposición para ayudarnos en los devenires cotidianos de la academia.

A nuestros **familiares**, por su acompañamiento continuo, por regocijarse con nuestros triunfos y reconfortarnos en los fracasos.

A los **“Electrónicos elitistas y el pobre Hugo”** y a todos los **compañeros de la universidad**, nuestros colegas en el camino del aprendizaje; testigos de buenos y malos momentos, de anécdotas felices y tristes, que sirvieron como huellas de amistad en el lienzo de nuestras memorias. A todos aquellos que nos tendieron una mano fraterna, una palabra de crítica o de elogio, o una valiosa enseñanza.

A la **Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones (E3T)** y a la **Universidad Industrial de Santander (UIS)**.

# Índice general

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>18</b>
<b>1 MARCO TEÓRICO</b>	<b>21</b>
1.1 INESTABILIDAD TERMOACÚSTICA (TAI) . . . . .	21
1.2 EXPERIMENTO DEL TUBO DE RIJKE . . . . .	22
1.3 TRATAMIENTO EN GRUPO DE RAÍCES CARACTERÍSTICAS . . . . .	23
1.3.1 Tendencia de las Raíces (RT). . . . .	24
1.3.2 Método de la Sub-división D. . . . .	25
1.3.3 Diagrama de flujo del método CTCR. . . . .	25
<b>2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD, SIMULACIONES</b>	<b>27</b>
2.1 CASO DE EJEMPLO PARA STDS . . . . .	27
2.1.1 Aplicando la Sustitución de Rekasius. . . . .	28
2.1.2 Usando el Método de la Suma de Kronecker. . . . .	29
2.1.3 Validación. . . . .	30
2.2 CASO DE EJEMPLO PARA MTDS . . . . .	31
2.2.1 Aplicando la Sustitución de Rekasius. . . . .	32
2.2.2 Usando el Método de la Suma de Kronecker. . . . .	35
2.2.3 Validación. . . . .	35
<b>3 MODELADO Y SIMULACIÓN DEL TUBO DE RIJKE</b>	<b>37</b>
3.1 MODELO DEL SISTEMA . . . . .	37
3.1.1 Principios térmicos. . . . .	37
3.1.2 Principios acústicos. . . . .	39
3.2 CONTROL REALIMENTADO . . . . .	41
3.3 CASO DE ESTUDIO EJEMPLO . . . . .	44
3.3.1 Análisis sin control realimentado. . . . .	45
3.3.1.1 Validación. . . . .	46

3.3.2	Análisis con control realimentado. . . . .	47
3.3.2.1	Validación. . . . .	49
<b>4</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>53</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>54</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>59</b>

## Índice de figuras

Figura 1	Diagrama de bloques del experimento . . . . .	22
Figura 2	Diagrama de flujo del método CTCR . . . . .	26
Figura 3	Regiones de estabilidad del Ejemplo 2.1 . . . . .	29
Figura 4	Respuesta al impulso para el sistema del Ejemplo 2.1 . . . . .	31
Figura 5	Regiones que cumplen con las condiciones impuestas por las propiedades del arreglo de Routh-Hurwitz en el ejemplo 2.2 . . . . .	33
Figura 6	Región $\bar{R}(T_1, T_2)$ en el ejemplo 2.2 . . . . .	34
Figura 7	Mapa de estabilidad del ejemplo 2.2 . . . . .	34
Figura 8	Respuesta al impulso para el sistema del Ejemplo 2.2 . . . . .	36
Figura 9	Estructura del experimento del tubo de Rijke. . . . .	38
Figura 10	Diagrama de control del experimento con lazo de control realimentado . . . . .	41
Figura 11	Mapa de estabilidad del experimento en lazo abierto . . . . .	46
Figura 12	Respuesta al impulso del experimento en lazo abierto . . . . .	47
Figura 13	Mapa de estabilidad del experimento con lazo de control . . . . .	49
Figura 14	Respuesta al impulso del experimento con lazo de control . . . . .	50

## Índice de tablas

Tabla 1	Zonas de estabilidad para Ejemplo 2.1 . . . . .	29
Tabla 2	Parámetros de operación para el experimento del Tubo de Rijke .	45
Tabla 3	Parámetros de operación para el control del experimento del Tubo de Rijke en un punto inestable . . . . .	47

## Índice de Anexos

ANEXO A	TIPOS DE SISTEMAS CON RETARDO EN EL TIEMPO .	59
ANEXO B	MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN . . . . .	62

## *Nomenclatura*

Esta nomenclatura no incluye las notaciones usadas en el apéndice.

Los vectores se denotan mediante caracteres en negrita.

$A$	Área de la sección transversal del tubo de Rijke
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	Matrices de representación en espacio de estados
$c$	Velocidad del sonido
$c_p$	Capacidad Calorífica
$c_v$	Calor específico a volumen constante
$\mathbf{I}$	Matriz identidad
$i$	Unidad imaginaria
$K$	Ganancia de control proporcional
$\mathbf{M}$	Matriz de transferencia para el modelo del tubo de Rijke
$p$	Presión
$Q$	Energía térmica
$R_d$	Coefficiente de reflexión <i>downstream</i>
$R_s$	Constante específica de los gases
$R_u$	Coefficiente de reflexión <i>upstream</i>
$s$	Variable de Laplace, frecuencia compleja
$T$	Temperatura absoluta
$T_i$	Variable de sustitución de Rekasius
$t$	tiempo
$u$	Velocidad del aire
$Z_i$	Variable de sustitución de Kronecker

## Letras Griegas

$\rho$	Densidad o masa específica
$\gamma$	Relación de la capacidad de calor
$\tau$	Retardo
$\Delta$	Representa cambios o Variaciones
$\partial$	Derivada parcial
$\wp_0$	Núcleo, usado en definición 1
$\wp_n$	Descendencia, usado en definición 2
$\wp$	Conjunto Solución, usado en definición 3

## Superíndices

- Punto de operación, promedio
- ~ Variaciones alrededor del punto de operación

## Subíndices

0	Relacionado con el Núcleo (Ver definición 1)
n	Relacionado con la descendencia (Ver definición 2)
1	Corte de estudio de la región <i>Upstream</i>
2	Corte de estudio de la región <i>Downstream</i>
u	<i>Upstream</i>
d	<i>Downstream</i>
mic	Relacionado con micrófono
min	Valor mínimo

# RESUMEN

**Título:** Análisis de Inestabilidad Termoacústica y Control Realimentado con Retardos usando el paradigma del Tratamiento en Grupo de Raíces Características (CTCR)<sup>1</sup>

**Autores:**

Víctor Alfonso Amaya Ferreira<sup>2</sup>

Naren Arley Mantilla Ramírez<sup>2</sup>

**Palabras Clave:** Inestabilidad Termoacústica, Tratamiento en Grupo de Raíces Características, Control Realimentado con Retardos, Tubo de Rijke, Sistemas con Retardo en el Tiempo.

## DESCRIPCIÓN

Los sistemas que involucran procesos termoacústicos han tomado parte importante en el desarrollo industrial durante las últimas décadas. Dichos procesos se originan en la relación entre eventos acústicos y térmicos, razón por la cual están sujetos a diferentes configuraciones que pueden generar un comportamiento inestable.

Hasta hace poco tiempo, la estabilidad de estos procesos era evaluada de forma experimental, cuando ya había pasado la etapa de implementación, lo que suponía un límite en los grados de libertad y parámetros de diseño de su sistema de control. Ahora, el estudio de la estabilidad en elementos termoacústicos se puede realizar de manera analítica. Una estrategia es el diseño de un control realimentado con retardos.

Sin embargo, el uso de retardos induce trascendentalidad exponencial en la ecuación característica del sistema, lo que dificulta su solución. Por tal motivo, es necesario basarse en técnicas de modelado y simulación diseñadas especialmente para resolver este tipo de ecuaciones. Este es el caso del paradigma del Tratamiento en Grupo de las Raíces Características (CTCR). El CTCR, una herramienta matemática que permite evaluar de manera eficiente la estabilidad de sistemas con retardo en el tiempo en función de su retardo, es la técnica escogida para el desarrollo de este proyecto cuya meta es el análisis de estabilidad en sistemas termoacústicos (e.g. combustores) usando técnicas de control realimentado con retardos.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Daniel Alfonso Sierra Bueno. Codirector: Rudy Cepeda Gómez.

# ABSTRACT

**Title:** Thermo-Acoustic Instability Analysis and Delayed Feedback Control using the Cluster Treatment of Characteristic Roots (CTCR) Paradigm<sup>1</sup>

**Authors:**

Víctor Alfonso Amaya Ferreira<sup>2</sup>

Naren Arley Mantilla Ramírez<sup>2</sup>

**Key Words:** Thermo-Acoustic Instability (TAI), Cluster Treatment of Characteristic Roots (CTCR), Delayed Feedback Control, Rijke Tube, Time Delayed Systems (TDS).

## DESCRIPTION

Systems involving thermo-acoustic processes have played an important part in industrial development during the last decades. These processes are originated in the relationship between acoustic and thermal events, which is why they are liable to different configurations that can generate an unstable behavior.

Until recently, the stability of these processes was evaluated experimentally, after the implementation stage. This implied a limit on the degrees of freedom and design parameters of their control system. Now, the study of stability in thermo-acoustic elements can be performed analytically. One strategy is the design of a delayed feedback control to render stability to the system.

However, using delays induces exponential transcendentality in the characteristic equation of the system, making difficult its solution. For this reason, it is necessary to rely on modeling and simulation techniques specially designed to solve this type of equations. This is the case of the Cluster Treatment of Characteristic Roots (CTCR) paradigm. The CTCR paradigm, a mathematical tool that allows an efficient assessment of the stability of time delayed systems as a function of the delay, is the technique chosen for the development of this project whose main goal is the stability analysis in thermo-acoustic systems (e.g. combustors) using feedback techniques.

---

<sup>1</sup>Bachelor Thesis

<sup>2</sup>Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Daniel Alfonso Sierra Bueno, PhD. Codirector: Rudy Cepeda Gómez, PhD.

# *INTRODUCCIÓN*

Desde la invención de las máquinas los elementos que responden a procesos termoacústicos han sido parte importante de procesos industriales. Esto supone un reto: la inestabilidad producida por las vibraciones de las partículas en su interior. Ejemplo de estos son los combustores, a los cuales, después de diseñados, se les hace un estudio de estabilidad. Esto implica procesos costosos que detectan la inestabilidad después de la fabricación [4]. Como resultado, se necesitan sistemas de control más robustos que se deben implementar con parámetros de diseño muy limitados.

En sistemas de combustión, como las turbinas de gas, la inestabilidad es un problema importante que afecta notablemente el rendimiento del combustor, disminuye su eficiencia e incluso puede generar ruido y daño irreversible en su estructura. Las fluctuaciones en la presión, la transferencia de calor, la generación de ondas acústicas son algunos de los factores que generan inestabilidad. Particularmente, la inestabilidad termoacústica es un tema de interés para los científicos que investigan fenómenos de combustión.

La Inestabilidad Termoacústica (*Thermo-Acoustic Instability*, TAI), también conocida como inestabilidad de Rayleigh [21], ocurre por interacción dinámica entre eventos acústicos y térmicos en un espacio cerrado. Por ejemplo, la liberación de calor, producida por una llama en un combustor, genera ondas acústicas que influyen sobre el comportamiento de la misma.

Los primeros estudios sobre TAI se remontan hacia finales del siglo XIX. Desde entonces, diversos autores han realizado investigaciones referentes al tema. En el estado del arte se encuentra una metodología que aprovecha las ventajas del paradigma matemático del tratamiento por grupos de las raíces características (*Cluster Treatment of*

*Characteristic Roots, CTCR*).

El CTCR es un método matemático que permite determinar de manera exacta la estabilidad de sistemas LTI (Lineales e invariantes en el Tiempo) con retardo en el tiempo (*Time-Delayed Systems, TDS*). Esta técnica permite obtener el número de raíces características inestables para un valor dado del retardo [18].

Utilizar el paradigma del CTCR en el análisis de sistemas termoacústicos ofrece una ventaja significativa sobre los métodos tradicionales, en los cuales las condiciones de inestabilidad del sistema se detectan experimentalmente y después de su fabricación, elevando los costos y reduciendo el número de posibles soluciones. En cambio el CTCR, al ser un método analítico, permite definir parámetros de diseño antes de la construcción.

En el trabajo propuesto se busca analizar la inestabilidad en sistemas termoacústicos usando técnicas de control realimentado con retardos. Específicamente, se utiliza el CTCR para el análisis de sistemas termoacústicos a través del modelado y simulación del experimento del tubo de Rijke, ampliamente utilizado como caso de estudio del fenómeno termoacústico [7, 12, 21, 35, 36]. Este análisis es validado mediante experimentos de simulación que evalúan el desempeño del tubo de Rijke sin control y controlado por realimentación con retardos.

La metodología seleccionada no sólo permite analizar la estabilidad de sistemas termoacústicos (tema de estudio y aplicación del trabajo propuesto), sino que es extensible a otros campos de la ingeniería, la biología, la física, la investigación operativa y la economía donde aparecen sistemas con retardo en el tiempo (TDS) [29]. Por lo tanto, con este trabajo se busca promover la investigación en temas de actualidad y el análisis de la dinámica y la estabilidad de diversos sistemas.

El trabajo se organiza por capítulos de la siguiente manera: en el capítulo 1 se desarrolla el marco teórico del proyecto, donde se define el problema a abordar, el experimento a analizar y el método seleccionado para resolver el problema. En el Capítulo 2 se realiza un análisis de estabilidad para casos de ejemplo considerando diferentes tipos de sistemas con retardo presentes en la literatura. En el capítulo 3 se presenta el modelado del experimento del Tubo de Rijke, la aplicación del paradigma del CTCR en el

análisis del sistema, la inclusión de un lazo de control realimentado con retardo y la validación correspondiente de los resultados obtenidos. En el capítulo 4 se ofrecen algunas conclusiones y en el capítulo 5 se hacen sugerencias para futuras investigaciones.

# *Capítulo 1*

## *MARCO TEÓRICO*

### **1.1. INESTABILIDAD TERMOACÚSTICA (TAI)**

La inestabilidad termoacústica (TAI), también conocida como inestabilidad de Rayleigh, ha sido objeto de investigación para muchos científicos y ocupa un lugar especial en los estudios modernos de combustión [13, 15, 25, 28, 32–34]. Se origina por el acople entre fenómenos térmicos y acústicos en un recinto cerrado (e.g. un combustor).

Rayleigh describió la interacción entre ondas acústicas y fuentes inestables de calor afirmando que la amplitud de la onda sonora será directamente proporcional al calor agregado al sistema, siempre y cuando esté en fase con la presión [9, 23, 24]. En el caso de la combustión, cuando tiene lugar en un sistema confinado, la liberación de calor genera ondas acústicas que se reflejan en las paredes del combustor y provocan fluctuaciones de presión que afectan a la misma fuente de calor.

Las fluctuaciones de presión y un aumento considerable en el calor liberado por la fuente de calor son las manifestaciones de la inestabilidad termoacústica. Cuando esto ocurre, los sistemas pueden presentar fallos en su rendimiento, altos niveles de ruido (acústico) e incluso daño físico y estructural.

Debido a la complejidad en el estudio de inestabilidad termoacústica, aparecen modelos simples que permiten entender su naturaleza. El tubo de Rijke es un sistema conveniente para comprender sus efectos tanto teórica como experimentalmente.

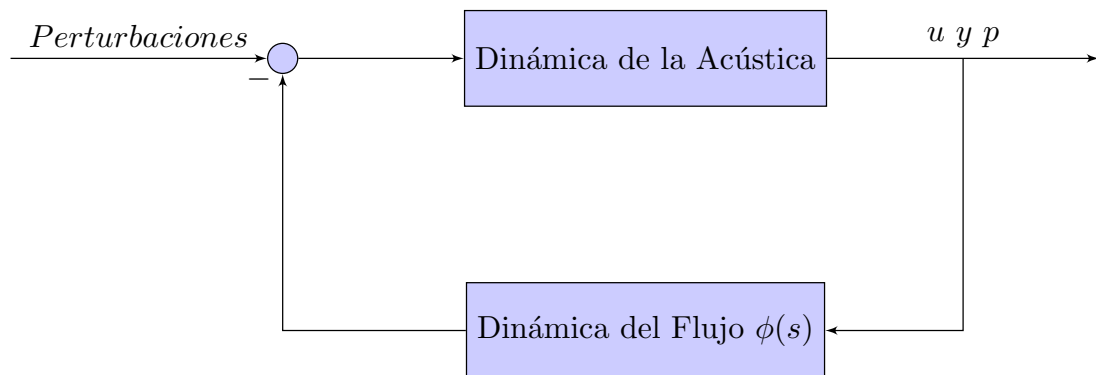
## 1.2. EXPERIMENTO DEL TUBO DE RIJKE

Como caso de estudio para evaluar la inestabilidad termoacústica se propone el experimento del tubo de Rijke. El montaje consiste en un tubo largo y delgado, abierto en ambos extremos, dentro del cual se encuentra una fuente que libera calor.

En el experimento original, una malla metálica se introduce dentro de un tubo también metálico, que se pone sobre un mechero Bunsen. Se deja allí hasta que la malla está tan caliente que se ve de color rojo brillante. Al retirar la llama, se produce un sonido hasta que la malla se enfría [27]. En la actualidad, se han utilizado tubos de vidrio y circuitos sencillos, con una resistencia eléctrica como fuente de calor [12, 14], obteniendo resultados similares.

Debido a la fuente de calor, el aire de sus cercanías se expande, generando un incremento en la presión en el tubo. La presión viaja a través de ondas acústicas a través del tubo y luego retorna, influenciando a la fuente de calor [36]. Una manera de entenderlo, desde un punto de vista dinámico, es que las ondas acústicas y la fuente de calor se acoplan en forma realimentada (ver Figura 1).

Figura 1: Diagrama de bloques del experimento, Adaptado de: [2]



La realimentación no es instantánea debido a que las perturbaciones en la presión viajan con velocidad finita a lo largo del tubo. Esto convierte al sistema en un sistema con retardo en el tiempo (TDS) que (después de una linealización) puede ser de alguna de las formas que se explican en el Apéndice A. Para analizar este tipo de sistemas se

estudia el paradigma del Tratamiento en Grupo de Raíces Características (CTCR).

En el capítulo 3 se analizará con mayor detalle el funcionamiento del Tubo de Rijke, su modelo matemático y la adición de un sistema de control realimentado.

### 1.3. TRATAMIENTO EN GRUPO DE RAÍCES CARACTERÍSTICAS

Considérese un sistema lineal e invariante en el tiempo con retardo en el tiempo<sup>1</sup>, como el de la ecuación 1.1.

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}x(t - \tau) \quad x(n \times 1), \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}(n \times n), \tau \in \mathbb{R}^+. \quad (1.1)$$

En este tipo de sistemas, la ecuación característica es de la forma,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\tau s}) = 0, \quad (1.2)$$

la cual es una ecuación trascendente, debido a los términos exponenciales. Como resultado, la ecuación tiene un número infinito de raíces y el análisis de estabilidad se dificulta. La forma general de esta ecuación característica es,

$$a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \dots + a_0(s) = \sum_{k=0}^n a_k(s)e^{-k\tau s} = 0, \quad (1.3)$$

donde cada  $a_k(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $n - k$ , con coeficientes reales.

Para que el sistema en 1.1 sea estable, es necesario que todas las raíces de su ecuación característica 1.3 estén en la parte izquierda del semiplano complejo  $s$ . Asegurar que esto suceda es una tarea difícil, dado que la trascendentalidad del sistema induce una dimensión infinita en su solución. Sin embargo, existen herramientas matemáticas que permiten reducir la dimensión del sistema mediante la sustitución del término que involucra el retardo. Estos métodos serán detallados más adelante (Ver Apéndice B).

---

<sup>1</sup>**Nota:** El método propuesto no sólo es aplicable a sistemas con un sólo retardo en el tiempo (STDS), también se puede extender a sistemas con múltiples retardos (MTDS) y sistemas de tipo neutral (NTDS), definidos en el Apéndice A

El paradigma del Tratamiento en Grupo de las Raíces Características (CTCR) es una herramienta matemática que permite resolver, analíticamente, el problema de estabilidad del sistema. A medida que el retardo  $\tau$  cambia, las raíces características se mueven en el plano complejo. Sin embargo, el paso entre estabilidad e inestabilidad sólo puede ocurrir cuando una raíz característica se ubica sobre el eje imaginario en  $s = \pm i\omega$ . Estas frecuencias de cruce corresponden a infinitos valores de  $\tau$  equidistantes periódicamente por  $\Delta\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ .

A continuación se presentan algunas definiciones importantes en el CTCR:

**Definición 1.** Núcleo  $\wp_0$ : Todos los posibles valores de  $\tau$  que generan un par de raíces características imaginarias de (1.2) en  $s = \omega_c i$  y bajo la restricción  $0 < \tau\omega_c < 2\pi$ , son llamados puntos del núcleo ( $\tau_0$ ). En otras palabras, es el retardo positivo de valor más pequeño que produce una frecuencia de cruce por el eje imaginario.

**Definición 2.** Descendencia  $\wp_n$ : Todos los puntos obtenidos a partir del núcleo, usando el principio de periodicidad de las raíces con respecto al retardo:  $\tau_n = \tau_0 + 2\pi k/\omega_c$ , son llamados puntos de la descendencia.

**Definición 3.** Conjunto Solución  $\wp$ : Es el mapa completo de estabilidad del sistema, está compuesto por la unión de los puntos del núcleo y su descendencia ( $\wp = \wp_0 \cup \wp_n$ ).

**Proposición 1.1.** *Para un LTI-TDS dado existe un número finito de elementos del núcleo,  $m$ , que no puede ser mayor que el orden del sistema elevado al cuadrado. Esto es  $m < n^2$  [8].*

**1.3.1 Tendencia de las Raíces (RT).** Para cualquier punto  $\tau \in \wp$  un incremento infinitesimal en el retardo genera una transición de la raíz. Dicha transición se puede presentar desde el lado derecho hacia lado izquierdo del plano complejo, o viceversa. La tendencia de las raíces,  $RT$ , indica la dirección de dicha transición:

$$RT|_{s=i\omega} = \text{sgn} \left[ \Re \left( \frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{s=i\omega} \right) \right] \quad (1.4)$$

Si la tendencia de las raíces es  $-1$ , el sistema se está haciendo estable, pues esto representa una disminución en el número de raíces inestables. Por el contrario, si es  $+1$ , el

sistema se hace inestable por el aumento del número de raíces al lado derecho del plano complejo.

**Proposición 1.2.** *Se considera una raíz característica imaginaria,  $s = \omega_c i$ , provocada por algún retardo  $\tau_c \in \wp$ . La Tendencia de las raíces,  $RT$ , no varía mientras cambie el valor de  $\tau_c$  dentro de la descendencia de un mismo punto del kernel,  $\tau = \tau + \frac{2\pi}{\omega_c}$ , ya que esta depende exclusivamente del valor de la frecuencia de cruce  $s = j\omega$  [5].*

**1.3.2 Método de la Sub-división D.** El método de la sub-división D [5,30] o argumento de continuidad, establece que un cambio en la estabilidad del sistema 1.1 con respecto al retardo  $\tau$  sólo es posible si para un cierto valor  $\tau_c$ , aparece un par de raíces características puramente complejas conjugadas,  $s = \pm\omega_c i$ . De esta manera, el espacio  $\tau \in \mathbb{R}^+$  se divide en regiones en las que el número de raíces inestables no cambia. Esto permite definir una relación entre el número raíces inestables en función del retardo,  $NU(\tau)$ :

$$NU(\tau) = NU(0) + \sum_{k=1}^m \Gamma \left( \frac{\tau - \tau_0}{\Delta\tau_k} \right) \cdot U(\tau, \tau_0) \cdot RT_k \quad (1.5)$$

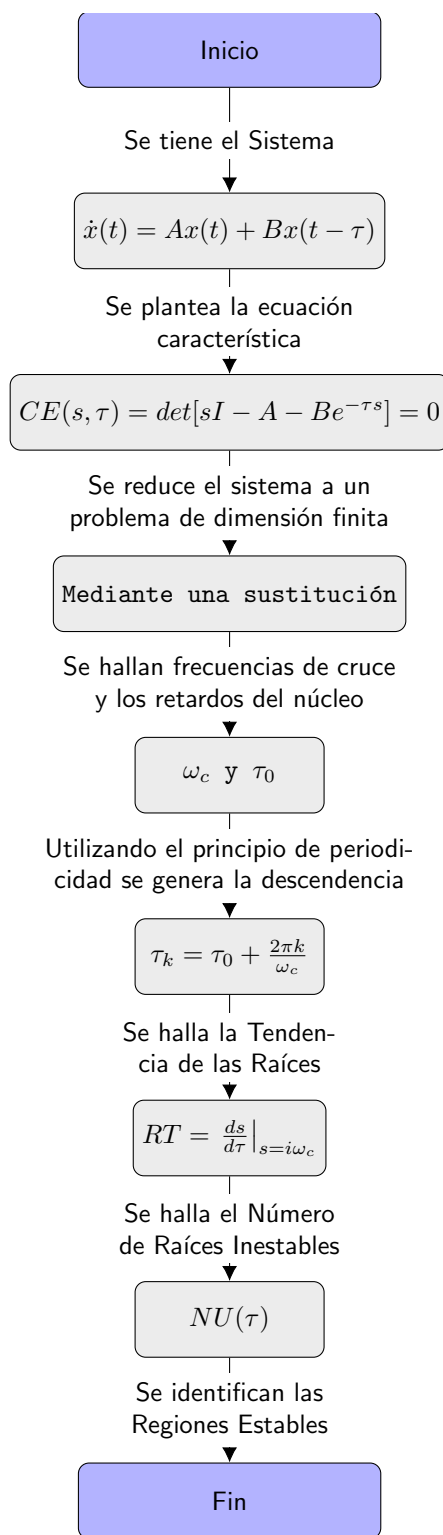
donde  $NU(0)$  representa el número de raíces inestables cuando el sistema no presenta retardo ( $\tau = 0$ ),  $U(\tau, \tau_0)$  es una función escalón en  $\tau$  definida como:

$$U(\tau, \tau_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \tau < \tau_0 \\ 1 & \text{si } \tau \geq \tau_0, \omega_{ck} = 0 \\ 2 & \text{si } \tau \geq \tau_0, \omega_{ck} \neq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

y  $RT_k$  es la tendencia de las raíces para una frecuencia de cruce  $\omega_{c_k}$ .

**1.3.3 Diagrama de flujo del método CTCR.** La figura 2 presenta un diagrama de flujo en el cual se resumen los principales pasos para el algoritmo del método seleccionado.

Figura 2: Diagrama de flujo del método CTCR



## *Capítulo 2*

# **ANÁLISIS DE ESTABILIDAD, SIMULACIONES**

### 2.1. CASO DE EJEMPLO PARA STDS

Como primer acercamiento al método, se desarrolla el ejemplo planteado en [18]. Sea un sistema de la forma (1.1), donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 13,5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5,9 & 7,1 & -70,3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Cuando  $\tau = 0$  el sistema no tiene ninguna raíz característica inestable. Todas sus raíces características se encuentran en la parte izquierda del plano complejo ( $-2 \pm 2i$  y  $-2,9$ ). Para  $\tau \neq 0$ , la ecuación característica del sistema es:

$$a_3(s)e^{-3\tau s} + a_2(s)e^{-2\tau s} + a_1(s)e^{-\tau s} + a_0(s) = 0 \quad (2.2)$$

donde:

$a_3(s) = 119,4$	$a_2(s) = 90,9s - 185,1$
$a_1(s) = 0,9s^2 - 116,8s - 22,1$	$a_0(s) = s^3 + 6s^2 + 9,1s + 111$

La ecuación 2.2 tiene infinitas raíces características. Para reducir el problema a una ecuación de dimensión finita es necesario aplicar una sustitución. El término exponencial, que contiene el retardo, se reemplaza para eliminar la trascendentalidad de la

ecuación. Se utilizan dos métodos de sustitución para este fin: Sustitución de Rekasius y Suma de Kronecker.

**2.1.1 Aplicando la Sustitución de Rekasius.** Al realizar la sustitución de Rekasius (ver Apéndice B), la ecuación característica se convierte en:

$$b_6(T)s^6 + b_5(T)s^5 + b_4(T)s^4 + b_3(T)s^3 + b_2(T)s^2 + b_1(T)s + b_0(T) = 0 \quad (2.3)$$

donde:

$b_6(T) = T^3$	$b_5(T) = 5,1T^3 + 3T^2$
$b_4(T) = 253,2T^3 + 17,1T^2 + 3T$	$b_3(T) = -171,4T^3 + 162,4T^2 + 18,9T + 1$
$b_2(T) = 898,4T^2 - 71,2T + 6,9$	$b_1(T) = 137,8T + 19,6$
$b_0(T) = 23,2$	

A partir del polinomio de la ecuación 2.3 se realiza el arreglo de Routh. Se aplican dos propiedades del arreglo de Routh, mencionadas en las ecuaciones 12 y 13 del Apéndice B. De allí se obtienen los valores reales de  $T_{ck}$ :

$$\mathbf{T}_c = [0,6233; \quad 0,0953; \quad -0,1333; \quad -0,4270; \quad 0,0829] \quad (2.4)$$

y su correspondiente  $\omega_{ck}$ :

$$\omega_c = [2,1110; \quad 2,9124; \quad 0,8404; \quad 15,5032; \quad 3,0352] \quad (2.5)$$

que satisfacen la ecuación 2.3. Finalmente, se realiza un mapeo inverso al que se hizo en la transformación de Rekasius, es decir, a partir de los valores de  $\mathbf{T}_c$ , se hallan los valores de  $\tau_{cj}$ , incluidos los valores del núcleo:

$$\tau_0 = [0,8725; \quad 0,1859; \quad 7,2105; \quad 0,2220; \quad 0,1623] \quad (2.6)$$

Para obtener una descripción completa de las regiones de estabilidad, se calcula la tendencia de las raíces,  $RT$ , de cada frecuencia de cruce  $\omega_{ck}$  y, con ella, el número de raíces inestables para cualquier valor de  $\tau$ ,  $NU(\tau)$ , como se ve en la figura 3.

Las regiones de estabilidad se pueden resumir en la tabla 1 donde se muestran los valores de  $\tau$  que generan un cambio de estabilidad debido al cruce de una raíz característica por el eje imaginario del plano complejo.

Figura 3: Regiones de estabilidad del Ejemplo 2.1

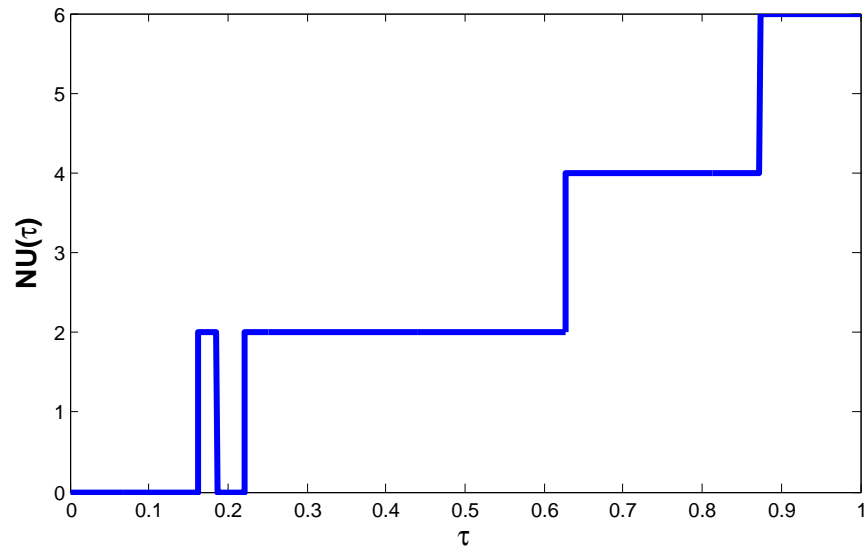


Tabla 1: Zonas de estabilidad para Ejemplo 2.1

$\tau[s]$	RT	Estable/Inestable	$NU(\tau)$
0		ESTABLE	0
$\vdots$		ESTABLE	0
0,1623	+1		
$\vdots$		INESTABLE	2
0,1859	-1		
$\vdots$		ESTABLE	0
0,2220	+1		
$\vdots$		INESTABLE	2
0,8725	+1		
$\vdots$		INESTABLE	6
7,2105	-1		
$\vdots$		INESTABLE	$\vdots$

**2.1.2 Usando el Método de la Suma de Kronecker.** Al aplicar el método de la suma de Kronecker (ver Apéndice B), la ecuación característica auxiliar

del sistema,  $ACE(z)$ , es:

$$ACE(z) = a_1(z) + a_2(z) + \left( \frac{b_1(z) + b_2(z)}{c(z)} \right) = 0 \quad (2.7)$$

donde:

$a_1(z) = 10^5(-17,02z^9 + 1,41z^8 - 225,79z^7 + 1737,28z^6 - 518,58z^5)$ $a_2(z) = 10^5(8061,59z^4 - 6202,65z^3 + 324,88z^2 + 4291,06z - 5593,23)$ $b_1(z) = 10^5(4291,06z^8 + 324,88z^7 - 6202,65z^6 + 8061,59z^5)$ $b_2(z) = 10^5(-5185,79z^4 + 1737,28z^3 - 225,79z^2 + 1,41z - 17,02)$ $c(z) = z^9$
--

Se resuelve la ecuación 2.7 y sólo se consideran aquellos valores de  $z$  con magnitud unitaria, es decir,  $|z| = 1$ . Se reemplazan estos valores de  $z$  en la ecuación característica del sistema y se soluciona para  $\omega$ :

$$\omega_c = [2,9124; \quad 15,5032; \quad 2,1110; \quad 3,0352; \quad 0,8404] \quad (2.8)$$

que son los mismos valores de 2.5 del ejemplo anterior. Con estos valores y con la relación  $z = e^{-\tau\omega i}$  se halla el núcleo de retardos:

$$\tau_0 = [0,1859; \quad 0,2220; \quad 0,8725; \quad 0,1623; \quad 7,2105] \quad (2.9)$$

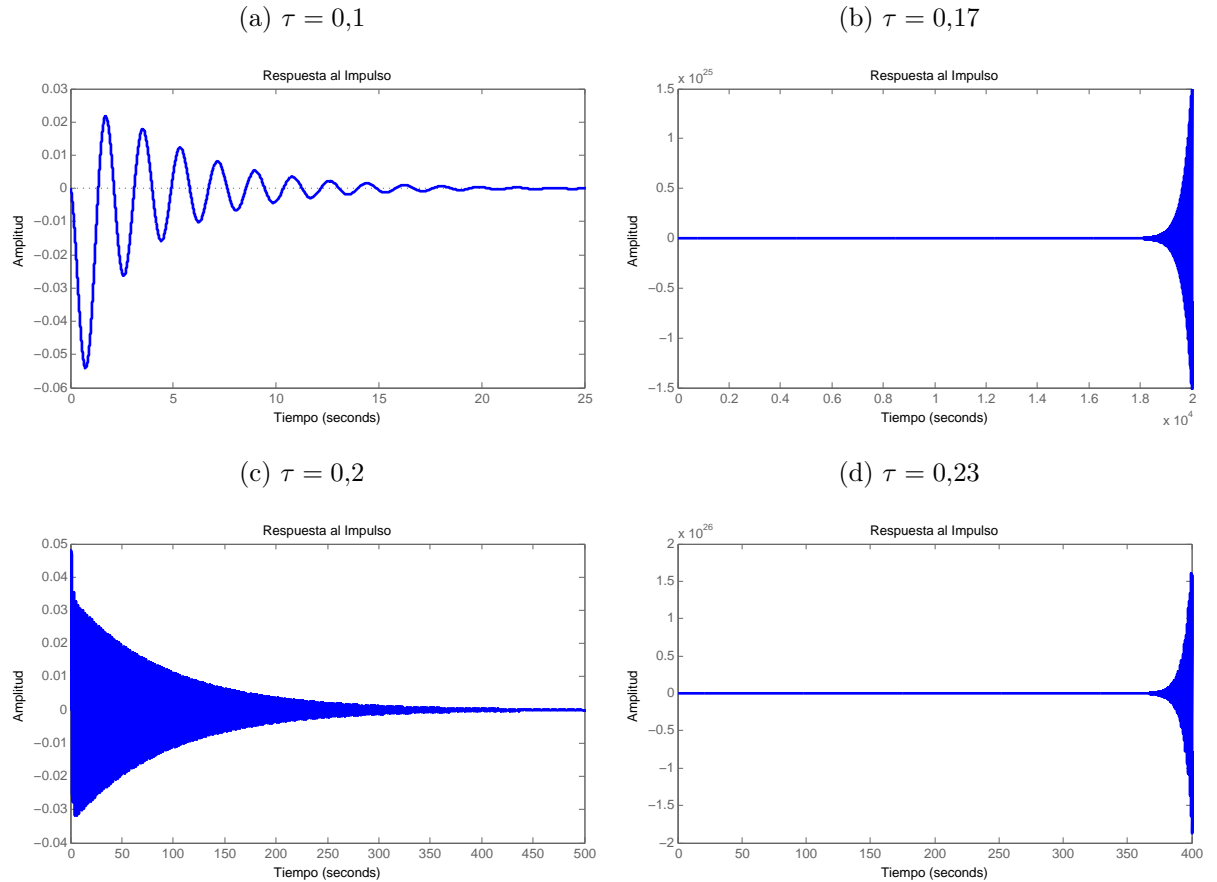
que también coinciden con 2.6 del ejemplo anterior. Al final, se procede de la misma manera: se calcula la tendencia de las raíces,  $RT$ , y con ella la descendencia y las regiones de estabilidad,  $NU(\tau)$ . El resultado de este paso coincide con el del ejemplo anterior y se obtiene la misma gráfica de la Figura 3.

**2.1.3 Validación.** Para verificar que el mapa de estabilidad es correcto se toman cuatro valores arbitrarios de retardo  $\tau$ , dos de ellos hacen que el sistema sea estable y los otros dos lo hacen inestable. Se introduce una perturbación al sistema (impulso) y se observa la respuesta del sistema ante esa excitación (ver Figura 4).

Para  $\tau = 0,1$  el número de raíces inestables ( $NU$ ) es cero, por lo tanto el sistema debe ser estable, como se muestra en la Figura 4a. Lo mismo sucede con  $\tau = 0,2$ , cuya respuesta en el tiempo es la de la Figura 4c. Para  $\tau = 0,17$  se tiene un sistema inestable

con  $NU = 2$ , como se ve en la Figura 4b. De igual forma, para  $\tau = 0,23$  el sistema es inestable como se ve en la Figura 4d.

Figura 4: Respuesta al impulso para el sistema del Ejemplo 2.1



## 2.2. CASO DE EJEMPLO PARA MTDS

Se desarrolla el ejemplo planteado en [31]. Sea un sistema de la forma (4), donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 13,5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5,9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 7,1 & -70,3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Cuando  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , el sistema no tiene ninguna raíz característica inestable. Todas sus raíces características se encuentran en la parte izquierda del plano complejo ( $-2 \pm 2i$

y  $-2,9$ ). Para  $\tau_1 \neq 0$ ,  $\tau_2 \neq 0$ , la ecuación característica del sistema es:

$$\sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^{3-k} a_{kj}(s) e^{-(k\tau_1 + j\tau_2)s} = 0 \quad (2.11)$$

donde:

$a_{00}(s) = s^3 + 6s^2 + 45,5s + 111$	$a_{01}(s) = -5s^2 - 121,3s + 20,1$
$a_{02}(s) = -6s - 203,4$	$a_{03}(s) = 0$
$a_{10}(s) = 5,9s^2 + 4,5s - 42,22$	$a_{11}(s) = 96,6s + 18,3$
$a_{12}(s) = 119,4$	$a_{20}(s) = 0$
$a_{21}(s) = 0$	$a_{30}(s) = 0$

Al igual que en el ejemplo anterior, la ecuación 2.11 tiene infinitas raíces características y nuevamente se reduce el problema a una ecuación de dimensión finita mediante la sustitución de Rekasius o la suma de Kronecker.

**2.2.1 Aplicando la Sustitución de Rekasius.** Al realizar la sustitución de Rekasius (ver Apéndice B), la ecuación característica se convierte en:

$$b_6s^6 + b_5s^5 + b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0 = 0 \quad (2.12)$$

donde:

$b_6(T_1, T_2) = T_1T_2^2$
$b_5(T_1, T_2) = 5,1T_1T_2^2 + T_2^2 + 2T_1T_2$
$b_4(T_1, T_2) = 0,2T_1T_2 + 253,2T_1T_2^2 + 2T_2 + T_1 + 16,9T_2^2$
$b_3(T_1, T_2) = -4,9T_1 + 23,8T_2 + 68,4T_2^2 - 171,4T_1T_2^2 + 94T_1T_2 + 1$
$b_2(T_1, T_2) = -183,2T_1 + 952T_1T_2 + 6,9 - 53,6T_2^2 + 112T_2$
$b_1(T_1, T_2) = 19,6 + 305,6T_2 - 167,8T_1$
$b_0(T_1, T_2) = 23,2$

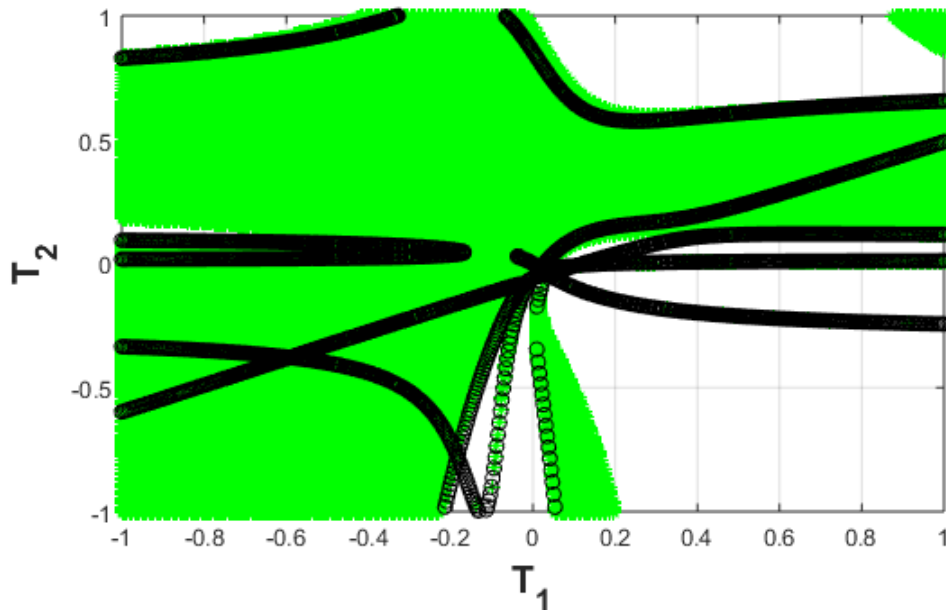
A partir del polinomio de la ecuación 2.12 se realiza el arreglo de Routh y se aplican las propiedades utilizadas para el ejemplo anterior:

$$R_1(T_1, T_2) = 0 \quad (2.13)$$

$$R_{21}(T_1, T_2)R_{22}(T_1, T_2) > 0 \quad (2.14)$$

Para resolver se utiliza un algoritmo iterativo, dejando fija una de las variables y analizando el problema como en el caso de una sola variable para obtener los puntos que son solución a las condiciones presentadas (Ecuaciones 2.13 y 2.14). De aquí se halla un mapa de los puntos que cumplen con cada condición por separado, como se ve en la Figura 5.

Figura 5: Solución de las condiciones, en color negro y verde se presentan la soluciones a 2.13 y 2.14 respectivamente



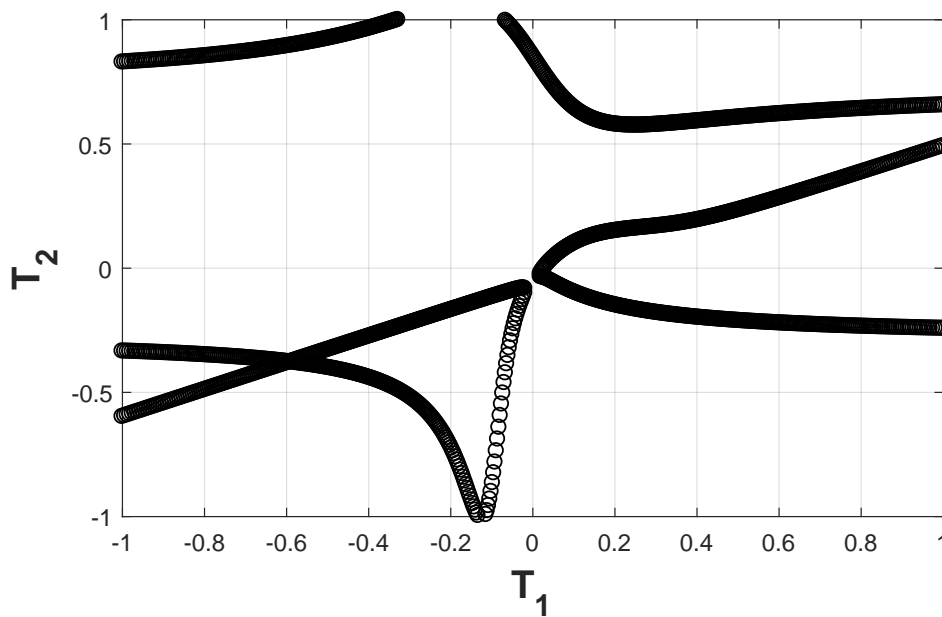
No todos los puntos de la Figura 5 forman parte de la solución. Esta se forma a partir de un conjunto especial de puntos que pertenecen a la intersección de las dos condiciones (Ver Figura 6 y Ecuación 2.15).

$$\bar{R}(T_1, T_2) = [R_1(T_1, T_2) = 0] \cap [R_{21}(T_1, T_2)R_{22}(T_1, T_2) > 0] \quad (2.15)$$

Una vez se obtiene la región  $\bar{R}(T_1, T_2)$ , se hallan, mediante un mapeo inverso, los puntos de los retardos  $(\tau_1, \tau_2)$  pertenecientes al núcleo  $(\wp_0)$  y, mediante la propiedad de periodicidad, la descendencia  $(\wp_n)$  para así obtener el conjunto solución  $(\wp)$  (Ver figura 7).

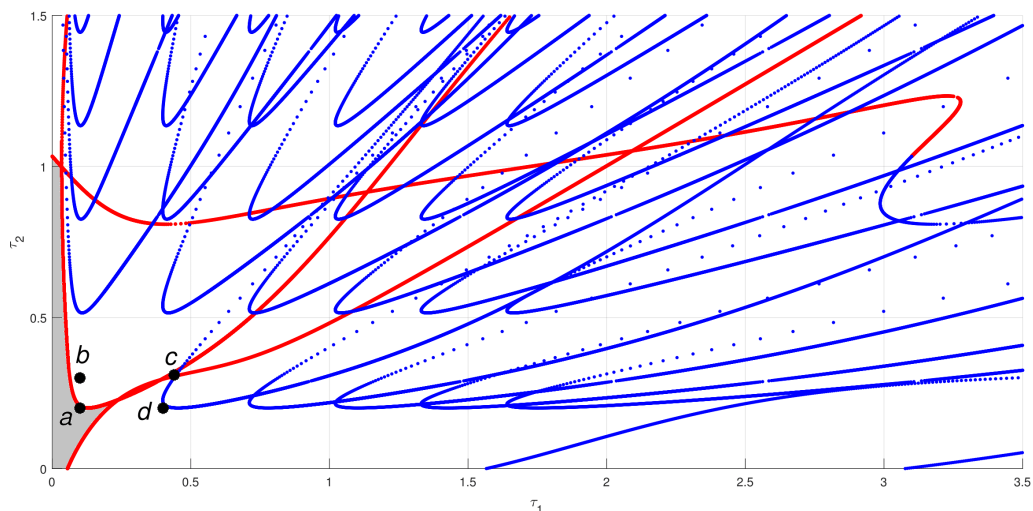
Para encontrar el mapa completo de estabilidad del sistema se encuentra la tendencia

Figura 6: Región  $\bar{R}(T_1, T_2)$ , Intersección de las condiciones 2.13 y 2.14



de las raíces ( $RT$ ) y el número de raíces inestables ( $NU(\tau_1, \tau_2)$ ). Esto permite conocer cuáles regiones del espacio  $\tau_1, \tau_2$  son estables (sombreado en gris en la figura 7) o inestables.

Figura 7: Mapa de estabilidad del sistema, se presenta el núcleo  $\wp_0$  (Rojo) y la descendencia  $\wp_n$  (Azul).



**2.2.2 Usando el Método de la Suma de Kronecker.** Cuando se aplica el método de la Suma de Kronecker, descrito en el Apéndice B, se obtiene una ecuación característica auxiliar en función de dos parámetros  $z_1$  y  $z_2$ :

$$c_6 z_1^6 + c_5 z_1^5 + c_4 z_1^4 + c_3 z_1^3 + c_2 z_1^2 + c_1 z_1 + c_0 = 0 \quad (2.16)$$

donde  $c_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  son polinomios de  $z_2$  de orden 12.

Para solucionar la ecuación 2.16, se define el valor de la variable  $z_2$  en función de un parámetro  $\theta$  que cambie entre  $[0, 2\pi]$ , de manera que  $z_2 = e^{\theta i}$  y se encuentran los valores de  $z_1$  que, además de ser solución, tienen magnitud unitaria [8].

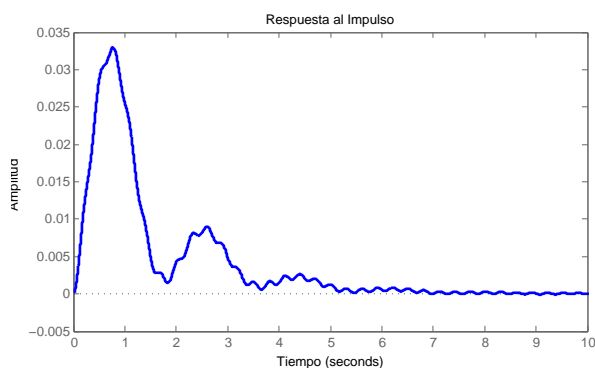
Se reemplazan los valores obtenidos:  $z_1 = e^{-\tau_1 \omega i}$  y  $z_2 = e^{-\tau_2 \omega i}$  en 2.11 y se resuelve para  $\omega$ . Con los valores de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\omega$ , se calculan los valores de  $\tau$  pertenecientes al núcleo y la descendencia, usando la ecuación 23. De aquí en adelante, se encuentra  $RT$  y  $NU(\tau_1, \tau_2)$  como se hizo cuando se usó la Sustitución de Rekasius. De esta manera, se obtienen las regiones de estabilidad que se muestran en la Figura 7.

**2.2.3 Validación.** Tal como en el ejemplo de la Sección 2.1, se escogen cuatro valores de retardo para verificar la estabilidad que generan en el sistema ante una perturbación (respuesta al impulso).

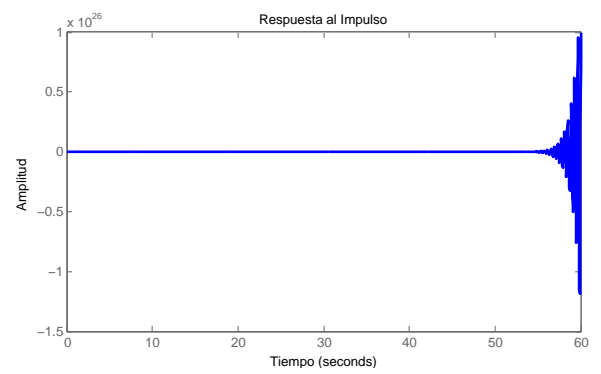
Para los valores  $\tau = [0,1; 0,2]$  (Figura 8a) y  $\tau = [0,44; 0,31]$  (Figura 8c) el sistema se comporta de manera estable. De la misma manera, con  $\tau = [0,1; 0,3]$  (Figura 8b) y  $\tau = [0,4; 0,2]$  (Figura 8d) el sistema se hace inestable.

Figura 8: Respuesta al impulso para el sistema del Ejemplo 2.2

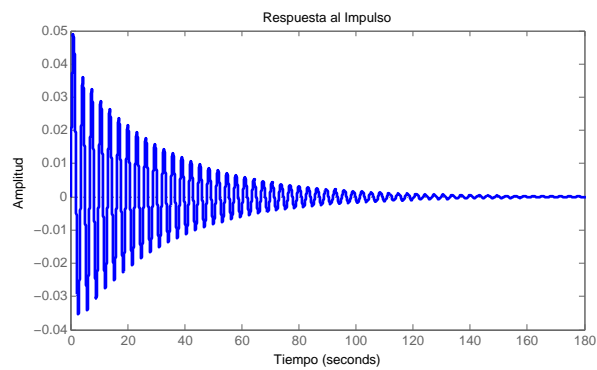
(a)  $\tau_1 = 0,1$  y  $\tau_2 = 0,2$



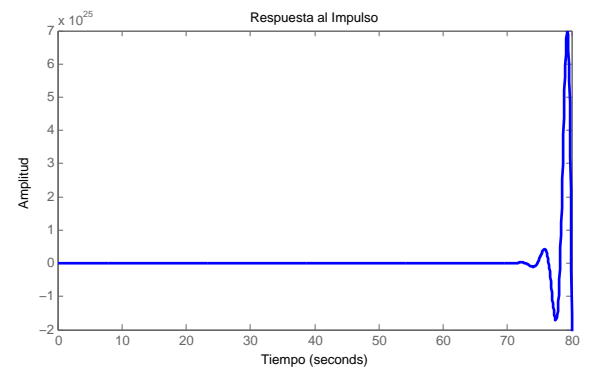
(b)  $\tau_1 = 0,1$  y  $\tau_2 = 0,3$



(c)  $\tau_1 = 0,44$  y  $\tau_2 = 0,31$



(d)  $\tau_1 = 0,4$  y  $\tau_2 = 0,2$



# *Capítulo 3*

## **MODELADO Y SIMULACIÓN DEL TUBO DE RIJKE**

### **3.1. MODELO DEL SISTEMA**

**3.1.1 Principios térmicos.** En el tubo de Rijke se pueden distinguir tres zonas: la zona de calentamiento, la zona *upstream* y la zona *downstream*. Como se ve en la figura 9, la zona de calentamiento se encuentra entre dos secciones transversales ① y ② y se estudia como una sección delgada en el tubo.

En las zonas *upstream* y *downstream* se simplifica el análisis al asumir que características dinámicas, tales como la velocidad de flujo y la temperatura, son constantes en cualquier punto del tubo. Teniendo esto en cuenta, sólo se analiza la coordenada espacial  $x$  (ver figura 9).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y los principios físicos que gobiernan la mecánica de fluidos (continuidad, conservación del momento y conservación de la energía), se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

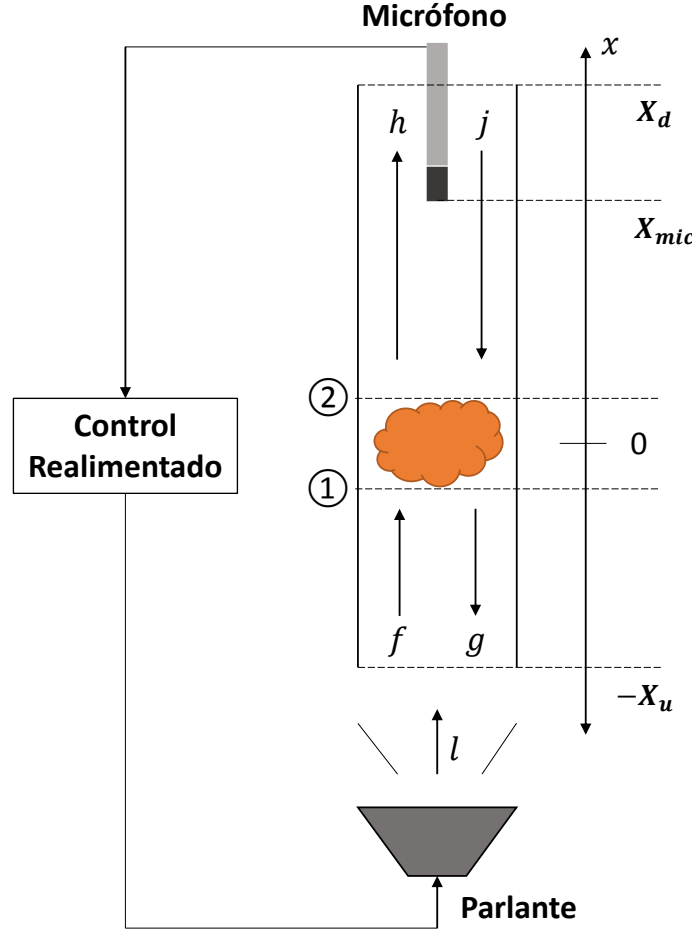
Continuidad

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \tag{3.1}$$

Conservación del momentum

$$p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \tag{3.2}$$

Figura 9: Estructura del experimento del tubo de Rijke, *adaptada de: [21]*.



Conservación de la energía:

$$\left( c_p T_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) \rho_2 u_2 A = \left( c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) \rho_1 u_1 A + Q, \quad (3.3)$$

donde  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  son las masas específicas,  $u_1$ ,  $u_2$  son las velocidades del aire,  $p_1$ ,  $p_2$  son las presiones y  $T_1$ ,  $T_2$  las temperaturas absolutas en las secciones transversales ① y ②.  $c_p$  es la capacidad calorífica,  $Q$  la energía térmica inyectada a la zona de calentamiento y  $A$  es el área de la sección transversal.

Si además se considera el aire que fluye por el tubo como un gas ideal, que cumple con la ley de los gases ideales,

$$p = \rho R_s T \quad (3.4)$$

donde  $R_s$  es la constante específica del gas, y se tienen en cuenta las siguientes relaciones matemáticas:

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma, \quad c_p - c_v = R_s, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R_s, \quad \bar{p}_i \gamma = \bar{c}_i^2 \bar{\rho}_i, \quad (i = 1, 2) \quad (3.5)$$

donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante y  $\gamma$  es la relación de capacidad de calor, se obtienen las ecuaciones 3.6 y 3.7, que relacionan las presiones y velocidades en las secciones transversales ① y ②.

$$p_2 - p_1 + \rho_1 u_1 (u_2 - u_1) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_2 u_2 - p_1 u_1) + \frac{1}{2} \rho_1 u_1 (u_2^2 - u_1^2) = \frac{Q}{A}. \quad (3.7)$$

Debido a la naturaleza no lineal y causal del sistema, es posible hacer una linealización local de 3.6 y 3.7 alrededor de un punto de operación. La presión, la velocidad y la masa específica son linealizadas como se muestra en la ecuación 3.8. La notación “—” hace referencia al punto de operación y la notación “ $\sim$ ” a las variaciones alrededor de este [21].

$$p_i = \bar{p}_i + \tilde{p}_i, \quad u_i = \bar{u}_i + \tilde{u}_i, \quad \rho_i = \bar{\rho}_i + \tilde{\rho}_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.8)$$

**3.1.2 Principios acústicos.** Como el flujo de aire a través del tubo no es forzado, y considerando que la velocidad promedio de flujo  $\bar{u}$  es despreciable con respecto a la velocidad media del sonido  $\bar{c}$ , se puede afirmar que la acústica en el tubo obedece a la ecuación de ondas sonoras unidimensionales (coordenada espacial  $x$ , figura 9):

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación 3.9 es una ecuación diferencial parcial hiperbólica. Este tipo de ecuaciones se pueden resolver mediante una solución de D’Alembert que es exacta. Para la variación en la presión, en el lado *upstream*, se obtiene:

$$\tilde{p}_u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_1}\right), \quad \text{para } -x_u < x < 0, \quad (3.10)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias que satisfacen las condiciones iniciales (Figura

9). De manera similar, para el lado *downstream* se obtiene:

$$\tilde{p}_d(x, t) = h \left( t - \frac{x}{c_2} \right) + j \left( t + \frac{x}{c_2} \right), \quad \text{para } 0 < x < x_d, \quad (3.11)$$

donde  $h$  y  $j$  son funciones similares a  $f$  y  $g$  (Figura 9).  $\bar{c}_1$  y  $\bar{c}_2$  representan la velocidad media del sonido en las secciones *upstream* y *downstream*, respectivamente [21]. A partir de la ecuación de la forma variacional de la conservación del momentum para una partícula en movimiento,

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0, \quad (3.12)$$

se inicia la interconexión entre los eventos térmicos y acústicos que ocurren dentro del tubo. Ahora, derivando la ecuación 3.10 con respecto a los argumentos completos (i.e.,  $t + \frac{x}{c_1}$  o  $t - \frac{x}{c_1}$ ) se obtiene:

$$\frac{\partial \tilde{p}_u}{\partial x} = \frac{1}{c_1} \left[ g' \left( t + \frac{x}{c_1} \right) - f' \left( t - \frac{x}{c_1} \right) \right] \quad (3.13)$$

Reemplazando la ecuación 3.13 en la ecuación 3.12, e integrando con respecto al tiempo, se llega a la ecuación 3.14, que representa la variación de velocidad en la zona *upstream*. Con el mismo análisis, para la zona *downstream* se llega a la ecuación 3.15.

$$\tilde{u}_u(x, t) = \frac{1}{\rho_u c_1} \left[ f \left( t - \frac{x}{c_1} \right) - g \left( t + \frac{x}{c_1} \right) \right] \quad (3.14)$$

$$\tilde{u}_d(x, t) = \frac{1}{\rho_d c_2} \left[ h \left( t - \frac{x}{c_2} \right) - j \left( t + \frac{x}{c_2} \right) \right] \quad (3.15)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.10, 3.11, 3.14 y 3.15 de forma apropiada en las ecuaciones 3.6 y 3.7, utilizando las relaciones dadas en 3.5, y truncando los términos de orden superior de  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{u}$  y  $\tilde{\rho}$ , se llega a la ecuación de forma matricial que representa la dinámica del sistema en lazo abierto:

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \mathbf{Y} \begin{pmatrix} f \\ j \end{pmatrix} + \mathbf{Z}, \quad (3.16)$$

donde las matrices  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$  son:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{\gamma-1} & \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{\gamma-1} & \frac{c_2}{c_1} \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

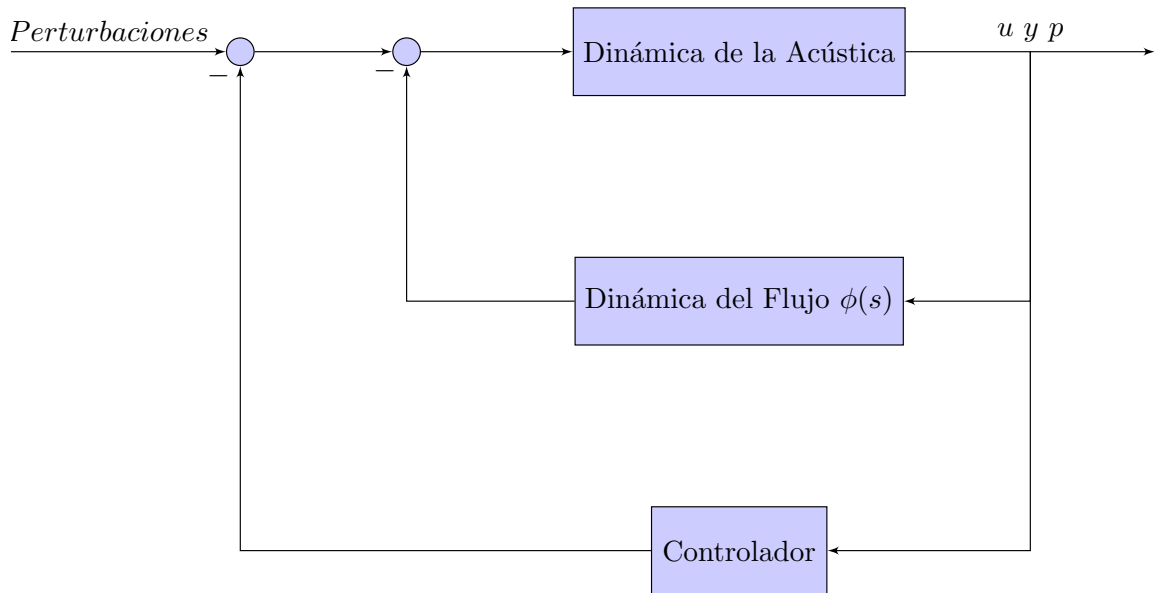
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tilde{Q}}{A\bar{c}_1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

siendo  $\tilde{Q} = Q - \bar{Q}$  las fluctuaciones de energía [9].

### 3.2. CONTROL REALIMENTADO

En la figura 10 se presenta un diagrama de control que permite ilustrar la inclusión del lazo de realimentación.

Figura 10: Diagrama de control del experimento con lazo de control realimentado, Adaptado de: [2]



Cuando al montaje original del tubo se le agregan un micrófono y un parlante (figura 9), se ejerce una presión  $l(t)$  que modifica las condiciones de frontera en el mismo. De

esta manera, las funciones  $f(t)$  y  $j(t)$  se pueden reescribir como:

$$f(t) = -R_u g(t - \tau_u) + l(t - \tau_u/2) \quad (3.20)$$

$$j(t) = -R_d h(t - \tau_d) \quad (3.21)$$

donde  $R_u$  y  $R_d$  son coeficientes de reflexión *upstream* y *downstream*, respectivamente, y ambos son menores que 1.  $\tau_u = 2x_u/\bar{c}_1$  y  $\tau_d = 2x_d/\bar{c}_2$  son los retardos en la trayectoria de ida y vuelta de las ondas acústicas [9].

Si se considera una lógica de control proporcional, la salida del parlante  $l(t)$  y su transformada de Laplace  $L(s)$  son:

$$l(t) = -K p_{mic}(t - \tau_c) \quad \longrightarrow \quad L(s) = -K e^{-\tau_c s} P_{mic}(s) \quad (3.22)$$

donde  $K$  es la ganancia,  $\tau_c$  es el retardo de control agregado y:

$$p_{mic}(t) = h(t - \tau_{mic}) + j(t + \tau_{mic}) \quad \longrightarrow \quad P_{mic}(s) = (e^{-\tau_{mic}s} - R_d e^{-(\tau_d - \tau_{mic})s}) H(s) \quad (3.23)$$

es la variación de presión medida con el micrófono, ubicado a una distancia  $x_{mic}$  de la zona de calentamiento (figura 9).  $\tau_{mic} = x_{mic}/\bar{c}_2$  es el retardo introducido por la posición del micrófono y  $H(s)$  es la transformada de Laplace de  $h(t)$  [21]. A partir de las ecuaciones 3.23 y 3.22, se puede obtener la expresión de la onda de presión creada por el parlante, que está dada por:

$$L(s) = -K (e^{-(\tau_{mic} + \tau_c)s} - R_d e^{-(\tau_d - \tau_{mic} + \tau_c)s}) H(s) \quad (3.24)$$

Los parámetros de control en la ecuación 3.24 generalmente se escogen de manera empírica [6]. En este trabajo se busca encontrar un mapa completo de estabilidad que muestre todos los posibles valores de dichos parámetros.

Como se explica en [9], las variaciones de calor  $\tilde{Q}$  están relacionadas de forma causal con las variaciones en la velocidad del aire  $\tilde{u}$  de la forma:

$$\tilde{Q}(s) = \phi(s) \tilde{U}_1(s) \quad (3.25)$$

Esta conexión se puede denotar mediante la función  $\phi(s)$  en la ecuación 3.26, descrita

y utilizada con éxito por varios autores [11, 12, 14].

$$\phi(s) = \frac{a}{bs + 1} \quad (3.26)$$

Como ya se mencionó, la velocidad  $\tilde{u}_1$  depende de las ondas de presión  $f$  y  $g$  según la ecuación 3.14. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación 3.14 y reemplazando en la ecuación 3.25 se obtiene:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{a}{bs + 1} \left[ -\frac{R_u e^{-\tau_u s} + 1}{\rho_1 \bar{c}_1} G(s) + \frac{-\tau_u s/2}{\rho_1 \bar{c}_1} L(s) \right] \quad (3.27)$$

A partir de las ecuaciones 3.20, 3.21, 3.24 y 3.27, y reemplazando adecuadamente en la ecuación 3.16, se llega a la forma matricial que expresa el sistema completo:

$$\mathbf{M}(s) \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

donde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$M_{11} = X_{11} + R_u e^{-\tau_u s} Y_{11} \quad (3.30)$$

$$M_{12} = X_{12} + R_d e^{-\tau_d s} Y_{12} + K e^{-(\tau_c + \tau_u/2)s} Y_{11} (e^{-\tau_{mic} s} - R_d e^{-(\tau_d - \tau_{mic})s}) \quad (3.31)$$

$$M_{21} = X_{21} + R_u e^{-\tau_u s} Y_{21} + \phi(s) (R_u e^{-\tau_u s} + 1) / (A \rho_1 \bar{c}_1^2) \quad (3.32)$$

$$M_{22} = X_{22} + R_d e^{-\tau_d s} Y_{22} + K e^{-(\tau_c + \tau_u/2)s} (e^{-\tau_{mic} s} - R_d e^{-(\tau_d - \tau_{mic})s}) \left[ Y_{21} + \frac{\phi(s)}{(A \rho_1 \bar{c}_1^2)} \right] \quad (3.33)$$

La ecuación característica del sistema se obtiene de 3.34:

$$\det(\mathbf{M}) = 0 \quad (3.34)$$

y tiene términos trascendentes debido a los retardos producidos por la acústica y al retardo de control [21].

A partir de la ecuación 3.34, se obtiene la ecuación característica en función de los parámetros del sistema:

$$CE(s, \tau_u, \tau_d, \tau_{mic}, \tau_c, K) = \left( \chi_0 + \sum_{i=1} \chi_i e^{-\tau_i s} \right) s + \eta_0 + \sum_{j=1} \eta_j e^{-\tau_j s} = 0 \quad (3.35)$$

donde  $\chi_i, \eta_j$  son funciones de los parámetros del sistema y  $\tau_i, \tau_j$  son combinaciones lineales de los retardos  $\tau_u, \tau_d, \tau_{mic}, \tau_c$ .

La ecuación característica de 3.35 representa un sistema NTDS por causa de los términos exponenciales en el factor que multiplica al término de  $s$  de mayor grado. Para garantizar la estabilidad de la ecuación 3.35 se deben satisfacer dos condiciones [19]:

**Teorema 3.1.** *La ecuación asociada a 3.35:*

$$CE(s, \tau_u, \tau_d, \tau_{mic}, \tau_c, K) = \left( \chi_0 + \sum_{i=1} \chi_i e^{-\tau_i s} \right) = 0 \quad (3.36)$$

*debe ser estable. Es decir, todas las raíces características de 3.36 deben pertenecer al lado izquierdo del plano complejo,  $\mathbf{C}^-$ .*

Este teorema se conoce como la condición de estabilidad con respecto al retardo (delay-stabilizability condition, en inglés). La condición del Teorema 3.1 es necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad de 3.35.

**Teorema 3.2.** *La condición necesaria y suficiente para que el sistema en 3.35 sea estable, es que todas sus raíces características pertenezcan al lado izquierdo del plano complejo,  $\mathbf{C}^-$ .*

Para el análisis y control del sistema se utiliza el paradigma del CTCR [18,20]. Cabe resaltar que si no se cumple con el Teorema 3.1 no hace falta seguir los pasos del CTCR.

### 3.3. CASO DE ESTUDIO EJEMPLO

Con el fin de ilustrar la aplicación de la metodología del CTCR en el experimento del tubo de Rijke, se presenta un caso de estudio tomado de [35] en el que se usan los

Tabla 2: Parámetros de operación para el experimento del Tubo de Rijke

Parámetro	Valor	Unidad
$R_u$	0,93	—
$R_d$	0,93	—
$\gamma$	1,4	—
$A$	0,00075	$m^2$
$\bar{\rho}_1$	1,2	$Kg/m^3$
$\bar{c}_1$	340	$m/s$
$a$	200	—
$b$	0,002	—

parámetros de operación de la tabla 2.

En primer lugar se aplica el CTCR para el sistema sin control realimentado y se encuentra el mapa de estabilidad para este caso. En seguida se escoge uno de los puntos que genera inestabilidad en el sistema, se introduce el control realimentado y se obtiene el mapa de estabilidad en función de los parámetros de control.

**3.3.1 Análisis sin control realimentado.** La ecuación característica del sistema sin control realimentado se obtiene al calcular el determinante de  $\mathbf{M}$  (ecuación 3.34) para  $K = 0$ :

$$\begin{aligned}
 CE(s, \tau_u, \tau_d) = & 2Ab\bar{c}_1^2\bar{\rho}_1(R_u R_d e^{-(\tau_u + \tau_d)s} - 1)s - R_d a(1 - \gamma)e^{-\tau_d s} - \\
 & R_u a(\gamma - 1)e^{-\tau_u s} + R_u R_d(2Ab\bar{c}_1^2\bar{\rho}_1 + a\gamma - a)e^{-(\tau_u + \tau_d)s} \\
 & + a - a\gamma - 2Ab\bar{c}_1^2\bar{\rho}_1
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Debido a que la ecuación 3.37 representa un sistema NTDS, es necesario evaluar la condición de estabilidad del Teorema 3.1:

$$R_u R_d e^{-(\tau_u + \tau_d)s} - 1 = 0 \tag{3.38}$$

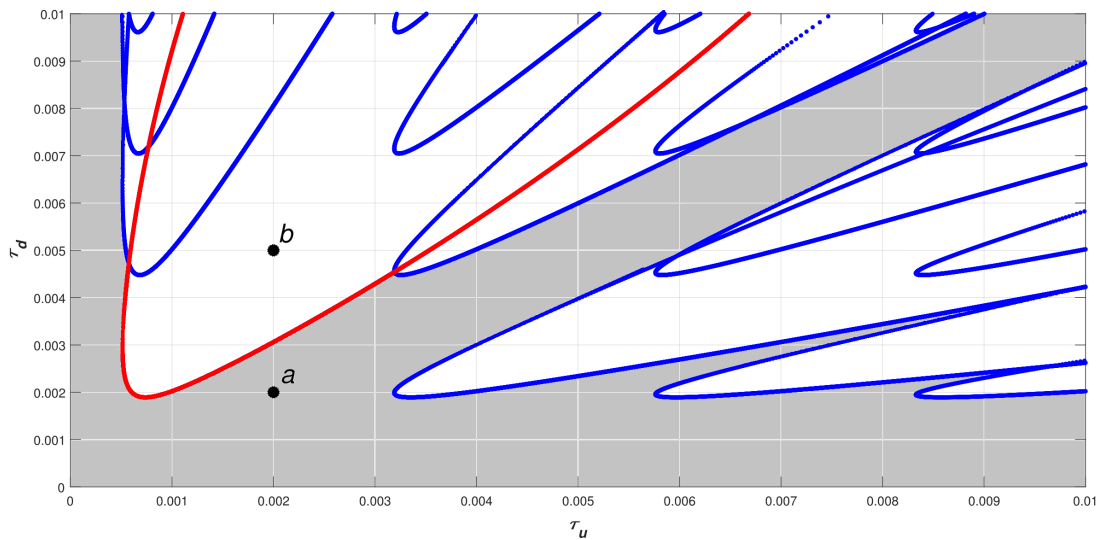
Por la naturaleza de los coeficientes de reflexión del sistema ( $R_u$  y  $R_d$ ), se puede decir que  $|R_u R_d| < 1$  y por consiguiente:

$$|e^{-(\tau_u + \tau_d)s}| = \frac{1}{|R_u R_d|} > 1 \tag{3.39}$$

Todos los valores de  $s$  que satisfacen esta condición tienen parte real negativa. Por lo tanto se cumple con el Teorema 3.1 y se puede continuar aplicando el CTCR a la ecuación 3.37.

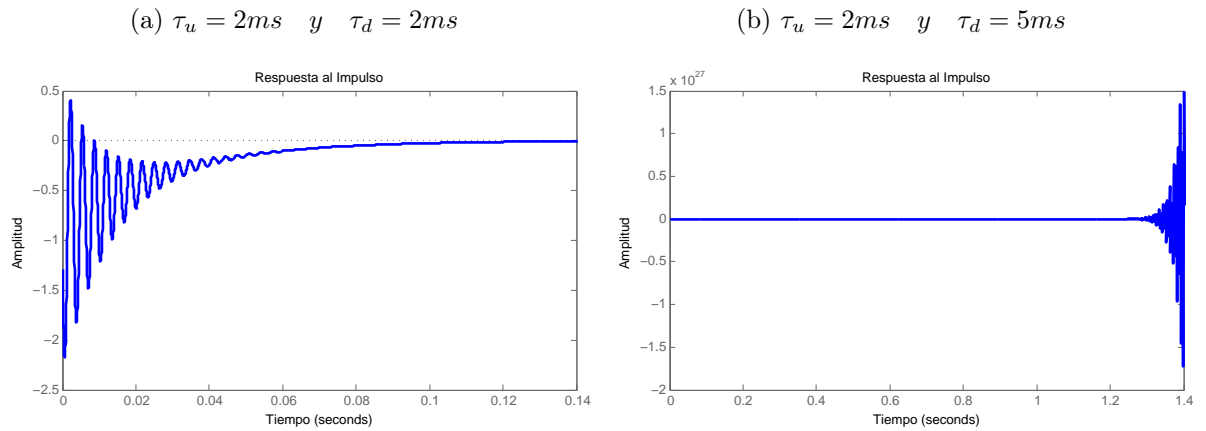
Finalmente se obtiene el mapa de estabilidad del sistema antes de aplicar la realimentación con retardos:

Figura 11: Mapa de estabilidad del experimento en lazo abierto, se presenta el núcleo  $\wp_0$  (Rojo) y la descendencia  $\wp_n$  (Azul).



**3.3.1.1 Validación.** Después de encontrar el mapa de estabilidad del sistema en el espacio  $(\tau_u, \tau_d)$ , se escogen dos puntos, uno que genere estabilidad y otro que genere inestabilidad, y se estimula el sistema con los parámetros correspondientes a cada punto con una entrada perturbación (respuesta al impulso). Las gráficas para el comportamiento estable (Figura 12a) y el comportamiento inestable (Figura 12b) se presentan a continuación:

Figura 12: Respuesta al impulso del experimento en lazo abierto para diferentes valores de retardo. 12a punto estable y 12b punto inestable



Como se esperaba, el sistema tuvo un comportamiento estable para  $(\tau_u = 2ms, \tau_d = 2ms)$  y un comportamiento inestable para  $(\tau_u = 2ms, \tau_d = 5ms)$ . Una observación importante es que para  $\tau_u = \tau_d$ , es decir, con la llama ubicada justo en el centro del tubo, el sistema es estable como fue descrito experimentalmente en [3, 16, 22] y teóricamente en [21].

**3.3.2 Análisis con control realimentado.** Para este análisis lo primero que se hace es seleccionar la ubicación de la fuente de calor y la ubicación del micrófono. Conociendo estos valores se pueden determinar los retardos asociados como se observa en la tabla 3

Tabla 3: Parámetros de operación para el control del experimento del Tubo de Rijke en un punto inestable

Parámetro	Valor	Unidad
$\tau_u$	0,57	<i>ms</i>
$\tau_d$	2,42	<i>ms</i>
$x_u + x_d$	50,80	<i>cm</i>
$x_{mic}$	38,56	<i>cm</i>
$\tau_{mic}$	1,13	<i>ms</i>

La ecuación característica del sistema con control realimentado se obtiene calculando el determinante de  $\mathbf{M}$  (ecuación 3.34) y está dada por:

$$\begin{aligned}
CE(s, \tau_u, \tau_d, \tau_{mic}, \tau_c, K) = & 2Ab\bar{c}_1^2\bar{\rho}_1(KR_d e^{-(\tau_c+\tau_d-\tau_{mic}+\tau_u/2)s} - Ke^{-(\tau_c+\tau_{mic}+\tau_u/2)s} \\
& + R_u R_d e^{-(\tau_u+\tau_d)s} - 1)s + a - a\gamma - 2A\bar{c}_1^2\bar{\rho}_1 + R_d a(\gamma - 1)e^{-\tau_d s} + R_u a(1 - \gamma)e^{-\tau_u s} \\
+ (\gamma - 1)aR_u R_d e^{-(\tau_u+\tau_d)s} + & 2K(1 - \gamma)a e^{-(\tau_c+\tau_{mic}+\tau_u/2)s} + 2K(\gamma - 1)aR_d e^{-(\tau_c+\tau_d-\tau_{mic}+\tau_u/2)s} \\
& + 2A\bar{c}_1^2\bar{\rho}_1(KR_d e^{-(\tau_c+\tau_d-\tau_{mic}+\tau_u/2)s} + R_u R_d e^{-(\tau_u+\tau_d)s} - Ke^{-(\tau_c+\tau_{mic}+\tau_u/2)s}) = 0 \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Al igual que en el análisis anterior, debido a que la ecuación 3.40 representa un sistema NTDS, es necesario evaluar la condición de estabilidad del Teorema 3.1:

$$KR_d e^{-(\tau_c+\tau_d-\tau_{mic}+\tau_u/2)s} - Ke^{-(\tau_c+\tau_{mic}+\tau_u/2)s} + R_u R_d e^{-(\tau_u+\tau_d)s} - 1 = 0 \quad (3.41)$$

Lo anterior define una expresión para los valores límite de la ganancia ( $K$ ):

$$|K| < \frac{1 - |R_u R_d|}{1 + |R_d|} \quad (3.42)$$

Utilizando los parámetros  $R_u$  y  $R_d$  de la Tabla 2, la condición límite de ganancia se traduce en:  $|K| < 0,07$ .

Al fijar los parámetros  $\tau_u$ ,  $\tau_d$  y  $\tau_{mic}$ , la ecuación característica sólo dependerá de  $s$ ,  $\tau_c$  y  $K$  y se puede reescribir así:

$$CE(s, \tau_c, K) = A(s) + Ke^{-\tau_c s} B(s) \quad (3.43)$$

donde  $A(s)$ ,  $B(s)$  son cuasipolinomios con términos exponenciales en  $s$ . Reemplazando  $s = \omega i$  en la ecuación 3.43 y analizando la magnitud y la fase de la ecuación como se sugiere en [10, 21], se resuelven los parámetros de control ( $K, \tau_c$ ) en función de la frecuencia:

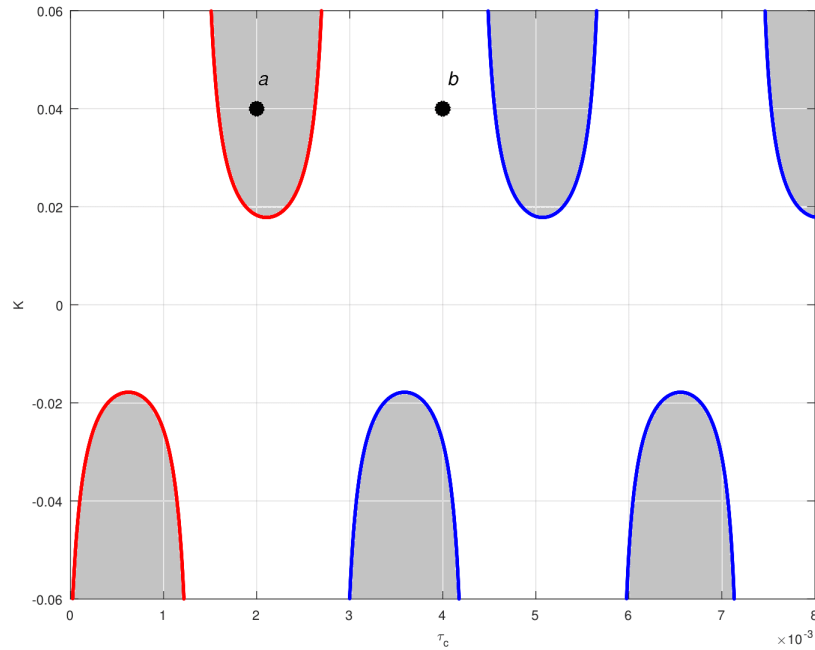
$$\tau_c(\omega) = \frac{1}{\omega} [i\pi + \angle B(\omega i) - \angle A(\omega i)] \quad (3.44)$$

$$K(\omega) = (-1)^{i+1} \left| \frac{A(\omega i)}{B(j\omega i)} \right|, i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

A partir de las ecuaciones 3.44, 3.45 y de la condición de 3.42, se obtiene el conjunto de parámetros ( $K, \tau_c$ ) pertenecientes al núcleo y la descendencia de las líneas que

forman el mapa de estabilidad del sistema. Este mapa de estabilidad se presenta en la figura 13, donde las regiones estables están sombreadas en color gris.

Figura 13: Mapa de estabilidad del experimento con lazo de control, se presenta el núcleo  $\varphi_0$  (Rojo) y la descendencia  $\varphi_n$  (Azul).



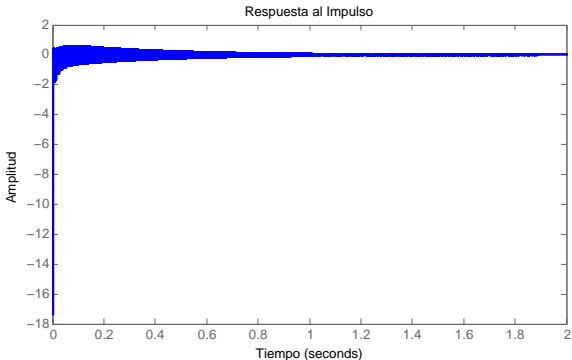
**3.3.2.1 Validación.** Para incluir el lazo de control realimentado con retardos se escogió un punto que genera inestabilidad, con los parámetros de la Tabla 3, y se obtuvo el mapa de estabilidad de la figura 13.

De la misma manera que para el caso sin control, se escogen dos puntos para verificar el comportamiento estable e inestable al aplicar la realimentación. El resultado se muestra en la figura 14.

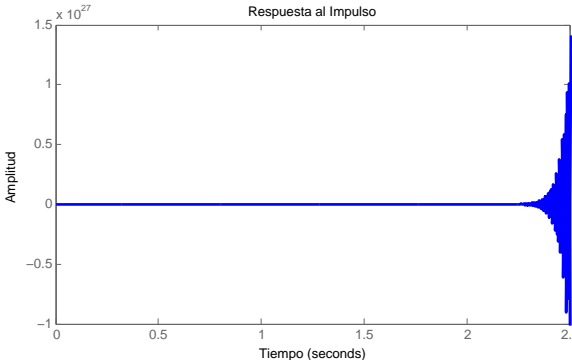
Se verifica que el sistema tuvo un comportamiento estable para  $(K = 0,04, \tau_c = 2ms)$  y un comportamiento inestable para  $(K = 0,04, \tau_c = 4ms)$ .

Figura 14: Respuesta al impulso del experimento con lazo de control para diferentes valores de retardo. 14a punto estable y 14b punto inestable

(a)  $\tau_c = 2ms$  y  $K = 0,04$



(b)  $\tau_c = 4ms$  y  $K = 0,04$



## *Capítulo 4*

# *CONCLUSIONES*

En este trabajo se considera la dinámica de la Inestabilidad Termoacústica (TAI), un problema de gran interés para los científicos en el campo de la combustión y un importante objeto de estudio tanto teórica como experimentalmente. También es un tema de interés en la industria de motores, debido a que la presencia de este fenómeno genera mal funcionamiento e incluso daños en sistemas como combustores.

Como una aproximación al comportamiento de sistemas de combustión se modela y analiza (a manera de simulación) el experimento del Tubo de Rijke, un dispositivo rudimentario que puede ser analizado como un sistema lineal e invariante en el tiempo con múltiples retardos (LTI-MTDS).

Para abordar el análisis del experimento, se comenzó con una revisión detallada del modelo termoacústico, partiendo de los principios que rigen su comportamiento, hasta llegar a una forma variacional de su dinámica. El proceso continuó hasta encontrar una ecuación característica representativa, la cual implica múltiples retardos racionalmente independientes, por lo cual, esta ecuación se convierte en una ecuación trascendente con infinitas raíces que resulta compleja de resolver.

Para realizar el análisis de estabilidad se hizo uso de una herramienta matemática llamada Paradigma del Tratamiento en Grupo de Raíces Características (CTCR), que aunque ha sido ampliamente utilizada en el análisis de TAI, también es aplicable en diferentes campos de la ciencia y la tecnología. Como acercamiento a esta metodología se estudiaron casos de ejemplo considerando diferentes sistemas con retardo en el tiempo, antes de analizar directamente el problema seleccionado (TAI).

Para realizar las simulaciones y la implementación del algoritmo del CTCR se usó el software MATLAB<sup>®</sup>. En este software, el uso de matemática simbólica exige un elevado costo computacional. Sin embargo, la programación fue más eficiente con las partes donde sólo fue necesario realizar cálculos numéricos.

## *Capítulo 5*

# ***RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS***

En este proyecto se realizó el análisis teórico de estabilidad en diferentes tipos de sistemas usando el CTCR a través de un algoritmo presentado. Se sugiere optimizar la programación de este algoritmo para reducir el costo computacional. Específicamente se recomienda evitar el uso de variables de tipo simbólico o utilizar un software adecuado para el tratamiento de este tipo de variables.

Uno de los sistemas analizados usando el CTCR fue el experimento del tubo de Rijke, que se estudió como caso particular de TAI, mediante simulaciones. Se invita a realizar la implementación de este experimento en un trabajo futuro, partiendo de la información aquí presentada. Así mismo, se invita a continuar con la investigación sobre nuevas metodologías, diferentes o complementarias al CTCR, que permitan analizar la dinámica y la estabilidad de diversos sistemas.

Otro punto de partida para un futuro proyecto es la transversalidad del paradigma del CTCR, que se puede aplicar en la solución de problemas en campos como la ingeniería, la biología, la física, la investigación operativa y la economía [29].

## *Bibliografía*

- [1] BREWER, J. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 25, 9 (Sep 1978), 772–781.
- [2] CANDEL, S. Combustion dynamics and control: Progress and challenges. *Proceedings of the Combustion Institute* 29, 1 (2002), 1 – 28.
- [3] CARVALHO, J., FERREIRA, M., BRESSAN, C., AND FERREIRA, J. Definition of heater location to drive maximum amplitude acoustic oscillations in a rijke tube. *Combustion and Flame* 76, 1 (1989), 17 – 27.
- [4] CAZALENS, M., ROUX, S., SENSIAU, C., AND POINSOT, T. Combustion instability problems analysis for high-pressure jet engine cores. *Journal of propulsion and power* 24, 4 (2008), 770–778.
- [5] CEPEDA-GOMEZ, R. Finding the exact delay bound for consensus of linear multi-agent systems. *International Journal of Systems Science* 47, 11 (2016), 2598–2606.
- [6] DOWLING, A., AND MORGANS, A. Feedback control of combustion oscillations. *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005), 151–182.
- [7] EPPERLEIN, J. P., BAMIEH, B., AND ASTROM, K. J. Thermoacoustics and the rijke tube: Experiments, identification, and modeling. *IEEE Control Systems* 35, 2 (April 2015), 57–77.
- [8] ERGENC, A. F., OLGAC, N., AND FAZELINIA, H. Extended kronecker summation for cluster treatment of LTI systems with multiple delays. *SIAM Journal on Control and Optimization* 46, 1 (2007), 143–155.
- [9] EVESQUE, S. M.-N. *Adaptive control of combustion oscillations*. PhD thesis, University of Cambridge, 2001.

- [10] FILIPOVIĆ, D., AND OLGAC, N. Delayed resonator with speed feedback – design and performance analysis. *Mechatronics* 12, 3 (2002), 393 – 413.
- [11] FLEIFIL, M., ANNASWAMY, A., GHONEIM, Z., AND GHONIEM, A. Response of a laminar premixed flame to flow oscillations: A kinematic model and thermoacoustic instability results. *Combustion and Flame* 106, 4 (1996), 487 – 510.
- [12] GELBERT, G., MOECK, J. P., PASCHEREIT, C. O., AND KING, R. Feedback control of unstable thermoacoustic modes in an annular rijke tube. *Control Engineering Practice* 20, 8 (2012), 770–782.
- [13] HESTER, J. J., STONE, J. M., SCOWEN, P. A., JUN, B.-I., GALLAGHER III, J. S., NORMAN, M. L., BALLESTER, G. E., BURROWS, C. J., CASERTANO, S., CLARKE, J. T., ET AL. Wfpc2 studies of the crab nebula. iii. magnetic rayleigh-taylor instabilities and the origin of the filaments. *The Astrophysical Journal* 456 (1996), 225.
- [14] KOPITZ, J. *Kombinierte anwendung von strömungssimulation, netzwerkmodellierung und regelungstechnik zur vorhersage thermoakustischer instabilitäten*. PhD thesis, Universität München, 2007.
- [15] KULL, H.-J. Theory of the rayleigh-taylor instability. *Physics Reports* 206, 5 (1991), 197–325.
- [16] MATVEEV, K. *Thermoacoustic instabilities in the Rijke tube: experiments and modeling*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2003.
- [17] OGATA, K. *System dynamics*. Prentice-Hall, 1978.
- [18] OLGAC, N., AND SIPAHI, R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47, 5 (2002), 793–797.
- [19] OLGAC, N., AND SIPAHI, R. A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems. *Automatica* 40, 5 (2004), 847 – 853.
- [20] OLGAC, N., AND SIPAHI, R. An improved procedure in detecting the stability robustness of systems with uncertain delay. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51, 7 (July 2006), 1164–1165.

- [21] OLGAC, N., ZALLUHOGLU, U., AND KAMMER, A. S. A new perspective in designing delayed feedback control for thermo-acoustic instabilities (TAI). *Combustion Science and Technology* 187, 5 (2015), 697–720.
- [22] RAUN, R., BECKSTEAD, M., FINLINSON, J., AND BROOKS, K. A review of rijke tubes, rijke burners and related devices. *Progress in Energy and Combustion Science* 19, 4 (1993), 313 – 364.
- [23] RAYLEIGH. The Explanation of Certain Acoustical Phenomena. *Nature* 18 (July 1878), 319–321.
- [24] RAYLEIGH, J. *The Theory of Sound*. No. v. 1 in The Theory of Sound. Macmillan, 1894.
- [25] READ, K. Experimental investigation of turbulent mixing by rayleigh-taylor instability. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12, 1-3 (1984), 45–58.
- [26] REKASIUS, Z. V. A stability test for systems with delays. *Joint Automatic Control Conference* 17 (1980), 39.
- [27] RIJKE, P. L. Lxxi. notice of a new method of causing a vibration of the air contained in a tube open at both ends. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 17, 116 (1859), 419–422.
- [28] SHARP, D. H. An overview of rayleigh-taylor instability. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12, 1-3 (1984), 3IN111–10IN1018.
- [29] SIPAHI, R., I. NICULESCU, S., ABDALLAH, C. T., MICHIELS, W., AND GU, K. Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems* 31, 1 (Feb 2011), 38–65.
- [30] SIPAHI, R., AND OLGAC, N. Degenerate cases in using the direct method. In *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (2003), American Society of Mechanical Engineers, pp. 2201–2210.
- [31] SIPAHI, R., AND OLGAC, N. Complete stability robustness of third-order LTI multiple time-delay systems. *Automatica* 41, 8 (2005), 1413 – 1422.

- [32] TOIMIL MOLARES, M., BALOGH, A., CORNELIUS, T., NEUMANN, R., AND TRAUTMANN, C. Fragmentation of nanowires driven by rayleigh instability. *Applied physics letters* 85, 22 (2004), 5337–5339.
- [33] TRYGGVASON, G. Numerical simulations of the rayleigh-taylor instability. *Journal of Computational Physics* 75, 2 (1988), 253–282.
- [34] YOUNGS, D. L. Numerical simulation of turbulent mixing by rayleigh-taylor instability. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 12, 1-3 (1984), 32–44.
- [35] ZALLUHOGLU, U., KAMMER, A. S., AND OLGAC, N. Feedback stabilization of a thermoacoustic device with experiments. In *2015 American Control Conference (ACC)* (July 2015), pp. 4579–4584.
- [36] ZALLUHOGLU, U., KAMMER, A. S., AND OLGAC, N. Delayed feedback control laws for rijke tube thermoacoustic instability, synthesis, and experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24, 5 (Sept 2016), 1861–1868.

# ANEXOS

# A TIPOS DE SISTEMAS CON RETARDO EN EL TIEMPO

## SISTEMAS CON RETARDO ÚNICO EN EL TIEMPO (STDS)

Considérese un sistema LTI con un sólo retardo en el tiempo como el de la ecuación 1 [18].

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}x(t - \tau) \quad x(n \times 1), \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}(n \times n), \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

En este tipo de sistemas la ecuación característica es de la forma:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\tau s}) = 0 \quad (2)$$

La ecuación 2 es una ecuación trascendente debido a los términos exponenciales, con un número infinito de raíces lo que dificulta el análisis de estabilidad. La forma general de esta ecuación característica es:

$$a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \dots + a_0(s) = \sum_{k=0}^n a_k(s)e^{-k\tau s} = 0 \quad (3)$$

donde cada  $a_k(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $n - k$ , con coeficientes reales.

## SISTEMAS CON MÚLTIPLES RETARDOS EN EL TIEMPO (MTDS)

Considérese un sistema LTI con múltiples retardos en el tiempo como el de la ecuación 4 [31].

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \sum_{r=1}^p \mathbf{B}_r x(t - \tau_r) \quad x(n \times 1), \mathbf{A}, \mathbf{B}_r \in \mathbb{R}(n \times n), \tau_r \in \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

donde  $p$  es el número de retardos racionalmente independientes presentes en el sistema. En este tipo de sistemas la ecuación característica es de la forma:

$$\det \left( s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \sum_{r=1}^p \mathbf{B}_r e^{-\tau_r s} \right) = 0 \quad (5)$$

similar a la ecuación 2, pero que depende de todos sus retardos. Se puede reescribir así:

$$A_0(s) + A_{p+1}(s, \tau_1, \dots, \tau_p) + \sum_{r=1}^p e^{-n_r \tau_r s} A_r(s, \tau_1, \dots, \tau_r - 1, \tau_r + 1, \dots, \tau_p) = 0 \quad (6)$$

donde  $A_0(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $n$  y  $A_r$  y  $A_{p+1}$  son cuasipolinomios en  $s$  afectados por los términos exponenciales.

## SISTEMAS NEUTRALES CON RETARDO EN EL TIEMPO (NTDS)

Considérese un sistema LTI, con retardo en el tiempo como el de la ecuación 7 [19].

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}x(t - \tau) + \mathbf{C}\dot{x}(t - \tau) \quad x(n \times 1), \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}(n \times n), \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

En este tipo de sistemas la ecuación característica se define por:

$$\det \left( s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\tau s} - \mathbf{C}s e^{-\tau s} \right) = 0 \quad (8)$$

y su forma general es:

$$a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \dots + a_0(s) = \sum_{k=0}^n a_k(s)e^{-k\tau s} = 0 \quad (9)$$

donde cada  $a_k(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $n$  o menor con coeficientes reales. Nótese que la ecuación 9 tiene la misma forma de 3, por lo tanto el sistema será de tipo “Neutral” si cualquiera de los polinomios  $a_k(s)$ , excepto  $a_0(s)$ , contiene un término de la forma  $s^n$ . En otras palabras, el sistema será NTDS si el término  $s$  de grado  $n$  se ve afectado por el término exponencial  $e^{-k\tau s}$ .

## B MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN

El primer paso en la aplicación del paradigma CTCR es la obtención del núcleo. Para esto existen varias metodologías. A continuación se presentan las dos que fueron empleadas en el trabajo.

### SUSTITUCIÓN DE REKASIUS

La sustitución de Rekasius [26], que está dada por:

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}, \quad T \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

permite hacer un mapeo de los términos exponenciales de la ecuación 1.3 en polinomios de  $s$ . El resultado es la suma de polinomios de  $s$  parametrizados en  $T$  (ecuación 11) con las mismas raíces características imaginarias de la ecuación 1.2.

$$\sum_{k=0}^{2n} b_k(T) s^k = 0 \quad (11)$$

Para encontrar los rangos estables del sistema se usa como herramienta el arreglo de Routh, tomando ventaja de una regla matemática probada y aceptada: si existe un par de raíces características de  $11$  puramente imaginarias y simétricas con respecto al origen, el único término en la fila correspondiente a  $s^1$ , llamado  $R_1(T)$ , debe ser cero [17].

$$R_1(T) = 0 \quad (12)$$

Sólo las soluciones reales de la ecuación 12 se tienen en cuenta. Luego se considera otra propiedad del arreglo de Routh que dice que los dos elementos correspondientes a

$s^2$ , llamados  $R_{21}(T)$  y  $R_{22}(T)$ , deben satisfacer la ecuación 13, para un valor real  $T_c$ .

$$R_{21}(T_c)s^2 + R_{22}(T_c) = 0 \quad (13)$$

Reemplazando  $s = \omega i$  en la ecuación 13 se pueden calcular las raíces características imaginarias,  $\omega_c$ :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{R_{22}(T_c)}{R_{21}(T_c)}} \quad (14)$$

Es evidente que para que la ecuación 14 sea válida se debe satisfacer que:

$$R_{22}R_{21} > 0 \quad (15)$$

Una vez encontradas las parejas  $\langle \omega_c, T_c \rangle$ , el objetivo es determinar los valores de  $\tau$  asociados, que están separados periódicamente. Haciendo un mapeo inverso al hecho en la sustitución de Rekasius, se pueden encontrar los retardos correspondientes:

$$\tau_{ck} = \frac{2}{\omega_c} \arctan(T_c \omega_c) \pm \frac{2\pi k}{\omega_c} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

## SUMA DE KRONECKER

**Definición Matemática.** La suma de Kronecker [1,5] de dos matrices cuadradas  $\mathbf{M}_1(n_1 \times n_1)$  y  $\mathbf{M}_2(n_2 \times n_2)$  se define como:

$$\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{I}_{n_2} + \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{M}_2 \quad (17)$$

Los símbolos  $\oplus$  y  $\otimes$  representan la suma y el producto de Kronecker, respectivamente. A su vez, el producto de Kronecker [1] de dos matrices  $\mathbf{A}(m \times n)$  y  $\mathbf{B}(q \times q)$  es una matriz de dimensión  $pm \times qn$  que se define así:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{pm \times qn} \quad (18)$$

De esta manera, la suma de Kronecker  $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$  es una matriz cuadrada de dimensión  $n_1 n_2 \times n_1 n_2$ .

Entre las propiedades de la suma de Kronecker, la más importante para este trabajo es que los  $n_1 n_2$  valores propios de  $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$  son la suma de un valor propio de  $\mathbf{M}_1$  y uno de  $\mathbf{M}_2$ . Es decir, los valores propios de  $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$ ,  $\lambda_k$ , se pueden hallar a partir de los valores propios de  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ ,  $\lambda_{M_1 i}$  y  $\lambda_{M_2 j}$ , así:

$$\lambda_k = \lambda_{M_1 i} + \lambda_{M_2 j} \quad \text{donde } i = 1, \dots, n_1; \quad j = 1, \dots, n_2; \quad k = 1, \dots, n_1 n_2 \quad (19)$$

**Aplicación del método.** En la ecuación 1.2, se reemplaza  $e^{-\tau s}$  por  $z$  [5]. La ecuación característica ahora es:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}z) = 0 \quad (20)$$

cuya solución consiste en encontrar los valores propios de la matriz  $\mathbf{A} + \mathbf{B}z$ . Debido a que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices reales, las raíces de 20 son términos complejos conjugados. Por lo tanto  $s^*$  y, en consecuencia,  $z^*$  satisfacen 20:

$$\det(s^*\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}z^*) = 0 \quad (21)$$

es decir, los valores propios de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}z^*$  también son solución de 20.

Como el objetivo es encontrar las raíces características imaginarias del sistema, las únicas soluciones de 20 que se consideran deben ser de la forma  $s = \pm\omega i$  y  $z = e^{-\tau\omega i}$ . Claramente, la magnitud de  $z$  es 1, por lo tanto  $z^* = z^{-1}$ .

Cuando la ecuación 20 tiene una solución  $s = \omega i$ , que es un valor propio de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}z$ , la ecuación 21 tiene una solución  $s^* = -\omega i$ , que es un valor propio de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}z^*$ . La suma de estos dos valores propios es igual a cero, lo que implica que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}z \oplus \mathbf{A} + \mathbf{B}z^*$  tiene un valor propio igual a cero, o lo que es lo mismo, su determinante es cero. Entonces se define la ecuación característica auxiliar del sistema:

$$ACE(z) = \det [(\mathbf{A} + \mathbf{B}z) \oplus (\mathbf{A} + \mathbf{B}z^{-1})] = 0 \quad (22)$$

que es una ecuación algebraica en  $z$  que puede ser solucionada fácilmente por varias

herramientas numéricas. De las soluciones de 22 se extraen aquellas que cumplan con  $|z| = 1$ . Estos valores y  $s = \omega i$  se reemplazan en 20 y se resuelve para  $\omega$ .

Con los valores de  $z$  y de  $\omega$ , la relación  $z = e^{-\tau\omega i}$  y la propiedad de periodicidad de los retardos, se puede obtener el núcleo y su descendencia así:

$$\tau_k = \frac{\angle z + 2\pi k}{\omega_c} \quad (23)$$

Ahora, se encuentra la tendencia de las raíces a partir de 1.4 y las regiones de estabilidad mediante el método de la subdivisión D definido en 1.5.