Estructuras y mecanismos mentales desarrollados por estudiantes de secundaria en la construcción del concepto de función

Hellen Catherine Serrano Iglesias

Trabajo de Grado para Optar el título de Magister en Educación Matemática

Directora
Solange Roa Fuentes
Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2020

Dedicatoria

A mi mamá, porque sin ella nada de esto sería posible

Tabla de contenido

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Estructuras y mecanismos mentales desarrollados por estudiantes de secundaria en la construcción del concepto de función*

Autora: Hellen Catherine Serrano Iglesias**

Palabras Clave: Función, coordinación entre representaciones, Registros de Representación Semiótica, APOE, secundaria.

Descripción: En este documento se presentan resultados de una investigación cuyo objetivo es caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de secundaria, al resolver Tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre diferentes representaciones del concepto de función.

Para lograr dicho objetivo se determina guiar el estudio con el ciclo de investigación basado en la Teoría APOE (Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K., 2014) en el cual una de las componentes se trabaja con la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004). Los datos obtenidos en el estudio provienen de una prueba diagnóstica, una prueba pos-instrucción y una entrevista semiestructurada que se aplican a un grupo de estudiantes que cursan noveno grado en una institución educativa pública de Colombia.

En la primera componente del ciclo de investigación, denominada Análisis Teórico, se propone una descomposición genética preliminar, la cual orienta el diseño de enseñanza. En la segunda componente del ciclo de investigación, denominada Diseño e Implementación de enseñanza, se realiza un análisis a priori de cada una de las Tareas que se implementa en el aula, así como un análisis a priori de las herramientas de recolección de datos (prueba diagnóstica, prueba pos-instrucción y entrevista). En la tercera componente del ciclo de investigación, denominada Recolección y Análisis de los Datos, se identifican episodios en los que se ofrece evidencia empírica de las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes desarrollan en el aprendizaje del concepto de función.

Finalmente, se presentan las conclusiones generales del estudio y algunas reflexiones que se consideran importantes para futuras investigaciones.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa.

Abstract

Title: Mental structures and mechanisms developed by high school students in understanding the concept of function*

Author: Hellen Catherine Serrano Iglesias**

Key Words: Function, coordination between representations, the Registers of Semiotic Representations, APOS, high school.

Description: This document presents results of an investigation whose objective is to characterize the mental structures and mechanisms that high school students develop, when solving mathematical tasks that require coordination between different representations of the concept of function.

To achieve this objective, it is determined to guide the study with the research cycle based on the APOE Theory (Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K., 2014) in which one of the components works with the Theory of Registers of Semiotic Representations (Duval, 2004). The data obtained in the study come from a diagnostic test, a post-instructional test, and a semi-structured interview that are applied to a group of students who are in ninth grade at a public educational institution in Colombia.

In the first component of the research cycle, called Theoretical Analysis, a preliminary genetic decomposition is proposed, which guides the design of a teaching model. In the second component of the research cycle, called Design and Implementation of a teaching model, an a priori analysis of each of the Tasks that is implemented in the classroom is carried out, as well as an a priori analysis of the tools for collecting data (diagnostic test, post-instruction test and interview). In the third component of the research cycle, called Data Collection and Analysis, episodes are identified in which empirical evidence is offered of the mental structures and mechanisms that students develop in learning the concept of function.

Finally, the general conclusions of the study and some reflections that are considered important for future research are presented.

* Degree Work

** Science Faculty. School of Mathematics. Director: Solange Roa Fuentes. Doctor of Science in the specialty of Educational Mathematics.

Introducción

El concepto de función es uno de los conceptos más importantes no solo en matemáticas sino en otras ciencias; a partir de él se desatan razonamientos y aplicaciones de cálculo, física, estadística, entre otras. Por ejemplo, en el estudio de diferentes conceptos matemáticos como transformaciones lineales, límites, integrales, entre otros, es fundamental contar con estructuras robustas (Proceso, Objeto) de la función que promuevan su construcción (Dubinsky, 1991). El concepto de función es introducido en la educación media (alrededor del tercer o cuarto año) y se hace énfasis nuevamente en él en la educación superior (primer año). Sin embargo, muchos estudios evidencian dificultades alrededor de su enseñanza y aprendizaje. Entre ellas, es común encontrar que los estudiantes conciben las funciones como algoritmos o que no logran relacionar sus diversas representaciones. Algunas de estas investigaciones muestran que los estudiantes consideran que las funciones pueden ser representadas en un único registro, generalmente el algebraico (Dubinsky,1991; Duval, 2004; Hitt, 2005; Carlson y Oehrtman, 2005). Dubinsky (1991) sostiene que, para la mayoría de los estudiantes, incluso para muchos científicos, la idea de función está totalmente contenida en la "fórmula". El autor asegura que, si se pide a los estudiantes un ejemplo de una función, seguramente proporcionarán una expresión algebraica, lo que hace que el concepto parezca estático. Este problema no solo es evidenciado para las funciones, sino en matemáticas en general. Sirva de ejemplo la investigación realizada por Duval (2004) en la que se afirma que cambiar de una forma de representación a otra de un contenido matemático, conlleva una gran dificultad para los estudiantes de diferentes niveles. Este autor, asegura que, para la gran mayoría, la comprensión que logran de dicho contenido parece quedar limitada a la forma de representación utilizada. No obstante, los estudiantes que pueden transitar de una representación a otra no necesariamente realizan un paso cognitivo referente al concepto matemático (Arnon et al., 2014), es decir, aquellos estudiantes que transitan de una representación a otra no son conscientes en algunos casos de lo que implica este tránsito, pues solo realizan operaciones de forma mecánica en una u otra representación.

Ante este problema general, diferentes investigaciones en Didáctica de las Matemáticas han planteado diversas sugerencias cognitivas, didácticas, entre otras. Duval, por ejemplo, propone un aprendizaje en donde el estudiante logre una comprensión integrativa que no sufra los problemas propios de la enseñanza mono-registro; esto es, un aprendizaje fundado en la coordinación de los registros. Y en particular, Carlson y Oehrtman (2005) recomiendan, que la enseñanza de las funciones tempranas sea más diversa, es decir, que la enseñanza de este concepto permita que el estudiante experimente diversos tipos de funciones haciendo énfasis en sus múltiples representaciones, esto puede favorecer una visión más flexible y robusta de este concepto.

Teniendo en cuenta los problemas generales y sugerencias planteadas en Didáctica de las Matemáticas sobre el concepto de función, en esta investigación se busca estudiarlo más de cerca. En particular en un entorno que promueva la construcción de estructuras y mecanismos mentales a partir de la experiencia de los estudiantes con situaciones que contemplen diferentes representaciones del concepto de función. Es por esto que se propone la siguiente pregunta: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales desarrollan estudiantes de secundaria para construir el concepto de función, cuando resuelven Tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre las diferentes representaciones de este concepto? Con base en esta pregunta se plantea el objetivo de la presente investigación: Caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de secundaria, al resolver Tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre diferentes representaciones del concepto de función.

El documento se organiza en capítulos que se describen a continuación. En el capítulo 1 se analizan diferentes investigaciones que se han desarrollado desde la didáctica de las Matemáticas sobre el concepto de función, en particular, referentes a la coordinación de representaciones semióticas y la construcción de estructuras y mecanismos mentales desde la perspectiva de la Teoría APOE.

En el capítulo 2 se exponen los elementos teóricos que fundamentan esta investigación, esto es, los elementos que componen la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación (Duval, 2004).

En el capítulo 3 se describe cómo se desarrollan las tres componentes del ciclo de investigación propuesto en la Teoría APOE (Arnon et al., 2014): Análisis teórico, Diseño e implementación de enseñanza y, Recolección y análisis de datos, con el cual se lleva a cabo esta investigación. Además, se explica el rol de la Teoría de Registros de Representación (Duval, 2004) en esta.

En el capítulo 4 se presenta el análisis teórico sobre el concepto de función, que corresponde a la primera componente del ciclo de investigación. Este análisis guía el diseño y desarrollo de las componentes posteriores del método usado en el estudio.

En la primera parte del capítulo 5 se describe la población que participa en esta investigación y el contexto en que se desarrolla. En la segunda parte, se presenta el diseño de enseñanza donde se describen las Tareas que se implementan en el aula y un análisis a priori de cada una de ellas. La tercera parte del capítulo 5 expone la manera como se lleva a cabo la implementación y una recopilación de episodios presentados durante la enseñanza.

En el capítulo 6 se realiza un análisis de la prueba pos-instrucción y la entrevista semiestructurada. Allí se describen los episodios identificados en la actividad matemática de estos dos instrumentos de recolección de datos, en los cuales los estudiantes evidencian el desarrollo de estructuras mentales.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones generales del estudio y algunas reflexiones que se consideran importantes para futuras investigaciones.

1. Antecedentes

En este capítulo se analizan investigaciones relacionadas con el concepto de función. La primera parte hace alusión a estudios sobre el concepto de función en Didáctica de las Matemáticas; la segunda, a la coordinación de representaciones semióticas de la función; y, por último, la tercera parte, a estudios hechos bajo el marco teórico de APOE.

1.1 Estudios sobre el concepto de función en Didáctica de las Matemáticas

Al hacer una exploración en la literatura ya sea sobre la enseñanza o el aprendizaje del concepto de función, se puede observar que dicho concepto es, y ha sido estudiado en numerosas ocasiones a través de diversas perspectivas teóricas y metodológicas en Educación Matemática. Sin hacer un análisis exhaustivo, dentro de estos estudios se pueden citar autores como Eisenberg (1991), Carlson y Oehrtman (2005), Hitt (2005), Sánchez (2009), quienes insisten que los estudiantes siguen teniendo una comprensión débil de este concepto.

En particular, Eisenberg (1991) expone algunos problemas fundamentales y documentados en diversas investigaciones alrededor del aprendizaje del concepto de función. Se encuentra entre dichos problemas que los estudiantes no entienden el significado de variable; además, no tienen una imagen conceptual de una función y en cambio, las nociones que tienen de las funciones están ligadas al procesamiento de información y a la resolución de ejercicios de manera analítica. Otro de los problemas que expone el autor, es que los estudiantes sienten fobia a las matemáticas por la abstracción que en particular conlleva el concepto de función y su notación. Eisenberg (1991), después de estudiar cada uno de estos problemas en profundidad, concluye su análisis expresando que pareciera que los estudiantes pensaran en el concepto de función únicamente desde su representación simbólica.

Hitt (2005) también estudia sobre algunos problemas relacionados a las funciones, pero a diferencia de Eisenberg (1991), su estudio abarca un panorama más amplio. Hitt reflexiona sobre los problemas asociados al aprendizaje de conceptos como: función, límite, derivada e integral. Para este autor, el aprendizaje de dichos conceptos no debe restringirse a representaciones algebraicas, que descartan en su construcción otras representaciones, pues difícilmente los estudiantes podrían llegar a un entendimiento profundo de las principales ideas del cálculo.

Por otro lado, Carlson y Oehrtman (2005) proporcionan una visión general de lo que implica conocer y aprender el concepto de función. Los autores afirman que para los estudiantes el concepto es de difícil comprensión porque en su enseñanza se enfatiza más en los procedimientos. Hay que mencionar además que “este fuerte énfasis procedimental no ha sido efectivo para construir concepciones de funciones fundamentales, las que permiten la interpretación significativa y el uso de la función en varios escenarios representativos y novedosos” (Carlson y Oehrtman, 2005, p. 2). En efecto, el concepto de función es difícil de entender para los estudiantes porque en cierta forma, al ofrecer formas mecánicas de solución, se desconoce su significado a profundidad. Se debe agregar, además, que la comprensión empobrecida de las funciones no permite construir una base sólida para las matemáticas más avanzadas.

1.2 Estudios sobre representaciones semióticas y el concepto de función

Los estudios realizados bajo la Teoría de Registros de Representación generalmente muestran que una de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función, es el paso de un sistema de representación a otro. Es decir, a los estudiantes se les dificulta conectar, o bien, articular los diferentes registros de representación, lo que hace que se limite su estudio. Así lo confirman en sus investigaciones autores como Guzmán (1998), Duval (2004), Sánchez (2009), Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal (2016), entre otros. Guzmán (1998) por ejemplo, toma el marco de las representaciones semióticas para su estudio, en el que considera tres registros para analizar algunas representaciones del concepto de función, particularmente, algunas propiedades de las funciones. Las representaciones que toma en cuenta corresponden al registro gráfico, algebraico y lenguaje natural. Esta autora aplica un cuestionario a 75 estudiantes universitarios de un curso de cálculo diferencial, en el que deben reflexionar sobre la continuidad y la biyectividad. Por ejemplo, pide que se restrinja una función dada en una representación gráfica o algebraica, de modo que sea biyectiva. Además, Guzman propone algunos problemas en los que proporciona a los estudiantes la gráfica de una función, para que los estudiantes escriban una fórmula que la represente. Los resultados de esta investigación muestran que las respuestas de los estudiantes son “mono-registros”, es decir, están dadas en un solo registro, en especial, el registro privilegiado por los profesores: el algebraico. En general, la autora afirma, que los estudiantes tienen deficiencias conceptuales y relacionales en gran parte, por la falta de coordinación entre los registros.

Otro de los trabajos que se realiza bajo el enfoque de los registros de representación sobre el concepto de función, es el de Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal (2016). Los autores trabajan con estudiantes universitarios de nuevo ingreso de ingeniería; en su estudio, proponen evaluar la comprensión de la noción de función. Además, buscan evaluar la capacidad de los estudiantes para relacionar diferentes registros semióticos. Así, por ejemplo, para evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la función, mostraron dos representaciones gráficas a estos para que identificaran cuál de ellas constituía una función. En los resultados del estudio se evidencia que los estudiantes confunden, por ejemplo, tipos de funciones, y la posición de las rectas horizontales con rectas verticales en el plano cartesiano. Esto posiblemente se da por deficiencias en las bases conceptuales de las matemáticas de niveles anteriores, como deficiencias en el concepto mismo de función. En cuanto a la capacidad que tienen los estudiantes para relacionar diferentes registros semióticos, se concluye que aún sigue siendo un problema. De modo que, las dificultades encontradas en las distintas representaciones semióticas continúan siendo motivo de reflexión en la enseñanza de las matemáticas, principalmente lo relacionado a la lectura e interpretación de gráficos (Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal, 2016). Pues lo que “leen” o interpretan los estudiantes de los diversos registros de representación, resultan ser en la mayoría de los casos, razonamientos errados.

1.3 Estudios sobre el concepto de función visto desde la Teoría APOE

Un estudio preliminar realizado por Dubinsky (1991) sobre funciones, se fundamenta en la Teoría APOE y en la construcción del concepto de función desde el punto de vista matemático. La intención de Dubinsky es ilustrar el poder explicativo de la teoría y establecer pautas para el trabajo empírico posterior. Dubinsky manifiesta que una serie de actividades matemáticas pueden lograr que el estudiante construya un Esquema de función, más aún, estas actividades pueden requerir que el Esquema se reconstruya a un nivel más alto en el que una función, más allá de ser un Proceso interiorizado, es un Proceso que puede ser tratado como un Objeto por el sujeto, como resultado de la encapsulación (Dubinsky, 1991).

Dubinsky da algunas ideas sobre cómo propiciar la construcción del Esquema de función en los estudiantes. Entre estas ideas se encuentra, una representación de un conjunto de pares ordenados o una representación gráfica. También, en muchas situaciones es necesario que el estudiante piense en una función como Proceso y como Objeto al mismo tiempo. Un ejemplo de ello podría ser la suma de funciones (en general, las operaciones binarias). Al reflexionar sobre esta operación, el individuo debería ver que se toman dos Objetos (las dos funciones originales) y los transforma en un nuevo tercer Objeto (la nueva función). Es decir, los dos Objetos originales se desencapsulan en Procesos que el individuo debe determinar si pueden o no ser operados a través de determinar los dominios. En el caso de ser posible, los Procesos se coordinan por medio de una adición y de ello resulta un nuevo Proceso encapsulado, esto es, un nuevo Objeto (Dubinsky, 1991).

En general, Dubinsky ha observado que una parte importante al entender funciones es construir un Proceso que se pueda utilizar para dar sentido a un cierto tipo de fenómeno. Este Proceso, necesariamente requiere de la interiorización o encapsulación por parte del individuo. En otras palabras, más allá de replicar algún procedimiento, se requiere de mecanismos de abstracción reflexiva para que el individuo pueda construir el concepto de función.

Thompson y Carlson (2017) enfrentan varios dilemas:

> ¿Es un matemático, un maestro, un estudiante o un investigador en educación matemática? La concepción de la función de un estudiante no será tan desarrollada como la de un matemático, y la concepción de la función de un matemático puede no incluir información detallada que tenga un investigador de educación matemática sobre cómo se desarrolla la comprensión de la función de los estudiantes. Otro dilema al escribir este capítulo es que diferentes investigadores en educación matemática han tenido diferentes concepciones de la función y, por lo tanto, tienen normas diferentes para la "comprensión de la función por parte de los estudiantes.

Se resalta que, aunque inicialmente las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado, donde según Romero (2016) se espera que los estudiantes ya cuenten con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar, hoy se pueden encontrar investigaciones en el nivel de secundaria, y otras más, que se proponen, por ejemplo, con poblaciones con discapacidad auditiva.

Las investigaciones presentadas hasta aquí junto con otras ya realizadas por varios autores, han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

2. Referente Teórico

En este capítulo se exponen los elementos que componen la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación (Duval, 2004) que fundamentan teóricamente esta investigación. En particular, se describen las estructuras y mecanismos mentales que explican la construcción de conocimiento matemático y su rol en el diseño de una descomposición genética. Además, se explica de manera general el Ciclo de Investigación que propone la Teoría APOE. Por otra parte, se discuten elementos fundamentales de la Teoría de Registros de Representación que son usados para el diseño de los instrumentos que sustenta el desarrollo de la segunda componente del ciclo propuesto en APOE.

2.1 Elementos de la Teoría APOE

Las estructuras y mecanismos mentales que constituyen la Teoría APOE son descritas a continuación. De igual manera, se explica el rol que juegan estas estructuras y mecanismos en el diseño de una descomposición genética. Por último, se explica a grandes rasgos el Ciclo de Investigación que propone la teoría.

2.1.1 Estructuras y mecanismos mentales: Teoría APOE y construcción de conocimiento matemático

En términos de APOE, una estructura mental es cualquier estructura relativamente estable que usa un individuo para dar sentido a situaciones matemáticas (Arnon et al., 2014). Dicha estructura es construida en la mente del individuo y puede seguir desarrollándose gracias a lo que se denomina: mecanismo mental. En esta teoría, las estructuras son definidas como: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, de ahí el acrónimo de APOE, y los mecanismos como: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación, tematización y generalización.

A continuación, se describe cada una de las estructuras mentales y la forma en que se construyen.

Una Acción es una transformación guiada por un conjunto de instrucciones externas al individuo. Estas Acciones se realizan paso a paso[*], cada paso es fundamental y no es posible omitir ninguno. Aunque es la estructura más básica, las Acciones son fundamentales para el desarrollo de otras estructuras, y su complejidad depende del contexto y la experiencia de cada individuo. En el caso de las funciones, por ejemplo, si un individuo sustituye algunos valores en funciones de las que conoce su expresión algebraica, se considera que tiene una concepción Acción del concepto (Dubinsky et al., 2005, citado en Arnon et al., 2014). Una concepción en términos de APOE, es la idea o entendimiento del individuo que se desarrolla como resultado de la actividad reflexiva.

---

[*] Se entiende el paso a paso como una operación mecánica en la cual no se puede omitir o imaginar alguno de los pasos que componen la operación.

Los Procesos son Acciones interiorizadas que se construyen usando el mecanismo de interiorización. A medida que las Acciones se repiten y el individuo ya no depende de instrucciones externas, sino que ahora tiene control sobre ellas se dice que la Acción ha sido interiorizada en un Proceso (Arnon et al., 2014). Esto es, el individuo tiene la capacidad de omitir, invertir o imaginar el paso a paso, sin tener que realizar explícitamente cada uno de ellos. Para el caso de las funciones, se podría presentar que el individuo puede pensar en un elemento de entrada que es transformado dada una regla, para generar un elemento de salida. Esto es posible gracias al mecanismo de interiorización, el cual le permite a un individuo ser consciente y reflexivo de las Acciones que realiza. Los Procesos, también pueden ser construidos a partir de otros Procesos, usando el mecanismo de coordinación. Esto se puede evidenciar cuando el individuo tiene dos o más Procesos y necesita construir un único Proceso que pueda ser encapsulado. Para ilustrar mejor este mecanismo, se toma como ejemplo la composición de funciones.

Los Objetos se construyen a través del mecanismo de encapsulación. Este mecanismo va más allá de la concepción de un Proceso, ocurre cuando un individuo busca aplicar una Acción sobre un Proceso. Esto significa que el individuo, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática sobre la cual puede aplicar Acciones (Arnon et al., 2014). Para el caso del concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones sobre funciones y realizar operaciones entre estas. Es decir, generar nuevas funciones a partir de funciones conocidas. En relación con la desencapsulación, esta se da cuando un individuo necesita regresar al Proceso que dio origen al Objeto, siempre que sea necesario.

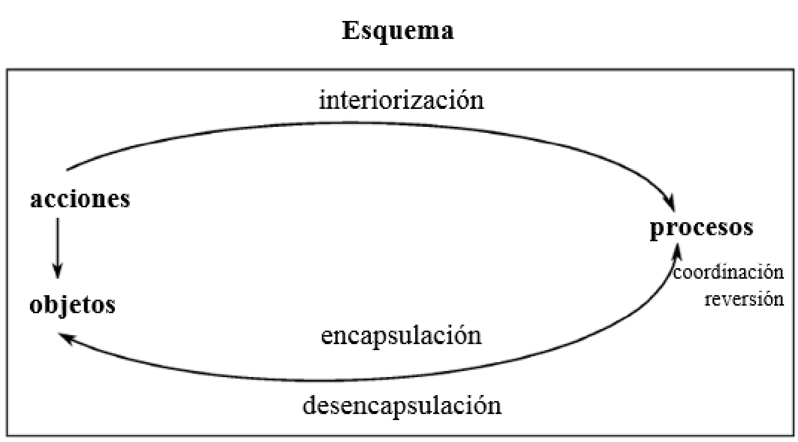
Los Esquemas son un conjunto de otras estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos, otros Esquemas) que contienen las descripciones, la organización y los ejemplos de dichas estructuras que un individuo ha construido alrededor de un concepto matemático. Finalmente, el mecanismo tematización es el que posibilita a un individuo aplicar transformaciones al Esquema construido.

Teniendo cómo se construye cada una de las estructuras, se puede deducir que una estructura no puede ser omitida para alcanzar la siguiente; las estructuras evolucionan gracias a la experiencia que tiene cada individuo. Podría suceder que no se perciba dicha evolución porque no se evidencie en un conjunto de datos bajo una experiencia particular, pero esto posiblemente es porque fueron omitidos, superados muy rápidamente o no son identificados los mecanismos que dan origen a la nueva estructura.

Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son generalmente presentadas como aparece en la Figura 1.

Figura 1

Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de contenido matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)



La relación entre los elementos que se muestran en la Figura 1 es considerada por Dubinsky (1991), citado en Arnon et al. (2014), como un "sistema de retroalimentación circular". Del mismo modo Asiala et al. (1996, citado en Arnon et al., 2014), describen la interacción entre las estructuras y los mecanismos que la generan de la siguiente forma: La construcción de un Objeto matemático inicia cuando un individuo manipula Objetos construidos previamente; esta manipulación está definida por las Acciones que puede realizar sobre él. Dichas Acciones al ser interiorizadas por el individuo son estructuradas en Procesos que posteriormente son encapsulados para formar Objetos. Los Objetos, pueden desencapsularse para regresar sobre el Proceso que le dio origen. Por último, las Acciones, los Procesos y los Objetos pueden ser organizados en Esquemas.

Las estructuras y mecanismos mentales que constituyen la Teoría APOE, fueron descritos con el fin de dar paso al desarrollo de modelos teóricos que un individuo construye para aprender un concepto. Estos modelos son llamados descomposiciones genéticas.

2.1.2 Descomposición Genética

Una descomposición genética en palabras de Arnon et al. (2014), es “un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender algún concepto matemático específico” (p. 27).

Estas descomposiciones pueden ser fundamentadas desde experiencias de aprendizaje o enseñanza, hasta el análisis de libros de texto. Las descomposiciones genéticas también pueden fundamentarse en resultados de investigaciones previas, el desarrollo histórico epistemológico de los conceptos matemáticos, entre otros aspectos que definen los conceptos matemáticos y su didáctica. Las descomposiciones genéticas de un concepto o noción matemática no son únicas, como afirman Villabona y Roa-Fuentes (2016), estas descomposiciones están determinadas por la experiencia de los individuos resolviendo situaciones más o menos relacionadas con un concepto o noción particular. Por lo tanto, pueden tener diferentes puntos de inicio o diferentes desarrollos.

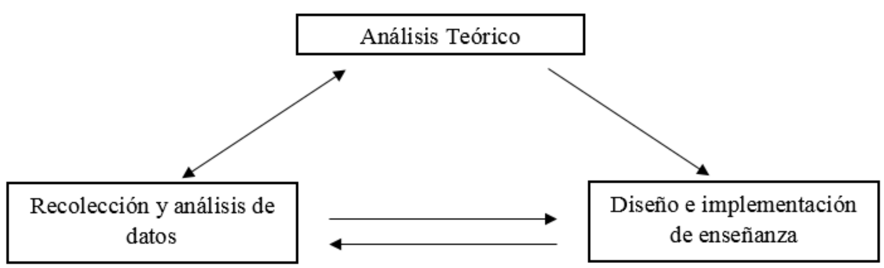
Otra característica importante de las descomposiciones genéticas y a la que hacen referencia Villabona y Roa-Fuentes, es que estos modelos cognitivos deben ser validados a partir del trabajo con diferentes individuos, ya que cada vez que se pone en juego el modelo de construcción, este se va fortaleciendo y va ganando más exactitud respecto a cómo un individuo construye un concepto matemático.

2.1.3 Ciclo de investigación basado en la Teoría APOE

Las investigaciones fundamentadas en APOE involucran un diseño metodológico compuesto por tres componentes: Análisis Teórico, Diseño e Implementación de Enseñanza, y Recolección y Análisis de Datos. En la Figura 2 se muestra la relación entre dichas componentes.

Figura 2

Ciclo de Investigación (Arnon et al., 2014, p. 94)



Inicialmente, en el ciclo de investigación, se propone un Análisis Teórico del desarrollo cognitivo del concepto a estudiar, en el caso de esta investigación: el concepto de función. En esta primera componente se genera una descomposición genética preliminar basada en la construcción matemática del concepto de función tomando en cuenta: cómo lo comprende el investigador, cómo lo presentan los libros de texto, cómo se comprende históricamente, cómo se comprende a través de las experiencias como docente, o de investigaciones hechas previamente, entre otras. Esta descomposición genética preliminar proporciona las bases para el diseño e implementación de un modelo de enseñanza, que es justamente la segunda componente de este ciclo de investigación. La enseñanza está orientada, en palabras de los autores, a "promover la abstracción reflexiva[†] en lugar de obtener respuestas correctas" (Arnon et al., 2014, p. 58). Si esta descomposición preliminar es una buena aproximación a la construcción del concepto de función, entonces la tercera componente, Recolección y análisis de datos, va a permitir la validación de la descomposición genética y su implementación en la enseñanza. Durante la etapa de implementación, se recolectan los datos para dar respuesta a dos interrogantes: "¿Los estudiantes evidencian las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien construyeron los estudiantes el concepto en cuestión?" (Arnon et al., 2014, p. 94).

En caso tal que el investigador concluya que, en efecto, los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética preliminar, pero no evidencian haber construido el concepto en cuestión, el análisis teórico es reconsiderado y modificado para construir una nueva descomposición. Esto se refiere a las evidencias que pueda dar un estudiante respecto a haber construido una estructura, que son necesarias, pero no suficientes para concluir que ha logrado construir una concepción específica del concepto. En caso de que no realicen las construcciones descritas por la descomposición genética preliminar, es la enseñanza la que debe ser reconsiderada y modificada.

[†] "La abstracción reflexiva será la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre estos objetos" (Dubinsky, 1991, p. 102)

2.2 Elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

En primer lugar, se aclara que una representación es interpretada por Duval como una "codificación de la información", para dicho autor, una representación no tiene nada que ver con una "creencia" ni con una "evocación de objetos ausentes". Desde esta perspectiva la noción de representación es requerida para estudiar los fenómenos relativos a la construcción de conocimiento. En este sentido, se clasifican diferentes tipos de representaciones para estudiar la adquisición de conocimiento: representaciones mentales, representaciones semióticas y representaciones computacionales.

2.2.1 Tipos de representaciones

Los tipos de representaciones se pueden clasificar en dos oposiciones: la oposición consciente/no-consciente y la oposición interno/externa. La primera de estas hace referencia a lo que un individuo puede o no puede observar, y ese paso de lo no-consciente a la consciencia, corresponde a un proceso de objetivación. Esto es, "el descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado" (Duval, 2004, p. 33). La segunda oposición, interno/externa, hace referencia a lo que un individuo o un sistema puede producir, y eso que produce puede o no ser comunicado por dicho individuo a través de un sistema semiótico. Duval presenta una tabla con el cruce de estas oposiciones, en donde se distinguen los tres tipos de representaciones antes mencionados.

Tabla 1

Tipos y funciones de representaciones

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental *Función de objetivación*	Semiótica *Función de objetivación* *Función de expresión* *Función de tratamiento intencional*
NO-CONSCIENTE	Computacional *Función de tratamiento automático o cuasi instantánea*	

Tomada de Duval (2004)

Las representaciones semióticas permiten una "mirada del objeto" a través de la percepción de estímulos "significantes" como puntos, trazos, caracteres, etc. y pueden ser representadas por figuras, gráficos, expresiones simbólicas, entre otros (Duval, 2004). Por ejemplo, basta con proporcionar la expresión algebraica de una función, para ilustrar este tipo de representación.

Las representaciones mentales, son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de estímulos "significantes", contrario a las representaciones semióticas (Duval, 2004). En las representaciones mentales están incorporados conceptos, nociones, ideas, creencias, etc. En ocasiones, se consideran las representaciones semióticas como la fiel expresión de las representaciones mentales, pero lo que imagina un individuo puede no corresponder a lo que él reproduce posiblemente por imitación y sin sentido alguno. La concepción (construcción personal de un contenido matemático) que tiene un individuo sobre el concepto de función es quizá el ejemplo más claro para explicar este tipo de representación.

Por último, las representaciones computacionales son aquellas que "no requieren de la mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie" (Duval, 2004, p. 37); es decir, permiten transformar mecánicamente puntos, trazos, caracteres, etc. Así, por ejemplo, se puede mencionar la escritura binaria en 0 y 1 que se usa para representar textos, o para interpretar instrucciones del computador.

Descritos a grandes rasgos los tipos de representación, se aclara que el análisis de Duval (2004) se concentra en las representaciones semióticas, específicamente, en la transformación de estas. Para Duval, la transformación ya sea en otras representaciones que guarden todo el contenido de la representación inicial, o ya sea que guarden solo una parte de ese contenido, es la propiedad más importante de las representaciones, pues para él, ese es el momento en el que las cosas adquieren un significado profundo. En efecto, se habla de las actividades de *formación, tratamiento* y *conversión,* descritas en la siguiente sección.

Vale la pena resaltar que los sistemas semióticos, que permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (representar alguna cosa, transformar las representaciones, y convertir las representaciones) se denominan registros de representación semiótica.

2.2.2 Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis

Las actividades de *formación, tratamiento* y *conversión* que se presentan en este apartado, son fundamentales para el análisis de un aprendizaje conceptual. Dicho aprendizaje centrado en el cambio y la coordinación de los distintos registros de representación resulta muy beneficioso en la comprensión de conceptos (Duval, 2004).

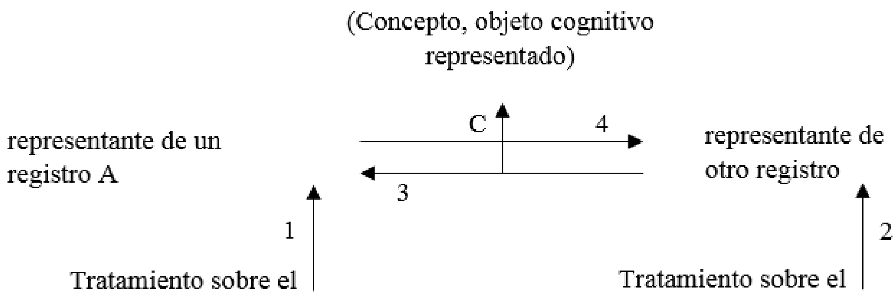
La primera actividad, la *formación* de una representación semiótica, es el medio de selección por parte de un individuo de unos signos que establecen lo que se quiere representar. Esto es, el medio para expresar una representación mental o para evocar un objeto real. Por ejemplo, se realiza la actividad de formación cuando se representa una función en lenguaje algebraico. La segunda actividad, la actividad de *tratamiento,* consiste en transformar una representación inicial en otra representación terminal dentro del mismo registro con el fin de "expandir" la información brindada. Los tratamientos que se pueden realizar a las representaciones varían según el registro en el que se está trabajando y su complejidad depende del mismo registro. En el caso de las funciones, cuando se pasa de escritura conjuntista a escritura funcional, se está haciendo tratamiento de la representación, ya que ambas escrituras hacen parte del registro algebraico. La tercera actividad conocida como *conversión*, consiste en transformar una representación dada en un registro, a otra representación de un registro distinto al inicial. Por ejemplo, trasformar una función del lenguaje algebraico a un esquema gráfico, pero sin ser reducida a un algoritmo. Esta actividad puede favorecer la coordinación de los registros de representación que es una condición necesaria para la comprensión (Duval, 2004). A continuación, se trata con mayor detalle el asunto de la coordinación.

2.2.3 Aprendizaje basado en la coordinación de los registros

Como se ha visto a lo largo del documento, y más aún, en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, para que un individuo logre un aprendizaje profundo es fundamental que haga uso de una variedad de registros, que le permitan efectuar cambios y "facilite" su aprendizaje. Estos cambios de registro le ofrecen a dicho individuo procedimientos de interpretación y, por ende, de desarrollo de los conocimientos. Dicho de otra manera, la coordinación de varios registros de representación conlleva una comprensión integrativa de un concepto u objeto cognitivo (Duval, 2004). Esto se ejemplifica en la Figura 3 del modelo de representación centrado en la objetivación.

Figura 3

Modelo de la representación centrado en la función de objetivación (Duval, 2004, p. 68)



En la Figura 3, se muestra un ejemplo de la coordinación entre dos registros donde se da una comprensión integrativa. Esto es, la comprensión de las representaciones semióticas que resulta de una coordinación de registros (Duval, 2004). El diagrama es descrito por Duval de la siguiente forma: Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro, esto es, los *tratamientos* que se realizan a dicho registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las *conversiones* de un registro a otro. Finalmente, la flecha C corresponde a lo que se denomina comprensión integrativa de una representación. Como se dijo antes, la comprensión integrativa es el resultado de una coordinación entre registros, que, en este caso, equivalen a dos. Hay que mencionar, además, que, para Duval, lo interesante de los cambios de registro es que cada registro tiene tratamientos que le son propios.

2.3 Funcionalidad de las teorías expuestas

Si bien este documento contempla como fundamento la Teoría APOE y la Teoría de Registros de Representación Semiótica, es importante aclarar el uso que se da a cada una. En primer lugar, la Teoría de Registros de Representación Semiótica permite fundamentar el diseño de instrumentos (Tareas Matemáticas) para el desarrollo de la segunda componente del ciclo de investigación: Diseño e implementación de un modelo de enseñanza; ciclo propuesto por APOE (Arnon et al., 2014). De tal manera que los registros: gráfico, verbal, tabular y algebraico son expuestos en el contexto de las Tareas; esto de manera explícita o como resultado de un tipo de transformación sobre un registro que debe ser coordinado con otro para dar solución a la Tarea.

También es importante aclarar que, a partir de este momento, cuando se habla de coordinación, se hace alusión a la coordinación de registros de representación y no al mecanismo mental que describe APOE.

Descritos los dos referentes teóricos que fundamentan esta propuesta, se procede a detallar el método que se llevara a cabo en esta investigación.

3. Método de la investigación

En este capítulo se describe cómo se desarrollan las tres componentes del ciclo de investigación (Arnon et al., 2014); se describe el desarrollo de cada componente: Análisis teórico, Diseño e implementación de enseñanza y, Recolección y análisis de datos. Ya que es de interés en esta investigación que el diseño, la implementación y la evaluación de la instrucción, se basen en investigaciones teóricas, se propone fundamentar la segunda componente (diseño e implementación de enseñanza) en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004).

Esta investigación estudia el nivel de desarrollo cognitivo de un grupo de estudiantes que completa un curso basado en la Teoría APOE y el Ciclo de Enseñanza ACE según la clasificación presentada en APOE. Para el estudio, se seleccionan dos grupos de estudiantes que cursan noveno grado en una institución educativa pública de Colombia. El número promedio de estudiantes por grupo es 33, sus edades oscilan entre los 14 y 15 años. Se elige este nivel ya que según las indicaciones del MEN (2003) es allí donde los estudiantes empiezan a desarrollar una base sólida para comprender el concepto de función.

3.1 Análisis Teórico

En esta primera componente, que fundamenta los resultados obtenidos al final del ciclo de investigación, se toma como guía el trabajo realizado por Roa-Fuentes y Oktaç (2010); allí se muestra el procedimiento seguido para el diseño de una descomposición genética. En esta investigación se realiza dicho procedimiento orientado a la construcción del concepto de función.

Como ya se mencionó, el objetivo principal de esta primera componente es diseñar una descomposición genética preliminar de un concepto matemático que determine un camino viable de construcción para los estudiantes. Dicho de otra forma, la descomposición genética propuesta en este análisis teórico "está al alcance" de los estudiantes; tomando su experiencia y las estructuras previas construidas que se asocian al concepto de función.

Al igual que en el estudio realizado por Roa-Fuentes y Oktaç (2010, 2012) sobre las transformaciones lineales, en esta investigación se realiza un análisis previo sobre el concepto de función. En dicho análisis, se presentan algunas descomposiciones previas del concepto; se hace una revisión del libro de texto que comúnmente se usa en las instituciones educativas para noveno grado, con el fin de tener una definición como referente sobre la cual partir; se plantea una breve descripción de los conocimientos previos necesarios para la construcción de este concepto al igual que una descripción de los tipos de representación que se trabajan tradicionalmente en la instrucción.

Para la obtención de algunos datos empíricos, se realiza observación en el aula de matemáticas con dos grupos de estudiantes de los cuales uno hace parte de la población de estudio. Finalmente, se propone un modelo hipotético de las estructuras y mecanismos mentales necesarios, para construir el concepto matemático. Es decir, se presenta una descomposición genética preliminar del concepto de función para noveno grado, que toma en cuenta las características y relaciones entre los registros de representación. Esto en cierta manera condensa los antecedentes del trabajo a desarrollar.

Esta primera parte del ciclo de investigación basado en APOE, impulsa el diseño y la implementación de la enseñanza correspondiente a la segunda componente del ciclo de investigación.

3.2 Diseño e implementación de enseñanza

La implementación de enseñanza se lleva a cabo utilizando el Ciclo de Enseñanza ACE: estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) Actividades (en este trabajo de investigación se denominarán Tareas), (C) discusión en Clase, y (E) Ejercicios. El objetivo de las Actividades es promover la abstracción reflexiva en lugar de obtener respuestas correctas; la discusión en Clase permite que los estudiantes puedan reflexionar sobre el trabajo que están realizando; finalmente, los Ejercicios refuerzan las actividades hechas en el computador y la discusión en el aula (Arnon et al., 2014).

Inicialmente, se genera un espacio para que los estudiantes exploren libremente el software de geometría dinámica GeoGebra. Siguiendo el ciclo metodológico ACE, y teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación es caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de secundaria, al resolver Tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre diferentes representaciones del concepto de función; se diseñan e introducen Tareas en el aula para promover el desarrollo de mecanismos mentales y la construcción de estructuras mentales. Las Tareas diseñadas buscan motivar la construcción de las estructuras mentales descritas en la descomposición genética preliminar. Éstas incluyen problemas de situaciones que involucren la transformación de estructuras previas y que permitan la coordinación entre las diversas representaciones del concepto de función. Cada Tarea es implementada a través del trabajo de los estudiantes organizados en grupos pequeños (dos o tres), ya que el contexto de trabajo grupal, como lo afirma Vidakovic (1993, citado en Arnon et al., 2014) da lugar a la formulación de preguntas, dudas y explicaciones más explícitas por parte de los estudiantes, que lo que normalmente ocurriría en contextos individuales (p. 107). La discusión en clase, mediada por el investigador, tiene como objetivo que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que están desarrollando. Finalmente, las actividades extra-clase permiten que los estudiantes refuercen en casa el trabajo realizado en el aula.

3.3 Recolección y análisis de datos

La recolección y análisis de datos es fundamental para cualquier investigación basada en APOE, esta permite obtener evidencia empírica, de lo contrario, la descomposición genética, según Arnon et al. (2014), solo será una hipótesis.

Para la validación de la descomposición genética preliminar se propone el diseño y desarrollo de tres instrumentos: (i) prueba diagnóstica, (ii) prueba pos-instrucción, y (iii) entrevista semiestructurada.

Con la prueba diagnóstica se evalúan las construcciones iniciales que poseen los estudiantes sobre el concepto de función y si estas construcciones son las propuestas en la descomposición genética preliminar. Asimismo, la prueba diagnóstica permite determinar si los estudiantes coordinan diferentes registros de representación (gráfico, algebraico, tabular y verbal) y la forma de representarlos. Posterior a la implementación de la enseñanza, se espera que los estudiantes hayan reflexionado sobre el concepto de función y que sus concepciones coincidan con las construcciones previstas en la descomposición genética preliminar. Por esta razón, la prueba pos-instrucción busca evaluar las habilidades que adquieran los estudiantes para resolver problemas asociados a funciones. Dichos problemas requieren en su resolución las estructuras previstas en la descomposición, es decir, requieren del desarrollo de Acciones y Procesos para formar el Objeto matemático. Finalmente, la entrevista semiestructurada tiene como objetivo principal determinar si los estudiantes han realizado las construcciones mentales establecidas por la descomposición genética preliminar. Dado que es una entrevista semiestructurada, se sigue un esquema de preguntas preparadas, pero también se permiten preguntas de seguimiento si fuera el caso. Se considera que esto permite determinar con mayor profundidad lo que han estructurado los estudiantes; este tipo de instrumentos genera un espacio de discusión y reflexión sobre los argumentos dados en la prueba pos-instrucción. Es posible solicitar a los estudiantes que aclaren sus respuestas y/o que las amplíen.

Se considera que estos instrumentos proporcionan la información necesaria para responder a los interrogantes planteados en el ciclo de investigación: “¿Los estudiantes evidencian las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien construyeron los estudiantes el concepto en cuestión?” (Arnon et al., 2014, p. 94). Se recuerda que, para validar la descomposición genética preliminar, la respuesta a estos dos interrogantes debe ser afirmativa. Es posible realizar ajustes para refinar bien sea la descomposición, o bien sea la instrucción, pero en caso de que se refine la descomposición genética, ésta ya no se considera preliminar.

4. Análisis Teórico

En este capítulo se presenta el análisis teórico como primera componente del ciclo de investigación sobre el concepto de función, el cual guía el diseño y desarrollo de las componentes posteriores del método usado en esta investigación. Esto es, se presentan tres descomposiciones genéticas previas del concepto de función; se hace una revisión del libro de texto que generalmente se usa no solo en esta institución, sino en las instituciones educativas para el grado noveno; se plantea una breve descripción de los conocimientos previos necesarios para la construcción de este concepto; se describen los tipos de representación verbal, tabular, gráfico y algebraico; se hace una descripción de la observación en el aula y finalmente, se propone una descomposición genética preliminar.

4.1 Descomposiciones genéticas previas

Se revisan y analizan tres descomposiciones genéticas sobre el concepto de función, que se basan fundamentalmente en las ideas de Ed Dubinsky. La primera de Carlson y Oehrtman (2005) está enfocada en las estructuras Acción y Proceso que podrían evidenciar estudiantes universitarios. La segunda de Dubinsky (2013), aunque indica algunas características sobre el Objeto de función, también está enfocada en las estructuras Acción y Proceso, pero a nivel de secundaria; el autor considera que las Acciones y los Procesos son las estructuras más importantes para estudiar funciones en dicho nivel. La tercera descomposición genética presentada en Arnon et al. (2014), no solo es la más actual sino también la única que relaciona las estructuras con algunos mecanismos mentales.

Se puede observar en estas descomposiciones que a pesar de que corresponden a niveles escolares diferentes (universitario y básica secundaria), describen de manera similar el pensamiento de los estudiantes. En el caso de las Acciones se puede inferir que esta estructura requiere de un conjunto de instrucciones guiadas externas al individuo. Externas en el sentido en que dicho individuo no puede omitir ningún paso de la instrucción, para dar respuesta a una pregunta particular. También se puede inferir que la Acción está asociada con reemplazar en una expresión algebraica un elemento del dominio de la función. En la Tabla 2 se muestra con más detalle la descripción de la estructura Acción que se propone en cada una de las descomposiciones genéticas analizadas.

Tabla 2

Estructura Acción en la construcción del concepto de función

	Acción
Carlson & Oehrtman, (2005)	Una concepción Acción de la función implica la capacidad de insertar números en una expresión algebraica y realizar cálculos. Esta es una concepción estática dado que el sujeto tiende a pensar en ello un paso a la vez (por ejemplo, una evaluación de una expresión algebraica). Un estudiante cuya concepción de función se limita a Acciones puede ser capaz de formar la composición de dos funciones, definidas por expresiones algebraicas, reemplazando cada aparición de la variable en una expresión por la otra expresión y luego simplificando; sin embargo, los estudiantes probablemente no pueden componer dos funciones que están definidas a través de tablas o gráficos (p. 8).
Dubinsky & Wilson, (2013)	El nivel más bajo de comprensión es la estructura Acción en la que el alumno requiere instrucciones muy explícitas (como una fórmula o un algoritmo) sobre cómo transformar un elemento de dominio en un elemento del rango y debe hacerlo explícitamente un elemento a la vez. Con tal concepción, el individuo está restringido a comprender funciones solo si están dadas por expresiones algebraicas (pp. 95-96).
Arnon et al., (2014)	La construcción del concepto de función comienza con Acciones sobre un conjunto de elementos. Esto es dado un conjunto de números u otros tipos de elementos, estas Acciones implican tomar un elemento de un conjunto, aplicar explícitamente una regla, típicamente una fórmula algebraica, y asignar a ese elemento específico un elemento único del segundo conjunto. Como estas Acciones se realizan en conjuntos diferentes, por ejemplo, pares ordenados, puntos u objetos no numéricos, el individuo los refleja y los percibe como una transformación dinámica (pp. 29-30).

En cuanto a los Procesos, estas descomposiciones muestran que un individuo que tenga esta concepción realiza las mismas Acciones, pero sin depender de instrucciones externas, es decir, el estudiante ahora puede imaginar, invertir u omitir pasos de ese algoritmo que antes necesitaba para resolver un problema. Significa que el individuo puede pensar en un elemento de entrada que es transformado dada una regla para generar un elemento de salida. Esta estructura como se puede observar en la Tabla 3, está asociada con la composición de funciones, pues un individuo con dicha concepción puede coordinar Procesos para generar nuevos Procesos.

Tabla 3

Estructura Proceso en la construcción del concepto de función

	Proceso
Carlson & Oehrtman, (2005)	Una concepción Proceso de función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo con algunos medios repetibles que, dada la misma cantidad original, siempre producirá la misma cantidad transformada. El sujeto puede pensar acerca de la transformación como una actividad completa que comienza con objetos de algún tipo, haciendo algo con estos objetos y obteniendo nuevos objetos como resultado de lo que se hizo. Cuando el sujeto tiene una concepción Proceso, él o ella podrá, por ejemplo, coordinarlo con otros Procesos o incluso revertirlo. Las nociones de funciones 1-1 o sobre se vuelven más accesibles a medida que se fortalece la concepción Proceso de los alumnos (p. 9).
Dubinsky & Wilson, (2013)	Después de trabajar con funciones concebidas como Acciones y reflexionar sobre ese trabajo, el estudiante puede hacer construcciones mentales con respecto a funciones que realizan exactamente las mismas transformaciones que las Acciones, pero que lo hacen completamente en su mente, sin la necesidad de instrucciones explícitas. Estas construcciones mentales son los Procesos. Se requiere una concepción Proceso para que un individuo entienda la composición de las funciones, los inversos de las funciones y otras propiedades de la función (p. 96).
Arnon et al., (2014)	En este punto, la interiorización comienza cuando el individuo comienza a ver una función como un tipo de transformación que asocia elementos de un conjunto, llamado dominio, con elementos de un segundo conjunto, llamado rango. Esto significa que el individuo ha construido una estructura mental que realiza la misma transformación que la Acción, pero totalmente en la mente del individuo. Un individuo que muestra una concepción Proceso de la función puede pensar en una función en términos de aceptar entradas, manipularlas de algún modo y producir salidas sin la necesidad de hacer cálculos explícitos. La evidencia de una concepción Proceso de función puede incluir la capacidad de determinar si una función tiene inversa, lo que requeriría una inversión de la función Proceso, o describir cómo se podrían componer dos funciones, lo que requeriría una coordinación de dos procesos de función (p. 30).

En relación al Objeto de función, las descomposiciones sugieren que un individuo que logre esta estructura puede aplicar Acciones sobre los Procesos construidos. Dicho de otra manera, el individuo puede transformar funciones por medio de Acciones.

Tabla 4

Objeto de función

	Objeto
Dubinsky & Wilson, (2013)	Cuando un individuo es capaz de aplicar transformaciones (Acciones o Procesos) sobre una función, se dice que tiene una concepción Objeto de las funciones. Dependiendo de la situación matemática con la que esté trabajando un estudiante, puede ser apropiado usar una concepción Acción (por ejemplo, evaluar una función en un punto) o una concepción Proceso (invertir una función), o una concepción Objeto (por ejemplo, aplicar la operación de diferenciación) (p. 96).
Arnon et al., (2014)	Aplicaciones de Acciones u otros Procesos al Proceso de función conduce a su encapsulación como un objeto cognitivo. El mecanismo de encapsulación aleja el enfoque del alumno del concepto de función como una transformación dinámica a una entidad estática que puede ser examinada y transformada. Las indicaciones de encapsulación pueden incluir la capacidad de un individuo para formar conjuntos de funciones, o para realizar operaciones aritméticas sobre funciones, o para construir una función como el límite de una secuencia de funciones. En el primero, una función se trata como un elemento; en el segundo, como una entrada a operaciones binarias; y en el tercero, como el Objeto trascendente de un Proceso infinito que produce una secuencia de funciones. En cada uno de estos casos, las funciones se tratan como entidades estáticas sobre las que se pueden aplicar Acciones (p. 30).

Finalmente, por lo que se refiere a los Esquemas, la única descomposición que describe esta estructura mental es la de Arnon et al., (2014). Esto confirma que difícilmente un estudiante de cualquier nivel escolar logra un Esquema de función. Según esta descomposición, dicho Esquema se alcanza cuando un estudiante puede determinar relaciones funcionales en situaciones matemáticas específicas (Tabla 5).

Tabla 5

Esquema de función

	Esquema
Arnon et al., (2014)	Un individuo que puede determinar si la relación entre dos entidades define una relación funcional, y puede coordinar varios Procesos para determinar el dominio y el rango de una función, puede estar dando evidencia de la construcción de un Esquema de función. Una indicación de la coherencia de un Esquema de función incluiría la capacidad de un individuo para determinar si una situación matemática particular define una relación funcional.

4.2 Revisión del libro de texto usado en clase

De acuerdo con Trigueros (2005) y Roa-Fuentes y Oktaç (2009), APOE parte de la reflexión de los conceptos desde su definición matemática. Por tanto, se considera fundamental la revisión de libros de texto en el Análisis Teórico. También es necesario tener claridad sobre qué definición se puede esperar que construyan los estudiantes, así como cuáles son sus alcances en la construcción del concepto de función.

Aunque se cuenta con una gran variedad de libros de texto, el libro que se toma para la revisión es el que generalmente se usa en las instituciones educativas de Colombia en el área de Matemáticas para noveno grado: “Vamos a aprender Matemáticas” (MEN, 2017). Para tal revisión, se toman tres criterios considerados para el análisis del libro de texto de Campos (2017): 1. Estructura general del texto; 2. Presentación y definición del concepto de función; 3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto.

Estructura general del texto.

El libro está organizado en seis unidades: 1. Pensamiento numérico (números reales); 2. Pensamiento espacial (circunferencia y razones trigonométricas); 3. Pensamiento métrico (longitudes, áreas y volúmenes); 4. Pensamiento aleatorio (estadística y probabilidad); 5. Pensamiento variacional (función lineal y sistemas de ecuaciones) y; 6. Pensamiento variacional (funciones). Así mismo, cada una de estas unidades está dividida en temas correspondientes a la unidad, a continuación, se describe la manera como aparecen organizadas.

Apertura de la unidad: se menciona lo que el estudiante debe saber, lo que va a aprender y para qué sirve lo que se va a aprender.

Ruta didáctica:

- Saberes previos: se pide al estudiante realizar un breve ejercicio o responder una pregunta para explorar lo que ya sabe.
- Analiza: se establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.
- Conoce: se desarrollan los contenidos del tema que se va a aprender.
- Ejemplos: se ilustran los conceptos explicados.
- Actividades de aprendizaje: se aplica y refuerza lo que se ha aprendido.
- Evaluación del aprendizaje: se evalúan los conocimientos.

Al final de cada unidad se encuentran tres secciones denominadas: practica más, resolución de problemas y, evaluación del aprendizaje; en donde se pueden visualizar otros ejercicios y problemas relacionados con los temas de la unidad.

Presentación y definición del concepto de función.

Frente a la pregunta: ¿Qué motiva en el texto el estudio del concepto de función? se puede asegurar que “Vamos a aprender matemáticas” (MEN, 2017) es un libro de texto abierto, ya que el concepto de función es presentado mediante una situación matemática en la ruta didáctica, lo que hace que se motive su estudio. En “saberes previos” se cuestiona al estudiante por lo que es un par ordenado y cómo se ubica en el plano cartesiano una pareja ordenada. En “analiza” se plantean los conjuntos $A = \{2, 3, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 4, 9, 10\}$ y se define una relación R de A en B mediante el enunciado “y es múltiplo de x” en donde $y \in B$ y $x \in A$. Después se pregunta a los estudiantes por cuáles son los elementos de R. Finalmente, en “conoce” se determinan todas las parejas ordenadas que cumplen la condición “y es múltiplo de x”, es decir, todos los elementos de la relación R.

Seguido de la situación matemática planteada, se define una función de la siguiente manera:

> Una función f es una relación definida de un conjunto A en un conjunto B, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B mediante f.
>
> (MEN, 2017, p. 138)

Teniendo en cuenta la revisión de las descomposiciones genéticas previas del concepto de función, se considera que, la definición presentada de función en el libro de texto demanda en un estudiante una concepción Proceso de función. Además, la definición muestra que es necesario que los estudiantes hayan estructurado una concepción Objeto de par ordenado.

Es conveniente subrayar que si un estudiante reproduce dicha definición al pie de la letra no significa que tenga estructurado el concepto. Lo que lo determina es si el estudiante logra desarrollar sus propias concepciones de lo que es y representa una función, incluso si no tiene dominio del lenguaje formal.

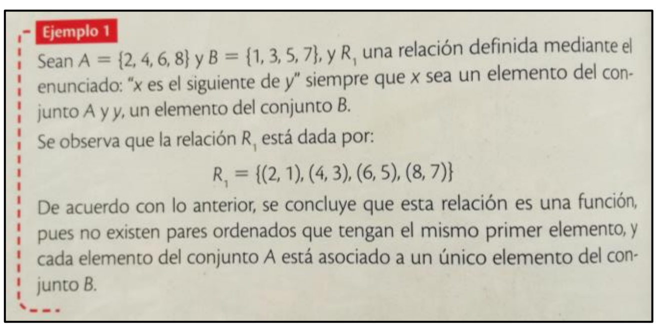
Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto.

Campos (2017) asegura que se pueden identificar las construcciones mentales que son requeridas y/o promovidas en los ejemplos y ejercicios, mediante la relación que se determina entre estos. Es decir, se puede evidenciar si los ejercicios propuestos realmente promueven el desarrollo de Procesos, Objetos y Esquemas o, por el contrario, solo promueven Acciones del concepto de función.

El MEN (2017) antes de plantear la actividad de aprendizaje, propone únicamente dos ejemplos de funciones; uno que se muestra en la Figura 4 y el otro encontrando el dominio y recorrido de una función de forma analítica.

Figura 4

Un ejemplo del libro de texto (MEN, 2017)



Ejemplo 1

Sean $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, y R_1 una relación definida mediante el enunciado: "*x* es el siguiente de *y*" siempre que *x* sea un elemento del conjunto *A* y *y*, un elemento del conjunto *B*.

Se observa que la relación R_1 está dada por:

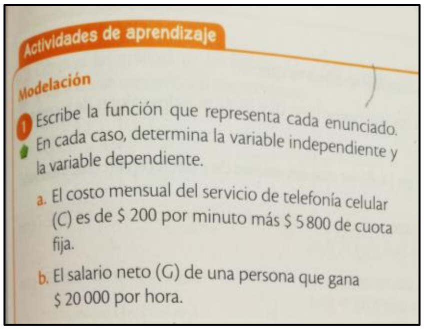
$$R_1 = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$$

De acuerdo con lo anterior, se concluye que esta relación es una función, pues no existen pares ordenados que tengan el mismo primer elemento, y cada elemento del conjunto *A* está asociado a un único elemento del conjunto *B*.

El ejemplo 1 (Figura 4) propuesto en el libro de texto es coherente con la definición que se proporciona. Sin embargo, en las actividades de aprendizaje se pide al estudiante trabajar en diferentes registros de representación sin ejemplos previos de ello. Se considera que, estos dos ejemplos propuestos para entender el concepto de función no son suficientes para que los estudiantes comprendan tal concepto. Además, las actividades de aprendizaje se presentan de manera apresurada e independiente; es decir, no están conectadas unas actividades con otras (Figura 5).

Figura 5

Actividades propuestas para el concepto de función (MEN, 2017)



Actividades de aprendizaje

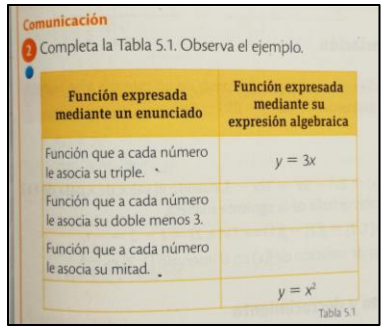
Modelación

1 Escribe la función que representa cada enunciado. En cada caso, determina la variable independiente y la variable dependiente.

a. El costo mensual del servicio de telefonía celular (C) es de $ 200 por minuto más $ 5 800 de cuota fija.

b. El salario neto (G) de una persona que gana $ 20 000 por hora.

a)



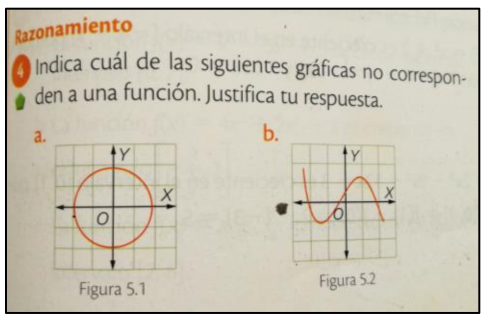
Comunicación

2 Completa la Tabla 5.1. Observa el ejemplo.

Función expresada mediante un enunciado	Función expresada mediante su expresión algebraica
Función que a cada número le asocia su triple.	$y = 3x$
Función que a cada número le asocia su doble menos 3.	
Función que a cada número le asocia su mitad.	
	$y = x^2$

Tabla 5.1

b)



Razonamiento

4 Indica cuál de las siguientes gráficas no correspon-den a una función. Justifica tu respuesta.

a.

Figura 5.1

b.

Figura 5.2

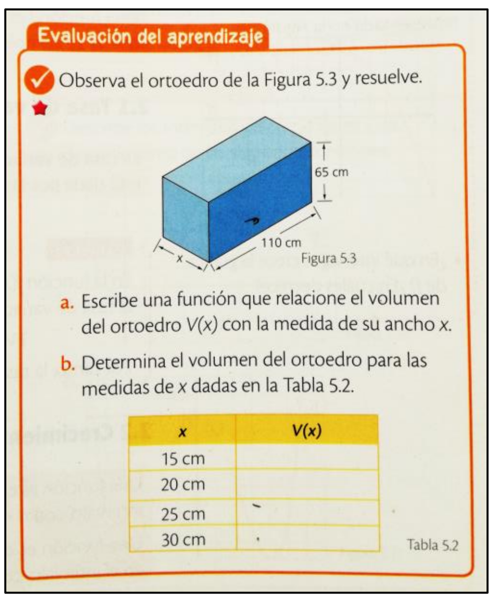
c)

En la Figura 5.a) se pide a los estudiantes que representen una función a partir de un enunciado; en la Figura 5.b) los estudiantes deben completar una tabla en la que se relacionan los registros verbal y algebraico y; en la Figura 5.c) los estudiantes deben determinar qué gráfica corresponde a una función.

Más adelante se introducen las funciones lineal, afín, cuadrática, polinómica, racional, exponencial y logarítmica, así como ejemplos y ejercicios de cada una de ellas. En cada caso, el libro presenta las representaciones gráfica y algebraica de cada función y propone tablas con determinados datos para generar una representación tabular. En general, los ejemplos y ejercicios para abordar estas funciones promueven la conversión entre los registros gráfico, algebraico y tabular. Sin embargo, se considera que, los ejemplos y ejercicios propuestos en el libro promueven la construcción de Acciones mentales. Son pocos los problemas propuestos donde los estudiantes podrían estructurar un Proceso o coordinar los cuatros registros de representación. Por ejemplo, en el problema mostrado en la Figura 6 se pide al estudiante escribir la representación algebraica de una función y llenar una tabla de valores, a partir de un dibujo dado. Nótese que no se plantea la situación en lenguaje verbal y tampoco se pide a los estudiantes representar los pares ordenados en el plano cartesiano a partir de los datos generados en la tabla.

Figura 6

Problema propuesto para el concepto de función (MEN, 2017)


Evaluación del aprendizaje

Observa el ortoedro de la Figura 5.3 y resuelve.

a. Escribe una función que relacione el volumen del ortoedro $V(x)$ con la medida de su ancho x.

b. Determina el volumen del ortoedro para las medidas de x dadas en la Tabla 5.2.

x	$V(x)$
15 cm	
20 cm	
25 cm	
30 cm	

Tabla 5.2

Cómo se puede observar en los ejemplos y ejercicios planteados en el libro de texto, los estudiantes pueden seguir unas indicaciones específicas, para resolverlos. No se identifican preguntas que generen en el estudiante la necesidad de analizar los problemas a profundidad y que le permitan pensar en el concepto de función, para la construcción de un Proceso.

4.3 Conocimientos previos necesarios para la construcción del concepto de función

Teniendo en cuenta la definición dada por el MEN (2017), se considera fundamental que los estudiantes hayan construido previamente los siguientes conceptos: números reales, conjuntos, relaciones entre conjuntos, operaciones entre conjuntos y relaciones. De la misma manera es necesario que los estudiantes tengan conocimientos sobre desigualdades, sistema de coordenadas rectangulares, ecuaciones y gráficas de ecuaciones.

A continuación, se describe la importancia de algunos de estos conocimientos y el papel que juegan en la construcción de funciones.

El sistema de números reales se puede describir como un "campo ordenado completo", pero no es de interés discutir tal descripción en esta investigación. Lo que se quiere resaltar aquí, es la importancia de que los estudiantes reconozcan el conjunto de los números reales y las operaciones que pueden realizarse en él, ya que, para proporcionar una tabla de valores de una función, por ejemplo, necesitan sustituir algunos de estos números y operar con ellos para determinar un valor.

De manera similar al MEN (2017) en esta investigación se busca desarrollar el concepto de función a partir de la relación entre dos conjuntos. Por tanto, el concepto de relación es fundamental para la construcción del concepto. En otras palabras, es importante para comprender el concepto de función que los estudiantes hayan estructurado previamente el concepto de relación como un Objeto. Una relación entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$. En este caso diremos que R es una relación de A en B (Uzcátegui, 2016).

La representación gráfica es otro concepto fundamental, ya que, es de total interés en esta investigación que los estudiantes interpreten funciones en el registro gráfico. Para proporcionar una representación gráfica, es importante que tengan conocimientos básicos sobre el sistema de coordenadas rectangulares y sobre lo que es una ecuación.

Teniendo en cuenta que existen diferentes maneras de definir funciones, es conveniente que los estudiantes entiendan el significado de los símbolos usados en las desigualdades ($<, \leq, >$ $, y \geq$), dado que, en funciones definidas por partes, se usan estos símbolos a menudo.

4.4 Registros de representación

Como se ha dicho antes, la Teoría de Duval es un apoyo en el diseño e implementación de enseñanza de esta investigación, razón por la cual es esencial estudiar los registros de representación en el Análisis Teórico. En general, los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como**:** registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural. Sin embargo, se ha observado que en los estudios realizados sobre los registros de representación del concepto de función (Carlson y Oehrtman, 2005; Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal, 2016; Sánchez, 2017, entre otros), parece haber un consenso sobre los registros semióticos usados para el estudio de las funciones: registro verbal, registro gráfico, registro tabular y registro algebraico. Además, cada uno de estos registros pone en relevancia aspectos distintos del concepto.

Vale la pena recordar que las representaciones semióticas son aquellas representaciones que permiten una “mirada del objeto” a través de la percepción de estímulos “significantes” como puntos, trazos, caracteres, etc. y pueden ser representadas por figuras, gráficos, expresiones simbólicas, entre otros (Duval, 2004). Además, para Duval, la transformación de estas representaciones es la propiedad más importante, ya que ese es el momento en el que las cosas adquieren un significado profundo. Duval afirma que los sistemas semióticos que permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: formación, tratamiento y conversión, descritas en el apartado 2.2.1 de este documento, se denominan registros de representación semiótica.

En esta investigación también se hace referencia a estas cuatro representaciones y se presentan descripciones breves que, proporcionan detalles sobre las características que se emplean para dar solución a las situaciones propuestas en el diseño de enseñanza y en la entrevista realizada.

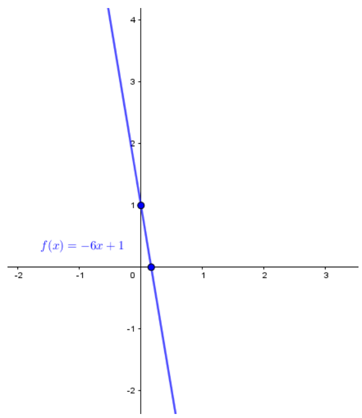
La representación verbal, es la representación más natural; esta permite ver el objeto matemático a través de una descripción con palabras. Esta representación permite articular a todas las representaciones y actúa como intérprete de todas las demás, ya que es la más próxima a las destrezas comunicativas del individuo. Un ejemplo de una representación verbal de función es:

Recta que corta al eje y en 1 y al eje x en ${}^{1}/_{6}$

La representación gráfica, “tiene por excelencia la potencialidad del entendimiento que da la visualización, se relaciona con los aspectos geométricos y topológicos del concepto” (Janvier, 1987). En esta representación se involucra el sistema de coordenadas rectangulares y las gráficas de ecuaciones. Un ejemplo de una representación gráfica de función es:

Figura 7

Ejemplo de una representación gráfica de función



La representación algebraica, es aquella que permite ver el objeto matemático por medio de una fórmula explicita (lenguaje alfanumérico). Un ejemplo de una representación algebraica de función es:

$$f(x) = -6x + 1$$

Por último, la representación tabular pone de manifiesto los aspectos numéricos. Un ejemplo de una representación tabular de función es:

Figura 8

Ejemplo de una representación tabular de función

x	f (x)
-3	19
-2	13
-1	7
0	1
1	-5
2	-11
3	-17

Nótese que los ejemplos de estas cuatro representaciones corresponden a la misma función. Sin embargo, cada una de ellas pone en relevancia aspectos distintos del concepto. Cada una usa estímulos diferentes para mostrar la relación funcional entre las variables implicadas.

4.5 Observación en el aula

Arnon et al., (2014) afirman que existen descomposiciones genéticas basadas en observaciones del trabajo de los estudiantes que están aprendiendo un concepto matemático. En esta investigación, el factor de observación en el aula, aunque no es la base de la descomposición genética, permite obtener datos empíricos sobre la concepción que tienen los estudiantes del concepto de función. Además, permite que se reconozca dentro de la investigación las posibles dificultades de los estudiantes participantes, así como la dinámica de clase.

Para la observación y análisis de los procesos en el aula, se toma una guía construida por Cid Sabucedo (2001), la cual aseguran que fue validada en sucesivas ocasiones, a través de las técnicas de "juicio de expertos" y "triangulación", descritas y propuestas por Miles y Hubernan (1984) (Cid Sabucedo, 2001). Con esta guía se analizan el contexto situacional, en el cual se describen condiciones físicas y organizativas y donde la comunicación didáctica tiene lugar: el clima social, en el cual se caracteriza el estilo propio de actuación en el aula; además, la comunicación didáctica, en la que se describen los modos y los contenidos que forman parte de la actividad formativa en curso. Los autores aseguran que, "mediante estas tres dimensiones y sus correspondientes subdimensiones podemos tener una visión global, descriptiva, holística y comprensiva del aula/clase, tanto en su organización como en su funcionamiento" (p. 190).

Contexto situacional: La observación se lleva a cabo en la Institución Educativa Las Américas (Santander, Colombia), en donde las clases se imparten en un aula tradicional y ocasionalmente en una sala de cómputo. El aula tradicional es un poco estrecha para el número de estudiantes que generalmente permanece en ella, al igual que la sala de cómputo. Para la observación se seleccionaron dos cursos de noveno grado. El primer curso cuenta con 32 estudiantes y el segundo con 34. En las clases, el profesor siempre está de pie frente a los estudiantes y los estudiantes después de la explicación del profesor, generalmente trabajan en grupos pequeños.

Clima social: Generalmente hay un ambiente de cooperación, confianza, autonomía, entusiasmo y actividad por parte y parte, pero en ocasiones hay pasividad en algunos estudiantes.

Comunicación didáctica: En cada sesión de clase, el profesor retoma elementos abordados en la clase anterior y hace preguntas al respecto. Se genera un ambiente de participación y hay espacio para discutir sobre los errores generados en el aula. En general, el profesor genera un ambiente más reflexivo y menos rutinario. Se trabaja con guías y con el libro “vamos a aprender Matemáticas” (MEN, 2017). Se realizan ejercicios prácticos, por ejemplo, los estudiantes deben medir la velocidad de rotación de un objeto, con un tacómetro. El profesor habla con lenguaje formal, por ejemplo, se refiere a las variables, constante de proporcionalidad, crecimiento, decrecimiento, etc. por su nombre propio. El profesor orienta y motiva a los estudiantes al estudio continuo de las matemáticas. El tiempo que se dispone para cada sesión de clase es de aproximadamente 110 minutos. Finalmente, los recursos disponibles en el aula de clase son: un tablero acrílico, marcadores y algunos instrumentos de medición. Por su parte, la sala de cómputo en la cual se desarrolla esta investigación cuenta con 17 computadores en buen estado: 8 de mesa y 9 portátiles (Figura 9); esta sala también cuenta con dos tableros consecutivos, un proyector multimedia y material concreto como el juego de las Torres de Hanoi.

Figura 9

Sala de cómputo de la Institución Educativa Las Américas

Estos cinco aspectos analizados: Descomposiciones genéticas previas, revisión del libro de texto usado en clase, conocimientos previos necesarios para la construcción del concepto de función, registros de representación y observación en el aula, dan paso al diseño de la descomposición genética preliminar la cual guía el diseño y desarrollo de las etapas posteriores del método usado en esta investigación.

4.6 Descomposición genética preliminar

En este apartado se propone un modelo de construcción del concepto de función que permite realizar una descripción preliminar de las estructuras y mecanismos mentales que estudiantes de secundaria pueden desarrollar para comprender este concepto.

La descomposición genética preliminar aquí planteada parte del Análisis Teórico expuesto en secciones anteriores; esto incluye dificultades relacionadas con el aprendizaje del concepto de función, específicamente, las relacionadas con el cambio de registros de representación. Además, esta descomposición genética, a diferencia de las descomposiciones genéticas sobre el concepto de función propuestas en investigaciones anteriores (Carlson & Oehrtman, 2005; Dubinsky & Wilson, 2013; Arnon et al., 2014), toma en cuenta Acciones y Procesos que se construyen a través de los registros de representación verbal, tabular, gráfico y algebraico (Carlson y Oehrtman, 2005; Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal, 2016; Sánchez, 2017; entre otros). Se plantean estas dos estructuras, porque al igual que Dubinsky y Wilson (2013), en esta investigación se considera que las Acciones y los Procesos son las estructuras más importantes de la función en básica secundaria.

Ahora bien, teniendo en cuenta el Análisis Teórico, se considera que el modelo hipotético debe partir de que el individuo haya construido previamente una relación funcional. Es decir, una relación R que hace corresponder a un elemento $a \in A$, algún elemento $b \in B$. Se debe tener presente que, la relación es un subconjunto del producto cartesiano; esto es, la colección de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ denotado por $A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ y } b \in B\}$ (Uzcátegui, 2016).

Se puede afirmar que la construcción del concepto de función inicia con la aplicación de Acciones sobre ese subconjunto del producto cartesiano, para lo cual se requiere de una estructura Objeto asociada a la relación R. Estas Acciones implican tomar un elemento a de A y asignar a ese elemento, un único elemento b de B, con la ayuda de estímulos externos como pueden ser: fórmulas, gráficas, tablas, diagramas, algoritmos, entre otros (estos estímulos están relacionados con los diferentes registros de representación) (Figura 10).

La estructura Acción requiere de la indicación de instrucciones explícitas sobre cómo un individuo puede transformar los elementos de un conjunto de salida en elementos de un conjunto de llegada. Generalmente para que el estudiante realice dicha transformación, que además solo efectúa sobre elementos finitos, necesita identificar una relación dentro de un contexto particular (una fórmula, una gráfica, una tabla, un diagrama, un texto en lenguaje natural, etc.), que le permita responder una pregunta específica. Por ejemplo:

- Dada una fórmula, una Acción implica que el estudiante reemplace números en una expresión algebraica y realice cálculos para obtener una respuesta o para construir una tabla de valores y/o una gráfica.
- Una evidencia de la estructura Acción de función, implica que el estudiante a partir de una tabla de valores identifique si una relación es o no función examinando que a cada elemento $a \in A$ le corresponda un único elemento $b \in B$. Además, a partir de la tabla, el estudiante puede ubicar en el plano cartesiano los pares ordenados.
- Otro indicador de la estructura Acción, se evidencia cuando el estudiante construye una tabla de valores a partir de una gráfica dada en el plano cartesiano.
- La Acción se evidencia cuando el estudiante ve la gráfica de una función únicamente como una curva u objeto fijo en el plano. Esto le permite determinar si dicha curva es o no función al trazar una o más rectas verticales.
- Una evidencia de la estructura Acción de función, implica que el estudiante etiqueta los ejes del plano cartesiano con indicaciones verbales afirmando, por ejemplo, "y depende de x".
- Una Acción, implica que un estudiante piense en un problema, intentando recordar la solución de otro abordado previamente y logre asociarlo con uno nuevo que intenta resolver.

La construcción del concepto de función continúa cuando el estudiante logra estructurar un Proceso, es decir, cuando pude realizar un conjunto de Acciones que se llevan a cabo de forma exclusivamente mental. La concepción Proceso de función le da al individuo la capacidad de pensar de forma general sobre cómo actúa una función sobre los elementos del conjunto de salida.

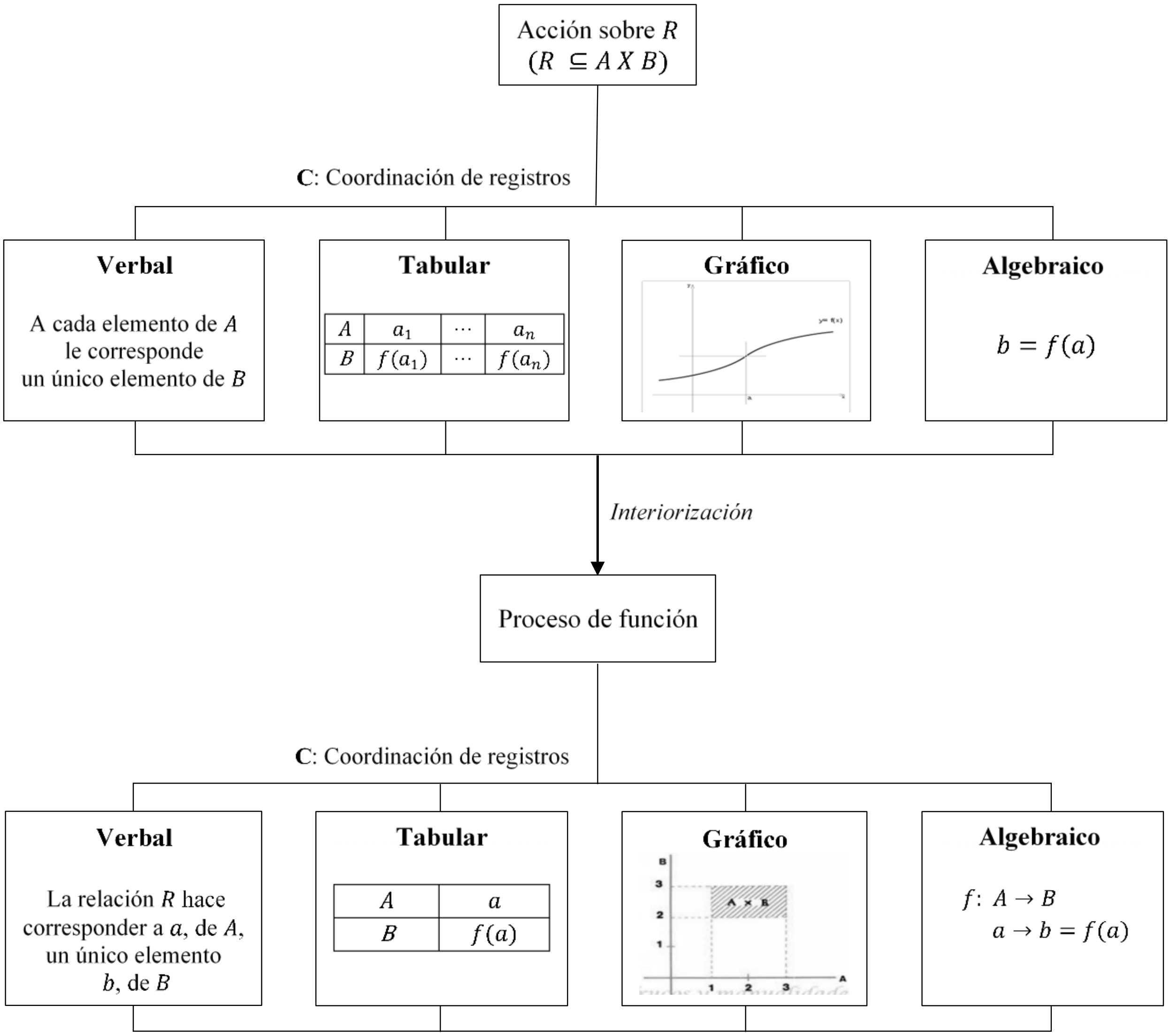
La construcción del Proceso se da a través del mecanismo de interiorización que le permite a un individuo construir Acciones en su mente; es decir, lo que antes realizaba por estímulos externos, ahora lo realiza a partir de la reflexión sobre características generales de los elementos involucrados. El Proceso implica una transformación dinámica de determinadas cantidades, de tal forma que, dada una cantidad inicial, siempre se produce la cantidad transformada.

El Proceso se estructura cuando un individuo tiene la capacidad de pensar en términos generales sobre la función en cualquier registro de representación, por ejemplo, determinar el dominio, rango, continuidad, zonas de crecimiento y decrecimiento, entre otros. En el Proceso, un individuo realiza Acciones, pero sin la necesidad de estímulos externos.

En la Figura 10, la letra **C** representa la coordinación entre los registros de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico. La flecha representa el mecanismo de interiorización. Además, vale la pena aclarar que la coordinación mencionada (**C**) no hace referencia al mecanismo mental de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014), sino a la coordinación de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004).

Figura 10

Descomposición genética preliminar



5. Diseño e implementación de enseñanza

La primera parte de este capítulo describe la población que participa en esta investigación, así como el contexto en que se desarrolla. La segunda incluye el diseño de enseñanza, donde se describen las Tareas que se implementan en el aula, así como un análisis previo que contempla los diferentes registros de representación que de manera explícita o implícita se ponen en juego a la hora de resolver cada Tarea. La tercera parte expone la manera como se lleva a cabo la implementación y una recopilación de episodios presentados durante la enseñanza.

5.1 Algunas generalidades

En esta investigación la población está conformada por 34 estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Las Américas (Santander, Colombia). Se elige este nivel académico, principalmente porque es allí donde los estudiantes tienen los primeros acercamientos formales a la construcción del concepto de función (MEN, 2003). Además, se selecciona dicha institución educativa dado que el profesor encargado del grupo facilita la práctica del diseño de enseñanza, o bien, la implementación del modelo que se propone en este proyecto. Además, las instalaciones de la institución son apropiadas para llevar a cabo la implementación ya que hay disponible una sala de Cómputo (descrita en el apartado 4.5 de este documento).

Dado que las clases tienen una duración aproximada de 110 minutos, este es el tiempo que se dispone para llevar a cabo cada intervención. Las Tareas son entregadas en formato impreso a los estudiantes junto con una hoja en blanco para sus respuestas y los archivos de GeoGebra están guardados previamente en todos los computadores para facilitar el acceso.

5.2 Diseño de enseñanza: Análisis a priori

Dado que el objetivo de esta investigación es caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de secundaria, al resolver Tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre diferentes representaciones del concepto de función, se diseñan e introducen Tareas en el aula para promover el desarrollo de mecanismos y la construcción de estructuras mentales.

Como se mencionó en el capítulo 3, la implementación de enseñanza se lleva a cabo utilizando el Ciclo de Enseñanza ACE por lo que cada Tarea matemática es implementada de la siguiente forma: resolución de Tareas propuestas por el investigador, discusiones sobre el trabajo efectuado en el aula y, Tareas extra-clase. La implementación de las Tareas se realiza una vez el profesor encargado del curso aborda el contenido que él considera pertinente sobre el concepto de función.

La secuencia de Tareas inicia con el estudio de una función constante y continúa con el estudio de una función escalonada para fomentar la construcción de Acciones mentales. Para promover el desarrollo de Procesos mentales, la secuencia sigue con Tareas que le permitan al estudiante fortalecer habilidades de razonamiento covariacional. El razonamiento covariacional es definido por Carlson et al. (2003) como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124). En otras palabras, situaciones que involucran dos cantidades que cambian simultáneamente.

En total, se diseñan 7 instrumentos: una prueba diagnóstica, cuatro Tareas matemáticas, una prueba pos-instrucción y una entrevista. En la Tabla 6 se muestra el objetivo que se busca alcanzar con cada uno de estos instrumentos.

Tabla 6

Organización de la intervención en el aula

Sesión	Tarea	Objetivo de la Tarea
1	Prueba diagnóstica	Determinar las construcciones iniciales que poseen los estudiantes sobre el concepto de función; además determinar si dichas construcciones son las consideradas en la descomposición genética preliminar. Determinar si los estudiantes coordinan diferentes registros de representación al abordar problemas matemáticos asociados al concepto de función.
2	Boya oceanográfica	Promover el estudio del concepto de función constante en diferentes registros de representación. Fomentar en los estudiantes la construcción de Acciones mentales.
3	Tarifa de parqueo	Promover el estudio del concepto de función escalonada en diferentes registros de representación. Fomentar en los estudiantes Acciones mentales y el mecanismo de interiorización.
4	Vaso de agua	Promover el estudio del concepto de función en diferentes registros de representación. Fortalecer habilidades de razonamiento covariacional en los estudiantes. Fomentar en los estudiantes la construcción de Procesos mentales.
5	Qué es y qué no es función	Promover el estudio de las diferentes representaciones de una función. Fomentar en los estudiantes la construcción del Objeto inicial de función.
6	Prueba Pos-instrucción	Determinar el tipo de estructuras alcanzadas por los estudiantes al resolver problemas asociados al concepto de función. Determinar si los estudiantes coordinan diferentes registros de representación al abordar problemas matemáticos asociados al concepto de función.
7	Entrevista semiestructurada	Determinar si los estudiantes han realizado las construcciones mentales establecidas por la descomposición genética preliminar. Analizar a profundidad el tipo de construcciones y mecanismos que los estudiantes han logrado estructurar.

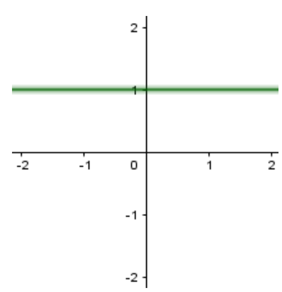
El análisis a priori de cada uno de estos instrumentos se realiza a partir de la descripción de la solución normativa y un análisis teórico con base en la descomposición genética hipotética; dicho análisis es descrito a continuación.

5.2.1 Prueba Diagnóstica

Esta prueba está compuesta por cinco problemas. Los tres primeros buscan que los estudiantes transformen una representación dada en un registro, a otra representación de un registro distinto al inicial. Los estudiantes deben realizar la actividad cognitiva de conversión. En el cuarto problema los estudiantes deben determinar lo que es o no es una función. En el quinto y último problema los estudiantes deben plantear una situación de un fenómeno de cambio y variación. A continuación, se describe con más detalle cada uno de estos problemas y se muestra su análisis.

Problema 1. En este problema los estudiantes deben obtener información sobre la relación que se presenta en el plano cartesiano abordando algunas preguntas.

Observe la gráfica que aparece en el plano.



a. ¿Qué valor le corresponde a 1 según la relación que aparece en el plano?
b. Señale en el plano el punto $(-1,1)$.
c. ¿Qué valores puede tomar x?
d. ¿Qué valores puede tomar y?
e. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.
f. La relación dada gráficamente en el plano ¿es una función? ¿Por qué?

Solución Normativa: La gráfica que aparece en el plano cartesiano, corresponde a la función constante $f(x) = 1.$ El dominio de esta función es el conjunto de números reales y su rango es $\{1\}$. En consecuencia, el valor que le corresponde a $x = 1$ es 1, y el punto $(-1{,}1)$ está sobre la recta.

Análisis Teórico: Con este problema se busca indagar sobre el concepto de función constante en los registros de representación gráfico y algebraico. Se puede dar evidencia de la estructura Acción, ya que el estudiante podría construir una tabla de valores a partir de la gráfica dada en el plano cartesiano y posteriormente escribir la expresión que modela la relación dada, la función constante $f(x) = 1$. Además, con este problema se obtiene información sobre las estructuras relacionadas con los conceptos de dominio y rango, que son fundamentales para la construcción de una concepción Proceso de función.

Problema 2. En el segundo problema, se muestra una tabla de valores que modela nuevamente la función constante $f(x) = 1$. Se pide a los estudiantes analizar la relación que se da entre las columnas a partir de una serie de preguntas.

Analice la relación que se da entre las columnas de la siguiente tabla de valores.

A	-1,44	-1,42	-1,40	-1,34	-1,32	0	0,71	0,83	1,76	2,79	3,68
B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

a. ¿Qué valor le corresponde a -1 según la relación que aparece en la tabla?
b. ¿Qué valor o valores producen a 1 como imagen?
c. Escriba una expresión que modele la relación dada en la tabla de valores.
d. La relación dada en la tabla de valores ¿es una función? ¿Por qué?
e. Describa con sus palabras la relación dada en la tabla.

Solución Normativa: La relación dada entre las columnas de la tabla de valores corresponde a la función constante $f(x) = 1$. Se puede deducir que los datos en la tabla modelan esta función, a cada elemento del conjunto A se asocia un único elemento del conjunto B. Particularmente, todos los elemento de A se asocian a 1. Por lo tanto, el dominio de esta función es el conjunto de números reales y su rango es $\{1\}$. En consecuencia, los valores que producen a 1 como imagen, son todos los reales. A pesar de que en la tabla no se muestra la imagen de $x = -1$, puede inferirse que su imagen es 1.

Análisis Teórico: Este problema complementa el problema anterior. Se busca indagar nuevamente acerca del concepto de función constante en los registros tabular y verbal. Contrario a lo que es habitual, el estudiante debe pasar de un registro numérico (una tabla de valores) a un registro verbal. Especialmente cuando se pregunta qué valor le corresponde a -1, se busca determinar si los estudiantes han logrado generalizar la relación que se muestra en la tabla. Esto corresponde a una estructura Proceso, ya que tendrán que deducir que para cualquier número real x, $f(x) = 1$, pues en la tabla no se muestra la imagen de -1. Además, el hecho de tener que describir una relación funcional, resulta un desafío para los estudiantes, pues no están familiarizados con esta conversión de registros.

Problema 3. El tercer problema, es abordado tradicionalmente en cursos de física. Se pregunta a los estudiantes a qué velocidad debe circular un auto de carreras para recorrer 50 km en un cuarto de hora. Se pide a los estudiantes que respondan dos preguntas puntuales, para que decidan el registro en el que van a trabajar.

¿A qué velocidad debe circular un auto de carreras para recorrer 50 km en un cuarto de hora? Explique su respuesta.

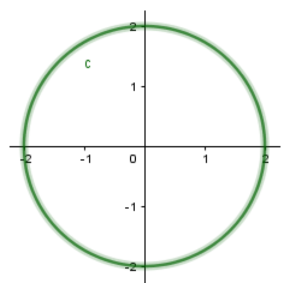
a. En 6 minutos ¿Qué distancia habrá recorrido el auto de carreras? Justifique su respuesta.
b. ¿Cuánto tardará el auto de carreras en recorrer 40 km? Justifique su respuesta.

Solución Normativa: Dado que el auto de carreras describe una trayectoria recta y su velocidad es constante en el tiempo (ya que su aceleración es nula), se trata de un movimiento rectilíneo uniforme. Por ende, la velocidad a la que debe circular el auto de carreras es de 200 km/h. En 6 minutos o $1/10$ de hora, el auto habrá recorrido 20 km. Así pues, para recorrer 40 km, el auto tardará el doble de tiempo, es decir, 12 minutos o $1/5$ de hora.

Análisis Teórico: Los estudiantes pueden dar respuesta a este problema de manera verbal, haciendo algunos cálculos mentales, o realizar una tabla de valores con magnitudes particulares. A partir de dicha tabla pueden dibujar una gráfica en el plano cartesiano relacionando dos de las variables involucradas, o pueden escribir una expresión algebraica similar a $d = v \cdot t$. Donde d es la distancia recorrida por el auto, v es la velocidad y, t el tiempo que tarda en recorrer determinada distancia. Cada tipo de razonamiento puede asociarse a una estructura mental: Si el estudiante busca recordar y/o aplicar la fórmula de distancia, se considera que está realizando una Acción, pues no está reflexionando sobre el problema como tal, sino se centra en reemplazar los valores particulares dados en el problema en una fórmula específica. Por el contrario, si el estudiante piensa en el problema de forma dinámica, es decir, acepta que los elementos de entrada son transformados por una relación dada para generar un conjunto de salida, se dice que el estudiante evidencia un Proceso. Por ejemplo, para determinar la distancia recorrida del auto, puede suponer que dicha magnitud depende del tiempo que ha transcurrido y aumenta a razón constante. Los registros verbal, gráfico y tabular, pueden dar evidencia de ello.

Problema 4. En el cuarto problema se muestra la gráfica de una circunferencia de radio 2. Los estudiantes deben definir los valores que puede tomar x e y y escribir una expresión que modele la relación que aparece en el plano.

Observe la gráfica que aparece en el plano.



a. ¿Qué valor le corresponde a 0 según la relación que aparece en el plano?
b. Señale en el plano los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$.
c. ¿Qué valores puede tomar x?
d. ¿Qué valores puede tomar y?
e. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.
f. La relación dada gráficamente en el plano ¿es una función? ¿Por qué?

Solución Normativa: La gráfica que aparece en el plano cartesiano, no corresponde a una función porque no cumple la condición de unicidad. Los valores que puede tomar tanto x como y, pertenecen al intervalo $[-2,2]$. La expresión que modela la relación dada en la gráfica, es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 2, esto es, $x^2 + y^2 = 4$.

Análisis Teórico: Con este problema, se busca indagar sobre los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de lo que es o no es una función. Es decir, con este problema se puede dar evidencia de si el estudiante ha construido una concepción Objeto inicial de función.

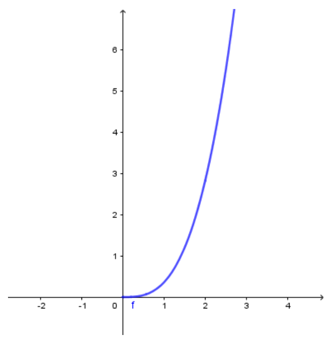
Problema 5. Por último, en el quinto problema de esta prueba diagnóstica, se pide a los estudiantes que planteen una situación en donde se describa un fenómeno de variación y cambio.

> Plantee una situación para su mejor amigo, en donde describa un fenómeno de variación y cambio. A partir de la situación propuesta, usted debe responder cada uno de los ítems a continuación y justificar ampliamente las respuestas.
>
> a. ¿Cuáles son las magnitudes que cambian en el problema que propuso?
> b. ¿Podría definir si hay alguna relación entre las magnitudes involucradas? ¿Cuál sería la relación?
> c. ¿Alguna magnitud depende de la otra? Si su respuesta es afirmativa, escriba qué magnitud depende de cual. Si la respuesta es negativa, explique por qué no existe tal dependencia.
> d. ¿Es posible realizar una gráfica que represente la situación? Si es posible, grafíquela. Si no es posible, explique por qué no es posible graficarla.
> e. ¿Es posible crear una tabla de valores que cumpla las condiciones de la situación que propuso? Si es posible, realice la tabla con al menos cinco valores. Si no es posible, explique por qué no es posible crear dicha tabla.

Solución Normativa: Un ejemplo de una situación que describe un fenómeno de cambio y variación, puede ser el bombeo de agua de un tanque cónico. En esta situación, las magnitudes que cambian respecto al agua que hay en el tanque son: tiempo, altura, radio, volumen. Si se quiere expresar el volumen (V) del agua en función de su altura (h), esta relación está dada por la función $V(h) = \frac{1}{9}\pi h^3$; la gráfica de esta función aparece en la Figura 11. Para obtener una tabla de valores del problema planteado, basta con reemplazar valores en la función expresada en lenguaje algebraico.

Figura 11

Gráfica de la función $V(h) = \frac{1}{9}\pi h^3, h \geq 0$



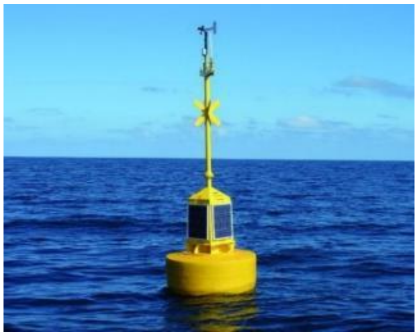
Análisis Teórico: Con este tipo de problema se pueden encontrar evidencias de la estructura Proceso, pues los estudiantes deben proponer una situación que muestre de alguna manera que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada, a través de una fórmula, gráfica, tabla, diagrama, texto, etc., para generar un conjunto de salida. En este problema son los estudiantes quienes deciden el tipo de registro, aunque como está planteado el problema, se espera que inicien con el registro verbal.

5.2.2 Boya oceanográfica

La Tarea inicia con un problema que sugiere Sánchez (2017) para el estudio de funciones en diferentes registros de representación. Además, se muestra una tabla de valores a partir de la cual el estudiante debe proponer tres representaciones que modelen la situación: gráfica, verbal y algebraica.

Una boya en el Océano Pacífico mide la salinidad (la cantidad de NaCl, cloruro de sodio). Las medidas se envían cada hora por satélite a una base de datos meteorológicos para su análisis. La tabla muestra la información obtenida durante un intervalo de 14 horas (p.3780).

Hora	**Gramos por litro**
1	35.01
2	35.02
3	35.01
4	35.01
5	35.01
6	35.01
7	35.03
8	35.02
9	35.02
10	35.01
11	35.01
12	35.01
13	35.02
14	35.01



1. Localice las coordenadas en el plano cartesiano. ¿Es posible unir mediante una única curva los puntos situados en el plano? ¿Por qué? Trace el gráfico resultante.
2. ¿Qué cantidad de cloruro de sodio medirá la boya una hora más tarde? ¿Qué cantidad medirá dos horas más tarde?
3. Describa verbalmente la tendencia de la gráfica, es decir, ¿cómo se comportarán los datos en las próximas horas?
4. ¿Qué valores puede tomar x e y respectivamente?
5. Escriba la relación que mejor se ajuste a los datos graficados.
6. La relación dada en la tabla de valores o en la gráfica ¿es una función? ¿Por qué?

Solución Normativa: Después de ubicar las coordenadas en el plano cartesiano, se puede trazar una curva que se ajuste a los datos. La curva corresponde a la recta $f(x) = 35$. Los datos mostrados en la tabla se ajustan a dicha recta dado que el problema, muestra continuidad en la salinidad del agua. Es decir, la cantidad de sal no cambia si se mide en cualquier otra hora del día.

Por tanto, si se aproxima la salinidad del agua a 35 g, los puntos localizados en el plano se pueden unir. Puede notarse de igual forma, que la gráfica comporta de la misma manera en las próximas horas, incluso por mucho tiempo después. De este modo, el dominio de la función debe restringirse al conjunto de números reales positivos. Incluso si se decide tomar datos en un determinado número de días, por ejemplo, 3 días, el dominio debe restringirse aún más dependiendo de este tiempo: Esto es, para la recolección de datos durante 3 días, el dominio de la función sería $[0{,}72]$. El rango de esta función es 35.

Análisis Teórico: Esta Tarea promueve el estudio del concepto de función constante en diferentes registros de representación. Está planteada para que el estudiante coordine los registros verbal, tabular, gráfico y algebraico de la siguiente forma: Registro Verbal – Registro Tabular → Registro Gráfico → Registro Verbal → Registro Algebraico. Se espera que los estudiantes desarrollen Acciones mentales. Igual que en el examen diagnóstico, se busca que partan de un registro diferente al habitual (algebraico) y pasen a otros registros de representación.

Dado que el software de geometría dinámica GeoGebra permite transformar y obtener información visual y numérica de manera dinámica, los estudiantes tienen un espacio para trabajar con el software con el cual pueden corroborar el análisis hecho previamente. Además, los estudiantes pueden analizar un conjunto de datos más amplio. Por ejemplo, el dominio y rango de la función.

Abra el archivo de GeoGebra llamado Tarea1 y responda las siguientes preguntas:

a. ¿La gráfica del archivo Tarea1 corresponde a la relación propuesta en el numeral 5?
b. ¿Qué representa el punto H?
c. ¿Qué valores puede tomar H?
d. ¿Qué representa el punto G?
e. ¿El punto G puede ubicarse en 10? ¿Por qué?

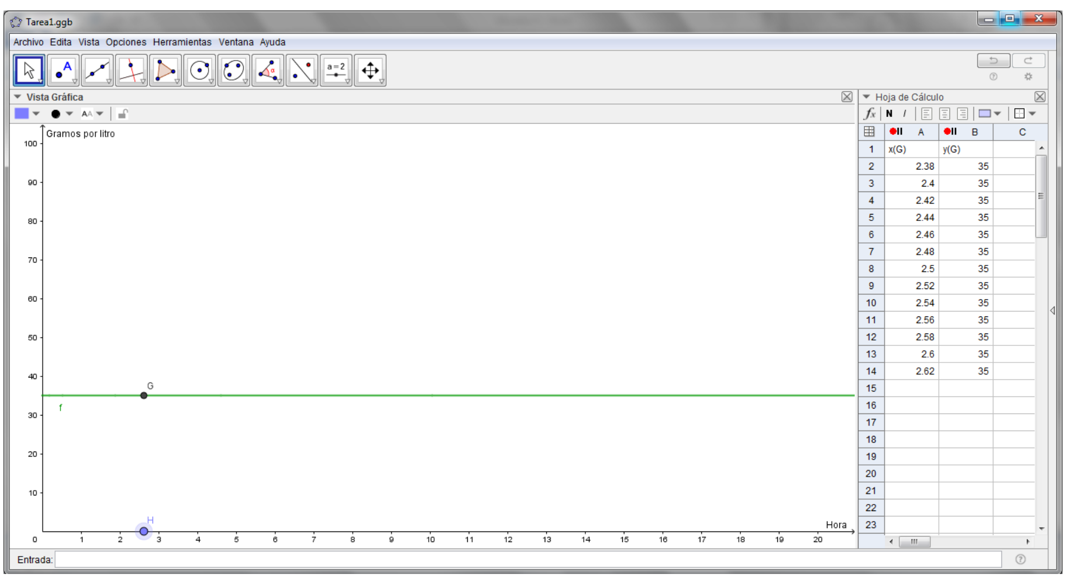
f. ¿Qué valores puede tomar G?

g. ¿Qué operación se debe aplicar para trasladar verticalmente la gráfica?

Solución Normativa: El archivo Tarea1 se muestra en la Figura 12, la curva que se presenta corresponde a la función $f(x) = 35$. En el archivo, el punto H representa la hora en que la boya ha medido la salinidad en el Océano Pacífico. Los valores que puede tomar H dependen del tiempo que se haya definido. Si es un día, H podrá tomar valores en el intervalo $[0,24]$ si son dos días, H podrá tomar valores en el intervalo $[0,48]$ y así sucesivamente. En el archivo, el punto G representa los gramos por litro que ha medido la boya en determinada hora. El único valor que puede tomar G es 35. Por lo tanto, G no podría ubicarse ni en 10, ni en ningún otro valor diferente a este. Ahora bien, para que esta curva se desplace verticalmente, se deben sumar c unidades a la función. Esto es, $f(x) = 35 + c$, donde c es cualquier número real.

Figura 12

Archivo de GeoGebra Tarea1



Análisis Teórico: Cuando los estudiantes enfrentan preguntas como: ¿Qué valores puede tomar H y G? ¿El punto G puede ubicarse en 10? ¿Por qué? Deben pensar en definir inicialmente un intervalo de tiempo: un día, una semana, un mes, etc., y posteriormente, argumentar por qué los puntos H y G no puedan tomar determinados valores. Este análisis busca que los estudiantes logren interiorizar las Acciones que han estructurado y evolucionen hacia una concepción Proceso del concepto de función.

Finalmente, en la Tarea extra-clase los estudiantes deben proponer una situación matemática donde dé evidencia de los conocimientos construidos alrededor del concepto de función constante.

Proponga una situación matemática que se pueda modelar a través de una función constante. Además, diseñe tres preguntas que le plantearía a sus compañeros a partir de dicha situación.

5.2.3 Tarifa de Parqueo

La Tarea inicia con un problema de tarifa de parqueo que posiblemente viven a diario las personas que poseen algún medio de transporte. A partir de este problema los estudiantes deben responder una serie de preguntas que buscan la construcción de las representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Un parqueadero de Bucaramanga presta sus servicios las 24 horas del día, los 7 días a la semana. Este servicio tiene una tarifa para carros de \$3000 por hora o fracción de hora. Además, ofrece un servicio de pago mensual por un valor de \$120000.

Vehículo	**Precio hora**	**Mensualidad**
Carros	\$3000	\$120000
Motos	\$1200	\$51000

1. ¿Cuál es el precio de media hora de parqueo de un carro en este lugar? ¿Cuál es el precio de 45 minutos? ¿Para qué otros valores de tiempo se pagaría el mismo precio?

2. Si Daniela ingresa su carro a las 6:45 a.m. y lo recoge a las 5:10 p.m. ¿Cuánto debe pagar Daniela?

   a. Daniela debe dejar su carro en el parqueadero todos los días durante el mismo tiempo, mientras está en el trabajo. ¿Es más rentable para Daniela pagar esa cantidad de dinero todos los días o pagar la mensualidad de este lugar, la cual le permite tener el carro el tiempo que necesite durante todo el mes?

3. Iván, el administrador del parqueadero decide construir una tabla de precios para determinar de manera más eficiente, la tarifa que debe pagar un cliente según el tiempo que use el servicio. ¿Cómo se vería la tabla de precios?

   a. Si Iván también quiere construir una gráfica con la misma información de la tabla, ¿Cómo se vería esta gráfica?
   b. A partir de la información de la tabla o la gráfica es posible construir una expresión que le permita a Iván calcular el costo que debe pagar una persona, según el tiempo que utiliza el parqueadero. Escriba una expresión que le ayude a Iván a calcular de manera más eficiente el valor que debe cobrar.

Solución Normativa: Si $C(t)$ es el costo en pesos por parquear un auto y t es el tiempo que dura el auto en el parqueadero, la función $C(t) = 3000\lceil t\rceil$ describe cómo para valores reales de t, los puntos de la gráfica $C(t)$ pertenecen a una recta, y la razón de cambio es constante: 3000 pesos por hora. Sin embargo, la tarifa real y la función lineal solo coinciden para valores enteros positivos de t.

Para esta situación, los estudiantes pueden empezar por elaborar una tabla de valores y a partir de ella hacer deducciones; por ejemplo, si es más económico pagar a diario o mensualmente el parqueadero del carro. Luego, se espera que realicen un bosquejo de la gráfica que modela la situación, en este caso, la función $C(t) = 3000[t]$. Se espera que los estudiantes estructuren que la gráfica del costo en función del tiempo es una función escalonada. Aunque no sepan cómo se representa la función escalonada, pueden intentar representar esta función de otra manera, por ejemplo, con un símbolo.

Análisis Teórico: Esta Tarea promueve el estudio del concepto de función parte entera en diferentes registros de representación. Está planteada para que el estudiante coordine los registros verbal, tabular, gráfico y algebraico de la siguiente forma: Registro Verbal → Registro Tabular → Registro Gráfico → Registro Algebraico. Se espera que los estudiantes desarrollen Acciones mentales y empiecen a interiorizarlas. Esto gracias al análisis de funciones cuyo recorrido no es un intervalo continuo.

Después de analizar la situación, los estudiantes proceden a realizar un trabajo con GeoGebra en donde pueden reflexionar sobre el dominio y rango de la función escalonada que modela dicha situación.

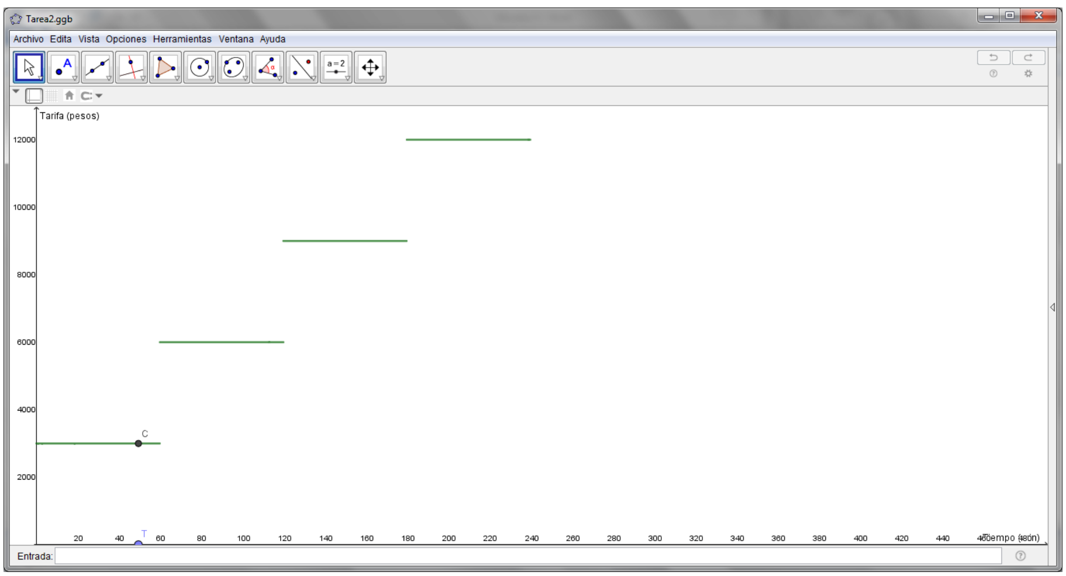
Abra el archivo de GeoGebra llamado Tarea2 y responda las siguientes preguntas:

a. ¿Qué representa el punto T?
b. ¿Qué valores puede tomar T?
c. ¿Qué representa el punto C?
d. ¿El punto C puede ubicarse en 4000? ¿Por qué?
e. ¿Qué valores puede tomar C?

Solución Normativa: El archivo Tarea2 se muestra en la Figura 13 y la curva que se presenta corresponde a la función $C(t) = 3000[t]$. En el archivo, el punto T representa el tiempo en minutos que permanece el auto en el parqueadero. Los valores que puede tomar T pertenecen al intervalo $[1, 43200)$, que corresponde a tener el carro en el parqueadero desde 1 hora, hasta 30 días. A partir de 30 días, se empieza a cobrar el servicio por mes. En el archivo, el punto C representa el costo que debe pagar una persona, según el tiempo que utiliza el parqueadero. Los valores que puede tomar C es el conjunto de los múltiplos positivos de 3000. Por lo tanto, C no podría ubicarse ni en 4000, ni en ningún otro valor que no sea múltiplo de 3000.

Figura 13

Archivo de GeoGebra Tarea2



Análisis Teórico: En esta Tarea los estudiantes pueden empezar a imaginar un Proceso sin tener que realizar cada Acción específicamente. En particular, pueden imaginar que los elementos de entrada (los minutos que dura el carro en el parqueadero) son transformados por una regla (la regla de que por cada hora o fracción de hora se debe pagar 3000) para generar un conjunto de salida (múltiplos positivos de 3000). Este análisis por parte del estudiante permite que desarrolle no solo Acciones mentales, sino estructuras más avanzadas. Por ejemplo, cuando él empieza a ver que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada, para generar un conjunto de salida. Cuando el estudiante empieza a ser consciente de esas Acciones que realiza, se va construyendo un Proceso.

Finalmente, en la Tarea extra-clase, se propone un enunciado similar al que se trabajó en clase, pero el contexto son carreras de taxi. Esto permite reforzar lo estructurado en clase.

> *Enunciado*: El costo de una carrera de taxi depende de los kilómetros recorridos. Una carrera de cinco kilómetros o menos, cuesta $5400 (tarifa mínima), y por cada kilómetro adicional a los cinco primeros kilómetros o fracción de kilómetro, se aumentan $1000. Encuentre una representación que modele dicha situación.
>
> Con base en el enunciado anterior y la representación que proponga de la situación, escriba cinco preguntas que haría a sus compañeros para obtener más información sobre una carrera de taxi.

5.2.4 Vaso de agua

Esta Tarea más allá de promover el estudio de una función particular, fortalece las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes, que son esenciales para el desarrollo de Procesos mentales.

> ¿Ha notado que, al llenar algunas botellas, el agua se riega repentinamente de la parte superior? ¿Por qué sucede esto?
> Imagine que el vaso que se muestra en la figura se está llenando de agua a un ritmo constante.

a. ¿Qué magnitudes cambian a medida que el vaso se va llenando?
b. ¿Qué magnitud o magnitudes determinan la altura del agua en el vaso?
c. ¿La altura del agua en el vaso aumenta a un ritmo creciente o decreciente?
d. Realice un gráfico de la altura del agua en función de la cantidad (volumen) de agua que hay en el vaso.

Esta Tarea inicia con dos interrogantes: ¿Ha notado que al llenar algunas botellas el agua se riega repentinamente de la parte superior? ¿Por qué sucede esto? Los estudiantes deben determinar que el agua se riega repentinamente en la parte superior de algunas botellas, porque algunas de ellas tienen más estrecha la parte superior (Figura 14). Por tanto, la botella se llenará más rápido cerca de esta parte. Esto implica que la parte superior de la botella se llena en menos tiempo que la parte inferior, dado que contiene menos líquido. Se plantean estas preguntas abiertas para introducir el trabajo que se va a realizar. Posteriormente, se propone una situación en la que sucede el fenómeno contrario. Es decir, un fenómeno donde la botella se va llenando más despacio a medida que se va vertiendo el agua.

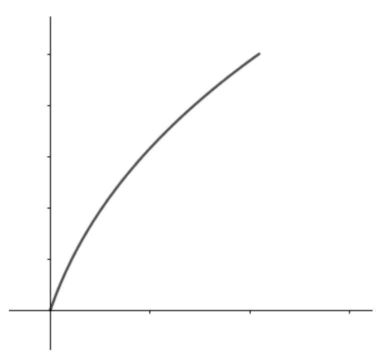
Figura 14

Botellas mostradas en la Tarea 3

Solución Normativa: El estudiante debe notar que las magnitudes que cambian a medida que se va llenando el vaso de agua son: tiempo, radio, altura y volumen. Para realizar la gráfica altura vs volumen, los estudiantes deben tener en cuenta el hecho de que la altura del agua en el vaso aumenta a un ritmo (velocidad) decreciente. En otras palabras, que a medida que se introduce más agua en la botella, la altura del agua aumenta. Sin embargo, la velocidad a la que el agua está subiendo es cada vez menor. Por esta razón, la representación gráfica de la función altura vs volumen, es una curva cóncava hacia abajo (Figura 15).

Figura 15

Curva cóncava hacia abajo que representa la función altura vs volumen del problema del vaso de agua en la Tarea 3



Análisis Teórico: La Tarea está planteada para que el estudiante coordine los registros verbal, tabular y gráfico de la siguiente forma: Registro Gráfico → Registro Verbal → Registro Tabular. A partir de la situación del vaso de agua, se plantean interrogantes que buscan que el estudiante estructure análisis más profundos, o bien, fortalezca sus habilidades de razonamiento covariacional. Por ejemplo, ¿qué magnitudes cambian a medida que el vaso se va llenando? ¿Qué magnitud o magnitudes determinan la altura del agua en el vaso? ¿La altura del agua en el vaso aumenta a un ritmo creciente o decreciente? Estas preguntas permiten establecer si el estudiante simplemente está emitiendo un hecho memorizado, o si las afirmaciones que realiza están respaldadas por una comprensión de porqué sus explicaciones son verdaderas. Esto es, al determinar por qué el agua se riega repentinamente.

El trabajo hecho con GeoGebra permite al estudiante determinar los valores que toman las magnitudes que cambian (estos valores dependen de las medidas dadas al vaso).

1. Abra el archivo de GeoGebra llamado Tarea3. Mueva el deslizador t para responder las siguientes preguntas:

    a. ¿Qué magnitudes cambian a medida que el vaso se va llenando?
    b. ¿Qué valores toman las magnitudes que cambian?
    c. ¿Por qué la curva que se va construyendo en la vista gráfica a medida que usted mueve el deslizador es cóncava y no lineal?
    d. ¿Por qué la curva es continua y no por tramos?

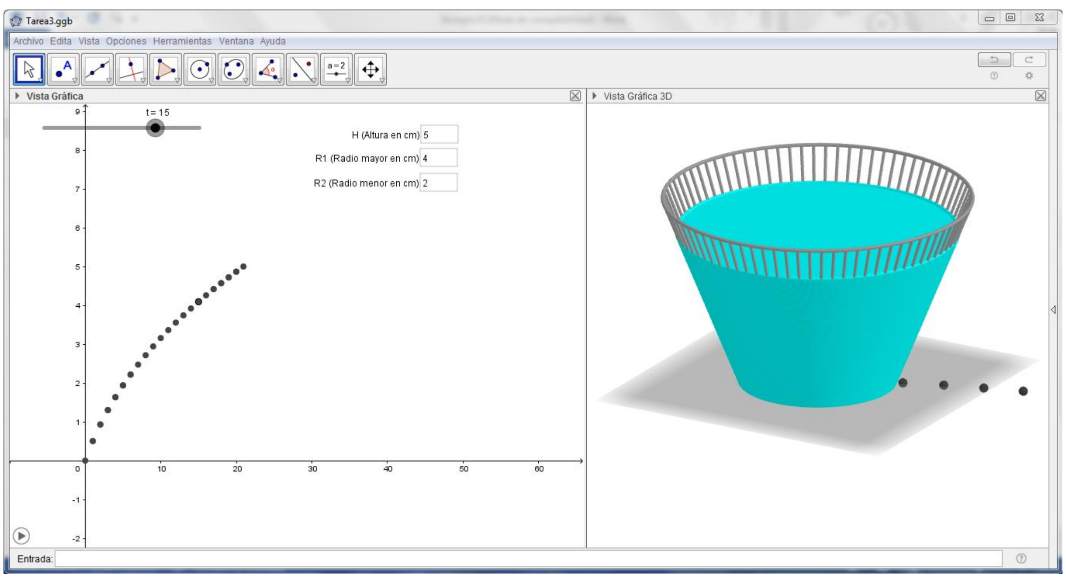
2. Con ayuda del archivo de GeoGebra llamado Tarea3, construya una representación tabular (una tabla) con al menos cinco valores que muestren la relación de la altura en función de la cantidad (volumen) de agua que hay en el vaso.

Solución Normativa: Los intervalos de las magnitudes que cambian a medida que se va llenando el vaso de agua, están definidos de la siguiente manera: tiempo (s) $[0,18]$, radio (cm)

[2,4], altura (cm) [0,5] y volumen (cm^3) $\left[0, \frac{140}{3}\pi\right]$. $\frac{140}{3}\pi \approx 146.61$. La curva que se va construyendo en la vista gráfica a medida que se mueve el deslizador no puede ser lineal, esto implicaría que la altura del agua a medida que se va llenando el vaso, crece a razón constante. Sin embargo, de la primera parte de la Tarea, se dedujo que a medida que se introduce más agua en el vaso, aunque la altura del agua aumenta, la velocidad a la que el agua sube es cada vez menor (Figura 16).

Figura 16

Archivo de GeoGebra Tarea3

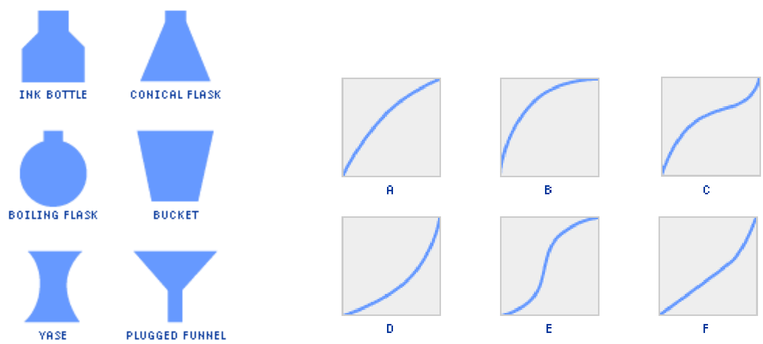


Ahora bien, dicha curva es continua, dado que el agua se va vertiendo sin ninguna interrupción. Con ayuda del software, los estudiantes, además, pueden extraer información para la construcción de una representación tabular. No se cuestiona a los estudiantes sobre la representación algebraica porque la función que modela la situación no está al alcance de sus conocimientos.

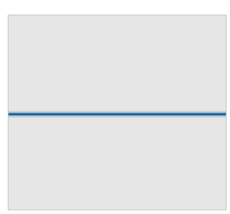
Análisis Teórico: Con este tipo de preguntas, al igual que en la primera parte de esta Tarea, se fortalecen las habilidades de razonamiento covariacional. Estas habilidades permiten desarrollar Procesos mentales, ya que el estudiante está pensando en una función de manera dinámica.

Finalmente, y de igual forma que en las Tareas anteriores, se deja a los estudiantes una Tarea extra-clase para que refuercen la actividad hecha en el aula.

1. Imagine llenar cada una de las seis botellas a continuación, vertiendo agua a un ritmo constante. Para cada botella, elija el gráfico correcto, relacionando la altura del agua con el volumen de agua que se ha vertido.



2. Dibuje una botella que describa la relación de la altura del agua con el volumen de agua que se vierte, a partir del gráfico que se muestra a continuación:



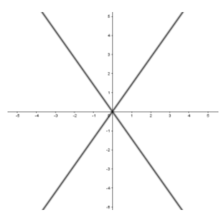
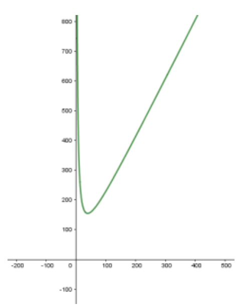
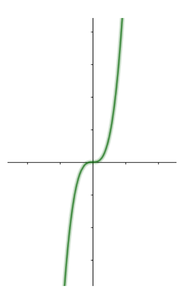
3. Proponga y dibuje otro tipo de botella que pueda llenar, y realice el gráfico de la altura del agua en función de la cantidad (volumen) de agua que hay en la botella.

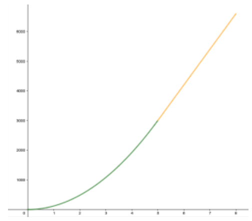
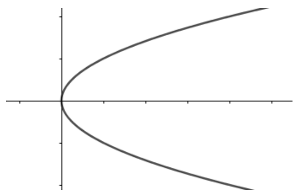
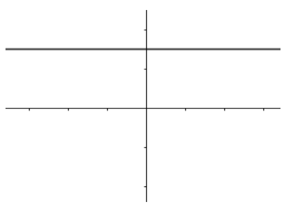
5.2.5 Qué es y qué no es función

Para esta Tarea se entrega a los estudiantes una tabla con dos columnas (Figura 17), la primera columna muestra la representación gráfica de una relación y la segunda, muestra una ecuación. Los estudiantes deben asociar cada representación gráfica de la primera columna, con una de las ecuaciones de la segunda columna.

Figura 17

Tabla mostrada en la Tarea 4

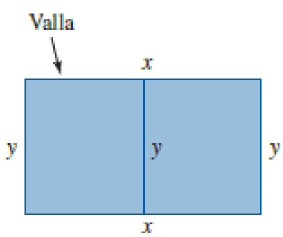
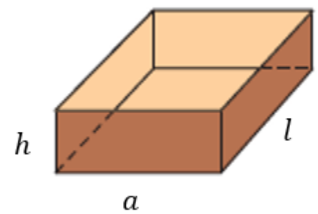
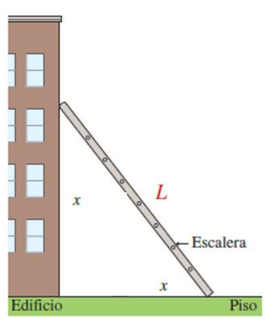
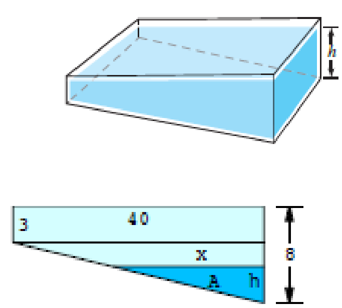
Representación	**Ecuación**
A. 	$F(x) = 2x + \dfrac{3000}{x},\ \ x > 0$
B. 	$F(x)^2 = 2x^2,\ \ x \in \mathbb{R}$
C. 	$F(x) = \begin{Bmatrix} 120x^2, & 0 \leq x < 5 \\ 3000 + 1200(x-5), & 5 \leq x \leq 8 \end{Bmatrix}$

D. 	$F(x) = 6x^3$
E. 	$(F(x))^2 = x, \quad x \in \mathbb{R}$
F. 	$F(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}$

A partir de la asociación que realicen, los estudiantes deben responder una serie de preguntas:

1. Escriba por qué relaciona cada una de las gráficas en el ítem 1 con la expresión algebraica que escogió.
2. Diga cuál de las representaciones presentadas en el ítem 1 son funciones y cuáles no. Justifique ampliamente su respuesta.
3. Escoja una representación de las presentadas en el ítem 1 que sea función, y plantee una situación que se ajuste a dicha función.

Finalmente, para esta Tarea, se entrega a cada grupo de estudiantes cuatro situaciones en hojas diferentes. Las tres primeras situaciones son adaptadas de Zill (2011), la última es tomada de manera textual; cada una de dichas situaciones se ajusta a una de las representaciones del ítem 1.

1. Un granjero desea cercar un terreno rectangular cuya área es de $1000\ \mathrm{m}^2$. El terreno será cercado y dividido en porciones iguales mediante una cerca paralela a dos lados del terreno. Exprese la cantidad de valla usada como una función de la longitud de uno de los lados del terreno. 	2. La longitud de una caja rectangular es tres veces su altura, y su ancho es dos veces su altura. Exprese el volumen V de la caja como una función de su altura. 
3. Una escalera esta sostenida por un edificio, de modo que un extremo de la escalera está apoyado en el suelo y el otro contra el edificio. Exprese la longitud de la escalera en términos de la distancia x entre los extremos de la escalera y la base del edificio. 	4. La piscina que se muestra en la figura mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies a lo largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua por arriba del extremo profundo (p. 60). 

Solución Normativa: La situación 1 corresponde a la gráfica B y la función $F(x) = 2x + \frac{3000}{x}$, $x > 0$. La situación 2 corresponde a la gráfica C y la función cúbica $F(x) = 6x^3$. Para que la función quede bien definida, debe restringirse el dominio para los números reales x, con $x \geq 0$. La situación 3 corresponde a la gráfica A y la ecuación $(F(x))^2 = 2x^2$; sin embargo, para que esta ecuación sea función, se debe aplicar raíz cuadrada a ambos lados escogiendo la parte positiva y restringiendo el dominio a los números reales x, con $x > 0$. Finalmente, la situación 4 corresponde a la gráfica D y la función por partes $F(x) = \begin{Bmatrix} 120x^2, & 0 \leq x < 5 \\ 3000 + 1200(x-5), & 5 \leq x \leq 8 \end{Bmatrix}$. A la gráfica E, le corresponde la ecuación $(F(x))^2 = x$, $x \in \mathbb{R}$. Esta gráfica no es función porque no cumple la condición de unicidad. A la gráfica F, le corresponde la función constante $F(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$.

Análisis Teórico: Con esta Tarea se busca evidenciar si el estudiante ha construido una concepción Objeto inicial de función. Se espera que el estudiante muestre que puede coordinar los registros verbal, gráfico y algebraico de la siguiente forma: Registro Gráfico → Registro Algebraico → Registro Verbal. Sin embargo, por la experiencia de los estudiantes puede presentarse la coordinación de la siguiente forma: Registro Algebraico → Registro Tabular → Registro Gráfico → Registro Verbal. Esto, dado que los estudiantes pueden partir de la ecuación dada en la segunda columna para construir una tabla de valores y asociarla a una gráfica de la primera columna. En otras palabras, el registro tabular puede emerger para dar respuesta a las preguntas, y la información que se obtiene de dicho registro, puede dar evidencias de estructuras asociadas a este.

5.2.6 Prueba Pos-instrucción

Esta prueba está compuesta por seis problemas. Los problemas 1 y 3 buscan que los estudiantes representen la misma función en distintos registros. Es decir, los estudiantes deben realizar la actividad cognitiva de conversión, esto es, transformar una representación dada en un registro, a otra representación de un registro distinto al inicial. En los problemas 2 y 4 los estudiantes deben analizar una función a trozos y una circunferencia respectivamente, representadas gráficamente, para que finalmente propongan una expresión que modele la relación correspondiente. Una de las relaciones es función y la otra no.

En los problemas 4 y 5 los estudiantes deben escribir en sus palabras lo que entienden por función y lo que no es función. Para ello, pueden mostrar algunos ejemplos. En este caso, los estudiantes pueden evidenciar sus construcciones sobre el concepto de función.

A continuación, se describe con detalle cada uno de estos problemas y su respectivo análisis.

En el primer problema, los estudiantes deben proponer diferentes representaciones (a su elección) de una misma función constante. Posteriormente deben responder interrogantes sobre su dominio y rango, y explicar por qué dicha relación es función.

Proponga al menos dos representaciones que modelen la misma función constante. Recuerde que una representación puede ser una gráfica, un diagrama, una expresión algebraica, una tabla de valores, una relación descrita con sus palabras, entre otros.

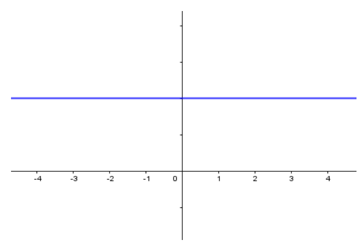
a. ¿Qué valores puede tomar la variable independiente en una función constante?
b. ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente en una función constante?
c. ¿Por qué una función constante es función?

Solución Normativa: Una representación de una función constante, puede ser una tabla de valores en la cual la columna correspondiente a la variable dependiente muestre un único valor c. Otra representación de una función constante puede ser descrita en palabras, manifestando que se trata de una recta horizontal en el plano cartesiano, y esto mismo puede evidenciarse en una representación gráfica que refleje dicha situación (Figura 18).

Figura 18

Tabla y gráfica de la función constante $f(x) = c$

x	$f(x)$
x_1	c
x_2	c
x_3	c

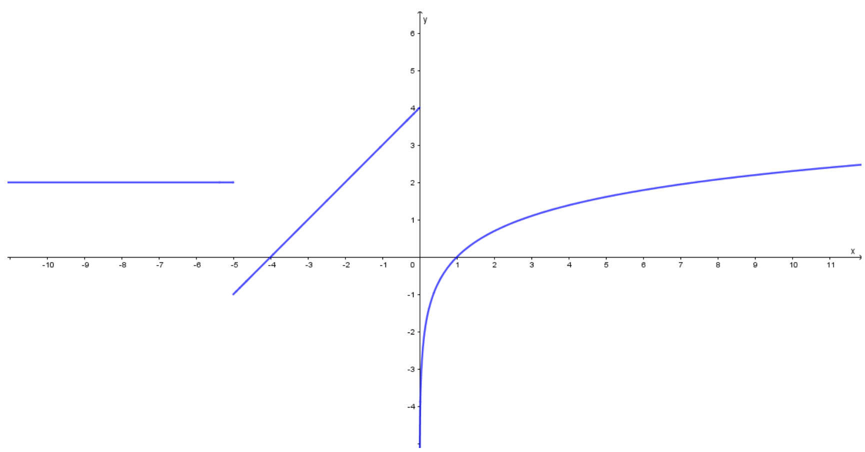


La representación algebraica de una función constante puede expresarse de la forma: $f(x) = c$. De donde resulta que el dominio de una función constante es el conjunto de números reales y su rango es $\{c\}$.

Análisis Teórico: La actividad matemática que genera este problema, puede promover la aplicación de Acciones, dado que los estudiantes pueden considerar diferentes formas de representar los conjuntos de salida y llegada de la función. Además, después de estudiar repetidamente la función constante, se espera que los estudiantes hayan reflexionado sobre algunas características de las funciones y en particular, características que este tipo de función ofrece. Esto permite una evolución de las estructuras en estructuras más avanzadas. Por ejemplo, ¿Por qué si se invierten los conjuntos de salida y llegada, la relación ya no representa una función? El mecanismo de interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental.

En el segundo problema, se muestra la gráfica de una función definida a trozos y se pide a los estudiantes que la representen a través de una expresión algebraica. Además, los estudiantes, deben justificar por qué la relación define una función.

Observe la gráfica que aparece en el plano.



a. ¿Qué valores puede tomar x en esta relación?
b. ¿Qué valores puede tomar y en esta relación?
c. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.
d. ¿Esta relación es función? ¿Por qué?

Solución Normativa: La relación que se muestra en la gráfica es función. Su dominio y recorrido, es el conjunto de números reales. Realizando las respectivas restricciones en el dominio, una expresión que modela dicha función, o bien, la relación dada gráficamente en el plano es:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 5 \\ x, & 5 < x \leq 0 \\ \ln(x), & x > 0 \end{cases}$$

Análisis Teórico: Con este problema, se pueden dar evidencias de las estructuras Acción y Proceso. Una concepción Acción se puede evidenciar cuando el estudiante encuentra una representación algebraica para asociarla a la representación gráfica de tres funciones distintas: constante, lineal y logarítmica, sin tener en cuenta si quiera el intervalo donde "actúa" cada una. Por otro lado, un Proceso puede evidenciarse cuando el estudiante debe pensar en la función en términos de aceptar entradas (en esta relación, x), y salidas (en esta relación, y) sin la necesidad de realizar "muchos" cálculos explícitos. En este caso, debe reflexionar no solo sobre la función dada gráficamente para asociarla posteriormente con la representación algebraica, sino que debe considerar la condición de unicidad.

En el tercer problema los estudiantes deben proponer una relación que sea función y representarla en al menos dos registros.

Escoja otro tipo de función y proponga al menos dos representaciones que la modelen.

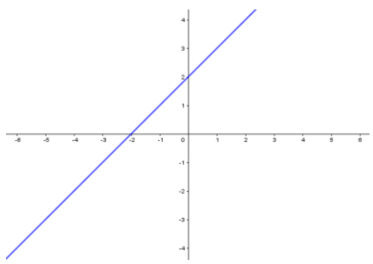
a. ¿Qué valores puede tomar la variable independiente en la función?
b. ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente en la función?
c. ¿Por qué esta relación es función?

Solución Normativa: Una función que resulta familiar para los estudiantes es la función lineal, que tiene algebraicamente la forma $f(x) = mx + b$, donde m, b son números reales. Verbalmente esta relación puede describirse como la recta que corta al eje y en $b,$ y al eje x en $\frac{-b}{m}$. Si se conocen los valores de m y b para poder asignar valores a x y encontrar los de y, es posible construir los valores para la tabla. A partir de la información en la tabla, es posible ubicar los puntos correspondientes en el plano cartesiano (al menos dos) y trazar la recta que representa la relación. Por ejemplo, si $m = 1$ y $b = 2$, la tabla y la gráfica correspondientes a la relación se verían de la siguiente manera:

Figura 19

Tabla y gráfica correspondientes a la función $f(x) = x + 2$

x	$f(x)$
-2	0
0	2

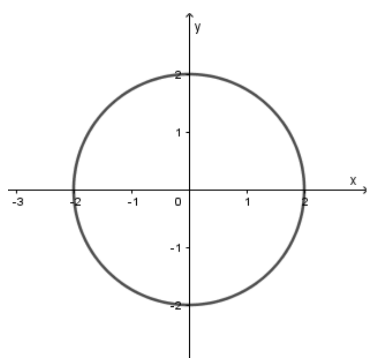


En cuanto al dominio y rango de esta función, que generalmente es asociado con la variable independiente x , y con la variable dependiente y respectivamente, se recuerda que, por tratarse de una función lineal, corresponde al conjunto de números reales.

Análisis Teórico: Dado que son los estudiantes quienes deben escoger una relación que sea función y justificar por qué dicha relación es función, se puede evidenciar el tipo de construcciones mentales (Acción, Proceso) que han logrado estructurar. Por ejemplo, si el estudiante propone una expresión algebraica particular en la que puede reemplazar algunos números en la variable independiente y a partir de ello generar una gráfica, posiblemente el estudiante no ha logrado interiorizar las Acciones. Pues se considera que solo está efectuando el paso a paso habitual. Si por el contrario esta expresión algebraica se plantea de manera general, se puede evidenciar que acepta que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada, a través de una fórmula, para generar un conjunto de salida. Por ende, podría decirse que ha construido un Proceso. Igualmente, si se plantea una curva en el plano cartesiano, sin la necesidad de tener una tabla o una expresión particular, se evidencia una construcción mental más avanzada, pues no sería necesario un estímulo externo para generarla. Así mismo, si las representaciones son verbal o tabular, se puede asegurar que se ha estructurado un Proceso, ya que no es necesario un estímulo externo para generar dicha representación.

El cuarto problema es retomado de la prueba diagnóstica, teniendo en cuenta que no fue resuelto por ningún estudiante en dicha prueba.

Observe la gráfica que aparece en el plano.



a. ¿Qué valor le corresponde a 0 según la relación que aparece en el plano?
b. Señale en el plano los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$.
c. ¿Qué valores pude tomar x?
d. ¿Qué valores puede tomar y?
e. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.
f. La relación dada gráficamente en el plano ¿es una función? ¿Por qué?

Se recuerda el análisis hecho previamente para este problema:

Solución Normativa: La gráfica que aparece en el plano cartesiano, no corresponde a una función porque no cumple la condición de unicidad. Los valores que puede tomar tanto x como y, pertenecen al intervalo $[-2,2]$. La expresión que modela la relación dada en la gráfica, es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 2, esto es, $x^2 + y^2 = 4$.

Análisis Teórico: Con este problema, se busca indagar sobre los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de lo que es o no es una función. Es decir, con este problema se puede dar evidencia de si el estudiante ha construido una concepción Objeto inicial de función.

Finalmente, los dos últimos problemas de esta prueba están estrechamente relacionados, por lo que su análisis se realiza de manera paralela.

Escriba con detalle lo que entiende por función. Si lo necesita puede usar ejemplos. Escriba tres ejemplos de relaciones que sean función y tres que no lo sean. Explique ampliamente su respuesta.

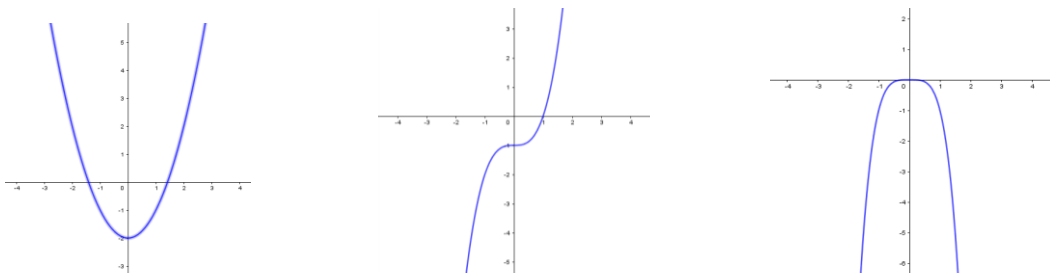
Solución Normativa: La solución normativa se toma del MEN (2017) quien define una función así:

> Una función f es una relación definida de un conjunto A en un conjunto B, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B mediante f (p. 138).

Dicho en otras palabras, una función es una relación R entre dos conjuntos A y B, la cual hace corresponder a x, de A, un único elemento y, de B. Para explicar lo que se entiende por función, se pueden proponer funciones polinómicas como:

Figura 20

Tres ejemplos de funciones polinómicas



$f(x) = x^2 - 2$ $\qquad$ $f(x) = x^3 - 1$ $\qquad$ $f(x) = -x^4$

Ahora bien, es posible poner por caso una circunferencia con centro en el origen y radio 5 como ejemplo de una relación que no es función, o una parábola horizontal con vértice en el origen, teniendo en cuenta que el eje horizontal define los valores de la variable independiente.

Análisis Teórico: Este tipo de problemas da evidencias del tipo de construcciones mentales que han logrado estructurar los estudiantes. Pues son ellos quienes deciden el tipo de representación con el que van a justificar sus respuestas. De igual forma, tienen la libertad de escoger el tipo de representación para dar ejemplos de lo que es y no es función.

5.2.7 Entrevista semi-estructurada

Para esta última intervención de la investigación, que corresponde a la entrevista semiestructura, se han propuesto 4 problemas. Los dos primeros son retomados de la prueba pos-instrucción. El tercer problema es similar a uno que también hace parte de la prueba pos-instrucción, pero con mayor nivel de complejidad para los estudiantes. Finalmente, el cuarto problema se retoma de la prueba diagnóstica.

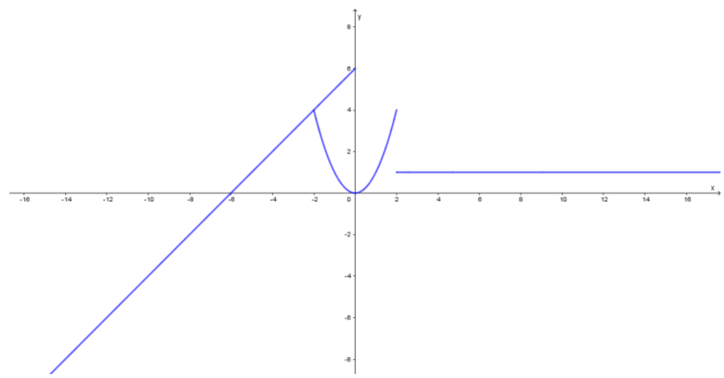
Los dos primeros problemas aparecen en la prueba pos-instrucción, por lo tanto, su análisis se puede leer en el apartado 5.2.6. (p.86, de este documento).

Escriba con detalle lo que entiende por función. Si lo necesita puede usar ejemplos.

Escriba tres ejemplos de relaciones que sean función y tres que no lo sean. Explique ampliamente su respuesta.

Al igual que en la prueba pos-instrucción, en el tercer problema se muestra una gráfica definida a trozos en donde se pide a los estudiantes que representen la relación mostrada a través de una expresión algebraica.

Observe la gráfica que aparece en el plano.



a. ¿Qué valores puede tomar x en esta relación?
b. ¿Qué valores puede tomar y en esta relación?
c. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.
d. ¿Esta relación es función? ¿Por qué?

Solución Normativa: Como se puede observar en la gráfica, la relación no es función, ya que en el intervalo $[-2,0]$ no se cumple la condición de unicidad. Sin embargo, se puede restringir los valores que toma x para que la relación sea función:

$$f(x) = \begin{cases} x+6, & x \leq -2 \\ x^2, & -2 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Pero esta no es la única forma de restricción.

Respecto al dominio y rango de la función que se ha construido, los valores que puede tomar la variable independiente x son todos los números reales y su rango esta definido en el intervalo $(-\infty, 4]$.

Solución Teórica: Este problema no solo da evidencias de la estructura Acción, sino de los Procesos, e incluso de un Objeto inicial de función. Una Acción se evidencia cuando el estudiante afirma que la relación mostrada en la gráfica no es función, justificando dicha aseveración con el test de la prueba vertical. Eso es suficiente para afirmar que la relación no es función. Sin embargo, el problema se vuelve más complejo cuando es necesario definir los valores que toman las variables en la relación dada. Es en este momento donde se puede evidenciar los Procesos construidos por los estudiantes. Este problema es todavía más complejo cuando ellos deben definir restricciones. Aunque no se cuestiona esta restricción en el problema inicial (para no alterar las respuestas), si hace parte de las preguntas del investigador en la entrevista. Por ejemplo, si el estudiante afirma que la relación no es función y da su justificación, la siguiente pregunta es: ¿Qué haría usted para que esta relación sea función? Si los estudiantes logran dar respuestas a estos interrogantes de manera exitosa, se podría asegurar que han logrado construir un Objeto inicial de función.

En el cuarto problema de esta prueba pos-instrucción, se pide a los estudiantes que planteen una situación en donde se describa un fenómeno de cambio y variación. Este problema se planteó inicialmente en la prueba diagnóstica con el objetivo de determinar si los estudiantes habían construido previamente un Proceso. Sin embargo, ningún estudiante planteó dicha situación.

Plantee una situación para su mejor amigo, en donde describa un fenómeno de variación y cambio. A partir de la situación propuesta, usted debe responder cada uno de los ítems a continuación y justificar ampliamente las respuestas.

a. ¿Cuáles son las magnitudes que cambian en el problema que propuso?

b. ¿Podría definir si hay alguna relación entre las magnitudes involucradas? ¿Cuál sería la relación?

c. ¿Alguna magnitud depende de la otra? Si su respuesta es afirmativa, escriba qué magnitud depende de cual. Si la respuesta es negativa, explique por qué no existe tal dependencia.

d. ¿Es posible realizar una gráfica que represente la situación? Si es posible, grafíquela. Si no es posible, explique por qué no es posible graficarla.

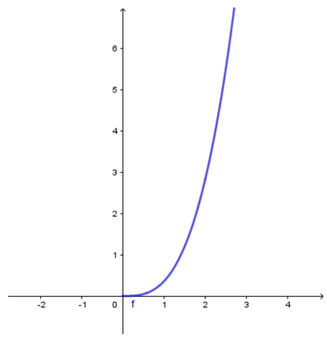
e. ¿Es posible crear una tabla de valores que cumpla las condiciones de la situación que propuso? Si es posible, realice la tabla con al menos cinco valores. Si no es posible, explique por qué no es posible crear dicha tabla.

f. ¿Es posible diseñar una función que modele la situación que planteó inicialmente? Si es posible, escriba la expresión de dicha función. Si no es posible, explique porque no es posible diseñar la función.

Solución Normativa: El ejemplo que se propuso en la prueba diagnóstica para esta situación, fue el bombeo de agua de un tanque cónico. En este caso las magnitudes que cambian respecto al agua que hay en el tanque son: tiempo, altura, radio, volumen. Si se quiere expresar el volumen del agua en función de su altura, esta relación estaría dada por la función $V(h) = \frac{1}{9}\pi h^3$. La gráfica de esta función se vería como en la Figura 21. Para obtener una tabla de valores de la situación, es suficiente reemplazar cinco valores en la función expresada en lenguaje algebraico.

Figura 21

Gráfica de la función $V(h) = \frac{1}{9}\pi h^3, h \geq 0$



Análisis Teórico: Con este tipo de problema se pueden dar evidencias de la estructura Proceso, pues los estudiantes deben proponer una situación que muestre de alguna manera que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada, a través de una fórmula, gráfica, tabla, diagrama, texto, etc., para generar un conjunto de salida. En este problema son los estudiantes quienes deciden de qué registro partir. Por ejemplo, los estudiantes pueden proponer cualquier gráfica que sea función y asegurar que a medida que pasa el tiempo, la variable independiente va cambiando, y va generando las imágenes de la variable dependiente. Es decir, la situación no necesariamente debe darse en lenguaje natural. Sin embargo, se espera que los estudiantes respondan a este problema con una situación dada en el registro verbal.

5.3 Implementación de enseñanza

Se considera necesario para la implementación crear un ambiente agradable, que propicie el desarrollo de pensamiento creativo y trabajo cooperativo. La investigadora quien desarrolla la implementación deja en claro a los estudiantes que es más importante la construcción de ideas propias, que entregar una "solución correcta".

Al inicio de cada sesión, los estudiantes se organizan en grupos pequeños (dos o tres), para dar lugar a la formulación de preguntas, dudas y explicaciones más explícitas. Posteriormente, se entrega en físico la Tarea que deben realizar y una hoja en blanco para sus respuestas. Además, cada grupo tiene disponible un computador para el trabajo que se debe efectuar en el software GeoGebra. La discusión en clase surge de manera natural cada vez que se manifiestan dudas por parte de los estudiantes. Finalmente, los problemas extra-clase se realizan de manera individual para entregar. Estos problemas se socializan en los primeros 15 minutos de la siguiente sesión.

El tiempo aproximado y la forma de evaluar cada sesión se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7

Tiempo y forma de evaluar cada sesión

Sesión	Tarea	Duración	Trabajo
1	Prueba diagnóstica	110 min	Grupal
2	Boya oceanográfica	85 min	Grupal
3	Tarifa de parqueo	110 min	Grupal
4	Vaso de agua	110 min	Grupal
5	Qué es y qué no es función	110 min	Grupal
6	Prueba pos-instrucción	110 min	Grupal
7	Entrevista semiestructurada	75 min	Individual

En cada una de estas sesiones se presentan episodios que ilustran los acontecimientos de la implementación. No obstante, se seleccionan únicamente los episodios que se consideran cruciales para la investigación. Es decir, aquellos donde se evidencian dificultades conjuntas y/o los procesos de construcción de determinadas funciones. Dichos episodios se muestran en este documento de manera cronológica. Hay que mencionar que, para tal descripción, a cada estudiante se le asignó un seudónimo así: E1, E2, … , E34, donde la letra E significa *Estudiante* y el número es asignado de manera aleatoria.

5.3.1 Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica se construye teniendo en cuenta la observación realizada previamente en el aula. Se realiza a un grupo de estudiantes que cursa noveno grado (14 – 15 años) de la institución educativa seleccionada, aproximadamente 34 estudiantes. Con esta prueba se busca determinar las construcciones iniciales que evidencian dichos estudiantes sobre el concepto de función y sus habilidades de representación.

Aunque en un principio se esperaba realizar esta prueba de manera individual, los estudiantes se organizaron naturalmente en grupos. Por lo tanto, la prueba se desarrolla de manera grupal.

Se recuerda que la prueba consta de cinco problemas. Sin embargo, solo uno de los grupos (Figura 22) intentó responder a tres de los problemas; los demás, dieron respuesta solo al primer y tercer problema. Dicho lo anterior, los resultados analizados en la prueba diagnóstica corresponden a los tres primeros problemas planteados.

Figura 22

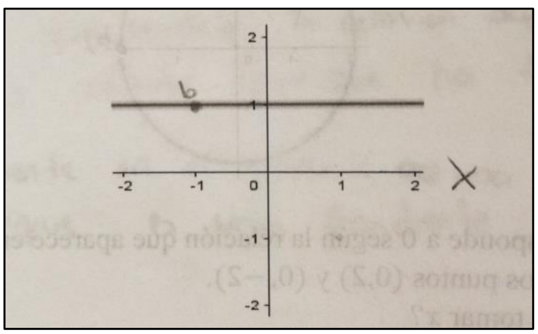
Grupo de estudiantes que más avanzó en la prueba

Como puede verse en el Apéndice A, en el primer problema se muestra la representación gráfica de la función constante $f(x) = 1$, y se pide a los estudiantes determinar el dominio y rango de dicha relación. Además, deben señalar el punto $(-1,1)$ y determinar la imagen de $x = 1$. Por último, los estudiantes deben definir una expresión algebraica para la relación y decidir si es o no función.

A partir del trabajo realizado se puede evidenciar que muchos de los estudiantes logran ubicar un punto particular en el plano cartesiano, en este caso, el punto $(-1,1)$, pero no pueden precisar la imagen de algún elemento del dominio; por ejemplo, la imagen de $x = 1$. En la Figura 23 el estudiante E5, al igual que otros, ubica de manera correcta el punto $(-1,1)$, pero no proporciona la imagen de $x = 1$.

Figura 23

E5 ubica en el plano cartesiano el punto $(-1,1)$



E5 menciona: “el valor que toma 1 es un punto en el plano, ya que esta es una coordenada que se puede poner en el plano”. Otros estudiantes aseguran que a 1 le corresponde la coordenada y, entendiéndose esto por $y = 1$. Y otros, ponen la coordenada $(1,1)$ para hacer referencia a la imagen de $x = 1$. Esto evidencia que los estudiantes intentan reproducir procedimientos realizados previamente.

En relación con el dominio de la función, la mayoría de los estudiantes manifiestan que x puede tomar cualquier valor. En el caso particular de E20, responde que puede tomar: “cualquier valor, que esté dentro de la coordenada x, ya que es infinito, se puede mantener positivo o negativo". En el caso de estudiantes como E4, aseguran que: "toma infinitos valores debido a que su dominio puede obtener varias imágenes". Por su parte, el estudiante E5 afirma que: "puede tomar muchos valores por infinita longitud del eje x" y E7 asegura que puede tomar: "infinitos porque la recta nunca acaba". Estas afirmaciones evidencian que los estudiantes están pensando únicamente en el eje x, mas no en la relación dada en el plano cartesiano. De igual modo, sucede con los valores que puede tomar y; los valores son infinitos. Estas ideas son consideradas en la descomposición genética preliminar como una concepción de la estructura más básica, ya que los estudiantes no están pensando en el problema como tal, sino que intentan recordar la solución de otro problema abordado previamente para asociarlo con uno nuevo.

Los estudiantes E1, E2, E3 y E4 que integran el grupo que logra avanzar más (Figura 22), coinciden en que la expresión algebraica que modela la relación dada es $y = 0x + 1$, mientras que otro grupo afirma que la relación es $x = 0 + y$. Los estudiantes muestran que necesitan recurrir a la fórmula general de una recta para determinar la expresión algebraica que modela la relación presentada en el plano cartesiano, lo cual es evidencia de concepciones básicas teniendo en cuenta la descomposición genética preliminar. Esto es, los estudiantes muestran una vez más que desarrollan únicamente Acciones mentales.

Con respecto a si la relación es o no función, hubo discrepancia. Algunas justificaciones a la respuesta positiva, es decir, que la relación es función, son las siguientes:

E4: Sí, porque tiene la estructura de la función afín ($y = mx + b$).
E5: Sí es función porque es una pendiente horizontal.
E3: Sí es una función ya que tiene un único corte.
E12: Sí es función, porque todos tienen una relación.
E23: Porque todos los números son función y tiene relación.

Nuevamente, puede evidenciarse que los estudiantes intentan recurrir a factores externos como representaciones algebraicas y gráficas, o bien, a ciertas características de dichas representaciones para determinar si la relación representada en el plano cartesiano es o no una función. Ellos aún no logran reflexionar sobre las Acciones que realizan en la resolución de un problema.

Por otra parte, los estudiantes argumentan que la relación "no es una función, ya que corresponde a la pendiente de una recta en forma horizontal" y "no es función, es una directriz". Estas dos respuestas son dadas por los estudiantes E4 y E6 respectivamente. Con estas afirmaciones se puede asegurar que, en efecto, no hay claridad sobre el concepto de función, ni de las diferentes representaciones de una función, en particular de la función constante.

En el segundo problema se da la representación tabular de la misma función $f(x) = 1$ (Figura 24).

Figura 24

Representación tabular de la función constante $f(x) = 1$ planteada en el segundo punto de la prueba diagnóstica

A	-1,44	-1,42	-1,40	-1,34	-1,32	0	0,71	0,83	1,76	2,79	3,68
B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Se pide a los estudiantes nuevamente que proporcionen la expresión algebraica y que expliquen por qué es o no una función. También se pide que describan con sus palabras la relación dada en la tabla y se cuestiona por el valor que le corresponde a -1 en la relación y los valores que producen a 1 como imagen.

Se genera un gran conflicto en los estudiantes cuando se enfrentan a este problema; incluso la mayoría opta por no responder. Por su parte, los estudiantes que, si lo hacen, no comprenden muy bien el problema. Por ejemplo, cuando se cuestiona por el valor que le corresponde a -1 según la relación que aparece en la tabla, el estudiante E5 asegura que: "A -1 no corresponde ningún valor, porque ningún número de la relación es negativo" y el estudiante E1 junto con sus otros tres compañeros, afirman que: "el valor que le corresponde a -1 son los mismos valores de A porque el que varía es el B". Sin embargo, como resultado de la intervención por parte de la profesora investigadora, esta respuesta posteriormente cambia. Se reflexiona sobre las características de la función constante, su dominio y recorrido; entonces, aunque en la tabla no aparece -1 en el conjunto A, se busca concluir que la imagen es 1.

En medio de la ansiedad de los estudiantes y su insistencia en obtener algún apoyo en el desarrollo de la prueba, se considera realizar una breve intervención. Sin embargo, solo uno de los grupos continúa con este problema y presenta un cambio significativo en su respuesta. En primer lugar, como se menciona en el párrafo anterior, los cuatro estudiantes afirman que "el valor que le corresponde a -1 son los mismos valores de A porque el que varía es el B". Pero después de la intervención, tachan esa respuesta y responden una vez más: "el valor que le corresponde a -1 es 1 por la relación de la tabla, ya que esta tabla es constante". Es evidente, que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de problemas. Aunque previamente hayan construido tablas de valores a partir de una expresión algebraica, no logran abstraer información de ella. Esta sin duda, no es una representación de una función constante dentro de las estructuras que han construido asociadas con el concepto de función.

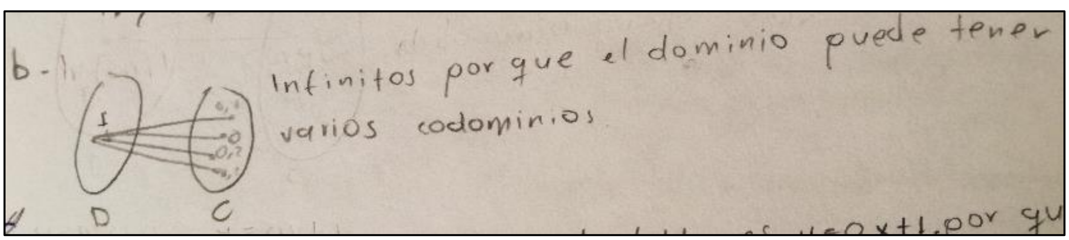
Llama la atención cuando se pregunta a los estudiantes qué valor o valores producen a 1 como imagen según la relación que aparece en la tabla. Los integrantes del único grupo que resolvió este problema en su totalidad llegan a dos conclusiones:

E1 y E4:	Infinitos porque el dominio puede tener varios codominios.
E3 y E2:	Le corresponden los que están en la tabla.

Aunque con estas dos respuestas pareciera que unos creen que son valores finitos (los que están en la tabla) y otros que son infinitos, lo cierto es que hay una confusión con los conjuntos del dominio y rango de la función. En efecto, infinitos números producen a 1 como imagen (único elemento de B) por tratarse de una función constante. Sin embargo, para los estudiantes, el dominio es quien toma infinitos valores, lo cual contradice inmediatamente la condición de unicidad para que una relación sea función. Este hecho lo explican con un diagrama sagital (Figura 25).

Figura 25

Respuesta de los estudiantes E1 y E4 cuando se les cuestiona por el dominio de la función constante



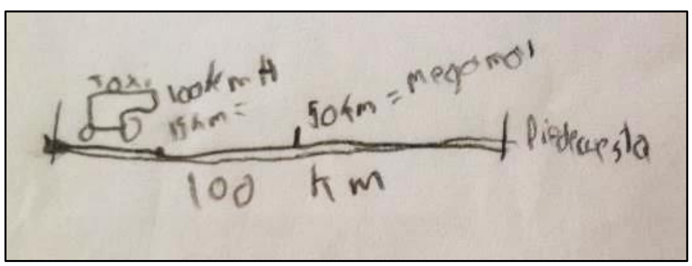
Sobre la expresión que modela esta relación, el grupo de estudiantes (E1, E2, E3, E4) concuerda en que es $y = 0x + 1$, "porque siempre nos va a dar el mismo resultado en x". Esta expresión es la misma que proporcionaron en el primer problema. Además, aseguran que es función "porque tiene la estructura de la función afín $(y = mx + b)$". En cuanto a la representación en lenguaje natural, la relación descrita en sus palabras es la siguiente: "la relación es que el dominio (x) tiene varias imágenes por lo consiguiente no varía".

Las afirmaciones hechas por los estudiantes muestran que hay interpretaciones erróneas y que no solo no han establecido relaciones suficientes para comprender el concepto de función, sino que, además, no han logrado una coordinación entre sus diferentes representaciones.

Finalmente, el tercer problema donde se pregunta a los estudiantes a qué velocidad debe circular un auto de carreras para recorrer 50 km en un cuarto de hora, no representó dificultad para los estudiantes; lograron concluir rápidamente que la velocidad de este es de 200 km/h. Por ejemplo el estudiante E6 hace un dibujo de la situación y aproxima a partir de ensayo y error la velocidad que debe llevar el auto de carreras (Figura 26).

Figura 26

Dibujo del estudiante E6 de la situación del auto de carreras



Por lo que se refiere a la distancia recorrida en 6 minutos y el tiempo que tarda en recorrer 40 km, el plan que llevaron a cabo los estudiantes fue dividir 200 entre 60 y hacer las multiplicaciones correspondientes:

E1: En un minuto recorre $3{,}3\,km/h$, en 6 minutos recorre $19{,}8\ km/h$ porque se multiplica $6\ \times 3{,}3\ km/h$. El auto tardará $12{,}2$ minutos en recorrer $40\,km$ porque $12{,}2 \times 3{,}3\,km/h = 40{,}29\,km/h$.

Se destaca que, aunque los estudiantes no conocen aún la fórmula de distancia, muchos de ellos tienen éxito en la resolución de este problema por tratarse de un problema en un contexto de interés.

Dado que uno de los objetivos de esta prueba es evaluar las construcciones iniciales que poseen los estudiantes sobre el concepto de función y si estas construcciones son las consideradas en la descomposición genética preliminar, se puede afirmar que los procedimientos observados, precisan que los estudiantes no han logrado construir una concepción Acción del concepto de función.

Los procedimientos y razonamientos analizados a partir de los problemas propuestos parecen estar limitados por el registro en que se plantea la pregunta. Inicialmente los estudiantes muestran estar más familiarizados con el registro gráfico. Esto se puede determinar cuando intentan recordar y replicar lo que han visto en clase, pero no lograr expresar de manera coherente que una función es básicamente una relación. En otras palabras, todas sus respuestas dependen de factores externos; por ejemplo, una fórmula o una gráfica particular. A pesar de dar respuestas usando términos formales como “infinito”, “codominio”, “imagen”, “números reales”, entre otros, los estudiantes no han reflexionado suficiente sobre lo que esto implica. Además, el análisis del diagnóstico muestra que los estudiantes no han construido relaciones entre las diferentes representaciones del concepto de función; las dos representaciones dadas (gráfica y tabular) son percibidas como independientes, como dos problemas completamente distintos.

En la Tabla 8 se sintetizan los indicadores presentados por los estudiantes durante la prueba diagnóstica con el fin de compararlos posteriormente con los indicadores de los otros dos instrumentos de recolección de datos: prueba pos-instrucción y entrevista semiestructura. De esta manera, se puede dar evidencia de las estructuras mentales desarrolladas y evidenciadas por los estudiantes después de la implementación de enseñanza. Estos indicadores están determinados por la descomposición genética preliminar.

Tabla 8

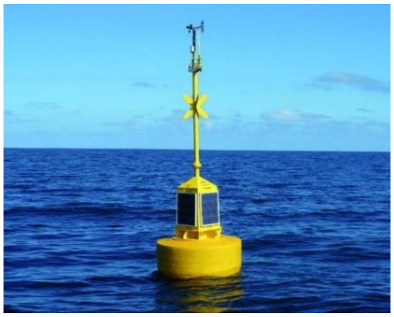
Indicadores de construcción del concepto de función evidenciados en la prueba diagnóstica

Estructura mental	Indicadores de construcción del concepto de función evidenciados en la prueba diagnóstica
Acción	A1. Reemplaza números en una expresión algebraica y realiza los cálculos indicados. A2. Etiqueta los ejes con indicaciones verbales (por ejemplo, y depende de x). A3. Ubica pares ordenados en el plano cartesiano.

5.3.2 Boya oceanográfica

El objetivo de esta Tarea como ya se mencionó, es promover el estudio del concepto de función constante en diferentes registros de representación y fomentar en los estudiantes la construcción de Acciones mentales. El problema planteado es el siguiente:

> Una boya en el Océano Pacífico mide la salinidad (la cantidad de NaCl, cloruro de sodio). Las medidas se envían cada hora por satélite a una base de datos meteorológicos para su análisis. La tabla muestra la información obtenida durante un intervalo de 14 horas (p.3780).



Hora	**Gramos por litro**
1	35.01
2	35.02
3	35.01
4	35.01
5	35.01
6	35.01
7	35.03
8	35.02
9	35.02
10	35.01
11	35.01
12	35.01
13	35.02
14	35.01

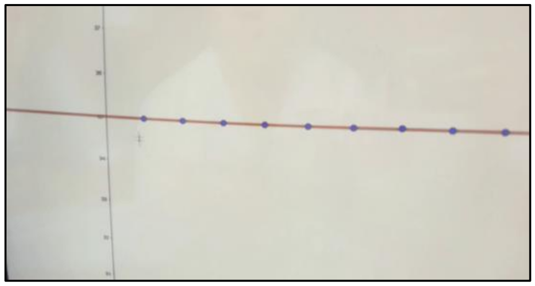
Inicialmente, cada grupo de estudiantes debe ubicar en el plano cartesiano los valores presentados en la tabla y representarlos en el plano. A partir de la información que tienen en los registros tabular y gráfico, deben responder tres preguntas adicionales. Inicialmente, aunque logran ubicar en el plano cartesiano y de manera correcta los puntos que se indican en la tabla no están convencidos si se pueden unir dichos puntos mediante una única curva, o bien, mediante una recta. Los estudiantes manifiestan que no es posible porque los valores de y no son iguales, sino que hay cierta variación. A partir de esta discusión surge el primer episodio que como se dijo anteriormente, son aquellos donde se evidencian dificultades conjuntas y/o los procesos de construcción de determinadas funciones, en este caso, la construcción de una función constante.

Episodio 1: E6 afirma que unir dichos puntos mediante una recta no es posible, ya que la recta no toma todos los puntos.

En la Figura 27 aparece la gráfica construida por el estudiante E6 en el software GeoGebra, seguida de una transcripción de sus razonamientos.

Figura 27

Gráfica construida por el estudiante E6 para verificar si la recta pasa por los 14 puntos según la información dada en la tabla



E6: La recta une dos puntos, entonces los dos puntos que uní fueron el primero y el último.

Inv: ¿y por qué no los dos primeros, por ejemplo?

Ante la pregunta, el estudiante se dirige inmediatamente a construir una nueva recta que pase por los dos primeros puntos. Sin embargo, se plantea una nueva pregunta:

Inv: ¿Por qué no este [señalando el primer punto] y este [señalando el sexto punto]?

E6: pues porque estamos viendo las 14 horas. O sea, porque no quiero pasar una recta solo entre las dos primeras horas, quiero ver todas las 14 horas.

Inv: ¿Entonces si une esos dos puntos [el primero y el catorceavo] le representan las 14 horas?

E6: no, solo me representan esos dos puntos si esos dos puntos pueden pasar por la misma curva, la misma recta.

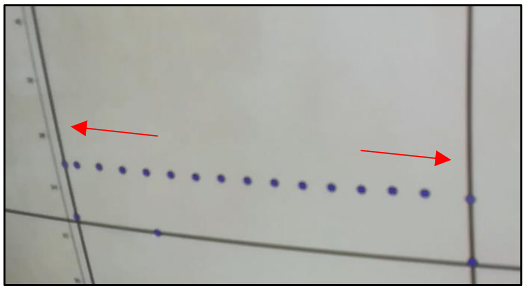
Inv: ¿entonces?

E6: pero la pregunta nos está diciendo que si se puede representar mediante una única curva los puntos en el plano, entonces serían dos, del primero al último.

En ese instante el estudiante pide un momento para organizar sus ideas y posterior a ello hace una nueva intervención. Construye dos rectas perpendiculares a una recta paralela al eje x, que pasan por dos nuevos puntos: uno a la izquierda del primero, y otro a la derecha del último (Figura 28).

Figura 28

Grafica construida por el estudiante E6 adicionando dos rectas perpendiculares en los extremos de la recta construida previamente

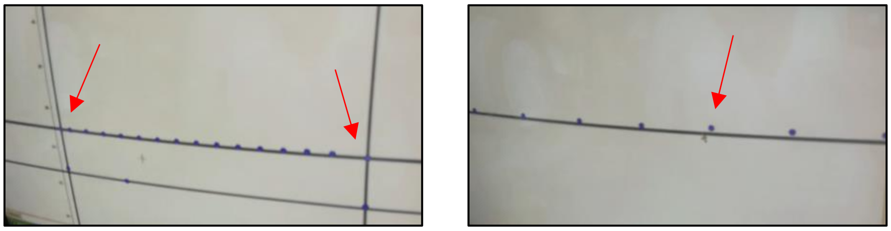


Finalmente, el estudiante construye una recta que pasa por los dos nuevos puntos (Figura 29.a), y afirma que realiza esto "para ver si todos los puntos se unen y aquí [haciendo zoom a la vista gráfica de GeoGebra y señalando uno de los puntos que no pasa por la recta (Figura 29.b)] ya podemos ver que no". El estudiante concluye que no todos los puntos se unen con la misma recta.

No obstante, se observa que el estudiante ubica dos puntos arbitrariamente a los extremos de los 14 puntos que ya se han ubicado previamente y estos puntos están ligeramente por debajo del resto. Es por esto que, cuando construye la recta, algunos puntos se apartan visiblemente de ella.

Figura 29.

Gráfica construida por el estudiante E6 para mostrar que los 14 puntos no se unen mediante una única recta



a) b)

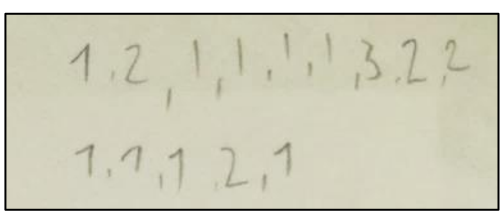
El segundo episodio se elige frente a la problemática que se genera a partir de las preguntas: ¿Qué cantidad de cloruro de sodio medirá la boya una hora más tarde? ¿Qué cantidad medirá dos horas más tarde?

Episodio 2: Los estudiantes buscan un patrón que se ajuste a los datos de la tabla.

Para predecir las cantidades de cloruro de sodio que medirá la boya horas después, los estudiantes intentan determinar un patrón que modele los datos que aparecen en la tabla. Uno de estos patrones (realizado por el estudiante E6) se puede observar en la Figura 30.

Figura 30

Secuencia construida por el estudiante E6



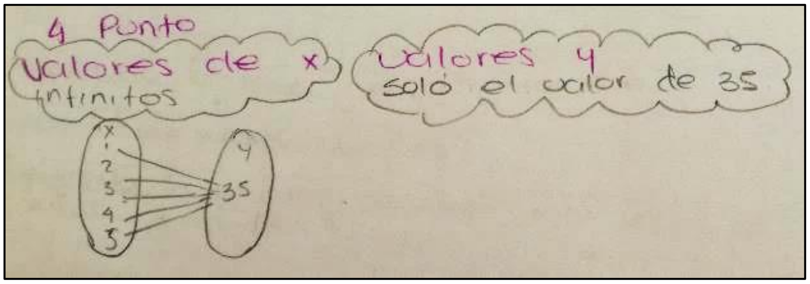
El patrón de construcción en la secuencia que propone E6, tiene en cuenta únicamente las centésimas del valor correspondiente a la medida. Sin embargo, al no tener éxito en la búsqueda del patrón, los estudiantes piden apoyo a la profesora-investigadora. Razón por la cual se explica que estos valores se pueden aproximar a 35, ya que no es posible hacer uso de una representación exacta para tal situación. Esto es, en las siguientes horas, la cantidad de cloruro de sodio será aproximadamente la misma: 35 gramos por litro. Algunas afirmaciones de los estudiantes después de la intervención son las siguientes:

E4 y E24:	La cantidad de cloruro de sodio no variara según la tabla, no importa el tiempo que pase.
E4 y E24:	Los datos no variarán en las próximas horas, se mantendrán constantes.
E19 y E22:	Aproximadamente, el comportamiento será igual que al de las dos horas.
E27 y E28:	Son datos que al parecer no varían mucho, una mínima cantidad tanto aumentando como disminuyendo.
E16 y E32:	Una hora después seguirá midiendo 35 porque es horizontal, dos horas más tarde seguirá igual.
E16 y E32:	Seguirá igual que las horas anteriores.

Las conclusiones dadas por los estudiantes muestran que han asociado la gráfica resultante con la gráfica de una función constante. En apariencia, logran relacionar las representaciones: gráfica y tabular. Sin embargo, cuando se cuestiona sobre los valores que puede tomar x e y, dejan de lado el contexto del problema, los estudiantes responden teniendo en cuenta únicamente que la gráfica es una función constante y afirman que x puede tomar infinitos valores (Figura 31).

Figura 31

Respuesta de los estudiantes E2 y E3 cuando se cuestiona el dominio y rango de la función constante que modela la situación de la boya oceanográfica



Después de identificar la gráfica como una función constante, los estudiantes afirman que la expresión algebraica la cual modela la situación es $y = 0x + 35$. Dos de las justificaciones dadas son:

E4 y E24: $y = mx + b$ donde m es la pendiente 0 ya que no tiene inclinación y b es el corte con el eje y.

E2 y E3: $y = 0x + 35$ porque su corte con y es 35, su pendiente es cero porque es horizontal y x es la incógnita porque puede tomar infinitos valores.

En efecto, los estudiantes afirman que esta relación es función porque cada elemento del dominio tiene una sola imagen; incluso dicha imagen es única.

A pesar de que es la primera Tarea de la implementación de enseñanza, se puede observar que hay más claridad en las respuestas de los estudiantes en cuanto a la función en comparación con el diagnóstico; particularmente, sobre la función constate. Esto se debe posiblemente a que posterior a la prueba diagnóstica se realiza una breve retroalimentación.

Después del trabajo realizado con lápiz y papel, el trabajo posterior en GeoGebra fue bastante sencillo para los estudiantes. Estructuraron respuestas concisas y correctas, exceptuando lo relacionado con el dominio de la función. Los estudiantes afirman de nuevo que toma infinitos valores, sin tener en cuenta que en el contexto del problema los valores negativos no tienen sentido.

Por último, la tarea extra-clase consiste en proponer una situación matemática que se pueda modelar a través de una función constante y, plantear tres preguntas a los compañeros a partir de dicha situación. En este caso se destaca la propuesta de dos de los estudiantes.

Propuesta 1. E2: Un PH-metro gigante en un acueducto mide el PH del agua cada día para saber si el agua está contaminada o no, en la siguiente tabla se ven los reportes que se dan a diario.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	x
PH	7,02	7,01	7,03	7	7,01	7,03	7,04	7,01	y

¿Cuál sería la ecuación de esta tabla? ¿Qué valores puede tomar y? Grafique esta función.

Propuesta 2. E20: Ponen a hacerle mantenimiento a una piscina. Le sacan el agua, y la ponen a llenarse constantemente, la llave está a media potencia, y la piscina tiene un hondo aproximado de 1 metro. Crear una gráfica que represente la situación. ¿Cuánto tiempo se demorará en llenarse totalmente la piscina?

Se puede observar que algunos estudiantes como E2, optan por plantear un problema similar al trabajado en clase. Otros, como el estudiante E20, plantean situaciones en donde lo que es constante es la velocidad del fenómeno.

Con base en el análisis realizado de esta Tarea, es posible afirmar que los estudiantes han logrado aplicar Acciones sobre una función constante. Esto es, ahora pueden realizar Acciones independientemente del registro en que se plantee el problema. Por ejemplo, para encontrar la imagen de una función, ya no se valen únicamente de la expresión algebraica para reemplazar y calcular, sino que construyen una gráfica de la función y deducen cuál es su imagen, o por el simple hecho de ser una función constante, ya advierten que todas sus imágenes son iguales. Otro ejemplo de una concepción Acción respecto a la función constante, es que los estudiantes no se limitan a los elementos finitos ofrecidos en una tabla de valores para responder interrogantes, sino que dicha tabla es asociada con su respectiva gráfica y/o expresión algebraica para dar respuesta a las preguntas planteadas. En caso de que el registro en el que se platee el problema no ofrezca la información suficiente, al menos, la información suficiente para los estudiantes, ellos hacen uso de cualquier otro registro para responder el interrogante; ahora pueden transitar entre los registros de representación de una función constante. En términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica esto se define como conversión.

Lo anterior no implica que los estudiantes tengan una concepción Acción de las funciones en general. De hecho, cuando se cuestiona por el dominio y rango de una función constante, que son conceptos fundamentales para la construcción de la estructura Proceso, los estudiantes tienen claro que el dominio de una función constante son los números reales y su recorrido es el corte con y (o como se haya definido la variable dependiente), pero no logran restringir dicho dominio para un contexto, tal como el planteado para esta Tarea. Los estudiantes siguen afirmando que el dominio son todos los números reales.

Lo dicho hasta aquí, indica que el objetivo de esta tarea: promover el estudio del concepto de función constante en diferentes registros de representación y fomentar en los estudiantes la construcción de Acciones mentales, es alcanzado.

5.3.3 Tarifa de parqueo

El objetivo de esta Tarea es promover el estudio del concepto de función parte entera en diferentes registros de representación y fomentar en los estudiantes la construcción de Acciones mentales.

Para empezar, se concede a los estudiantes un tiempo para analizar la situación e intentar responder los interrogantes que se plantean, sin ningún tipo de ayuda; posteriormente, en caso de ser necesario se realiza una socialización.

La situación es la siguiente:

Un parqueadero de Bucaramanga presta sus servicios las 24 horas del día, los 7 días a la semana. Este servicio tiene una tarifa para carros de $3000 por hora o fracción de hora. Además, ofrece un servicio de pago mensual por un valor de $120000.

Vehículo	Precio hora	Mensualidad
Carros	$3000	$120000
Motos	$1200	$51000

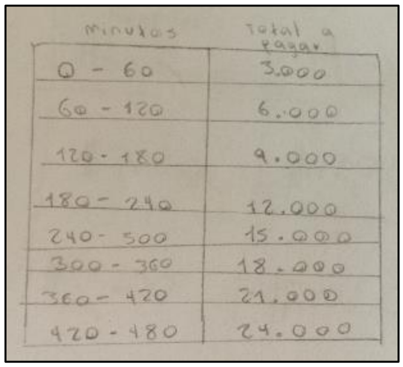
.

Con base en la información presentada en la tabla de la tarifa de parqueo mostrada en la Tarea 2 se cuestiona a los estudiantes sobre el valor que deben pagar los usuarios del parqueadero cuando ha transcurrido un tiempo determinado. Por ejemplo: media hora, 45 minutos, incluso intervalos de tiempo, en donde el carro ingresa a las 6:45 a.m. y sale a las 5:10 p.m. Frente a este tipo de Tareas los estudiantes responden sin dificultad, basándose en la información presentada.

Además, los estudiantes logran construir una tabla de valores relacionando el tiempo que permanece el carro en el parqueadero y el valor que el usuario debe pagar (Figura 32).

Figura 32

Tabla construida por los estudiantes E5 y E33 en la situación de tarifa de parqueo



Minutos	Total a pagar
0 - 60	3.000
60 - 120	6.000
120 - 180	9.000
180 - 240	12.000
240 - 500	15.000
300 - 360	18.000
360 - 420	21.000
420 - 480	24.000

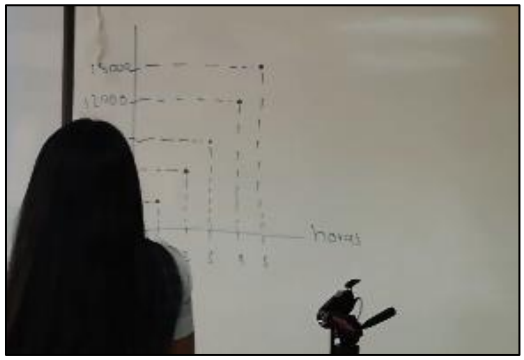
El trabajo que se ha realizado hasta este momento muestra que los estudiantes no evidencian dificultades en el tránsito del registro verbal al registro tabular. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando deben transitar del registro tabular al registro gráfico y de este último al registro algebraico. Inicialmente se esperaba esta dificultad ya que los estudiantes no estaban familiarizados con la función parte entera. Cuando se les pregunta: ¿cómo se vería la gráfica de los datos dados en la tabla que construyeron? se generan algunas dudas. Así que en este momento se realiza una intervención, que corresponde al primer episodio seleccionado en esta Tarea.

Episodio 1: Los estudiantes proponen una gráfica lineal para modelar la situación.

El estudiante E14 pasa al tablero de manera voluntaria y ubica cinco puntos en el plano cartesiano; todos los elementos de entrada (abscisa) son números enteros (Figura 33).

Figura 33

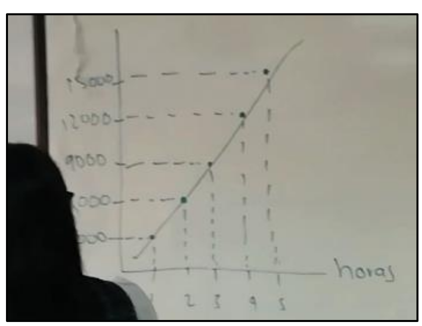
Gráfica construida por el estudiante E14 en la situación de tarifa de parqueo



En este caso se pregunta a E14 si la gráfica que realiza en el tablero (Figura 33) corresponde a la información dada en la tabla, a lo que los estudiantes contestan en coro: “hace falta la línea”, haciendo referencia a la recta que une los puntos. Después de trazar dicha recta, la investigadora pregunta a los estudiantes la razón por la cual deciden unir los puntos. A lo que el estudiante E27 afirma: “es porque va aumentando, o sea porque cuando aumenta la hora, aumenta también el precio. ¡No!, es porque los datos aumentan al mismo tiempo. Es decir que la gráfica es creciente”.

Figura 34

Recta agregada a la gráfica construida por el estudiante E14 en la situación de tarifa de parqueo



En vista de que hay un consenso por parte de los estudiantes en que la gráfica que modela la situación es lineal, se cree conveniente realizar una nueva pregunta:

Inv: Según esta gráfica [la que aparece en la Figura 34], si pasa 1h 30min, ¿cuánto se debe pagar de parqueo?

E[‡]: 6000 ¡Ah, no! 4500.

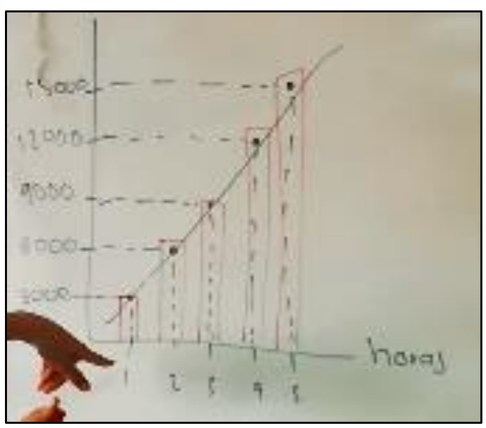
A partir del planteamiento expuesto se da lugar al segundo episodio.

Episodio 2: Los estudiantes corrigen la gráfica lineal propuesta inicialmente.

E27 intenta corregir la gráfica hecha por E14, agregando barras que encierran los puntos iniciales (Figura 35).

Figura 35

Gráfica construida por el estudiante E27 en la situación de tarifa de parqueo

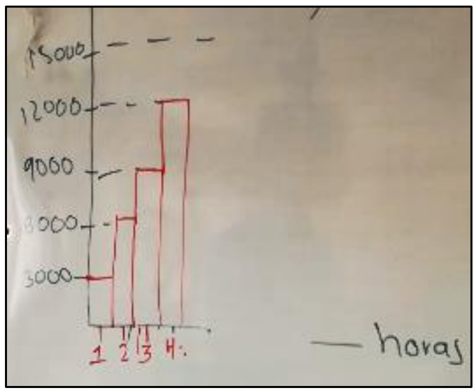


[‡] En adelante, la letra "E" hace referencia a una respuesta en coro por parte de los estudiantes del grupo y/o de un estudiante no identificado.

El estudiante E27 intenta justificar la gráfica que construye asignando valores particulares a la variable tiempo; se queda un momento en silencio y dice: "las barras serían pegadas". Corrige nuevamente la gráfica y el resultado es el que se muestra en la Figura 36.

Figura 36.

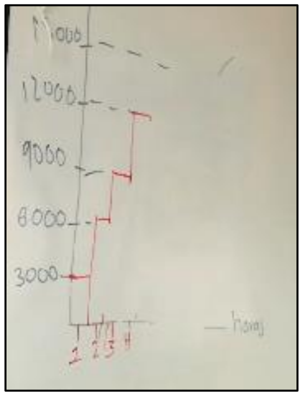
Gráfica modificada por el estudiante E27 en la situación de tarifa de parqueo



Algunos estudiantes están de acuerdo y otros se quedan con la recta propuesta inicialmente. El estudiante E26 interviene, y asegura que la gráfica que modela la situación es la gráfica de la Figura 36 porque: "avanza una hora [recorriendo con su índice la superficie de la primera barra] y sube" y continúa haciendo una escalera con su índice. Sin embargo, el estudiante E30 toma parte en la construcción de la gráfica y borra algunas líneas verticales; por tanto, la gráfica resultante es la que aparece en la Figura 37.

Figura 37

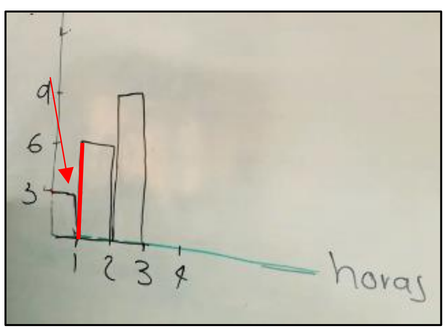
Gráfica modificada por el estudiante E30 en la situación de tarifa de parqueo



Nuevamente se corrige la gráfica. En esta oportunidad el estudiante E2 es quien tiene la palabra. Se devuelve al gráfico de las barras, pero deja un espacio muy pequeño entre ellas (Figura 38) Esto da paso al siguiente diálogo:

Figura 38

Gráfica modificada nuevamente por el estudiante E2 en la situación de tarifa de parqueo



E2: Si es una hora, vale 3000; si es un minuto ya se le cobraría la segunda que valdría 6000. Aquí [señalando el espacio] hay un minuto de más, ahí hay 61 minutos, entonces ya se le cobra la segunda hora y valdría 6000, y así sucesivamente […]

Inv: Entonces si pasa 1h 1min ¿qué valor le da a la función?

E2: 6000.

Inv: ¿Podría mostrarme dónde está 1h 1min?

E2: Aquí [señalando el comienzo de la segunda barra].

Inv: O sea, ¿toda esa línea vertical?

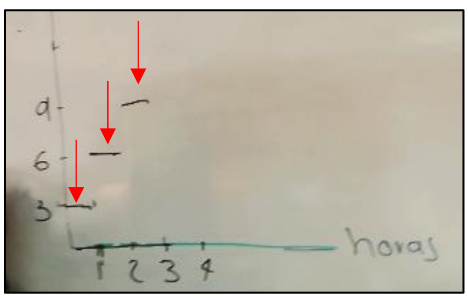
E2: Sí.

Inv: ¿Y ahí no hay muchas imágenes? ¿1h 1min no sería, por ejemplo, 4000? ¿5000? ¿6000?

El estudiante E2 se queda en silencio, pero E16 interviene inmediatamente afirmando: "la idea es que yo tengo que borrar esto y solo dejar la línea [haciendo referencia a la superficie de la barra]". En la Figura 39 se puede ver el resultado.

Figura 39

Gráfica construida finalmente en la situación de tarifa de parqueo



Después de obtener esta gráfica, el estudiante E2 vuelve a tomar la palabra, y para justificar su planteamiento menciona:

E2: Si usted tiene esto [señalando 1h], ya no tendría digamos, ya no se vería que tiene la imagen de 4000, ya no se le puede dar precio aquí [señalando el intervalo entre 3000 y 6000] porque solamente está señalando el 6, o sea, solamente está en 6000.

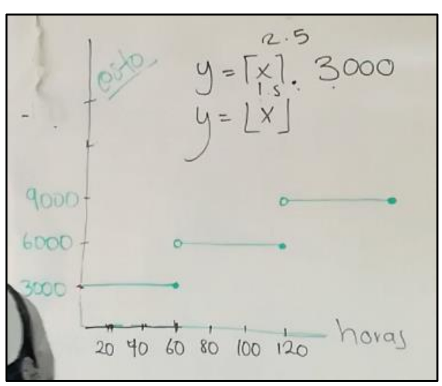
Con este argumento logra convencer a todos los estudiantes.

Finalizada la discusión de este episodio. Se muestra a los estudiantes los símbolos $\lfloor \quad \rfloor$ y $\lceil \quad \rceil$ que representan la función entero menor y entero mayor, respectivamente, y se explica la diferencia en el uso de ambos símbolos. Después de esto, se considera que los estudiantes pueden construir la expresión algebraica que modela la situación de la Tarea. A continuación, se muestra el análisis realizado por el estudiante E2, en la construcción de su función $y = \lceil x \rceil \cdot 3000$.

E2: Encontré que esto se mantenía constante los primeros 60 minutos, luego si pasaba a 61 ya se salteaba al otro que era 6000; o sea los 120 y así sucesivamente se mantenía constante los 60 minutos. Entonces esto nos dio una función parte entera. Entonces esto [señalando la función entero mayor] nos aproxima al siguiente y pues esto [señalando la función entero menor] nos aproxima al menor. Entonces pues nosotros hallamos esta [función entero mayor, multiplicada por 3000] porque si usted reemplaza la x por esto [señalando 3000] le va a dar esto [señalando cualquier imagen en la gráfica]. Digamos si reemplaza por 1 le va a dar, si la reemplaza por 1.5 esto se lo aproxima a 2 y 2 por 3000 le da esto y así sucesivamente (Figura 40).

Figura 40

Gráfica ordenada por el estudiante E2 para explicar la representación algebraica $y = \lceil x \rceil \cdot 3000$ que modela la situación de tarifa de parqueo



Los estudiantes construyen la gráfica y la expresión algebraica que modela la situación de tarifa de parqueo, reflexionando sobre los elementos involucrados. La reflexión sobre los datos de la tabla representados en el plano cartesiano permite que los estudiantes analicen el sentido de dichos pares ordenados. Analizan la información presentada en dos representaciones (tabular y verbal) para construir nuevas representaciones (gráfica y algebraica), sin importar si la función que están estudiando es o no familiar.

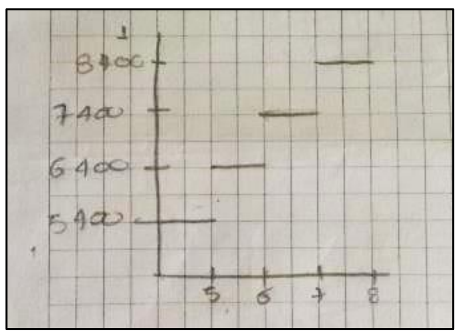
En cuanto al trabajo realizado en GeoGebra, se puede evidenciar avance significativo por parte de los estudiantes. Pueden determinar el significado de los puntos T y C, que en este caso son el tiempo en minutos que permanece el auto en el parqueadero y, el costo que debe pagar una persona según el tiempo que utiliza el parqueadero, respectivamente. Además, los estudiantes logran determinar que el punto C (costo de parqueo) no puede ubicarse ni en 4000, ni en ningún otro valor que no sea múltiplo de 3000. Sin embargo, siguen evidenciando gran dificultad, para determinar el dominio de una función. Para este problema, los estudiantes afirman que T (tiempo de parqueo) puede tomar infinitos valores. Sin embargo, según el análisis a priori, se esperaba que lograran reconocer que los valores que puede tomar T son los números reales que pertenecen al intervalo $[1, 43200)$, ya que transcurrido un mes ya no se pagaría por horas, sino por meses. Además, los valores negativos no tendrían sentido en el problema.

El hecho de que los estudiantes no logren determinar el dominio de una función es un gran obstáculo para que desarrollen estructuras mentales más avanzadas, en este caso, Procesos. Pues esto daría evidencia que, aunque reflexionen sobre sus Acciones, aún no ven que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada, para generar un conjunto de salida.

Finalmente, en la Tarea extra-clase los estudiantes deben modelar a través de cualquiera de sus representaciones, el valor de la tarifa del taxi que depende de los kilómetros recorridos. Para este recorrido, se paga por los primeros cinco kilómetros $5400 y por cada kilómetro adicional a los cinco primeros kilómetros o fracción de kilómetro, se aumentan $1000. Además, los estudiantes deben escribir cinco preguntas, que les permitan obtener más información sobre la situación. La mayoría de los estudiantes opta por la representación gráfica. En la Figura 41 se puede ver la gráfica construida por el estudiante E2.

Figura 41

Representación gráfica construida por el estudiante E2 en la Tarea extra-clase de la Tarea 2



Solo E9 y E10 además de representar la situación en el registro gráfico, lo hacen en el registro tabular. Algunos estudiantes hacen el intento de escribir la representación algebraica del problema, pero no tienen éxito. A continuación, aparecen ejemplos de los registros dados por los estudiantes:

E18: $y = \lceil x \rceil \cdot 1400$

E11 y E27: $y = 5400 + 1000x.$

Como resultado de la segunda Tarea, Tarifa de parqueo, se puede afirmar que los procedimientos observados, corroboran que los estudiantes realizan Acciones mentales, sobre la función parte entera. Cabe resaltar que las concepciones desarrolladas no son respecto a un tipo de función. La idea de introducir Tareas en las que se trabajan diferentes funciones es aumentar su experiencia. Esto hace que tengan un panorama más amplio de las funciones y empiecen a conjeturar acerca de lo que es una función. Aunque los estudiantes no tenían idea de cómo representar una función parte entera, lograron construir entre todos una relación gráfica que modela su comportamiento. Así que después de introducir su notación, fue bastante sencillo para ellos construirla y realizar la Acción de reemplazar en la expresión algebraica y calcular. Hecho que es necesario para que los estudiantes puedan transitar en los cuatro registros que se promueven y, por ende, desarrollar cualquier estructura mental.

En esta Tarea a diferencia de la primera, cuando se cuestiona por el dominio y rango de la función, los estudiantes evidencian avances, ya que sus respuestas esta vez están sujetas al contexto del problema y no en el dominio y rango de la función parte entera en general.

5.3.4 Vaso de agua

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de esta Tarea es fomentar en los estudiantes la construcción de Procesos mentales, esta Tarea se inicia con dos interrogantes que buscan que el estudiante reflexione sobre fenómenos que involucran razonamiento covariacional. Esto es fundamental en el desarrollo de Procesos: ¿Ha notado que al llenar algunas botellas el agua se riega repentinamente de la parte superior? ¿Por qué sucede esto?

Como se había previsto en el análisis a priori, los estudiantes notan naturalmente que el agua se riega repentinamente, porque algunas botellas tienen más estrecha la parte superior.

E6: En algunas botellas se llena más rápido ya que al llegar a la punta más angosta se llena con más velocidad.

E23 y E28: Porque la botella tiene menos espacio entonces se llena más rápido en menos tiempo.

E5 y E33: La botella de agua se riega porque la boquilla de ella es muy angosta y el agua simplemente sale por allí.

Posterior a estas dos preguntas, se plantea el siguiente problema:

Imagine que el vaso que se muestra en la figura se está llenando de agua a un ritmo constante.

a. ¿Qué magnitudes cambian a medida que el vaso se va llenando?
b. ¿Qué magnitud o magnitudes determinan la altura del agua en el vaso?
c. ¿La altura del agua en el vaso aumenta a un ritmo creciente o decreciente?
d. Realice un gráfico de la altura del agua en función de la cantidad (volumen) de agua que hay en el vaso.

En esta situación sucede lo contrario que cuando se llena una botella y el agua se riega repentinamente de la parte superior. En este caso el recipiente, específicamente el vaso, tiene la parte superior más ancha. Por lo tanto, la velocidad a la que se llena este es cada vez menor. En otras palabras, la altura del agua en el vaso aumenta a un ritmo decreciente. En un principio, los estudiantes manifiestan en coro lo contrario, es decir, que la altura del agua aumenta a un ritmo creciente. Al pedir una justificación para tal afirmación, surge el primer episodio.

Episodio 1: Los estudiantes manifiestan que la altura del agua en el vaso aumenta a un ritmo creciente.

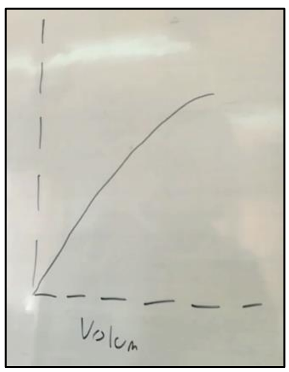
El argumento de uno de los estudiantes para tal afirmación es el siguiente:

E2: Porque si usted le está echando agua al vaso, no está disminuyendo el agua sino la está aumentando para que se llene el vaso. Está creciendo.

Para aclarar la situación, se pide a los estudiantes el gráfico que se obtiene a partir de dicha afirmación. En la Figura 42 se observa la gráfica construida por el estudiante E3.

Figura 42

Gráfica altura vs volumen construida por el estudiante E3 en la situación del vaso de agua



En cuanto se cuestiona la razón de la construcción realizada, el estudiante manifiesta:

E3: Pues porque a medida que va aumentando el volumen, la altura también va aumentando.

E6: ¿Pero el de abajo no tiene que ser el tiempo?

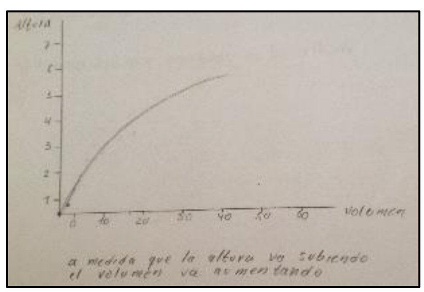
Inv: ¿Qué gráfica están pidiendo?

E3: Una que relacione volumen y altura.

Aunque la gráfica que dibuja E3 en el tablero es una aproximación a la gráfica que corresponde a la situación del vaso de agua, el estudiante aclara que se trata de una recta, pero su pulso no es bueno. Para E3, así como para la mayoría de sus compañeros, la altura del agua es creciente, pero la velocidad a la que crece es constante. En ese momento se cree conveniente aclarar que, aunque es cierto que la altura del agua va creciendo a medida que se vierte el agua en el vaso, la velocidad a la que crece es cada vez menor. Esto se debe a la forma del vaso, pues la parte superior de este es cada vez más ancha. Así que la representación gráfica de la función altura vs volumen, es una curva cóncava hacia abajo. En la Figura 43 se puede observar una de las gráficas construidas posteriormente a la aclaración.

Figura 43

Gráfica altura vs volumen construida por los estudiantes E12 y E13 en el problema del vaso de agua



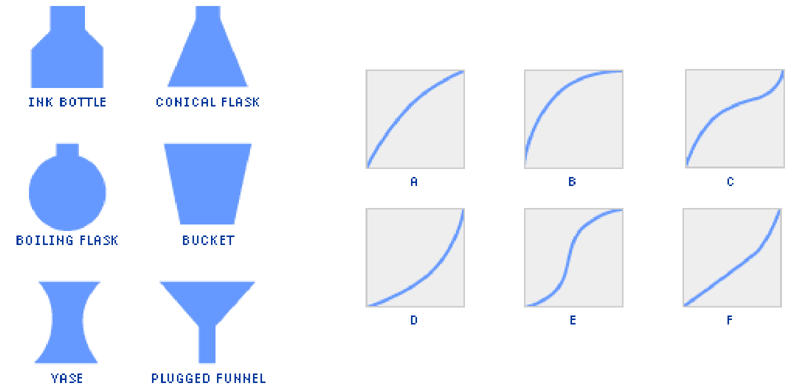
Sin embargo, en el argumento de E12 y E13 puede notarse que para estos estudiantes la variable dependiente no es la altura, sino el volumen: "a medida que la altura va subiendo el volumen va aumentando". Con esta afirmación de los estudiantes y la pregunta de E6: "¿Pero el de abajo no tiene que ser el tiempo?", es necesario identificar las magnitudes que cambian (las mismas que determinan la altura del agua) a medida que el vaso se va llenando. Estas magnitudes, como se dijo antes, son: tiempo, radio, altura y volumen.

En un principio, los estudiantes presentan confusión porque no están familiarizados con este término, pero se hizo la aclaración de que el término magnitud es sinónimo de medida, o bien, es una cantidad que se puede medir. Se recuerda, que con este tipo de preguntas se fortalecen las habilidades de razonamiento covariacional, que es el objetivo de esta Tarea. Así mismo, se recuerda que dichas habilidades permiten desarrollar Procesos mentales, pues el estudiante debe pensar en una función de manera dinámica; algo en donde lo que sucede, no sucede con un único elemento sino con todos los elementos a la vez.

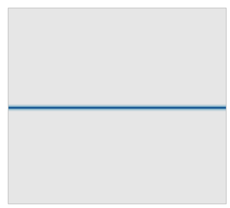
Con el trabajo en GeoGebra se ratificó el análisis realizado. Esto es, se confirmó que las magnitudes que cambian son: tiempo, radio, altura y volumen del agua, y que la gráfica altura vs volumen que modela la situación del vaso de agua es una curva cóncava hacia abajo. Además, con la ayuda del software se determinaron los intervalos de cada una de las magnitudes, lo cual no fue posible con lápiz y papel teniendo en cuenta la experiencia de los estudiantes. Con respecto a por qué la curva es continua y no por tramos, la mayoría de los estudiantes concuerda en que esto se debe a que el vaso se está llenando a un ritmo constante.

Por último, en la Tarea extra-clase se debe relacionar una botella de agua que se llena a un ritmo constante con la gráfica altura vs volumen que modele dicho llenado; después se debe dibujar una botella que describa una relación constante; y luego los estudiantes deben inventar una botella y realizar su respectiva gráfica altura vs volumen. El problema es el siguiente:

1. Imagine llenar cada una de las seis botellas a continuación, vertiendo agua a un ritmo constante. Para cada botella, elija el gráfico correcto, relacionando la altura del agua con el volumen de agua que se ha vertido.



2. Dibuje una botella que describa la relación de la altura del agua con el volumen de agua que se vierte, a partir del gráfico que se muestra a continuación:

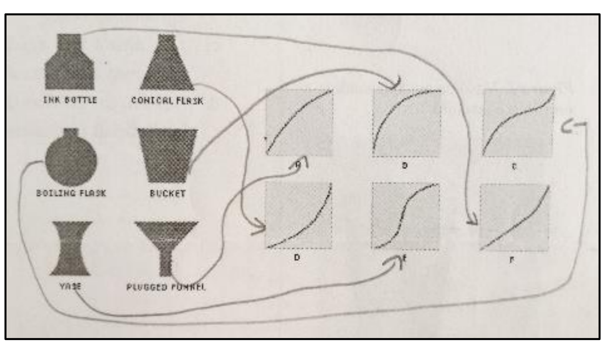


3. Proponga y dibuje otro tipo de botella que pueda llenar, y realice el gráfico de la altura del agua en función de la cantidad (volumen) de agua que hay en la botella.

En la Figura 44 se muestra la asociación que realiza el estudiante E29.

Figura 44

Botellas con sus gráficas correspondientes (altura vs volumen), asociadas por el estudiante E29



Aunque no todos los estudiantes asocian correctamente las botellas con su gráfica, se pudo observar que este tipo de problemas es un buen inicio para que empiecen a pensar en la función como algo dinámico. Se puede apreciar no solo que, dada una cantidad original, siempre se produce la misma cantidad transformada (indicador esencial para evidenciar una concepción Proceso), sino que hay más de dos variables cambiando al mismo tiempo.

En la segunda parte de la tarea extra-clase, cuando se pide graficar un recipiente que modele la función constante altura vs volumen, se presenta un segundo episodio.

Episodio 2: E1 y E3 aseguran que debe realizarse un hoyo al vaso de agua por encima del nivel del agua para que la situación pueda modelarse mediante una función constante.

Cuando se empieza a socializar este problema se genera cierto malestar, principalmente en dos estudiantes: E1 y E3, quienes manifiestan que no es posible que se vierta agua constantemente en un recipiente y su altura permanezca constante. Así que se debe realizar un agujero en dicho recipiente sobre el nivel del agua para que a medida que se vierta el líquido, salga inmediatamente la misma cantidad. De esta forma, la altura del agua no va a cambiar (Figura 45). A continuación, se transcribe la explicación.

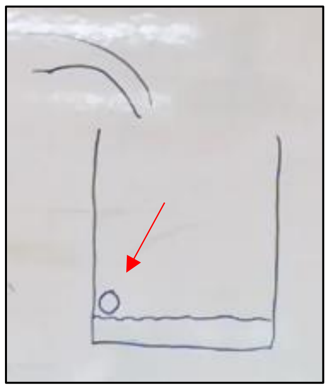
E1:	Para que siempre se mantenga el nivel del agua normal y el flujo del agua sea constante, entonces se hace que tenga un hoyo por encima del nivel del agua (ver Figura 45) y a medida que entra el agua, el agua se va a volver a salir y el nivel del agua nunca va a aumentar.
E3:	O sea, lo que quiere decir es que tenemos un vaso ya con agua adentro y hay un hueco por encima, entonces cada vez que le entre agua, el agua va a salir entonces en este nivel no se va a mover. Eso fue lo que se pensó, porque pues la verdad esta gráfica [señalando la gráfica constante dada en la tarea] nunca parte de cero.
E1:	O sea es como si no se llenara el vaso.

E3: Entonces ya el vaso tendría que tener agua para que no partiera desde cero. Pensamos eso, al haber hueco, cada vez entra y sale de una vez entonces se mantiene constante, y no varía la altura.

E1: Pero sigue cayendo el agua.

Figura 45

Dibujo de los estudiantes E1 y E3 de una botella que se llena a un ritmo constante y la gráfica en el plano cartesiano altura vs volumen es constante



Estos argumentos muestran que los estudiantes de alguna manera ya no se conforman con la información y las herramientas que les proporciona el profesor, sino que empiezan a reflexionar y ser más conscientes de las Acciones que realizan. Se enfocan en el problema como tal y no en recordar situaciones similares o elementos matemáticos que les ayuden a resolver dicho problema.

Como resultado de la tercera Tarea, Vaso de agua, se puede afirmar que los procedimientos observados, precisan que los estudiantes si bien no han construido como tal un Proceso de función, sí han logrado reflexionar sobre las Acciones que realizan. Quizá no al punto de haber construido un Proceso, pero tampoco al punto de conservar las estructuras iniciales. Las estructuras han ido evolucionando y ahora, por ejemplo, los estudiantes logran identificar variables dependientes e independientes y determinar el dominio y rango de una función continua a partir de una gráfica en el plano cartesiano. Estos hechos no se evidencian en la prueba diagnóstica y se destacan como dificultad en la primera Tarea.

Con las Tareas anteriores, se observa que los estudiantes logran aplicar Acciones sobre las funciones: constante y parte entera. Sin embargo, en este problema, no cuentan con una expresión algebraica que modele la situación para que puedan realizar algunos procedimientos habituales. En esta tarea, solo trabajan con las representaciones verbal, tabular y gráfica que les facilita el software. Lo que confirma la evolución de la estructura Acción.

Es un hecho que los estudiantes no han alcanzado y no van a alcanzar únicamente con tres Tareas una concepción Proceso del concepto de función. No obstante, este tipo de Tareas donde se promueve el razonamiento covariacional contribuyen significativamente a esta construcción. Este es justamente el objetivo principal de la Tarea: fomentar en los estudiantes la construcción de Procesos mentales.

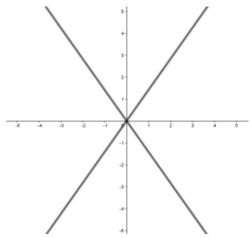
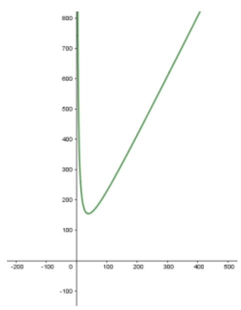
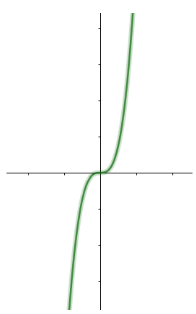
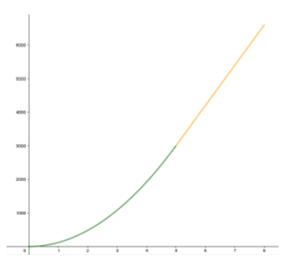
5.3.5 Qué es y qué no es función

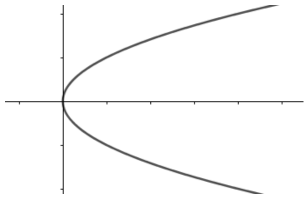
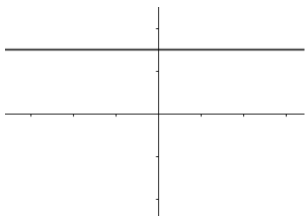
Los objetivos de esta última Tarea son: promover el estudio de las diferentes representaciones de una función y fomentar en los estudiantes la construcción de un Objeto inicial de función. Para alcanzar el primero de estos objetivos y como se mencionó en el análisis a priori, se pide a los estudiantes responder preguntas que le permitan transitar entre los registros algebraico, gráfico y verbal (posiblemente requieran del registro tabular). Sin embargo, por cuestiones de tiempo los estudiantes solo lograron trabajar en la primera parte de la Tarea, razón por la cual los problemas que no se respondieron se dejan para la entrevista.

Se entrega al estudiante una tabla con dos columnas; la primera columna muestra la representación gráfica de una relación y la segunda, muestra una ecuación (Figura 46).

Figura 46

Tabla presentada en la Tarea 4

Representación	Ecuación
G. 	$F(x) = 2x + \frac{3000}{x}, \;\; x > 0$
H. 	$F(x)^2 = 2x^2, \;\; x \in \mathbb{R}$
I. 	$F(x) = \begin{cases} 120x^2, & 0 \leq x < 5 \\ 3000 + 1200(x-5), & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$
J. 	$F(x) = 6x^3$

K. 	$(F(x))^2 = x, \quad x \in \mathbb{R}$
L. 	$F(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}$

Los estudiantes deben asociar cada representación gráfica de la primera columna, con una de las ecuaciones de la segunda columna.

Como en todas las sesiones, inicialmente se otorga un tiempo prudente para que los estudiantes puedan realizar sus análisis y posteriormente compartirlos. De igual forma, puedan compartir sus inquietudes.

Dicho lo anterior, se procede con la descripción de un episodio de la implementación de la Tarea, que corresponde a las formas de resolución de esta.

Episodio 1: Los estudiantes asocian las gráficas de la primera columna con la expresión algebraica de la segunda columna.

En principio, los estudiantes se dirigen al software GeoGebra para graficar cada una de las ecuaciones de la columna dos y poder asociarla con una gráfica de la columna uno. Sin embargo, se hace la observación de que antes de efectuar esa actividad, es conveniente que lleven a cabo otro plan. Pasado un tiempo prudente, se cuestiona a los estudiantes la forma en que asocian las gráficas con las ecuaciones y esto es lo que responden:

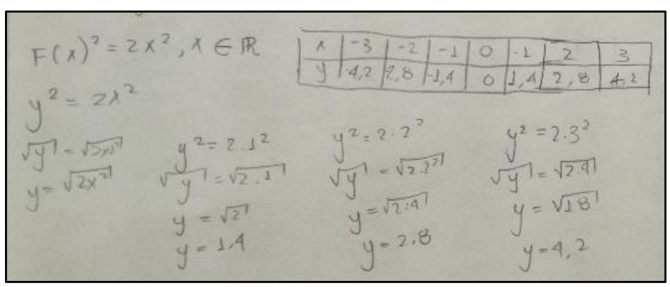
Inv: ¿Qué hicieron para asociar las gráficas?

E: Pues para hallar las gráficas se da valores a x y así saber y y realizarlo en el plano.

Como se había predicho en el análisis a priori y lo evidencia un grupo de estudiantes, el registro tabular emerge para responder al problema planteado. Algunos estudiantes parten de la expresión algebraica, construyen una tabla, y a partir de dicha tabla hacen un bosquejo con los pares ordenados. Esto se suponía, teniendo en cuenta que es el procedimiento que usualmente realizan en la escuela. En la Figura 47 se puede observar una tabla que realizan los estudiantes E1 y E2 para la ecuación $F(x)^2 = 2x^2$.

Figura 47

Tabla construida por los estudiantes E1 y E2



Otro argumento dado por los mismos estudiantes E1 y E2 para relacionar la función definida por partes es la siguiente:

E1 y E2: Ya que la gráfica corresponde a una función por partes, y en la ecuación hay dos ecuaciones, por lo que corresponde a cada intervalo es diferente cada uno. Por lo que la gráfica cada intervalo por consiguiente será diferente y por partes.

Estudiantes como E4, E8 y E20 relacionaron dos columnas de la siguiente manera:

Inv: ¿Cuál asociaron?

E8: Esta [señalando la función $f(x) = 6x^3$]

Inv: ¿Con quién?

E8: Con la C

Inv: ¿Por qué?

E8: Pues… [se queda pensando unos segundos] porque pasa por cero. Primero empieza, para en cero, hace una pequeña curva y vuelve a subir.

Inv: Pero ¿cómo supieron que era $f(x) = 6x^3$? Es decir, ¿por qué asociaron ese gráfico con la ecuación?

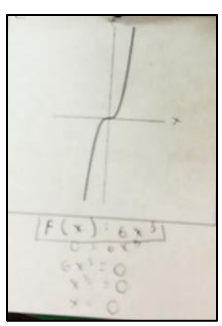
E4: Pues es que al solucionarla [señalando la expresión algébrica] la x nos dio cero (Figura 48). Y pues esta gráfica pasa por el cero. Por eso la asociamos.

Inv: ¿Y esta por ejemplo? [señalando la primera gráfica de la Tarea] ¿Esta no pasa por cero?

E8: Pero es que esta no tiene la curva hacia arriba […] ¿Si está bien?

Figura 48

Justificación de los estudiantes E4, E8 y E20 para asociar una de las gráficas de la primera columna, con la expresión algebraica $f(x) = 6x^3$ de la segunda columna



El argumento que usan E4, E8 y E20 no es suficiente para determinar si la expresión algebraica corresponde a la gráfica. Es evidente que a los estudiantes aún les cuesta transitar en los diferentes registros si no cuentan con estímulos externos. El hecho de no poder usar un software de geometría dinámica para obtener una gráfica de cada ecuación genera dificultades a los estudiantes. En esta Tarea, aunque se buscaba promover el estudio de las diferentes representaciones de una misma función, los ejemplos ofrecidos no permitieron alcanzar dicho objetivo.

Descrita la componente de diseño e implementación de enseñanza, se procede a describir la siguiente componente del ciclo de investigación basado en APOE: recolección y análisis de datos. Se recuerda que esta componente es fundamental para cualquier investigación basada en APOE, ya que permite obtener evidencia empírica para que la descomposición genética no sea solo una hipótesis.

6. Recolección y Análisis de datos

En este capítulo se realiza un análisis de la prueba pos-instrucción y la entrevista semiestructurada; se describen los episodios identificados en la actividad matemática de estos dos instrumentos de recolección de datos, en los cuales los estudiantes evidencian el desarrollo de estructuras mentales.

6.1 Generalidades

La prueba pos-instrucción y la entrevista semiestructurada fueron los principales instrumentos de recolección de datos. Se considera que estas dos herramientas proporcionan la información necesaria para responder a los interrogantes planteados en el ciclo de investigación:

"¿Los estudiantes evidencian las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien construyeron los estudiantes el concepto en cuestión?" (Arnon et al., 2014, p. 94). Además, proporciona la información necesaria para responder al objetivo de investigación: Caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de secundaria, al resolver Tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre diferentes representaciones del concepto de función. Ambos instrumentos se diseñaron de tal manera que se va aumentando el nivel de complejidad.

Al igual que las Tareas de la implementación de enseñanza, estos dos instrumentos se entregan en físico acompañado de una hoja en blanco para el registro de los procedimientos realizados por los estudiantes. La prueba pos-instrucción se desarrolla en parejas y la entrevista semiestructurada se realiza de manera individual a cuatro estudiantes; la entrevista es grabada en formato de audio y video.

El análisis de los dos instrumentos se enfoca en identificar en las respuestas de los estudiantes, las concepciones que evidencian sobre el concepto de función. Esto a través de su trabajo sobre problemas matemáticos que requieren de la coordinación de diferentes representaciones del concepto de función. Se busca evidenciar que los estudiantes han desarrollado una tendencia a responder de determinada forma para resolver problemas específicos. Así mismo, se precisa que no se muestra una concepción si los estudiantes no evidencian tal tendencia en su actividad matemática; por ejemplo, que un estudiante intente solo enunciar propiedades o definiciones, pero no haga uso de ellas al resolver los problemas, o que manipule los datos sin una clara intención de brindar una solución específica.

En la descomposición genética preliminar se describen algunos comportamientos esperados por parte de los estudiantes al momento de resolver problemas matemáticos que, están asociados a las concepciones Acción y Proceso del concepto de función. Teniendo en cuenta dichos comportamientos, se construyen indicadores para ambas concepciones; estas se describen a continuación con más detalle.

6.2 Herramienta para el análisis de los datos

Como herramienta de análisis se construyen indicadores de construcción del concepto de función que toman en cuenta los registros verbal, gráfico, tabular y algebraico. Estos indicadores permiten identificar cuándo un episodio en la prueba pos-instrucción o la entrevista semiestructurada evidencian alguna construcción mental desarrollada por los estudiantes. Cabe resaltar que en esta investigación las estructuras que van desarrollando los estudiantes no están condicionadas por los diferentes registros del concepto; los registros están presentes en las diferentes concepciones. Se considera que los indicadores de niveles de construcción del concepto planteados en la Tabla 9, permiten analizar la progresión de las concepciones previstas en la descomposición genética. Además, a partir de la interpretación de Roa-Fuentes y Oktaç (2012) se establece una etapa entre la estructura Acción y Proceso de la siguiente manera: Acción (A), Proceso inicial (P_i), Proceso (P).

Tabla 9

Indicadores de los niveles de construcción del concepto de función

Estructura mental	Indicadores de los niveles de construcción del concepto de función
Acción	A1. Reemplaza números en una expresión algebraica y realiza los cálculos indicados. A2. Etiqueta los ejes con indicaciones verbales (por ejemplo, y depende de x). A3. Ubica pares ordenados en el plano cartesiano. A4. Determina si una relación presentada de manera gráfica es función realizando trazos de recta verticales. A5. Enuncia una definición de función.

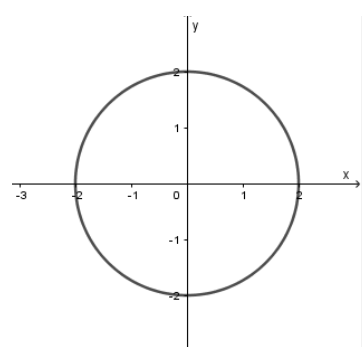
	A6. Proporciona ejemplos de relaciones que son funciones y ejemplos de relaciones que no son funciones.
Proceso inicial	P_i1. Identifica las variables dependientes e independientes en un problema. P_i2. Determina la imagen de un elemento del dominio. P_i3. Determina el dominio y rango de una función a partir de una gráfica en el plano cartesiano.
Proceso	P1. Reconoce que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada, a través de una fórmula, gráfica, tabla, diagrama, texto, etc., para generar un conjunto de salida. P2. Determina el dominio y rango de una función a partir de cualquier representación. P3. Proporciona ejemplos de relaciones que son funciones y ejemplos de relaciones que no son funciones en diferentes registros de representación.

6.3 Evidencias de una concepción Acción

En los datos que aparecen a continuación, se evidencian los indicadores de los niveles de construcción del concepto de función planteados en la Tabla 9, para la estructura Acción.

Ejemplo 1. Problema 4 prueba pos-instrucción

Observe la gráfica que aparece en el plano.



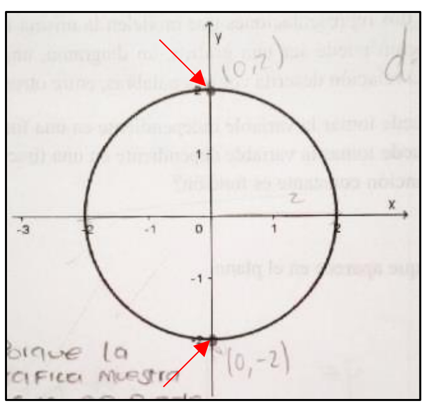
a. ¿Qué valor le corresponde a 0 según la relación que aparece en el plano?
b. Señale en el plano los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$.
c. ¿Qué valores puede tomar x?

d. ¿Qué valores puede tomar y?
e. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.
f. La relación dada gráficamente en el plano ¿es una función? ¿Por qué?

La respuesta de los estudiantes E1 y E2 a los ítems a. y b. del problema indicado, da evidencia de la aplicación de la Acción 3 (A3) establecida en la tabla de indicadores de construcción del concepto para el análisis de datos: el estudiante ubica pares ordenados en el plano cartesiano. Cuando se cuestiona por el valor que corresponde a 0 según la relación que aparece en el plano, la respuesta de E1 y E2 es que esos valores son “-2 y 2 porque eso lo representa la gráfica”. Además, cuando se les pide señalar los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$, los estudiantes ubican estos puntos de manera correcta en el plano cartesiano como se muestra en la Figura 49.

Figura 49

Puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$ ubicados por los estudiantes E1 y E2



En la respuesta dada por los estudiantes E3 y E4 al ítem f. de este mismo problema, se evidencia la aplicación de la Acción 4 (A4): determina que una gráfica es función trazando una recta vertical. Su respuesta a si esta relación es o no función se basa en trazar una recta vertical y afirmar que esta relación "no es función, porque el dominio tiene varias imágenes".

En las respuestas dadas por los estudiantes al problema 5 se evidencia que logran aplicar Acciones sobre un Objeto previamente construido.

Ejemplo 2. Problema 5 prueba pos-instrucción

Escriba con detalle lo que entiende por función. Si lo necesita puede usar ejemplos

Algunas respuestas a este problema se transcriben a continuación:

E6:	Entiendo por función que es una relación de un conjunto en el plano X y en un conjunto Y; en el cual a un valor del conjunto X le corresponde un único valor de Y.
E3 y E4:	Una función es una relación entre el dominio y codominio, los cuales tienen una sola imagen, si tuviera más de 2 o 2 dejaría de ser función.
E1 y E2:	Lo que entiendo por función es que es una relación entre el dominio y codominio lo que nos representa muchas cosas en el plano cartesiano, por ejemplo: la lineal, la afín, la parte entera, entre otras.

En las respuestas dadas al problema se observa cómo E1, E2, E3, E4 y E6 aplican la Acción 5 (A5): enunciar la definición de función. Los estudiantes parten del hecho de que una función es una relación entre dos conjuntos, y tres de ellos puntualizan que en la relación solo se puede asignar una imagen al conjunto de salida.

Aunque las definiciones enunciadas por los estudiantes no se alejan de la definición de función que se espera que estructuren desde la descomposición genética preliminar, hay evidencias suficientes que se van mostrando a lo largo de este análisis, para determinar que no se trata de un

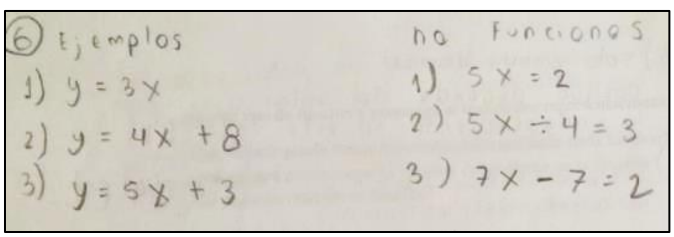
Proceso construido, sino de una Acción en la que los estudiantes “recitan” una definición, que no logran usar de manera coherente en la solución de situaciones matemáticas. Además, cuando los estudiantes reflexionan sobre las relaciones que son funciones o no son funciones se centran en escribir expresiones alfanuméricas que asocian con el trabajo realizado en el aula. Se destaca que, en esta concepción, los estudiantes no acuden de manera natural a otras formas de representación sobre la función.

Ejemplo 3. Problema 6 de la prueba pos-instrucción y problema 2 de la entrevista

Escriba tres ejemplos de relaciones que sean función y tres que no lo sean. Explique ampliamente su respuesta.

Figura 50.

Ejemplos de relaciones que son o no son funciones presentados por E3 y E4



E3 y E4: [Primera columna] Son funciones porque cada dominio tiene su imagen, para ser función necesita una variable dependiente y una independiente.

[Segunda columna] No son funciones porque tienen varias imágenes, solo tiene una variable, entonces no hay relación, no es función.

En las respuestas dadas a este problema por E3 y E4 se observa cómo los estudiantes aplican la Acción 6 (A6): proporcionar ejemplos de relaciones que son funciones y ejemplos de relaciones que no son funciones. En esta oportunidad, se puede notar que E3 y E4 al justificar el por qué sus ejemplos son funciones, procuran mencionar propiedades de esta. Por ejemplo, cuando afirman que, “una función necesita una variable dependiente y una independiente”, podría decirse que están pensando en la función como una relación entre dos conjuntos. Se refieren a estos dos conjuntos de manera indiferente como variable independiente o dominio y, variable dependiente o imagen (también llamado la mayoría de las veces codominio). Cuando los estudiantes mencionan que cada dominio tiene su imagen, aunque pareciera que para ellos fueran muchos dominios, en realidad, se refieren a que cada elemento que pertenece al dominio tiene una imagen. Aunque aquí no mencionan sobre la unicidad de esa imagen, si lo hacen para justificar lo que no es función. En sus palabras: “no son funciones porque tienen varias imágenes”. Además, al momento de justificar lo que no es función, afirman que no hay relación porque solo tiene una variable; esto comprueba que, en efecto, están estructurando una función como una relación entre dos conjuntos.

Con este problema también se puede dar evidencia de la Acción 1 (A1): reemplaza números en una expresión algebraica y calcula. Cuando se pide al estudiante E1 escribir ejemplos de funciones, uno de los ejemplos proporcionados por él, está dado en el registro algebraico. Sin embargo, E1 para proporcionar otro ejemplo en el registro tabular de esta misma función, reemplaza tres valores en la expresión algebraica proporcionada (Figura 51).

Inv: ¿Podría escribir un ejemplo de función?

E1: Hay una que es así [escribiendo $6x$ en su hoja de trabajo] pero es que se me olvida el nombre.

Inv: Eso es una recta.

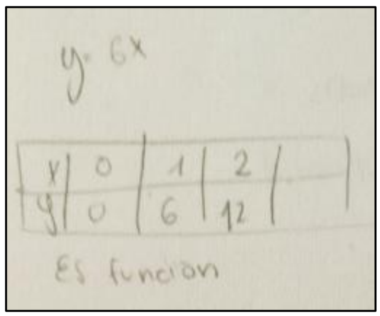
E1: No estoy segura si le falta algo. O sea, si cambiamos x, por así decirlo, cuando x valga tal, y va a valer tal. Entonces tendría cada una su propia imagen.

Inv: ¿Podría explicar mejor eso?

E1: Por ejemplo, si hacemos la tabla, cuando x valga 0, entonces $6 \times 0 = 0$, y va a valer 0; cuando x valga 1, y va a valer 6; cuando x valga 2, y va a valer 12; y así sucesivamente. Entonces cada x tiene una imagen.

Figura 51

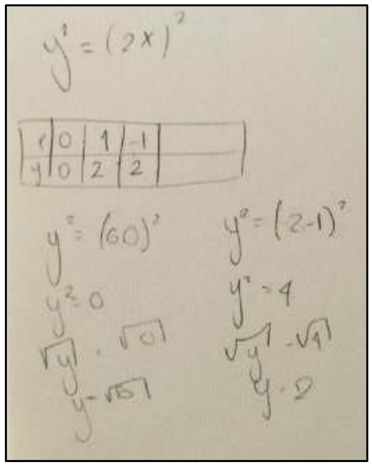
Ejemplos de funciones en los registros algebraico y tabular del estudiante E1



Se le pregunta a E1 por ejemplos que no son función y el estudiante realiza el mismo procedimiento. Dice que algo que no es función es una gráfica de una “equis” y escribe la expresión $y^2 = (2x)^2$. Posteriormente, reemplaza los valores $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ en la expresión algebraica y calcula, para generar una tabla de valores. Este hecho se puede ver en la Figura 52.

Figura 52

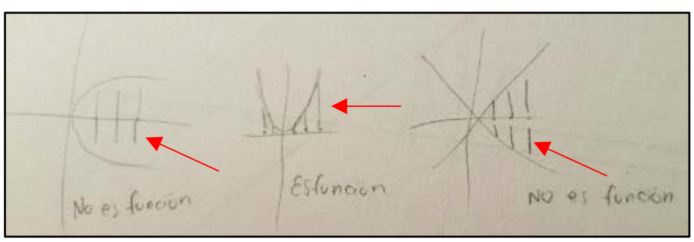
Ejemplos de no funciones en los registros algebraico y tabular del estudiante E1



Al mismo tiempo, E1 da evidencia de la Acción A4 al proporcionar más ejemplos de relaciones que son y que no son función en el registro gráfico. Esto es, E1 determina si una gráfica es función trazando segmentos de recta verticales (Figura 53).

Figura 53

Ejemplos de funciones y no funciones en el registro gráfico del estudiante E1



Como se puede ver en la Figura 53, para determinar si una relación representada gráficamente es una función, E1 usa el criterio de la recta vertical.

6.4 Evidencias de un Proceso inicial

En las evidencias del trabajo realizado por los estudiantes a partir de las situaciones propuestas, mostradas a continuación, se observa la presencia de un nivel más avanzado en los estudiantes, pero que no es considerado aún como Proceso. A este nivel o etapa previa al Proceso, se ha llamado Proceso inicial.

Ejemplo 1. Problema 1 prueba pos-instrucción

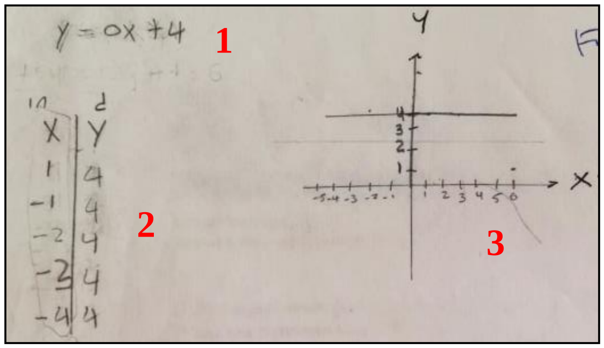
> Proponga al menos dos representaciones que modelen la misma función constante. Recuerde que una representación puede ser una gráfica, un diagrama, una expresión algebraica, una tabla de valores, una relación descrita con sus palabras, entre otros.
>
> a. ¿Qué valores puede tomar la variable independiente en una función constante?
> b. ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente en una función constante?
> c. ¿Por qué una función constante es función?

En la Figura 54 se observan las tres representaciones proporcionadas por E26. En las respuestas dadas por el estudiante a este problema se puede dar evidencia de los Procesos iniciales: P_i1, P_i2 y P_i3.

Cuando E26 etiqueta los ejes y da respuesta a los ítems a., b. y c. manifestando que la variable independiente "puede tomar valores infinitos" y la dependiente "solo toma un valor", el estudiante identifica variables dependientes e independientes, esto es, da evidencia del Proceso inicial P_i1; cuando escribe en la tabla de valores que los elementos toman a 4 como imagen, él determina la imagen de un elemento del dominio, esto es, da evidencia del Proceso inicial ; y, nuevamente por las respuestas dadas en los ítems a., b. y c. se puede ver que E26 determina el dominio y rango de una función a partir de una gráfica en el plano cartesiano, o bien, da evidencia del Proceso inicial P_i3.

Figura 54

Ejemplo propuesto por el estudiante E26 de una función constante, en diferentes registros de representación



6.5 Evidencias de una concepción Proceso

Igual que el proceso inicial, son pocas las evidencias de la presencia de la estructura Proceso en las respuestas de los estudiantes, Sin embargo, no son nulas. Los dos episodios a continuación son una muestra de ello.

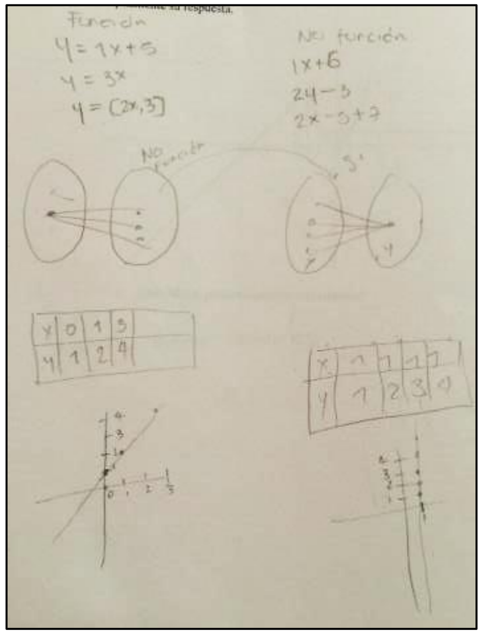
Ejemplo 1. Problema 2 de la entrevista

Escriba tres ejemplos de relaciones que sean función y tres que no lo sean. Explique ampliamente su respuesta.

La respuesta de E2 al problema indicado, se puede observar en la Figura 55.

Figura 55

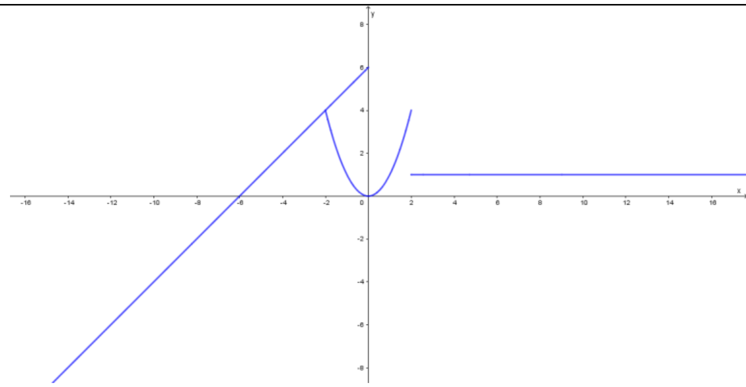
Ejemplos de funciones y no funciones proporcionados por el estudiante E2



En contraste con la respuesta ofrecida por E3 y E4, para este mismo problema mostrado en el ejemplo 3 del apartado 6.2.1 de este documento, en el cual los estudiantes proporcionan ejemplos en un solo registro (algebraico), E2 en cambio, proporciona ejemplos en varios registros de representación: algebraico, tabular, gráfico, e incluso proporciona un diagrama sagital. Esto da evidencia del indicador P3 definido en la tabla para el análisis de los datos: el estudiante proporciona ejemplos de relaciones que son funciones y ejemplos de relaciones que no son funciones en diferentes registros de representación.

Ejemplo 2. Problema 3 de la entrevista

Observe la gráfica que aparece en el plano.



a. ¿Qué valores puede tomar x en esta relación?

b. ¿Qué valores puede tomar y en esta relación?

c. Escriba una expresión que modele la relación dada gráficamente en el plano.

d. ¿Esta relación es función? ¿Por qué?

Cuando se cuestiona a E3 por los valores que puede tomar x en esta relación, responde casi de inmediato, que x toma cualquier valor. Para explicar esto, escribe en su hoja $x = (\infty, -\infty)$. Ahora bien, cuando se cuestiona a E3 por los valores que puede tomar y en la relación su respuesta es:

E3: Pues aquí en esta relación y depende de x. O sea, que si nosotros decimos que x vale 1, pues dependiendo de la fórmula va a dar un resultado. O sea, y depende de x.

Inv: Entonces teniendo en cuenta eso, ¿qué valores podría tomar y en esa relación?

E3: ¿Un valor que pueda tomar y? Por ejemplo, en esta [señala la parte de la gráfica en el intervalo $(2, \infty)$]. Aquí el valor que toma y es de 1.

Inv: ¿Para qué valores?

E3: Para esta función constante

Nótese que la afirmación hecha por E3: “pues aquí en esta relación y depende de x. O sea, que si nosotros decimos que x vale 1, pues dependiendo de la fórmula va a dar un resultado”, muestra que el estudiante acepta que todos los elementos de entrada son transformados por una regla o relación dada (en este caso una fórmula) para generar un conjunto de salida. Esto en la tabla de indicadores de construcción del concepto es equivalente a dar evidencias del Proceso 1 (P1).

Además, cuando se cuestiona a E3 sobre si esta relación es o no función, el estudiante afirma que, “esta relación no es función porque el dominio puede tomar más de una imagen entre el intervalo de $x = [-2,0]$” [señalando en la gráfica dos imágenes para $x = -1$]. Sin embrago, E3 sostiene que si se elimina la función cuadrática [refiriéndose al comportamiento de la función en el intervalo $(-2,2)$] la relación mostrada sería función. Con este hecho se puede ver que el estudiante no solo está determinando si una gráfica es función trazando una recta vertical (A4), sino que está restringiendo la relación para que esta sea función. Esto en la tabla de indicadores da evidencia de P3: proporcionar ejemplos de relaciones que son funciones y ejemplos de relaciones que no son funciones en diferentes registros de representación. En este caso, el ejemplo que proporciona está dado en el registro gráfico.

Salvo en las respuestas del problema 1 de la prueba pos-instrucción, en donde se trabaja con funciones constantes, las respuestas de los estudiantes en los problemas propuestos en los instrumentos de recolección de datos, no se evidencia la presencia del Proceso P2: el estudiante determina el dominio y rango de una función a partir de cualquier representación.

Con respecto al último indicador de la estructura Proceso, P3: proporciona ejemplos de relaciones que son funciones y ejemplos de relaciones que no son funciones en diferentes registros de representación, se deja para el siguiente apartado.

6.6 Coordinación de los registros de representación

Se debe aclarar que no cualquier situación donde se realice una conversión de representaciones implica que el estudiante ha logrado una comprensión integrativa, o bien, ha logrado coordinar los registros de representación. Puede ocurrir que con bastante dominio de algún registro el estudiante pueda interpretar datos fijos y decida cambiar el registro inicial para resolver el problema.

Ejemplo 1. Problema 1 de la prueba pos-instrucción

Proponga al menos dos representaciones que modelen la misma función constante. Recuerde que una representación puede ser una gráfica, un diagrama, una expresión algebraica, una tabla de valores, una relación descrita con sus palabras, entre otros.

a. ¿Qué valores puede tomar la variable independiente en una función constante?
b. ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente en una función constante?
c. ¿Por qué una función constante es función?

En la mayoría de las respuestas dadas a este problema se puede observar que, al menos para las funciones constantes, los estudiantes coordinan tres tipos de representaciones: algebraica, tabular y gráfica. Particularmente, en la Figura 54 se puede ver un caso de ello. E26 logra coordinar tres representaciones diferentes de una función constante.

Ejemplo 2. Problema 2 de la entrevista

Escriba tres ejemplos de relaciones que sean función y tres que no lo sean. Explique ampliamente su respuesta.

En la Figura 55 donde se da evidencia de una concepción Proceso de función se puede notar también una coordinación de registros. El estudiante E2 al proporcionar ejemplos de relaciones que son función propone expresiones algebraicas, un diagrama sagital, una tabla y una gráfica: para representar relaciones que no son función, E2 proporciona representaciones en estos mismos registros. Aunque las cuatro representaciones no representan la misma relación funcional y no funcional respectivamente, si lo hacen dos de ellas: las representaciones tabular y gráfica. Puede notarse que E2 logra una coordinación entre estos dos registros.

Si bien muchos de los estudiantes logran realizar la actividad cognitiva de conversión, en los instrumentos de recolección de datos son pocos los que pueden dar evidencias de una coordinación entre registros; es decir, los que pueden evidenciar una comprensión integrativa del concepto de función.

7. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones generales del estudio y algunas reflexiones que se consideran importantes para futuras investigaciones. Estas conclusiones se organizaron en tres apartados: 1. Descomposición Genética preliminar; 2. Diseño e implementación de enseñanza y; 3. Para futuras investigaciones.

Descomposición Genética preliminar

Gracias a la descomposición genética preliminar, detectamos una causa de dificultad en el proceso de enseñanza. En la descomposición genética preliminar propuesta, se parte del hecho de que los estudiantes han estructurado previamente el concepto de relación y otros conceptos como números reales y conjuntos (ver sección 4.3 de este documento). Sin embargo, durante el desarrollo de la investigación detectamos que dichos conceptos no estaban completamente estructurados por los estudiantes. Esto ralentizó el proceso e hizo que las Acciones de los estudiantes no evolucionaran lo suficiente para construir un Proceso como se esperaba.

No obstante, las Acciones evidenciadas en la prueba pos-instrucción y la entrevista semiestructura muestran una progresión en comparación a la prueba diagnóstica. Por lo tanto, decidimos establecer una etapa entre la estructura Acción y Proceso la cual llamamos Proceso inicial (P_i). Esta etapa no fue considerada en la descomposición genética preliminar, pero se incluyó en las herramientas para el análisis de los datos en la sección 6.2. A pesar de ello, después de analizar los datos y reflexionar sobre la descomposición genética preliminar propuesta, consideramos que la evidencia empírica sustenta gran parte las hipótesis consideradas.

Diseño e implementación de enseñanza

El estudio realizado nos permite afirmar que el diseño de enseñanza orientado por una descomposición genética ofrece a los estudiantes situaciones y espacios para que realicen sus propias reflexiones y construcciones. Además, este diseño es un gran aporte al profesor, ya que cada problema y pregunta planteados en las Tareas cumplen un propósito para la construcción del concepto de función. Cabe resaltar que las Tareas aquí propuestas son un ejemplo de cómo podrían abordarse más de ellas e implementarse en el aula de clase. Consideramos que un banco enriquecido de este tipo de Tareas motivaría a los estudiantes a reflexionar sobre las estructuras mentales que van desarrollando.

La reflexión sobre el diseño de clase implementado corrobora la importancia de proponer situaciones donde se promueva la coordinación entre diferentes registros de representación del concepto de función sin caer en una actividad mecánica donde el estudiante no pueda reflexionar sobre sus propias Acciones. Consideramos que las Tareas enfocadas a promover el estudio del concepto de función en diferentes registros de representación es de vital importancia teniendo en cuenta que cada registro ofrece características únicas del concepto y, por ende, una comprensión más sólida de él.

Este estudio también nos permite constatar que la instrucción en la clase de matemáticas debe ofrecer espacios para las discusiones entre los estudiantes, así como situaciones que promuevan la construcción de otros Objetos matemáticos. Para ello, una recomendación es el Ciclo de Enseñanza ACE.

Para futuras investigaciones

Dado que un diseño de enseñanza se vuelve más confiable cuando se basa en un modelo teórico como una descomposición genética, se recomienda que cada Tarea este respaldada por un análisis a priori, donde se pueda evidenciar el propósito de cada situación y preguntas planteadas.

Para futuras investigaciones se recomienda iniciar con Tareas donde se promueva el estudio de relaciones entre conjuntos, ya que esto permitirá una mejor comprensión del dominio y rango de una función y, por ende, del desarrollo de estructuras más avanzadas. Habría que decir también que, como este estudio no proporciona evidencia empírica suficiente sobre la estructura Proceso, después del trabajo mencionado sobre promover el estudio de relaciones entre conjuntos, se podrían implementar nuevamente las Tareas aquí propuestas, para tener evidencia empírica detallada sobre cómo los estudiantes construyen esta estructura.

Referencias bibliográficas

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.

Campos, V. (2017). *Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE*. Instituto Politecnico Nacional, Ciudad de México, México. DOI: 10.13140/RG.2.2.33372.08325

Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. Y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8* (2), 121-156.

Cid Sabucedo, Alfonso. (2001). Observación y análisis de los procesos de aula en la universidad: una perspectiva holística. *Enseñanza*, 19, 181-208.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*: *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In Tall, D. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, 140-152. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 5-21.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En Cortés C. Et Hitt F. (Éds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, 81-108. México: Morevallado.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, *13*, 29-36.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.) *Compendium for research in mathematics education*, 421-456. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C. A. y Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, *25*, 188-205. **Doi:** 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de transformaciones lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas.* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Sánchez, B. I. (2009). Las representaciones sociales como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el concepto de función. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 4, 45-71.

Sánchez, M., Castañeda, A. & González-Polo, R. I. (2017). Research findings associated with the concept of function and their implementation in the design of mathematics textbooks tasks. *CERME 10*, 3776-3783.

Uzcátegui Aylwin, C. (2016). Notas para el curso de Teoría de Conjuntos. Recuperado de http://ciencias.uis.edu.co/conjuntos/doc/NotasConjuntosUIS%20%282%29.pdf.

Villabona, D. y Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, *28*(2), 119-150.

Zill, D., & Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas. Cuarta edición*. México: McGraw-Hill.

Apéndices

(Los apéndices están adjuntos y puede visualizarlos en la base de datos de la biblioteca UIS)