

**FORMAS DIFERENCIALES Y LAS
ECUACIONES DE MAXWELL**

LUZ JANETH LLERENA RAMÍREZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005**

**FORMAS DIFERENCIALES Y LAS
ECUACIONES DE MAXWELL**

LUZ JANETH LLERENA RAMÍREZ

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciada en Matemáticas

Director

MARLIO PAREDES GUTIÉRREZ

Doctor en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005**

Dedicatoria.

“ A la memoria de mi padre quien me transmitió su fortaleza y perseverancia con amor y sabiduría ”.

Agradecimientos

Doy mi más profundo agradecimiento:

*A mi señor Todopoderoso quien me alimentó con su espíritu.

*A mi esposo y mi hijo por su apoyo incondicional, su comprensión, paciencia y amor durante éstos años.

*A mi madre por su compañía y colaboración compartidas con cariño.

*A mi director el profesor Marlio Paredes a quien admiro por sus sabias palabras transmitidas con elocuencia en el momento indicado, por su sabiduría y paciencia en la realización de éste trabajo, por su labor dentro de nuestra institución.

*A mi familia, hermanos, tíos, primos, sobrinos y cuñados quienes me mostraron solidaridad cuando más lo necesitaba.

*A todos los profesores y calificadores quienes con sabiduría y comprensión participaron de mi formación profesional regalándome sus conocimientos y compartiendo sus experiencias.

*A mis amigos Alirio ,Amanda ,Elizabeth ,Olga ,Johanne ,Lilith ,Jairo , Otilia ,Ismenia ,Vicky ,Olga Inés ,Nubia ,Marcela ,Carmen ,Tilson ,Nubia Hilda y Jose porque sus palabras y acciones llegaron en el momento oportuno ante un crepúsculo inminente.

*A todas y cada una de las personas que indirectamente colaboraron en la culminación de este proyecto. Por siempre les estaré agradecida por creer, que era posible lo que hoy es una realidad.

Índice general

Introducción	4
1. ALGEBRA EXTERIOR	7
1.1. El espacio vectorial $\Lambda^p L$	7
1.2. Determinantes	10
1.3. El producto exterior	10
1.4. Transformaciones lineales	11
1.5. Espacios con producto interno	13
1.6. El operador estrella de Hodge	15
2. LA DERIVADA EXTERIOR	19
2.1. Formas diferenciales	19
2.2. Derivada exterior	20
2.3. Transformaciones	23
2.4. Cambios de coordenadas	27
2.5. Recíproco del Lema de Poincaré	28
3. LAS ECUACIONES DE MAXWELL	34
Bibliografía	38

SUMMARY

TITLE: DIFFERENTIAL FORMS AND MAXWELL'S EQUATIONS*

AUTHOR: LUZ JANETH LLERENA RAMÍREZ **

KEY WORDS: Differential forms, exterior algebras, exterior derivatives, Poincaré's Lemma, Maxwell's equations.

DESCRIPTION

Investigation is based on the book: "Differential Forms" by Harley Flanders, author who studied in deep in the development of physical theories explained through exterior algebras. Differential forms are mathematical objects that naturally appear under the sign of an integral. Next we will use the differential forms to show a very famous physical equations.

We present a basic theory of differential forms, supporting in exterior algebras. Then we will introduce the general theory of the differential forms and their properties to culminate with an application of these forms. In the first chapter we establish a calculation of the differential forms, which has some properties of internal consistency as variable change rule for multiple integrals. In the second chapter we develop the theory of exterior algebras and its properties. In the last chapter we illustrate the way of writing the Maxwell's equations using this theory.

We will notice how the language of the differential forms let us to write easier well known electromagnetic equations: "The Maxwell's equations".

* Monografía

** Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: P.h Marlio Paredes Gutierrez.

TITULO: FORMAS DIFERENCIALES Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL*

AUTOR: LUZ JANETH LLERENA RAMÍREZ**

PALABRAS CLAVES: Formas diferenciales, algebra exterior, derivadas exterior , Lema de Poincaré, Ecuaciones de Maxwell.

DESCRIPCIÓN:

La siguiente investigación está basada en el libro "Differential forms" de Harley Flanders, autor que profundizó en el desarrollo de teorías físicas explicadas a través de álgebras exteriores.

Las formas diferenciales son objetos matemáticos que aparecen naturalmente bajo el signo de una integral. En adelante utilizaremos las formas diferenciales para mostrar unas ecuaciones físicas muy famosas. Presentamos la teoría básica de las formas diferenciales, apoyándonos en las álgebras exteriores. Luego introduciremos la teoría general de las formas diferenciales y sus propiedades, para culminar con una aplicación de dichas formas.

En el primer capítulo estableceremos un cálculo de formas diferenciales, el cual tiene ciertas propiedades de consistencia interna como la regla de cambio de variable para integrales múltiples. En el segundo capítulo desarrollaremos la teoría de álgebras exteriores y sus propiedades. En el último capítulo ilustramos la forma de escribir las ecuaciones de Maxwell utilizando dicha teoría. Notaremos como el lenguaje de las formas diferenciales nos permite más fácilmente la escritura de unas conocidas ecuaciones electromagnéticas: "Las ecuaciones de Maxwell"

* Monografía

** Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: P.h Marlio Paredes Gutierrez.

Introducción

Las formas diferenciales son objetos matemáticos que aparecen naturalmente bajo el signo de una integral. Por ejemplo, una integral de línea

$$\int Adx + Bdy + Cdz,$$

nos dirige a la 1-forma

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz.$$

Una integral de superficie

$$\iint Pdydz + \varphi dzdx + Rxdy,$$

nos conduce a la 2-forma

$$\alpha = Pdydz + \varphi dzdx + Rxdy.$$

Y una integral de volumen

$$\iiint Hdx dy dz,$$

nos conduce a la 3-forma

$$\lambda = Hdx dy dz.$$

Todos estos son ejemplos de formas diferenciales de tres variables definidas en el espacio \mathbb{R}^3 .

En un espacio n -dimensional, la cantidad bajo el signo de una r -integral es una r -forma en n variables.

En la expresión α anterior, notamos la ausencia de términos en $dzdy$, $dx dz$, $dy dx$ los cuales sugieren simetría o antisimetría.

Debemos establecer un cálculo de formas diferenciales el cual tenga ciertas propiedades de consistencia interna, una de las cuales es la regla de cambio de variables en una integral múltiple. Nuestras integrales son siempre integrales orientadas por tanto nunca tienen valores absolutos de jacobianos.

Consideremos por ejemplo la integral

$$\iint A(x, y) dx dy,$$

con el cambio de variable

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

Tenemos,

$$\iint A(x, y) dx dy = \iint A[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

de donde podemos escribir

$$dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$$

Si $y = x$, el determinante tiene filas iguales y por tanto se anula. Si intercambiamos x y y , el determinante cambia de signo. Esto motiva las siguientes reglas

$$\begin{cases} dx dx = 0 \\ dx dy = -dy dx \end{cases}$$

para multiplicación de diferenciales.

En general, una r -forma en n variables x^1, \dots, x^n será una expresión de la forma

$$\omega = \frac{1}{r!} \sum A_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \cdots dx^{i_r},$$

donde los coeficientes A son funciones suaves de las variables y antisimétricas en los índices.

Asociamos a cada r -forma ω una $(r + 1)$ -forma $d\omega$ llamada la derivada exterior de ω . Su definición será dada de tal forma que la fórmula de Stokes sea válida

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega.$$

Aquí Σ es una variedad $(r + 1)$ -dimensional orientada y $\partial\Sigma$ es su frontera.

Una propiedad muy importante es el conocido *Lema de Poincaré*

$$d(d\omega) = 0.$$

En todos los casos esto se reduce a la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

En esta monografía presentamos la teoría básica de las formas diferenciales, para lo cual en el Capítulo 1 hacemos una presentación de las álgebras exteriores puesto que el conjunto de las formas diferenciales es un álgebra de este tipo. En el Capítulo 2 introducimos la teoría general de las formas diferenciales presentando sus propiedades mas básicas. Finalmente, en el Capítulo 3 presentamos una aplicación de las formas diferenciales; vemos allí como el uso del lenguaje de las formas diferenciales facilita la escritura de las famosas ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

Capítulo 1

ALGEBRA EXTERIOR

1.1. El espacio vectorial $\Lambda^p L$

Sea L un espacio vectorial de dimensión n sobre los reales. Para cada $p = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ construiremos un nuevo espacio vectorial $\Lambda^p L$ sobre \mathbb{R} , llamado la p -ésima potencia exterior de L .

Definimos $\Lambda^0 L = \mathbb{R}$ y $\Lambda^1 L = L$. $\Lambda^2 L$ es el espacio conformado por todas las sumas de la forma

$$\sum a_i(\alpha_i \wedge \beta_i),$$

sujetas a las siguientes restricciones o reglas de reducción

1. $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta - a_1(\alpha_1 \wedge \beta) - a_2(\alpha_2 \wedge \beta) = 0$.
2. $\alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2) - b_1(\alpha \wedge \beta_1) - b_2(\alpha \wedge \beta_2) = 0$.
3. $\alpha \wedge \alpha = 0$.
4. $\alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha = 0$.

Aquí los α_i y los β_i son vectores en L y los a_i y b_i son números reales. $\alpha \wedge \beta$ es llamado el producto exterior de los vectores α y β .

Si α y β son linealmente dependientes, es decir $\beta = c\alpha$, entonces

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (c\alpha) = c(\alpha \wedge \alpha) = c \cdot 0 = 0.$$

En otro caso $\alpha \wedge \beta \neq 0$.

Supongamos que $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ es una base de L entonces si

$$\alpha = \sum a_i \sigma^i \quad \text{y} \quad \beta = \sum b_j \sigma^j,$$

tenemos que

$$\alpha \wedge \beta = \left(\sum a_i \sigma^i \right) \wedge \left(\sum b_j \sigma^j \right) = \sum a_i b_j (\sigma^i \wedge \sigma^j).$$

Reordenamos esta expresión teniendo en cuenta que $\sigma^i \wedge \sigma^i = 0$ y $\sigma^j \wedge \sigma^i = -\sigma^i \wedge \sigma^j$, para $i < j$ y entonces obtenemos

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) \sigma^i \wedge \sigma^j.$$

Por tanto, los elementos de $\Lambda^2 L$ son combinaciones lineales de los 2–vectores

$$\sigma^i \wedge \sigma^j, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Es decir que estos 2–vectores forman una base de $\Lambda^2 L$. De donde podemos concluir que la dimensión de $\Lambda^2 L$ es

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Usamos la misma idea para la construcción de $\Lambda^p L$, $2 \leq p \leq n$, el cual es el conjunto de todas las sumas formales

$$\sum a(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p); \quad a \in \mathbb{R}, \alpha_i \in L$$

sujetas a las siguientes reglas:

1. $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)$ y de igual manera si cualquier α_i es reemplazado por una combinación lineal.
2. $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$, si para algún par de índices $i \neq j$, $\alpha_i = \alpha_j$.
3. $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ cambia de signo si se intercambian cualquier dos α_i .

La primera condición implica que $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ es lineal en cada variable y la tercera condición implica que si θ es una permutación de $\{1, \dots, p\}$ entonces

$$\alpha_{\theta(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\theta(p)} = (\text{sign } \theta) \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p.$$

Sea $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ una base de L . Similarmente a como se hizo en el caso de $\Lambda^2 L$ podemos construir una base de $\Lambda^p L$ de la siguiente manera: para cada conjunto de índices $H = \{h_1, \dots, h_p\}$, $1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_p \leq n$, definimos $\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{h_p}$. Entonces los σ^H forman una base de $\Lambda^p L$ y se tiene que

$$\dim \Lambda^p L = \binom{n}{p}.$$

Si $\lambda \in \Lambda^p L$, entonces $\lambda = \sum_H a_H \sigma^H$ donde se suma sobre todos los conjuntos ordenados H .

También podemos sumar sobre todas las p -tuplas de índices introduciendo coeficientes antisimétricos.

$$\lambda = \frac{1}{p!} \sum b_{h_1, \dots, h_p} \sigma^{h_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{h_p},$$

donde b_{h_1, \dots, h_p} es un tensor antisimétrico y $b_{h_1, \dots, h_p} = a_H$ para $H = \{h_1, \dots, h_p\}$, $h_1 < \dots < h_p$.

La propiedad 2 arriba implica que $\Lambda^p L = 0$, para $p > n$, puesto que si consideramos un p -vector $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \in \Lambda^p L$ y lo escribimos en términos de una base $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ obtenemos

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = \sum a_{h_1 \dots h_p} \sigma^{h_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{h_p}.$$

Como $p > n$ entonces en cada producto $\sigma^{h_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{h_p}$ hay repeticiones y por tanto se debe anular, es decir que en cualquier caso $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$.

Para definir una transformación lineal f sobre $\Lambda^p L$ es suficiente dar una función g de p -variables sobre L tal que

- (a) g es lineal en cada variable.
- (b) g es alternante, esto es, g se anula cuando dos de sus variables son iguales y cambia de signo cuando dos de sus variables son intercambiadas.

Entonces

$$f(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

define a f sobre los generadores de $\Lambda^p L$.

1.2. Determinantes

Sea A una transformación lineal de L en si mismo. Definimos una función $g = g_A$ de n variables sobre L en si mismo, así

$$g_A : \prod_{i=1}^n L \longrightarrow \Lambda^n L$$
$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto A\alpha_1 \wedge \dots \wedge A\alpha_n,$$

donde $\prod_{i=1}^n L$ representa el producto cartesiano.

Como g es multilineal y antisimétrica existe una funcional lineal $f = f_A$

$$f_A : \Lambda^n L \longrightarrow \Lambda^n L$$

tal que

$$f_A(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) = g_A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = A\alpha_1 \wedge \dots \wedge A\alpha_n.$$

Como $\Lambda^n L$ tiene dimensión 1, las únicas transformaciones lineales sobre este espacio son multiplicar por un escalar, en nuestro caso particular representamos el escalar por $|A|$, tenemos entonces

$$A\alpha_1 \wedge \dots \wedge A\alpha_n = |A|(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n).$$

Llamamos al número $|A|$ el determinante de A .

Debemos observar que esta definición es independiente de la representación de A . Además, observemos que

$$\begin{aligned} |AB|(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) &= (AB\alpha_1) \wedge \dots \wedge (AB\alpha_n) \\ &= |A|(B\alpha_1 \wedge \dots \wedge B\alpha_n) \\ &= |A||B|(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|AB| = |A||B|.$$

1.3. El producto exterior

Nuestros espacios $\Lambda^p L$ han sido construidos con un proceso de multiplicación llamado multiplicación exterior y que denotamos por \wedge . Si $\mu \in \Lambda^p L$ y $\nu \in \Lambda^q L$ entonces $\mu \wedge \nu \in \Lambda^{p+q} L$, el cual se anula por

definición si $p + q > n$:

$$\begin{aligned} \wedge: (\Lambda^p L) \times (\Lambda^q L) &\longrightarrow \Lambda^{p+q} L \\ (\mu, \nu) &\longmapsto \mu \wedge \nu. \end{aligned}$$

Es suficiente definir \wedge sobre generadores y aplicar las propiedades básicas citadas en la sección 1.1 para extenderlo a p -vectores y q -vectores:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q.$$

Este producto exterior tiene las siguientes propiedades

- (1) $\lambda \wedge (\mu + \beta) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \beta.$
- (2) $\lambda \wedge (\mu \wedge \beta) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \beta.$
- (3) $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu.$

Ejemplo 1.1. Consideremos para L el espacio vectorial de las formas diferenciales $\Omega^*(\mathbb{R}^3)$. Se acostumbra omitir el signo de multiplicación exterior \wedge , esto es, $dx dy = dx \wedge dy$.

- (a) La propiedad (3) anterior nos dice que cualquier dos formas de grado impar anticomutan y en otro caso conmutan. Para ilustrar esto veamos el siguiente ejemplo

$$(Adx) \wedge (Bdx dy dz) = (-1)^{1 \cdot 3} (Bdx dy dz) \wedge (Adx) = -(Bdx dy dz) \wedge (Adx).$$

- (b) $(Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Edx + Fdy + Gdz) = (BG - CF) dy dz + (CE - AG) dz dx + (AF - BE) dy dx$, que ilustra el producto vectorial de dos vectores en \mathbb{R}^3 .
- (c) $(Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Pdy dz + Qdz dx + Rdx dy) = (AP + BQ + CR) dx dy dz$, que ilustra el producto interno de dos vectores en \mathbb{R}^3 .

1.4. Transformaciones lineales

Sean M y N dos espacios vectoriales de dimensión m y n respectivamente. Sea $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^m$ una base para M y $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^n$ una base para N . Sea

$$A: M \longrightarrow N$$

una transformación lineal. La aplicación

$$\prod_1^p M \longrightarrow \Lambda^p N$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \longmapsto A\alpha_1 \wedge \dots \wedge A\alpha_p$$

es multilineal y alternante, por lo tanto define una transformación lineal de $\Lambda^p M$ en $\Lambda^p N$ la cual denotaremos por $\Lambda^p A$.

Esta p -ésima potencia exterior de A es definida sobre generadores por

$$(\Lambda^p A)(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = A\alpha_1 \wedge \dots \wedge A\alpha_p.$$

Supongamos que A está representada por la matriz $m \times n$ de (a_j^i) tal que

$$A\sigma^i = \sum a_j^i \tau^j.$$

Los σ^H y σ^K forman bases para $\Lambda^p M$ y $\Lambda^p N$ respectivamente, donde H y K son conjuntos ordenados de p -índices. Tenemos que

$$\begin{aligned} (\Lambda^p A)\sigma^H &= A\sigma^{h_1} \wedge \dots \wedge A\sigma^{h_p} \\ &= \sum a_{k_1}^{h_1} \dots a_{k_p}^{h_p} \tau^{k_1} \wedge \dots \wedge \tau^{k_p} \\ &= \sum a_K^H \tau^K. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Lambda^p A$ es representada por la matriz (a_K^H) de todos los menores $p \times p$ de $A = (a_j^i)$.

Supongamos que L, M y N son tres espacios vectoriales y $A: M \rightarrow N$, $B: L \rightarrow M$ transformaciones lineales. Entonces, $AB: L \rightarrow N$. Veamos ahora cual es la matriz de $\Lambda^p(AB)$:

$$\begin{aligned} \Lambda^p(AB)(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) &= (AB\alpha_1) \wedge \dots \wedge (AB\alpha_p), \\ &= (\Lambda^p A)[(B\alpha_1) \wedge \dots \wedge (B\alpha_p)], \\ &= (\Lambda^p A)[(\Lambda^p B)(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)], \\ &= [(\Lambda^p A)(\Lambda^p B)](\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Lambda^p(AB) = (\Lambda^p A)(\Lambda^p B).$$

Otra propiedad importante es que si $\omega \in \Lambda^p M$ y $\eta \in \Lambda^q M$ entonces

$$(\Lambda^{p+q}A)(\omega \wedge \eta) = (\Lambda^p A)(\omega) \wedge (\Lambda^q A)(\eta).$$

Verificamos esto solo para monomios. Sean $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ y $\eta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q$ entonces

$$\begin{aligned} (\Lambda^{p+q}A)(\omega \wedge \eta) &= (\Lambda^{p+q}A)(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q), \\ &= (A\alpha_1 \wedge \dots \wedge A\alpha_p) \wedge (A\beta_1 \wedge \dots \wedge A\beta_q), \\ &= (\Lambda^p A)(\omega) \wedge (\Lambda^q A)(\eta). \end{aligned}$$

1.5. Espacios con producto interno

Un producto interno en un espacio vectorial L es una función

$$(\cdot, \cdot): L \times L \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. $((a + b)\alpha, \beta) = a(\alpha, \beta) + b(\alpha, \beta)$.
2. $(\alpha, (a + b)\beta) = a(\alpha, \beta) + b(\alpha, \beta)$.
3. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.
4. Si $(\alpha, \beta) = 0$ para todo β entonces $\alpha = 0$. (El producto interno es no degenerado).

Ejemplo 1.2. Algunos de los productos internos mas usados son:

- (a) El producto interno euclidiano sobre \mathbb{R}^n : si $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ y $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ entonces

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

- (b) El producto interno de Lorentz en \mathbb{R}^4 : si $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ entonces

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4.$$

Una base $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ de L es ortonormal si $(\sigma^i, \sigma^j) = \pm \delta^{ij}$.

Si hay r signos más y s signos menos entonces $r + s = n$ y $t = r - s$ es la signatura del producto interno, esto no depende de la base escogida.

Teorema 1.1. *Todo espacio vectorial con producto interno L tiene una base ortonormal.*

Demostración. Si $\dim L > 0$ existe un vector $\sigma \in L$ tal que $(\sigma, \sigma) \neq 0$; puesto que si $(\alpha, \alpha) = 0$ para todo α , entonces

$$0 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) = 2(\alpha, \beta).$$

De donde se concluye que $(\alpha, \beta) = 0$, para todo $\alpha, \beta \in L$, lo que contradice la no degenerancia del producto interno.

Escojamos una secuencia maximal $\sigma^1, \dots, \sigma^r$ de vectores que satisfacen

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm \delta^{ij}.$$

Sea M el subespacio de L generado por estos vectores, entonces $\dim M = r$. Vale la pena señalar que los vectores σ^i son linealmente independientes pues $\sum a_i \sigma^i = 0$ implica $\sum a_i (\sigma^i, \sigma^j) = 0$, de donde se concluye que $a_j = 0$ para todo j .

Supongamos que $r < n$. Sea N el complemento ortogonal de M , esto es, N es el subespacio de L formado por todos los vectores β tales que $(\alpha, \beta) = 0$, para todo $\alpha \in M$. Como N es determinado por las r relaciones $(\sigma^i, \beta) = 0$, entonces $\dim N \geq n - r$. Pero como, obviamente, $M \cap N = \{0\}$ entonces $\dim N = n - r$.

N mismo es un espacio con producto interno relativo al producto interno de L ; para verificar esto solamente es necesario verificar la propiedad de no degenerancia. Supongamos que $\beta \in N$ es tal que $(\gamma, \beta) = 0$, para todo $\gamma \in N$. Pero como $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\alpha \in M$, entonces $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\alpha \in L$, por tanto $\beta = 0$.

De forma similar a lo que vimos al comienzo de la demostración existe un vector $\alpha \in N$ tal que $(\alpha, \alpha) \neq 0$. Hacemos

$$\sigma^{r+1} = \alpha / |(\alpha, \alpha)|^{1/2}$$

y así hemos construido una secuencia $\sigma^1, \dots, \sigma^{r+1}$ mas grande que la secuencia maximal tomada inicialmente. Como esto es imposible concluimos que $r = n$, lo cual completa la demostración. \square

Teorema 1.2. *Sea $f : L \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces existe un único $\beta \in L$ tal que $f(\alpha) = (\alpha, \beta)$.*

Demostración. Sea $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ una base ortonormal, llamamos $b_i = f(\sigma^i)$ y tomamos

$$\beta = \sum \pm b_j \sigma^j = \sum (\sigma^j, \sigma^j) b_j \sigma^j.$$

Entonces

$$(\sigma^i, \beta) = \sum_j (\sigma^j, \sigma^j) b_j(\sigma^i, \sigma^j) = b_j = f(\sigma^i).$$

□

Extendemos el producto interno sobre L a $\Lambda^p L$ así: para los p -vectores $\lambda = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \cdots \wedge \alpha_p$ y $\mu = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_p$ definimos

$$(\lambda, \mu) = \det[(\alpha_i, \beta_j)].$$

Esta definición funciona bien porque el determinante es una función multilineal alternante. Lo que hemos definido es una función de valor real sobre el espacio $(\Lambda^p L) \times (\Lambda^p L)$ la cual es lineal en cada variable, además $(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$ porque al intercambiar filas y columnas, es decir transponer, de una matriz su determinante no cambia.

La no degenerancia de este producto interno se ve más fácilmente calculándolo con respecto a una base ortonormal. Sea $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ una base ortonormal de L entonces los σ^H , con $H = \{h_1, h_2, \dots, h_p : h_1 < h_2 < \dots < h_p\}$, forman una base de $\Lambda^p L$. Tenemos que

$$(\sigma^H, \sigma^K) = \det[(\sigma^{h_i}, \sigma^{h_j})].$$

Si $H \neq K$ entonces $(\sigma^H, \sigma^K) = 0$ puesto que el determinante tiene una fila y una columna de ceros. Si $H = K$ los únicos elementos que no se anulan son los de la diagonal y estos son ± 1 , por lo tanto

$$(\sigma^H, \sigma^K) = \delta^{H,K}.$$

Así que los σ^H forman una base ortonormal de $\Lambda^p L$ y por tanto el producto interno es no degenerado. En particular $\sigma = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$ es una base ortonormal de $\Lambda^n L$ y

$$(\sigma, \sigma) = (\sigma^1, \sigma^1) \cdots (\sigma^n, \sigma^n) = (-1)^{\frac{n-t}{2}}$$

donde t es la signatura de L .

1.6. El operador estrella de Hodge

Sea L un espacio vectorial con producto interno. Debemos tomar una orientación fija de L , lo cual significa que tomamos una base para L y solo consideramos otras bases que son expresadas en términos

de ésta por una matriz con determinante positivo. Un espacio vectorial tiene dos orientaciones y tomamos una de ellas. Solamente usamos bases coherentes con la orientación escogida.

La orientación de L determina una base ortonormal σ de $\Lambda^n L$.

Tomamos $\lambda \in \Lambda^p L$ fijo, la aplicación

$$\begin{aligned}\Lambda^{n-p} L &\longrightarrow \Lambda^n L \\ \mu &\longmapsto \lambda \wedge \mu\end{aligned}$$

es una transformación lineal. Podemos escribir

$$\lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu)\sigma,$$

donde $f_\lambda : \Lambda^{n-p} L \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal.

Por el teorema 1.2 existe un único $*\lambda \in \Lambda^{n-p} L$ tal que

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\sigma.$$

Esta ecuación define el operador estrella u operador de Hodge

$$*: \Lambda^p L \longrightarrow \Lambda^{n-p} L$$

el cual es evidentemente lineal. Por la linealidad de $*$, el cálculo de $*\lambda$ para generadores de $\Lambda^p L$ es suficiente hacerlo para $\lambda = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^p$, donde $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ es una base ortonormal de L . Sea K que varia sobre conjuntos de $q = n - p$ índices, entonces

$$\lambda \wedge \sigma^K = (*\lambda, \sigma^K)\sigma.$$

El lado izquierdo se anula salvo para $K = \{p + 1, \dots, n\}$, por tanto

$$*\lambda = c\sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n$$

y la constante c se determina tomando $K = \{p + 1, \dots, n\}$:

$$\sigma = \lambda \wedge \sigma^K = c(\sigma^K, \sigma^K)\sigma,$$

de donde $c = (\sigma^K, \sigma^K) = \pm 1$ y

$$*\lambda = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K.$$

Para $H = \{1, \dots, p\}$ y $K = \{p+1, \dots, n\}$ hemos probado que

$$*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K.$$

Ahora $\sigma^K \wedge \sigma^H = (*\sigma^K, \sigma^H)\sigma$, de donde

$$*\sigma^K = c\sigma^H, \quad c \text{ constante.}$$

Además, $(-1)^{p(n-p)}\sigma = (-1)^{p(n-p)}\sigma^H \wedge \sigma^K = (*\sigma^K, \sigma^H)\sigma = c(\sigma^H, \sigma^H)\sigma$. Luego,

$$\sigma = c(-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)\sigma.$$

Entonces, $c = (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)$ y así

$$*\sigma^K = c(-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)\sigma^H.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 (\sigma^H) &= (\sigma^K, \sigma^K)(*\sigma^K), \\
 &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma^K, \sigma^K)(\sigma^H, \sigma^H)\sigma^H, \\
 &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma, \sigma)\sigma^H, \\
 &= (-1)^{p(n-p) + \frac{n-t}{2}}\sigma^H,
 \end{aligned}$$

donde t es la signatura de L

Por tanto, para todo $\alpha \in \Lambda^p L$

$$**\alpha = (-1)^{p(n-p) + \frac{n-t}{2}}\alpha.$$

Ahora, si $\alpha, \beta \in \Lambda^p L$ entonces

$$\alpha \wedge *\beta = (*\alpha, *\beta)\sigma = (*\beta, *\alpha)\sigma = \beta \wedge *\alpha.$$

Probaremos que $\alpha \wedge *\beta = (-1)^{\frac{n-t}{2}}(\alpha, \beta)\sigma$. Por la linealidad de $*$ basta hacerlo para generadores. Si $\beta = \sigma^H$ entonces para que no se anule a ambos lados de la igualdad, α debe ser igual a σ^H y así

$$\begin{aligned}
 \beta \wedge *\alpha &= \sigma^H \wedge (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K, \\
 &= (\sigma^K, \sigma^K)\sigma, \\
 &= (\sigma^H, \sigma^H)(-1)^{\frac{n-t}{2}}(\alpha, \beta)\sigma, \\
 &= (-1)^{\frac{n-t}{2}}(\alpha, \beta)\sigma.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. Tomemos el 4-espacio con coordenadas normalizadas, así que dx^1, dx^2, dx^3, dt es una base ortonormal con $(dx^i, dx^i) = 1$ y $(dt, dt) = -1$. Tenemos entonces que $n = 4, t = 2$ y $(-1)^{\frac{n-t}{2}} = -1$. Estudiaremos algunas 2-formas, entonces tomamos $p = 2$ y en este caso $p(n-p) = 4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} dx^i dt \wedge *(dx^i dt) &= (-1)^{\frac{n-t}{2}} (dx^i dt, dx^i dt) dx^1 dx^2 dx^3 dt \\ &= (-1)(-1) dx^1 dx^2 dx^3 dt \\ &= dx^1 dx^2 dx^3 dt \end{aligned}$$

Entonces $*(dx^i dx^t) = dx^j dx^k$, donde (i, j, k) tiene orden cíclico. Así $*(dx^j dx^k) = (-1)^5 dx^i dt = -dx^i dt$.

Ejemplo 1.4. Sea \mathbb{R}^3 con la métrica usual. Si f y g son funciones entonces

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \\ *df &= \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy. \end{aligned}$$

De donde,

$$df \wedge *dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Capítulo 2

LA DERIVADA EXTERIOR

2.1. Formas diferenciales

Sea P un punto en \mathbb{R}^n , las 1-formas en P son las expresiones de la forma

$$\sum_1^n a_i dx^i, \quad a_i \text{ constantes.}$$

El conjunto de 1-formas conforman un espacio vectorial n -dimensional $L = L_p$. Las p -formas en P son los elementos de

$$\Lambda^p L = \Lambda^p L_p,$$

es decir, expresiones de la forma

$$\sum a_H dx^{h_1} \dots dx^{h_p}, \quad a_H \text{ constantes.}$$

Note que eliminamos la notación “ \wedge ” por lo tanto los diferenciales dx^i yuxtapuestos siempre serán multiplicados por el producto exterior.

Ahora, sea U un dominio (abierto) en \mathbb{R}^n . Una p -forma sobre U se obtiene escogiendo suavemente en cada punto $P \in U$ una p -forma. Así una p -forma, ω tiene la representación

$$\omega = \sum a_H(x^1, \dots, x^n) dx^H,$$

donde las funciones a_H son funciones suaves o diferenciables sobre U .

El algebra exterior se aplica en cada punto de U y así puede ser aplicado para las formas diferenciales sobre U . Así si ω es una p -forma y η es una q -forma sobre U , entonces $\omega \wedge \eta$ es una $(p + q)$ -forma sobre U . Por supuesto $\omega \wedge \eta = 0$, si $p + q > n$. Si

$$\omega = \sum a_H dx^H, \quad \eta = \sum b_K dx^K,$$

entonces

$$\omega \wedge \eta = \sum a_H b_K dx^H dx^K,$$

de tal forma que los coeficientes de $\omega \wedge \eta$ son de nuevo funciones suaves.

Ejemplo 2.1. Una 1-forma

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

puede ser identificada con un campo vectorial ordinario (P, Q, R) en \mathbb{R}^3 y una 2-forma

$$\alpha = A dydz + B dzdx + C dx dy$$

puede ser identificada con un campo vectorial polar en \mathbb{R}^3 .

2.2. Derivada exterior

Denotamos por $F^p(U)$ el conjunto de todas las p -formas sobre U . En particular, $F^0(U)$ es simplemente el conjunto de todas las funciones suaves sobre U .

Definimos ahora una operación d la cual toma cada p -forma ω y la convierte en una $(p + 1)$ -forma de $d\omega$. En \mathbb{R}^3 funciona de la siguiente manera. Para una 0-forma f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Para la 1-forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ se define por

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Mientras que para la 2-forma $\alpha = A dx dy + B dz dx + C dx dy$ se define de la siguiente manera

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

La definición de d es completamente independiente del sistema de coordenadas; esto será mas o menos claro cuando axiomaticemos d .

Debemos entonces establecer la existencia y unicidad de un operador

$$d : F^p(U) \longrightarrow F^{p+1}(U)$$

tal que

(i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$.

(ii) $d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^{(\deg \lambda)} \lambda \wedge d\mu$.

(iii) Para cada ω , $d(d\omega) = 0$.

(iv) Para cada función f

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Notemos que $\deg \lambda$ corresponde al grado de λ .

Primero probaremos que existe una única operación d . Demostraremos inicialmente que

$$d(dx^{h_1} \dots dx^{h_p}) = 0$$

por inducción sobre p . Consideremos una 1-forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, sabemos que

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

entonces aplicando de nuevo la derivada exterior tenemos

$$d(d\omega) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dxdydz = 0.$$

Es decir que la propiedad se cumple para $p = 1$.

Supongamos ahora que la propiedad se cumple para $p - 1$, entonces por (ii)

$$d[x^{h_1}(dx^{h_2} \dots dx^{h_p})] = dx^{h_1} dx^{h_2} \dots dx^{h_p},$$

de donde tomando nuevamente derivada exterior obtenemos

$$d(dx^{h_1} dx^{h_2} \dots dx^{h_p}) = d(d[x^{h_1} dx^{h_2} \dots dx^{h_p}]) = 0.$$

Ahora si $\omega = \sum a_H dx^H$ es una p -forma entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum d(a_H dx^H), \\ &= \sum d(a_H) dx^H, \\ &= \sum \partial a_H x^j dx^j dx^H, \end{aligned}$$

lo cual muestra que las propiedades (i) a (iv) determinan completamente a $d\omega$. Para probar la existencia de un tal operador d , simplemente hacemos

$$d\omega = \sum \partial a_H x^j dx^j dx^H$$

para $\omega = \sum a_H dx^H$ y comprobamos que las propiedades se satisfacen. Las propiedades (i) y (iv) son completamente claras, veamos que pasa con (ii) y (iii). Evidentemente, si verificamos esto para monomios las propiedades se verifican por sumación. Supongamos que

$$\lambda = a dx^H, \quad \mu = b dx^K$$

entonces

$$\begin{aligned} d(\lambda \wedge \mu) &= d(abx^H dx^K) \\ &= \sum \frac{\partial(ab)}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\ &= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} b dx^i dx^H dx^K + \sum a \frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\ &= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} b dx^i dx^H \wedge (dx^K) + \\ &\quad (-1)^{(\deg \lambda)} \sum (a dx^H) \wedge \left(\frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^K \right) \\ &= (d\lambda) \wedge \mu + (-1)^{(\deg \lambda)} \lambda \wedge d\mu. \end{aligned}$$

El signo resulta de

$$dx^i dx^H = (-1)^{(\deg \lambda)} dx^H dx^i.$$

Así hemos probado (ii). Nuevamente, sea $\omega = a dx^H$, entonces

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H \right) \\ &= \sum \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^j dx^i dx^H \\ &= \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^j dx^i dx^H \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual verifica (iii).

La propiedad (iii) no es más que el equivalente de la segunda derivada parcial mixta. Esta es la fuente de la mayoría de las “condiciones de integrabilidad” en ecuaciones diferenciales parciales y geometría diferencial y es usualmente llamado el Lema de Poincaré.

2.3. Transformaciones

Ahora, estudiaremos la siguiente situación: U es un dominio en \mathbb{R}^m , V es un dominio en \mathbb{R}^n y ϕ es una aplicación suave de U en V . Escribiremos

$$\phi: U \longrightarrow V.$$

También denotamos por x^1, \dots, x^m las coordenadas de \mathbb{R}^m y por y^1, \dots, y^n las coordenadas de \mathbb{R}^n . Entonces podemos escribir

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^m)$$

para mostrar que el punto con coordenadas $X = (x^1, \dots, x^m)$ es transformado por ϕ en el punto con coordenadas $Y = (y^1, \dots, y^n)$. Las funciones $y^i(x)$ son suaves.

Si g es cualquier función de valor real definida sobre V

$$g: V \longrightarrow \mathbb{R},$$

entonces podríamos combinar esta con ϕ para obtener una función de U en \mathbb{R} , la cual escribimos

$$\phi^* g = g \circ \phi.$$

Así, de esta manera tenemos una aplicación

$$\phi^* = F^0(V) \longrightarrow F^0(U).$$

Es decir que a partir de una aplicación ϕ de U en V hemos construido una nueva aplicación ϕ^* de $F^0(V)$ en $F^0(U)$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \\ & \searrow \phi^* g = g \circ \phi & \downarrow g \\ & & R \end{array}$$

Definiremos ahora una aplicación ϕ^* que toma p -formas sobre V y las envía en p -formas sobre U

$$\phi^* : F^p(V) \longrightarrow F^p(U).$$

Estrictamente hablando deberíamos indicar ϕ^* y escribir ϕ_p^* , $p = 0, 1, \dots$ pero en este trabajo simplemente usaremos ϕ^* .

Hemos tenido especial cuidado para el caso $p = 0$. El caso crucial es para $p = 1$; después de hacer esto las consideraciones algebraicas del Capítulo 1 hará el resto del trabajo.

La idea básica es la sustitución de las funciones coordenadas, reemplazando dy^i por

$$\sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

De esta manera si $\omega = \sum a^i(Y) dy^i$ es una 1-forma sobre V hacemos

$$\phi^* \omega = \sum a_i(Y(X)) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

y así obtenemos

$$\phi^* : F^1(V) \longrightarrow F^1(U).$$

Aplicando el método usado en la Sección 1.4 , extendemos esta aplicación a los productos exteriores y obtenemos las aplicaciones

$$\phi^* : F^p(V) \longrightarrow F^p(U).$$

Como un ejemplo veamos el siguiente caso

$$\begin{aligned} \phi^*(dy^1 dy^2) &= (\phi^* dy^1)(\phi^* dy^2) \\ &= \left(\sum \frac{\partial y^1}{\partial x^i} dx^i \right) \left(\sum \frac{\partial y^2}{\partial x^j} dx^j \right) \\ &= \sum \frac{\partial y^1}{\partial x^i} \frac{\partial y^2}{\partial x^j} dx^i dx^j \\ &= \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i} \frac{\partial y^2}{\partial x^j} - \frac{\partial y^1}{\partial x^j} \frac{\partial y^2}{\partial x^i} \right) dx^i dx^j \\ &= \frac{1}{2} \sum \frac{\partial(y^1, y^2)}{\partial(x^i, x^j)} dx^i dx^j. \end{aligned}$$

Las propiedades básicas de ϕ^* son:

$$(1) \phi^*(\omega + \eta) = \phi^* \omega + \phi^* \eta.$$

$$(2) \quad \phi^*(\lambda \wedge \mu) = (\phi^*\lambda) \wedge (\phi^*\mu).$$

(3) Si ω es una p -forma sobre V entonces

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega).$$

(4) Si $\phi: U \rightarrow V$ y $\psi: V \rightarrow W$ son transformaciones entonces

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

La primera propiedad es evidente y la segunda se sigue de la fórmula final de la Sección 1.4 . La propiedad (3) es esencialmente la regla de la cadena para derivadas parciales. Primero tomemos una 0-forma g sobre V

$$\begin{aligned} dg &= \sum \frac{\partial g}{\partial y^j} dy^j, \\ \phi^* dg &= \sum \frac{\partial g(Y(X))}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i, \\ &= \sum \frac{\partial(\phi^*g)}{\partial x^i} dx^i = d\phi^*g. \end{aligned}$$

Razonamos por inducción, supongamos que hemos probado (3) para $(p-1)$ - formas y verifiquemos que (3) se cumple para p -formas. Tomamos una p -forma ω monomial puesto que cada p -forma es una suma de ellas. Supongamos entonces que

$$\omega = g dy^H = g d\eta,$$

donde $\eta = y^{h_1} dy^{h_2} \dots dy^{h_p}$ es una $(p-1)$ -forma. Entonces,

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= (\phi^*g)(\phi^*d\eta) = (\phi^*g) \wedge (d\phi^*\eta), \\ d(\phi^*\omega) &= d(\phi^*g) \wedge d(\phi^*\eta), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d\omega &= dg \wedge d\eta, \\ \phi^*d\omega &= (\phi^*dg) \wedge (\phi^*d\eta), \\ &= d(\phi^*dg) \wedge d(\phi^*d\eta), \\ &= d(\phi^*\omega). \end{aligned}$$

Veamos ahora como se prueba la propiedad (4). Para una 0-forma (función) h sobre W tenemos

$$\begin{aligned} [(\psi \circ \phi)^* h](X) &= h[(\psi \circ \phi)(X)] = h\{\psi[\phi(X)]\} \\ &= [\psi^* h][\phi(X)]\{\phi^*[\psi^* h]\}(X) \\ &= [(\phi^* \circ \psi^*) h](X). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\psi \circ \phi)^* h = (\phi^* \circ \psi^*) h.$$

El resto de la demostración se hace por inducción de forma similar a como se hizo para probar la propiedad anterior.

Todo esto implica que uno puede sustituir directamente las expresiones para las coordenadas z^k sobre W

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \\ & \searrow \psi \circ \phi & \downarrow \psi \\ & & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F^p(U) & \xleftarrow{\phi^*} & F^p(V) \\ & \swarrow (\psi \circ \phi)^* = (\phi^* \circ \psi^*) & \uparrow \psi^* \\ & & F^p(W) \end{array}$$

en términos de las coordenadas x^i sobre U , o indirectamente pasando primero a través de las funciones coordenadas y^j de V .

Ejemplo 2.2. 1. Consideremos la transformación

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x, y) = (t^2, t^3) \end{aligned}$$

Sea la 1-forma $\omega = xdy$ sobre \mathbb{R}^2 , entonces

$$\phi^* \omega = (t^2) \frac{\partial y}{\partial t} dt = 3t^4 dt.$$

2. Si ahora tomamos la aplicación

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^1 \\ (x, y) &\longmapsto t = x - y \end{aligned}$$

entonces

$$\psi^*(dt) = dx - dy.$$

Finalmente, observemos que si $m < n$, ϕ es una aplicación de un dominio U de \mathbb{R}^m en un dominio V de \mathbb{R}^n , ω es una p -forma sobre V y $p > m$, entonces necesariamente $\phi^*\omega = 0$.

2.4. Cambios de coordenadas

Apliquemos los resultados de la sección anterior al caso especial en el cual U y V son ambos dominios de \mathbb{R}^n y ϕ es una aplicación uno a uno de U en V con ϕ y $\psi = \phi^{-1}$ suaves. Nótese que esto no siempre ocurre pues por ejemplo la transformación $x \mapsto y = x^3$ de \mathbb{R}^1 en \mathbb{R}^1 es suave pero la transformación inversa $y \mapsto x = y^{1/3}$ no es suave ya que no es derivable en $y = 0$.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\phi} & V \\
 & \searrow \iota & \downarrow \psi \\
 & & U
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\psi} & U \\
 & \searrow \iota & \uparrow \phi \\
 & & V
 \end{array}$$

En cada uno de los diagramas anteriores ι es la transformación identidad, $\iota(X) = X$. Entonces tenemos que ϕ^* es una aplicación uno a uno de $F^p(V)$ en $F^p(U)$ y su inversa es ψ^* .

Si interpretamos las coordenadas Y de V como coordenadas nuevas sobre U , el resultado

$$d\phi^*\omega = \phi^*d\omega.$$

significa que la derivada exterior de una forma diferencial es independiente del sistema de coordenadas en el cual es calculada.

Ejemplo 2.3. (Un ejemplo de mecánica)

Este problema fue tomado de [3]. Trabajaremos en una region con coordenadas $(X, U) = (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$. Consideremos una función dada

$$\phi = \phi(X, U)$$

la cual suponemos que es homogénea de grado 2 en la variable U , por ejemplo, una forma de energía cinética $\sum a_{ij}(x)u_iu_j$. Sea

$$p_i = \frac{\partial \phi}{\partial u_i}.$$

Asumimos que la transformación $(X, U) \rightarrow (X, P)$ define un cambio regular de variables, luego podemos escribirnos

$$\phi(X, U) = \psi(X, P).$$

El problema es probar las relaciones

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial p_k} = u_k.$$

La prueba depende de dos cosas, la fórmula de Euler para funciones homogéneas que en nuestro caso implica

$$\sum \frac{\partial\phi}{\partial u_k} = 2\phi,$$

esto es,

$$\sum p_k u_k = 2\phi,$$

y el hecho de que las relaciones exteriores son independientes de como son derivadas.

Tenemos que

$$d\phi = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial\phi}{\partial u_k} du_k = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i + \sum p_k du_k$$

y

$$2d\phi = \sum p_k du_k + \sum u_k dp_k,$$

luego restando estas dos ecuaciones obtenemos

$$d\phi = -\sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i + \sum u_k dp_k.$$

El resultado se sigue del hecho que $\phi = \psi$ y

$$d\psi = \sum \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial\psi}{\partial p_k} dp_k.$$

2.5. Recíproco del Lema de Poincaré

El lema de Poincaré, $d(dw) = 0$, tiene estas interpretaciones en el 3-espacio

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad}f) &= 0, \\ \text{div}(\text{rot}V) &= 0. \end{aligned}$$

En análisis vectorial uno prueba que un campo vectorial libre de rotacional es un gradiente por integrales de línea y que un campo vectorial libre de divergencia es un rotacional, usualmente por el método de fuerza bruta.

Vamos ahora a probar el siguiente resultado general. Si ω es una p -forma ($p \geq 1$) y $d\omega = 0$ entonces existe una $(p-1)$ -forma α tal que $\omega = d\alpha$. El resultado es difícil si $p > 1$ porque existen muchas soluciones. También el resultado es válido solo en dominios que no son muy complicados topológicamente. La demostración está basada en la construcción de un cilindro. Iniciamos con un dominio U en \mathbb{R}^n . Notemos por $I = [0, 1]$ el intervalo unitario en el eje t y consideremos el cilindro o espacio producto

$$I \times U = \{(t, X) : 0 \leq t \leq 1 \text{ y } X \in U\}.$$

Consideremos las siguientes transformaciones

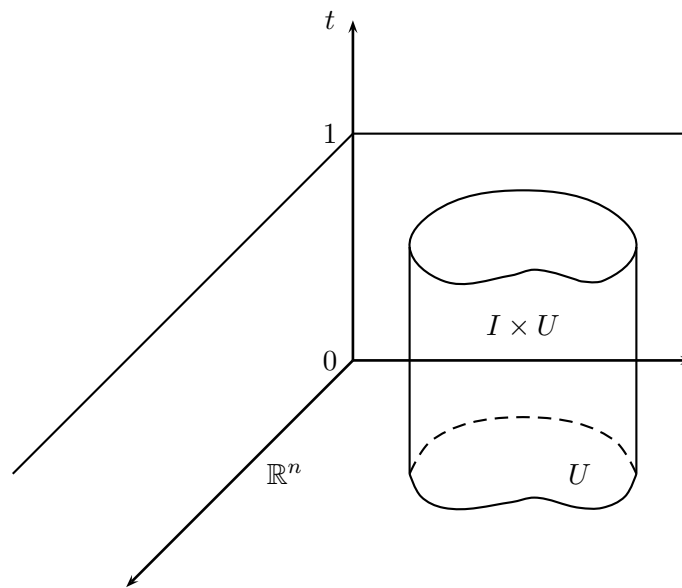
$$\begin{array}{ll} j_1: U \longrightarrow I \times U & j_0: U \longrightarrow I \times U \\ X \longmapsto j_1(X) = (1, X) & X \longmapsto j_0(X) = (0, X) \end{array}$$

las cuales identifican a U con la tapa y el fondo del cilindro.

De esta manera obtenemos las aplicaciones

$$j_i^*: F^p(I \times U) \longrightarrow F^p(U), \quad i = 0, 1.$$

Por ejemplo, para la forma $j_1^*\omega$ donde ω es una forma diferencial sobre $I \times U$, simplemente sustituye t por 1 si esto ocurre en ω .



Definimos ahora una nueva aplicación

$$K : F^{p+1}(I \times U) \longrightarrow F^p(U);$$

K es definida sobre monomios por las fórmulas

$$\begin{aligned} K(a(t, X)dx^H) &= 0, \\ K(a(t, X)dtdx^J) &= \left(\int_0^1 a(t, X)dt \right) dx^J, \end{aligned}$$

y sobre las formas diferenciales generales sumando los resultados sobre las partes monomiales. La propiedad básica de K es: Si ω es cualquier $(p+1)$ -forma sobre $I \times U$, entonces

$$K(d\omega) + (d(K\omega)) = j_1^*\omega - j_0^*\omega. (**)$$

Para verificar esto es suficiente hacerlo para monomios.

Caso 1 : $\omega = \alpha(t, X)dx^H$.

Tenemos $K\omega = 0$, $dK\omega = 0$,

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t} dt dx^H + [\text{términos que no dependen de } dt]$$

$$Kd\omega = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dx^H = [a(1, X) - a(0, X)] dx$$

Pero $j_1^*\omega = a(1, X)dx^H$, $j_0^*\omega = a(0, X)dx^H$, de esta manera la fórmula es válida.

Caso 2 : $\omega = a(t, x)dt dx^j$.

Primero $j_1^*\omega = j_0^*\omega = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} Kd\omega &= K \left[- \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dt dx^i dx^J \right] \\ &= - \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt \right) dx^i dx^J, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dK\omega &= d \left[\left(\int_0^1 a(t, X) dt \right) dx^J \right] \\ &= \sum \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\int_0^1 a(t, X) dt \right] dx^i dx^J \\ &= \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt \right) dx^i dx^J, \end{aligned}$$

así la fórmula de nuevo funciona.

Diremos que un dominio U es deformable a un punto P si existe una aplicación

$$\phi: I \times U \longrightarrow U$$

tal que

$$\phi(1, X) = X,$$

$$\phi(0, X) = P.$$

Las condiciones de frontera pueden ser interpretadas en términos de las j_i así

$$\phi \circ j_1 = 1, \quad \phi \circ j_0 = P.$$

Para una $(p+1)$ -forma ω sobre U tenemos como consecuencia que

$$j_1^*[\phi^*\omega] = \omega, \quad j_0^*[\phi^*\omega] = 0.$$

Ahora podemos enunciar y probar el resultado principal: *Sea U un dominio en \mathbb{R}^n el cual puede ser deformado a un punto P . Sea ω una $(p+1)$ -forma sobre U tal que $d\omega = 0$. Entonces existe una p -forma α sobre U tal que*

$$\omega = d\alpha.$$

Para probar esto simplemente sustituimos $\phi^*\omega$ en la fórmula (**) y obtenemos

$$K[d(\phi^*\omega)] + d[K(\phi^*\omega)] = \omega.$$

Pero $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega) = 0$, entonces $\omega = d\alpha$ con $\alpha = K(\phi^*\omega)$.

Es interesante ver que tan lejos la solución de la ecuación $d\alpha = \omega$ está determinada. Si β es otra solución, entonces $d\beta = \omega = d\alpha$, $d(\alpha - \beta) = 0$. Si $p \geq 1$, podemos concluir por el resultado principal que $\alpha - \beta = d\lambda$. Donde $d\lambda$ es una $(p-1)$ -forma. En otras palabras, dada una solución α , la solución general es $\alpha - d\lambda$, donde λ es arbitraria. Cuando $p = 0$, α y β son funciones y concluimos que $\alpha - \beta$ es constante.

Ejemplo 2.4. Ilustremos este método para el caso $n = 3$, $p = 2$. Tomamos entonces una 2-forma en \mathbb{R}^3

$$\omega = A dydz + B dzdx + C dx dy,$$

para la cual $d\omega = 0$, es decir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

El espacio \mathbb{R}^3 puede ser deformado a 0, para lo cual usamos la aplicación

$$\phi(t, x, y, z) = (tx, ty, tz).$$

Probemos entonces que $\omega = d\alpha$ donde

$$\alpha = K\phi A\omega.$$

Primero calculamos $\phi^*\omega$:

$$\begin{aligned} \phi^* &= A(tx, ty, tz)d(ty)d(tz) + \dots \\ &= A(tx, ty, tz)(tdy + ydt)(tdz + zdt) + \dots \\ &= A(tx, ty, tz)(yt dt dz - zt dt dy) + \dots + (\text{términos independientes de } dt). \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\alpha = K(\phi^*\omega) = \left(\int_0^1 A(tx, ty, tz)\right)(ydz - zdy) + \left(\int_0^1 B(tx, ty, tz)\right)(zdx - xdz) \\ + \left(\int_0^1 C(tx, ty, tz)\right)(xdy - ydx).$$

Un cálculo directo muestra que $d\alpha = \omega$.

Finalmente, observemos que para

$$\omega = A dydz + B dzdx + C dx dy,$$

el problema de encontrar

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

tal que

$$d\alpha = \omega$$

es equivalente a encontrar las tres funciones de tres variables P, Q, R que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C, \end{cases}$$

donde las funciones dadas A, B, C están sujetas a la condición necesaria

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Debemos resaltar que este sistema puede ser resuelto por una fórmula explícita que involucra cuadraturas. En general, la teoría de formas diferenciales exteriores involucra muchos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales los cuales se pueden reducir a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y a menudo resueltas por cuadraturas.

Capítulo 3

LAS ECUACIONES DE MAXWELL

En este último capítulo presentamos en una forma elegante, usando el lenguaje de las formas diferenciales, las famosas ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética.

En la teoría de campo electromagnético clásico se trabaja con las siguientes cantidades

- E : Campo eléctrico.
- H : Campo magnético.
- B : Inducción magnética.
- J : Densidad de corriente eléctrica.
- D : Desplazamiento dieléctrico.
- ρ : Densidad de carga.

Estas son funciones de las variables espaciales x^1, x^2, x^3 y la de tiempo t .

En el lenguaje vectorial las ecuaciones de Maxwell se escriben así:

$$(i) \nabla_X E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \text{ (Ley de inducción de Faraday)}$$

$$(ii) \nabla_X H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}. \text{ (Ley de Ampere)}$$

$$(iii) \nabla \cdot D = 4\pi\rho. \text{ (Continuidad)}$$

$$(iv) \nabla \cdot B = 0. \text{ (No existencia de verdadero magnetismo)}$$

Aquí c representa la velocidad de la luz. Debemos representar éstas ecuaciones en el lenguaje de las formas diferenciales. Para esto hacemos

$$\alpha = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2,$$

$$\beta = -(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)(cdt) + D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2,$$

$$\gamma = (J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2)dt - \rho dx^1 dx^2 dx^3.$$

Veamos que las ecuaciones (i) y (iv) son equivalentes a la ecuación

$$d\alpha = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + d(B_1 dx^2 dx^3 + \\ &\quad + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2), \\ &= c(d(E_1 dx^1) + d(E_2 dx^2) + d(E_3 dx^3))dt + d(B_1 dx^2 dx^3) + \\ &\quad + d(B_2 dx^3 dx^1) + d(B_3 dx^1 dx^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\alpha &= c \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^2} dx^2 dx^1 + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dx^3 dx^1 + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} dx^1 dx^2 + \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dx^3 dx^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial E_3}{\partial x^1} dx^1 dx^3 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dx^2 dx^3 \right) dt + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} dx^2 dx^3 dx^1 + \\
&\quad + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} dx^3 dx^1 dx^2 + \frac{\partial B_1}{\partial t} dt dx^2 dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial t} dt dx^3 dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial t} dt dx^1 dx^2, \\
&= \left[c \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right] dx^1 dx^2 dt + \left[c \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial B_2}{\partial t} \right] dx^1 dx^3 dt + \\
&\quad + \left[c \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial B_1}{\partial t} \right] dx^2 dx^3 dt + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3.
\end{aligned}$$

De donde

$$c \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial t} = c \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial B_2}{\partial t} = c \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0$$

y

$$\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0.$$

De igual manera $d\beta + 4\pi\gamma = 0$ representa las ecuaciones (ii) y (iii). Aplicando d a la última ecuación obtenemos $d\gamma = 0$, que en notación vectorial esto es

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

De la ecuación $d\alpha = 0$, por el lema de Poincaré se tiene que al menos en una región del espacio–tiempo la cual puede ser deformada a un punto existe una 1–forma λ tal que $d\lambda = \alpha$. Introducimos el vector potencial A y un escalar A_0 así

$$\lambda = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + A_0 c dt.$$

La ecuación $d\lambda = \alpha$ en forma vectorial es

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_X A = B, \\ \nabla A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = E. \end{array} \right.$$

En esparto libre se tiene que

$$\begin{aligned} E = D, & \quad H = B, \\ J = 0, & \quad \rho = 0. \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de Maxwell son

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_X E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \nabla \cdot E = 0, \\ \nabla_X H = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \nabla \cdot H = 0. \end{array} \right.$$

Introducimos la métrica de Lorentz en el 4-esparto, esto es

$$(dx^i, dx^j) = \delta^{ij}, \quad (dx^i, cdt) = 0, \quad (cdt, cdt) = -1.$$

Entonces dx^1, dx^2, dx^3, cdt es una base ortonormal. La signatura es 2, de donde

$$\begin{aligned} *(\alpha) &= *(E_1 dx^1(cdt) + E_2 dx^2(cdt) + E_3 dx^3(cdt) + H_1 dx^2 dx^3, \\ &\quad + H_2 dx^3 dx^1 + H_3 dx^1 dx^2) \\ &= E_1 dx^2 dx^3 + E_2 dx^3 dx^1 + E_3 dx^1 dx^2 - (H_1 dx^1(cdt) + H_2 dx^2(cdt) + H_3 dx^3(cdt)). \end{aligned}$$

O sea $*\alpha = \beta$ y $d\beta = 0$ entonces las ecuaciones de Maxwell en espacio libre son

$$\left\{ \begin{array}{l} d\alpha = 0 \\ d(*\alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Bibliografía

- [1] DO CARMO Manfredo. *Differential forms and applications*. Berlin: Springer–Verlag. 1994.
- [2] FLANDERS Harley. *Differential forms with applications to the physical sciences*. New York: Dover Publications. 1989.
- [3] GOURSAT, E. *Course in mathematical analysis*, Vol. I. Boston. 1904.
- [4] APOSTOL, T. *Cálculo diferencial e integral*, Vol. II. Barcelona. 1900.
- [5] ZIL, Dennis G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, México D.F. 1995.