

SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS A CAMPOS VECTORIALES EN EL MARCO DE LA
TEORÍA DE HORNDESKI

Andrés Américo Navarro León

Trabajo de Investigación Presentado para Optar a el Título de Doctor en Ciencias Naturales - Física

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctor en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

A mi madre.

Agradecimientos

Agradezco a mi esposa Alba por el apoyo, a mi tutor de tesis y amigo, a el profe Yeinzon (el doctor Cerati), a mis amigos Framsol y Jerson.

Tabla de Contenido

Introducción	16
1. Objetivos	23
2. Introducción a la cosmología	25
2.1. El universo en expansión	28
2.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	33
2.3. Dinámica del universo	39
2.4. Problemas de la cosmología estándar	42
2.4.1. Problema del horizonte	44
2.4.2. Problema de planitud	48
2.4.3. Problema de la formación de estructura a gran escala	50
2.5. Inflación	50
2.5.1. Definición de inflación	51
2.5.2. Solución de los problemas de la cosmología estándar y el monto de inflación	54
2.6. Inflación mediante un campo escalar	56
2.6.1. Origen de la estructura a gran escala	60
2.6.1.1. Perturbación en la curvatura	61
2.6.1.2. Cuantización	64

2.6.2. Evidencia observacional de la expansión acelerada del Universo	71
2.7. Intentos teóricos para explicar la aceleración del Universo	74
2.7.1. Modelos de Energía oscura	74
2.7.2. Modelos de gravedad modificada	82
2.7.2.1. Gravedad $f(R)$	83
2.7.2.2. Teorías tensor-escalar	83
3. Introducción a los sistemas dinámicos	84
4. Introducción a los sistemas dinámicos	86
4.1. Sistemas dinámicos	87
4.1.1. Punto crítico	87
4.1.2. Teoría de estabilidad líneal	89
4.2. Aplicación del análisis de sistemas dinámicos en cosmología.	92
4.2.1. Λ CDM	93
4.2.2. Quintaesencia	101
4.2.3. Teoría de Brans-Dicke	108
5. Galileones	114
5.1. Galileones escalares	118
5.2. Galileones vectoriales	122
5.2.1. Acción de Proca generalizada Abelianas	122

5.2.2.	Acción de Proca generalizada $SU(2)$	128
5.2.3.	Implicaciones cosmológicas	134
5.3.	Ondas gravitacionales	136
5.3.1.	Implicaciones en teorías tensor-escalar	139
5.3.2.	Implicaciones en teorías mas allá de Horndeski	142
5.3.3.	Implicaciones en teorías vector-tensor	143
6.	Implicaciones cosmológicas	144
6.1.	Análisis dinámico del Lagrangiano: $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$	144
6.1.1.	Sistema autónomo	147
6.1.2.	Puntos críticos	149
6.2.	Análisis dinámico del Lagrangiano: $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$	155
6.2.1.	Sistema autónomo	156
6.2.2.	Puntos críticos	157
7.	Energía oscura del término S no Abelian	160
7.1.	Término S no Abelian	162
7.2.	Sistema dinámico autónomo	164
7.3.	Puntos críticos	167
7.4.	Comportamiento asintótico	172
7.5.	Inflación primordial	180
7.6.	\mathcal{L}_4^1 + materia + radiación	182

7.7. Puntos críticos	185
7.8. $\mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_4^2 + \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$	195
7.9. Inflación primordial	202
8. Conclusiones	205
8.1. Futuros trabajos de investigación	209
Referencias Bibliográficas	211
Apéndices	237

Lista de Figuras

- Figura 1. Estructura a gran escala observada con los estudios espectroscopicos de las galaxias 27
- Figura 2. Diagramas de Hubble que muestran la relación entre las velocidades de recesión y las distancias de varios objetos astronómicos. 29
- Figura 3. Representación de la superficie en la época de recombinación observada hoy en día. 47
- Figura 4. La temperatura observada de la RCF medida en diferentes direcciones en el cielo. El mapa está en coordenadas galácticas. 49
- Figura 5. Regiones conjuntas marginadas de 68 % y 95 % de nivel de confianza para el índice del espectro de perturbación escalares, n_s , y la relación tensor-escalar, r , obtenidas de los datos de Planck 2015 y sus combinaciones con BICEP2 / Keck Array y/o BAO, en comparación con las predicciones teóricas de algunos modelos inflacionarios seleccionados.. 72
- Figura 6. Representación de la estabilidad de un punto crítico (a) estable, (b) asintóticamente estable y (c) inestable. 88
- Figura 7. Espacio de fase del sistema correspondiente al modelo Λ CDM. 100
- Figura 8. Espacio de fase para el modelo de Quintaesencia con un potencial de la forma: $V = V_0 e^{-\lambda\phi/M_p}$ en tres casos cualitativamente diferentes de λ y $\omega_M = 0$. 107

Figura 9.	Espacio de fase para el punto crítico \mathcal{P}_1 del modelo $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$	153
Figura 10.	Espacio de fase del modelo $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$	160
Figura 11.	Puntos críticos en el espacio de fase para el modelo del término S no Abelian	170
Figura 12.	Puntos críticos en el espacio de fase para el modelo del término S no Abelian	172
Figura 13.	Energía oscura - Solución numérica y asíntota para $\alpha = 0.0075$ y condiciones iniciales $x_0 = 0.05$ y $y_0 = 1.18$.	177
Figura 14.	Energía oscura - Igual que en la figura 13 pero con diferentes condiciones iniciales: $x_0 = 1.6$ y $y_0 = 2.2$.	180
Figura 15.	Inflación primordial - Solución numérica para $\alpha = 0.00649$, $g = 0.0001$, y condiciones iniciales $x_0 = 0.001095$ y $y_0 = 1.189$.	182
Figura 16.	Valores propios asociados a $\mathcal{D}_{\pm 4}$	188
Figura 17.	Valores propios asociados a $\mathcal{D}_{\pm 5}$	189
Figura 18.	Valores propios asociados a $\mathcal{D}_{\pm 6}$	191
Figura 19.	Evolución de los parámetros de densidad de energía para energía oscura Ω_{EO} , radiación, r , y materia, m .	194
Figura 20.	Espacio de fase para el modelo $\mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_4^2 + \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$	201
Figura 21.	Inflación primordial - Solución numérica para $\alpha = 10^{-3}$, $\Theta = 25\alpha$, $\kappa = 20\alpha$, $g = 0.001$ y condiciones iniciales $x_0 = -10^7$ y $y_0 = 5 \times 10^7$.	205

Lista de Tablas

Tabla 1.	Estabilidad de los puntos críticos del modelo Brans-Dicke.	112
Tabla 2.	Puntos críticos del modelo Brans-Dicke con un potencial como se muestra en la ecuación (145) y $\omega = 0$ (polvo). En este caso $\omega = \omega_{BD}$.	113
Tabla 3.	Número de términos invariantes de Lorentz bajo el grupo de simetría $SU(2)$ contruidos a partir de contracciones de un número de campos vectoriales (primera fila) y un cierto número de derivadas de primer orden (primera columna) con los invariantes primitivos del grupo $SO(3, 1)$ y $SU(2)$.	130

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Análisis del término $\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal, bis}}$	237
Apéndice B. Ecuaciones de campo gravitacional	240
Apéndice C. Ecuaciones de evolución para los campos A_μ^a	255
Apéndice D. Existencia del comportamiento asintótico	263
Apéndice E. Soluciones numéricas	266

Resumen

Título: Sistemas Dinámicos Aplicados a Campo Vectoriales en el Marco de la Teoría de Horndeski. *

Autor: Andrés Américo Navarro León **

Palabras Clave: Cosmología, Galileones, Sistemas dinámicos, Campos vectoriales, Energía oscura, Inflación.

Descripción: Las observaciones cosmológicas son consistentes con un universo homogéneo e isótropo a grandes escalas lo cual favorece ampliamente el uso de campos escalares como generadores de los períodos inflacionarios primordial y tardío. Sin embargo, existen en la naturaleza campos de espín superior y éstos pueden ser relevantes en los procesos cosmológicos. Con base en la idea de que todo sistema físico debe poseer un Hamiltoniano acotado por debajo, se estudian las consecuencias cosmológicas de la teoría de Horndeski vector-tensor para campos vectoriales cuya acción posee simetría global $SU(2)$. En particular, se analiza el Lagrangiano de Einstein-Hilbert más Yang-Mills junto con una de las piezas del Lagrangiano que contiene productos del tensor S (la versión simétrica del tensor de esfuerzos del campo de gauge). Se ha encontrado un punto crítico asociado a este modelo correspondiente a un período prolongado de expansión acelerada. Éste es un punto de silla, es decir, representa un estado transitorio del sistema dinámico por lo que el período inflacionario llega naturalmente a su fin, siendo éste reemplazado por un período dominado por la radiación en virtud al término de Yang-Mills. Desafortunadamente, el mínimo monto de expansión requerida para solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar depende sensiblemente del valor de las constantes de acoplamiento en la acción. En contraste, se encuentra también un comportamiento asintótico y de auto ajuste fino, para un espectro amplio de condiciones iniciales, en el cual se genera un período inflacionario eterno; lo anterior hace de este modelo un candidato ideal para explicar la energía oscura.

* Trabajo de Investigación de Doctorado en Ciencias Naturales (Física).

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctor en Física.

Abstract

Title: Dynamic Systems Applied to Vector Field in the Horndeski Theory Framework *

Author: Andrés Américo Navarro León **

Keywords: Cosmology, Galileons, Dynamical systems, Vector fields, Dark energy, Inflation.

Description: Cosmological observations at large scale are consistent with the notion that the universe is isotropic and homogeneous, which support the traditional idea of using scalar fields to describe primordial inflation and late time cosmic acceleration. However, there exist in nature other fields of higher spin as they may play an important role in different cosmological stages. On the other hand, based on the idea that any physical system must have a Hamiltonian bounded from below, as necessary but not sufficient condition to avoid the Ostrogradski's instability, the cosmological implications of the resulting Horndeski vector-tensor theory is studied while the Lagrangian is endowed with a global $SU(2)$ symmetry. In particular, the model consisting of the Einstein-Hilbert plus the standard Yang-Mills terms, along with some pieces of the generalized $SU(2)$ Proca Lagrangian are studied at the background level. As a result of the dynamical system analysis, a critical point, which results in a saddle point, can account for a slow-roll acceleration period. This period ends up when the Yang-Mills term dominates the energy density leading to the radiation dominated epoch. Unfortunately, such a period is not long enough to solve the classical problems of the standard cosmology. In contrast, the dynamical system exhibits a novel dynamical fine-tuning mechanism which provides an eternal inflationary period for an ample spectrum of initial conditions. This is an interesting result where vector fields can explain the dark energy and deserves further examination.

* PhD research in Natural Sciences (Physics).

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Advisor: Yeinzon Rodríguez García, ph.D.

Introducción

El modelo cosmológico estándar actual, el cual está conformado a su vez por los modelos del *Big Bang* y la inflación cósmica es la herramienta conceptual para comprender el origen y evolución del Universo. La idea de una época inflacionaria, la cual fue propuesta por primera vez en 1981 (Guth, 1981; Linde, 1982), surgió a partir de la necesidad de brindar una solución a los problemas presentes en el modelo del *Big Bang*: el problema de planitud, el problema de horizonte y el problema de las reliquias no deseadas (Lyth and Liddle, 2009; Weinberg, 2008; Mukhanov, 2005). Tradicionalmente, los modelos inflacionarios han sido construidos a partir de campos escalares, cuyas fluctuaciones cuánticas durante inflación son las responsables de la generación de las anisotropías en la densidad de energía del Universo, las cuales dejaron huellas distintivas en la radiación cósmica de fondo (RCF) a través de las anisotropías en la temperatura. Los satélites COBE (Smoot et al., 1992), WMAP (Bennett et al., 2003) y Planck (Ade et al., 2014a) han observado, con una resolución cada vez mayor, las mencionadas anisotropías en la temperatura de la RCF. De esta manera, la época inflacionaria ha recibido el soporte observacional necesario para convertirla en un ingrediente fundamental del modelo cosmológico estándar.

La principal motivación para implementar campos escalares se encuentra en el hecho de que estos modelos preservan el principio cosmológico, el cual establece que el Universo luce, en promedio, homogéneo e isótropo en escalas superiores a los 100 Mpc. Esta afirmación fue comprobado experimentalmente por primera vez por A. Penzias y R. Wilson en 1965 (Penzias and Wilson, 1965). En la literatura es posible encontrar una variedad de modelos inflacionarios

que involucran campos escalares (Martin et al., 2014). En 1974 G. W. Horndeski construyó la acción más general posible que involucra sólo un campo escalar con acoplamientos no mínimos a la gravedad¹, en donde las ecuaciones de movimiento son, a lo sumo, de segundo orden (Horndeski, 1974). La idea de limitar el orden de las ecuaciones de movimiento está relacionada con un tipo de inestabilidad encontrada por Ostrogradski en 1850 (Ostrogradski, 1850), quien demostró que en una teoría fundamental cuyas variables dinámicas poseen derivadas mayores a las de segundo orden en el tiempo existe una inestabilidad lineal. La presencia de tal inestabilidad lineal está relacionada con el hecho de que el Hamiltoniano depende de forma lineal de uno de los momentos canónicos, por lo tanto éste es libre de tomar cualquier valor en el espacio de fases, por lo que no hay una barrera que impida que la energía tienda al infinito negativo; en la literatura esto se conoce como un Hamiltoniano que no está acotado por debajo, es decir, no posee un estado de mínima energía y como consecuencia el sistema es inestable (Chen et al., 2013; Schmidt, 1994; Nesterenko, 2007). Si bien ésta es una inestabilidad clásica, en una teoría cuántica de campos la anterior conduce a estados con energía negativa que a menudo son llamados “fantasmas”. Cabe resaltar que este tipo de teoría se siguió desarrollando de forma independiente (Antoniadis et al., 2008; Kazakov and Vartanov, 2007) y se amplió en la referencia (Kobayashi et al., 2011) siguiendo el concepto de la invarianza de Galileo en el contexto de la teoría de campos, lo cual se expresa a través de las transformaciones de Galileo generalizadas. La acción en este caso mantiene las ecuaciones de movimiento con derivadas

¹ Los acoplamientos no mínimos a la gravedad hacen referencia a términos dentro de la acción de la forma $\mathcal{G}(R_{\mu\nu\alpha\beta})\mathcal{F}(\phi)$, donde $\mathcal{G}(R_{\mu\nu\alpha\beta})$ es una función que depende del tensor de Riemann y $\mathcal{F}(\phi)$ es una función que depende de un campo escalar ϕ .

de segundo orden en dimensiones arbitrarias. Dado que la teoría de Horndeski es equivalente en este tipo de formalismo (Kobayashi et al., 2011; Deffayet et al., 2011), se abre una ventana en el estudio de la cosmología y la construcción de modelos inflacionarios a partir de sólo un campo escalar.

De otra parte, la precisión con la que se ha observado las anisotropías en la temperatura de la RCF, ha llevado a concluir que existen anomalías que parecen ser difíciles de conciliar con los modelos inflacionarios basados en campos escalares. Las anomalías reportadas por el noveno año de resultados de WMAP (Bennett et al., 2013) y el primer años de resultados de Planck (Ade et al., 2014b) se observan a grandes escalas (pequeños multipolos) y entre ellas se encuentran la alineación de los multipolos más bajos, la presencia de un punto frío, una asimetría entre hemisferios, y la carencia de amplitud espectral; cabe destacar que el WMAP y el Planck son experimentos independientes, con tecnologías distintas de medición, por lo que se descarta que el origen de las anomalías en la RCF se deba a la presencia de errores sistemáticos en los datos. La presencia de estas anomalías sugiere que el Universo es estadísticamente anisótropo o en forma equivalente, que el Universo posee un dirección privilegiada, la cual no es posible generar a partir de campos escalares. Una posibilidad para generar esta dirección privilegiada es mediante la inclusión de campos vectoriales (Dimopoulos, 2006; Dimopoulos et al., 2009; Yokoyama and Soda, 2008; Golovnev et al., 2008; Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2013, 2011; Dimopoulos, 2007; Dimopoulos et al., 2010; Watanabe et al., 2009). Pero la inclusión de campos vectoriales para construir modelos inflacionarios tiene dos inconvenientes: el primero está relacionado con la invarianza conformal de la acción de los campos vectoriales y el segundo está relacionado con la generación excesiva de anisotropía estadística y/o expansión anisótropa. El primer inconveniente es posible resolverlo

introduciendo en la acción del campo vectorial un término de masa asociado al campo vectorial (Dimopoulos, 2006), introduciendo un término cinético para el campo vectorial dependiente del tiempo (Dimopoulos et al., 2010) o con campos vectoriales de *gauge* no Abelianos con una modificación del término asociado al tensor de esfuerzos de orden F^4 , es decir $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^b F_b^{\alpha\beta}$, donde a y b son índices de *gauge* (este modelo es conocido como *gauge-flation* (Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2013, 2011)). El segundo inconveniente se puede solucionar de dos formas: *i*) disponiendo de tres campos vectoriales mutuamente ortogonales y de igual norma (Golovnev et al., 2008) o *ii*) forzando a que la densidad de energía del campo vectorial sea mucho menor que la densidad de energía de un campo escalar auxiliar que también produce perturbación en la curvatura (los modelos derivados de esta idea son conocidos como modelos de curvación vectorial, ver Ref. (Dimopoulos, 2006, 2007; Dimopoulos et al., 2010; Watanabe et al., 2009)).

Ahora, con las motivaciones observacionales relacionadas con la presencia de anomalías en la RCF y donde los campos vectoriales pueden ser los principales candidatos para dar cuenta de estas anomalías, es preciso preguntarse: es posible construir una teoría lo más general posible en donde se incluyan campos vectoriales y en donde las ecuaciones de movimiento sean, a lo sumo, de segundo orden? La respuesta a esta pregunta es sí, y en la literatura se tienen diferentes posibilidades para lograr este objetivo. Ya Horndeski había elaborado la acción más general en cuatro dimensiones con acoplamientos no mínimos a la gravedad², con un campo vectorial con simetría de *gauge* $U(1)$

² Los acoplamientos no mínimos a la gravedad hacen referencia a términos dentro de la acción del modelo de la forma $\mathcal{G}(R_{\mu\nu\alpha\beta})\mathcal{M}(A_\mu)$, donde $\mathcal{G}(R_{\mu\nu\alpha\beta})$ es una función que depende del tensor de Riemann y $\mathcal{M}(A_\mu)$ es una función que depende de un campo vectorial A_μ .

produciendo ecuaciones de movimiento de segundo orden (Horndeski, 1976). De forma similar, es posible obtener estas interacciones generales vector-tensor a partir de una reducción de la teoría de Kaluza-Klein de 5 dimensiones, asociada al término de Gauss-Bonnet presente en esta teoría (Müller-Hoissen, 1988). En un estudio más reciente, se encuentra una generalización de la acción de Proca en un teoría de un campo vectorial con términos de autointeracción a través de derivadas (es decir, con términos de la forma $(\partial_\mu A^\mu)^n$ con $n = 1, 2, 3$ y términos de la forma $\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu$ dentro de la acción) en un espacio-tiempo plano y bajo la escogencia adecuada de los coeficientes de autointeracción, siendo posible construir de esta manera una teoría libre de fantasmas (Heisenberg, 2014a); adicionalmente, se generaliza este estudio a un espacio-tiempo curvo y se obtiene el correspondiente formalismo mostrado por Horndeski para campos vectoriales con simetría $U(1)$ (Heisenberg, 2014a) (un resultado similar es mostrado en la Ref. (Tasinato, 2014b)).

En el marco de las teorías de *gauge* no Abelianas presentes en las teorías de física de partículas en donde su principal rol es dar cuenta de las interacciones electromagnética, débil y fuerte (Kane, 1993; Ryder, 1985), específicamente en el caso del grupo de transformaciones $SU(2)$, se introducen de manera natural tres campos vectoriales de *gauge*: un campo vectorial por cada generador del grupo de transformaciones que corresponde a las tres matrices de Pauli. Por ejemplo, en el caso de la Ref. (Adshead and Wyman, 2012) el campo vectorial no abeliano se encuentra acoplado a un pseudoescalar ϕ como en el caso abeliano. El caso de *Gauge-flation* propuesto en (Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2013, 2011), que puede interpretarse como un límite del modelo *Chromo-natural Inflation*, fue un nuevo modelo de inflación impulsado por campos vectoriales. Estos modelos emplean un campo de medidor $SU(2)$ y debido a la propiedad local $SU(2) \cong SO(3)$

es posible orientar los tres campos vectoriales a lo largo de las tres direcciones espaciales, por lo que una expansión isótropa se manifestará como un atractor (local) (Maleknejad et al., 2012). Desafortunadamente, ninguno de estos modelos sobrevive a las restricciones observacionales: esencialmente los modos tensoriales experimentan un crecimiento taquiónico, y la relación tensor-escalar siempre está más allá del límite superior observacional (Dimastrogiovanni and Peloso, 2013; Namba et al., 2013). Recientemente, se consideraron las variantes de estos modelos, con campos $SU(2)$ masivos, denominados *Massive Gauge-flation* (Nieto and Rodríguez, 2016) y *Higgsed Chromo-natural* (Adshead et al., 2016), y se ha propuesto que los términos de masa pueden ampliar el espacio de parámetros para que las predicciones del modelo estén de acuerdo con los datos.

Siguiendo en esta línea de trabajo relacionada con los campos vectoriales de *gauge* con una simetría global $SU(2)$, J. Beltran Jimenez y L. Heisenberg (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2017) proporcionan un orden sistemático para la construcción de este tipo de teorías, pero enfocandola en los términos de autointeracción a través de derivadas de la forma $\epsilon\epsilon(\partial A)^m A^{2n}$, donde ϵ representa en tensor anti-simétrico de Levi-Civita, m es el orden de las derivadas de los campos y n el número de campos vectoriales. En este trabajo se resaltan los términos que representan una extensión directa de las interacciones de Proca generalizadas y aquellos que son genuinamente novedosos y no existen para el caso de un solo campo vectorial. Por otro lado y dentro de esta misma línea de trabajo, E. Allys, P. Peter, y Y. Rodríguez (Allys et al., 2016c), investigaron la extensión de una teoría de gauge $SU(2)$, es decir, el modelo generalizado de Proca $SU(2)$, que podría denominarse Galileón vectorial no abeliano. El enfoque que presentaron consiste en construir, de manera exhaustiva, todos los Lagrangianos que contengan hasta seis índices espacio-temporales contraídos. Es éste último

trabajo en donde se enfoca esta tesis; investigar las consecuencias cosmológicas de las teorías generalizadas de Proca $SU(2)$, como el propósito de determinar cual de los posibles Lagrangianos resultantes de la referencia (Allys et al., 2016c) puede generar un período de expansión acelerada lo suficientemente largo para solucionar los problemas de la cosmología estándar o ser un candidato para explicar la expansión actual del universo.

Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera: en el primer capítulo se realizará una introducción a la cosmología estándar, resaltando las ideas relevantes sobre la dinámica de nuestro universo expansión, sus problemas y una discusión de cómo un período inflacionario los soluciona; también como es posible encontrar diferentes modelos que muestran soluciones alternativas a dichos problemas de la cosmologías estándar. En el segundo capítulo se presentan los conceptos básicos para comprender los sistemas dinámicos y como implementarlos en la cosmología. En el tercer capítulo se presenta la idea de la construcción de la acción mas general posible que involucra campos vectoriales (con simetrías globales $U(1)$ y $SU(2)$) y acoplamiento no mínimos a la gravedad, que conducen a ecuaciones de movimiento, a lo sumo, de segundo orden. En el cuarto capítulo se estudia la dinámica de una triada cósmica, en el marco de la teoría generalizada de Proca, en un Lagrangiano que contiene la versión simétrica del tensor $F_{\mu\nu}^a$ y un término con un acople no mínimo a la gravedad.

1. Objetivos

Objetivo general

Estudiar de forma analítica, numérica y mediante la implementación de los sistemas dinámicos, los modelos cosmológicos inflacionarios resultantes de encontrar una acción tipo Horndeski que involucre un campo escalar, campos vectoriales con simetría $SU(2)$ y la gravedad.

Objetivos específicos

Encontrar la acción más general que involucre a un campo escalar, campos vectoriales con simetría $SU(2)$ y la gravedad, tomando como base los estudios mostrados en las Ref. (Horndeski, 1976; Heisenberg, 2014a; Tasinato, 2014b).;

Obtener las ecuaciones dinámicas para los campos involucrados en donde la geometría del espacio-tiempo sea descrita por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker o Bianchi I.

Plantear para cada término en la acción, el sistema de ecuaciones como un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales.

Encontrar los puntos críticos asociados a cada modelo y analizar la estabilidad de los mismos.

Analizar, a partir de la estabilidad de los puntos críticos, la dinámica inflacionaria asociada a cada modelo.

Determinar, para cada uno de los modelos encontrados, si el monto de inflación generado es el suficiente para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar.

Analizar las predicciones que los modelos realizan sobre la expansión anisótropa y contrastarla con las observaciones.

2. Introducción a la cosmología

Anteriormente, se creía que ocupamos un lugar muy especial en el Universo y se creía que éramos el centro del Universo. Pero en la cosmología moderna, esta idea ha sido abandonada “Estamos en un lugar que no es de ninguna manera especial en comparación con los otros lugares en el Universo”. La cosmología moderna se basa en dos supuestos fundamentales: Primero, la interacción dominante en las escalas cosmológicas es la gravedad, y segundo, el principio cosmológico es una buena aproximación al universo observable. El principio cosmológico establece que el universo, en escalas suficientemente grandes (alrededor de 100 Mpc, donde $1 \text{ pc} = 3.0857 \times 10^{16} \text{ m}$ o 3.26 años luz), es esencialmente homogéneo e isótropo. La “homogeneidad” tiene el significado intuitivo de que en un momento dado el universo se ve igual en todas partes, y la “isotropía” se refiere al hecho de que para cualquier observador comóvil se ve (localmente) igual en todas las direcciones.

Por otro lado, cómo se puede justificar el principio cosmológico? Obviamente, el universo no es homogéneo e isótropo en escalas del tamaño de nuestro Sistema Solar, nuestra Galaxia o incluso nuestro Grupo Local de galaxias. Sin embargo, el principio cosmológico ha sido invocado desde el comienzo de la cosmología moderna en la primera mitad del siglo XX, cuando casi no se conocía nada acerca de la estructura a gran escala en el universo. Las principales razones para su aceptación fueron la simplicidad y el "principio copernicano"; el principio copernicano el cual establece que, no ocupamos ningún lugar especial en el universo se ajusta al principio cosmológico perfectamente (Ellis, 2006). Si se percibe el universo que nos rodea como isótropo, el principio copernicano afirma que también otros observadores deberían ver el universo isótropo, ya que de

lo contrario ocuparíamos un lugar especial en el universo. Dado que un universo es isótropo en todas partes también es homogéneo, de esta manera el principio cosmológico es una conclusión relativamente directa a partir de una isotropía observada y el principio copernicano.

En las últimas dos décadas, la cantidad de datos en astronomía ha crecido enormemente, por lo que hoy el principio cosmológico puede discutirse en el contexto de una gran cantidad de observaciones diferentes y detalladas. Por ejemplo, la isotropía del universo con respecto a la Vía Láctea ha sido fuertemente confirmado por la notable isotropía en la RCF observada por los satélites WMAP y PLANCK.

Por otro lado, una gran cantidad de estudios de cumulo de galaxias con un bajo desplazamiento al rojo por lo telescopios 2-degree field galaxy redshift survey (2dfGRS) (Colless et al., 2001) y el Sloan Digital Sky Survey (SDSS) (York et al., 2000) han convencido a la mayoría de los cosmólogos que, la isotropía y la homogeneidad es de hecho una suposición razonable para el universo. Echando un vistazo a las imágenes del cielo generadas por estos telescopios (ver figura 1) es posible apreciar (incluso sin herramientas estadísticas) que la naturaleza fractal del universo se detiene en una escala determinada y construye una red de conglomerados y filamentos que se llama la estructura a gran escala.

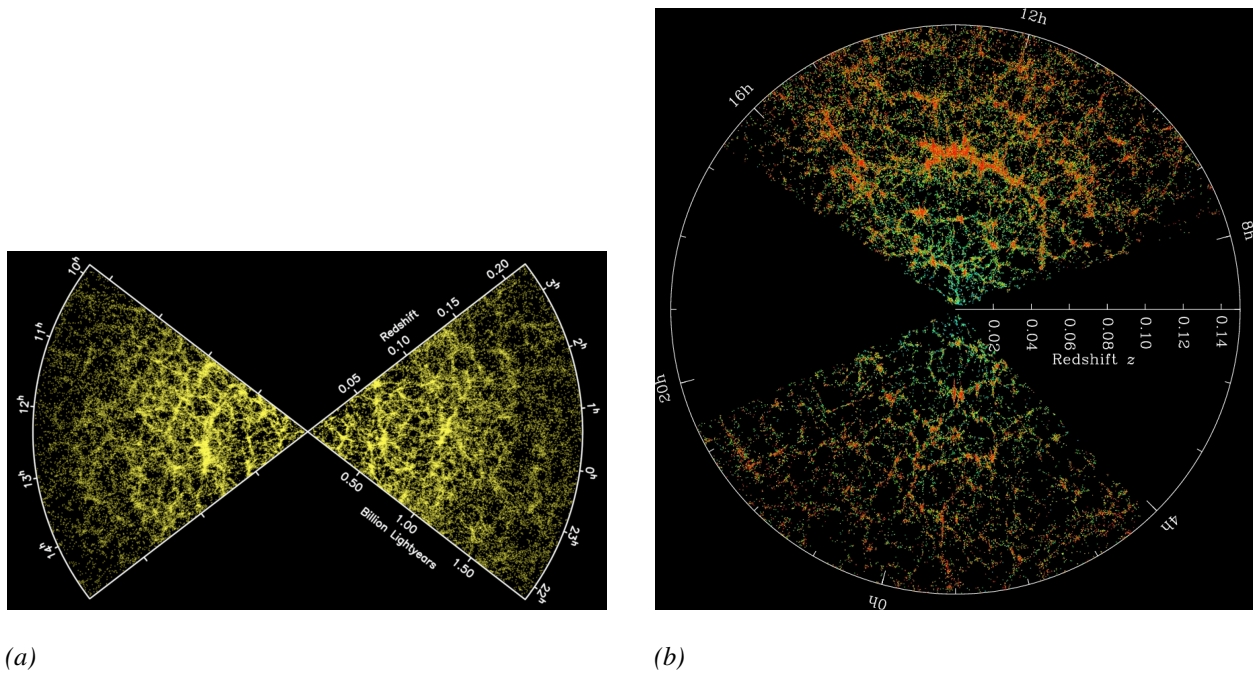


Figura 1. La estructura a gran escala observada con los estudios espectroscopicos de las galaxias. La figura superior 2a muestra dos conos del 2dfGRS y la figura inferior 2b dos conos del SDSS. Cada punto en la figura corresponde a una galaxia. Para los conos del SDSS, las galaxias se colorean de acuerdo con las edades de sus estrellas, donde el rojo corresponde a las poblaciones estelares más antiguas. Las estructuras se muestran con corrimiento al rojo $z \simeq 0.2$ que corresponde a un tiempo de aproximadamente 2.6 Gyr y una distancia de aproximadamente 800 Mpc. La estructura a gran escala está formado por capas y filamentos de galaxias, que pueden alcanzar hasta 100 Mpc. Cabe señalar que solo la materia luminosa es visible en dichas imagenes. (Créditos: equipo 2dfGRS, y M. R. Blanton y el equipo de SDSS)

Con todo lo anterior, la imagen estándar del Big Bang representa el Universo como una entidad en evolución, el Universo actual en realidad ha evolucionado desde una condición diferente a la que prevalece ahora. Esta imagen evolutiva del Universo está altamente respaldada por las observaciones cosmológicas que prácticamente descartan los modelos estacionarios del Universo. El principio cosmológico implica propiedades importantes, homogeneidad espacial e isotropía del Universo. La homogeneidad establece que el Universo es similar en todos los puntos espaciales y la

isotropía establece que el Universo es similar en todas las direcciones espaciales.

2.1. El universo en expansión

En 1925, V. Slipher midió las velocidades radiales de las nebulosas (Slipher, 1915), y señaló, sin interpretación, que la velocidad radial de algunas nebulosas espirales aumentaba con la distancia. E. Hubble demostró que algunos de estos “sistemas estelares” son galaxias, similares a nuestra Vía Láctea. Lemaître (Lemaître, 1927), Lundmark (Lundmark, 1925) y Hubble (Hubble, 1929) hicieron un análisis de la relación entre la velocidad radial v y la distancia d_l (la distancia de luminosidad) medida a partir de la magnitud aparente:

$$v = Hd_l, \quad (1)$$

donde H es una constante de proporcionalidad. La ecuación (1) a menudo se conoce como “ley de Hubble”³ y se ha probado a lo largo de los años con mayor precisión, como se muestra en la figura 2.

Esta observación empírica se interpretó casi de inmediato como la primera evidencia de que el universo es dinámico y que cuyo tamaño físico está creciendo con el tiempo. Cada objeto se alejaría el uno del otro debido a el efecto de la expansión del espacio mismo. Esto último está codificado en la evolución del llamado factor de escala $a(t)$ tal que la distancia física puede ser

³ Existe cierta controversia sobre quién descubrió esta ley. De hecho, Georges Lemaître publicó un documento en 1927 donde propuso que el Universo se está expandiendo y sugirió un valor de esta tasa de expansión. Pero fue Hubble quien trajo una confirmación experimental de esta hipótesis.

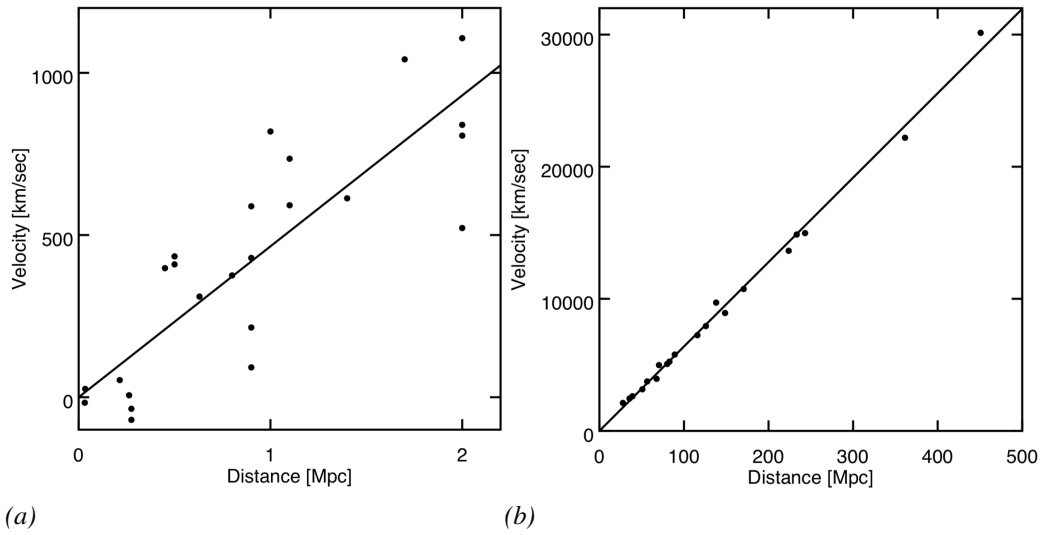


Figura 2. Diagramas del Hubble (como se indica en (Wright, 2005)) que muestran la relación entre las velocidades de recesión y las distancias de varios objetos astronómicos. El panel izquierdo presenta las medidas originales del Hubble (Hubble, 1929). El panel de la derecha muestra datos más recientes de objetos muy distantes (Riess et al., 1995, 1996).

reescrita como $d_f = a(t)x$, donde x es la distancia comóvil. Si la separación comóvil x es fija, es posible definir una velocidad relativa dada por la tasa de cambio de la distancia física, es decir,

$$v \equiv \frac{d}{dt}(d_f) = \dot{a}x = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) d_f \equiv H d_f, \quad (2)$$

en donde el punto indica derivada respecto al tiempo. Así, la velocidad relativa es proporcional a la distancia (si H es constante). Esto es independiente de la posición del observador, por lo tanto, es consistente con el principio copernicano: todas las galaxias se están alejando de todas las demás galaxias debido a la expansión del espacio. Si se coloca una cuadrícula uniforme en el espacio, entonces un observador verá que todos los puntos de la cuadrícula a su alrededor retroceden o se mueven hacia él con una velocidad proporcional a la distancia de los puntos de la cuadrícula.

Aunque un observador podría concluir que ella está en el centro del universo, esto no es cierto; la homogeneidad es totalmente respetada ya que cualquier otra posición en la cuadrícula vería lo mismo.

Sin embargo, las distancias en cosmología son cantidades que no son directamente observables, en cambio, lo que hay que usar es realmente lo que se puede medir, que son las propiedades de los objetos que se pueden ver; es decir, objetos en el cono de luz pasado. Cuando se mide la luz de objetos distantes también se puede medir su espectro, es decir, sus líneas espectrales. Lo que se realiza es comparar las líneas espectrales observadas con espectros conocidos, e inferir algo sobre la composición de los objetos distantes. Sin embargo, los espectros observados no son en realidad idénticos a los de la Tierra: están desplazados al rojo, lo que significa que todas las longitudes de onda (o las frecuencias equivalentes) se escalan por algún factor en comparación con lo que se mediría en el laboratorio. Esta relación de las frecuencias medidas a las fuentes se utiliza para definir el desplazamiento al rojo mediante la relación

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = v = \frac{v_e}{v_o} - 1, \quad (3)$$

donde λ_o y λ_e es la longitud de onda observada y emitida respectivamente y v es la velocidad radial de la fuente; se ha utilizado la relación $v = 1/\lambda$. Esta relación indica que si $z > 0$ los cuerpos luminosos se alejan y $z < 0$ los cuerpo se acercan a nosotros. Evidentemente la ecuación (3) no es otra cosa que el efecto Doppler, una fuente de ondas electromagnéticas que se mueve respecto a un observador; por supuesto, esto funciona para velocidades que son mucho menores que la velocidad

de la luz, por lo que la relación solo es válida para $z \ll 1$.

Cualquier objeto dado no tendrá un desplazamiento hacia el rojo que satisfaga exactamente la ley de Hubble porque tiene un movimiento local dinámico, llamado velocidad peculiar, pero promediando sobre muchos objetos (por lo que los movimientos locales promedian), la ley es una buena opción para objetos cercanos. Para objetos muy distantes, z se hace más grande y la aproximación $v \sim z$ se rompe; La ley del Hubble se aplica a los objetos cercanos, con $z \ll 1$, donde H_0 es la tasa de expansión actual. Para medir el parámetro H_0 de Hubble, se debe obtener la distancia y la velocidad. El último es sencillo ya que puede estar relacionado con el desplazamiento al rojo, z . Debido a la expansión cósmica, la luz emitida por un observador distante se estira mientras viaja hacia nosotros, ya que el emisor está retrocediendo con respecto a nosotros. Es conveniente definir este estiramiento de la longitud de onda de la luz emitida en términos del desplazamiento al rojo z :

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}, \quad (4)$$

donde $a(t_e)$ y $a(t_o)$ es el factor de escala en el momento de la emisión y observación de la luz respectivamente. Sin embargo, en la Relatividad General, el estiramiento de las longitudes de onda no surge solo de algo equivalente al efecto Doppler que se produce para las ondas electromagnéticas, sino también de la expansión del Universo, que diluye la energía del fotón en una porción más grande del espacio. Además, los fotones pueden ser desplazados al rojo (o hacia el azul) por cambios en las propiedades del espacio-tiempo o en el potencial gravitacional a lo largo de la trayectoria del fotón: un fotón es desplazado al rojo al salir de una región con un gran potencial gravitacional y es

desplazado hacia el azul cuando deja una región con pequeño potencial gravitacional.

La parte más difícil del proceso para determinar H_0 es la determinación de la distancia d_f . El desplazamiento al rojo se puede usar para conectar la distancia física $d_f(t_0)$ y la distancia luminosa d_l de un objeto. La distancia luminosa d_l se define como la distancia a la cual un observador P_0 en $t = t_0$ mide un flujo f desde una fuente P , emitiendo una potencia de luz L :

$$d_l = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

La superficie esférica centrada en P y que pasa a través de P_0 en un momento t_0 tiene un área $4\pi a^2 r^2$. Debido a que la expansión hace que el fotón se desvíe al rojo por un factor a_0/a_e durante el viaje, es posible derivar la relación entre la distancia luminosa y la física:

$$d_l = (1 + z)d_f. \quad (6)$$

Determinar la distancia luminosa se complican por el hecho de que normalmente no se conoce la magnitud de la potencia L para un objeto astrofísico determinado. Sin embargo, esto no es cierto para objetos particulares que se comportan como candelas estándar, las cuales tienen siempre la misma luminosidad y es posible obtener su distancia luminosa simplemente midiendo en la Tierra el flujo que producen. Las candelas estándar de uso común son, por ejemplo, las estrellas variables Cefeidas, ya que su brillo intrínseco está relacionado con el período pulsar. Otras candelas estándar son las Super Novas tipo Ia (SNIa), ya que siempre tienen la misma potencia de emisión.

2.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Bajo el supuesto del Principio Cosmológico, las propiedades más importantes del Universo son la homogeneidad y la isotropía. Las observaciones de la distribución de galaxias en el Universo y de la RCF están en gran acuerdo con la hipótesis de el Principio Cosmológico a escalas mayores que 100 Mpc: el Universo se ve estadísticamente igual desde todos los puntos de vista posibles, en todas las direcciones posibles en las que se observa. Estas propiedades corresponden a la homogeneidad, que es la invarianza bajo traslaciones, y la isotropía, que es invarianza bajo rotaciones.

Los espacios homogéneos e isótropos tienen el mayor grupo de simetría posible; En tres dimensiones hay tres traslaciones independientes y tres rotaciones. Estas simetrías restringen fuertemente la geometría admisible para tales espacios. Existen solo tres tipos de espacios homogéneos e isótropos con topología simple: (a) espacio plano, (b) una esfera tridimensional de curvatura positiva constante, y (c) un espacio hiperbólico tridimensional de curvatura negativa constante.

Una ayuda para visualizar estos espacios, se considera las superficies homogéneas e isótropas bidimensionales análogas. Dos casos bien conocidos de superficies isotrópicas homogéneas son el plano y 2-esfera, ambos se pueden incrustar en el espacio euclidiano tridimensional con las coordenadas cartesianas habituales x, y, z . La ecuación que describe esta incrustación de una esfera bidimensional es

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (7)$$

donde r es el radio de la esfera. Al diferenciar esta ecuación, se observa que, para dos puntos

infinitesimalmente cercanos en la esfera,

$$dz^2 = -\frac{xdx + ydy}{z} = \pm \frac{xdx + ydy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad (8)$$

al sustituir esta expresión en la métrica euclidiana tridimensional, se obtiene que

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

resulta

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (10)$$

De esta manera, la distancia entre un par de puntos ubicados en la 2-esfera se expresa completamente en términos de dos coordenadas independientes x e y , que están delimitadas por: $x^2 + y^2 \leq R^2$. Estas coordenadas, sin embargo, están degeneradas en el sentido de que a cada dato (x, y) corresponde dos puntos diferentes en la esfera ubicada en los hemisferios norte y sur. Es conveniente introducir en lugar de x e y las coordenadas angulares r' , ϕ definidas de manera estándar:

$$x = r' \cos \phi, \quad y = r' \sin \phi \quad (11)$$

Al diferenciar la relación $x^2 + y^2 = r'^2$, se obtiene: $x dx + y dy = r' dr'$, que al combinar con

$$dx^2 + dy^2 = dr'^2 + r'^2 d\phi^2 \quad (12)$$

que la combinar con la métrica de la ecuación (10) resulta

$$dl^2 = \frac{dr'^2}{1 - (r'/a)^2} + r'^2 d\phi^2. \quad (13)$$

El límite $R^2 \rightarrow \infty$ corresponde a un plano. También se puede tomar formalmente R^2 como negativo y luego la métrica de la ecuación (13) describe un espacio bidimensional isótropo homogéneo con una curvatura negativa constante, conocido como espacio de Lobachevski (Robert, 1984). A diferencia del plano o la esfera bidimensional, el espacio de Lobachevski no se puede incrustar en el espacio tridimensional euclidiano porque el radio de la “esfera” es imaginario (por eso este espacio se llama pseudoesfera o espacio hiperbólico). Por supuesto, esto no significa que este espacio no pueda existir. Cualquier espacio curvo se puede describir completamente en términos de su geometría interna sin hacer referencia a su incrustación.

Introduciendo la coordenada reescalada $r = r'/|a^2|$, se puede reformular la métrica de la ecuación (13) como

$$dl^2 = |a^2| \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\phi^2 \right). \quad (14)$$

donde $k = 1$ para la esfera ($a^2 > 0$), $k = -1$ para la pseudo-esfera ($a^2 < 0$) y $k = 0$ para el plano

(espacio plano bidimensional). En el espacio curvo, $|a^2|$ Caracteriza el radio de curvatura. En el espacio plano, sin embargo, la normalización de $|a^2|$ no tiene ningún significado físico y este factor puede ser absorbido por la redefinición de las coordenadas. La generalización de la consideración anterior a tres dimensiones es sencilla.

Al incrustar una esfera tridimensional (pseudo-esfera) en un espacio euclidiano (lorentziano) de cuatro dimensiones, verifique que la métrica de un espacio tridimensional de curvatura constante se pueda escribir como

$$dl_{3d}^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (15)$$

donde a^2 es positivo y $k = 0, \pm 1$. Al introducir la coordenada radial reescalada \bar{r} , definida por

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + k\bar{r}^2/4}, \quad (16)$$

y se muestra que esta métrica se puede reescribir en forma explícitamente isótropa:

$$dl_{3d}^2 = a^2 \frac{(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2)}{1 + k\bar{r}^2/4}, \quad (17)$$

donde

$$\bar{x} = \bar{r} \sin \theta \cos \phi, \quad \bar{y} = \bar{r} \sin \theta \sin \phi, \quad \bar{z} = \bar{r} \cos \theta. \quad (18)$$

En muchas aplicaciones, en lugar de la coordenada radial r , es conveniente coordinar χ definida a través de la relación

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (19)$$

Resulta que

$$\chi = \begin{cases} \operatorname{arcosh} r, & k = -1 \\ r, & k = 0 \\ \operatorname{arcsin} r & k = 1 \end{cases} \quad (20)$$

La coordenada χ varía entre 0 y ∞ en espacios planos e hiperbólicos, mientras que $\pi \geq \chi \geq 0$ en espacios con curvatura positiva ($k = 1$). En este último caso, a cada particular r le corresponde dos χ diferentes. En términos de χ , la métrica (15) toma la forma

$$dl_{3d}^2 = a^2(d\chi^2 + \Phi^2(\chi)d\Omega^2) \equiv a^2 \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sinh^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sin^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right] \begin{matrix} k = -1; \\ k = 0; \\ k = 1, \end{matrix} \quad (21)$$

donde

$$d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (22)$$

La única forma de preservar la homogeneidad y la isotropía del espacio y aun así incorporar la evolución del tiempo es permitir que el factor de escala, caracterizada por a , sea dependiente del tiempo. El factor de escala $a(t)$ describe así completamente la evolución temporal de un universo isótropo y homogéneo. En la teoría relativista, no hay tiempo absoluto y las distancias espaciales no son invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas. En cambio, el intervalo espacio-tiempo infinitesimal entre eventos es invariante. Sin embargo, existen sistemas de coordenadas preferidos en los que las simetrías del universo se manifiestan claramente. En uno de los sistemas de coordenadas más convenientes, el intervalo toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dl_{3d}^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (23)$$

en donde $k = 0$ corresponde a un universo plano, $k > 0$ corresponde a un universo cerrado y $k < 0$ a un universo abierto.

La métrica general en la ecuación (23) se derivó primero de consideraciones geométricas por Robertson (1933) y por Walker (1935). Friedmann y Lemaître derivaron las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein para esa métrica. En vista de esta historia, el espacio-tiempo con esta geometría a menudo se denominan de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), pero también se utilizan varios subconjuntos de esta colección de cuatro nombres. Parece apropiado usar el nombre Robertson-Walker cuando se hace referencia a la métrica general en la ecuación (23) y los nombres Friedmann o Lemaître cuando se hace referencia a las soluciones explícitas.

2.3. Dinámica del universo

Antes del descubrimiento de Hubble, Einstein ya había notado que una predicción de su teoría recién nacida de la Relatividad General era que el universo no es estático. Perplejo por sus implicaciones cosmológicas, en 1917 decidió aumentar sus ecuaciones con una constante cosmológica específica (Einstein, 1917) para evitar tal fenómeno. Sin embargo, la observación de Hubble y la consecuente interpretación confirmaron que vivimos en un Universo no estático. Un Universo dinámico es de hecho lo que viene naturalmente de la teoría de la gravedad de Einstein que relaciona la geometría del espacio-tiempo con su contenido de materia y energía a través de las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (24)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg}$ es la constante Gravitacional. Es conveniente definir la masa reducida de Planck como $M_p^2 \equiv 1/8\pi G$.

El tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ es el tensor de momentum-energía que contiene toda la información sobre la energía del Universo. Es posible demostrar que el tensor $T_{\mu\nu}$, compatible con la

homogeneidad e isotropía de Universo, es el de un fluido perfecto⁴, esto es

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (25)$$

donde ρ es la densidad de energía y p es la presión medida desde un marco de referencia comovil.

Con lo anterior presente, la métrica de FLRW y el tensor momentum-energía, las ecuaciones de campo de Einstein resultantes, las cuales son conocidas como las ecuaciones de Friedmann, pueden ser expresadas como

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_p^2} - \frac{k}{a^2} \quad (26)$$

$$H^2 + \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_p^2}(\rho + 3p) \quad (27)$$

Para extraer la evolución del factor de escala $a(t)$, se debe especificar el tipo de materia y resolver las ecuaciones (26) y (27). De hecho, estas dos ecuaciones se pueden combinar en la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (28)$$

que, alternativamente, también puede derivarse de la ecuación de balance de energía momento

⁴ Para mas detalle en: D. Baumann, “Part III: Cosmology”. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology.pdf>

$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$. Dependiendo de la relación entre la densidad de energía y presión, dictada por la ecuación de estado $p = \omega\rho$, donde ω es el parámetro de estado, es posible solucionar la ecuación (28) para la densidad de energía en función del factor de escala

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (29)$$

que, conectado nuevamente a la ecuación (28), genera

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+\omega)} & \text{si } \omega \neq -1 \\ e^{Ht} & \text{si } \omega = -1 \end{cases}, \quad (30)$$

en un espacio-tiempo con curvatura espacial nula ($k = 0$).

En el caso de partículas relativistas (radiación), $\omega = 1/3$, la densidad de energía y el factor de escala que se obtienen son $a \propto t^{1/2}$ y $\rho \propto a^{-4}$, respectivamente. En el caso de partículas no relativista (materia), $\omega = 0$, la densidad de energía y el factor de escala que se obtienen son $a \propto t^{2/3}$ y $\rho \propto a^{-3}$, respectivamente.

Para finalizar esta sección, se puede escribir la ecuación de Friedmann en una forma que es mejor para la discusión de las dificultades que afectan el modelo estándar cosmológico. Es posible definir, en cualquier momento, la densidad de energía crítica como

$$\rho_c \equiv 3H^2 M_p^2, \quad (31)$$

por lo tanto, la ecuación (26) se puede escribir como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2}, \quad (32)$$

donde $\Omega = \rho/\rho_c$ es el parámetro de densidad de energía. Si la densidad de energía del Universo es igual a la densidad de energía crítica, $\rho = \rho_c$, entonces el parámetro de curvatura es $k = 0$, lo que significa que la geometría es plana. Si $\rho > \rho_c$, entonces el valor de k es positivo y puede ser escalado como $+1$. Similarmente para $\rho < \rho_c$ el valor de k es negativo y puede ser escalado como -1 .

2.4. Problemas de la cosmología estándar

Antes de presentar los problemas de la cosmología estándar, vale la pena intentar responder a lo siguiente: ¿Las condiciones iniciales se deben dar por una teoría o pueden ser fijados por separado? Para responder a esta pregunta, es importante revisar lo que sucede en la mecánica clásica. Para determinar la evolución de un sistema en la mecánica clásica, se necesita proporcionar las condiciones iniciales de forma adicional a la ecuación de movimiento de Newton. Por lo tanto, no es obvio si se supone que una teoría cosmológica predice o explica las condiciones iniciales del universo o se pueden fijar por separado. La expectativa más natural es que la situación actual del universo se puede alcanzar genéricamente y sin demasiado ajuste en las condiciones iniciales.

Para especificar la condición inicial del universo, consideramos una porción espacial de tiempo constante Σ . En esta superficie se define las posiciones y velocidades de todas las partículas de materia. Las leyes de la gravedad y la dinámica de los fluidos se utilizan para evolucionar el

sistema hacia adelante en el tiempo. Para definir la homogeneidad inicial se describe la distribución espacial de la materia por su densidad y presión en función de las coordenadas \mathbf{x} , es decir, $\rho(\mathbf{x})$ y $p(\mathbf{x})$. Por otro lado, las inhomogeneidades son gravitacionalmente inestables y, por lo tanto, crecen con el tiempo. Las observaciones de la RCF muestran que las inhomogeneidades fueron mucho más pequeñas en el pasado que en la actualidad. Por lo tanto, se espera que estas inhomogeneidades sean aún más pequeñas en épocas aún más tempranas. ¿Cómo se explica esta “suavidad” del universo primitivo? Esto es particularmente sorprendente ya que se mostrará que en la imagen del Big Bang convencional, el universo temprano (por ejemplo, en el período que se origina la RCF) consistía en un gran número de regiones del espacio causalmente desconectadas. En la teoría del Big Bang, no hay ninguna razón dinámica para explicar por qué estos parches separados causalmente muestran condiciones físicas similares. Por lo tanto, el problema de homogeneidad a menudo se llama el problema del horizonte.

Además de especificar la distribución de densidad inicial, la caracterización completa del problema de Cauchy del universo requiere las velocidades de los fluidos en cada punto del espacio. Para asegurarse de que el universo permanezca homogéneo en los últimos tiempos, se requiere que las velocidades iniciales del fluido tomen valores muy precisos. Si las velocidades iniciales son solo demasiado pequeñas, el universo recae en una fracción de segundo. Si son demasiado grandes, el universo se expande demasiado rápido y rápidamente se vuelve casi vacío. El ajuste fino de las velocidades iniciales se hace más dramático considerándolo en combinación con el problema del horizonte. Las velocidades de los fluidos deben ajustarse con precisión en regiones del espacio separadas causalmente. Dado que la diferencia entre la energía potencial y la energía cinética define

la curvatura local de una región del espacio, este ajuste fino de las velocidades iniciales a menudo se denomina problema de planitud.

Sin embargo, como se mostrará a continuación, resulta que el modelo cosmológico estándar requiere condiciones iniciales muy ajustadas para permitir que el universo se vea como lo que es hoy. Esto plantea el siguiente acertijo: parece que nuestro universo es el resultado de un “accidente improbable” y, por lo tanto, es un fenómeno antinatural, que si es correcto, convierte a la cosmología en un tema muy decepcionante !

No obstante, hay una idea brillante, es decir, en una teoría inamovible en la cual es posible superar el problema mencionado anteriormente. Como se discutirá brevemente a continuación, la visión de la cosmología estándar necesita tener algunas mejoras en sus condiciones iniciales del universo. Aquí se trata de ilustrar lo que se desea decir respecto a las mejoras en las condiciones iniciales con un poco más de detalles.

2.4.1. Problema del horizonte. Dado un espacio-tiempo, la escala física causal la establecen las geodésicas nulas, que son las trayectorias de los fotones. En un universo FLRW, con curvatura plana, las geodésicas radiales nulas (es decir, con θ y ϕ constantes) son definidas como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dr^2 \quad \Rightarrow \quad dr = \pm \frac{dt}{a}. \quad (33)$$

Si se asume que el Universo estuvo dominado por la materia ordinaria con un parámetro de estado $\omega > -1/3$ durante la mayor parte de su evolución y, retrocediendo en el tiempo, el factor de escala $a(t)$ disminuye hasta el punto singular $a(0) = 0$. En este caso, hay una distancia máxima a la que

un observador, en un momento dado t_f , puede ver una señal de luz enviada en $t = 0$. En un sistema de coordenadas comóvil, esto viene dado por el llamado *horizonte de partículas comóvil*, el cual, a partir de la ecuación (33), se puede escribir como

$$r_{hp} = \int_0^{t_f} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{a_f} \left(\frac{1}{aH} \right) d \ln a, \quad (34)$$

donde, en el último paso, se ha implementado la definición del parámetro de Hubble $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ y el cambio de variable $d(\ln a) = da/a$. La cantidad $(aH)^{-1}$ es conocida como el radio de Hubble.

Tomando la ecuación (30) e integrando la ecuación (34) se obtiene

$$r_{hp} \sim a_f^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \sim (a_f H_f)^{-1}, \quad (35)$$

donde el subíndice “ f ” significa calculado en el tiempo $t = t_f$.

Como es posible observar en la expresión anterior el radio de Hubble comóvil y el horizonte de partículas son básicamente los mismos en la cosmología estándar, como se puede ver en la ecuación (34). La imagen resultante es que, en un Universo en expansión lleno de materia, el horizonte crece con el tiempo según lo dado por la ecuación. (35). Esto significa que las escalas comóvil que entran en el horizonte hoy en día nunca han estado en contacto causal. Estas regiones deberían verse bastante diferentes unas de otras ya que nunca podrían intercambiar ninguna información antes.

Significa que en cada instante de tiempo, las nuevas regiones que nunca habían estado en contacto causal entran en contacto por primera vez. Esto significa que deben verse muy diferentes

entre sí (a menos que el universo no haya decidido comenzar en un estado homogéneo). Pero si miramos a nuestro alrededor, el universo parece ser homogéneo en escalas que entraron en contacto causal muy recientemente o será que tal vez simplemente se equilibran muy rápido? Incluso si esta posibilidad poco probable fuera cierta, hacer que el problema sea aún más agudo cuando se observa que la RCF. En este caso, podemos tomar una instantánea de las regiones desconectadas casualmente (en el momento en que aún estaban desconectadas), y vemos que se parecen a lo mismo. Este es el problema del horizonte.

Después de presentar un resumen del problema de horizonte, vale la pena echar un vistazo con algunos números. El tamaño físico del horizonte de partículas se representa como: $D = r_{hp}a \sim H^{-1}$, de esta manera el horizonte de partículas en el momento de la recombinación⁵ se puede representar como:

$$D_{rec} \propto (H_{rec}^2)^{-1/2} \propto (T_{rec}^3)^{-1/2}, \quad (36)$$

donde T_{rec} es la temperatura en el momento de la recombinación.

En esta última expresión se ha implementado el hecho que en este período: $H_{rec}^2 \propto \rho_m \propto a^{-3}$, con ρ_m siendo la densidad de materia, y la temperatura varía de la forma, $T \propto 1/a$. De esta manera, es posible preguntarse, cuántas regiones causalmente conectadas se originaron en el período de

⁵ La recombinación se refiere a una época en la que los electrones y los nucleones se combinan para formar átomos. Antes de esto, el universo estaba demasiado caliente para que se formaran los átomos de hidrógeno eléctricamente neutros.

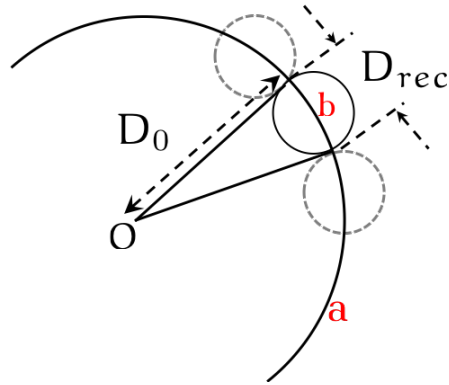


Figura 3. Cuando se observa la RCF, esta proviene de la superficie “a” en la época de la recombinación. Sin embargo, cuando se emitió la luz, el universo era mucho más joven, en ese tiempo la luz solo habría llegado hasta los círculos más pequeños, denotado por “b”. Las dos esferas en líneas punteadas en la figura no habrían podido contactarse entre sí porque sus esferas de causalidad no se superponen.

recombinación y es posible que sean observadas hoy en día? Esta pregunta puede ser resuelta a partir del horizonte de partículas en el momento de recombinación:

$$\frac{D_0}{D_{rec}} \sim \frac{H_0^{-1}}{H_{rec}^{-1}} \sim \left(\frac{T_{rec}}{T_0} \right)^{3/2} \sim 10^5, \quad (37)$$

esto indica que la región correspondiente a nuestro actual universo observado, existen 10^5 regiones causalmente conectadas en su interior al momento de la recombinación, además al momento que esto ocurre se genera la RCF, y se espera que cada una de estas regiones, causalmente conectadas, tengan una temperatura completamente diferente a las temperaturas de las otras regiones causalmente conectadas.

A partir de la figura 3, la superficie en la época de recombinación solo corresponde

$$\theta_{rec} = \frac{D_{rec}}{D_0} \sim \left(\frac{T_0}{T_{rec}} \right)^{1/2} = 0.03 \text{ rad} \approx 1.8^\circ, \quad (38)$$

esto quiere decir que si se observa la radiación de fondo en dos puntos en el cielo separados más de aproximadamente 2° , estos puntos nunca estuvieron en contacto entre sí, ninguna información puede haber viajado de un punto a otro. En la figura 4 se observa la última observación de la RCF del satélite PLANCK. La temperatura media de $T = 2.7126 \text{ K}$ se ha restado de tal manera que solo se observa las fluctuaciones alrededor de la temperatura media. Estas fluctuaciones provienen de las fluctuaciones de densidad en el plasma en el período de recombinación. Muchas de las fluctuaciones que se ven en la figura 4 tienen una extensión angular de varios grados. Esto significa que las fluctuaciones de densidad en el período de recombinación, los grumos en el plasma, fueron más grandes que el horizonte. Pero, cómo pueden formarse estos grumos que son más grandes que el horizonte? Para crear grumos en el plasma, los dos puntos en el espacio finales deben haber estado en contacto, lo que no pudo haber sucedido. Este es el problema del horizonte.

2.4.2. Problema de planitud. En la cosmología estándar, un Universo en expansión se aleja naturalmente de ser plano. En un universo dominado por la materia, $a \sim t^{2/3}$, $H \sim 1/t$ lo que genera: $aH \sim t^{-1/3}$, mientras que para la época dominada por la radiación, $a \sim t^{1/2}$, $H \sim 1/t$

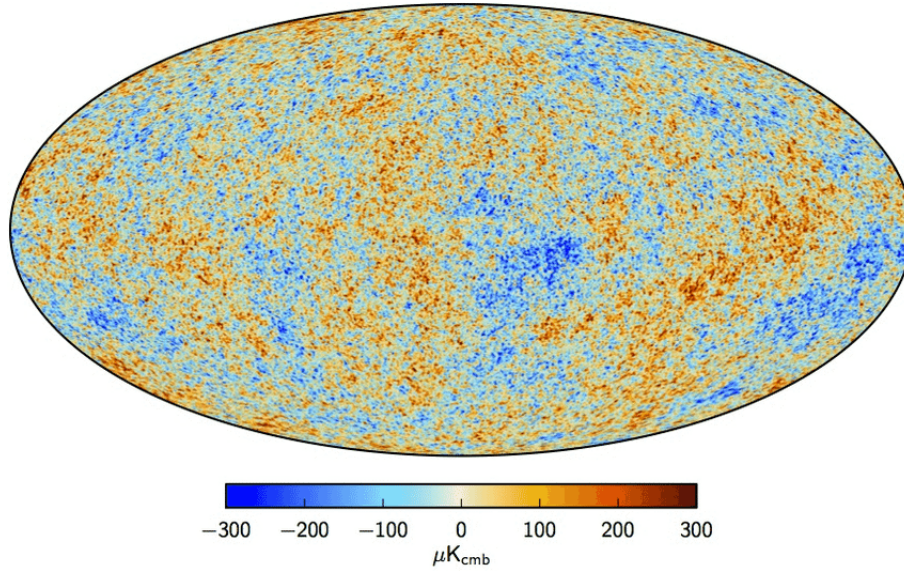


Figura 4. La temperatura observada de la RCF medida en diferentes direcciones en el cielo. El mapa está en coordenadas galácticas. Los puntos a lo largo del ecuador de esta esfera son observaciones hechas hacia el plano galáctico. Se han implementado técnicas de procesamiento de señales para eliminar la emisión galáctica para "ver a través" de la galaxia en esta imagen (Ade et al., 2016c).

se encuentra que: $aH \sim t^{-1/2}$, por lo tanto, a partir de la ecuación (32),

$$|\Omega - 1| \sim \begin{cases} t & \text{radiación} \\ t^{2/3} & \text{materia} \end{cases} \quad (39)$$

En un universo dominado por radiación o materia, la suma de las densidades de energía diverge de la unidad ya que la cantidad $|\Omega - 1|$ aumenta con el tiempo. La sorpresa viene con observaciones cosmológicas que sugieren que el universo hoy en día debe ser plano con una precisión extrema. Específicamente, los últimos datos del Planck (Ade et al., 2016a) muestran que $|\Omega - 1| = 0.000 \pm 0.005$. Esto implica que, retrocediendo en el tiempo, la curvatura del Universo debería haber estado aún más cerca de la planitud perfecta, $k = 0$. En general, se necesitaría un ajuste fino en las

condiciones iniciales del Universo para estar en concordancia con las observaciones, lo cual hace que los físicos se sientan incómodos. Una explicación dinámica de lo que observamos hoy en día sería ciertamente más deseable.

2.4.3. Problema de la formación de estructura a gran escala. Las observaciones de las anisotropías en la última superficie de dispersión, muestran que las amplitudes son pequeñas y casi invariantes en escala. Estas fluctuaciones se extienden a una escala tan grande que es prácticamente imposible generarlas entre el Big Bang y el momento de la última dispersión en la cosmología estándar. Este problema es casi equivalente al problema del horizonte mencionado anteriormente, es decir, la cosmología estándar no puede proporcionar una explicación satisfactoria del origen de la estructura a gran escala. Es. decir, hay una estructura no trivial en el RCF en escalas angulares que, según la cosmología estándar, nunca podría haber estado en contacto causal. Por lo tanto, la cosmología estándar no puede explicar el origen de la estructura en estas grandes escalas. Este es el problema de la formación de estructura a gran escala.

2.5. Inflación

Las deficiencias de la cosmología estándar se refieren a las condiciones iniciales de nuestro Universo que requieren un ajuste fino serio para reproducir lo que observamos hoy. El problema de planitud se puede resolver suponiendo que el valor inicial de la curvatura era precisamente plana ($k = 0$). De manera similar, para resolver el problema del horizonte, uno debe imaginar que al menos 10^6 regiones espaciales causalmente desconectados han comenzado su evolución exactamente en las mismas condiciones físicas, en particular a la misma temperatura y la misma magnitud de perturbaciones. Postular todo esto es posible, pero poco atractivo para un físico que

pretende comprender el Universo primitivo.

Para hacerlo mejor, se propuso la inflación en la década de 1980 (Guth, 1981; Linde, 1982) para resolver todos estos problemas a la vez. La idea fundamental es que el Universo primordial experimentó una fase finita de expansión cuasiexponencial (similar a la que estamos experimentando hoy en día con la energía oscura) que cambió la estructura causal y cómo se propaga la información. Como beneficio adicional, se obtiene un mecanismo físico para explicar la presencia de inhomogeneidades muy pequeñas como fluctuaciones cuánticas en el Universo primitivo; en última instancia, estos representan las semillas de las estructuras a gran escala que observamos en el cielo.

2.5.1. Definición de inflación. La cosmología estándar supone que el Universo temprano estaba dominado por alguna forma de energía que satisfacía la condición de energía fuerte $\rho + 3p \geq 0$, lo que implica una fase de desaceleración del factor de escala, $\ddot{a} < 0$, según lo dictado por la ecuación (26). Esto es el núcleo de los problemas de planitud y horizonte.

Por lo tanto, una posible solución es postular una fase de expansión de aceleración, antes de cualquier fase de deceleración. En una fase de aceleración, el contacto causal es mejor en épocas anteriores, por lo que regiones remotas de nuestro universo actual podrían haber estado en contacto causal y mantener las mismas características físicas en el universo primitivo. Tal fase de aceleración se llama período de inflación. Por lo tanto, la definición básica de inflación es que

$$\ddot{a} > 0, \tag{40}$$

de hecho, se puede reformular esta condición de una manera alternativa que sea físicamente más significativa considerando el horizonte de partículas definido en la ecuación (35), es decir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) = -\frac{\ddot{a}}{a^2},$$

y entonces la condición (40) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0, \quad (41)$$

ésta se usa como la definición fundamental de inflación, ya que esta relacionada directamente con los problemas de horizonte y planitud.

Lo anterior implica, a partir de (27), que el universo fue dominado por algún tipo de materia con presión negativa que satisface

$$\rho + 3p < 0 \quad (42)$$

La idea de que, en los primeros instantes del universo, ni la materia ni la radiación representaban los componentes dominantes de la energía, no contrastaba con ninguna teoría física bien probada. De hecho, no se puede suponer que el modelo estándar de físicas partículas funcione hasta los primeros momentos después del Big Bang, cuando las escalas energías fueron varios órdenes de magnitud más altas que el dominio de validez del modelo estándar (que se extiende hasta alrededor de 1 TeV). El período inflacionario vive de la idea de que algo no trivial podría haber sucedido debido a la

física de altas energías.

Por otro lado, la tasa de cambio del radio de Hubble con respecto al tiempo puede ser expresado como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{aH} \right) = \frac{\varepsilon - 1}{a}, \quad \text{con} \quad \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN}, \quad (43)$$

donde ε es conocido como el parámetro de rodadura lenta. Se ha definido N como el número de *e-folds* como

$$dN \equiv d \ln a = H dt, \quad (44)$$

que mide el número de pliegues (*folds*) N de expansión inflacionaria. Entonces, un período inflacionario tiene lugar siempre y cuando

$$\varepsilon < 1, \quad (45)$$

lo que significa que el parámetro de Hubble debe variar muy lentamente en el tiempo. La fase inflacionaria corresponde a una expansión casi exponencial en donde H es casi constante durante todo el período inflacionario.

Para asegurar que inflación perdure lo suficiente para resolver los problemas de la cosmología estándar, se define un segundo parámetro importante que controla la duración de este proceso (en la siguiente subsección, se cuantificará la cantidad de la inflación necesaria para resolver los problemas

cosmológicos estándares). Esto se define como

$$\eta \equiv \frac{d \ln \epsilon}{dN}. \quad (46)$$

La condición $|\eta| < 1$ básicamente significa tener una pequeña variación fraccional de ϵ lo que garantiza que inflación perdure el tiempo suficiente para resolver los problemas de la cosmología estándar.

2.5.2. Solución de los problemas de la cosmología estándar y el monto de inflación. El problema del horizonte se resuelve si se permite que inflación perdure lo suficiente como para que también las escalas más grandes que observamos en el cielo hoy en día estuvieran dentro del horizonte de partículas en los primeros momentos del universo. Cuantitativamente, esto significa que las escalas comóviles del Universo observable hoy $(a_0 H_0)^{-1}$ deben caber dentro del radio del Hubble comóvil al comienzo de la inflación $(a_i H_i)^{-1}$, lo cual quiere decir

$$(a_i H_i)^{-1} > (a_0 H_0)^{-1}; \quad (47)$$

un estimado de la cantidad de inflación necesaria (duración del período inflacionario en número de *e-folds*) para explicar la termalización de las escalas de observación más grandes en la actualidad (Lyth and Liddle, 2009; Weinberg, 2008; Mukhanov, 2005), es que inflación dure entre 50 - 60 *e-folds*.

Se puede obtener una estimación aproximada suponiendo que el Universo ha sido dominado

principalmente por la radiación desde el final de inflación (en ese momento, el radio del Hubble comóvil era igual a $(a_f H_f)^{-1}$). Esto implica que el parámetro de Hubble escala como $H \propto a^{-2}$, por lo tanto

$$\frac{a_0 H_0}{a_f H_f} \sim \frac{a_f}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_f} \sim 10^{-28}, \quad (48)$$

donde se asume $T_0 = 10^{-3}$ eV, como la temperatura de la RCF medida hoy y $T_f = 10^{15}$ GeV como la típica energía inflacionaria esperada. Entonces, la ecuación (47) se convierte en

$$(a_i H_i)^{-1} > 10^{28} (a_f H_f)^{-1}, \quad (49)$$

lo que significa que el radio Hubble tuvo que reducir 28 órdenes de magnitud para resolver el problema del horizonte. Dado que durante la inflación H es casi constante, por lo que $H_i \approx H_f$, lo que resulta en

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^{28}, \quad (50)$$

y usando la ecuación (44), implica

$$N > 64. \quad (51)$$

El problema de planitud se supera por medio del mismo mecanismo. Un radio de Hubble comóvil

decreciente fomenta un valor de la densidad de energía total, Ω , a la unidad, proporcionando una explicación física para esta configuración aparentemente ajustada. Después de inflación, la curvatura comenzará a divergir desde $\Omega \approx 1$, como ocurre en un Universo dominado por materia. Curiosamente, la misma cantidad de inflación necesaria para resolver el problema del horizonte es suficiente para explicar la planitud que observamos hoy. De hecho, durante inflación se tiene

$$\Omega - 1 = \frac{k^2}{(aH)^2} \propto e^{-2N} \rightarrow 0, \quad (52)$$

el mismo número de *e-folds* citados anteriormente daría la precisión requerida para el valor observado hoy.

2.6. Inflación mediante un campo escalar

El modelo más simple posible para el estudio de la dinámica inflacionaria es mediante un campo escalar, conocido como el campo inflatón, ϕ . Aquí omitimos la realización física de este campo escalar y solo tratamos de usarlo como un modelo de juguete para impulsar un período inflación. Para hacerlo lo más simple posible, suponemos que el campo escalar está acoplado mínimamente a la gravedad. Entonces, la acción que describe este sistema viene dada por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right] = \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_\phi, \quad (53)$$

donde g es el determinante de la métrica, M_p es la masa de Planck, R es el escalar de Ricci, la coma “,” indica la derivada parcial espacio-temporal y $V(\phi)$ es el potencial asociado al campo escalar.

La acción anterior es la suma de la acción gravitatoria de Einstein-Hilbert, así como la de un campo escalar con un término cinético canónico.

El tensor energía-momento para el campo escalar viene dado por

$$T_{\mu\nu}^{\phi} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{\phi}}{\delta g_{\mu\nu}} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) \quad (54)$$

Asumiendo que la métrica es la de FLRW, como se muestra en la ecuación (23) y, que la curvatura espacial es nula, las componentes del tensor energía-momentum toman la siguiente forma:

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (55)$$

$$P_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (56)$$

La dinámica y la interacción del campo escalar con la métrica del espacio-tiempo son descritas por las siguientes dos ecuaciones

$$H^2 = \frac{\rho_{\phi}}{3M_p^2} = \frac{1}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right], \quad (57)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (58)$$

donde $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$.

La ecuación de aceleración para un Universo dominado por el campo escalar homogéneo del

inflatón puede se escrita como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_p^2}(\rho_\phi + 3P_\phi) = H^2(1 - \varepsilon), \quad (59)$$

en donde ε es posible relacionarla con la presión y la densidad de energía del campo escalar ϕ como

$$\varepsilon = \frac{3}{2}(1 + \omega_\phi). \quad (60)$$

Con ayuda de las ecuaciones (57), (59), (55) y (56) se obtiene un resultado importante

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2}, \quad (61)$$

lo que implica que la evolución temporal del parámetro de Hubble depende de la energía cinética del campo escalar ϕ .

De esta manera es posible definir un parámetro de rodadura lenta, a partir de las ecuaciones (43) y (61), como

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2 H^2}. \quad (62)$$

A continuación se procede a definir la aproximación de rodadura lenta, en donde el período inflacionario es casi exponencial, es decir el factor de escalar evoluciona como: $a \sim e^{Ht}$, esto ocasiona que, a partir de la ecuación (30), $\omega_\phi \rightarrow -1$, lo que conlleva a que a partir de la ecuación

(60) que $\varepsilon \rightarrow 0$. Lo anterior muestra que la energía potencial domina sobre el energía cinética, esto es

$$\varepsilon = \frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1 \rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2} \ll \frac{1}{3M_p^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \Rightarrow V(\phi) \gg \dot{\phi}^2. \quad (63)$$

Como consecuencia de los anterior y a partir de las ecuaciones (57), (58) y (61), se tiene que

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_p^2} \quad \text{y} \quad 3H\dot{\phi} \simeq V'(\phi) \quad \Rightarrow \quad |\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V_{,\phi}|. \quad (64)$$

El régimen descrito por la ecuación anterior se dice inflación de rodadura lenta, ya que el campo evoluciona muy lentamente con respecto al crecimiento casi exponencial de el factor de escala. Intuitivamente, tal escenario es posible siempre que la forma del potencial sea lo suficientemente plano.

A partir del resultado anterior se puede definir un segundo parámetro de rodadura lenta η como

$$|\eta - \varepsilon| = \left| \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right|. \quad (65)$$

De esta manera, se podría decir que el cambio fraccional de $\dot{\phi}$ por el número de $e - fold$ es pequeño, por lo tanto se han establecido los dos parámetros de rodadura lenta ε y η sujetos a las condiciones

$$\varepsilon, |\eta| \ll 1. \quad (66)$$

Es fácil calcular la cantidad de *e-folds* antes de que termine la inflación, ya que

$$\begin{aligned} N &\equiv \frac{a_f}{a_i} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi. \end{aligned} \quad (67)$$

Como vimos antes, para resolver los problemas de horizonte y planitud, necesitamos alrededor de 60 *e-folds*,

$$N_{total} = \ln \left(\frac{a_i}{a_f} \right) \gtrsim 60. \quad (68)$$

Vale la pena mencionar que el número total requerido de *e-folds* depende de la escala de energía de la inflación, así como de algunos detalles de los modelos pos-inflacionarios. También se debe resaltar que las anisotropías observadas en el RCF se han creado alrededor del final de inflación (Lyth and Liddle, 2009; Weinberg, 2008; Mukhanov, 2005).

2.6.1. Origen de la estructura a gran escala. La razón por la cual la inflación inevitablemente produce fluctuaciones es la siguiente: como se mostró en esta sección, la evolución de inflatón $\phi(t)$ domina la densidad de energía del universo temprano $\rho(t)$ y, por lo tanto, controla el fin del período inflacionario. Esencialmente, $\phi(t)$ desempeña el papel de un reloj local que lee la cantidad de expansión inflacionaria restante. Debido a que estos relojes son objetos mecánico-cuánticos con necesariamente alguna variación (según el principio de incertidumbre), inflación tendrá fluctuaciones espacialmente variables $\delta\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) + \bar{\phi}(t)$ donde la barra indica que es

medida en el fondo no perturbado de FLRW. Estas fluctuaciones implican que diferentes regiones del espacio se expanden en diferentes cantidades. En otras palabras, habrá diferencias locales en el momento en que la inflación termine. Además, estas diferencias en las historias de expansión local conducen a diferencias en las densidades locales después de inflación. En la teoría cuántica, las fluctuaciones locales en la densidad de energía, $\delta\rho(t, \mathbf{x})$, quedan plasmadas en las anisotropías observadas en la temperatura, ΔT , de la RCF (Lyth and Liddle, 2009; Weinberg, 2008; Mukhanov, 2005).

2.6.1.1. Perturbación en la curvatura. En un universo perturbado, la división en un fondo homogéneo y la perturbación no se pueden hacer de forma única ya que depende de la elección de las coordenadas, es decir, la elección del *gauge*; el *gauge* es solo una selección de hilos temporales que definen una posición constante y una selección de cortes espaciales que definen un tiempo constante. En un universo homogéneo, las coordenadas habituales de la posición FLRW corresponden a hilos que siguen a observadores en caída libre que ven la expansión del universo como isotrópica. Con el corte habitual con el tiempo cósmico, la densidad de energía del universo evoluciona con el tiempo, pero es homogénea en cada momento. Sin embargo, con un corte diferente, se crean perturbaciones ficticias en la densidad de energía. De manera similar, en un universo perturbado, se puede elegir un corte para ocultar las perturbaciones en la densidad de energía. Bajo estos cambios de *gauge*, el cambio en las perturbaciones de la densidad de energía aparentes se compensa con otros cambios en la presión y las perturbaciones en la métrica. Al considerar combinaciones invariantes de *gauge*, las perturbaciones ficticias se pueden distinguir de las perturbaciones verdaderas: un universo homogéneo siempre es homogéneo en cantidades

invariantes de *gauge* y los universos perturbados tienen perturbaciones invariantes de *gauge* que no pueden ocultarse (Lyth and Liddle, 2009; Weinberg, 2008; Mukhanov, 2005).

En general, las perturbaciones escalares de un universo homogéneo lleno con un fluido perfecto pueden ser descritas por las perturbaciones en el fluido como: densidad de energía $\delta\rho$, presión δp y flujo de momentum δq , así como las perturbaciones en la métrica Φ , Ψ , B y E :

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a\partial_i B dx^i dt + a^2 ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2\delta_{ij}E) dx^i dx^j \quad (69)$$

con la ecuación de Einstein que relaciona las perturbaciones del fluido con las perturbaciones métricas, reflejando cómo la materia y el espacio-tiempo reaccionan entre sí.

Una cantidad útil invariable de *gauge* para caracterizar las perturbaciones escalares durante inflación es la perturbación de curvatura \mathcal{R} (Bardeen, 1980). La perturbación de la curvatura mide la curvatura espacial en lonjas o rebanadas comoviles, rebanadas donde no hay flujo de energía. Durante inflación, estas rebanadas corresponden a rebanadas de valor constante del campo del inflatón ϕ .

$$\mathcal{R} = \Psi - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta\rho \quad (70)$$

que durante la inflación se convierte en:

$$\mathcal{R} = \Psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi \quad (71)$$

en donde las ecuaciones de Einstein determinan la evolución de la perturbación de la curvatura. Cuando se consideran modos mucho más grandes que el horizonte (escalas de superhorizonte):

$$\dot{\mathcal{R}} = -\frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \left(\delta p - \frac{\dot{\bar{p}}}{\dot{\bar{\rho}}} \delta \rho \right). \quad (72)$$

Si la presión es solo una función de la densidad y no una función de la entropía, es decir $p = p(\rho)$, entonces las perturbaciones en la curvatura son adiabáticas, así que no hay perturbación entropía y $\delta p - (\dot{\bar{p}}/\dot{\bar{\rho}})\delta\rho = 0$ se satisface. Por lo tanto, para las perturbaciones adiabáticas, es constante en las escalas de superhorizon. De esta manera, inflación del tipo de rodadura lenta tiene una ecuación de estado, por lo que las perturbaciones creadas durante la inflación son adiabáticas y permanecen así incluso después del final de inflación.

Un campo escalar acoplado mínimamente a la gravedad se rige por la acción de la ecuación (53) donde la acción habitual de Einstein-Hilbert tiene un término cinético canónico y un término potencial agregado. El tensor energía-momentum se puede encontrar variando la acción con respecto a la métrica, como se muestra en la ecuación (54), mientras que la ecuación de movimiento se puede encontrar variando la acción con respecto al campo del inflatón. Suponiendo un universo homogéneo, es decir, una métrica FLRW y homogénea produce los resultados habituales para inflación como se muestra en las ecuaciones (55) y (56).

La acción en la ecuación (53) puede perturbarse para encontrar la evolución clásica de las perturbaciones durante la inflación. El resto de este cálculo sigue de cerca la formulación de J. Maldacena (Maldacena, 2003). Escogiendo un *gauge* donde $\delta\phi = 0$, resulta que la perturbación en

la métrica es: $\delta g_{ij} = a^2(-2\mathcal{R}\delta_{ij} + h_{ij})$. Al introducir estas perturbaciones en la acción, el término de orden más bajo es de segundo orden:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^4x a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left(\dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{(\partial_i \mathcal{R})^2}{a^2} \right). \quad (73)$$

Al introducir las variables definidas por Mukhanov (Mukhanov and Winitzki, 2007):

$$v = z\mathcal{R} \text{ donde, } z^2 = a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \quad (74)$$

y transformar a tiempo conforme, donde la prima denotan derivadas respecto a el tiempo conforme, lo que conduce a:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left((v')^2 + (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right). \quad (75)$$

Recordando que la perturbación de la curvatura surge de una transformación de *gauge* que oculta la perturbación del campo del inflatón. por lo tanto, contiene información sobre las perturbaciones del campo de inflatón y las perturbaciones de la métrica (junto con la ecuación de Einstein). Esta ecuación diferencial ahora describe la evolución clásica de las perturbaciones durante la inflación a través de la variable de Mukhanov, que es solo un cambio de las variables de la perturbación de la curvatura \mathcal{R} .

2.6.1.2. Cuantización. Ahora se ha mostrado el comportamiento clásico de las perturbaciones inflacionarias del principio de acción, se puede cuantificar el sistema para encontrar

la perturbación cuántica. Para ello, el campo se promueve a un operador, y sus componentes de Fourier se descomponen con los operadores de escalera y en los modos $v_k(\tau)$:

$$\hat{v}_k = v_k(\tau)\hat{a}_k + v_{-k}^*(\tau)\hat{a}_{-k}^\dagger, \quad (76)$$

asegurando que $\hat{v} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \hat{v}_k$ es Hermítico. Reemplazando los modos clásicos v_k por su operador \hat{v}_k muestra que los modos $v_k(\tau)$ obedecen la misma ecuación diferencial que los componentes de Fourier v_k de el campo clásico. Entonces, el impulso del campo, v' , tiene el operador:

$$\hat{v}'_k = v'_k(\tau)\hat{a}_k + v_{-k}^{*\prime}(\tau)\hat{a}_{-k}^\dagger. \quad (77)$$

Así que el conmutador del operador de campo y su operador de impulso es:

$$[\hat{v}_k \hat{v}'_k] = i(v_k^*(\tau)v'_k(\tau) - v_k^{*\prime}(\tau)v_k(\tau)) [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] \quad (78)$$

Imponiendo la relación canónica de conmutación posición-momento $[\hat{v}, \hat{v}^\dagger] = i$ y el conmutador estándar para los operadores de subida y bajada $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ requiere que los modo v_k se normalicen, dando una condición de contorno en la ecuación diferencial para v_k . La otra condición de contorno proviene de especificar el estado de vacío $\hat{a}_k|0\rangle = 0$. En analogía con el oscilador armónico cuántico, se requiere que el vacío sea el estado fundamental: el estado propio de energía más baja del Hamiltoniano. No hay una opción única, pero la opción estándar es tomar el límite del pasado infinito cuando todas las escalas de comóviles k están dentro del horizonte del Hubble; dentro del

horizonte cualquier escala k se puede tratar como si estuviera en el espacio-tiempo de Minkowski, donde existe una opción de vacío única, que especifica la segunda condición de contorno.

Para una teoría inflacionaria específica, esta ecuación diferencial se puede resolver numéricamente, utilizando la evolución de z^2 (ver la ecuación (74)) determinada por la evolución del campo homogéneo del inflatón. En la aproximación de la inflación de rodadura lenta, $\dot{\phi}$ cambia muy lentamente y el parámetro de Hubble H es prácticamente constante, de esta manera la dependencia de z con el tiempo vienen principalmente de $a(\tau)$. Con un parámetro de Hubble constante, el tiempo conforme se puede escribir como: $\tau = -\frac{1}{aH}$, en donde $\tau = 0$ corresponde al final del período inflacionario. Por lo tanto, en este límite:

$$\frac{z''}{z} = \frac{a''}{a} = \frac{2}{\tau^2} \rightarrow v_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2} v_k \right) = 0, \quad (79)$$

que se puede resolver exactamente, con las condiciones de contorno desde la normalización de v_k y la elección del vacío, dando como resultado:

$$v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right), \quad (80)$$

por lo que el espectro de potencia del campo se puede encontrar:

$$\langle \hat{v}_k \hat{v}_k \rangle = (2\pi)^3 |v_k|^2 = \frac{(2\pi)^3 (aH)^2}{k^3} \frac{1}{2} (1 + k^2 \tau^2). \quad (81)$$

Cuando la longitud de onda del modo se encuentra en escalas de superhorizonte: $a/k \gg 1/H \rightarrow$

$|k\tau| \ll 1$, por lo que la expresión anterior se puede escribir como:

$$\langle \hat{v}_k \hat{v}_k \rangle = \frac{(2\pi)^3}{k^3} \frac{(aH)^2}{2}. \quad (82)$$

Cambiando variables de nuevo a la perturbación en la curvatura,

$$\langle \hat{\mathcal{R}}_k \hat{\mathcal{R}}_k \rangle = \frac{(2\pi)^3}{k^3} \frac{H^4}{2\dot{\phi}^2}, \quad (83)$$

durante el período inflacionario del tipo rodadura lenta, estas cantidades varían lentamente, H y $\dot{\phi}$. El espectro de potencia de los modos son constante después del cruce del horizonte, pero salen del horizonte en diferentes momentos; el espectro de potencia constante de los modos depende de las condiciones inflacionarias en el momento de su cruce del horizonte. Luego, el espectro de potencia que cada modo adquiere después de su cruce del horizonte se puede encontrar al evaluar las expresiones anteriores utilizando $\dot{\phi}$ y H evaluadas en el cruce del horizonte para éste modo, $a_*H_* = k$:

$$\langle \hat{\mathcal{R}}_k \hat{\mathcal{R}}_k \rangle = \frac{(2\pi)^3}{k^3} \frac{H_*^4}{2\dot{\phi}_*^2}, \quad (84)$$

o expresado como un espectro de potencia sin dimensiones:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{\langle \hat{\mathcal{R}}_k \hat{\mathcal{R}}_k \rangle}{(2\pi)^3} = \frac{H_*^4}{4\pi^2 \dot{\phi}_*^2}. \quad (85)$$

Éste espectro es casi invariante en escala porque $\dot{\phi}$ y H cambia lentamente durante la inflación, y su amplitud depende de esos parámetros inflacionarios. Si $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ es independiente de k , se dice que el espectro es invariante de escala. Sin embargo, dado que $\dot{\phi}$ y H son funciones del tiempo (que varían lentamente), se predice que el espectro de potencia se desviará ligeramente de la forma invariante de escala $\Delta_{\mathcal{R}}^2 \sim k^0$. Cerca de una escala de referencia k_* , la dependencia de k del espectro toma una forma de ley de potencia (Harrison, 1970; Zeldovich, 1972; Peebles and Yu, 1970):

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 \equiv A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}. \quad (86)$$

La amplitud medida del espectro escalar en $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ (Ade et al., 2016a):

$$A_s = (2.143 \pm 0.051) \times 10^{-9}. \quad (87)$$

Para cuantificar la desviación de la invarianza de escala, se ha introducido el índice espectral escalar

$$n_s - 1 = \frac{d \log \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \log k} \quad (88)$$

donde el lado derecho se evalúa en $k = k_*$ y $n_s = 1$ corresponde a la perfecta invarianza de escala.

Debido a que la perturbación de la curvatura se conserva para los modos en escalas de superhorizonte, éste espectro se conserva hasta que estos modos vuelven a entrar en el horizonte. Por lo tanto, esta predicción inflacionaria se puede llevar a los tiempos en que se sostiene la cosmología estándar del Big Bang, permitiendo una comparación directa con las observaciones.

Para inflación de rodadura lenta, la desviación del índice espectral del espectro de perturbación se puede encontrar en términos de los parámetros de rodadura lenta (Baumann, 2011; Liddle and Lyth, 2000):

$$n_s - 1 = \frac{d \log \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \log k} = 2\eta - 4\varepsilon = -2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dN}, \quad (89)$$

donde N es el número de *e-folds*, ε y η son los parámetros de rodadura lenta definidos en las ecuaciones (62) y (65) respectivamente. Dado que los parámetros de rodadura lenta son funciones del tiempo, la desviación espectral depende débilmente de la escala, pero a menudo se evalúa en una escala pivote cercana a las escalas de perturbaciones observadas. Durante el período de rodadura lenta, $0 < \varepsilon \ll 1$ e inflación termina cuando $\varepsilon \sim 1$, por lo que ε crece con el tiempo y disminuye respecto a N . De esta manera, $n_s - 1 < 0$, prediciendo un espectro rojo: un espectro con más potencia a escalas más pequeñas (Chung et al., 2003).

Las ondas gravitacionales primordiales se producen por un mecanismo similar a la perturbación de la densidad de energía primordial, excepto que las ondas gravitacionales se originan por perturbaciones tensoriales en lugar de perturbaciones escalares. La amplitud de las ondas gravitacionales a menudo se parametrizan en términos de la relación tensor-escalar (Lyth and Liddle, 2009):

$$r = \frac{\Delta_T^2}{\Delta_{\mathcal{R}}^2}, \quad (90)$$

donde $\Delta_T^2 = 2H_*/\pi^2$ es el espectro de potencia de los modos tensoriales. Este resultado es la predicción de inflación más robusta e independiente del modelo. Se observa que la amplitud tensorial es una medida directa de la tasa de expansión H durante la inflación.

La dependencia de escala observada del espectro de potencia hace que sea necesario especificar la escala de desarrollo, k , en la que las cantidades están restringidas y, por lo tanto, el tiempo de salida del Hubble, $k = a_*H_*$, cuando las cantidades teóricas correspondientes se calculan durante la inflación. Esto generalmente se expresa en términos del número de *e-folds* desde el final de la inflación (Liddle and Leach, 2003):

$$N_*(k) \simeq 67 - \ln\left(\frac{k}{a_0H_0}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{V_*}{M_p^4 \rho_{fin}}\right) + \frac{1}{12} \ln\left(\frac{\rho_{rc}}{\rho_{fin}}\right) - \frac{1}{12} \ln(g_*), \quad (91)$$

donde $1/a_0H_0$ es el tamaño actual del horizonte Hubble comóvil. Diferentes modelos de recalentamiento y, por lo tanto, diferentes temperaturas y densidades de recalentamiento, ρ_{rc} en la (91), conduce a un rango de valores posibles para N_* que corresponde a una escala física fija, y por lo tanto se tiene un rango de predicciones observacionales para un modelo de inflación dado, como se ve en la figura 5.

Los datos de la temperatura y polarización de Planck 2015 (Ade et al., 2016a) son consistentes con un espectro de potencia suave en un rango de números de onda $0.008 h^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \leq k \leq 0.1 h^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. En ausencia de dependencia en la escala, las observaciones han detectado recientemente la

pequeña desviación de la invariancia de escala predicha por la inflación (Ade et al., 2016a)

$$n_s = 0.9681 \pm 0.0044. \quad (92)$$

La figura 5 compara las restricciones observacionales de la RCF en inclinación del índice del espectro de las perturbaciones escalares, n_s y la relación tensor-escalar, r , entre las magnitudes de las perturbaciones tensoriales y escalares. Los roles importantes se reproducen con datos del satélite Planck, BICEP2 / Keck Array (BKP) y mediciones de *Baryon Acoustic Oscillations* (BAO). Estas restricciones experimentales se comparan con las predicciones de algunos de los modelos inflacionarios. En términos generales, los modelos con un potencial cóncavo se favorecen sobre aquellos con un potencial convexo, y los modelos con inflación de la ley de potencia, en oposición a la expansión exponencial similar a la de Sitter, ahora están excluidos (Ade et al., 2016d).

2.6.2. Evidencia observacional de la expansión acelerada del Universo. La evidencia observacional directa de la expansión acelerada actual del universo se ha encontrado midiendo el corrimiento al rojo de diferentes supernovas. Durante muchos años las galaxias más brillantes fueron las principales candelas⁶ estándar para observar la expansión del universo. Pero ahora la supernova tipo Ia (SNIa) ha reemplazado a las galaxias y ha demostrado ser una excelente vela estándar. La supernova de tipo Ia se observa cuando una enana blanca excede el límite de Chandra-

⁶ Son objetos cuyo brillo intrínseco se conoce y por lo tanto se puede comparar con su brillo aparente para dar una medida de su distancia de nosotros. Las supernovas tipo Ia son de este tipo de objetos.

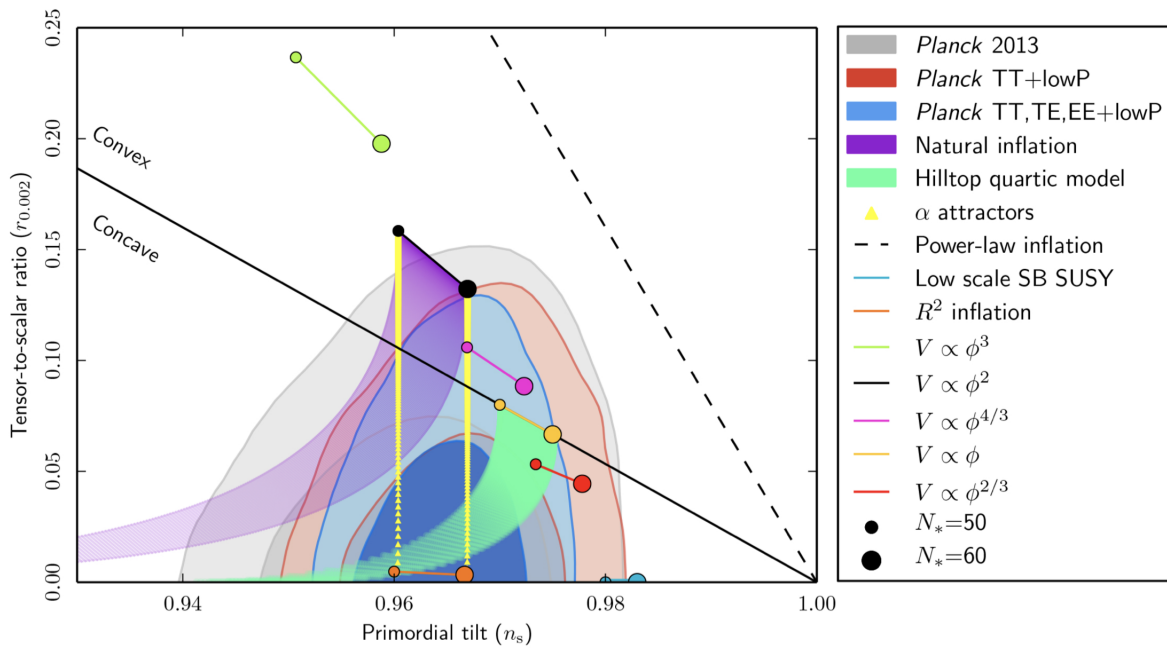


Figura 5. Regiones conjuntas marginadas de 68% y 95% de nivel de confianza para el índice del espectro de perturbación escalares, n_s , y la relación tensor-escalar, r , obtenidas de los datos de Planck 2015 y sus combinaciones con BICEP2 / Keck Array y/o BAO, en comparación con las predicciones teóricas de algunos modelos inflacionarios seleccionados. Esta imagen fue tomada de la referencia (Ade et al., 2016d).

sekhara por acumulación de masa de su estrella compañera del par binario y explota (Chandrasekhar and Thorne, 1985).

En 1998, a partir de la observación de la SNIa por Riess et al (et al., 1998) y Perlmutter et al (et al., 1999) indicaron que el universo actual está experimentando una expansión acelerada. La clave para esto fue proporcionada por la relación magnitud-desplazamiento hacia el rojo. Se encontró que para un universo plano, homogéneo e isótropo, aproximadamente el 70 % de la densidad de energía consiste en algún tipo de componente misterioso. Este misterioso componente de energía del universo que impulsa la expansión acelerada del universo y se le ha llamado energía oscura. También se encontró que el parámetro de densidad de energía de la materia $\Omega_m^{(0)} = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$. Más tarde, la expansión acelerada del universo se confirma con muchas otras observaciones. Otro resultado interesante es un fenómeno reciente que se encontró a partir de estas observaciones de la expansión acelerada del universo. A partir de los datos del alto corrimiento al rojo ($z > 1.5$) de la SNIa, Riess et al (et al., 2004) en 2004 mostraron que el universo exhibió una transición de una fase de expansión desacelerada a una acelerada a un desplazamiento al rojo de $z \simeq 0.45$. Este resultado es crucial ya que indica que el universo de hecho tuvo una fase de desaceleración que es de suma importancia para la nucleosíntesis y la posterior formación de la estructura. Super Nova Legacy Survey (SNLS) (Astier et al., 2006) y WMAP (Jassal et al., 2010) muestran un excelente acuerdo y confirman la expansión acelerada del universo. WMAP y SNLS juntos proporcionan un parámetro de densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0.72 \pm 0.04$.

2.7. Intentos teóricos para explicar la aceleración del Universo

Como ya se mencionó, para los componentes conocidos del Universo no es posible generar la expansión acelerada. Existen diferentes alternativas teóricas en la literatura para explicar la aceleración cósmica. Aunque, todavía hoy, ninguno de ellos ha sido aceptado universalmente como el que es perfecto, tiene un apoyo teórico y una pista hacia la detección directa. Los intentos se clasifican ampliamente en dos clases. Uno es el modelo de energía oscura, donde se introduce algún componente exótico que puede generar suficiente presión negativa para impulsar la expansión acelerada del universo. El enfoque de la energía oscura se basa en la suposición de que el Relatividad General es la teoría apropiada de la gravedad. La segunda forma es buscar una modificación adecuada de Relatividad General, en donde una característica interesante de estos modelos es que la aceleración tardía del universo se puede realizar sin considerar ningún componente de materia exótica.

De esta manera, ambos enfoques son aplicables en el modelado de la etapa inflacionaria y la expansión acelerada del Universo observada hoy en día. Estos dos enfoques serán discutidos a continuación.

2.7.1. Modelos de Energía oscura.

A. Constante cosmológica

Para lograr un universo estático, Einstein introdujo la constante cosmológica en su ecuación en 1917 (Einstein, 1952). En 1929, Hubble descubrió la expansión acelerada del universo y Einstein abandonó su idea de la constante cosmológica. Pero después del descubrimiento

de la aceleración actual del universo, la constante cosmológica se ha considerado como la forma más popular y más simple posible de representar la energía oscura. El modelo de energía oscura con constante cosmológica se llama Λ CDM (por sus siglas en inglés, cosmological constant Λ with pressureless cold dark matter). La densidad de energía de la constante asociada a Λ es,

$$\rho_\Lambda = M_p^2 \Lambda = -P_\Lambda, \quad (93)$$

en este caso el parámetro de estado para la constante cosmológica es $\omega_\Lambda = -1$. El modelo de constante cosmológica es preferido por la mayoría de las observaciones con un buen nivel de precisión. Pero hay ciertos problemas relacionados con la constante cosmológica. La densidad de energía de vacío constante es el único candidato posible para explicar la constante cosmológica. Pero sufre de la enorme discrepancia entre el valor estimado por la observación (ρ_Λ^{Obs}) y el valor calculado teóricamente (ρ_Λ^{Teo}). La relación es $\rho_\Lambda^{Obs} / \rho_\Lambda^{Teo} \sim 10^{-120}$. Este es el problema de ajuste fino del modelo con constante cosmológica. Carroll (Carroll, 2001) y Padmanabhan (Padmanabhan, 2003) han discutido en detalle diferentes aspectos de este modelo.

B. Modelos con campo escalar

I. Quintaesencia

El modelo de quintaesencia es el más popular entre los diferentes modelos de energía oscura

que evoluciona en el tiempo. La idea es introducir un campo escalar homogéneo dependiente del tiempo $\phi(t)$, mínimamente acoplado a la gravedad y la naturaleza del campo se caracteriza por un potencial $V(\phi)$ asociado al campo escalar. La acción en este modelo es como se muestra en la ecuación (53). De esta manera, el tensor energía-impulso, la densidad de energía y la presión asociadas a este modelo de quintaesencia son como se muestra en las ecuaciones (54-56).

Por lo tanto, la expresión de la ecuación del parámetro de estado (ω_ϕ) para la energía oscura de un campo escalar de quintaesencia es dada por,

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (94)$$

Por otro lado, el potencial del modelo de quintaesencia puede ser expresado como,

$$V(\phi) = \left(\frac{1 - \omega_\phi}{1 + \omega_\phi} \right) \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \quad (95)$$

lo que indica que el parámetro de estado para quintaesencia depende del tiempo. Con lo anterior, dependiendo de la naturaleza del potencial de quintaesencia, los modelos de quintaesencia se clasifican en tres clases diferentes.

- Si $V(\phi) \ll \dot{\phi}^2$, entonces $\omega \simeq 1$ y la densidad de energía varía como $\rho_\phi \propto a^{-6}$. Esto no contribuye como una energía oscura.
- Si $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, entonces $\omega \simeq -1$ y la densidad de energía $\rho_\phi \propto const.$ que es equivalente

a la constante cosmológica.

- Para un escenario intermedio $-1 < \omega_\phi < 1$ la densidad de energía varía como $\rho_\phi \propto a^{-n}$.

El campo de quintaesencia generará una expansión acelerada para $0 \leq n \leq 2$ (Copeland et al., 2006).

La idea del campo escalar de quintaesencia fue introducida inicialmente por en el contexto de inflación por Ratra y Peeble (Ratra and Peebles, 1988) y por Wetterich (Wetterich, 1988). Hay una gran cantidad de estudios en la literatura en el contexto de la aceleración cósmica tardía con diferentes tipos de potencial de quintaesencia. Un potencial de la forma: $V(\phi) \propto \frac{1}{\phi^\alpha}$ (donde α es una constante) se introdujo por primera vez en el contexto de la energía oscura, en donde un potencial exponencial puede generar una expansión acelerada, ya que es posible encontrar que el factor de escala evoluciona de la forma: $a \propto t^m$ (donde m es una constante positiva), sin embargo, un potencial exponencial no puede explicar la transición de la fase de expansión desacelerada a acelerada. Un doble potencial exponencial puede exitosamente generar la aceleración actual y la fase de expansión desacelerada que prevaleció en el pasado reciente (Sen and Sethi, 2002).

Los modelos escalares de quintaesencia con algunos ajustes finos pueden abordar el problema de la coincidencia cósmica⁷.

⁷ El problema de coincidencia en cosmología se relaciona con el hecho de que, se observa que las densidades fraccionales de materia y energía oscura son aproximadamente las mismas $\Omega_m \sim \Omega_\Lambda$. Esta relación entre las

Las observaciones sugirieron que actualmente la densidad de energía del campo escalar (ρ_ϕ) y la densidad de energía de la materia (ρ_m) son comparables en orden de magnitud. Surge la pregunta, ¿Cómo estas dos densidades de energía disminuyen a ritmos diferentes? la respuesta a esta pregunta requeriría un ajuste fino de las condiciones iniciales para que estas densidades de energía sean comparables en este momento. La idea es introducir el potencial de quintaesencia de tal manera que la densidad de energía (ρ_ϕ) se comporte de una manera muy similar a la densidad de materia oscura para un amplio rango de condiciones iniciales. En realidad, la idea es que la densidad de energía oscura seguirá una evolución que es muy similar a la evolución de la densidad de la materia y en la era reciente la energía oscura dominaría la dinámica del universo. Esta clase de modelos son conocidos como *tracking behaviour* de la energía oscura de quintaesencia. Esta idea fue presentada por primera vez por Zlatev, Wang y Steinhardt (Zlatev et al., 1999).

II. K-esencia

Este es un modelo de campo escalar donde la parte cinética tiene la contribución dominante en la densidad de energía. Esta es la diferencia básica entre el modelo K-esencia y el modelo de quintaesencia, donde el potencial de quintaesencia toma el papel

densidades es del orden de uno justo en la época actual y esto puede verse como una coincidencia ya que requiere condiciones iniciales muy especiales en el Universo temprano.

principal en la contribución a la densidad de energía oscura. La idea de la expansión acelerada impulsada por la parte cinética del campo escalar la cual se introdujo por primera vez en el contexto de la inflación (Armendariz-Picon et al., 1999). En el contexto de explicar la aceleración actual del universo, fue introducido por Chiba et al. (Chiba et al., 2000) y con una mayor generalización fue hecha por Armendariz-Picon et al. (Armendariz-Picon et al., 2001).

La acción para los modelos K-esencia está escrita como,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} P(\phi, X), \quad (96)$$

donde $X = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ es la energía cinética y la densidad lagrangiana $P(\phi, X)$. En caso que la energía cinética domine, la densidad lagrangiana $P(\phi, X) \rightarrow 0$ para $X \rightarrow 0$.

Si se realiza una expansión en serie de $P(\phi, X)$ alrededor de $X = 0$ se obtiene,

$$P(\phi, X) = K(\phi)X + L(\phi)X^2 + \dots, \quad (97)$$

de esta manera los términos de orden superior a X pueden despreciarse cuando $X \rightarrow 0$.

El parámetro de estado de energía oscura para este modelo es dado por la siguiente expresión

$$\omega_\phi = \frac{1 - X}{1 - 3X}. \quad (98)$$

Para obtener una expansión acelerada, a partir de la ecuación (42), $\omega_\phi < -\frac{1}{3}$, esto significa que $X < \frac{2}{3}$. Para $X = \frac{1}{2}$, $\omega = -1$ quiere decir que este modelo puede recuperar el modelo de constante cosmológica para una condición particular.

Para un modelo cosmológico viable, $f(\phi)$ debe ajustarse para que sea del orden de la densidad de energía del Universo. Las discusiones generales sobre el modelo K-esencia se dan en (Barger and Marfatia, 2001; Li and Zhang, 2003; Malquarti et al., 2003b,a).

III. Campo de taquiones

La idea del modelo de campo de taquiones está inspirada en la teoría de cuerdas. Un taquión tiene una masa cuadrada negativa y la velocidad es mayor que la velocidad de la luz. Se produce en el momento de la descomposición de D-brane (Bergshoeff et al., 2000; Garousi, 2002, 2003) y tiene una ecuación de parámetro de estado que varía entre -1 a 0 y, por lo tanto, se puede elegir como un candidato viable de energía oscura (Gibbons, 2002). Los modelos de energía oscura taquiónica que pueden generar con éxito la aceleración del tiempo tardío se discuten en la referencia (Bagla et al., 2003; Abramo and Finelli, 2003; Aguirregabiria and Lazkoz, 2004; Copeland et al., 2005).

El estado del campo de taquiones se basa en el máximo del potencial asociado y con una pequeña perturbación, se reduce a la masa real. La acción relevante para un campo

de taquiones se da como,

$$\mathcal{S} = - \int d^4x V(\phi) \sqrt{-\det(g_{ab} + \phi_{,\alpha\beta})}, \quad (99)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial taquiónico.

El parámetro de estado de energía oscura en este modelo es dado por $\omega_\phi = \dot{\phi}^2 - 1$, y para una expansión acelerada, $\dot{\phi}^2 < \frac{2}{3}$.

IV. Campo fantasma

En el contexto de la energía oscura, el campo fantasma fue discutido por primera vez por Caldwell (Caldwell, 2002). La diferencia básica del campo fantasma del campo de quintaesencia es que el campo fantasma tiene energía cinética negativa. La acción del campo fantasma se escribe como,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} L(\phi, X), \quad (100)$$

donde $L(\phi, X) = -X - L(\phi)$. Esta es la diferencia de los modelos de campo fantasma con los modelos de quintaesencia de la energía oscura. El parámetro de estado de energía oscura viene dada por

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}. \quad (101)$$

Si $2V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ entonces $\omega_\phi < -1$. Como consecuencia, esto conduce a una expansión muy rápida del Universo hasta un grado que, el factor de escala crece hacia el infinito, dentro de un tiempo finito. Este escenario se llama Big Rip, donde tanto el volumen como la tasa de expansión aumentan infinitamente. Un potencial de campo fantasma con un máximo puede evitar el Big Rip. Por ejemplo, un tipo de potencial de forma: $V(\phi) = V_0 \left[\cosh\left(\frac{\alpha\phi}{M_p}\right) \right]^{-1}$, donde α es una constante, puede evitar el Big Rip. El campo descansa en el máximo después de una oscilación amortiguada y, por lo tanto, la ecuación del parámetro de estado $w_\phi = -1$ ya que $\dot{\phi} = 0$. Por lo tanto, en este modelo se puede restaurar el escenario de la constante cosmológica.

2.7.2. Modelos de gravedad modificada. La otra forma de buscar la explicación plausible del fenómeno de aceleración cósmica es la modificación de la Relatividad General. Hay varias formas de modificación de la teoría de la gravedad. Diferentes modelos de gravedad $f(R)$ (Capozziello, 2002; Carroll et al., 2004, 2005; Nojiri and Odintsov, 2006, 2007), teoría del tensor escalar (Amendola, 1999; Uzan, 1999; Chiba, 1999; Bartolo and Pietroni, 2000; Banerjee and Pavon, 2001a; Riazuelo and Uzan, 2002; Mota and Barrow, 2004), teorías de gravedad dimensional superior (Deffayet et al., 2002; Nojiri et al., 2006; Dvali et al., 2000; Bamba et al., 2014; Hossain et al., 2014), pertenecen a la clase de teoría de la gravedad modificada. Aunque esta clase de modelos son buenos intentos teóricos y explican adecuadamente la aceleración cósmica, normalmente poseen falencias para explicar las observaciones astronómicas locales. Algunas de las teorías de gravedad modificadas se discuten a continuación.

2.7.2.1. Gravedad $f(R)$. La modificación más simple de la Relatividad General es la gravedad $f(R)$ consiste en reemplazar el escalar Ricci, R , como una función analítica $f = f(R)$. Por lo tanto, la acción de gravedad $f(R)$ se da como,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \mathcal{L}_m], \quad (102)$$

donde \mathcal{L}_m es el Lagrangiano de materia.

Dependiendo de la forma de $f(R)$, estos modelos pueden generar el escenario de inflación temprana o una expansión acelerada en tiempos tardíos (el tipo de expansión que experimenta actualmente el Universo). Por ejemplo, los modelos con $f(R) \sim R^2$ pueden generar un período de inflación cósmica y los modelos con $f(R) \sim 1/R^n$, con $n > 0$, son viables para generar la expansión acelerada actual del Universo. La gravedad $f(R)$ en el contexto la inflación ha sido discutida por Starobinsky (Starobinsky, 1980), Kerner (Kerner, 1982) y por Duruisseau y Kerner (Duruiseau and Kerner, 1986). A medida que la curvatura R disminuye con el tiempo, la potencia inversa de R en la expresión de $f(R)$ puede tener una contribución significativa en la generación de la aceleración del tiempo tardío. En el contexto de la aceleración cósmica tardía, la gravedad $f(R)$ ha sido invocada por Capozziello et al (Duruiseau and Kerner, 1986), Nojiri y Odintsov (Nojiri and Odintsov, 2004), Carroll et al. (Carroll et al., 2004), Das, Banerjee y Dadhich (Das et al., 2006).

2.7.2.2. Teorías tensor-escalar. La idea básica de una teoría del tensor-escalar es el acoplamiento no mínimo entre el campo escalares y la geometría del espacio-tiempo. El enfoque más simple en esta dirección es la teoría de Brans-Dicke (Brans and Dicke, 1961a), donde el campo

escalar se acopla al escalar de Ricci y, por lo tanto, el Lagrangiano se da como,

$$\mathcal{L} = \frac{\phi R}{2} - \frac{\omega_{BD}}{2\phi} (\nabla\phi)^2 \quad (103)$$

donde ω_{BD} es el parámetro de Brans-Dicke. En el límite del campo débil, la teoría de Brans-Dicke se asemeja a la Relatividad General pero es diferente de ésta en el régimen no lineal (Banerjee and Sen, 1997). La teoría generalizada de Brans-Dicke se comporta como una quintaesencia acoplada en un marco conforme (Amendola, 2000). Banerjee y Pavon (Banerjee and Pavon, 2001b) han demostrado que la aceleración cósmica se genera en la teoría de Brans-Dicke sin introducir ningún componente exótico en el sector de la materia. También requiere un valor negativo, que en valor absoluto sea pequeño, $-\omega_{BD} \sim \mathcal{O}(1)$ en el escenario cosmológico, lo cual entra en conflicto directo con el límite inferior impuesto sobre $|\omega_{BD}|$ por experimentos del sistema solar, es decir $|\omega_{BD}| > 4 \times 10^4$ (Bertotti et al., 2003b).

3. Introducción a los sistemas dinámicos

Las ecuaciones diferenciales establecen una relación entre las funciones y sus derivadas y cuyo desarrollo fue realizado por primera vez por Newton a mediados del siglo XVII. Newton las aplicó en su teoría de la gravitación y descubrió la solución para el sistema de dos cuerpos, por ejemplo, el movimiento de Sol y Tierra. El problema de los tres cuerpos, por ejemplo, el movimiento del Sol, la Tierra y la Luna era un tema de larga data y parecía ser imposible de resolver. La ruptura llegó a fines del siglo XIX, cuando Poincaré descubrió un enfoque geométrico para estudiar cualitativamente un sistema en lugar de estudiarlo cuantitativamente. Este fue el nacimiento

de una nueva asignatura llamada análisis de sistemas dinámicos (Perko, 2013).

¿Qué es un sistema dinámico? Puede ser algo tan sencillo como un péndulo simple hasta algo tan complejo como el cerebro humano y el universo entero en sí mismo. Un sistema dinámico consiste en

1. un espacio (espacio de estado o fase), y
2. una regla matemática que describe la evolución de cualquier punto en ese espacio.

El estado del sistema es un conjunto de cantidades que se consideran importantes para el sistema y el espacio de estados es el conjunto de todos los valores posibles de estas cantidades. En el caso de un péndulo, la posición y el momento son cantidades naturales para especificar el estado del sistema. Para sistemas más complicados como lo son en el contexto cosmológico, la elección de buenas cantidades no es obvia y resulta útil elegir variables de manera conveniente. Hay dos tipos principales de sistemas dinámicos. El primero son los sistemas dinámicos continuos cuya evolución se define mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y el otro se denomina sistemas dinámicos discretos en el tiempo que se definen mediante un mapa o relaciones de recurrencia.

4. Introducción a los sistemas dinámicos

Las ecuaciones diferenciales establecen una relación entre las funciones y sus derivadas y cuyo desarrollo fue realizado por primera vez por Newton a mediados del siglo XVII. Newton las aplicó en su teoría de la gravitación y descubrió la solución para el sistema de dos cuerpos, por ejemplo, el movimiento de Sol y Tierra. El problema de los tres cuerpos, por ejemplo, el movimiento del Sol, la Tierra y la Luna era un tema de larga data y parecía ser imposible de resolver. La ruptura llegó a fines del siglo XIX, cuando Poincaré descubrió un enfoque geométrico para estudiar cualitativamente un sistema en lugar de estudiarlo cuantitativamente. Este fue el nacimiento de una nueva asignatura llamada análisis de sistemas dinámicos (Perko, 2013).

¿Qué es un sistema dinámico? Puede ser algo tan sencillo como un péndulo simple hasta algo tan complejo como el cerebro humano y el universo entero en sí mismo. Un sistema dinámico consiste en

1. un espacio (espacio de estado o fase), y
2. una regla matemática que describe la evolución de cualquier punto en ese espacio.

El estado del sistema es un conjunto de cantidades que se consideran importantes para el sistema y el espacio de estados es el conjunto de todos los valores posibles de estas cantidades. En el caso de un péndulo, la posición y el momento son cantidades naturales para especificar el estado del sistema. Para sistemas más complicados como lo son en el contexto cosmológico, la elección de buenas cantidades no es obvia y resulta útil elegir variables de manera conveniente. Hay dos tipos

principales de sistemas dinámicos. El primero son los sistemas dinámicos continuos cuya evolución se define mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y el otro se denomina sistemas dinámicos discretos en el tiempo que se definen mediante un mapa o relaciones de recurrencia.

4.1. Sistemas dinámicos

Se considera una EDO de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (104)$$

donde $\dot{\mathbf{x}} \equiv d\mathbf{x}/dt$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^n tal que

$$\mathbf{f} = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (105)$$

Esta ODE definen los campos vectoriales del sistema. En cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y en cualquier tiempo particular t , $\mathbf{f}(x)$ define un campo vectorial en \mathbb{R}^n . Cuando un sistema de ecuaciones diferenciales no depende explícitamente del tiempo, el sistema se denomina sistema autónomo. Un sistema no autónomo también puede tratarse como un sistema autónomo al considerar el tiempo (t) como una nueva variable, es decir, $x_{n+1} = t$ y $\dot{x}_{n+1} = 1$ (Wiggins, 1990).

En lo que respecta a esta tesis doctoral, los sistemas bajo investigación son de dimensión finita y sistemas autónomos continuos.

4.1.1. Punto crítico. La ecuación autónoma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se dice que tiene un punto crítico en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ si y solo si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ (Perko, 2013; Wiggins, 1990). En términos generales, \mathbf{x}_0

es estable si las soluciones del sistema (104) que comienzan “cerca” de \mathbf{x}_0 en un momento dado permanecen cercanas a \mathbf{x}_0 para todos los tiempos posteriores. Es asintóticamente estable si las soluciones cercanas no solo permanecen cerca, sino que también convergen a \mathbf{x}_0 como $t \rightarrow \infty$.

Según la definición anterior, los puntos críticos del sistema (104) corresponden a aquellos puntos \mathbf{x} donde el sistema está en reposo. En principio, el sistema podría permanecer en este estado (constante) indefinidamente. Sin embargo, es necesario aclarar si el sistema puede o no alcanzar tal estado y si este estado es estable o no con respecto a pequeñas perturbaciones. De una forma mas precisa, se dice que \mathbf{x}_0 es estable según Layapunov (o estable para abreviar) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que cualquier otra solución $\phi(t)$ cuya condición inicial satisfaga $|\phi(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ cumple que $|\phi(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$. En el caso contrario, es decir, si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\delta > 0$ es tan pequeño como se quiera, y hay al menos una solución que satisface $|\phi(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$ y $|\phi(t) - \mathbf{x}_0(t)| > \varepsilon$ para algún $t > t_0$, se dice que la solución es “inestable” (ver figura 6).

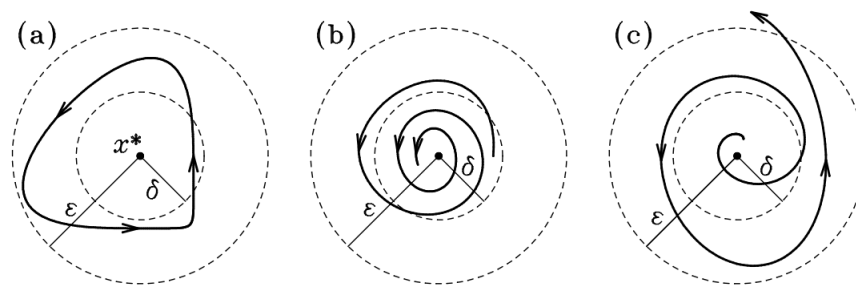


Figura 6. Punto de equilibrio (a) estable, (b) asintóticamente estable, (c) inestable

Se dice que la solución x_0 es asintóticamente estable si es estable y existe un $\delta' > 0$ tal que si $|\phi(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta'$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t) - \mathbf{x}_0(t)| = 0$. Se dice también que \mathbf{x}_0 es un atractor,

ya que atrae a las soluciones de su entorno.

4.1.2. Teoría de estabilidad lineal. Dado un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ con un punto crítico en $x = x_0$ y con el fin de linealizar el sistema, se debe realizar primero una expansión en serie de Taylor:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots, \quad (106)$$

es decir

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (107)$$

Por la definición del punto crítico, $f(x_0) = 0$ e ignorando los los términos de orden superior,

$$\dot{x} = f'(x_0)(x - x_0) \quad (108)$$

En esta configuración, se puede deducir que el punto crítico

1. es estable si $f'(x_0) < 0$,
2. es inestable si $f'(x_0) > 0$,
3. su estabilidad es desconocida, es decir, la teoría de estabilidad lineal falla si $f'(x_0) = 0$.

Si la linealización resulta en el caso 3, entonces se debe realizar un análisis de estabilidad no lineal.

Lo anterior era un sistema en \mathbb{R}^1 . Para sistemas de dimensión superior, los valores propios de la

matriz de Jacobiana del sistema, evaluado en los puntos críticos, revelarían información con respecto a su estabilidad. Dado un sistema dinámico $\dot{x} = f(x, t)$ con un punto crítico en $x = x_0$, el sistema se linealiza alrededor de su punto crítico por

$$M = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=x_0}, \quad (109)$$

donde M es la matriz Jacobiana.

Por ejemplo, para un sistema autónomo en \mathbb{R}^2 que puede ser representado como

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (110)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (111)$$

donde f y g son funciones de x y y con puntos críticos en $(x = x_0, y = y_0)$, la correspondiente matriz Jacobiana construida para linealizar el sistema, sobre los puntos críticos, puede ser representada como

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (112)$$

Los valores propios de esta matriz linealizada, evaluada sobre el punto crítico en cuestión revelan la estabilidad / inestabilidad de ese punto siempre que el punto sea hiperbólico.

Sea $x = x_0$ un punto crítico del sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces x_0 se dice que es

hiperbólico si ninguno de los valores propios de $Df(x_0)$ tiene parte real igual a cero⁸ (Perko, 2013).

Asumiendo un sistema en \mathbb{R}^2 , las posibilidades con respecto a la estabilidad del punto crítico con respecto a los dos valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz M de la ecuación (112), es la siguiente:

1. Los valores propios λ_1 y λ_2 son reales.
 - a) Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ entonces el punto crítico del sistema dinámico es asintóticamente estable y las trayectorias que comienzan cerca de ese punto se acercarán a ese punto o permanecerán cerca de él.
 - b) Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ entonces el punto crítico del sistema dinámico es inestable y las trayectorias se escapan del punto crítico.
 - c) Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ y son de signos opuestos, entonces el punto crítico es de silla. Este es un punto de equilibrio inestable, pero puede asociarse con un estado marginalmente estable.
 - d) Si $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$, o al contrario, no es posible determinar si el punto crítico es estable o inestable. El punto es no hiperbólico.
2. Los valores propios λ_1 y λ_2 son complejos: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.
 - a) Sí $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$ es un punto crítico inestable.

⁸ Si el punto es no hiperbólico, la teoría de la estabilidad lineal falla y, por lo tanto, se deben llevar a cabo técnicas alternativas, como encontrar las funciones de Lyapunov o aplicar el teorema de la variedad central (Wiggins, 1990).

b) Sí $\alpha < 0$ y $\beta \neq 0$ es un punto crítico estable.

c) Sí $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces las soluciones son oscilatorias.

4.2. Aplicación del análisis de sistemas dinámicos en cosmología.

El sistema de ecuaciones de los modelos cosmológicos comúnmente usados son ecuaciones diferenciales no lineales. No siempre es posible encontrar soluciones exactas de un sistema no lineal. Pero el enfoque de sistemas dinámicos para estudiar sistemas no lineales puede ayudarnos a conocer el comportamiento cualitativo del sistema. Generalmente, las nuevas variables sin dimensiones y normalizadas se introducen con una variable de tiempo sin dimensiones para escribir el sistema como un sistema autónomo. Estas variables están directamente relacionadas con cantidades observables físicamente y se comportan bien. Al encontrar los puntos fijos del sistema y su estabilidad, uno puede estudiar cualitativamente el comienzo y el posible destino final del universo. Como cualquier solución comienza desde un punto fijo inestable y termina en un punto fijo estable, los puntos fijos inestables tienen la posibilidad de ser el comienzo del universo y los puntos fijos estables serían el destino final del universo.

Este tipo de análisis no es nuevo ni en la relatividad general ni en la cosmología. Casi todos los modelos importantes de relatividad general y cosmología han sido analizados a la luz del análisis de sistemas dinámicos. La lista incompleta incluye: gravedad modificada, teoría del tensor escalar, modelos tipo Bianchi y modelos de campo escalar sin acoplamiento mínimo.

En los modelos de gravedad modificada, en donde el escalar de Ricci es remplazada por una función $f(R)$, explican con bastante éxito la expansión acelerada del universo. Faraoni ha realizado

un estudio detallado de sistemas dinámicos en un espacio homogéneo e isótropo en la referencia (Faraoni, 2004). Al considerar la descripción del campo escalar equivalente de la gravedad $f(R)$, Guo y Frolov han realizado un análisis vía la teoría de los sistemas dinámicos en la referencia (Guo and Frolov, 2013).

El análisis de sistemas dinámicos también se ha implementado ampliamente en las teorías tensor-escalar. El análisis cualitativo de la teoría del tensor-escalar con potencial exponencial muestra la existencia de un comportamiento inflacionario inicial y final y también sugiere el universo actual es un atractor en el espacio de fase (Batista et al., 2001). Kolitch y Eardley (Kolitch and Eardley, 1995) analizan el falso vacío como un caso especial en el fondo de FLRW y mostraron la existencia de una bifurcación en el sistema. En una teoría general de la gravedad tensor-escalar en un fondo de FLRW, solo un punto fijo es compatible con las restricciones de pruebas Post-Newtonianas del sistema solar (Jarv et al., 2008).

Una interesante revisión sobre la implementación de los sistemas dinámicos es la que se encuentra en la referencia (Bahcall et al., 2004), en donde se proporciona una visión general de las aplicaciones de los sistemas dinámicos en la amplia gama de modelos que se han propuesto para describir la evolución cosmológica observada del Universo.

4.2.1. Λ CDM. El modelo Λ CDM describe nuestro universo bastante bien desde la época dominada por la radiación hasta la expansión acelerada del universo hoy en día. A gran escala, el universo luce, estadísticamente, isótropo y homogéneo: esa característica se describe mediante la métrica de FLRW espacialmente plana ($k = 0$) y se llena con una sustancia sin presión, es decir, con polvo. Además, se introduce otro que posee presión negativa, la llamada constante cosmológica

Λ , para explicar la aceleración del universo en un tiempo tardío. De esta manera, la acción de este modelo es

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R + \mathcal{L} + M_p^2 \Lambda \right], \quad (113)$$

donde g es el determinante de la métrica de FLRW, M_p es la masa de Planck, R es el escalar de Ricci, \mathcal{L} es el Lagrangiano que contiene la materia, la radiación y la materia oscura fría (Bahcall et al., 2004; Bahamonde et al., 2018) y Λ es la constante cosmológica. Por lo tanto, las ecuaciones de campo asociadas a este modelo son

$$M_p^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (114)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía impulso, el cual debe describir un fluido perfecto. De esta manera, las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación de continuidad son

$$3M_p^2 H^2 = \rho, \quad (115)$$

$$2M_p^2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{1}{3}(\rho + 3p) \quad (116)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) \quad (117)$$

Se considera el fluido de radiación con densidad de energía ρ_r y presión $P_r = \rho_r/3$ y para el

término de constante cosmológica, $P_\Lambda = -\rho_\Lambda = -M_p^2\Lambda$. En el caso de la materia oscura fría esta es modelada como un fluido sin presión. En consecuencia, las ecuaciones (115), (116) y (117) se pueden escribir como

$$3M_p^2H^2 = \rho_r + \rho_m + M_p^2\Lambda, \quad (118)$$

$$2M_p^2\dot{H} = -\left(\frac{4}{3}\rho_r + \rho_m\right), \quad (119)$$

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r \quad \text{y} \quad \dot{\rho}_m = -3H\rho_m. \quad (120)$$

La restricción de Friedmann en la ecuación (118) es posible escribirla como

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 \quad \text{donde:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_m = \frac{\rho_m}{3M_p^2H^2} \\ \Omega_r = \frac{\rho_r}{3M_p^2H^2} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \end{array} \right. \quad (121)$$

Se eligen las variables del espacio de fase del sistema dinámico como:

$$x \equiv \Omega_r, \quad y \equiv \Omega_\Lambda, \quad (122)$$

donde, en aras de la simplicidad en la escritura, se adopta x e y en lugar de las densidades de energía adimensional de radiación, Ω_r , y de la constante cosmológica, Ω_Λ , respectivamente.

Se tiene que $\Omega_m = 1 - x - y$, y donde $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq \Omega_m \leq 1$, el espacio de fase,

físicamente relevante, se define como la siguiente región triangular bidimensional:

$$\Pi_\Lambda = \{(x, y) : x + y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}. \quad (123)$$

Para derivar las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, primero se toma la derivada de las variables x y y con respecto al tiempo cósmico, t :

$$\dot{x} = \frac{\dot{\rho}_r}{3M_p^2 H^2} - \frac{2\rho_r}{3M_p^2 H^2} \frac{\dot{H}}{H}, \quad \dot{y} = -2 \frac{\Lambda}{3H^2} \frac{\dot{H}}{H}. \quad (124)$$

A partir de la ecuación (119) se tiene que

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2}(3 + x - 3y). \quad (125)$$

Ahora, se hace un cambio de variable para el tiempo de la forma: $\tau = \ln a(t)$, por lo que, $\dot{\zeta} = H\zeta'$, donde la prima indica derivada respecto a τ . En consecuencia, las ecuaciones en (124) se pueden escribir como

$$x' = -x(1 - x + 3y), \quad y' = (3 + x - 3y)y. \quad (126)$$

La simplicidad del sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en la ecuación (126) es notable cuando se compara con el sistema de tres ecuaciones cosmológicas de segundo orden en las ecuaciones (118-120). Los puntos críticos del sistema autónomo en (126) se encuentran fácilmente

resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas: $x(1 - x + 3y) = 0$ y $(3 + x - 3y)y = 0$ (García-Salcedo et al., 2015).

Puntos críticos: Al resolver el sistema algebraico en la ecuación (126) para el caso $x' = 0$, $y' = 0$, se obtienen 3 puntos críticos, $\mathcal{P}_c : (x_c, y_c)$, los cuales se analizan a continuación:

I. El primer punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_r : (1, 0)$, $\Omega_r = 1$, por lo que esta es una época dominada por la radiación. La matriz de linealización M para el sistema autónomo en la ecuación (126) es

$$M = \begin{bmatrix} -1 + 2x - 3y & -3x \\ y & 3 + x - 6y \end{bmatrix}. \quad (127)$$

Las raíces de la ecuación algebraica

$$\det |M(P_r) - \lambda| = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (128)$$

son los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Dado que ambos valores propios son reales y positivos, entonces P_r es un punto crítico inestable.

A partir de la inspección de la figura 7 del espacio de fase del sistema autónomo de la ecuación (126), es evidente que cualquier patrón viable de evolución cosmológica debería comenzar en un estado donde el contenido de materia del Universo está dominado por la radiación. Por supuesto, esto es un inconveniente de este modelo clásico, que no puede explicar las primeras etapas de la

evolución cósmica, donde los efectos cuánticos de la gravedad juegan un papel. Esto incluye la inflación temprana. En un modelo que explicaría este primer período de la dinámica cósmica, la inflación debería ser el atractor del pasado en un espacio de fase equivalente.

II. El segundo punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_m : (0, 0), \Omega_1 = 1$, lo que corresponde a una época dominada por la materia. Siguiendo el mismo procedimiento anterior se encuentra los siguientes valores propios de la matriz de linealización, $M(P_m)$, evaluada en los puntos críticos, P_m : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Por lo tanto, este es un punto crítico de silla de montar. Como se ve en el espacio de fase de la figura 7, solo con condiciones iniciales convenientemente elegidas, las órbitas dadas en Π_Λ se aproximan lo suficiente a P_m . Como este es un punto crítico inestable (metaestable), solo se puede asociar a una etapa transitoria de la expansión cósmica. Esto es bueno, ya que una etapa dominada por la materia oscura solo puede ser un estado transitorio, que dure el tiempo suficiente para dar cuenta de la cantidad observada de estructura cósmica. Un inconveniente es que se tiene que ajustar las condiciones iniciales para que las órbitas factibles en el espacio de fase se acerquen lo suficiente a P_m .

III: El tercer punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_{dS} : (0, 1), \Omega_\Lambda = 1$, lo que corresponde a una época dominada por la constante cosmológica. Los valores propios de la matriz $M(\mathcal{P}_\Lambda)$ son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -4$. Esto significa que \mathcal{P}_Λ es un atractor futuro. Esto implica que, independientemente de las condiciones iniciales elegidas, $\Omega_r^0, \Omega_\Lambda^0$, las trayectorias en Π_Λ siempre serán atraídas al estado de De Sitter, lo que explica el ritmo acelerado real de la expansión cósmica en perfecto ajuste con los datos de observación. Esta es la razón por la cual, a pesar de los serios inconvenientes en

relación con el problema de la constante cosmológica (Weinberg, 1989; Adler et al., 1995), el muy simple modelo Λ CDM representa una descripción tan exitosa del paradigma cosmológico actual y, por lo tanto, se llama el "modelo de concordancia". El modelo DE, independientemente de su naturaleza, debe compararse con las predicciones de Λ CDM como una primera prueba de viabilidad.

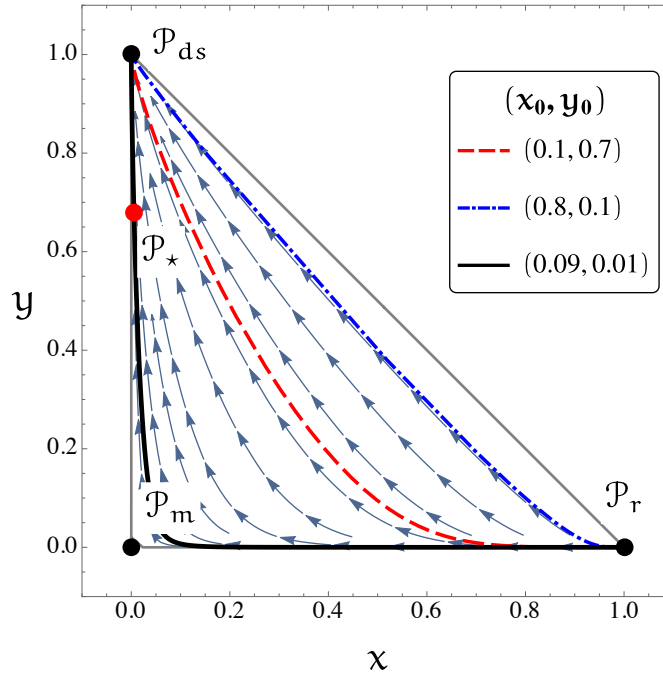


Figura 7. Espacio de fase del sistema autónomo de la ecuación (126) correspondiente al modelo Λ CDM. Las órbitas de éste sistema autónomo emergen del atractor pasado, $\mathcal{P}_r : (1, 0)$, época dominada por la radiación, y terminan en el atractor futuro, $\mathcal{P}_{ds} : (0, 1)$ (fase de Sitter). Para un conjunto de condiciones iniciales, las órbitas correspondientes se acercan lo suficiente al punto de silla dominado por la materia en el origen, $\mathcal{P}_m : (0, 0)$ (García-Salcedo et al., 2015). El punto \mathcal{P}_* corresponde $\Omega_{\Lambda_0} \simeq 0.68$ reportado por Planck hoy en día (Ade et al., 2016a). Como se aprecia en la gráfica negra continua, esta pasa por éste punto, lo cual indica, que para cierta condicional inicial es posible predecir el valor de la contribución de la densidad de energía oscura hoy en día.

4.2.2. Quintaesencia. El problema de la constante cosmológica se puede dividir en dos preguntas (Weinberg, 1989). (i) Por qué la energía de vacío $\rho_{vac} = \Lambda$ no es mucho mas grande? (ii) Por qué es del mismo orden de magnitud que la densidad de masa actual del universo? La primera pregunta es un viejo problema constante cosmológica, y la segunda es reconocida como el nuevo problema constante cosmológico. Para evitar el viejo problema de la constante cosmológica, que es exclusivo del modelo Λ CDM, se invocan modelos de campo escalar de energía oscura. En este último caso, se describe una constante cosmológica efectiva “dinámica” por un potencial $V(\phi)$ de un campo escalar ϕ . Esto se puede organizar de modo que en los primeros tiempos, la energía del vacío $\rho_{vac,0} = V(\phi_0)$ sea lo suficientemente grande como para producir la cantidad deseada de inflación, mientras que en los últimos tiempos es del mismo orden de la densidad de energía CDM. Una alternativa viable al modelo Λ CDM, quintaesencia con un potencial exponencial, $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_p^2}$ es uno de los modelos de campo escalar más populares de energía oscura (Coley, 1999; Carroll, 1998; Urena-Lopez, 2012). Los argumentos de esta subsección se basan en los resultados del trabajo (Gosenca and Coles, 2015).

La acción que representará el sistema físico es definida en la ecuación (53). En un fondo de FLRW y una ecuación de estado lineal $p = \omega\rho$, las ecuaciones de campo de Einstein se expresan como:

$$3M_p^2 H^2 = \kappa^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m + \rho_r \quad (129)$$

$$2M_p^2 \dot{H} = -\dot{\phi}^2 - \rho_m - (1 + 1/3)\rho_r. \quad (130)$$

Para un universo homogéneo e isótropo, el tensor de energía-momento se vuelve simétrico, es decir $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ y de aquí se obtiene la ecuación de continuidad $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$. Esta ecuación se cumple por separado para la materia, la radiación y el campo escalar, siempre que no haya acoplamiento entre estos componentes. Aplicando la misma condición al tensor de energía-impulso para el campo escalar se obtiene la ecuación

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V(\phi)_{,\phi} = 0, \quad (131)$$

donde $V(\phi)_{,\phi}$ es la derivada del potencial respecto a el campo escalar ϕ . Comparando esto con la ecuación general de continuidad, vemos que la densidad de energía y la presión del campo escalar son $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$ y $p_\phi = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$ respectivamente. La ecuación de estado para el campo escalar es dada por

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}. \quad (132)$$

La ecuación (131) es una ecuación dinámica para la evolución del campo escalar; Para resolver la dinámica del sistema, se debe resolver esta ecuación simultáneamente con las ecuaciones de Friedmann (129) y (130).

Con el propósito de describir la dinámica del sistema, es conveniente definir las siguientes

variables dinámicas:

$$x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_p H}, \quad y = \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_p H}, \quad (133)$$

de esta manera, la densidad de energía y la ecuación de estado del campo escalar puede ser expresadas como:

$$\Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{3M_p^2 H^2} = x^2 + y^2, \quad \omega_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \quad (134)$$

Además, se define el parámetro combinado de densidad de energía de radiación y materia como:

$$\Omega_M = \Omega_m + \Omega_r, \quad (135)$$

donde Ω_m y Ω_r son las densidades de energía de la materia y radiación definidas en la ecuación (121). La primera ecuación de Friedmann en la ecuación (129) se puede simplificar como:

$$1 = x^2 + y^2 + \Omega_M. \quad (136)$$

La restricción anterior, se deduce que $x^2 + y^2 \leq 1$ porque Ω_M siempre es positivo. Cada solución con y diferente de cero puede ser positiva o negativa en y , ya que $y^2 \sim V$. La parte del espacio de parámetros en el que y es negativo corresponde a un universo en contracción, debido a que el plano de fase es simétrico con respecto al eje x , solo se considera la parte superior, lo que implica

que las trayectorias en el plano de fase están limitadas a la mitad superior del disco de radio 1.

Adicionalmente se define una ecuación de estado combinada como:

$$\omega_M = \frac{\rho_r/3}{\rho_m + \rho_r}. \quad (137)$$

Procediendo de manera equivalente como en la subsección anterior, es posible encontrar el sistema autónomo del modelo de Quintaesencia representado como:

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 - \frac{3}{2}x(\omega_M(x^2 + y^2 - 1) - x^2 + y^2 + 1), \\ y' &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda xy - \frac{3}{2}y(\omega_M(x^2 + y^2 - 1) - x^2 + y^2 - 1). \end{aligned} \quad (138)$$

Una cantidad adicional e importante es parámetro de ecuación de estado efectiva, la cual es posible escribirla como:

$$\omega_{efec} = x^2 + y^2 + \omega_M(1 - x^2 - y^2). \quad (139)$$

Puntos críticos: Al resolver el sistema algebraico en la ecuación (138) para el caso $x' = 0$, $y' = 0$, se obtienen 5 puntos críticos, $\mathcal{P}_c : (x_c, y_c)$, los cuales se analizan a continuación:

- I. El primer punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_A : (0,0)$, el cual es la solución dominada por la materia donde toda la densidad de energía está en Ω_M . En este punto, la única contribución a la ecuación efectiva del parámetro de estado viene del sector de la materia, por lo que

$\omega_{efec} = \omega_M$. Los valores propios de la matriz de Jacobiana de la ecuación (112) son: $[3(\omega_M - 1)/2, 3(\omega_M + 1)/2]$ por lo que el punto es una silla para todos los valores de λ , siempre que $\omega_M < 1$. En el caso límite del potencial inicial que es exactamente 0 (las trayectorias que comienzan exactamente en el eje x) este punto es un atractor.

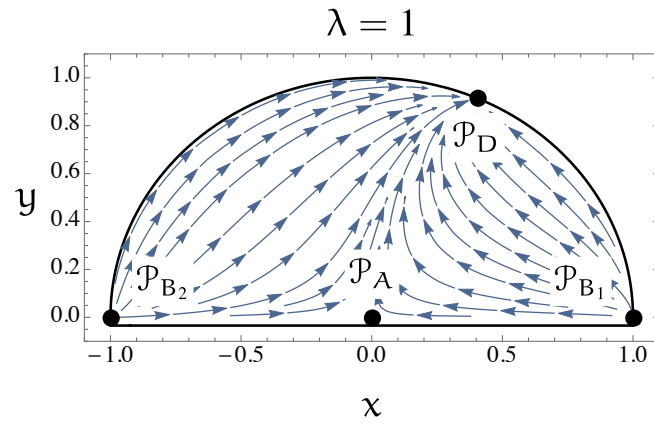
- II. El segundo y tercer punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_{B_{1,2}} : (\pm 1, 0)$, el cual representan soluciones en las que el universo está dominado por la energía cinética del campo escalar: $\Omega_\phi = 1$. Los valores propios para el análisis de la estabilidad son: $[3(1 - \omega_M), \sqrt{3/2}\lambda \mp 3]$, donde el signo menos corresponde al punto crítico \mathcal{P}_{B_1} y el signo positivo para el punto crítico \mathcal{P}_{B_2} , esto quiere decir que \mathcal{P}_{B_2} es siempre repulsivo (inestable) y \mathcal{P}_{B_1} es repulsivo si $\lambda < \sqrt{6}$ y punto de silla si $\lambda > \sqrt{6}$.
- III. El cuarto punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_D : (\lambda/\sqrt{6}, \sqrt{1 - \lambda^2/6})$, en donde este punto crítico está en el borde del medio disco y se mueve desde $(x = 0, y = 1)$ para $\lambda = 0$ hasta $(x = 1, y = 0)$ para $\lambda = \sqrt{6}$; después de este valor de λ ya no está definido. Los valores propios son: $[\lambda^2 - 6/2, \lambda^2 - 3(\omega_M - 1)]$, de esta manera para $\lambda < \sqrt{3(\omega_M - 1)}$ es un atractor (estable) para todas las trayectoria en el espacio de fase y para $\sqrt{3(\omega_M - 1)} < \lambda < \sqrt{6}$ es un punto de silla.
- IV. El quinto punto crítico corresponde a $\mathcal{P}_E : (\sqrt{3/2}(\omega_M + 1)/\lambda, \sqrt{3/2(1 - \omega_M^2)}/\lambda)$. El análisis de la estabilidad muestra que para $\lambda > \sqrt{3(\omega_M + 1)}$ este punto es una espiral estable; sus valores propios son complejos conjugados entre sí y $\omega_{efec} = \omega_M$.

Por lo tanto, el valor del parámetro λ se puede dividir en tres casos cualitativamente diferen-

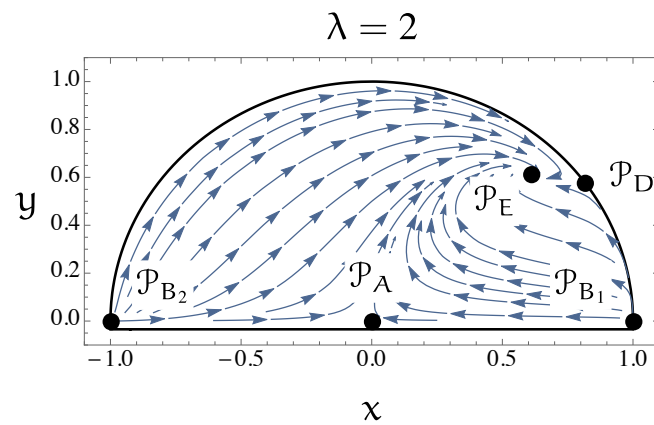
tes:

- $\lambda < \sqrt{3(\omega_M + 1)}$: Todas las trayectorias se dibujan en el punto \mathcal{P}_D , que es un atractor estable.
- $\sqrt{3(\omega_M - 1)} < \lambda < \sqrt{6}$: El punto crítico \mathcal{P}_E se convierte en un atractor espiral y el punto crítico \mathcal{P}_D está presente.
- $\lambda > \sqrt{6}$: el punto crítico \mathcal{P}_D no esta definido y \mathcal{P}_{B_1} se convierte en punto de silla.

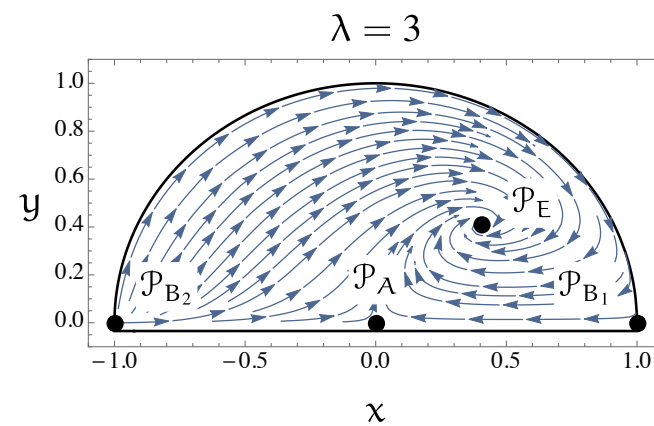
Las soluciones de la ecuaciones (138) para estos tres casos se ilustran en la figura 8. Se ha definido ω_M como una combinación de dos fluidos, uno de es un fluido sin presión (materia), con $\omega_M = 0$ y radiación ($\omega_R = 1/3$), por lo que sus valores solo pueden estar entre 0 y 1/3, pero en el caso más general (incluidas las ecuaciones de estado más exóticas) su valor podría estar fuera de este rango. Los casos específicos que se muestran en las figuras 8 tienen todos $\omega_M = 0$, por lo que el valor de este parámetro solo afecta ligeramente la posición del punto fijo \mathcal{P}_E .



(a)



(b)



(c)

Figura 8. Espacio de fase del modelo de Quintaesencia con un potencial de la forma: $V = V_0 e^{-\lambda\phi/M_p}$ en tres casos cualitativamente diferentes de λ y $\omega_M = 0$.

4.2.3. Teoría de Brans-Dicke. En Relatividad General, los campos de materia solo se acoplan a la gravedad a través de la métrica $g_{\mu\nu}$ y esto garantiza la validez del principio de equivalencia fuerte. En la idea original de Brans y Dicke de 1961, se introdujo un acoplamiento no mínimo a la gravedad para obtener una teoría relativista que implementa el principio de Mach (Brans and Dicke, 1961b). No es sorprendente que se conozca como la teoría de Brans-Dicke y es una de las modificaciones en la teoría de la gravedad de Einstein más estudiadas. En generalizaciones posteriores de esta teoría, se introdujo en la acción un potencial de auto-interacción $V(\phi)$ para el campo escalar, cuya acción de la teoría de Brans-Dicke está dada por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\phi}{2} R - \frac{\omega_{BD}}{2\phi} \partial\phi^2 + \kappa^2 \mathcal{L}_m \right], \quad (140)$$

donde ϕ es un campo escalar, R es el escalar de Ricci, ω_{BD} es una constante llamada el “parámetro de Brans-Dicke” y \mathcal{L}_m es el Lagrangiano de materia.

En presencia de la materia, la teoría de Brans-Dicke se reduce a la relatividad general en el límite $\omega_{BD} \rightarrow \infty$, y de los experimentos del Sistema Solar se puede obtener, en el límite de campo fuerte, $\omega_{BD} \gtrsim 10^4$ (ver la referencia (Bertotti et al., 2003a)). En lo que sigue, el análisis del modelo de Brans-Dicke se basará en que $\omega_{BD} > 0$, de modo que el campo Brans-Dicke ϕ no sea fantasma.

Un aspecto interesante de la acción anterior es que el campo escalar ϕ cambia la constante gravitacional efectiva de Newton. Esto implica que ahora la fuerza de la interacción gravitacional depende del valor del campo escalar. Las ecuaciones cosmológicas asociadas a la acción (140),

derivadas de una métrica FLRW espacialmente plana, son (Brans and Dicke, 1961b):

$$3\phi H^2 + 3H\dot{\phi} - \frac{\omega_{BD}}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - V = \kappa^2 \rho, \quad (141)$$

$$2\phi\dot{H} - H\dot{\phi} + \omega_{BD} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \ddot{\phi} = -\kappa^2(1 + \omega)\rho, \quad (142)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{2}{3 + 2\omega_{BD}}(2V - \phi V_{,\phi}) = \frac{\kappa^2(1 - 3\omega)}{3 + 2\omega_{BD}}\rho, \quad (143)$$

donde ρ es la densidad de energía del componente de materia y ω es el parámetro de ecuación de estado, $p = \omega\rho$. En las ecuaciones anteriores, el “punto” es la derivada con respecto al tiempo cósmico t . Para tratar las ecuaciones (141) - (143) como un sistema dinámico autónomo se definen las siguientes variables adimensionales (Hrycyna and Szydlowski, 2013; Hrycyna and Szydlowski, 2013)

$$x = \frac{\dot{\phi}}{H\phi}, \quad y = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}\phi H}, \quad \lambda = -\phi \frac{V_{,\phi}}{V}, \quad \tilde{\Omega}_m = \frac{\kappa\rho}{3\phi H^2}. \quad (144)$$

La variable y es real solo para $V > 0$. Si V es negativa, entonces la definición de y debe cambiarse ligeramente. En lo que sigue supondremos que el potencial no cambia de signo dinámicamente. Como veremos, esto es posible porque $y = 0$ es una sub-matriz invariable para el sistema. Además, la variable $\tilde{\Omega}_m$ solo se define como positiva si $\phi > 0$. Esta suposición no se cumple en general e indica las diferencias que se introducen por el acoplamiento no mínimo presente en la teoría de Brans-Dicke. Sin embargo, se debe tener en cuenta que suponer una fuerza gravitatoria

que siempre sea atractiva implica que: $\phi > 0$, y por lo tanto, en estos casos fenomenológicamente relevantes, este problema no surge. El análisis de estabilidad de la teoría de Brans-Dicke se centrará en un modelo simple en el que el potencial corresponde a

$$V(\phi) = V_0 \phi^{-2n}, \quad (145)$$

lo cual implica que $\lambda = 2n = \text{const}$. Para el potencial en la ecuación (145) y asumiendo que $\omega = 0$, el sistema dinámico autónomo se reduce a

$$x' = \frac{1}{2(2\omega_{BD} + 3)} \left(x[x^2 \omega_{BD}(\omega_{BD} + 1) - x(7\omega_{BD} + 6) - 6(2n - \omega_{BD}y^2) + \omega_{BD}] \right. \\ \left. 6[4n + 3]y^2 + 6 \right), \quad (146)$$

$$y' = - \frac{y}{2(2\omega_{BD} + 3)} \left(6y^2(2n - \omega_{BD}) + x^2 \omega_{BD}(\omega_{BD} + 1) - 4x(n + 1)\omega_{BD} \right. \\ \left. + 3x(2n + 1) + 6(\omega_{BD} + 2) \right). \quad (147)$$

Los puntos críticos del sistema dinámico (146) - (147) están representados en la tabla 2 junto con sus cantidades fenomenológicas. Puede haber hasta cinco puntos críticos en el espacio de fase. Dos de ellos (A_{\pm} y B) representan soluciones dominadas por el campo escalar. Los otros representan una interacción entre el campo escalar y la materia. Los puntos A_{\pm} y C representan estados en los cuales la parte cinética del campo escalar es dominante. Tenga en cuenta que no hay un punto fijo potencial dominado. Todos los puntos tienen propiedades fenomenológicas y de estabilidad que dependen de los parámetros ω_{BD} y n .

El análisis completo de estabilidad de los puntos crítico se muestra en la tabla 1. Se observa que, aunque en principio todos los puntos críticos, aparte de A_{\pm} , podrían representar un atractor en donde la expansión es acelerada, en esta hipótesis puede solo ocurrir en el caso del punto crítico B . Es importante destacar que el Punto B tiene $y > 0$ y, por lo tanto, no puede considerarse un verdadero atractor. Para los valores de los parámetros para los cuales el Punto B es un repelente, la teoría de Brans-Dicke puede usarse para modelar el fin de un período inflacionario.

Tabla 1

Estabilidad de los puntos críticos del modelo Brans-Dicke con un potencial como se muestra en la ecuación (145) y $\omega = 0$ (polvo). En este caso $\omega = \omega_{BD}$.

\mathcal{P}_c	Atractor	Repelente
A_+	nunca	$\omega > 0 \wedge 2n + 2 + \sqrt{6\omega + 9} > 0$
A_-	nunca	$\omega > 0 \wedge 2n + 2 < \sqrt{6\omega + 9}$
B	$n \leq -\frac{5}{2} \wedge \omega > \frac{1}{6}(4n^2 + 8n - 5)$ $-\frac{5}{2} < n < -1 \wedge \omega > 0$ $-\frac{1}{2} < n \leq \frac{1}{2} \wedge \omega > 0$ $n > \frac{1}{2} \wedge \omega > \frac{1}{6}(4n^2 + 8n - 5)$ $\omega > 0 \wedge n > \frac{1}{2}(2\omega + 1)$	$n < -\frac{5}{2} \wedge 0 < \omega < \frac{1}{6}(4n^2 + 8n - 5)$ $n > \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}(2n - 1) < \omega < \frac{1}{6}(4n^2 + 8n - 5)$
C	$\omega > 0 \wedge n > \frac{3}{2}(\omega + 1)$	nunca

El caso que se ha ilustrado muestra un ejemplo del posible comportamiento dinámico de la teoría de Brans-Dicke. Sin embargo, está claro que un estudio completo para diferentes potenciales o un fluido de materia más general devolvería una fenomenología más rica y complicada. Por

Tabla 2
 Puntos críticos del modelo Brans-Dicke con un potencial como se muestra en la ecuación (145) y $\omega = 0$ (polvo). En este caso $\omega = \omega_{BD}$.

\mathcal{P}_c	(x, y)	ω_{efec}	ω_ϕ	$\tilde{\Omega}_m$
A_{\pm}	$\left(\frac{3 \pm \sqrt{6\omega + 9}}{\omega}, 0\right)$	$\frac{3\omega + 6 \pm \sqrt{6\omega + 9}}{\omega}$	$\frac{3\omega + 6 \pm \sqrt{6\omega + 9}}{\omega}$	0
B	$\left(\frac{4(n+1)}{1-2n+2\omega}, \frac{\sqrt{(2\omega+3)(-4n(n+2))+6\omega+5}}{\sqrt{3 2n-2\omega-1 }}\right)$	$\frac{4(n+1)(2n+1)}{2\omega-2n+1} - 3$	$\frac{4(n+1)(2n+1)}{2\omega-2n+1} - 3$	0
C	$\left(\frac{1}{\omega+1}, 0\right)$	$-\frac{6(\omega+1)}{5\omega+6}$	$\frac{1}{\omega+1}$	$\frac{(2\omega+3)(3\omega+4)}{6(\omega+1)^2}$
D	$\left(\frac{3}{2n}, \frac{\sqrt{3(\omega+1)-2n}}{2\sqrt{2 n }}\right)$	$\frac{12n}{6\omega-14n+3}$	$\frac{3}{2n}$	$\frac{2n(4n+7)-6\omega-3}{8n^2}$

ejemplo, S. Kolitch (Kolitch, 1996) consideró el caso de la teoría de Brans-Dicke con una constante cosmológica que muestra (quizás no sorprendentemente) que una solución de Sitter puede existir si $\omega_{BD} > 0$.

Hrycyna y Szydlowski (Hrycyna and Szydlowski, 2013) ha realizado un análisis vía la teoría de los sistemas dinámico, con mucho más detalle, las consecuencias cosmológicas de la teoría de Brans-Dicke con un potencial cuadrático, dado por la ecuación (145) con $n = -1$. Mostraron que las soluciones de Sitter se pueden obtener en este caso especial.. También realizaron el análisis en el infinito y consideraron valores generales del parámetro ω de la materia fuera del rango permitido físicamente, $[0, 1/3]$. Los mismos autores estudiaron las soluciones de Sitter para las consecuencias cosmológicas de la teoría de Brans-Dicke con un potencial general, realizando el análisis de estabilidad (Hrycyna and Szydlowski, 2013) y comparando los resultados con datos observacionales (Hrycyna et al., 2014).

5. Galileones

Un enfoque de arriba hacia abajo de la física fundamental implica tres pasos: 1. Hay que definir el contenido de la materia que nos interesa, 2. Hay que establecer qué simetrías va a disfrutar la acción, 3. Hay que arreglar las cosas aquí y allí (eliminando algunos términos en la acción, estableciendo relaciones entre diferentes constantes de acoplamiento, etc.) para que no haya patologías presentes. Este enfoque es extremadamente exitoso con ejemplos notables como la construcción del Modelo Estándar de física de partículas, Supersimetría y Supergravedad. Un enfoque complementario consiste en formular la siguiente pregunta: hay alguna opción para construir la teoría fundamental? Podemos reformular esta pregunta preguntando si la eliminación de cualquier tipo de patologías

puede conducir a una acción única una vez que se definen el contenido de materia y las simetrías de acción.

Cuando hablamos de patologías, podemos comenzar con la inestabilidad de Ostrogradski (Ostrogradski, 1850), aquella en la que el estado del sistema desciende a niveles de energía más bajos y más bajos porque el hamiltoniano no está limitado desde abajo. Tal inestabilidad conduciría a consecuencias desastrosas tanto a nivel clásico como cuántico (Woodard, 2015, 2007). El teorema de Ostrogradski establece que, siempre que la acción no sea degenerada, las ecuaciones de movimiento superiores al segundo orden conducen a un hamiltoniano sin límites desde abajo (para una revisión, ver las referencias (Woodard, 2015, 2007)). Por lo tanto, si se desea una teoría fundamental saludable, la acción debe ser construida de modo que las ecuaciones de movimiento sean de segundo orden (como máximo). Esto de hecho respaldada el hecho de que la mayoría de las leyes físicas se describen mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden (piénsese, por ejemplo, en las leyes de la mecánica de Newton, las leyes del electromagnetismo de Maxwell y las ecuaciones de gravedad de Einstein). Por supuesto, esta no es una condición suficiente para una teoría saludable, por lo que se debe realizar un análisis hamiltoniano una vez que se haya construido la acción.

A mediados de los 70, G. W. Horndeski escribió la acción más general para un campo escalar y la gravedad clásica que conduce a ecuaciones de movimiento no superiores a las de segundo orden (Horndeski, 1974). Un par de años después, el propio Horndeski hizo el mismo trabajo intercambiando el campo escalar por un campo vectorial abeliano (Horndeski, 1976). Sus resultados fueron ignorados en gran medida hasta los primeros años de la década de 2010 cuando fueron redescubiertos (Deffayet et al., 2011; Kobayashi et al., 2011) en el marco de lo que hoy

se llama Galileones (Nicolis et al., 2009). Un Galileón es un campo escalar π cuya acción en el espacio-tiempo plano disfruta de una simetría “galileana” $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$, donde b_μ y c son un cuadvectores constante y un escalar constante respectivamente. Se puede demostrar que esta simetría galileana es la responsable de la existencia de una ecuación de movimiento que implica estrictamente derivadas espacio-temporales de segundo orden (Nicolis et al., 2009). Una generalización del campo de Galileones destruye la simetría de Galileo, pero permite derivadas de espacio-tiempo inferiores a las de segundo orden en las ecuaciones de movimiento, tanto en espacio-tiempo curvo como plano (Deffayet et al., 2011; Deffayet and Steer, 2013). Tal Galileón generalizado es lo que se llamará, a partir de ahora, simplemente como Galileón. Desde el redescubrimiento de esta idea, sus consecuencias en la física de alta energía y la cosmología han sido objeto de un intenso estudio.

La vida, sin embargo, no termina con los campos escalares. Los campos vectoriales también son actores relevantes en física de altas energías y sus consecuencias en cosmología han estado bajo escrutinio en los últimos años (ver, por ejemplo, las referencias (Maleknejad et al., 2013; Dimopoulos, 2012)). Como se dijo antes, Horndeski había estudiado lo que se puede llamar ahora un "Galileón vectorial": un campo vectorial cuya acción es invariante bajo el grupo de simetrías $U(1)$. En un espacio-tiempo plano, la única posibilidad es la acción de Einstein-Hilbert-Maxwell (Deffayet et al., 2014), pero las cosas cambian en un espacio tiempo curvo (Horndeski, 1976).

Como un paso hacia la teoría fundamental, es posible relajar el requisito de invarianza de *gauge*, generalizando así la acción de Proca. Fueron L. Heisenberg y G. Tasinato, de forma independiente, quienes exploraron esta posibilidad por primera vez (Heisenberg, 2014a; Tasinato, 2014b). Siguiendo el método de construcción Galileones descrito en las referencias (Deffayet

et al., 2011; Deffayet and Steer, 2013), estos autores construyeron la acción de Proca generalizada contrayendo dos tensores Levi-Civita con derivadas de primer orden $A_{\mu,\nu}$ del campo vectorial A_μ . Obtuvieron, de esta manera, una teoría donde solo se propagan tres grados de libertad asociados a A_μ . Además, el grado de libertad longitudinal se comporta como un Galileón escalar, lo que significa que la teoría tiene un límite de desacoplamiento seguro. Tal procedimiento es poderoso pero tiene su limitación: debido a la contracción con los dos tensores de Levi-Civita, solo produce términos que conservan la paridad, lo que impide la construcción de interacciones permitidas que violan la paridad.

Al seguir una ruta complementaria, E. Allys, P. Peter y Y. Rodríguez construyeron todos los posibles términos invariantes de Lorentz que implican A_μ y $\partial_\nu A_\mu$ y escribieron combinaciones lineales consistentes con la propagación de tres grados de libertad para el campo vectorial y un límite de desacoplamiento seguro (Allys et al., 2016b). La limitación de este procedimiento es que no proporciona un límite claro en la construcción en el sentido de un umbral en el número de derivadas de primer orden de A_μ en cada término de la acción. Por el contrario, su ventaja es que sí genera términos que violan la paridad. Se inició cierta controversia sobre estos resultados con la publicación de Ref. (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2016) pero se llegó a un acuerdo final en la Ref. (Allys et al., 2016a).

El propósito de este capítulo es mostrar esquemáticamente los dos procedimientos de construcción de los Galileones descritos en el párrafo anterior, tanto para un campo escalar como para un vector. Para este último, se mostrará su aplicación a un campo vectorial abeliano y a un conjunto de campos de *gauge* $SU(2)$.

5.1. Galileones escalares

Se asume un campo escalar π en un espacio-tiempo plano donde la acción es un invariante de Lorentz. La acción puede contener el campo en sí mismo y sus derivadas de espacio-tiempo de primer y segundo orden $\pi_{,\mu}$ y $\pi_{,\nu\mu}$. Cualquier derivada de espacio-tiempo superior a la de segundo orden conduciría, de inmediato, a ecuaciones de movimiento superiores a las de segundo orden. Así, siendo la acción es $\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\pi, \pi_{,\mu}, \pi_{,\nu\mu})$, las ecuaciones de Euler-Lagrange se convierten en

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} = 0, \quad (148)$$

lo que demuestra que se debe tener especial cuidado con los términos en \mathcal{L} que implican derivadas del espacio-tiempo de segundo orden.

La estrategia a seguir, entonces, para construir la acción más general que conduce a ecuaciones de movimiento no superiores a las de segundo orden consiste en

- I). identificar todos los posibles términos invariantes de Lorentz contruidos a partir de contracciones de las derivadas espaciotemporales de segundo orden con tensores métricos,
- II). agrupar todos estos términos invariantes de Lorentz en combinaciones lineales generales,
- III). establecer relaciones entre los coeficientes en las combinaciones lineales de modo que las contribuciones más altas que las de segundo orden producidas por el tercer término en la ecuación (148) desaparezcan.

Es posible probar que la acción más general viene dada simplemente por estas combinaciones

lineales multiplicadas por funciones arbitrarias de π y de $X = \partial_\lambda \pi \partial^\lambda \pi$ (Deffayet et al., 2011).

Entonces, ¿Cuál es la estructura de estas combinaciones lineales? Un estudio cuidadoso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, siguiendo la estrategia descrita anteriormente, revela que la combinación adecuada de términos invariantes de Lorentz en la densidad de Lagrangiana viene en cuatro piezas diferentes $\mathcal{L}_{N,\pi}^{\text{Gal}}$ comenzando desde $N = 2$ (Deffayet et al., 2011; Deffayet and Steer, 2013):

$$\mathcal{L}_{N,\pi}^{\text{Gal}} \equiv f_N(\pi, X) \frac{1}{(4-n)} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n \sigma_1 \dots \sigma_{4-n}} \varepsilon^{v_1 \dots v_n} \sigma_1 \dots \sigma_{4-n} (\partial_{\mu_1} \partial_{v_1} \pi) \dots (\partial_{\mu_n} \partial_{v_n} \pi), \quad (149)$$

donde $N = n + 2$, ε es el tensor de Levi-Civita, y $f_N(\pi, X)$ son funciones arbitrarias de π y $X \equiv \partial_\lambda \pi \partial^\lambda \pi$.

De manera explícita, la acción se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{\text{Gal}}, \quad (150)$$

donde

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} \equiv f_2(\pi, X), \quad (151)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} \equiv f_3(\pi, X) \square \pi, \quad (152)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} \equiv f_4(\pi, X) [(\square \pi)^2 - (\partial_\mu \partial_\nu \pi)(\partial^\mu \partial^\nu \pi)], \quad (153)$$

$$\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} \equiv f_5(\pi, X) [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\partial_\mu \partial_\nu \pi)(\partial^\mu \partial^\nu \pi) + 2(\partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi \partial_\rho \partial^\mu \pi)], \quad (154)$$

donde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ es el operador D'Alembertiano. Para las aplicaciones en espacio-tiempo curvo, las derivadas parciales deben reemplazarse por derivadas covariantes que, desafortunadamente, introducen contribuciones a las ecuaciones de movimiento que implican derivadas de espacio-tiempo superiores a las de segundo orden tanto del campo escalar como de la métrica (Deffayet et al., 2009b,a). Este problema se resuelve fácilmente mediante la introducción específica de contratérminos en $\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}}$ y $\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}}$ (Deffayet et al., 2011). De esta manera, la acción se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{\text{Gal}} + \mathcal{L}_{\text{Cur},\pi}^{\text{Gal}} \right], \quad (155)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{Cur},\pi}^{\text{Gal}} \equiv G^{\text{Cur}}(\nabla^\mu \pi \nabla^\nu \pi), \quad (156)$$

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{\text{Gal}} \equiv G_2(\pi, X), \quad (157)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{\text{Gal}} \equiv G_3(\pi, X) \square \pi, \quad (158)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}} \equiv G_4(\pi, X) R + G_{4,X} [(\square \pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi)], \quad (159)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}} \equiv & G_5(\pi, X) G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) \\ & - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \pi) + 2(\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi)], \end{aligned} \quad (160)$$

donde g es el determinante de la métrica, R es el escalar de Ricci, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, ∇ es la derivada covariante y $G_{N,X} \equiv \partial G_N / \partial X$. Como se puede observar, un nuevo término es

introducido $\mathcal{L}_{\text{Cur},\pi}^{\text{Gal}}$, el cual desaparece en un espacio tiempo plano; ya que $G_{\mu\nu}$ es un tensor sin divergencia, éste nuevo término, al igual que los contratérminos $\mathcal{L}_{4,\pi}^{\text{Gal}}$ y $\mathcal{L}_{5,\pi}^{\text{Gal}}$, no introduce la propagación de nuevos grados de libertad en el sector tensorial (Horndeski, 1976; Beltrán Jiménez et al., 2013).

Está claro que la ecuación (149) es solo una consecuencia de examinar las ecuaciones de Euler-Lagrange en la búsqueda de ecuaciones de movimiento, a lo sumo, de segundo orden. Al seguir la estrategia descrita anteriormente o el emplear directamente la ecuación (149) son, por lo tanto, procedimientos equivalentes para construir la acción para un Galileón escalar. Sin embargo, tal equivalencia no necesariamente está presente cuando se construyen Galileones vectoriales, como se estudiará en la siguiente sección.

5.2. Galileones vectoriales

5.2.1. Acción de Proca generalizada Abelian. Se comenzará en un espacio-tiempo plano. Debido a la descomposición de Helmholtz, cualquier vector espacio-temporal A_μ se puede dividir en dos partes:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \pi, \quad (161)$$

donde A_μ es sin divergencia y π es un campo escalar. π es, por lo tanto, el grado de libertad longitudinal asociado a A_μ . Por lo tanto, si A_μ se identifica como un Galileón vectorial, π debe ser un Galileón escalar. La consecuencia inmediata de este hecho es que la acción del campo vectorial puede incluir el campo en sí mismo, A_μ , y su derivada espacio-temporal de primer orden, $\partial_\mu A_\nu$, solamente; esto es ideal para que la ecuación de movimiento para el campo vectorial, A_μ , no será mayor que a la de segundo orden sin importar la forma específica de la acción.

La primera ruta para construir la acción de Galileones sigue las líneas similares a las descritas para el caso de los Galileones escalares:

- I). identificar todos los posibles términos invariantes de Lorentz construidos a partir de contracciones de campos vectoriales y derivadas espacio-temporales de primer orden con las invariantes primitivas del grupo de Lorentz ($SO(3, 1)$): tensores métricos y, a lo sumo, un tensor Levi-Civita,
- II). agrupar todos estos términos invariantes de Lorentz en combinaciones lineales generales,

- III). establecer relaciones entre los coeficientes en las combinaciones lineales para que no se propaguen más de tres grados de libertad,
- IV). remplazar $A_\mu \rightarrow \partial_\mu \pi$ y eliminar todos los términos cuya acción resultante no corresponda a la de un Galileón escalar.

La restricción al número de tensores Levi-Civita en el primer paso proviene del hecho de que el producto de dos de tales tensores siempre se puede expresar como una combinación lineal de productos de tensores métricos. Se debe tener en cuenta que, debido a las propiedades antisimétricas del tensor Levi-Civita, el paso análogo para un Galileón escalar solo requiere contracciones con tensores métricos. Con respecto al tercer paso, la propagación de solo tres grados de libertad, siendo ellos las componentes espaciales del campo vectorial, está establecida por la condición Hessiana $\mathcal{H}^{0\nu} = 0$ (Heisenberg, 2014a) donde

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A) \partial(\partial_0 A_\nu)}. \quad (162)$$

Por lo tanto, la acción para el Galileón vectorial, que generaliza la acción Abelian de Proca, invariante bajo el grupo de simetría $U(1)$, resulta ser

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \sum_{N=2}^6 \mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}} \right], \quad (163)$$

donde

$$\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}} \equiv f_2(A_\mu, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}) = f_2 [A^2, F^2, F \cdot \tilde{F}, (A \cdot \tilde{F})^2] \quad (164)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{\text{Gal}} \equiv f_3(A^2) S^\mu{}_\mu, \quad (165)$$

$$\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}} \equiv f_4(A^2) [(S^\mu{}_\mu)^2 - S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho], \quad (166)$$

$$\mathcal{L}_{5,A}^{\text{Gal}} \equiv f_5(A^2) [(S^\mu{}_\mu)^3 - (S^\mu{}_\mu) S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho + 2S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\gamma S_\gamma{}^\rho] + g_5(A^2) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}^\beta{}_\mu S_{\alpha\beta}, \quad (167)$$

$$\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}} \equiv g_6(A^2) \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} S_{\alpha\beta} S_{\mu\nu}. \quad (168)$$

En contraste con la teoría de campos de gauge local, aparece un nuevo elemento en la acción que acompaña a A_μ , el tensor de esfuerzos del campo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y su dual de Hodge $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$. Este nuevo elemento es la versión simétrica del tensor de esfuerzos del campo: $S_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$. Es importante notar que las piezas del Lagrangianas cuyo coeficiente es una función f_N se reducen a los respectivos Lagrangianos de los Galileones escalares de las ecuaciones (151) - (154) cuando A_μ se reemplaza por $\partial_\mu \pi$ (excepto por la posible dependencia π de f_N). Mientras tanto, esas piezas lagrangianas premultiplicadas por una función g_N desaparecen cuando se hace el mismo reemplazo; ésta es la razón por la cual la acción de Proca generalizada tiene un Lagrangiano adicional, $\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}}$, en comparación con su contraparte escalar, que no fue descubierto en los documentos pioneros de L. Heisenberg y G. Tasinato (Heisenberg, 2014a; Tasinato, 2014b).

Esta forma de proceder puede extenderse para un número arbitrario de derivadas de primer orden sin una prueba completa de por qué la secuencia debería detenerse. Esto de hecho condujo a E. Allys, P. Peter e Y. Rodríguez, en la referencia (Allys et al., 2016b), a construir todas las piezas

lagrangianas hasta $\mathcal{L}_{7,A}^{\text{Gal}}$ y a conjeturar que se generaría una torre infinita de términos; sin embargo, como se muestra en la referencia (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2016), el Lagrangiano $\mathcal{L}_{7,A}^{\text{Gal}}$ presentado en la referencia (Allys et al., 2016b) desaparece de forma idéntica. Esta es una limitación desafortunada del procedimiento ya descrito que no está presente en la segunda ruta que se presenta en breve. La ventaja del método ya descrito es que genera términos que violan la paridad: dado que algunos de los términos invariantes de Lorentz en el primer paso se construyen a partir de contracciones con un solo tensor de Levi-Civita, los términos que violan la paridad son inevitables. La mayoría de estos términos terminan codificados en $\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}}$ mientras que los otros desaparecen de manera idéntica (al menos, hasta $\mathcal{L}_{7,A}^{\text{Gal}}$) (Allys et al., 2016a). Existe un término especial que viola la paridad descubierto en la referencia (Allys et al., 2016a) que es imposible de construir siguiendo la segunda ruta. Este término es especialmente diferente de los otros términos en el Lagrangiano porque no todos los pares A_μ vienen como A^2 :

$$\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}} \equiv g_4 A^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} S^{\mu\lambda} A_\lambda \quad (169)$$

Este término, sin embargo, es redundante (ya pertenece a $\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}}$) ya que $\tilde{F}_{\mu\nu}$ es sin divergencia. (ver apéndice 1).

La versión de la acción de Proca generalizada en un espacio-tiempo curvo se obtiene, como en el caso de Galileones escalares, reemplazando las derivadas del espacio-tiempo estándar por derivadas covariantes y agregando los contratérminos requeridos. Estos últimos se eligen para evitar ecuaciones de movimiento de orden superior a dos y el número incorrecto de grados de libertad que

se propagan en cada nivel del límite de desacoplamiento. En las referencias (Heisenberg, 2014a; Allys et al., 2016b; Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2016) se llega al siguiente resultado:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \sum_{N=2}^6 \mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}} + \mathcal{L}_{\text{Cur},A}^{\text{Gal}} \right], \quad (170)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{Cur},A}^{\text{Gal}} \equiv f^{\text{Cur}} G_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (171)$$

$$\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}} \equiv f_2(A_\mu, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}) = f_2[A^2, F^2, F \cdot \tilde{F}, (A \cdot \tilde{F})^2], \quad (172)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{\text{Gal}} \equiv f_3(A^2) S^\mu{}_\mu, \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}} \equiv & f_4(A^2) R + \frac{1}{2} f_{4,A^2} [(S^\mu{}_\mu)^3 - 3(S^\mu{}_\mu) S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho + 2S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\alpha S_\alpha{}^\rho] + \\ & + g_5(A^2) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}^\beta{}_\mu S_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (174)$$

$$\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}} \equiv g_6(A^2) L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + g_{6,A^2} \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} S_{\alpha\mu} S_{\beta\nu}, \quad (175)$$

donde f^{Cur} es un escalar constante y $L_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor doble dual de Riemann:

$$L_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\sigma\lambda\gamma} R_{\alpha\beta\lambda\gamma}, \quad (176)$$

donde $R_{\alpha\beta\lambda\gamma}$ es el tensor de Riemann.

La segunda ruta para construir la acción de Proca generalizada consiste en extender la ecuación (149), válida para un Galileón escalar como para un campo vectorial A_μ . Esto significa

contraer productos de A_μ y sus derivadas espaciotemporales de primer orden con dos tensores Levi-Civita:

$$\mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}} \propto \varepsilon^- \varepsilon^- \partial.A.\partial.A.\dots \quad (177)$$

Lo interesante de esta construcción es que, como se muestra en la referencia (Allys et al., 2016a), la condición Hessiana se satisface automáticamente. Además, al reemplazar $A_\mu \rightarrow \partial_\mu \pi$, la ecuación (177) se reduce a la ecuación (149), excepto para $N = 6$, por lo que la teoría tiene un límite de desacoplamiento seguro (para $N = 6$, debemos descartar ese término que no desaparece al tomar el límite escalar, ver la referencia (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2016)). La ecuación (177) reproduce las ecuaciones (164) - (168) a excepción del hecho de que la ecuación (164) debe entenderse, en este enfoque, como un término que sólo contiene términos que conservan la paridad. Esta es la limitación de este procedimiento: dado que las piezas del Lagrangiano están construidas a partir de contracciones con dos tensores de Levi-Civita, es imposible construir términos que violen la paridad. Sin embargo, existe una limitación aún mayor: no existe una prueba de que la ecuación (177) genera todas las piezas del Lagrangiano posibles de la acción de Proca generalizada en contraste con ecuación (149) para el cual existe una prueba formal (ver la referencia (Deffayet et al., 2011)). Como todas las contracciones de las derivadas espacio-temporales de A_μ con los invariantes primitivos del grupo de Lorentz pueden escribirse como contracciones de la primera con un número ilimitado de tensores Levi-Civita, no hay ninguna razón por la cual el número de tensores Levi-Civita debería ser solo dos. Por lo tanto, aunque la segunda ruta da un número finito de

piezas lagrangianas, dado que el número de índices de espacio-tiempo en los tensores de Levi-Civita contraídos con derivadas espacio-temporales está saturado en $\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}}$, podría suceder que la cantidad real de piezas lagrangianas que contribuyen a la acción de Proca generalizada sea más grande.

5.2.2. Acción de Proca generalizada $SU(2)$. Se considera ahora un conjunto de tres campos vectoriales A_μ^a , donde a corre de 1 a 3, cuya acción es invariante bajo el grupo de simetría global $SU(2)$. Agrupando estos campos vectoriales en una matriz única $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^a \mathcal{T}_a$, donde los \mathcal{T}_a son los generadores matriciales de las transformaciones $SU(2)$, es posible mostrar que \mathcal{A}_μ transforma en la representación adjunta respectiva (véase, por ejemplo, la referencia (Rodríguez, 2015)):

$$\mathcal{A}'_\mu = e^{ig \vec{\epsilon} \cdot \vec{T}} \mathcal{A}_\mu e^{-ig \vec{\epsilon} \cdot \vec{T}}. \quad (178)$$

En la expresión anterior, g es la constante de acoplamiento, $\vec{\epsilon}$ es un vector tridimensional que parametriza la cantidad de la transformación, y \vec{T} es el “vector construido” con los generadores matriciales. Tales generadores satisfacen el álgebra de Lie

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{ab}{}^c T_c \quad (179)$$

donde ϵ_{abc} denota las constantes de estructura del grupo que, para $SU(2)$, corresponden al símbolo de Levi-Civita.

Con estos preliminares en mente, la primera ruta para construir la acción de Proca $SU(2)$

generalizada consiste en los siguientes pasos:

- I). identificar todos los posibles términos invariantes de Lorentz construidos a partir de las contracciones de los campos vectoriales A_μ (sin índices de grupo $SU(2)$) y las derivadas espacio-temporales de primer orden $\partial_\mu A_\nu$ con los invariantes primitivos del grupo Lorentz ($SO(3, 1)$): tensores métricos y, como máximo, un tensor de Levi-Civita,
- II). agrupar índices de grupo $SU(2)$ a los términos identificados en el paso anterior y contraer con los invariantes primitivos del grupo $SU(2)$: métricas de grupo inducidas y constantes de estructura ε_{abc} (como máximo, un símbolo de Levi-Civita),
- III). agrupe todos estos términos invariantes de Lorentz $SU(2)$ en combinaciones lineales generales,
- IV). establecer relaciones entre los coeficientes en las combinaciones lineales para que no se propaguen más de tres grados de libertad,
- V). sustituir $A_\mu^a \rightarrow \partial_\mu \pi^a$ y eliminar todos los términos cuya acción resultante no corresponda a la de los Galileones multiescalares en la representación tridimensional de $SU(2)$ (ver la referencia (Allys, 2017) y el Apéndice A de la referencia (Allys et al., 2016c), ver también la referencia (Padilla et al., 2011)).

Debido a razones de simetría, algunos de los términos encontrados en el primer paso desaparecen de manera idéntica; sin embargo, deben mantenerse porque la adición de índices grupales en el segundo paso puede hacer que no desaparezcan. La restricción del número de símbolos de Levi-Civita en

Tabla 3

Número de términos invariantes de Lorentz bajo el grupo de simetría $SU(2)$ construidos a partir de contracciones de un número de campos vectoriales (primera fila) y un cierto número de derivadas de primer orden (primera columna) con los invariantes primitivos del grupo $SO(3,1)$ y $SU(2)$.

$\partial^\mu A^{a\nu}$ \ A_μ^a	0	2	4
1	0	3	36
2	4	42	510
3	9	312	...

el segundo paso proviene del hecho de que el producto de dos de tales símbolos siempre se puede expresar como una combinación lineal de productos de métricas inducidas por grupos (Metha et al., 1983).

Este procedimiento fue seguido en la referencia (Allys et al., 2016c) con la restricción impuesta de, como máximo, seis índices espacio-temporales en los términos invariantes de Lorentz $SU(2)$. Dicha restricción es solo técnica en su naturaleza: se impuso porque el número de términos invariantes de Lorentz $SU(2)$ aumenta considerablemente al permitir más índices, como muestra la Tabla 3. Por lo tanto, la acción de Proca generalizada $SU(2)$ en un espacio-tiempo plano viene dada por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_a^\mu A_\mu^a + \sum_{N=2}^4 \mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}} \right], \quad (180)$$

donde (Allys et al., 2016c)

$$\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}} \equiv f_2(A_{\mu\nu}^a, F_{\mu\nu}^a, \tilde{F}_{\mu\nu}^a), \quad (181)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{\text{Gal}} \equiv 0, \quad (182)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}} \equiv & f_4^1 \left\{ (A_b^\mu A_\mu^b) [(\partial_\alpha A_a^\alpha)(\partial_\alpha A_a^\alpha) - (\partial_\mu A^{a\nu})(\partial^\mu A_{a\nu})] \right. \\ & + 2(A_a^\mu A_{b\mu}) [(\partial_\alpha A^{a\alpha})(\partial_\alpha A^{b\alpha}) - (\partial_\mu A^{a\nu})(\partial^\mu A_\nu^b)] \left. \right\} \\ & + f_4^2 \left\{ (A_a^\mu A_{b\mu}) [(\partial_\alpha A^{a\alpha})(\partial_\alpha A^{b\alpha}) - (\partial_\mu A^{a\nu})(\partial^\mu A_\nu^b)] \right. \\ & + (A^{a\mu} A^{b\nu}) [(\partial_\mu A_a^\alpha \partial_\nu A_{b\alpha}) - (\partial_\nu A_a^\alpha \partial_\mu A_{b\alpha})] \left. \right\} \\ & + f_4^3 \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^\mu A_{b\alpha} S^{a\alpha\sigma}, \end{aligned} \quad (183)$$

donde los f_4^1 son constantes escalares arbitrarias, $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de esfuerzos no Abelianos:

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^a{}_{bc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (184)$$

$G_{\mu\nu}^a$ es la versión Abeliana de $F_{\mu\nu}^a$:

$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \quad (185)$$

y $S_{\mu\nu}^a$ es la versión simétrica de $G_{\mu\nu}^a$:

$$S_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a. \quad (186)$$

Aunque $\mathcal{L}_{5,A}^{\text{Gal}}$ y $\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}}$ no se construyeron, una comparación con el caso Abeliano permitió a los autores de la referencia (Allys et al., 2016c) conjeturar que

$$\mathcal{L}_{5,A}^{\text{Gal}} \equiv f_5 \varepsilon_{abc} (A_v^a A^{dv}) \tilde{G}_d^{\alpha\mu} \tilde{G}^{b\beta}{}_{\mu} S_{\alpha\beta}^c, \quad (187)$$

y

$$\mathcal{L}_{6,A}^{\text{Gal}} \equiv f_6^1 \tilde{G}_a^{\alpha\beta} \tilde{G}^{a\mu\nu} S_{\alpha\mu}^b S_{b\beta\nu} + f_6^2 \tilde{G}_a^{\alpha\beta} \tilde{G}_b^{\mu\nu} S_{\alpha\nu}^a S_{\beta\nu}^b, \quad (188)$$

donde f_5 y f_6 son constantes arbitrarias escalares. Es interesante notar que la versión no Abelianiana de $\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}}$, el último término en la ecuación (183), no es un término redundante porque los índices de grupo lo protegen; este es, entonces, el primer término que viola la paridad que no está incluido en f_2 .

La versión de la acción en un espacio-tiempo curvo es un poco más elaborada en sus contratérminos:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_a^\mu A_\mu^a + \sum_{N=2}^4 \mathcal{L}_{N,A}^{\text{Gal}} + \sum_{m=1}^4 \mathcal{L}_{\text{Cur},m,A}^{\text{Gal}} \right], \quad (189)$$

donde (Allys et al., 2016c)

$$\mathcal{L}_{\text{Cur},1,A}^{\text{Gal}} \equiv f_1^{\text{Curv}} G_{\mu\nu} A^{a\mu} A_a^\nu, \quad (190)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Cur},2,A}^{\text{Gal}} \equiv f_2^{\text{Curv}} L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{a\mu\nu} F_a^{\rho\sigma}, \quad (191)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Cur},3,A}^{\text{Gal}} \equiv f_3^{\text{Curv}} \varepsilon_{abc} L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{a\mu\nu} A^{b\rho} A^{c\sigma}, \quad (192)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Cur},4,A}^{\text{Gal}} \equiv f_4^{\text{Curv}} L_{\mu\nu\rho\sigma} A^{a\mu} A_a^\nu A^{b\rho} A_b^\sigma, \quad (193)$$

$$\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}} \equiv f_2(A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a, \tilde{F}_{\mu\nu}^a), \quad (194)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{\text{Gal}} \equiv 0 \quad (195)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal}} \equiv & f_4^1 \left\{ \frac{1}{4} (A_b^\mu A_\mu^b) \left[S_\mu^{a\mu} S_{av}^\nu - S_\nu^{a\mu} S_{a\mu}^\nu + A_a^\nu A_\nu^a R \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (A_a^\mu A_{b\mu}) \left[S_\mu^{a\mu} S_\nu^{bv} - S_\nu^{a\mu} S_{b\mu}^\nu + 2A^{av} A_\nu^b R \right] \right\} \\ & + f_4^2 \left\{ \frac{1}{4} (A_a^\mu A_{b\mu}) \left[S_\mu^{a\mu} S_\nu^{bv} - S_\nu^{a\mu} S_\mu^{bv} + A^{av} A_\nu^b R \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (A^{a\mu} A^{b\nu}) \left[S_{a\mu}^\rho S_{bv\rho} - S_{av}^\rho S_{b\mu\rho} - A_a^\rho A_b^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} \right. \right. \\ & \left. \left. - (\nabla^\rho A_{a\mu})(\nabla_\rho A_{bv}) + (\nabla^\rho A_{av})(\nabla_\rho A_{b\mu}) \right] \right\} \\ & + f_4^3 \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^\mu A_{b\sigma} S^{a\alpha\sigma}, \end{aligned} \quad (196)$$

donde f^{Curv} son simplemente escalares constantes.

La segunda ruta para construir la acción de Proca generalizada $SU(2)$ se emplea en la referencia (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2017). Esta ruta implementa dos tensores Levi-Civita

que se contraen con productos de campos vectoriales y sus derivadas de primer orden:

$$\mathcal{L} \propto \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} \partial_\mu A_\rho^a \cdots A_\nu^b A_\sigma^c \cdots, \quad (197)$$

los índices libres de Lorentz se contraen apropiadamente con métricas espacio-temporales y los índices del grupo se contrajeron con los invariantes primitivos del grupo $SU(2)$. De forma similar al caso Abelian, esta construcción satisface automáticamente la condición Hessiana $\mathcal{H}^{ab0\nu} = 0$ donde (Allys et al., 2016c):

$$\mathcal{H}^{ab\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{a\mu}) \partial(\partial_0 A_{b\nu})}, \quad (198)$$

para que solo tres grados de libertad puedan propagarse. Además, el límite escalar debe tomarse y verificarse para asegurarse de que la teoría tenga un límite de desacoplamiento seguro. Lamentablemente, en la referencia (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2017) falta este último paso. Los mismos pros y contras de esta ruta discutidos en páginas anteriores se aplican aquí también. Se hace hincapié en que no existe una prueba formal de que la aplicación de la ecuación (197) es equivalente a la primera ruta descrita anteriormente; de hecho, tal prueba no puede existir debido a la existencia del término no redundante que viola la paridad en $\mathcal{L}_{4A}^{\text{Gal}}$ (la última línea en la ecuación (196)).

5.2.3. Implicaciones cosmológicas. Ahora se discutirá algunos avances ya realizados en la exploración de las implicaciones cosmológicas de la acción en la ecuación (189). La idea es tener una configuración de “tríada cósmica”, es decir, los tres campos vectoriales ortogonales

entre sí y de la misma norma, tomando como cero las componentes temporales, en un fondo de FLRW. Tal configuración evita cualquier tipo de anisotropía, tanto en el fondo como a nivel perturbativo (Rodríguez et al., 2015), que están severamente restringidas por las observaciones (Kim and Komatsu, 2013; Ramazanov and Rubtsov, 2014; Ade et al., 2016c; Ramazanov et al., 2017). También se ha estudiado previamente con éxito en los modelos de *Gauge-flation* (Sheikh-Jabbari, 2012; Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2011; Nieto and Rodríguez, 2016) y *Chromonatural inflation* (Adshead and Wyman, 2012). Se descubrió que todas las piezas del Lagrangiano en la ecuación (189) admiten esta configuración, excepto por los términos que violan paridad en la última línea de la ecuación (196) y, principalmente, algunos términos en $\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}}$. Para su propia existencia, el término que viola paridad requiere no solamente al menos una componente temporal que no desaparezca, sino también una configuración no ortogonal. El Lagrangiano en la ecuación (187) comparte los mismos requisitos. En contraste, el Lagrangiano en la ecuación (188) admite la ortogonalidad pero requiere la existencia de las componentes temporales; esto implica un flujo de momento en el tensor energía-momento que destruye la isotropía requerida. El Lagrangiano en la ecuación (191) ya se había estudiado en la referencia (Davydov and Gal'tsov, 2016), encontrando que se genera un corto período de inflación; sin embargo, como se muestra en la referencia (Beltrán Jiménez et al., 2017), este Lagrangiano está plagado de fantasmas e inestabilidades laplacianas. Por otro lado, $\mathcal{L}_{\text{Curv},A}^{\text{Gal}}$, excepto por $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$ lleva a resultados muy similares en el nivel de fondo y, probablemente, tendrá el mismo destino que $\mathcal{L}_{\text{Curv},2,A}^{\text{Gal}}$ a nivel perturbativo. En la siguiente sección se estudiarán de manera analítica y vía la teoría de los sistemas dinámicos los Lagrangianos $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$ y $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$.

5.3. Ondas gravitacionales

Los experimentos para detectar ondas gravitacionales comenzaron con Weber y sus detectores de masa resonante en la década de 1960 (Weber, 1960), seguidos por una red internacional de detectores de agentes criogénicos (Astone et al., 2010). Los detectores interferométricos sugirieron por primera vez a principios de los años sesenta (Gertsenshtein and Pustovoit, 1962) y en los setenta (Moss et al., 1971). A principios de la década del 2000, se completó un conjunto de detectores iniciales, incluyendo TAMA 300 en Japón, GEO 600 en Alemania, el *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) en los Estados Unidos y Virgo en Italia. Las combinaciones de estos detectores hicieron observaciones conjuntas desde 2002 hasta 2011, estableciendo límites superiores en una variedad de fuentes de ondas gravitacionales mientras evolucionaban a una red global. En 2015, Advanced LIGO se convirtió en el primero de una red significativamente más sensible de detectores avanzados para comenzar las observaciones (Aasi et al., 2015; Acernese et al., 2015; Affeldt et al., 2014; Aso et al., 2013).

El comienzo del siglo XXI será recordado para la primera detección de ondas gravitacionales (OG) de objetos compactos. Todo comenzó cuando LIGO detectó señales de OG de la fusión de un agujero negro, que además confirmó la existencia de éstos, y la predicción de OG (Abbott et al., 2016). Casi dos años después, el interferómetro LIGO y VIRGO realizó la detección de OG a partir de una fusión de dos estrellas de neutrones (GW170817) (Abbott et al., 2017a). Fortuitamente, el *Fermi Gamma-ray Burst Monitor* (GBM) y el espectrómetro *International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory observed* (INTEGRAL) observaron una ráfaga de rayos gamma (GRB170817A) dentro

de los siguientes 1.74 ± 0.05 segundos y en una ubicación cercana al evento GW170817 (Goldstein et al., 2017; Savchenko et al., 2017), de esta manera no hubo dudas de que el GRB170817A era la contraparte electromagnética del evento GW170817 (Abbott et al., 2017b). Si se asume que el pico de la señal de la OG y los primeros fotones se emiten simultáneamente y el 1.74 s de diferencia se debe a que la velocidad de la OG (c_T) es más rápida, entonces se obtiene un límite superior de la velocidad de $c_T/c - 1 \leq 7 \times 10^{-6}$; si la señal del GRB se emitió 10 s después de la señal de la OG, se obtiene un límite inferior $c_T/c - 1 > -3 \times 10^{-15}$. Este fue un evento consecuente para probar algunos aspectos de la gravedad en escalas cosmológicas, ya que es posible contrastar los dos tipos de mensajeros astrofísicos completamente diferentes, y eso es exactamente lo que se hizo inmediatamente después del anuncio del evento (Baker et al., 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017; Sakstein and Jain, 2017; Sawicki et al., 2017; Langlois et al., 2018; Amendola et al., 2018). Por otro lado, la medición precisa de la velocidad de propagación de las OG es una herramienta muy poderosa para probar teorías alternativas de la gravedad (Mirshekari et al., 2012; Beltrán Jiménez et al., 2016; Chesler and Loeb, 2017; Green et al., 2018; Nishizawa, 2018).

Recientemente, hay mucha actividad en el estudio de las teorías escalar-tensor (Fujii and Maeda, 2003) y una de ellas es la teoría gravitacional que es el resultado de los Lagrangianos de Horndeski (Horndeski, 1974). Las teorías de Horndeski conducen a ecuaciones de campo de segundo orden lo que puede ser técnicamente más simples, y resultan ser libres de inestabilidades fantasma (Woodard, 2015).

Las OG primordiales son, matemáticamente hablando, perturbaciones tensoriales en la

métrica del espacio-tiempo. En un fondo de FLRW, es posible escribir la perturbación como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j, \quad (199)$$

donde h_{ij} caracteriza las perturbaciones tensoriales, las cuales son sin traza ($h^i_i = 0$) y libres de divergencia ($h^i_{;j} = 0$). La evolución de éstas perturbaciones puede ser determinada a partir de la expansión de la acción del modelo a segundo orden, de lo que se obtiene

$${}^{(2)}\mathcal{S}_T = \int d^4x M_*^2 [\dot{h}_\lambda^2 - c_T^2 (\nabla h_\lambda)^2], \quad (200)$$

donde se ha implementado la notación $\dot{h}^2 \equiv \dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij}$ y $(\nabla h)^2 \equiv h_{ij,k}h^{ij,k}$; $\lambda = +, \times$ corresponden a los dos posibles estado de polarización de las OG. M_* es la masa efectiva de Planck, la cual es proporcionada por las teorías alternativas de la gravedad la cual pueden diferir de M_p y c_T es la velocidad de propagación de las OG. Una conveniente parametrización para describir como en teorías alternativas de la gravedad la velocidad de las OG difiere de la relatividad general es (Bellini and Sawicki, 2014)

$$c_T^2 = 1 + \alpha_T, \quad (201)$$

en donde se ha establecido que $c = 1$. En principio, α_T podría tomar valores positivos o negativos. Sin embargo, los valores negativos ($c_T < c$) están limitados a $\alpha_T > -10^{-15}$ por la falta de radiación graven-Čerenkov observada en los rayos cósmicos (Moore and Nelson, 2001). Hasta ahora, el

único límite superior en la velocidad de propagación de las OG proviene de la medición del tiempo de viaje entre los dos detectores de aLIGO, el cual corresponde a: $\alpha_T < 0.42$ (Blas et al., 2016; Cornish et al., 2017). Vale la pena mencionar que los fotones de rayos gamma y las OG se liberan simultáneamente. En realidad, podría haber un retraso de de algunas horas entre estos dos eventos. Por lo tanto, teniendo en cuenta este posible retraso, esto debilita el límite en unos pocos órdenes de magnitud. Sin embargo, 10^{-15} o 10^{-12} son restricciones muy estrictas, lo que lleva a prácticamente el mismo resultado. De esta manera, se establece un límite observacional para α_T como:

$$|\alpha_T| \lesssim 1 \times 10^{-5}. \quad (202)$$

El límite en la ecuación (202) sugiere que $\alpha_T \simeq 0$, por lo que sería una buena aproximación para estudiar las desviaciones de los modelos Relatividad General y modificaciones a la relatividad.

5.3.1. Implicaciones en teorías tensor-escalar. La acción de Horndeski es la teoría más general del tensor-escalar con ecuaciones de movimiento de segundo orden (Horndeski, 1974; Deffayet et al., 2011), y es descrita por la siguientes acción

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i(\phi, g_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \dots) \right], \quad (203)$$

donde \mathcal{L}_M es el Lagrangiano de materia acoplado mínimamente a la curvatura. El Lagrangiano del campo escalar (ϕ) es constituido por cuatro términos: dos mínimamente acoplados a la gravedad, $\mathcal{L}_2 = K$ y $\mathcal{L}_3 = -G_3$ y dos términos explícitamente relacionados con el escalar de Ricci y el tensor

de Einstein:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= G_4 R + G_{4,X} [(\square\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi], \\ \mathcal{L}_5 &= G_5 G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{6} G_{5,X} [-(\nabla\phi)^3 - 3\nabla^\mu \nabla^\nu \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square\phi + 2\nabla^\nu \nabla_\mu \phi \nabla^\alpha \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi],\end{aligned}\tag{204}$$

donde K y G_i son funciones de ϕ y $X \equiv -\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi / 2$. En un contexto cosmológico, los modelos de Horndeski muestran que (De Felice and Tsujikawa, 2012):

$$M_*^2 \alpha_T \equiv 2X [2G_{4,X} - 2G_{5,\phi} - (\ddot{\phi} - \dot{\phi}H)G_{5,X}],\tag{205}$$

donde $M_*^2 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X} + XG_{5,\phi} - \dot{\phi}HXG_{5,X})$. T. Baker (Baker et al., 2017) discutió que la restricción de la ecuación (202) puede realizarse mediante una cancelación altamente ajustada entre los términos de acción de Horndeski $G_{4,X}$, $G_{5,\phi}$ y $G_{5,X}$ que pueden contribuir a α_T . Sin embargo, una implicación más lógica de $\alpha_T \simeq 0$ es que cada uno de los tres términos desaparecen de manera idéntica. Además, al implementar la identidad de Bianchi, la acción de Horndeski se reduce, además del término asociado al potencial del campo y el término cúbico como (Baker et al., 2017)

$$\mathcal{L}_4 = f(\phi)R,\tag{206}$$

dejando solo teorías acopladas conformalmente del tipo Jordan-Brans-Dicke. Esto elimina las teorías que contienen los Lagrangianos \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5 . Estas consecuencias en los términos de Hordenski

también se dieron antes de este evento, como lo muestra R. McManus et al en la referencia (McManus et al., 2016) (Ver también la referencia de P. Creminelli y F. Vernizzi (Creminelli and Vernizzi, 2017) para las mismas conclusiones de GW170817/GRB170817A).

Los modelos tipo Jordan-Brans-Dicke de la ecuación (206) se pueden dividir en dos subclases (Baker et al., 2017): La primera subclase es la teoría Jordan-Brans-Dicke generalizada donde el campo escalar no evoluciona significativamente en escalas de tiempo cosmológicos. Tales modelos requieren un apantallamiento “camaleónico”⁹ para evadir las pruebas gravitacionales en el sistema solar y, por lo tanto, no tiene una evolución significativamente diferente a el modelo cosmología; no generan una expansión cosmológica (Wang et al., 2012). En la segunda subclase, el campo escalar evoluciona significativamente en escalas de tiempo cósmicas, por ejemplo, como lo causan los términos en G_2 y G_3 , produciendo períodos de expansión o auto aceleración. Por lo tanto, no se excluye los galilones cúbicos, los modelos de trenzado cinético (estos modelos exhiben características peculiares, como una mezcla de términos cinéticos escalares y tensoriales) (Deffayet et al., 2010) y los modelos de *k-essence* (Armendariz-Picon et al., 2000, 2001).

M. Ezquiaga y M. Zumalacárregui (Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017) consideraron las implicaciones de los modelos GW170817 y GRB170817A en los modelos de gravedad modificada al partir de los modelos covariantes de Galileones y luego pasar a sus generalizaciones a los modelos de Horndeski y más allá de Horndeski. Ellos tradujeron el límite estricto de la ecuación

⁹ En este caso la masa de campo escalar $m(\phi)$ depende del entorno y provoca cambios. El campo escalar adquiere una masa que depende de la densidad de materia local: el campo es masivo en la Tierra, donde la densidad es alta, pero es esencialmente ligero a escalas del sistema solar, donde la densidad es baja.

(202) en límites en los coeficientes del modelo de Galileones y sus generalizaciones. P. Creminelli y F. Vernizzi (Creminelli and Vernizzi, 2017), T. Baker y colaboradores (Baker et al., 2017) y D. Langlois (Langlois et al., 2018) llegaron a conclusiones similares: catalogaron modelos que indicaban explícitamente que, en la clase general de Horndeski, Brans-Dicke, $f(R)$, el trenzado cinético (Deffayet et al., 2010) no se ven afectados, mientras que los galileones quárticos (G_4) y quinticos (G_5) (Nicolis et al., 2009; Deffayet et al., 2009b), *Fab Four* (Charmousis et al., 2012), Horndeski de Sitter (Martin-Moruno et al., 2015) y Gauss-Bonnet (Nojiri et al., 2005) están todos excluidos.

5.3.2. Implicaciones en teorías mas allá de Horndeski. En la literatura, los modelos mas allá de Horndeski hacen referencia a las teorías tensor-escalar del orden superior degenerado (*Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor*, DHOST, por sus siglas en inglés) (Langlois and Noui, 2016; Ben Achour et al., 2016). Las teorías DHOST están diseñadas para ser una generalización adicional de la teoría de Horndeski, pero deben incluir nuevas restricciones para evitar las inestabilidades de Ostrogradsky. El resultado es una larga lista de estas clases de teorías, alrededor de unas 30, que tienen espacios de parámetros disjuntos, pero que en un contexto cosmológico se reducen a solo dos tipos (Langlois et al., 2017). Uno es inestable y por lo tanto irrelevante. El otro puede transformarse más allá de Horndeski con una transformación conforme de la forma $\tilde{g}_{\mu\nu} = C(X)g_{\mu\nu}$. Las transformaciones conformes dejan nulas las geodésicas nulas, por lo tanto, si un modelo DHOST describe la gravedad en la cosmología, los requisitos para $\alpha_T = 0$ enumerados anteriormente se aplican a la contraparte más allá de Horndeski de la teoría DHOST.

La cosmología y la motivación para una combinación tan específica queda por explorar y no

está claro si tales modelos tienen alguna motivación en particular (Baker et al., 2017). J. Ezquiaga y M. Zumalacárregui (Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017) encontraron que las teorías más allá de Horndeski con ajuste disformal y la clase $A_1 = 0$ en DHOST (Langlois and Noui, 2016) no están excluidas, mientras que los modelos quártico y quántico más allá de Horndeski (Langlois and Noui, 2016), los modelos cuadráticos (con $A_1 \neq 0$) (Langlois and Noui, 2016) y los modelos DHOST cúbicos (Ben Achour et al., 2016) están todos excluidos.

5.3.3. Implicaciones en teorías vector-tensor. En una primera clase de los modelos vector-tensor se encuentran las teorías generalizadas Einstein-Aether, cuya acción se puede escribir como

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{F}(K) + \lambda(A_\mu A^\mu + 1)], \quad (207)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange, $K = c_1 \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu + c_2 (\nabla_\mu A^\mu)^2 + c_3 \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu$, con c_i son constantes (Jacobson and Mattingly, 2001; Zlosnik et al., 2007). En este modelo $\alpha_T = -(c_1 + c_3) \mathcal{F}_{,K} / [1 + (c_1 + c_3) \mathcal{F}_{,K}]$, así que la restricción sobre α_T implica que $c_1 = -c_3$.

Una segunda clase de las teorías vector-tensor, son las teorías generalizadas de Proca (Tasinato, 2014c; Heisenberg, 2014b; Allys et al., 2016b), en donde la acción es de la forma

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i \right], \quad (208)$$

donde los Lagrangianos \mathcal{L}_i son los mostrados en la ecuación (5.2) de la referencia (Heisenberg,

2014b) o de manera equivalente en la ecuación (170). En el caso que $A_\mu = (A, 0)$, α_T es dada por

$$\alpha_T = A^2[2G_{4,X} - (HA - \dot{A})G_{5,X}]/q_T, \quad (209)$$

donde $q_T = 2G_4 - 2A^2G_{4,X} + HA^3G_{5,X}$. De manera análoga al caso de las teorías tensor-escalar consideradas anteriormente, si $\alpha_T = 0$ se debe ajustar cuidadosamente la dependencia funcional de G_4 y G_5 para satisfacer este criterio, o considerar una teoría con interacciones mínimas a la gravedad de orden superior al requerir $G_{4,X} = G_{5,X} = 0$, generando que $\mathcal{L}_4 \propto R$ y $\mathcal{L}_5 \propto G_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$.

6. Implicaciones cosmológicas

En este capítulo se analizará las posibles implicaciones cosmológicas de los Lagrangianos $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$ y $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$, junto con los términos de Einstein-Hilbert y de Yang-Mills. Este estudio se abordará, inicialmente, desde la perspectiva de los sistemas dinámicos con el fin de determinar el comportamiento de los puntos críticos de estos modelos.

6.1. Análisis dinámico del Lagrangiano: $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$

Con el fin de analizar las posibles implicaciones cosmológicas del Lagrangiano $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$, este se plantea la siguiente acción:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}} \right], \quad (210)$$

en donde $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}} \equiv \beta G_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ es el Lagrangiano definido en la ecuación (190) con $\beta \equiv f_1^{\text{Curv}}$ definida como una constante.

Las ecuaciones de campo de Einstein, asociadas a la acción anterior, se obtienen variando con respecto a la métrica ($\delta g_{\mu\nu}$); de esta manera lo que se obtiene es

$$\begin{aligned}
M_p^2 G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}^a F_{a\beta\nu} \\
& - 2\beta \left[A_\mu^a A_a^\alpha R_{\nu\alpha} + A_\nu^a A_a^\alpha R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}A^{a\alpha}A_{a\beta} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}A_\alpha^a A_a^\alpha - \frac{1}{2}RA_\mu^a A_{a\nu} \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[(A_\nu^a A_a^\alpha)_{;\mu\alpha} + (A_\mu^a A_a^\alpha)_{;\nu\alpha} - (A_\mu^a A_{a\nu})_{;\alpha} \right. \\
& \left. \left. - g_{\mu\nu}(A^{a\lambda}A_a^\rho)_{;\rho\lambda} + g_{\mu\nu}(A^{a\alpha}A_{a\alpha})_{;\beta} - (A^{a\alpha}A_{a\alpha})_{;\mu\nu} \right] \right], \quad (211)
\end{aligned}$$

donde el punto y coma “;” indica derivada covariante y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

Ahora, al variar la acción de la ecuación (210) respecto al campo vectorial y sus derivadas, δA_μ^a y $\delta(A_{\mu,\nu}^a)$, se obtienen las ecuaciones de evolución para los campos vectoriales; de esta variación resulta

$$\sqrt{-g}(2\beta g^{\alpha\mu}G_{\alpha\beta}A_a^\beta + g\varepsilon_{ad}^b A_\beta^d F_b^{\mu\beta}) - \sqrt{-g}(F_a^{\mu\nu})_{;\nu} - (\sqrt{-g})_{;\nu}F_a^{\mu\nu} = 0, \quad (212)$$

donde la coma “;” indica derivada espacio-temporal.

Con el fin de explorar las consecuencias cosmológicas del modelo presentado en la ecuación (210), en un fondo de FLRW, se implementa la “tríada cósmica” que se describe por: $A_\mu^a \equiv a\psi\delta_\mu^a$ con el propósito de preservar la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. En consecuencia, las

ecuaciones de campo resultante de la ecuación (211) son

$$\psi^2 H^2 + 2H\psi\dot{\psi} + \dot{\psi}^2 + g^2\psi^4 + 2\beta(3H^2\psi^2 + 4H\psi\dot{\psi}) = 2M_p^2 H^2, \quad (213)$$

$$\begin{aligned} \psi^2 H^2 + 2H\psi\dot{\psi} + \dot{\psi}^2 + g^2\psi^4 + 2\beta(-3H^2\psi^2 - 3\dot{H}\psi^2 - 12H\psi\dot{\psi} - 4\dot{\psi}^2 - 4\psi\ddot{\psi}) = \\ -2M_p^2(3H^2 + 2\dot{H}), \end{aligned} \quad (214)$$

y la ecuación de evolución (a partir de de la ecuación (212)) para los campos vectoriales resultante es

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + 2H^2\psi + \dot{H}\psi + 2g^2\psi^3 + \beta\psi(6H^2 + 4\dot{H}) = 0. \quad (215)$$

Es importante resaltar que la forma de la ecuación (211) se le ha dado la forma $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$, donde se cumple que $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ y lo que es equivalente $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$, aclarando que el término derecho, $T_{\mu\nu}$, no solo contiene términos relacionados con ψ , si no que también incluyen términos relacionados con la geometría, el tensor y el escalar de Ricci. Por otro lado, la dinámica del sistema queda completamente descrito por las ecuaciones (213) y (214), es decir, la ecuación (215) es completamente redundante, sin embargo, como se observará mas adelante, esta ecuación es de utilidad para determinar ciertas variables con el propósito de construir el sistema autónomo escritos en variables adimensionales que describen la dinámica del modelo.

6.1.1. Sistema autónomo. Dentro del análisis via sistemas dinámicos es importante

definir variables adimensionales, por lo cual se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}M_p H} \\ y &\equiv \frac{\psi}{\sqrt{2}M_p} \\ z &\equiv \frac{\sqrt{2}M_p g}{H}. \end{aligned} \quad (216)$$

En términos de estas variables adimensionales las ecuaciones (213) - (215) se pueden escribir como

$$y^2 + 2xy + x^2 + z^2y^4 + 2\beta(3y^2 + 4xy) = 1, \quad (217)$$

$$y^2 + 2xy + x^2 + z^2y^4 + 2\beta(-3y^2 + 3\epsilon y^2 - 12xy - 4x^2 - 2\sqrt{2}yp) = -3 + 2\epsilon, \quad (218)$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} + 3x + 2y - \epsilon y + 2z^2y^3 + \beta y(6 - 4\epsilon) = 0, \quad (219)$$

donde $p \equiv \ddot{\psi}/M_p H^2$ y $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ es el parámetro de rodadura lenta.

El sistema autónomo es definido a partir de tomar la derivada temporal de las variables adimensionales definidas en las ecuaciones (216) y posteriormente reescribir estos resultados en

término del número de *e-folds*; a partir de esto se encuentra que:

$$x' = \frac{P}{\sqrt{2}} + \varepsilon x, \quad (220)$$

$$y' = x, \quad (221)$$

$$z' = z\varepsilon, \quad (222)$$

donde la prima representa la derivada con respecto al número de *e-folds*. Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (218) y (219), y remplazar z^2 las restricción de Friedmann de la ecuación (217) es posible encontrar una expresión para p y ε en término de las variables x y y , de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{y(\beta y(-16\beta + 3y - 4) - 1)} \times \\ 8\beta(x^2 - 1) + 2y(\beta(2x^2 + x(32\beta + 8y + 2) + 3y(4\beta + y)) - 1) \quad (223)$$

$$p = \frac{1}{y(\beta y(-16\beta + 3y - 4) - 1)} \times \\ \sqrt{2}(2x^2(\beta(8\beta + 5)y^2 - 1) + 2(3\beta y^2 - 1)((7\beta + 1)y^2 - 1) \\ + xy(\beta((112\beta + 19)y^2 - 16) - 1)). \quad (224)$$

De esta manera, el sistema autónomo esta formado por las ecuaciones $x' = x(x, y)$ y $y' = y(x, y)$ en (220) y (221), donde $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ y $p = p(x, y)$ están el expresados en las ecuaciones (223) y (224)

respectivamente.

La estrategia a seguir es determinar los puntos críticos, $x' = 0, y' = 0$ con el propósito de analizar cuales de éstos presentan un un período de expansión acelerada; por un lado, que el punto crítico presente en el análisis de estabilidad un comportamiento de silla (estado transitorio), en el cual el período inflacionario termina o, que el punto crítico sea estable (ademas que cualquier cambio en las condiciones iniciales preserve el estado de un período inflacionario), lo que mostraría un período de expansión eterna lo cual podría representar la expansión acelerada que presenta en hoy en día el universo. Una tercera alternativa es que el sistema dinámico muestre un estado asintótico, es decir las variables dinámica tiende a un estado que presente un período de expansión eterna, independiente de las condiciones iniciales del sistema. En las situaciones anteriores, es importante que siempre se cumpla que $\varepsilon < 1$ en los puntos críticos que se encuentren.

6.1.2. Puntos críticos. Como se mostró en la sección 4.1.1, los puntos críticos del sistema autónomo en las ecuaciones (220) y (221) se encuentran a partir de $x' = 0$ y $y' = 0$. Cabe resaltar que los puntos críticos del sistema deben cumplir que $z^2 > 0$, con lo que se garantiza que $H > 0$; la restricción es expresada a partir de la ecuación de Friedmann en (217). Por lo tanto, los puntos críticos asociados al sistema autónomo son:

- $\mathcal{P}_1 : x_1 = 0, y_1 = -1/\sqrt{1+7\beta}$. En este punto crítico el parámetro de rodadura lenta es: $\varepsilon = 2$, el cual es característico para un período dominado por la radiación. Los valores propios asociados

a la matriz Jacobiana son:

$$\lambda_{\mathcal{P}_1}^1 = \frac{1}{2(4\beta + 1)(7\beta + 1)(4\beta\sqrt{7\beta + 1} - 1)} \times$$

$$\beta \left(8\sqrt{7\beta + 1} + 4\beta \left(56\beta\sqrt{7\beta + 1} + 22\sqrt{7\beta + 1} - 21 \right) - 33 \right) - 3 +$$

$$\sqrt{(4\beta + 1)^2(7\beta + 1)^2 \left(16\beta \left(-7\sqrt{7\beta + 1} + 4\beta \left(7\beta - 7\sqrt{7\beta + 1} + 1 \right) + 7 \right) + 25 \right)},$$
(225)

$$\lambda_{\mathcal{P}_1}^2 = -\frac{1}{2(4\beta + 1)(7\beta + 1)(4\beta\sqrt{7\beta + 1} - 1)} \times$$

$$\beta \left(8\sqrt{7\beta + 1} + 4\beta \left(56\beta\sqrt{7\beta + 1} + 22\sqrt{7\beta + 1} - 21 \right) - 33 \right) + 3 +$$

$$\sqrt{(4\beta + 1)^2(7\beta + 1)^2 \left(16\beta \left(-7\sqrt{7\beta + 1} + 4\beta \left(7\beta - 7\sqrt{7\beta + 1} + 1 \right) + 7 \right) + 25 \right)},$$
(226)

en donde la estabilidad de éste punto crítico dependerá de los valores del parámetro libre β , los cuales se pueden clasificar como sigue:

(a) Los valores propios no existen (división por cero) si:

$$\beta = \frac{1}{336} \left(4\sqrt[3]{2 \left(21\sqrt{3777} + 1291 \right)} + \sqrt[3]{165248 - 2688\sqrt{3777} - 16} \right).$$

$$\simeq 0.169161$$

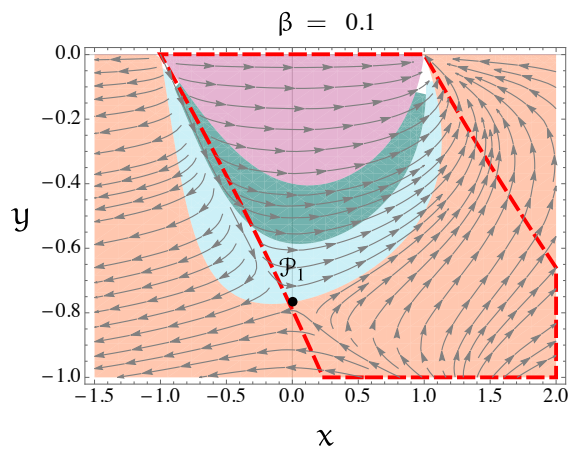
(b) Los valores propios son reales:

si $0 < \beta < 0.169161$, se cumple que $\lambda_{\mathcal{P}_1}^1 < 0 < \lambda_{\mathcal{P}_1}^2$ el punto crítico será de silla; si $0.169161 < \beta \leq 0.172542$, se cumple que $\lambda_{\mathcal{P}_1}^2 < \lambda_{\mathcal{P}_1}^1 < 0$ el punto crítico será estable; si $\beta \geq 7.27547$, se cumple que $\lambda_{\mathcal{P}_1}^1 > \lambda_{\mathcal{P}_1}^2 > 0$ el punto crítico será inestable.

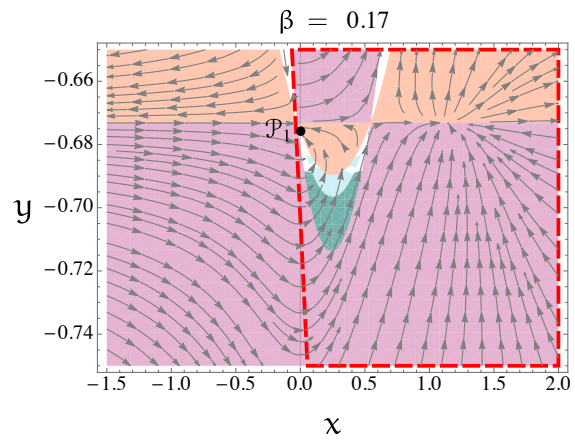
(c) Los valores propios son complejos si: $7.27547 > \beta > 0.172542$.

Con parte real negativa si: $0.172542 < \beta < 0.231617$, por lo el punto crítico será un espiral estable. En el caso con parte real igual a cero si: $\beta = 0.231617$, por lo que el punto crítico tendrá soluciones oscilatorias (centro estable). Finalmente, el caso con parte real positiva si: $\beta > 0.231617$, por lo que el punto crítico será un espiral inestable.

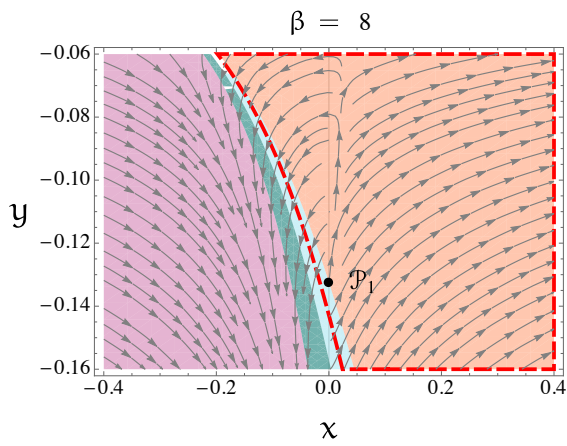
El análisis de estabilidad de éste punto crítico se muestra en la figura 9 mostrados anteriormente en el espacio de fase de las variables adimensionales x y y . Las regiones en naranja corresponde a $\varepsilon > 2$, azul para $1 \leq \varepsilon \leq 2$, en verde para $0 \leq \varepsilon < 1$ y en blanco para $\varepsilon < 0$.



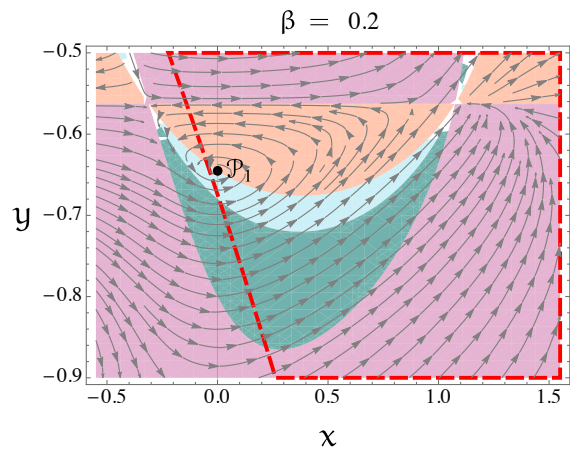
(a)



(b)



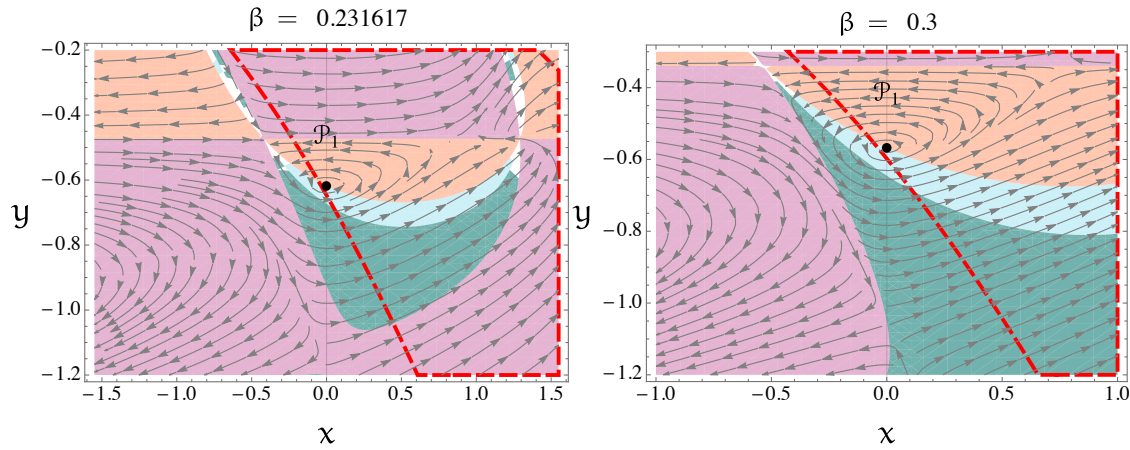
(c)



(d)



(e)



(f)

(g)

$$\text{orange } \epsilon > 2 \quad \left| \quad \text{light blue } 1 < \epsilon \leq 2 \quad \left| \quad \text{dark green } 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad \left| \quad \text{purple } \epsilon < 0$$

(h)

Figura 9. Espacio de fase para el punto crítico \mathcal{P}_1 del modelo $\mathcal{L}_{\text{Curv},1,A}^{\text{Gal}}$

- $\mathcal{P}_2 : x_2 = 0, y_2 = 1/\sqrt{1+7\beta}$. En este punto crítico $\epsilon = 2$. Los valores propios asociados a éste punto crítico son:

$$\lambda_{\mathcal{P}_2}^1 = \frac{1}{2(4\beta+1)(7\beta+1)(4\beta\sqrt{7\beta+1}+1)} \times$$

$$3 + \beta \left(8\sqrt{7\beta+1} + 4\beta \left(56\beta\sqrt{7\beta+1} + 22\sqrt{7\beta+1} + 21 \right) + 33 \right) -$$

$$\sqrt{(4\beta+1)^2(7\beta+1)^2 \left(16\beta \left(7(\sqrt{7\beta+1}+1) + 4\beta(7\beta+7\sqrt{7\beta+1}+1) \right) + 25 \right)},$$
(227)

$$\lambda_{\mathcal{P}_2}^2 = \frac{1}{2(4\beta + 1)(7\beta + 1)(4\beta\sqrt{7\beta + 1} + 1)} \times$$

$$3 + \beta \left(8\sqrt{7\beta + 1} + 4\beta \left(56\beta\sqrt{7\beta + 1} + 22\sqrt{7\beta + 1} + 21 \right) + 33 \right) +$$

$$\sqrt{(4\beta + 1)^2(7\beta + 1)^2 \left(16\beta \left(7 \left(\sqrt{7\beta + 1} + 1 \right) + 4\beta \left(7\beta + 7\sqrt{7\beta + 1} + 1 \right) \right) + 25 \right)}.$$

(228)

Los valores propios son reales si $\beta > 0$ y se cumple que: $\lambda_{\mathcal{P}_2}^1 < 0 < \lambda_{\mathcal{P}_2}^2$, por lo que el punto crítico es de silla.

Con todo lo anterior, éste modelo no presenta un periodo de expansión acelerada ya que los dos puntos críticos que cumplen que $z^2 > 0$ no presentan un parámetro de rodadura lenta menor que uno, $\varepsilon < 1$, además que el parámetro libre del modelo debe ser positivo, $\beta > 0$; en las dos posibles situaciones si se encuentra un período en donde domina o es transitorio la presencia de un fluido de radiación, ya que $\varepsilon = 2$.

Por otro lado, es importante resaltar que si los puntos críticos anteriores no muestran un período de expansión acelerada, no garantiza que estos no existan, ya que puede ser posible determinar que algún estado del sistema muestra una dinámica tal que, $\varepsilon < 1$, sin embargo, éste período, si es que existe, será completamente dependiente de las condiciones iniciales, ya que en la cercanía de los puntos críticos no se muestra ninguna dinámica con $\varepsilon < 1$.

6.2. Análisis dinámico del Lagrangiano: $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$

La acción que se implementará con el fin de estudiar las posibles implicaciones cosmológicas del Lagrangiano $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$ es la siguiente:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}} \right], \quad (229)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}} \equiv f_4^{\text{Curv}} L_{\mu\nu\rho\sigma} A^{a\mu} A_a^\nu A^{b\rho} A_b^\sigma$ es el Lagrangiano definido en la ecuación (193), con $f_4^{\text{Curv}} \equiv \gamma/M_p^2$ como una constante. $L_{\alpha\beta\sigma\lambda}$ es el dual de Riemann; este tensor tiene la siguiente forma:

$$L_{\mu\alpha\nu\beta} = 2R_{\mu\alpha\nu\beta} + 2(R_{\mu\beta}g_{\mu\alpha} + R_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - R_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}) + R(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}). \quad (230)$$

Siguiendo el mismo procedimiento en el modelo anterior, las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación de evolución de los campos vectoriales son determinadas en un espacio-tiempo de FLRW; nuevamente se implementa la “triada cósmica”, $A_\mu^a \equiv a\psi\delta_\mu^a$ con el propósito de preservar la homogeneidad e isotropía en el universo. Por lo tanto, las ecuaciones de campo de

Einstein, resultante de la variación de la acción de la ecuación (229) son:

$$\psi^2 H^2 + 2H\psi\dot{\psi} + \dot{\psi}^2 + g^2\psi^4 + \frac{\gamma}{M_p^2} \left[-\frac{1}{3}H^2\psi^2 - \frac{2}{3}\psi^3\dot{\psi}H \right] = 2M_p^2 H^2, \quad (231)$$

$$\begin{aligned} \psi^2 H^2 + 2H\psi\dot{\psi} + \dot{\psi}^2 + 2g^2\psi^4 + \frac{\gamma}{M_p^2} \left[\frac{1}{3}H^2\psi^4 + 2\psi^2\dot{\psi}^2 + 4H\psi^3\dot{\psi} + \frac{2}{3}\psi^3\ddot{\psi} \right] = \\ -2M_p^2(3H^2 + 2\dot{H}). \end{aligned} \quad (232)$$

La ecuación de evolución para los campos de vectoriales, resultante de la variación respecto al campo y sus derivadas son:

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + 2H^2\psi + \dot{H}\psi + 2g^2\psi^3 - \frac{\gamma}{3M_p^2}\psi^3(H^2 + \dot{H}) = 0. \quad (233)$$

6.2.1. Sistema autónomo. Para proceder con análisis vía sistemas dinámicos, se implementa, nuevamente, las mismas variables adimensionales definidas en la ecuación (216), por lo tanto, el sistema autónomo resultante para este modelo es

$$y^2 + 2xy + x^2 + z^2y^4 + \gamma \left(-\frac{2}{3}y^4 - \frac{8}{3}xy^3 \right) = 1, \quad (234)$$

$$y^2 + 2xy + x^2 + z^2y^4 + \gamma \left(\frac{2}{3}y^4 + 4x^2y^2 + 8xy^3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}y^3p \right) = -3 + 2\varepsilon, \quad (235)$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} + 3x + 2y - \varepsilon y + 2z^2y^3 - \frac{2\gamma}{3}y^3(1 - \varepsilon) = 0, \quad (236)$$

donde $p \equiv \ddot{\psi}/M_p H^2$ y $\varepsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ es el parámetro de rodadura lenta.

El sistema autónomo es definido a partir de tomar la derivada temporal de las variables adimensionales definidas en las ecuaciones (216) y posteriormente reescribir estos resultados en término del número de *e-folds*; de esta manera, el sistema autónomo es el mostrado en las ecuaciones (220) y (221)

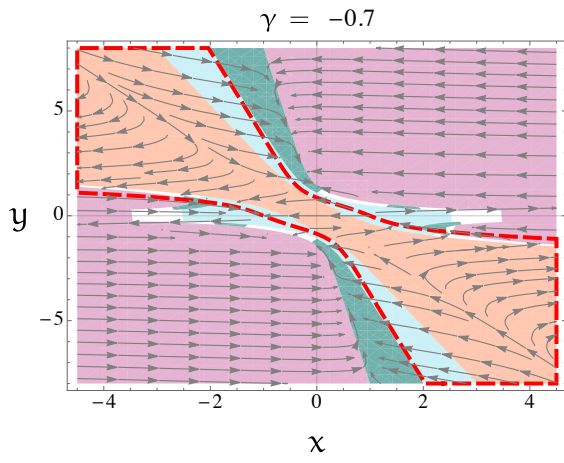
Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (235) y (236) es posible encontrar una expresión para p y ε , en término de las variables x y y , de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{6\gamma y^2 (5x^2 + 9xy + y^2 - 2) - 4\gamma^2 y^5 (8x + y) + 18}{4\gamma^2 y^6 - 6\gamma y^4 + 9} \quad (237)$$

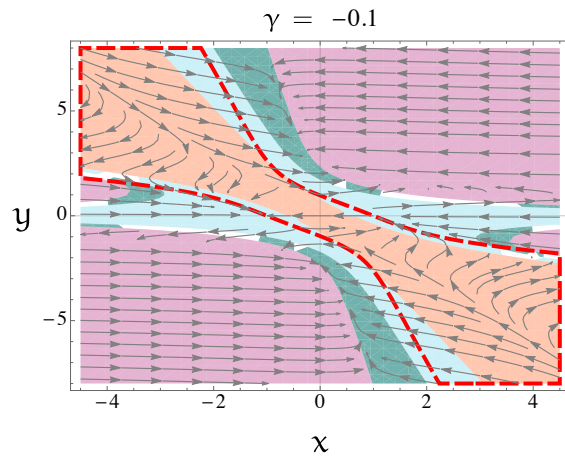
$$p = \frac{1}{y(4\gamma^2 y^6 - 6\gamma y^4 + 9)} \times \\ \sqrt{2} \left[9(2x^2 + xy + 2y^2 - 2) + 6y^3 (3(x^2 - 1)y + 8xy^2 - 8x + y^3) \gamma \right. \\ \left. - 4\gamma^2 y^6 (3x^2 + 8xy + y^2) \right]. \quad (238)$$

6.2.2. Puntos críticos. Como se mostró en la sección 4.1.1, los puntos críticos del sistema autónomo en las ecuaciones (220) y (221) se encuentran a partir de $x' = 0$ y $y' = 0$, de igual forma que se implementó en la subsección anterior. Como se resalta en la sección anterior, especialmente en la subsección 6.1.2, en éste modelo se pretende seguir la misma idea, determinar aquellos puntos críticos donde $z^2 > 0$ y algún (os) puntos críticos muestra una dinámica tal que $\varepsilon < 1$. Sin embargo, el sistema no muestra la existencia de puntos críticos que cumplan simultáneamente: $x' = 0$, $y' = 0$ y $z^2 > 0$. Una alternativa que se probó fue buscar si existen estados del sistema dinámico donde se cumpla que: $\varepsilon = 0$, $p = 0$, $y' = 0$ y $z^2 > 0$, sin embargo, no existen. Otra

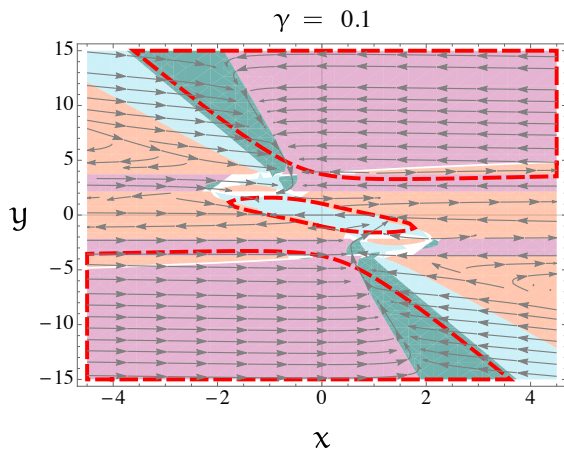
alternativa es indagar en el espacio de fase del sistema, $x' = f(x, y)$ y $y' = g(x, y)$, en que regiones es posible encontrar un comportamiento asintótico, es decir, para un amplio rango de condiciones iniciales, el sistema tiende hacia ésta asíntota, y además que contenga soluciones tal que $0 \ll \varepsilon < 1$ y z^2 . En la figura 10 se muestra el espacio de fase en el cual se resaltan las siguientes regiones: blanca para $\varepsilon < 0$, naranja para $\varepsilon > 2$, azul para $1 < \varepsilon \leq 2$, verde para $0 \leq \varepsilon < 1$ y la región interior a la línea a trazo en rojo corresponde a $z^2 > 0$. La figura 10a con $\gamma = -0.7$ muestra que las soluciones físicamente viables, $z^2 > 0$, contiene las regiones donde $\varepsilon > 1$, por lo que en esta configuración del sistema no se tiene un periodo de expansión acelerada cosmológicamente viable; situación similar sucede con el figura 10b con $\beta = -0.1$. En la figura 10c con $\gamma = 0.1$ se puede apreciar que la región verde ($0 \ll \varepsilon < 1$) esta contenida en $z^2 > 0$ y además presenta que las soluciones tienden un estado donde $\varepsilon \sim 0$, ya que se encuentran cerca de la región donde $\varepsilon < 0$; la misma situación experimenta el sistema en el caso que $\gamma = 0.7$, como se muestra en la figura 10d.



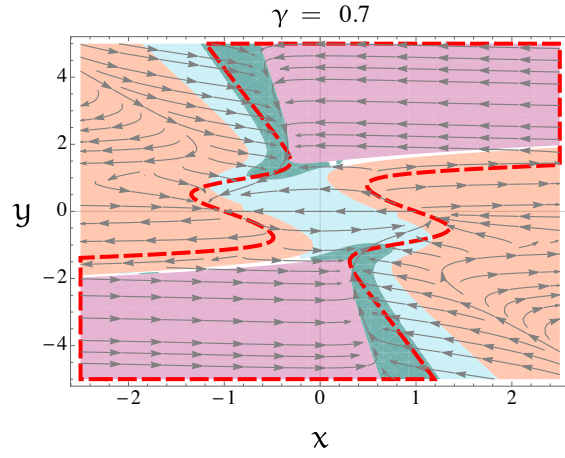
(a)



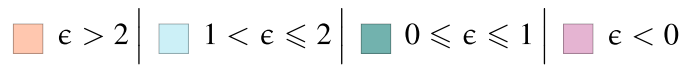
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 10. Espacio de fase del modelo $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$. En este conjunto de figuras se muestra el espacio de fase para diferentes valores del parámetro libre γ , en donde es posible apreciar que, para valores positivos de γ se encuentra un estado asintótico en donde $0 \leq \varepsilon < 1$ y $z^2 > 0$; ésta región se encuentra entre las zonas resaltadas en naranja y verde.

7. Energía oscura del término S no Abelian

Las teorías generalizadas de Proca se construyen siguiendo la misma idea de construcción de las teorías de Galileón-Horndeski (Deffayet and Steer, 2013; Rodríguez and Navarro, 2017). Cualquiera que sean las opciones que la naturaleza tenga para definir la acción, una vez que se haya decidido el contenido del campo y las simetrías, todos ellos deberán cumplir con un hamiltoniano acotado por debajo. Y esto puede ser posible, de acuerdo con Ostrogradski (Ostrogradski, 1850), si las ecuaciones de campo dinámicas son, a lo sumo, de segundo orden en las derivadas espacio-temporales. Si no se satisficiera esta última condición, el sistema entraría genéricamente en una inestabilidad severa, llamada de Ostrogradski, tanto a nivel clásico como cuántico (Woodard, 2007, 2015). El enfoque tradicional para construir tales teorías es mediante el empleo de campos escalares como el contenido del campo (Horndeski, 1974; Kobayashi et al., 2011; Deffayet et al., 2011; Nicolis et al., 2009; Deffayet et al., 2009b,a). No se obtiene nada significativamente nuevo, en comparación con el término cinético canónico habitual, cuando se emplea, en cambio, un campo de *gauge* abeliano (Horndeski, 1976; Deffayet et al., 2014). Por lo tanto, tener una nueva fenomenología requiere ya no invocar las simetrías de *gauge*, es decir, requiere una generalización de la acción de Proca. Tal generalización se realizó en las referencias (Heisenberg, 2014a; Tasinato, 2014b; Allys et al., 2016b; Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2016; Allys et al., 2016a; Hull et al., 2016) donde se reconoció

que, además de $F_{\mu\nu}$ y su dual de Hodge $\tilde{F}_{\mu\nu}$, la acción también se define en términos de A_μ y la versión simétrica $S_{\mu\nu}$ de $F_{\mu\nu}$: $S_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. La aplicación de todas estas ideas a las teorías no abelianas culminó en la construcción de la teoría generalizada de Proca $SU(2)$ (Allys et al., 2016c) (ver también la referencia (Beltrán Jiménez and Heisenberg, 2017)). Un aspecto interesante de esta teoría es la violación explícita de la simetría de *gauge* $SU(2)$ que permite un término masivo y sus generalizaciones escritas en términos de las versiones no abelianas de A_μ , $F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ y $S_{\mu\nu}$. Otro aspecto interesante es el carácter global de la simetría $SU(2)$ que podría desempeñar un papel importante en la física de partículas¹⁰. Un tercer aspecto interesante es la posibilidad de utilizar una tríada cósmica (Armendariz-Picon, 2004), un conjunto de tres campos vectoriales mutuamente ortogonales y de la misma norma, que corresponde a una configuración invariante tanto bajo $SU(2)$, para el espacio del campo, y $SO(3)$, para el espacio físico, de acuerdo con el homomorfismo local entre estos dos grupos. La configuración de la tríada cósmica se ha empleado antes (Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2013, 2011; Adshead and Wyman, 2012; Nieto and Rodríguez, 2016; Adshead et al., 2016; Adshead and Sfakianakis, 2017; Davydov and Gal'tsov, 2016) y, al menos en el escenario de *gauge-flation* (Maleknejad and Sheikh-Jabbari, 2013, 2011), su naturalidad se ha demostrado en el sentido de que es un atractor en una configuración anisótropa más general (Maleknejad et al., 2012). Las implicaciones cosmológicas de la teoría de Proca generalizada para un campo vectorial abeliano han sido estudiadas recientemente (Tasinato, 2014b; de Felice et al., 2017; De Felice et al., 2016b,a;

¹⁰ Las simetrías continuas globales son importantes en la física de partículas, por ejemplo, en la solución al problema de CP fuerte a través de la ruptura espontánea de la simetría global $U(1)$ impuesta por el mecanismo de Peccei-Quinn (Weinberg, 1995)

Tasinato, 2014a) pero siempre trabajando con un campo vectorial en donde las componentes espaciales son nulas, evitando así anisotropías desastrosas¹¹. Por el contrario, la configuración isótropa proporcionada por la tríada cósmica, aunque esta última está compuesta por campos vectoriales que definen inherentemente direcciones privilegiadas, es ampliamente favorecida por las observaciones cosmológicas.

7.1. Término S no Abelianos

El lagrangiano de la teoría generalizada de Proca $SU(2)$ está compuesto por varias piezas que se describen en las ecuaciones (189) - (196). De particular importancia es \mathcal{L}_4 , que se caracteriza por las dos derivadas covariantes espacio-temporales de primer orden de A_μ que cada uno de sus términos contiene (a excepción del acoplamiento no mínimo a los términos de gravedad):

$$\mathcal{L}_4 \equiv \alpha \mathcal{L}_4^1 + \kappa \mathcal{L}_4^2 + \lambda \mathcal{L}_4^3, \quad (239)$$

con $\alpha, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ y donde

¹¹ Una excepción es el modelo estudiado en referencia (Emami et al., 2017) donde se considera una tríada de campos vectoriales abelianos tipo espacio y donde las componentes temporales se hacen cero. Los resultados de este trabajo son muy interesantes a pesar de la falta de naturalidad de la configuración de la tríada cuando no existe una simetría $SU(2)$ global subyacente.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^1 &\equiv \frac{1}{4}(A_b \cdot A^b) \left[S_\mu^{a\mu} S_{av}^v - S_\nu^{a\mu} S_{a\mu}^v + A_a \cdot A^a R \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}(A_a \cdot A_b) \left[S_\mu^{a\mu} S_\nu^{bv} - S_\nu^{a\mu} S_\mu^{bv} + 2A^a \cdot A^b R \right]\end{aligned}\quad (240)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^2 &\equiv \frac{1}{4}(A_a \cdot A_b) \left[S_\mu^{a\mu} S_\nu^{bv} - S_\nu^{a\mu} S_\mu^{bv} + A^a \cdot A^b R \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}(A^{a\mu} A^{b\nu}) \left[S_{a\mu}^\rho S_{bv\rho} - S_{av}^\rho S_{b\mu\rho} - A_a^\rho A_b^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} \right. \\ &\quad \left. - (\nabla^\rho A_{a\mu})(\nabla_\rho A_{bv}) + (\nabla^\rho A_{av})(\nabla_\rho A_{b\mu}) \right],\end{aligned}\quad (241)$$

$$\mathcal{L}_4^3 \equiv \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^\mu A_{bv} S^{a\nu\sigma}.\quad (242)$$

En las expresiones anteriores, los índices de *gauge* corren de 1 a 3 y están representados por letras latinas, los índices espacio-temporales corren de 0 a 3 y están representados por letras griegas.

Es muy importante notar que la tercera línea de \mathcal{L}_4^2 , formada por productos de dos derivadas covariantes espacio-temporales de primer orden de A_μ , no se puede escribir ni en términos de $F_{\mu\nu}^a$, $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ o $S_{\mu\nu}^a$, esta línea es un término específico de la naturaleza no abeliana de la teoría (Allys et al., 2016c). Como tal, desaparece en el caso abeliano de tal manera que $\mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_4^2$ se reduce a $-A^2[(S_\mu^\mu)^2 - S_\rho^\sigma S_\sigma^\rho] + \frac{1}{4}A^4 R$ que es parte de la correspondiente \mathcal{L}_4 en la teoría generalizada de Proca para un campo vectorial abeliano (Rodríguez and Navarro, 2017). Esta es la razón por la que se les llamará \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^2 a los términos S no abelianos. En este capítulo, se analizarán las

consecuencias cosmológicas del término S no abeliano en la acción

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \alpha \mathcal{L}_4^1], \quad (243)$$

donde \mathcal{L}_{EH} es el Lagrangiano de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{L}_{YM} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (244)$$

es el término cinético canónico de A_μ , y

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^a{}_{bc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (245)$$

donde g es la constante de acoplamiento del grupo, mientras que las constantes de estructura del grupo están dadas por el símbolo Levi-Civita ε .

7.2. Sistema dinámico autónomo

Para sostener un fondo homogéneo e isótropo, la tríada cósmica se describe por

$$A_\mu^a = a \psi \delta_\mu^a, \quad (246)$$

donde $a\psi$ representa la norma homogénea de la tríada y a es el factor de escala en el espacio-tiempo de *FLRW*. En términos de las cantidades adimensionales

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}M_p H} \\ y &\equiv \frac{\psi}{\sqrt{2}M_p} \\ z &\equiv \frac{\sqrt{2}M_p g}{H}, \end{aligned} \quad (247)$$

donde M_p es la masa reducida de Planck, H es el parámetro de Hubble y el punto representa la deriva respecto al tiempo cósmico, las ecuaciones de campo que provienen de términos proporcionales a $\delta g_{\mu\nu}$ y δA_μ^a en $\delta \mathcal{S} = 0$, en donde \mathcal{S} es como se muestra en la ecuación (243), resultan ser¹²

$$z^2 y^4 + x^2 + 2xy + y^2 + \alpha (10x^2 y^2 - 188xy^3 - 32y^4) = 1, \quad (248)$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^4 + \alpha (104\sqrt{2}py^3 + 614x^2 y^2 + 316xy^3 + 124y^4 \varepsilon - 340y^4) = \\ -3 + 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (249)$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} + 3x + 2y^3 z^2 - y\varepsilon + 2y + \alpha (5\sqrt{2}py^2 + 10x^2 y + 30xy^2 + 94y^3 \varepsilon - 218y^3) = 0, \quad (250)$$

¹² Las ecuaciones de campo gravitacional y las ecuaciones de evolución para los campos de *gauge* A_μ^a se muestran en detalles en los apéndice 2 y 3, respectivamente.

donde

$$p \equiv \frac{\ddot{\Psi}}{M_p H^2}, \quad (251)$$

es una cantidad adimensional y

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (252)$$

es el parámetro de rodadura lenta. La ecuación (250) es redundante, al ya estar incluida en las ecuaciones de campo de Einstein (248) y (249). Sin embargo, en un enfoque de sistemas dinámicos, la ecuación (248) actúa como una restricción para los parámetros adimensionales x y y , sin embargo, de igual forma que se implemento en el capítulo 7, el sistema autónomo es bidimensional, ya que la restricción en la ecuación (248) reduce la dimensión del sistema autónomo cuyas ecuaciones de evolución son

$$x' = \frac{p}{\sqrt{2}} + \varepsilon x, \quad (253)$$

$$y' = x, \quad (254)$$

en donde la prima representa una derivada con respecto al número de *e-folds* $N \equiv \int H dt$. Las ecuaciones (249) y (250) sirven para resolver tanto p como ε en términos de x y y , los cuales toman

la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{9156\alpha^2 y^6 - 166\alpha y^4 + 10\alpha y^2 + 1} \times$$

$$2 \left(2030\alpha^2 x^2 y^4 + 255\alpha x^2 y^2 - 19852\alpha^2 x y^5 + 178\alpha x y^3 + 7238\alpha^2 y^6 - 77\alpha y^4 - 94\alpha y^2 + 1 \right)$$
(255)

y

$$p = -\frac{1}{y(9156\alpha^2 y^6 - 166\alpha y^4 + 10\alpha y^2 + 1)} \times$$

$$\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}y^2 - 10\sqrt{2}\alpha x^2 y^2 + 406\sqrt{2}\alpha x y^3 - \right.$$

$$90\sqrt{2}\alpha y^4 - 178\sqrt{2}\alpha x^2 y^4 - 190\sqrt{2}\alpha x y^5 + 154\sqrt{2}\alpha y^6 +$$

$$\left. 29008\sqrt{2}\alpha^2 x^2 y^6 - 1484\sqrt{2}\alpha^2 x y^7 - 4928\sqrt{2}\alpha^2 y^8 \right)$$
(256)

De esta manera el sistema autónomo estará formado por las ecuaciones $x' = f(\varepsilon(x, y), p(x, y))$ y $y' = g(\varepsilon(x, y), p(x, y))$, en donde las expresiones para ε y p son las mostradas en las ecuaciones (255) y (256) respectivamente.

7.3. Puntos críticos

Los puntos críticos son determinados siguiendo la misma idea mostrada en la sección 6.1.2, esto es que $x' = 0$, $y' = 0$ y $z^2 > 0$; la última condición, $z^2 > 0$, es necesaria para que los puntos críticos encontrados puedan contener un parámetro de Hubble positivo y real. Siguiendo este procedimiento, se encuentran los siguientes puntos críticos:

- $\mathcal{Q}_1 : \frac{77}{11881} < \alpha \leq \frac{1}{128}, x_1 = 0, y_2 = -\frac{i}{\sqrt[4]{77\alpha}}$. Dado que los valores permitidos de α son positivos, el punto crítico presenta un valor complejo para la variable y , por lo que no representa ningún interés físico.
- $\mathcal{Q}_2 : \frac{77}{11881} < \alpha \leq \frac{1}{128}, x_2 = 0, y_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{77\alpha}}$. En este punto crítico la restricción dada por la ecuación (248) toma la forma:

$$z^2 = 77 \left(\frac{109}{77} - \frac{1}{\sqrt{77}\sqrt{\alpha}} \right) \alpha, \quad (257)$$

en donde $z^2 > 0$ si $\alpha > \frac{77}{11881}$, lo cual es un valor permitido para α en este punto crítico. Los valores propios asociados a la matriz Jacobiana en el punto crítico son:

$$\lambda_{\mathcal{P}_2}^{\mp 1} = \frac{29778\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{3552614660\alpha - 64262380\sqrt{77}\sqrt{\alpha} + 22375045 - 267\sqrt{77}}}{2(89\sqrt{77} - 9926\sqrt{\alpha})}. \quad (258)$$

Dado que el rango de valores posibles para α asociados a este punto crítico, los valores propios cumple que: $\lambda_{\mathcal{P}_2}^{+1} < 0 < \lambda_{\mathcal{P}_2}^{-1}$, por lo que es de silla. Por otro lado, el parámetro de rodadura lenta es $\varepsilon = 0$, por lo que se encuentra un período de expansión acelerada transitorio alrededor del punto crítico.

- $\mathcal{Q}_3 : \alpha > \frac{1}{128}, x_3 = 0, y_3 = \frac{i}{\sqrt[4]{77\alpha}}$. El punto crítico posee las mismas características que \mathcal{P}_1 , por lo que no es de interés cosmológico.
- $\mathcal{Q}_4 : \alpha > \frac{1}{128}, x_4 = 0, y_4 = -\frac{1}{\sqrt[4]{77\alpha}}$. El punto crítico posee las mismas características que \mathcal{P}_2 ,

tanto en sus valores propios, como en su análisis de estabilidad y el valor de ε .

En la figura 11 se muestra el diagrama de fase del sistema autónomo de las ecuaciones (255) para el caso que $\alpha = 0.065$, además se resaltan con dos círculos negros los puntos críticos \mathcal{Q}_2 y \mathcal{Q}_4 . En éstas figuras se muestran las regiones de interés, en donde el violeta corresponde a $\varepsilon < 0$, el verde a $0 \leq \varepsilon < 1$, el azul a $1 \leq \varepsilon \leq 2$, el naranja a $\varepsilon > 2$ y la región limitada por la línea a trazos en rojo corresponde a $z^2 > 0$. Los puntos críticos determinados bajo las consideraciones anteriormente mencionadas, muestran que sólo es posible si $\alpha > 0$.

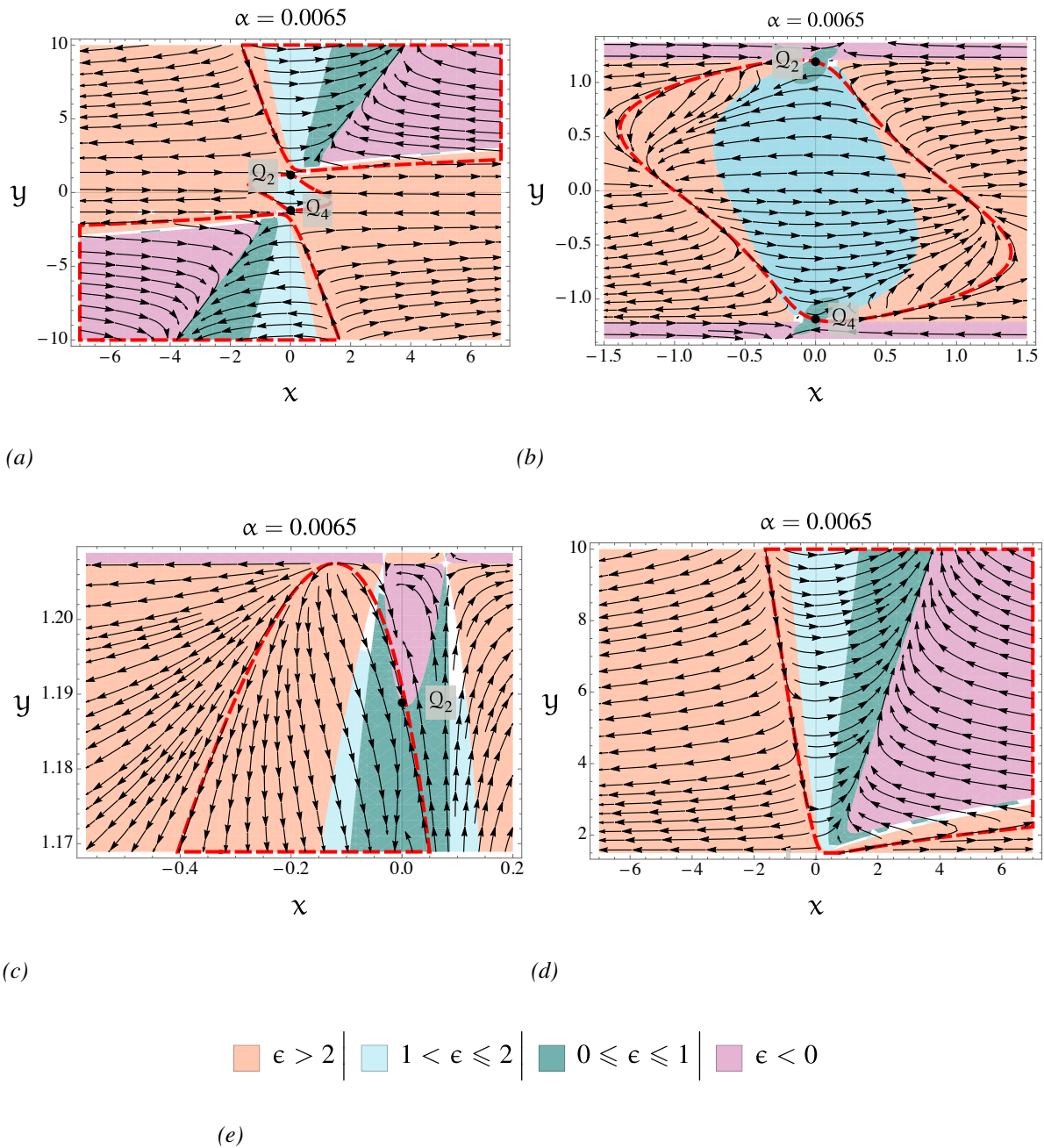


Figura 11. Puntos críticos en el espacio de fase del sistema autónomo (253) y (254), en donde $\alpha = 0.0065$.

En la figura 11a se observa la presencia de tres regiones desconectadas para $z^2 > 0$, en donde

la zona alrededor del origen de la figura se encuentran ubicados los puntos críticos \mathcal{Q}_2 y \mathcal{Q}_4 . Las otras dos zonas, para $y < 0$ como para $y > 0$, presenta un comportamiento asintótico, ya que para un amplio rango de condiciones iniciales para x y y las soluciones tienden a evolucionar en el límite entre las zonas verde y violeta, es decir, entre $\varepsilon > 0$ y $0 \leq \varepsilon < 1$, por lo que el parámetro de rodadura lenta evolucionará a cero, $\varepsilon \sim 0$; la figura 11b muestra un acercamiento en la región alrededor de los puntos críticos de interés, en donde es posible apreciar el comportamiento de silla de los puntos críticos; en la figura 11c se muestra que el punto crítico \mathcal{Q}_2 se encuentra en el límite donde ε cambia de signo por lo que $\varepsilon = 0$, además para ciertas condiciones iniciales las soluciones permanecerán en un estado donde $\varepsilon = 0$ y se tendrá una expansión acelerada eterna, la misma característica sucede con el punto crítico \mathcal{Q}_4 ; la figura 11d se muestra para valores $y > 0$ la presencia un comportamiento asintótico, de igual manera se puede encontrar la presencia del comportamiento asintótico para $y < 0$, como para un amplio rango de condiciones iniciales el sistema evoluciona un estado de expansión acelerada eterna, ya que la presencia de la asíntota se encuentra en el límite donde ε cambia de signo, es decir $\varepsilon \sim 0$ sobre la asíntota.

Por otro lado, se ha encontrado que para valores de $\alpha > 0.0072$ las tres regiones mostradas en la figura 11a, ahora se encontraran conectadas, permitiendo que soluciones cercanas a los puntos críticos evolucionen hacia a la asíntota y la condición $z^2 > 0$ se cumpla. En la figura 12 se muestra el espacio de fase del sistema autónomo para $\alpha = 0.0075$, en donde se resalta la conexión entre las diferentes zonas

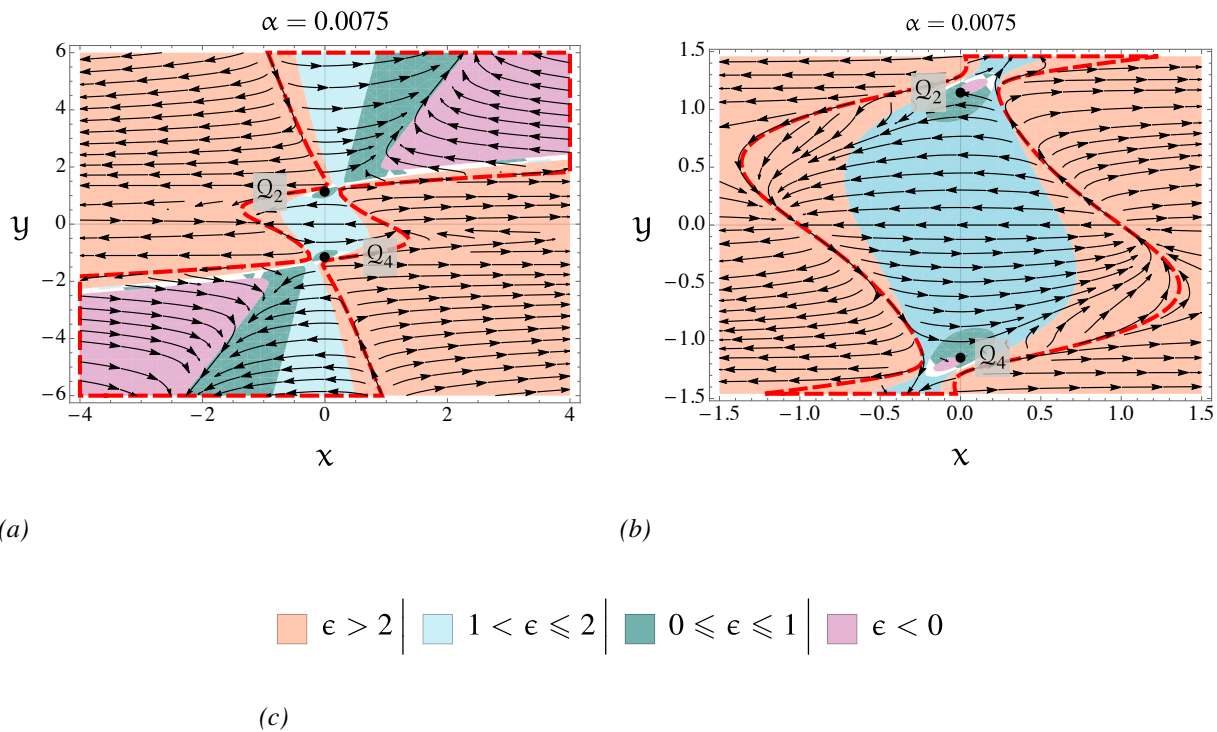


Figura 12. Puntos críticos en el espacio de fase del sistema autónomo (253) y (254), en donde $\alpha = 0.0075$.

7.4. Comportamiento asintótico

Este sistema dinámico autónomo disfruta de un comportamiento asintótico que conduce a la descripción de dos fluidos perfectos de radiación coexistentes pero artificiales, uno asociado al Lagrangiano de Yang-Mills con una densidad de energía y presión ambas positivas se llamará: el fluido positivo, y el otro asociado al término S con densidad de energía y presión negativa que se

llamará: el fluido negativo. Tal comportamiento asintótico es dado por

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \beta y, \\ y &\rightarrow \infty, \\ \text{cuando } N &\rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{259}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$. En efecto, la ecuación (254) es consistente con este comportamiento ya que $y' - y\beta = 0$, es decir, $y \propto e^{\beta N} \rightarrow \infty$. Como se puede comprobar, las ecuaciones (248) y (253)¹³ se satisfacen simultáneamente en el régimen asintótico para¹⁴

$$\begin{aligned} \alpha &> 0, \\ \beta &= \frac{11}{29}, \end{aligned} \tag{260}$$

que, a su vez, hace $\varepsilon \rightarrow 0$ como se observa en la figura 13a (y, por lo tanto, $\omega \equiv p/\rho \rightarrow -1$).

En la figura 13b s muestran el comportamiento asintótico para x/y para un conjunto elegido de condiciones iniciales. Como se indicó anteriormente, el sistema exhibe un mecanismo de ajuste fino dinámico asintótico, ya que los valores absolutos de las densidades de energía del fluido negativo ($|\rho_\alpha|$) y del fluido positivo (ρ_{YM}) crecen exponencialmente pero, sin embargo, coinciden casi con

¹³ Estrictamente lo que se debe cumplir, a partir de la ecuación (259), es que $z^2 > 0$ en el límite asintótico.

¹⁴ ver apéndice 4

precisión, independientemente de las condiciones iniciales¹⁵, así que $\rho_{tot} = \rho_{YM} + \rho_\alpha$ se aproxima a un valor finito constante. Para ver esto, se puede obtener fácilmente $\Omega_\alpha \equiv \rho_\alpha / \rho_{tot}$ y con ayuda de la ecuación (248)

$$\Omega_{YM} = 1 - \Omega_\alpha, \quad (261)$$

$$\Omega_\alpha = \alpha(-32y^4 - 188xy^3 + 10x^2y^2), \quad (262)$$

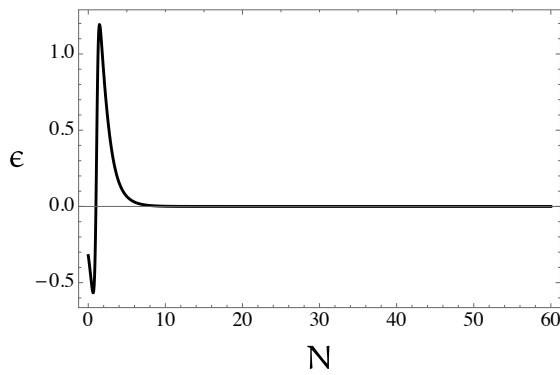
y se verifica que en el límite asintótico dado por las ecuaciones (259) y (260), $\rho_\alpha \rightarrow -\rho_{YM}$. Esto se confirma con la solución numérica presentada en las figuras 13c y 13d que muestran un crecimiento exponencial con N para Ω_{YM} y $|\Omega_\alpha|$, mientras que la figura 13e revela el comportamiento predicho para $\rho_{tot} \propto H^2$. Como se observa en las figuras, la aparente ruptura del régimen clásico debido al crecimiento exponencial de los valores absolutos de las densidades de energía queda refutada por el buen comportamiento de $H < M_p$. El parámetro de estado para cada fluido también se puede estudiar extrayendo las presiones P_{YM} y P_α de las ecuaciones (248) y (249):

$$P_\alpha = \frac{\rho_{tot}}{3} \left[\alpha(104\sqrt{2}py^3 + 614x^2y^2 + 316xy^3 + 124y^4\varepsilon - 340y^4) \right] \quad (263)$$

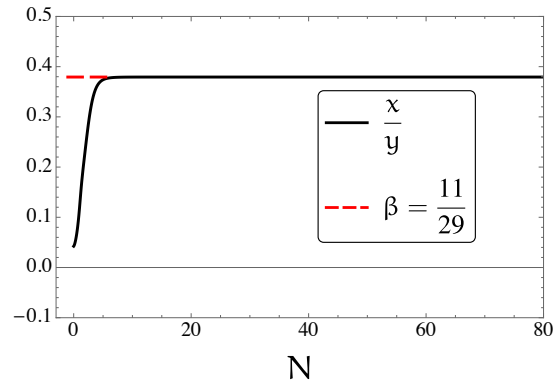
$$P_{YM} = \frac{\rho_{tot}}{3} \left[-\frac{3}{2} + \varepsilon \right] - P_\alpha. \quad (264)$$

¹⁵ A menos que estén lo suficientemente cerca de un atractor del sistema dinámico.

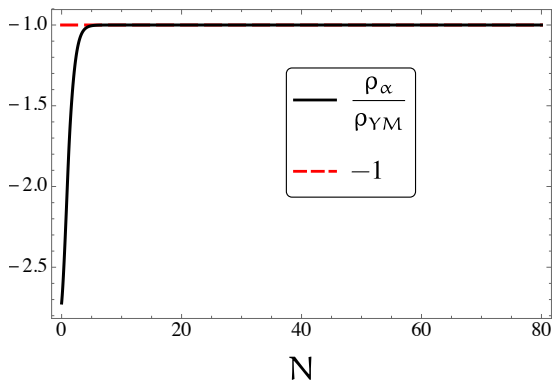
Por supuesto, $\omega_{YM} = 1/3$, mientras que ω_α es una función de N mas complicada que va, en el límite asintótico dado por las ecuaciones (259) y (260), a $1/3$; esto es confirmado numéricamente por la figura 13f. Con respecto al parámetro de estado para todo el fluido, asintóticamente se tiene $\omega_{tot} \rightarrow -1$; este es analíticamente el caso como se muestra justo debajo de la ecuación (260) y esto es confirmado numéricamente por la figura 13g. Un mecanismo autoajutable tan interesante para generar un parámetro de estado $\omega \simeq -1$, de acuerdo con el parámetro de estado observado para la energía oscura $\omega = -1.006 \pm 0.045$ (Ade et al., 2016a,b), no podría ser un candidato ideal para explicar la energía oscura si el valor asintótico para H no correspondiera al valor observado hoy $H_0 = 9.03h \times 10^{-61} M_p$ con $h = 0.678 \pm 0.009$ (Ade et al., 2016a).



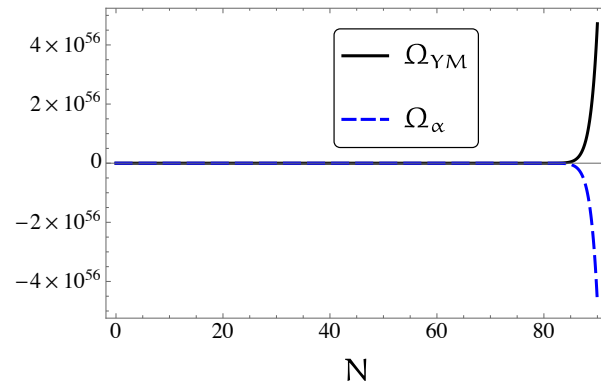
(a)



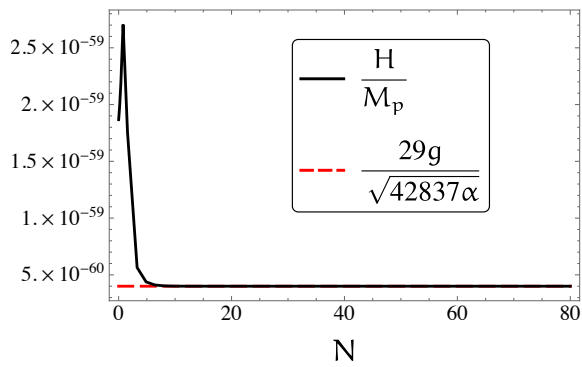
(b)



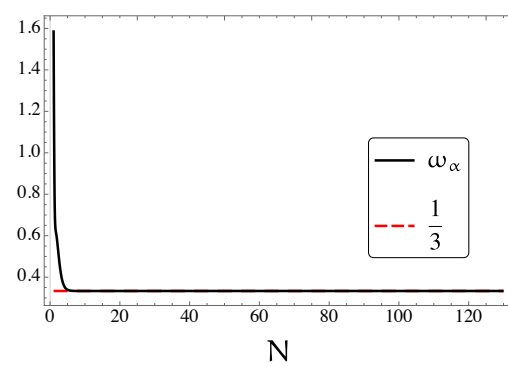
(c)



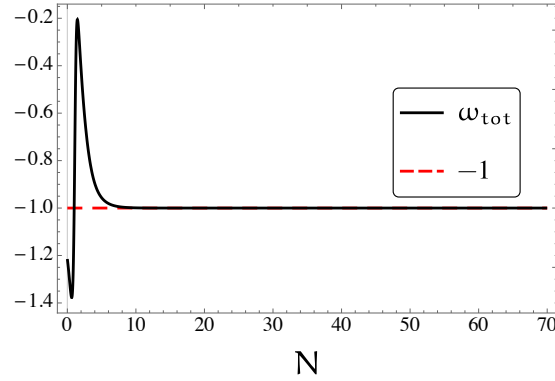
(d)



(e)



(f)



(g)

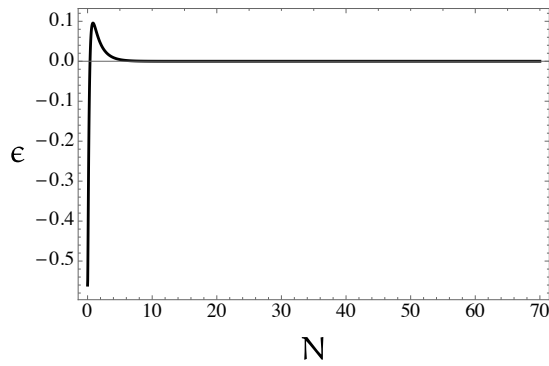
Figura 13. Energía oscura - Solución numérica y asíntota para $\alpha = 0.0075$ y condiciones iniciales $x_0 = 0.05$ y $y_0 = 1.18$. (a) Esta figura muestra la solución numérica del parámetro de rodadura lenta (b) Esta figura muestra la solución numérica para x/y vs. N (curva continua-negra) así como el comportamiento asíntótico $x/y = \beta$ (curva discontinua-roja) con β como en la ecuación (260); el par de curvas se superponen desde $N \approx 5$. (c) Esta figura confirma que $\rho_\alpha \rightarrow -\rho_{YM}$ en el límite asíntótico. (d) Esta figura presenta Ω_{YM} vs. N (curva continua-negra) y Ω_α vs. N (curva discontinua-azul); se puede ver que los valores absolutos de los dos parámetros de densidad crecen exponencialmente con N . (e) Esta figura representa H/M_p ; a pesar de que ρ_{YM} y $|\rho_\alpha|$ crecen exponencialmente, $\rho_{tot} \propto H^2$ se acerca asíntoticamente a un valor constante finito. (f) Esta figura muestra ω_α vs. N ; en el límite asíntótico, el fluido negativo se comporta como radiación. (g) Esta figura muestra ω_{tot} vs. N ; en el límite asíntótico, el fluido total se comporta como una constante cosmológica. El código para las soluciones numéricas se encuentran en el apéndice 5

A partir de la deficiencia de la ecuación (247) y el comportamiento asíntótico descrito en las ecuaciones (259) y (260), se obtiene

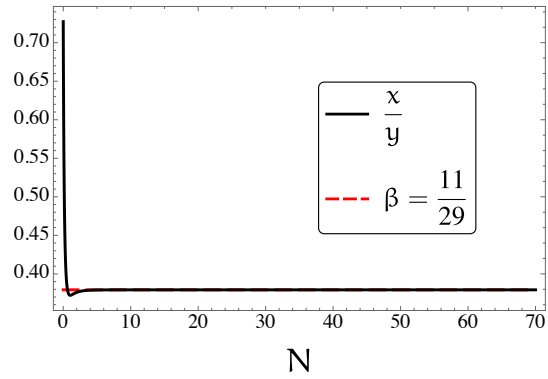
$$\frac{H}{M_p} \rightarrow \frac{29|g|}{\sqrt{42837\alpha}} \quad (265)$$

que es consistente con la solución numérica para H en la figura 13e. Esto revela que H puede

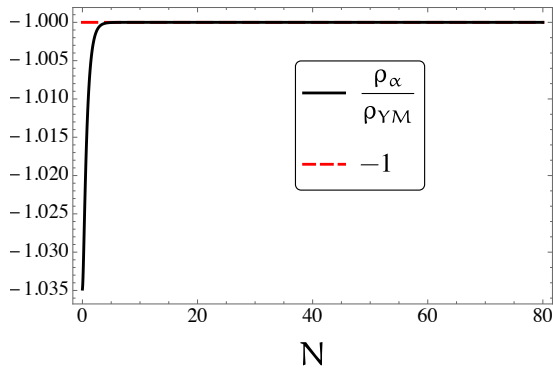
reproducir su valor actualmente observado, para un valor suficientemente pequeño de $|g|$: $|g| \lesssim 7H_0/m_P \approx 4 \times 10^{-60}$, independientemente de las condiciones iniciales (para $\alpha > 0$, ver pie de pagina 15). La insensibilidad a las condiciones iniciales se puede observar comparando las figuras 13 y 14.



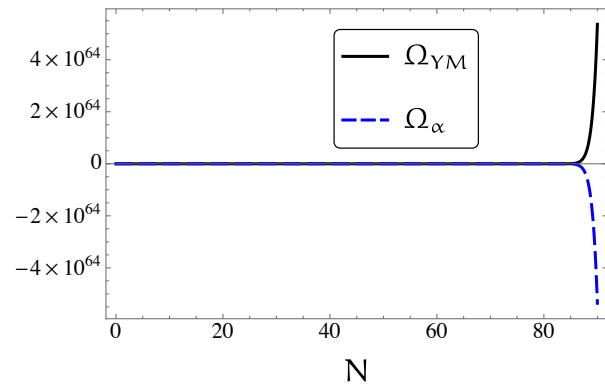
(a)



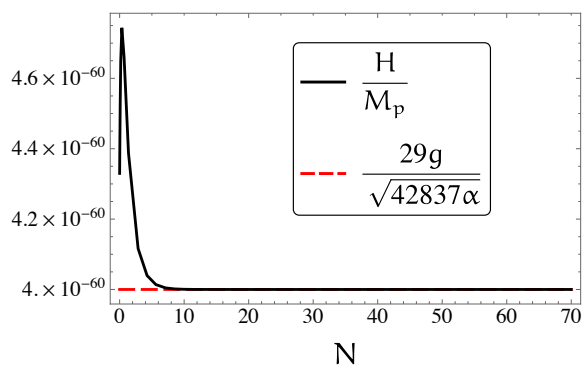
(b)



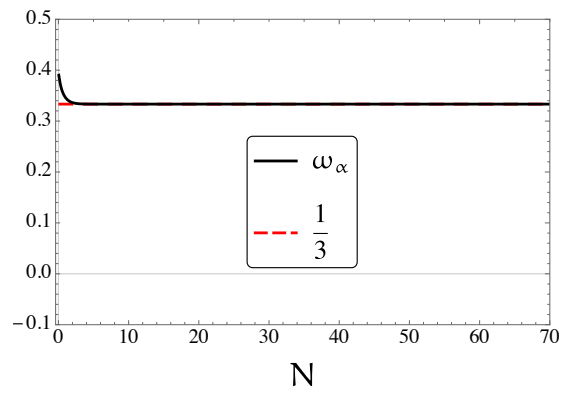
(c)



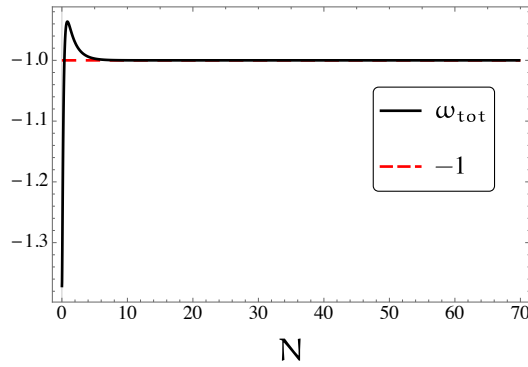
(d)



(e)



(f)



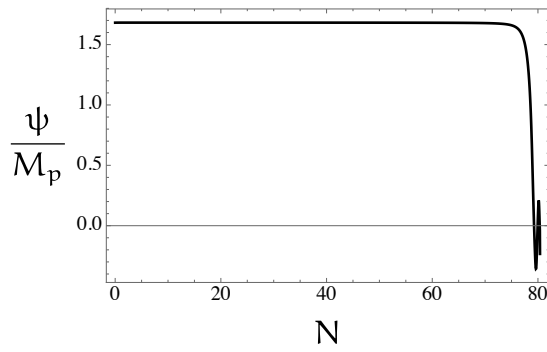
(g)

Figura 14. Energía oscura - Igual que en la figura 13 pero con diferentes condiciones iniciales: $x_0 = 1.6$ y $y_0 = 2.2$. El código para las soluciones numéricas se encuentran en el apéndice 5

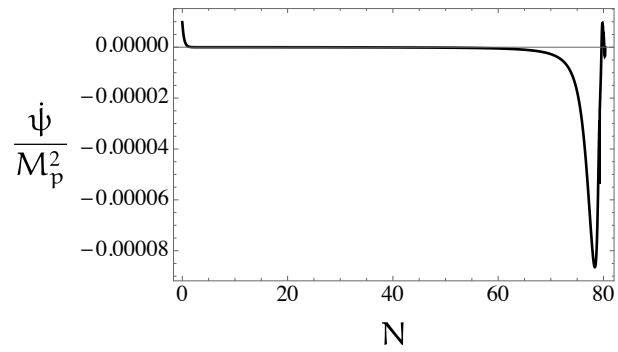
7.5. Inflación primordial

Aparte del comportamiento asintótico, los puntos críticos del sistema dinámico en las ecuaciones (253) y (254) también fueron estudiadas. Como es posible apreciar en la sección 7.3, el punto crítico \mathcal{Q}_2 presenta un estado interesante, ya que $\varepsilon = 0$ en éste punto crítico, además la condición que $z^2 > 0$ (lo que garantiza que el parámetro de Hubble sea: $H > 0$) brinda un rango de valores permitidos para α : $\alpha > 77/11881 \simeq 0.00648094$.

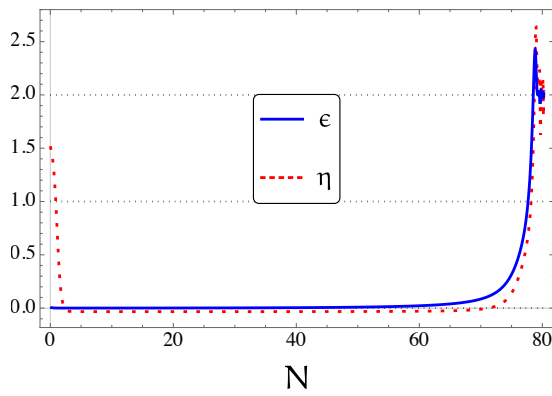
Así que sólo queda 1 punto crítico, un punto de silla, que satisface todas las propiedades que identifican a un período inflacionario primordial como se describe en la figura 3. Desafortunadamente, y en contraste con el escenario de energía oscura, la inflación primordial en este el modelo es muy sensible a las condiciones iniciales y a la constante de acoplamiento α .



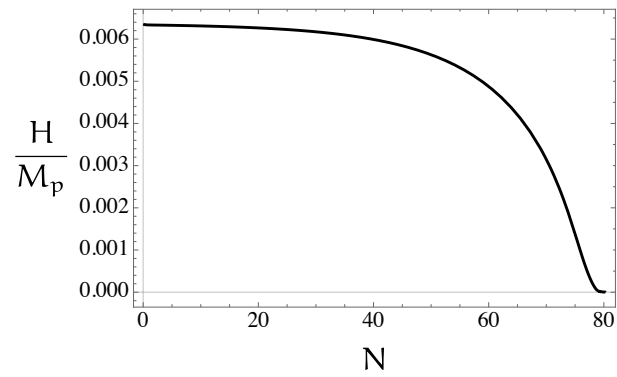
(a)



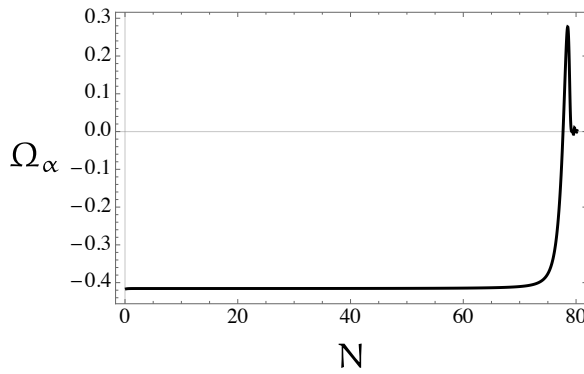
(b)



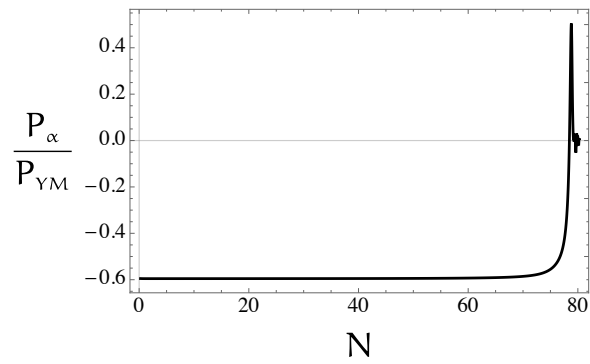
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 15. Inflación primordial - Solución numérica para $\alpha = 0.00649$, $g = 0.0001$, y condiciones iniciales $x_0 = 0.001095$ y $y_0 = 1.189$. (a) Esta figura exhibe un comportamiento de rodadura lenta de ψ/M_p durante unos 70 *e-folds* y una etapa final de oscilaciones amortiguadas que señalan la época dominada por la radiación. (b) Comportamiento similar al de la figura anterior pero para $\dot{\psi}/M_p^2$. (c) Esta figura presenta los parámetros de rodadura lenta ε (curva continua-azul) y η (curva discontinua-roja) vs. N ; se puede observar que tanto η como $|\eta|$ están muy por debajo de 1 durante unos 70 *e-folds*, lo que implica un período de inflación lento durante el tiempo suficiente para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar; al final de esta etapa, ε y η van a 2, señalando la época dominada por la radiación. (d) Esta figura presenta H/M_p vs. N ; la escala de energía de inflación no está en conflicto con el tratamiento clásico para valores suficientemente bajos de $|g|$. (e) Esta figura muestra Ω_α vs. N ; el término S durante la inflación contribuye con una densidad de energía negativa que no es dominante ni despreciable; sin embargo, se vuelve insignificante al final de este período. (f) Esta figura muestra P_α/P_{YM} vs. N ; el término S durante inflación contribuye con una presión negativa dominante que se vuelve insignificante al final de este período, permitiendo que el término de Yang-Mills domine y produzca la época dominada por la radiación. El código para las soluciones numéricas se encuentran en el apéndice 5

7.6. \mathcal{L}_4^1 + materia + radiación

En esta sección lo que se pretende es analizar el comportamiento asintótico que posee el término \mathcal{L}_4^1 y analizar la posibilidad que tendría en describir la historia térmica del universo, cuando se introducen los componente de materia y radiación. La acción que se analizará es:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \alpha \mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r], \quad (266)$$

donde \mathcal{L}_m y \mathcal{L}_r son los Lagrangianos de materia y radiación; los Lagrangianos \mathcal{L}_{EH} y \mathcal{L}_4^1 son los definidos en sección 7.1. Se procede bajo la misma idea que en la sección 7.2 con el propósito de determinar el análisis de estabilidad vía la teoría de los sistemas dinámicos. Las variables adimensionales para el campos ψ , son las mismas definidas en la ecuación (247); se adicionan las variables adimensionales relacionadas con los parámetros de densidad de energía de materia y

radiación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\rho_m}{3M_p^2 H^2}, \\ r &= \frac{\rho_r}{3M_p^2 H^2}. \end{aligned} \quad (267)$$

De esta manera, las ecuaciones de campos de Einstein y la ecuación de evolución del campo vectorial, en término de las variables adimensionales x , y y z , son:

$$z^2 y^4 + x^2 + 2xy + y^2 + \alpha (10x^2 y^2 - 188xy^3 - 32y^4) + r + m = 1, \quad (268)$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^4 + \alpha (104\sqrt{2}py^3 + 614x^2 y^2 + 316xy^3 + 124y^4 \varepsilon - 340y^4) \\ + r = -3 + 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (269)$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} + 3x + 2y^3 z^2 - y\varepsilon + 2y + \alpha (5\sqrt{2}py^2 + 10x^2 y + 30xy^2 + 94y^3 \varepsilon - 218y^3) = 0, \quad (270)$$

donde p y ε son los definidos en las ecuaciones (251) y (252) respectivamente. Al igual que en el la sección (7.2), la ecuación (270) es redundante, al ya estar incluida en las ecuaciones de campo de Einstein (268) y (269), de esta manera la ecuación (268) actúa como una restricción para los

parámetros adimensionales x y y . De esta manera el sistema autónomo se puede escribir como

$$x' = \frac{p}{\sqrt{2}} + \varepsilon x, \quad (271)$$

$$y' = x, \quad (272)$$

$$r' = 2r(\varepsilon - 2), \quad (273)$$

$$m' = m(2\varepsilon - 3). \quad (274)$$

Las ecuaciones (269) y (270) sirven para resolver tanto p como ε en términos de x , y , r y m , los cuales toman la siguiente forma:

$$\varepsilon = -\frac{1}{6(9156\alpha^2 y^6 - 166\alpha y^4 + 10\alpha y^2 + 1)} \times$$

$$\left[-1218\alpha m y^2 + 3m - 1228\alpha r y^2 + 2r - 3060\alpha x^2 y^2 + 1128\alpha y^2 - 12 \right.$$

$$\left. - 24360\alpha^2 x^2 y^4 + 238224\alpha^2 x y^5 - 2136\alpha x y^3 - 86856\alpha^2 y^6 + 924\alpha y^4 \right] \quad (275)$$

y

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{1}{6y(9156\alpha^2y^6 - 166\alpha y^4 + 10\alpha y^2 + 1)} \times \\
 & \left[-12\sqrt{2}m - 12\sqrt{2}r - 12\sqrt{2}x^2 - 6\sqrt{2}xy - 12\sqrt{2}y^2 + 12\sqrt{2} \right. \\
 & + 3\sqrt{2}my^2 + 2\sqrt{2}ry^2 - 60\sqrt{2}\alpha x^2y^2 + 2436\sqrt{2}\alpha xy^3 - 540\sqrt{2}\alpha y^4 + \\
 & 462\sqrt{2}\alpha my^4 + 556\sqrt{2}\alpha ry^4 - 1068\sqrt{2}\alpha x^2y^4 - 1140\sqrt{2}\alpha xy^5 + \\
 & \left. 174048\sqrt{2}\alpha^2x^2y^6 - 8904\sqrt{2}\alpha^2xy^7 - 29568\sqrt{2}\alpha^2y^8 + 924\sqrt{2}\alpha y^6 \right] \quad (276)
 \end{aligned}$$

7.7. Puntos críticos

Los puntos críticos son determinados siguiendo la misma idea mostrada en la sección 6.1.2, esto es que $x' = 0$, $y' = 0$, $r' = 0$ y $m' = 0$. Siguiendo este procedimiento, se encuentran los siguientes puntos críticos:

- $\mathcal{D}_1 : \alpha = 0, x = 0, y = \pm 1, r = 0, m = 0$. En este punto crítico $z^2 = 0$, lo que ocasiona, a partir de la ecuación (247), que $H \rightarrow \infty$, adicionalmente el parámetro de rodadura lenta es: $\varepsilon = 2$, lo cual es característico de un fluido de radiación. Los valores propios de la matriz Jacobiana en éste punto crítico son:

$$\lambda_1^\mu = (4, -1, 1, 0), \quad (277)$$

con $\mu = 1, 2, 3, 4$. Lo anterior muestra la presencia de un valor propio igual a cero, por lo que el análisis de estabilidad lineal no es concluyente.

- $\mathcal{D}_2 : \alpha = 0, x = 0, r = 1 - y^2, r = 0, m = 0$. ESe encuentra que $z^2 = 0$, por lo que $H \rightarrow \infty$, además que $\varepsilon = 2$, lo cual es característico de un fluido de radiación. Los valores propios asociados a la matriz Jacobiana en éste punto crítico son:

$$\lambda_2^\mu = (0, -1, 1, 4) \quad (278)$$

- $\mathcal{D}_{\pm 3} : \alpha \neq 0, x = 0, y = \pm \frac{1}{\sqrt{154\alpha}}, r = 0, m = \frac{1}{77} \left(77 - \frac{61}{154\alpha} \right)$. El parámetro de densidad de materia es definido positivo, $m > 0$, por lo que $\alpha > 61/11858 \simeq 0.00514421$; se descarta la posibilidad que $\alpha < 0$, con el propósito de preservar el comportamiento asintótico de \mathcal{L}_4^1 discutido en la sección 7.4. Nuevamente $z^2 = 0$, por lo que $H \rightarrow \infty$. En éste punto crítico el parámetro de rodadura lenta es: $\varepsilon = 3/2$, lo cual es característico de un fluido de materia (presión nula). Los valores propios asociados a la matriz Jacobiana son:

$$\lambda_3^\mu = \left(-1, 3, \frac{-3\sqrt{\alpha}(293 - 69454\alpha)^2 - \sqrt{5}\sqrt{\alpha}(69454\alpha - 293)^3(333718\alpha - 1601)}{4(293 - 69454\alpha)^2\sqrt{\alpha}}, \frac{\sqrt{5}\sqrt{\alpha}(69454\alpha - 293)^3(333718\alpha - 1601) - 3(293 - 69454\alpha)^2\sqrt{\alpha}}{4(293 - 69454\alpha)^2\sqrt{\alpha}} \right). \quad (279)$$

A partir de lo anterior, el análisis de estabilidad de los valores propios λ_3^3 y λ_3^4 muestran que:

(a) Los valores propios existen si $\alpha \neq \frac{293}{69454} \simeq 0.00421862$.

(b) Los valores propios son reales:

si $0 \leq \alpha < \frac{293}{69454}$ y $\alpha \geq \frac{1601}{333718} \simeq 0.00479746$ y los valores propios cumplen que $\lambda_3^3 < 0 < \lambda_3^4$,

sin embargo este rango de valores para α no es permitido, ya que $m < 0$, en consecuencia,

para $\alpha > 0.00514421$ los valores continúan cumpliendo que $\lambda_3^3 < 0 < \lambda_3^4$, por lo que el punto crítico será de silla.

(c) Los valores propios son complejos:

si $\frac{293}{69454} < \alpha < \frac{1601}{333718}$, en donde la parte real de los valores propios λ_2^3 y λ_2^4 son negativos, por lo que el punto crítico será estable; sin embargo, este rango de valores de α conlleva a que $m < 0$.

- $\mathcal{D}_{\pm 4} : \alpha \neq 0, x = 0, y = \pm \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 128\alpha}}{\alpha}}, r = 0, m = 0$. La primera restricción sobre el punto crítico es que $0 < \alpha \leq \frac{1}{128} \simeq 0.0078125$, ya que se garantiza que y sea real. Nuevamente $z^2 = 0$, por lo que $H \rightarrow \infty$ en éste punto crítico. El parámetro de rodadura lenta en éste punto crítico toma la forma $\varepsilon = \frac{20492\alpha + 15\sqrt{1 - 128\alpha} - 139}{8836\alpha - 62}$, por lo que $\alpha \leq 1/128$ para que éste sea real; adicionalmente, si $\alpha \geq 0$ se encuentra que $0 \leq \varepsilon \leq 2$, por lo que es posible encontrar un rango de valores para α donde la expansión sea acelerada. Respecto a los valores propios de la matriz Jacobiana, dos de éstos presentan una forma analítica extensa, por lo que se presenta a continuación en forma gráfica:

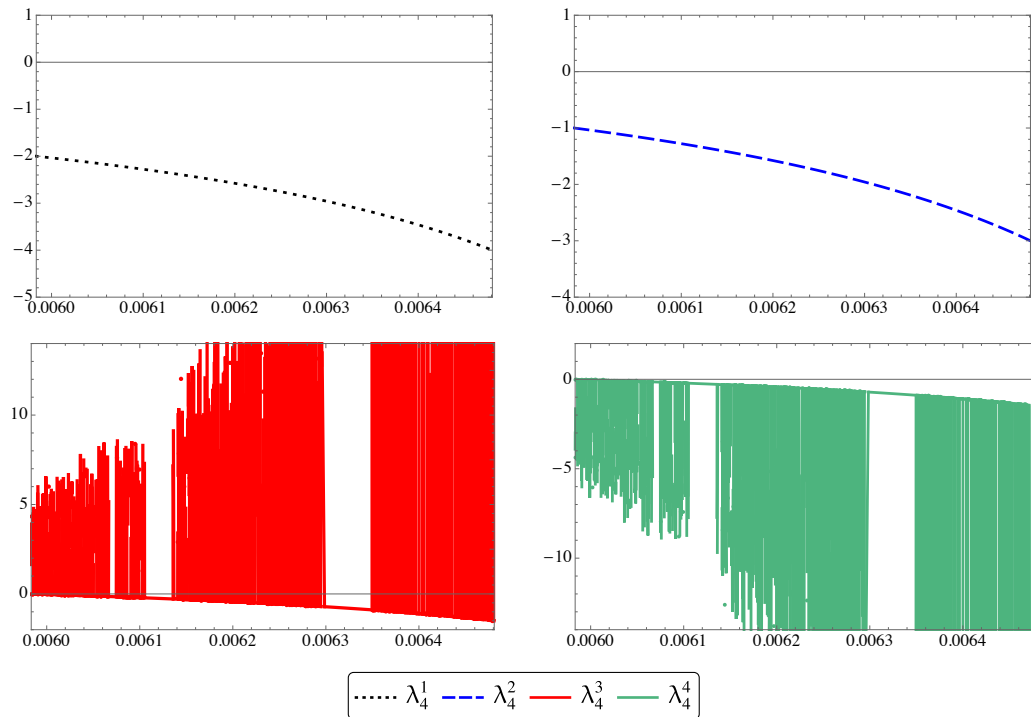


Figura 16. Valores propios asociados a $\mathcal{D}_{\pm 4}$. El eje vertical corresponde al valor propio λ_4^μ y el eje horizontal el valor del parámetro libre α . Los valores propios λ_4^3 y λ_4^4 presenta un comportamiento tal que, en un pequeño cambio en el parámetro α su estabilidad es completamente distinta.

Como es posible apreciar en la figura 16, los valores propios λ_4^3 y λ_4^4 ante un pequeño cambio en el parámetro α , la estabilidad del punto crítico cambia completamente, por ejemplo si se evalúa el valor propio en: $\lambda_4^3(0.00630963373345644) = 21.0911$ y si después solo se cambia una pequeña cifra significativa: $\lambda_4^3(0.00630963373345643) = -0.75 + 11.4062i$, la estabilidad de éste valor es completamente distinta; situación similar sucede con el valor propio λ_4^4 . Sin embargo, dado que dos valores propios son negativos, λ_4^1 y λ_4^2 , la estabilidad del punto crítico estará entre uno de silla o inestable, dado por el signo de la parte real de los valores propios λ_4^3 y λ_4^4 .

- $\mathcal{D}_{\pm 5} : \alpha \neq 0, x = 0, y = \pm \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 128\alpha}}{\alpha}}, r = 0, m = 0$. Una primera condición sobre el parámetro libre α , es que éste se encuentre en el siguiente rango: $0 < \alpha \leq \frac{1}{128} \simeq 0.0078125$, con lo que se garantiza que y sea real. Por otro lado, $z^2 = 0$ por lo que $H \rightarrow \infty$. El parámetro de rodadura lenta toma la forma en éste punto crítico como: $\varepsilon = \frac{-20492\alpha + 15\sqrt{1 - 128\alpha} + 139}{62 - 8836\alpha}$; adicionalmente, si $\alpha \geq 0$ se encuentra que $\varepsilon \geq 2$, por lo que la expansión será desacelerada. Respecto a los valores propios asociados a la matriz Jacobiana, éstos presentan una forma analítica extensa, por lo que se representarán a continuación gráficamente como una función del parámetro libre α :

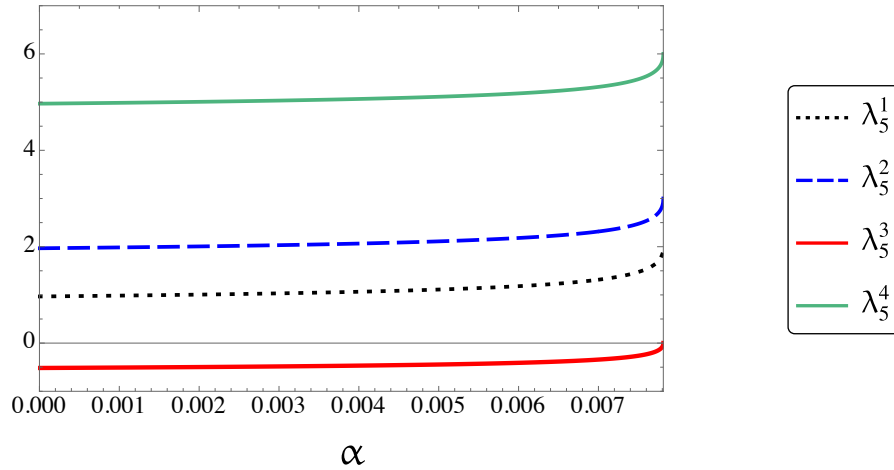


Figura 17. Valores propios asociados a $\mathcal{D}_{\pm 5}$. El eje vertical corresponde al valor propio λ_5^μ y el eje horizontal el valor del parámetro libre α . Los valores propios λ_5^μ fueron representados para $0 < \alpha \leq \frac{1}{128} \simeq 0.0078125$.

Como se aprecia en la figura 17 el valor propio λ_5^3 es negativo, por lo que el punto crítico es de silla. De esta manera el estado de expansión desacelerada del punto crítico será transitorio.

- $\mathcal{D}_{\pm 6} : \alpha \neq 0, x = 0, y = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{77\alpha}}, r = 0, m = 0$. El valor de y del punto crítico será real si $\alpha > 0$.

Por otro lado, $z^2 = 109\alpha - \sqrt{77\alpha}$, en donde $z^2 > 0$ si $\alpha > \frac{77}{11881} \simeq 0.00648094$. El parámetro de rodadura lenta asociado a éste punto crítico es $\varepsilon = 0$, por lo que la expansión será acelerada.

Los valores propios de la matriz Jacobiana asociados a éste punto crítico son:

$$\begin{aligned} \lambda_6^1 &= -4, \lambda_6^2 = -3, \\ \lambda_6^{3,4} &= \frac{7\sqrt[4]{\alpha}}{2(89\sqrt{77} - 9926\sqrt{\alpha})^2\sqrt[4]{\alpha}} \times \left(-3 \left(87131 - 2836 \left(89\sqrt{77}\sqrt{\alpha} - 4963\alpha \right) \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \sqrt{5(55701715597 - 321337036856\sqrt{77}\sqrt{\alpha} + 53526269813016\alpha \right. \\ &\quad \left. 1428665511922768\alpha^2 - 51462614828128\sqrt{77}\alpha^{3/2})^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (280)$$

Con todo lo anterior, se procede a ver el comportamiento de los valores propios para $\alpha > 77/11881$ como se muestra a continuación:

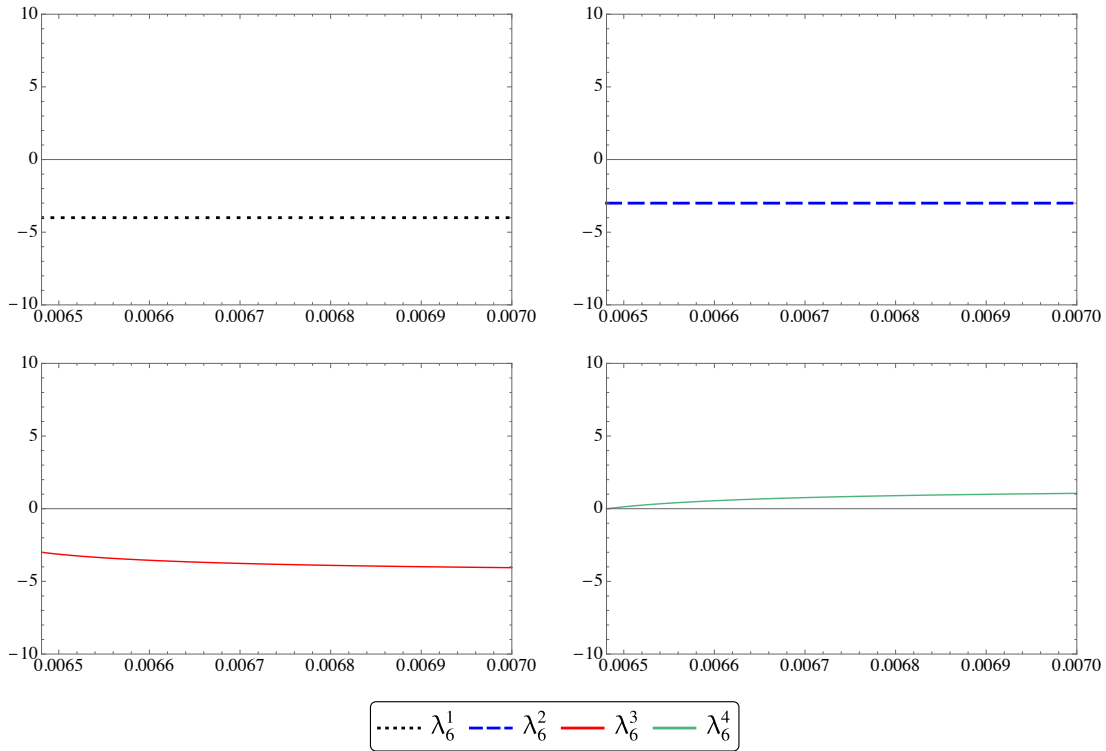
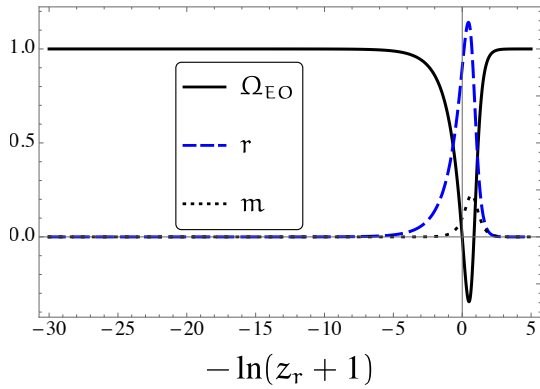


Figura 18. Valores propios asociados a $\mathcal{D}_{\pm 6}$. El eje vertical corresponde al valor propio λ_6^μ y el eje horizontal el valor del parámetro libre α .

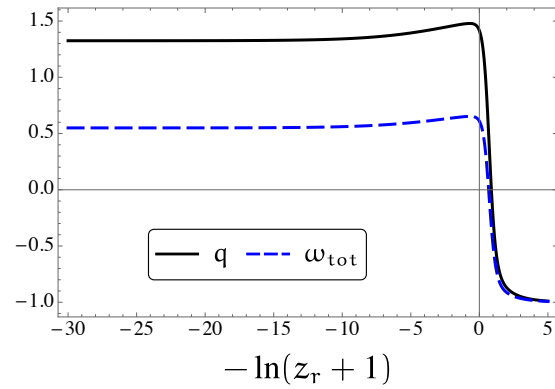
Se encuentra que el punto crítico es de silla, ya que el valor propio λ_6^4 es positivo, por lo que el estado de expansión acelerada es transitorio.

La figura 19 muestra la evolución de los parámetros de densidad de energía oscura, $\Omega_{EO} = \Omega_{YM} + \Omega_\alpha$ (Yang-Mil + \mathcal{L}_4^1), radiación, r , y materia, m , así como los parámetros de ecuación de estado del fluido, ω_{tot} , y de desaceleración, q , como una función del número de *e-folds*, N , que es igual a $-\ln(z_r + 1)$, donde z_r es el corrimiento al rojo y con $z_r = 0$ hoy en día. La figura 19a muestra que para un $\Delta N \simeq 25$ el término de densidad de energía oscura domina el universo, en cambio para valores alrededor de $N \simeq \pm 2$ se encuentra un dominio de la radiación, además no es posible

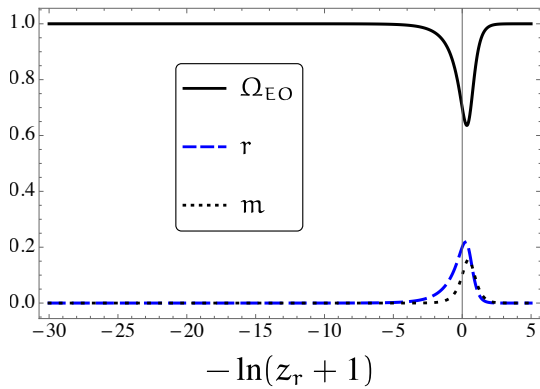
encontrar un período donde exista un dominio de la densidad de energía asociado a la materia; adicionalmente la figura 19b corrobora lo mencionado anteriormente, el dominio del término Ω_{EO} es notorio es toda la historia térmica de éste universo y evolucionará a un período donde $\omega_{tot} = -1$; situación similar ocurre con las figuras 19c y 19d, sin embargo para un conjunto de condiciones diferentes, en donde el dominio de Ω_{EO} es en toda la historia térmica de éste universo. Finalmente, en la figura 19e puede existir un período corto, alrededor de $N \simeq \pm 2$, en donde la densidad de energía de la materia podría dominar, pero lamentablemente eso no ocurre en la actualidad con nuestro universo observable; la figura 19f muestra nuevamente que el sistema tiende a hacer dominado por el término asociado a Ω_{EO} ya que $\omega_{tot} \rightarrow -1$.



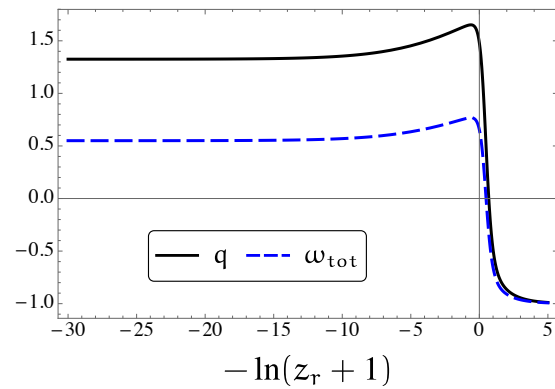
(a)



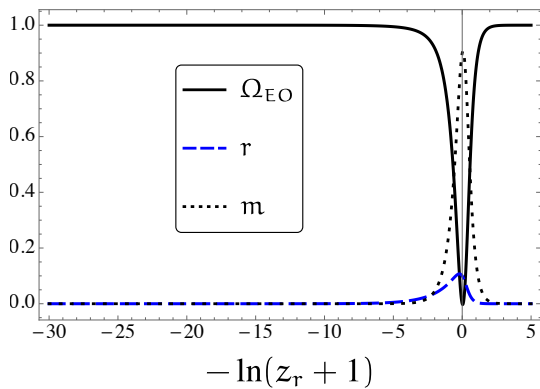
(b)



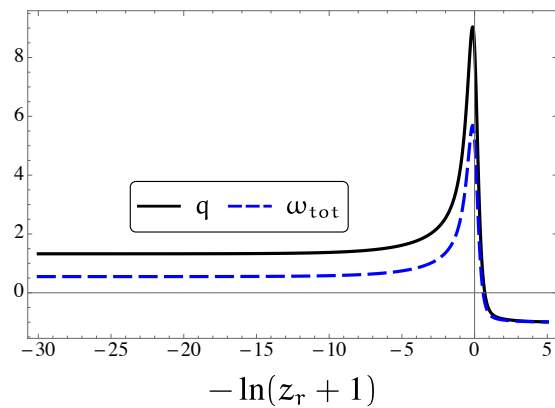
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 19. Evolución de los parámetros de densidad de energía para energía oscura Ω_{EO} , radiación r y materia m . La figura 19a posee condiciones iniciales $x = 10^{-20}$, $y = 2.2$, $r = 0.9$, $m = 0.1$ y $\alpha = 0.0065$ se encuentra un dominio del término de densidad de energía oscura Ω_{EO} el la mayoría de la historia térmica del éste universo, $\Delta N \simeq 25$, únicamente en el intervalo de $N \pm 2$ alrededor de $N = 0$, se encuentra un dominio de la radiación sobre el universo, lo cual es incompatible con nuestro universo actual; la figura 19b muestra un parámetro de desaceleración positivo hasta $N \simeq 1$ (expansión desacelerada) y luego tiende a $q \simeq -1$, que es cuando domina la el término Ω_{EO} . La figura 19c y 19d con condiciones iniciales $x = 10^{-20}$, $y = 2$, $r = 0.2$, $m = 0.1$ y $\alpha = 0.007$ posee un comportamiento similar en las figuras anteriores, con la diferencia que el dominio del termino Ω_{EO} es en todo el tiempo. La figura 19e y 19f con condiciones iniciales $x = 0.001$, $y = 1.6$, $r = 0.1$, $m = 0.9$ y $\alpha = 0.1$, nuevamente muestra las mismas características anteriores, con la salvedad que existe un período de dominio de la materia. El código para las soluciones numéricas se encuentran en el apéndice 5

7.8. $\mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_4^2 + \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$

Finalmente en esta sección se pretende explorar las consecuencias cosmológicas a partir de una combinación de piezas de Lagrangianos mostrados en las ecuaciones 193, 240 y 241; la acción a estudiar es la siguiente:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \alpha \mathcal{L}_4^1 + \kappa \mathcal{L}_4^2 + \Theta \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}} \right], \quad (281)$$

donde \mathcal{L}_{EH} es el Lagrangiano de Einstein-Hilbert, \mathcal{L}_{YM} el Lagrangiano de Yang-Mill definido en la ecuación (244), $\mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$ es el Lagrangiano estudiado en la sección 6.2 y \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^2 son los Lagrangianos descritos en las ecuaciones (240) y (241) respectivamente. Se procede bajo la misma idea que en la sección 7.2 con el propósito de determinar el análisis de estabilidad vía la teoría de los sistemas dinámicos. Las variables adimensionales para el campos ψ son las siguientes:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}M_p H} \\ y &\equiv \frac{\psi}{\sqrt{2}M_p}, \\ z &\equiv \frac{\sqrt{2}M_p g}{H}, \end{aligned} \quad (282)$$

por ende, las ecuaciones de campos de Einstein y la ecuación de evolución de los campos vectoriales pueden ser escritas en término de las variables adimensionales como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & \alpha (10x^2y^2 - 188xy^3 - 32y^4) + \kappa (2x^2y^2 - 20xy^3 - 12y^4) \\ & + \Theta (-64xy^3 - 32y^4) + 2xy + y^2 + x^2 + 2z^4 = 1 \end{aligned} \quad (283)$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 + 2z^4 + \alpha (104\sqrt{2}py^3 + 614x^2y^2 + 316xy^3 + 124y^4\varepsilon - 340y^4) \\ & + \kappa (12\sqrt{2}py^3 + 70x^2y^2 + 108xy^3 - 4y^4\varepsilon + 24y^4) \\ & + \Theta (32\sqrt{2}py^3 + 192x^2y^2 + 256xy^3 + 32y^4) = -3 + 2\varepsilon \end{aligned} \quad (284)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{\sqrt{2}} + 3x - y\varepsilon + 2y + \frac{4z^4}{y} + \alpha (5\sqrt{2}py^2 + 10x^2y + 30xy^2 + 94y^3\varepsilon - 218y^3) \\ & + \kappa (\sqrt{2}py^2 + 2x^2y + 6xy^2 + 10y^3\varepsilon - 6y^3) + \Theta (32y^3\varepsilon - 32y^3) = 0, \end{aligned} \quad (285)$$

donde p y ε son los definidos en las ecuaciones (251) y (252) respectivamente. Al igual que en el la sección (7.2), la ecuación (270) es redundante, al ya estar incluida en las ecuaciones de campo de Einstein (268) y (269), de esta manera la ecuación (268) actúa como una restricción para los parámetros adimensionales x y y . De esta manera el sistema autónomo se puede escribir como

$$x' = \frac{\sqrt{2}p}{2} + x\varepsilon \quad (286)$$

$$y' = x, \quad (287)$$

donde

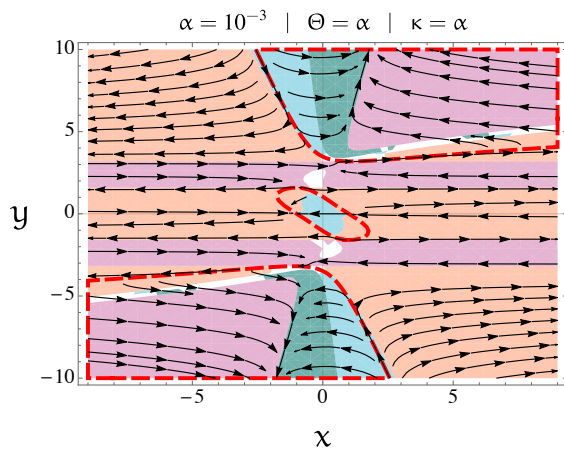
$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \frac{1}{9156\alpha^2y^6 + 6336\alpha\Theta y^6 + 2064\alpha\kappa y^6 + 1024\Theta^2y^6 + 704\Theta\kappa y^6 + 124\kappa^2y^6 - 166\alpha y^4} \times \\
 & \frac{1}{-32\Theta y^4 - 10\kappa y^4 + 10\alpha y^2 + 2\kappa y^2 + 1} \times \\
 & \left[2 \left(2030\alpha^2x^2y^4 + 255\alpha x^2y^2 - 19852\alpha^2xy^5 + 178\alpha xy^3 - 77\alpha y^4 - 94\alpha y^2 + 1 \right. \right. \\
 & + 640\alpha\Theta x^2y^4 + 80\Theta x^2y^2 + 96\Theta xy^3 + 7238\alpha^2y^6 + 16\Theta y^4 - 32\Theta y^2 - 12352\alpha\Theta xy^5 \\
 & - 2048\Theta^2xy^5 + 960\alpha\Theta y^6 - 512\Theta^2y^6 + 636\alpha\kappa x^2y^4 + 29\kappa x^2y^2 + 38\kappa xy^3 + 9\kappa y^4 \\
 & - 10\kappa y^2 + 128\Theta\kappa x^2y^4 - 4256\alpha\kappa xy^5 - 1344\Theta\kappa xy^5 - 76\alpha\kappa y^6 - 448\Theta\kappa y^6 \\
 & \left. \left. + 46\kappa^2x^2y^4 - 212\kappa^2xy^5 - 90\kappa^2y^6 \right) \right], \tag{288}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p = & \left[\frac{1}{(-94\alpha y^3 - 32\Theta y^3 - 10\kappa y^3 + y) (104\sqrt{2}\alpha y^3 + 32\sqrt{2}\Theta y^3 + 12\sqrt{2}\kappa y^3)} \times \right. \\
& \left. \frac{1}{\left(5\sqrt{2}\alpha y^2 + \sqrt{2}\kappa y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (124\alpha y^4 - 4\kappa y^4 - 2)} \right] \times \\
& - \left((-94\alpha y^3 - 32\Theta y^3 - 10\kappa y^3 + y) (604\alpha x^2 y^2 + 504\alpha x y^3 - 308\alpha y^4 + 4 \right. \\
& 192\Theta x^2 y^2 + 68\kappa x^2 y^2 + 320\Theta x y^3 + 128\kappa x y^3 + 64\Theta y^4 + 36\kappa y^4) \\
& + (124\alpha y^4 - 4\kappa y^4 - 2) (10\alpha x^2 y + 30\alpha x y^2 + 3x + 2y - 218\alpha y^3 - 32\Theta y^3 \\
& + 2\kappa x^2 y + 6\kappa x y^2 - 6\kappa y^3 + \frac{1}{y} 2 (-10\alpha x^2 y^2 - x^2 - 2xy - y^2 + 1 \\
& \left. - 2\kappa x^2 y^2 + 188\alpha x y^3 + 64\Theta x y^3 + 20\kappa x y^3 + 32\alpha y^4 + 32\Theta y^4 + 12\kappa y^4) \right). \quad (289)
\end{aligned}$$

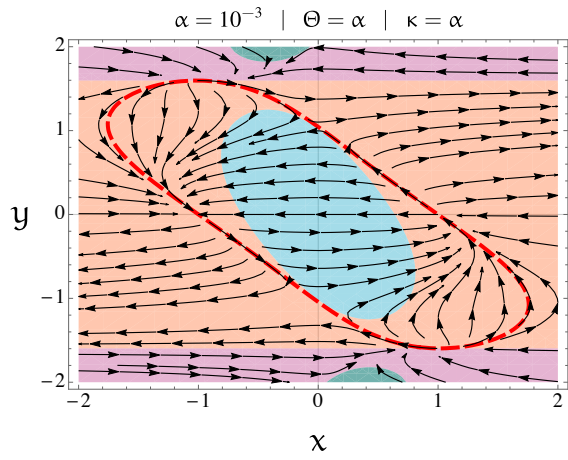
El estudio de la dinámica del sistema autónomo mostrado en las ecuaciones (286) y (288) será enfocado en encontrar un comportamiento asintótico en el espacio de fase similar a los estudiados en las secciones 6.2 y 7.3; el propósito es determinar el rango de valores de los parámetros libres del modelo, α , Θ y κ , es posible determinar período de expansión acelerada, es decir $\varepsilon = 0$. En la figura 20 se representa el espacio de fase del sistema autónomo de las ecuaciones (286) y (288), en donde el violeta corresponde a $\varepsilon < 0$, el verde a $0 \leq \varepsilon < 1$, el azul a $1 \leq \varepsilon \leq 2$, el naranja a $\varepsilon > 2$ y la región limitada por la línea a trazos en rojo corresponde a $z^2 > 0$; esta última región garantiza que el parámetro de Hubble sea: $H > 0$.

En la figura 20a se muestra el espacio de fase del sistema autónomo (286) y (288), en donde

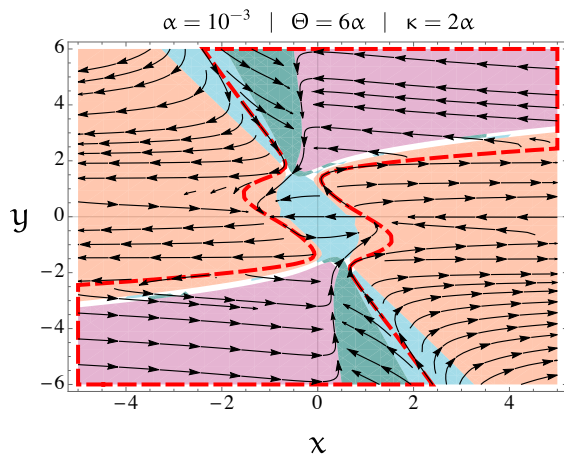
se encuentra un comportamiento similar al mostrado en la figura 11a, el cual se estudió en la sección 7.3. Se encuentran tres regiones separadas, en donde dos de ellas presentan un comportamiento asintótico y muestra que $\varepsilon = 0$, por lo que para un amplio rango de condiciones iniciales el sistema tiende a un período de expansión acelerada y en donde las variables x y y crezcan de manera similar como se analizó en la sección 7.3; por otro lado, la región central, mostrado en la figura 20b, es posible que el sistema muestra un estado oscilatorio, pero inestable, ya que muchas de las soluciones sales de la región en donde $z^2 > 0$. La figura 20c muestra que para un conjunto de valores de los parámetros libres en donde las regiones en $z^2 > 0$ se encontraban separadas, ahora se encuentra unidas, con la salvedad que el comportamiento asintótico (el cual continua mostrando que $\varepsilon = 0$) las variables x y y están decreciendo cuando el sistema evoluciona por la asíntota, similar a lo que se encontró en la sección 6.2.2, lo cual puede representar un período de expansión acelerada que tiene un fin y esto podría representar un período de expansión primordial. La figura 20d se resalta la región central del espacio de fase donde se percibe que el sistema evoluciona (dentro de la región de interés en donde $z^2 > 0$) a un estado donde $\varepsilon > 1$, lo que daría al período de expansión acelerada. En las figuras 20e y 20f se representó el efecto del signo en los parámetros libres Θ y κ . Cabe recordar, por lo analizado en la sección 7.4, que $\alpha > 0$ garantiza la existencia del comportamiento asintótico del sistema, lo cual es deseable ya que este presenta un período de expansión acelerada con lo que es posible describir un periodo inflacionario temprano (inflación primordial) o tardío (expansión actual del universo).



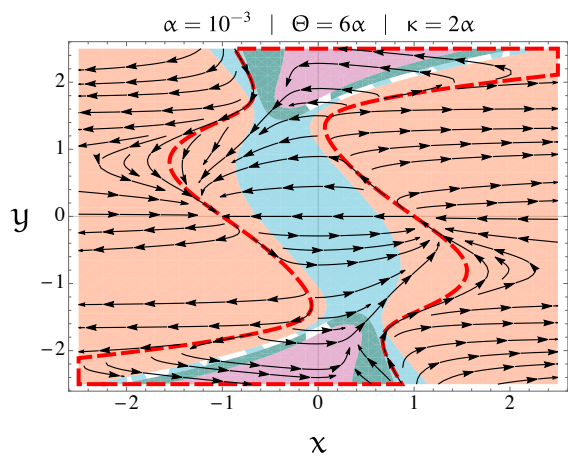
(a)



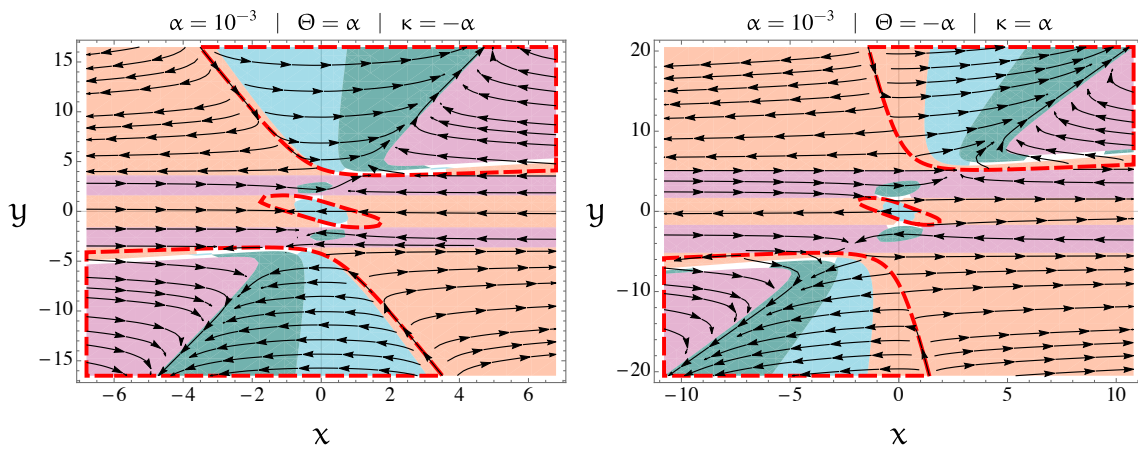
(b)



(c)



(d)



(e)

(f)



(g)

Figura 20. Espacio de fase del sistema autónomo mostrado en las ecuaciones (286) y (288), en donde se resalta la región en violeta para $\epsilon < 0$, el verde para $0 \leq \epsilon < 1$, el azul para $1 \leq \epsilon \leq 2$, el naranja para $\epsilon > 2$ y la región limitada por la línea a trazos en rojo corresponde a $z^2 > 0$.

7.9. Inflación primordial

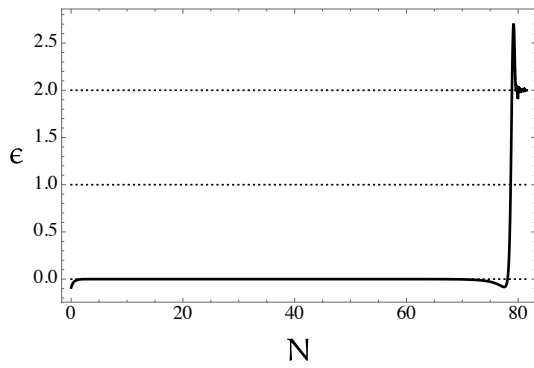
En esta parte se analizará en comportamiento asintótico que presenta el sistema autónomo con el propósito de describir un período de inflacionario primordial. Inicialmente es posible determinar la existencia del comportamiento asintótico, siguiendo la misma idea presentada en la sección 7.4, pero con una configuración de los parámetros libres positivos, $\alpha > 0$, $\Theta > 0$ y $\kappa > 0$, para que el comportamiento asintótico lleve al sistema autónomo a un fin del periodo de expansión acelerada; esto se percibe en el espacio de fase de la figura 20c. Siguiendo la misma idea analizada en la sección 7.4, el comportamiento asintótico es dado por: $x \rightarrow \beta y$, $y \rightarrow \infty$ cuando $N \rightarrow -\infty$. Se puede comprobar, que en el límite asintótico, a partir de las ecuaciones (286) y (288) y exigiendo de la ecuación (283) que $z^2 > 0$, se obtiene que¹⁶

$$\alpha > 0, \quad \Theta > 0, \quad \kappa > 0 \quad \text{y} \quad \beta \rightarrow \frac{77\alpha - 16\Theta - 9\kappa}{203\alpha + 64\Theta + 23\kappa}, \quad (290)$$

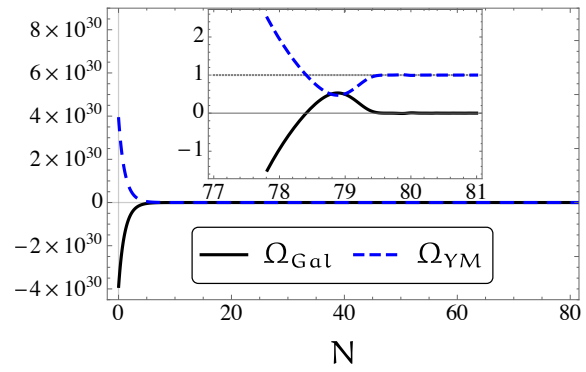
que, a su vez, hace $\varepsilon \rightarrow 0$; esto se observa en la figura 21a. En éste estado asintótico, en donde $\varepsilon \rightarrow 0$, el período inflacionario inflacionario termina en $\varepsilon \rightarrow 2$ y ocurre alrededor de los 75 *e-folds*, lo cual es característico de un universo dominado por radiación, esto es corroborado por la solución numérica de la figura 21b, en donde al final de inflación el término de Yang-Mills es dominante. Adicionalmente, durante el período inflacionario la densidad de energía asociados a los términos $\mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_4^2 + \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$ evoluciona como: $\rho_{\text{Gal}} \rightarrow -\rho_{\text{YM}}$, es decir, posee un comportamiento similar a

¹⁶ Ver apéndice 4

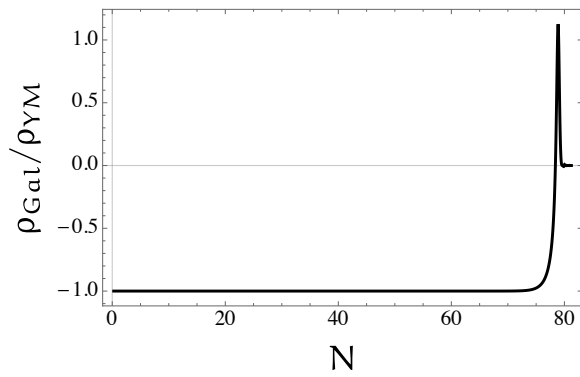
un fluido de radiación, esta afirmación es posible comprobarla analíticamente en el límite asintótico y es corroborado numéricamente en la figura 21c. Finalmente, a pesar del comportamiento decreciente de Ω_{Gal} y Ω_{YM} , la evolución del parámetro de Hubble es prácticamente constante durante todo el período inflacionario como se observa en la figura 21d.



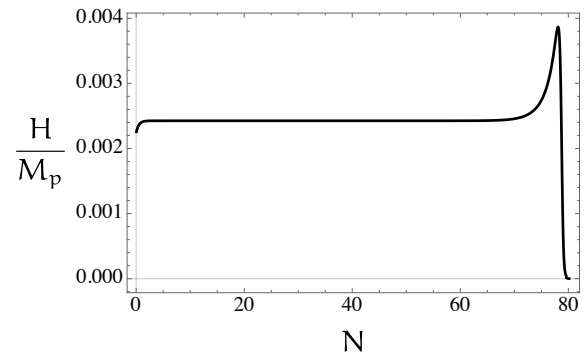
(a)



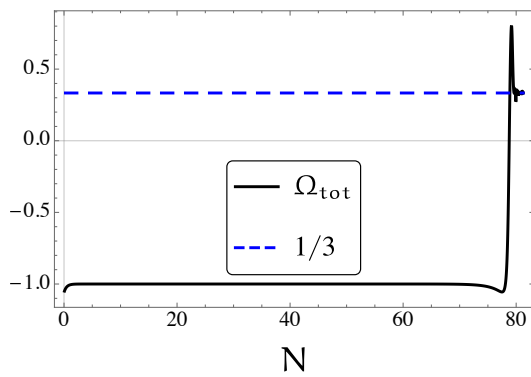
(b)



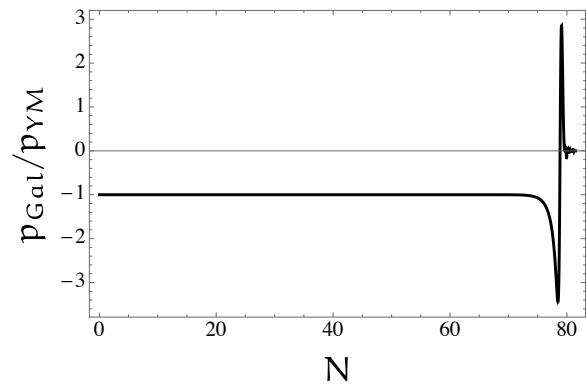
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 21. Inflación primordial - Solución numérica para $\alpha = 0.00649$, $g = 0.0001$, y condiciones iniciales $x_0 = -10^7$ y $y_0 = 5 \times 10^7$. (a) Esta figura representa el parámetro de rodadura lenta vs. N , este exhibe un comportamiento de expansión acelerada, en donde $\varepsilon \sim 0$ durante unos 70 *e-folds*; se puede observar que η está muy por debajo de 1 durante unos 70 *e-folds*, lo que implica un período de inflación lento durante el tiempo suficiente para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar; al final de esta etapa, ε van a 2, señalando la época dominada por la radiación. (b) esta figura muestra la evolución de la densidad de energía vs. N donde se muestra es como van decreciendo. (c) La figura muestra la relación entre las densidades de energía ρ_{Gal} y ρ_{YM} vs. N ; se encuentra que la evolución de la densidad de energía (ρ_{Gal}) se encuentra que en el límite asintótico: $\rho_{Gal} \rightarrow -\rho_{YM}$, por lo tanto, el término de la densidad de energía se comporta como un fluido de radiación en el período inflacionario. (d) Esta figura representa H/M_p vs. N ; a pesar de que ρ_{YM} y $|\rho_{Gal}|$ decrecen, $\rho_{tot} \propto H^2$ se acerca asintóticamente a un valor constante finito. (e) Esta figura muestra el parámetro de densidad de energía total, Ω_{tot} vs. N ; en el período inflacionario el fluido que domina durante el período inflacionario es el asociado al término ρ_{Gal} . (f) Esta figura muestra P_{Gal}/P_{YM} vs. N ; el término S durante inflación contribuye con una presión negativa dominante que se vuelve insignificante al final de este período, permitiendo que el término de Yang-Mills domine y produzca la época dominada por la radiación. El código para las soluciones numéricas se encuentran en el apéndice ??

8. Conclusiones

La presente tesis muestra los resultados de la investigación en el estudio analítico, numérico y vía la teoría de los sistemas dinámicos de las implicaciones cosmológicas de los Galileones vectoriales que poseen una simetría global $SU(2)$, la cual es conocida como la teoría generalizada Proca tipo $SU(2)$. Nos interesamos especialmente en el caso que, cada uno de los campos vectoriales de *gauge* sean perpendiculares y de igual norma, esto gracias al homomorfismo entre el grupo de simetrías de $SU(2)$ y el grupo $SO(3)$; esta configuración de campos vectoriales (tríada cósmica) favorece a que el espacio-tiempo sea homogéneo e isótropo, por lo que la métrica que mejor describe estas características está la de FLRW, lo cual está en concordancia con las observaciones realizadas por el Planck en la RCF (Ade et al., 2016a) (homogeneidad e isotropía estadística a grandes escalas).

Cuando nos referimos a consecuencias cosmológicas, nos referimos a la posibilidad de que esta clase de teorías generalizadas de Proca pueden generar un período de expansión acelerada temprana lo suficientemente prolongada para resolver los problemas de la cosmología estándar o dar cuenta a la expansión que experimenta en la actualidad el universo.

Dado que el estudio cosmológico de estas teorías se desarrollan en el marco de la Relatividad General, son las ecuaciones de campo de Einstein las encargadas de describir la dinámica de estos modelos (es importante resaltar que en el caso de las teorías con acoplos no mínimos con términos del tipo $f(R)$, la teoría no será la descrita por Einstein); dado que estas ecuaciones forman un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, encontrar una solución exacta no siempre es fácil. Como se mostró en el capítulo 4, utilizando un análisis de sistemas dinámicos, se puede investigar el comportamiento cualitativo del sistema no lineal. Por lo general, se introducen un conjunto de nuevas variables adecuadas y una variable de tiempo adimensional con el fin de que el sistema de ecuaciones de campo puedan ser expresadas como un sistema autónomo. De esta manera, con ayuda de los puntos críticos del sistema se puede analizar la estabilidad del sistema. Entonces uno puede estudiar el principio y el posible destino final del universo al descubrir el comportamiento de los parámetros físicos cerca de los puntos críticos.

Con el fin de estudiar las teorías generalizadas de Proca, en el capítulo 5 mostramos una alternativa para la construcción de teorías fundamentales, en donde una posibilidad es el estudio de los Galileones (Deffayet et al., 2011; Kobayashi et al., 2011). Estos son campos cuya acción conduce a ecuaciones de movimiento, a lo sumo, de segundo orden (Nicolis et al., 2009). Como ésta es una condición necesaria pero no suficiente para hacer que el Hamiltoniano quede acotado

por debajo, siempre que la acción no sea degenerada (Ostrogradski, 1850), la construcción de Galileones es una forma de evitar patologías tanto a nivel clásico como cuántico (Woodard, 2015, 2007). Las acciones de los Galileones son, por lo tanto, de gran interés en muchas ramas de la física, especialmente en la física de alta energía y la cosmología.

Las teorías de *gauge* que involucran campos vectoriales son construidas a partir del tensor de esfuerzos $F_{\mu\nu}$ y/o su dual de Hodge $\tilde{F}_{\mu\nu}$, y, si la simetría de *gauge* es espontáneamente rota, a partir del campo vectorial A_μ (Weinberg, 1995), sin embargo, las teorías de Proca generalizadas nos han enseñado que, cuando la simetría de *gauge* se rompe explícitamente, el sector vectorial de estas teorías también se construye a partir del tensor $S_{\mu\nu}$, que es la versión simétrica de $F_{\mu\nu}$ (Allys et al., 2016a; Rodríguez and Navarro, 2017). Las implicaciones cosmológicas de $F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ y A_μ han sido bien estudiadas en la literatura (Maleknejad et al., 2013; ?; Dimopoulos, 2012), pero poco se ha dicho sobre $S_{\mu\nu}$. En el capítulo 7 se presenta uno de los resultados más importantes del trabajo de investigación de esta tesis. Estudiamos las implicaciones cosmológicas de una tríada cósmica (Armendariz-Picon, 2004) en la teoría vector-tensor, también llamada la teoría de Galileones vectoriales, dotada de una simetría global $SU(2)$. En particular, analizamos el Lagrangiano de Yang-Mills junto con \mathcal{L}_4^1 presentado en la ecuación (240), siendo una de las piezas del Lagrangiano generalizado de Proca (Allys et al., 2016c), que contiene contracciones de dos tensores $S_{\mu\nu}$. Hemos encontrado un comportamiento asintótico en el que la tríada cósmica bajo \mathcal{L}_4^1 se comporta como un fluido perfecto casi de radiación con densidad de energía negativa y presión, cuyos valores absolutos coinciden con los del fluido perfecto de radiación que proviene de la misma tríada cósmica bajo el Lagrangiano de Yang-Mills. El sistema muestra un interesante mecanismo de ajuste dinámico

que da como resultado una ecuación combinada de parámetro de estado $\omega \simeq -1$ y, por lo tanto, en un período inflacionario isótropo eterno; esto hace de este modelo un candidato ideal para explicar la energía oscura, tal y como se mostró en la sección 7.4 . También hemos explorado el sistema dinámico asociado a este modelo y hemos encontrado que uno de los puntos críticos puede corresponder a un período prolongado de expansión acelerada isótropa del tipo rodadura lenta. Este es un punto de silla, es decir, representa un estado transitorio del sistema dinámico de modo que el período inflacionario llega naturalmente a su fin, siendo reemplazado por un período dominado por la radiación en virtud del Lagrangiano Yang-Mills; este modelo sería un candidato ideal para explicar la inflación primordial si no fuera por la elección juiciosa necesaria de las condiciones y parámetros iniciales en la acción. Como se mostró en la sección 7.5, desafortunadamente este período sólo es plausible para un conjunto de condiciones iniciales ajustadas muy finamente.

Los principales resultados de esta tesis se han publicado en forma de un artículo arbitrado y uno de memorias en evento científico:

- Y. Rodríguez and A. A. Navarro, *Scalar and vector Galileons*, J. Phys. Conf. Ser. **831**, 012004 (2017).
- Y. Rodríguez and A. A. Navarro, *Non-Abelian S-term dark energy and inflation*, Phys. Dark Univ. **19**, 129-136 (2018).

Así mismo, varios de los resultados obtenidos fueron presentados a través de las siguientes ponencias nacionales e internacionales:

- Poster. I Workshop on Current Challenges in Cosmology. Inflation and the Origin of the CMB Anomalies. Título: *Dynamical systems applied to vector fields in the framework of the Horndeski's theory*. Mayo 18 al 22 del 2015. Cali-Colombia.
- Ponencia. Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica COCOA. Título: *Inflación del término S no Abeliano*. Octubre 24 al 27 del 2017. Ibagué-Colombia.
- Ponencia. Hot topics in Modern Cosmology: Spontaneous Workshop XII. Título: *Non-Abelian S-term dark energy and inflation*. Mayo 14 al 18 del 2018. Cargese-Francia

8.1. Futuros trabajos de investigación

El modelo presentado en el capítulo 7 es tan atractivo, plausible y bien fundado, al menos en lo que se refiere a la energía oscura, que merece mayor exploración. Una de las primeras cosas que hay que hacer es investigar si el Hamiltoniano está realmente limitado desde abajo. Además,

se requiere un estudio completo de las perturbaciones cosmológicas para establecer la solidez del modelo frente a las inestabilidades laplaciana y fantasma, para verificar la estabilidad perturbativa de la solución isótropa, y para calcular la velocidad del sonido c_s , que es una característica distintiva de cualquier modelo de energía oscura (?). Otro aspecto a explorar es la posible naturaleza atrayente de la configuración de la tríada cósmica en un fondo anisótropo más general (como se hace para el modelo de *gauge-flation* en la referencia (Maleknejad et al., 2012)) y como es la propagación de las perturbaciones escalares debido a la presencia de la triada cósmica (?).

Sin embargo, lo que es un asunto urgente y necesario investigar es si la adición de $\kappa \mathcal{L}_4^2$ puede eludir las restricciones aparentemente fuertes (Baker et al., 2017; ?) que provienen del detección de la señal de las ondas gravitacionales GW170817 (Abbott et al., 2017a) y su contraparte electromagnética GRB 170817A (?Abbott et al., 2017b): un análisis preliminar, siguiendo el mismo camino en la referencia (?), sugieren que el acoplamiento con el tensor de Riemann en la ecuación (3) no modifica la velocidad de las ondas gravitacionales; esta sugerencia se ve reforzada por el hecho de que \mathcal{L}_6 en la teoría de Proca generalizada para un campo vectorial abeliano, el cual contiene un acoplamiento entre dos tensores de esfuerzo del campo de *gauge* y el doble tensor de Riemann, no está limitado ya que no altera la velocidad de las ondas gravitacionales (Baker et al., 2017).

Los términos dentro del Lagrangiano que pueden ser inconsistentes con las observaciones parecen ser los acoplamientos con el escalar de Ricci. Por lo tanto, una relación adecuada entre los parámetros α y κ en $\alpha \mathcal{L}_4^1 + \kappa \mathcal{L}_4^2 \subset \mathcal{L}_4$ podría desactivar el efecto aparentemente dañino de los acoplamientos con el Ricci escalar, al menos para la configuración de tríada cósmica, haciendo

de este modelo una alternativa fenomenológicamente viable. Por supuesto, si esto es posible, las implicaciones cosmológicas de $\alpha\mathcal{L}_4^1 + \kappa\mathcal{L}_4^2$ deben estudiarse teniendo en cuenta que el mecanismo de energía oscura presentado podría no ser contrarrestado por $\kappa\mathcal{L}_4^2$.

Referencias Bibliográficas

- Aasi, J. et al. (2015). Advanced LIGO. *Class. Quant. Grav.*, 32:074001.
- Abbott, B. et al. (2017a). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101.
- Abbott, B. P. et al. (2016). Tests of general relativity with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, 116(22):221101. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 121,no.12,129902(2018)].
- Abbott, B. P. et al. (2017b). Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848:L13.
- Abramo, L. R. W. and Finelli, F. (2003). Cosmological dynamics of the tachyon with an inverse power-law potential. *Phys. Lett. B*, 575:165–171.
- Acernese, F. et al. (2015). Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):024001.
- Ade, P. A. R. et al. (2014a). Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *Astron. Astrophys.*, 571:A1.
- Ade, P. A. R. et al. (2014b). Planck 2013 results. XXIII. Isotropy and statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.*, 571:A23.
- Ade, P. A. R. et al. (2016a). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13.

- Ade, P. A. R. et al. (2016b). Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity. *Astron. Astrophys.*, 594:A14.
- Ade, P. A. R. et al. (2016c). Planck 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.*, 594:A16.
- Ade, P. A. R. et al. (2016d). Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, 594:A20.
- Adler, R. J., Casey, B., and Jacob, O. C. (1995). Vacuum catastrophe: An Elementary exposition of the cosmological constant problem. *Am. J. Phys.*, 63:620–626.
- Adshead, P., Martinec, E., Sfakianakis, E. I., and Wyman, M. (2016). Higgsed Chromo-Natural Inflation. *JHEP*, 1612:137.
- Adshead, P. and Sfakianakis, E. I. (2017). Higgsed Gauge-flation. *JHEP*, 1708:130.
- Adshead, P. and Wyman, M. (2012). Chromo-Natural Inflation: Natural inflation on a steep potential with classical non-Abelian gauge fields. *Phys. Rev. Lett.*, 108:261302.
- Affeldt, C. et al. (2014). Advanced techniques in GEO 600. *Class. Quant. Grav.*, 31(22):224002.
- Aguirregabiria, J. M. and Lazkoz, R. (2004). Tracking solutions in tachyon cosmology. *Phys. Rev. D*, 69:123502.
- Allys, E. (2017). New terms for scalar multi-Galileon models and application to $SO(N)$ and $SU(N)$ group representations. *Phys. Rev. D*, 95:064051.

Allys, E., Beltrán Almeida, J. P., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016a). On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1609:026.

Allys, E., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016b). Generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1602:004.

Allys, E., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016c). Generalized SU(2) Proca Theory. *Phys. Rev. D*, 94:084041.

Amendola, L. (1999). Scaling solutions in general nonminimal coupling theories. *Phys. Rev. D*, 60:043501.

Amendola, L. (2000). Coupled quintessence. *Phys. Rev. D*, 62:043511.

Amendola, L., Kunz, M., Saltas, I. D., and Sawicki, I. (2018). Fate of Large-Scale Structure in Modified Gravity After GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 120(13):131101.

Antoniadis, I., Dudas, E., and Ghilencea, D. M. (2008). Supersymmetric Models with Higher Dimensional Operators. *JHEP*, 03:045.

Armendariz-Picon, C. (2004). Could dark energy be vector-like? *JCAP*, 0407:007.

Armendariz-Picon, C., Damour, T., and Mukhanov, V. F. (1999). k - inflation. *Phys. Lett. B*, 458:209–218.

Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F., and Steinhardt, P. J. (2000). Dynamical solution to the

problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438.

Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F., and Steinhardt, P. J. (2001). Essentials of k essence. *Phys. Rev. D*, 63:103510.

Aso, Y., Michimura, Y., Somiya, K., Ando, M., Miyakawa, O., Sekiguchi, T., Tatsumi, D., and Yamamoto, H. (2013). Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector. *Phys. Rev. D*, 88(4):043007.

Astier, P. et al. (2006). The Supernova legacy survey: Measurement of $\omega(m)$, $\omega(\lambda)$ and W from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447:31–48.

Astone, P. et al. (2010). IGEC2: A 17-month search for gravitational wave bursts in 2005-2007. *Phys. Rev.*, D82:022003.

Bagla, J. S., Jassal, H. K., and Padmanabhan, T. (2003). Cosmology with tachyon field as dark energy. *Phys. Rev. D*, 67:063504.

Bahamonde, S., Böhmer, C. G., Carloni, S., Copeland, E. J., Fang, W., and Tamanini, N. (2018). Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity. *Phys. Rept.*, 775-777:1–122.

Bahcall, J., Piran, T., and Weinberg, S. (2004). Dark matter in the universe. World Scientific.

- Baker, T., Bellini, E., Ferreira, P. G., Lagos, M., Noller, J., and Sawicki, I. (2017). Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251301.
- Bamba, K., Hossain, M. W., Myrzakulov, R., Nojiri, S., and Sami, M. (2014). Cosmological investigations of (extended) nonlinear massive gravity schemes with nonminimal coupling. *Phys. Rev. D*, 89.
- Banerjee, N. and Pavon, D. (2001a). A Quintessence scalar field in Brans-Dicke theory. *Class. Quant. Grav.*, 18:593.
- Banerjee, N. and Pavon, D. (2001b). Cosmic acceleration without quintessence. *Phys. Rev. D*, 63:043504.
- Banerjee, N. and Sen, S. (1997). Does Brans-Dicke theory always yield general relativity in the infinite omega limit? *Phys. Rev. D*, 56:1334–1337.
- Bardeen, J. M. (1980). Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys. Rev. D*, 22:1882–1905.
- Barger, V. D. and Marfatia, D. (2001). Supernova data may be unable to distinguish between quintessence and k-essence. *Phys. Lett. B*, 498:67–73.
- Bartolo, N. and Pietroni, M. (2000). Scalar tensor gravity and quintessence. *Phys. Rev. D*, 61:023518.
- Batista, A. B., Fabris, J. C., Goncalves, S. V. B., and Tossa, J. (2001). Qualitative analysis of a scalar - tensor theory with exponential potential. *Int. J. Mod. Phys. A*, 16:4527–4542.

- Baumann, D. (2011). Inflation. In *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, pages 523–686.
- Bellini, E. and Sawicki, I. (2014). Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. *JCAP*, 1407:050.
- Beltrán Jiménez, J., Durrer, R., Heisenberg, L., and Thorsrud, M. (2013). Stability of Horndeski vector-tensor interactions. *JCAP*, 1310:064.
- Beltrán Jiménez, J. and Heisenberg, L. (2016). Derivative self-interactions for a massive vector field. *Phys. Lett. B*, 757:405–411.
- Beltrán Jiménez, J. and Heisenberg, L. (2017). Generalized multi-Proca fields. *Phys. Lett. B*, 770:16–26.
- Beltrán Jiménez, J., Heisenberg, L., Kase, R., Namba, R., and Tsujikawa, S. (2017). Instabilities in Horndeski Yang-Mills inflation. *Phys. Rev. D*, 95:063533.
- Beltrán Jiménez, J., Piazza, F., and Velten, H. (2016). Evading the Vainshtein Mechanism with Anomalous Gravitational Wave Speed: Constraints on Modified Gravity from Binary Pulsars. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061101.
- Ben Achour, J., Crisostomi, M., Koyama, K., Langlois, D., Noui, K., and Tasinato, G. (2016). Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order. *JHEP*, 12:100.

- Bennett, C. L. et al. (2003). First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps and basic results. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 148:1.
- Bennett, C. L. et al. (2013). Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 208:20.
- Bergshoeff, E. A., de Roo, M., de Wit, T. C., Eyras, E., and Panda, S. (2000). T duality and actions for nonBPS D-branes. *JHEP*, 0005:009.
- Bertotti, B., Iess, L., and Tortora, P. (2003a). A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376.
- Bertotti, B., Iess, L., and Tortora, P. (2003b). A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956):374.
- Blas, D., Ivanov, M. M., Sawicki, I., and Sibiryakov, S. (2016). On constraining the speed of gravitational waves following GW150914. *JETP Lett.*, 103(10):624–626. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.103,no.10,708(2016)].
- Brans, C. and Dicke, R. H. (1961a). Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935.
- Brans, C. and Dicke, R. H. (1961b). Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, 124(3):925.
- Caldwell, R. R. (2002). A Phantom menace? *Phys. Lett. B*, 545:23–29.

- Capozziello, S. (2002). Curvature quintessence. *Int. J. Mod. Phys. D*, 11:483–492.
- Carroll, S. M. (1998). Quintessence and the rest of the world. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3067–3070.
- Carroll, S. M. (2001). The Cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4:1.
- Carroll, S. M., De Felice, A., Duvvuri, V., Easson, D. A., Trodden, M., and Turner, M. S. (2005). The Cosmology of generalized modified gravity models. *Phys. Rev. D*, 71:063513.
- Carroll, S. M., Duvvuri, V., Trodden, M., and Turner, M. S. (2004). Is cosmic speed - up due to new gravitational physics? *Phys. Rev. D*, 70:043528.
- Chandrasekhar, S. and Thorne, K. S. (1985). *The mathematical theory of black holes*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences.
- Charmousis, C., Copeland, E. J., Padilla, A., and Saffin, P. M. (2012). General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four. *Phys. Rev. Lett.*, 108:051101.
- Chen, T.-j., Fasiello, M., Lim, E. A., and Tolley, A. J. (2013). Higher derivative theories with constraints: Exorcising Ostrogradski’s Ghost. *JCAP*, 1302:042.
- Chesler, P. M. and Loeb, A. (2017). Constraining Relativistic Generalizations of Modified Newtonian Dynamics with Gravitational Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 119(3):031102.
- Chiba, T. (1999). Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Phys. Rev. D*, 60:083508.
- Chiba, T., Okabe, T., and Yamaguchi, M. (2000). Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev. D*, 62:023511.

- Chung, D. J. H., Shiu, G., and Trodden, M. (2003). Running of the scalar spectral index from inflationary models. *Phys. Rev. D*, 68:063501.
- Coley, A. A. (1999). Dynamical systems in cosmology. In *Spanish Relativity Meeting (ERE 99) Bilbao, Spain, September 7-10, 1999*.
- Colless, M. et al. (2001). The 2dF Galaxy Redshift Survey: Spectra and redshifts. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 328:1039.
- Copeland, E. J., Garousi, M. R., Sami, M., and Tsujikawa, S. (2005). What is needed of a tachyon if it is to be the dark energy? *Phys. Rev. D*, 71:043003.
- Copeland, E. J., Sami, M., and Tsujikawa, S. (2006). Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D*, 15:1753–1936.
- Cornish, N., Blas, D., and Nardini, G. (2017). Bounding the speed of gravity with gravitational wave observations. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161102.
- Creminelli, P. and Vernizzi, F. (2017). Dark Energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251302.
- Das, S., Banerjee, N., and Dadhich, N. (2006). Curvature driven acceleration : a utopia or a reality ? *Class. Quant. Grav.*, 23:4159–4166.
- Davydov, E. and Gal'tsov, D. (2016). HYM-flation: Yang-Mills cosmology with Horndeski coupling. *Phys. Lett. B*, 753:622–628.

De Felice, A., Heisenberg, L., Kase, R., Mukohyama, S., Tsujikawa, S., and Zhang, Y.-l. (2016a).
Cosmology in generalized Proca theories. *JCAP*, 1606:048.

De Felice, A., Heisenberg, L., Kase, R., Mukohyama, S., Tsujikawa, S., and Zhang, Y.-l. (2016b).
Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in generalized Proca theories.
Phys. Rev. D, 94:044024.

de Felice, A., Heisenberg, L., and Tsujikawa, S. (2017). Observational constraints on generalized
Proca theories. *Phys. Rev. D*, 95:123540.

De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2012). Conditions for the cosmological viability of the most
general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models.
JCAP, 1202:007.

Deffayet, C., Deser, S., and Esposito-Farese, G. (2009a). Generalized Galileons: All scalar models
whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors.
Phys. Rev. D, 80:064015.

Deffayet, C., Dvali, G. R., and Gabadadze, G. (2002). Accelerated universe from gravity leaking to
extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 65:044023.

Deffayet, C., Esposito-Farese, G., and Vikman, A. (2009b). Covariant Galileon. *Phys. Rev. D*,
79:084003.

Deffayet, C., Gao, X., Steer, D., and Zahariade, G. (2011). From k-essence to generalized Galileons.
Phys. Rev. D, 84:064039.

- Deffayet, C., Gumrukcuoglu, A. E., Mukohyama, S., and Wang, Y. (2014). A no-go theorem for generalized vector Galileons on flat spacetime. *JHEP*, 1404:082.
- Deffayet, C., Pujolas, O., Sawicki, I., and Vikman, A. (2010). Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding. *JCAP*, 1010:026.
- Deffayet, C. and Steer, D. A. (2013). A formal introduction to Horndeski and Galileon theories and their generalizations. *Class. Quant. Grav.*, 30:214006.
- Dimastrogiovanni, E. and Peloso, M. (2013). Stability analysis of chromo-natural inflation and possible evasion of Lyth's bound. *Phys. Rev. D*, 87.
- Dimopoulos, K. (2006). Can a Vector Field be Responsible for the Curvature Perturbation in the Universe? . *Phys. Rev. D*, 74:083502.
- Dimopoulos, K. (2007). Supergravity inspired Vector Curvaton. *Phys. Rev. D*, 76:063506.
- Dimopoulos, K. (2012). Statistical Anisotropy and the Vector Curvaton Paradigm. *Int. J. Mod. Phys. D*, 21:1250023. [Erratum: *Int. J. Mod. Phys. D* 21,1292003(2012)].
- Dimopoulos, K., Karčiauskas, M., Lyth, D. H., and Rodríguez, Y. (2009). Statistical Anisotropy of the Curvature Perturbation from Vector Field Perturbations. *JCAP*, 0905:013.
- Dimopoulos, K., Karčiauskas, M., and Wagstaff, J. M. (2010). Vector Curvaton with varying Kinetic Function. *Phys. Rev. D*, 81:023522.

- Duruiseau, J. P. and Kerner, R. (1986). The Effective Gravitational Lagrangian and the Energy Momentum Tensor in the Inflationary Universe. *Class. Quant. Grav.*, 3:817–824.
- Dvali, G. R., Gabadadze, G., and Porrati, M. (2000). 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys. Lett. B*, 485:208–214.
- Einstein, A. (1917). Cosmological considerations in the general theory of relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1917:142–152.
- Einstein, A. (1952). Cosmological considerations on the general theory of relativity. *The Principle of Relativity. Dover Books on Physics*, 0486600815:175–188.
- Ellis, G. F. R. (2006). Issues in the philosophy of cosmology. In Butterfield, J. and Earman, J., editors, *Philosophy of physics*, pages 1183–1285.
- Emami, R., Mukohyama, S., Namba, R., and Zhang, Y.-l. (2017). Stable solutions of inflation driven by vector fields. *JCAP*, 1703:058.
- et al., A. G. R. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116:1009.
- et al., A. G. R. (2004). Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal*, 607:665.

- et al., S. P. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517:565.
- Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2017). Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251304.
- Faraoni, V. (2004). De Sitter attractors in generalized gravity. *Phys. Rev. D*, 70:044037.
- Fujii, Y. and Maeda, K.-i. (2003). *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press.
- García-Salcedo, R., Gonzalez, T., Horta-Rangel, F. A., Quiros, I., and Sanchez-Guzmán, D. (2015). Introduction to the application of dynamical systems theory in the study of the dynamics of cosmological models of dark energy. *Eur. J. Phys.*, 36:025008.
- Garousi, M. R. (2002). On shell S matrix and tachyonic effective actions. *Nucl. Phys. B*, 647:117–130.
- Garousi, M. R. (2003). Slowly varying tachyon and tachyon potential. *JHEP*, 0305:058.
- Gertsenshtein, M. E. and Pustovoit, V. I. (1962). On the Detection of Low Frequency Gravitational Waves. *Sov. Phys. JETP*, 16:433.
- Gibbons, G. W. (2002). Cosmological evolution of the rolling tachyon. *Phys. Lett. B*, 537:1–4.
- Goldstein, A. et al. (2017). An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848(2):L14.

Golovnev, A., Mukhanov, V., and Vanchurin, V. (2008). Vector Inflation. *JCAP*, 0806:009.

Gosenca, M. and Coles, P. (2015). Dynamical Analysis of Scalar Field Cosmologies with Spatial Curvature. *arXiv: 1502.04020*.

Green, M. A., Moffat, J. W., and Toth, V. T. (2018). Modified Gravity (MOG), the speed of gravitational radiation and the event GW170817/GRB170817A. *Phys. Lett. B*, 780:300–302.

Guo, J.-Q. and Frolov, A. V. (2013). Cosmological dynamics in $f(R)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 88(12):124036.

Guth, A. H. (1981). Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347.

Harrison, E. R. (1970). Fluctuations at the threshold of classical cosmology. *Phys. Rev. D*, 1:2726–2730.

Heisenberg, L. (2014a). Generalization of the Proca Action. *JCAP*, 1405:015.

Heisenberg, L. (2014b). Generalization of the Proca Action. *JCAP*, 1405:015.

Horndeski, G. W. (1974). Second-Order Scalar-Tensor Field Equation in a Four-Dimensional Space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363.

Horndeski, G. W. (1976). Conservation of charge and the Einstein-Maxwell field equations. *J. Math. Phys.*, 17:1980.

- Hossain, M. W., Myrzakulov, R., Sami, M., and Saridakis, E. N. (2014). Variable gravity: A suitable framework for quintessential inflation. *Phys. Rev. D*, 90:023512.
- Hrycyna, O. and Szydlowski, M. (2013). Brans-Dicke theory and the emergence of Λ CDM model. *Phys. Rev. D*, 88(6):064018.
- Hrycyna, O., Szydlowski, M., and Kamionka, M. (2014). Dynamics and cosmological constraints on Brans-Dicke cosmology. *Phys. Rev.*, D90(12):124040.
- Hrycyna, O. and Szydlowski, M. (2013). Dynamical complexity of the Brans-Dicke cosmology. *JCAP*, 1312:016.
- Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173.
- Hull, M., Koyama, K., and Tasinato, G. (2016). Covariantized vector Galileons. *Phys. Rev. D*, 93:064012.
- Jacobson, T. and Mattingly, D. (2001). Gravity with a dynamical preferred frame. *Phys. Rev.*, D64:024028.
- Jarv, L., Kuusk, P., and Saal, M. (2008). Scalar-tensor cosmologies: Fixed points of the Jordan frame scalar field. *Phys. Rev. D*, 78:083530.
- Jassal, H. K., Bagla, J. S., and Padmanabhan, T. (2010). Understanding the origin of CMB constraints on Dark Energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 405:2639–2650.

Kane, G. L. (1993). Modern elementary particle physics, the fundamental particles and forces. *Addison-Wesley Press*.

Kazakov, D. I. and Vartanov, G. S. (2007). Renormalizable $1/N(f)$ Expansion for Field Theories in Extra Dimensions. *JHEP*, 06:081.

Kerner, R. (1982). Cosmology without singularity and nonlinear gravitational lagrangians. *Gen. Rel. Grav.*, 14:453–469.

Kim, J. and Komatsu, E. (2013). Limits on anisotropic inflation from the Planck data. *Phys. Rev. D*, 88:101301.

Kobayashi, T., Yamaguchi, M., and Yokoyama, J. (2011). Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. *Prog. Theor. Phys.*, 126:511.

Kolitch, S. J. (1996). Qualitative analysis of Brans-Dicke universes with a cosmological constant. *Annals Phys.*, 246:121–132.

Kolitch, S. J. and Eardley, D. M. (1995). Behavior of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models in scalar - tensor gravity. *Annals Phys.*, 241:128–151.

Langlois, D., Mancarella, M., Noui, K., and Vernizzi, F. (2017). Effective Description of Higher-Order Scalar-Tensor Theories. *JCAP*, 1705(05):033.

Langlois, D. and Noui, K. (2016). Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability. *JCAP*, 1602(02):034.

- Langlois, D., Saito, R., Yamauchi, D., and Noui, K. (2018). Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817. *Phys. Rev. D*, 97(6):061501.
- Lemaître, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *AASB*, 47:49–59.
- Li, M. and Zhang, X. (2003). k-essential leptogenesis. *Phys. Lett. B*, 573:20–26.
- Liddle, A. R. and Leach, S. M. (2003). How long before the end of inflation were observable perturbations produced? *Phys. Rev. D*, 68:103503.
- Liddle, A. R. and Lyth, D. H. (2000). *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press.
- Linde, A. D. (1982). A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B*, 108:389.
- Lundmark, K. (1925). The motions and the distances of spiral nebulae. *MNRAS*, 85:865.
- Lyth, D. H. and Liddle, A. R. (2009). The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure. *Cambridge University Press*.
- Maldacena, J. M. (2003). Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *JHEP*, 05:013.
- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. (2011). Non-Abelian Gauge Field Inflation. *Phys. Rev. D*, 84:043515.

- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. (2013). Gauge-flation: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields. *Phys. Lett. B*, 723:224.
- Maleknejad, A., Sheikh-Jabbari, M. M., and Soda, J. (2012). Gauge-flation and Cosmic No-Hair Conjecture. *JCAP*, 1201:016.
- Maleknejad, A., Sheikh-Jabbari, M. M., and Soda, J. (2013). Gauge Fields and Inflation. *Phys. Rept.*, 528:161–261.
- Malquarti, M., Copeland, E. J., and Liddle, A. R. (2003a). K-essence and the coincidence problem. *Phys. Rev. D*, 68:023512.
- Malquarti, M., Copeland, E. J., Liddle, A. R., and Trodden, M. (2003b). A New view of k-essence. *Phys. Rev. D*, 67:123503.
- Martin, J., Ringeval, C., and Vennin, V. (2014). Encyclopædia Inflationaris. *Phys. Dark Univ.*, 5-6:75–235.
- Martin-Moruno, P., Nunes, N. J., and Lobo, F. S. N. (2015). Horndeski theories self-tuning to a de Sitter vacuum. *Phys. Rev. D*, 91(8):084029.
- McManus, R., Lombriser, L., and Peñarrubia, J. (2016). Finding Horndeski theories with Einstein gravity limits. *JCAP*, 1611(11):006.
- Metha, M., Normand, J., and Gupta, V. (1983). A property of the structure constants of finite dimensional compact simple lie algebras. *Commun. Math. Phys.*, 90:69–78.

- Mirshekari, S., Yunes, N., and Will, C. M. (2012). Constraining Generic Lorentz Violation and the Speed of the Graviton with Gravitational Waves. *Phys. Rev. D*, 85:024041.
- Moore, G. D. and Nelson, A. E. (2001). Lower bound on the propagation speed of gravity from gravitational Cherenkov radiation. *JHEP*, 09:023.
- Moss, G. E., Miller, L. R., and Forward, R. L. (1971). Photon-noise-limited laser transducer for gravitational antenna. *Appl. Opt.*, 10:2495–2498.
- Mota, D. F. and Barrow, J. D. (2004). Varying alpha in a more realistic Universe. *Phys. Lett. B*, 581:141–146.
- Mukhanov, V. F. (2005). Physical foundations of cosmology. *Cambridge University Press*.
- Mukhanov, V. F. and Winitzki, S. (2007). Introduction to quantum effects in gravity. *Cambridge University Press*.
- Müller-Hoissen, F. (1988). Non-minimal coupling from dimensional reduction of the gauss-bonnet action. *Phys. Lett. B*, 201:325.
- Namba, R., Dimastrogiovanni, E., and Peloso, M. (2013). Gauge-flation confronted with Planck. *JCAP*, 1311:045.
- Nesterenko, V. (2007). On the instability of classical dynamics in theories with higher derivatives. *Phys. Rev. D*, 75:087703.

- Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E. (2009). The galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev. D*, 79:064036.
- Nieto, C. M. and Rodríguez, Y. (2016). Massive Gauge-flation. *Mod. Phys. Lett. A*, 31:1640005.
- Nishizawa, A. (2018). Generalized framework for testing gravity with gravitational-wave propagation. I. Formulation. *Phys. Rev. D*, 97(10):104037.
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2004). Modified gravity with $\ln R$ terms and cosmic acceleration. *Gen. Rel. Grav.*, 36:1765–1780.
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2006). Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology: From matter dominated epoch to dark energy universe. *Phys. Rev. D*, 74:086005.
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2007). Unifying inflation with Λ CDM epoch in modified $f(R)$ gravity consistent with Solar System tests. *Phys. Lett. B*, 657:238–245.
- Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Sami, M. (2006). Dark energy cosmology from higher-order, string-inspired gravity and its reconstruction. *Phys. Rev. D*, 74:046004.
- Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Sasaki, M. (2005). Gauss-Bonnet dark energy. *Phys. Rev. D*, 71:123509.
- Ostrogradski, M. (1850). Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres. *Mem. Ac. St. Petersbourg*, VI:385.

- Padilla, A., Saffin, P. M., and Zhou, S.-Y. (2011). Multi-galileons, solitons and Derrick's theorem. *Phys. Rev. D*, 83:045009.
- Padmanabhan, T. (2003). Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320.
- Peebles, P. J. E. and Yu, J. T. (1970). Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe. *Astrophys. J.*, 162:815–836.
- Penzias, A. A. and Wilson, R. W. (1965). A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.*, 142:419.
- Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- Ramazanov, S., Rubtsov, G., Thorsrud, M., and Urban, F. R. (2017). General quadrupolar statistical anisotropy: Planck limits. *JCAP*, 1703:039.
- Ramazanov, S. R. and Rubtsov, G. (2014). Constraining anisotropic models of the early Universe with WMAP9 data. *Phys. Rev. D*, 89:043517.
- Ratra, B. and Peebles, P. J. E. (1988). Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys. Rev. D*, 37:3406.
- Riazuelo, A. and Uzan, J.-P. (2002). Cosmological observations in scalar - tensor quintessence. *Phys. Rev. D*, 66:023525.

- Riess, A. G., Press, W. H., and Kirshner, R. P. (1995). Using SN-Ia light curve shapes to measure the Hubble constant. *Astrophys. J.*, 438:L17–20.
- Riess, A. G., Press, W. H., and Kirshner, R. P. (1996). A Precise distance indicator: Type Ia supernova multicolor light curve shapes. *Astrophys. J.*, 473:88.
- Robert, M. (1984). Wald, general relativity. *University of Chicago Press Chicago*.
- Rodríguez, Y. and Navarro, A. A. (2017). Scalar and vector Galileons. *J. Phys. Conf. Ser.*, 831:012004.
- Rodríguez, Y. (2015). A New Pedagogical Way of Finding Out the Gauge Field Strength Tensor in Abelian and Non-Abelian Local Gauge Field Theories. *ArXiv e-prints*.
- Rodríguez, Y., Gomez, L. G., and Nieto, C. M. (2015). Towards a proof of the equivalence between FRW background expansion and statistical isotropy. In *Proceedings, 2nd Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology (GRACo II): Buenos Aires, Argentina, April 22-25, 2014*, pages 139–144.
- Ryder, L. H. (1985). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- Sakstein, J. and Jain, B. (2017). Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251303.
- Savchenko, V. et al. (2017). INTEGRAL Detection of the First Prompt Gamma-Ray Signal Coincident with the Gravitational-wave Event GW170817. *Astrophys. J.*, 848(2):L15.

- Sawicki, I., Saltas, I. D., Motta, M., Amendola, L., and Kunz, M. (2017). Nonstandard gravitational waves imply gravitational slip: On the difficulty of partially hiding new gravitational degrees of freedom. *Phys. Rev. D*, 95(8):083520.
- Schmidt, H.-J. (1994). Stability and Hamiltonian formulation of higher derivative theories. *Phys. Rev. D*, 49:6354.
- Sen, A. A. and Sethi, S. (2002). Quintessence model with double exponential potential. *Phys. Lett. B*, 532:159–165.
- Sheikh-Jabbari, M. M. (2012). Gauge-flation Vs Chromo-Natural Inflation. *Phys. Lett. B*, 717:6–9.
- Slipher, V. M. (1915). Spectrographic observations of nebulae. *PAAS*, 23:21–24.
- Smoot, G. F. et al. (1992). Structure in the coBE differential microwave radiometer first-year maps. *Astrophys. J.*, 396:L1.
- Starobinsky, A. A. (1980). A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102.
- Tasinato, G. (2014a). A small cosmological constant from Abelian symmetry breaking. *Class. Quant. Grav.*, 31:225004.
- Tasinato, G. (2014b). Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking. *JHEP*, 1404:067.
- Tasinato, G. (2014c). Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking. *JHEP*, 04:067.

- Urena-Lopez, L. A. (2012). Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields. *JCAP*, 1203:035.
- Uzan, J.-P. (1999). Cosmological scaling solutions of nonminimally coupled scalar fields. *Phys. Rev. D*, 59:123510.
- Wang, J., Hui, L., and Khoury, J. (2012). No-Go Theorems for Generalized Chameleon Field Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 109:241301.
- Watanabe, M., Kanno, S., and Soda, J. (2009). Inflationary Universe with Anisotropic Hair. *Phys. Rev. Lett.*, 102:191302.
- Weber, J. (1960). Detection and Generation of Gravitational Waves. *Phys. Rev.*, 117:306–313.
- Weinberg, S. (1989). The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1.
- Weinberg, S. (1995). The quantum theory of fields. vol. 2: Modern applications. *Cambridge University Press*.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology. Cambridge University Press.*
- Wetterich, C. (1988). Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry. *Nucl. Phys. B*, 302:668–696.
- Wiggins, S. (1990). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. *Springer*.
- Woodard, R. P. (2007). Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. *Lect. Notes Phys.*, 720:403–433.

Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10:32243.

Wright, E. L. (2005). *Cosmology lecture notes: <http://www.astro.ucla.edu/~wright/A275.pdf>.*

Yokoyama, S. and Soda, J. (2008). Primordial statistical anisotropy generated at the end of inflation. *JCAP*, 0808:005.

York, D. G. et al. (2000). The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. *Astron. J.*, 120:1579–1587.

Zeldovich, Ya. B. (1972). A Hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 160:1P–3P.

Zlatev, I., Wang, L.-M., and Steinhardt, P. J. (1999). Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896–899.

Zlosnik, T. G., Ferreira, P. G., and Starkman, G. D. (2007). Modifying gravity with the Aether: An alternative to Dark Matter. *Phys. Rev.*, D75:044017.

Apéndices

Apéndice A. Análisis del término $\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal, bis}}$

En este apéndice se mostrará porque el Lagrangiano $\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal, bis}}$, descubierto en la referencia (Allys et al., 2016a), es redundante¹⁷. Se parte con las siguientes definiciones:

$$\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal, bis}} \equiv g_4(A^2) A^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} S^{\nu\lambda} A_\lambda \quad (291)$$

y

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (292)$$

$$S_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \quad (293)$$

¹⁷ Esta es una prueba inédita de Ryo Namba. Le agradecemos por compartir la prueba y darnos permiso para reproducirla en el artículo (Rodríguez and Navarro, 2017).

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal,bis}} &\equiv g_4(A^2)A^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} S^{\nu\lambda} A_\lambda \\
&= g_4(A^2)A^\mu A_\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} (F^{\lambda\nu} + 2\partial^\nu A^\lambda) \\
&= g_4(A^2)A^\mu A_\lambda \left(\frac{1}{4}A^2 F \cdot \tilde{F} + A^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} \partial^\nu A^2 \right) \\
&= \frac{g_4(A^2)}{4} A^2 F \cdot \tilde{F} + g_4(A^2) \partial_\nu A^2 A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}, \tag{294}
\end{aligned}$$

donde se ha usado, en la tercera línea, la identidad $\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\lambda\nu} = \frac{1}{4} \tilde{F}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta_\mu^\lambda$ encontrado por primera vez en referencia (?) y empleado en referencia (Allys et al., 2016a).

Ahora se define

$$G_4(A^2) \equiv \int^{A^2} d(A^2)' g_4[(A^2)'], \tag{295}$$

así que

$$\partial_\nu G_4(A^2) = G_{4,A^2} \partial_\nu A^2 = g_4(A^2) \partial_\nu A^2. \tag{296}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal,bis}} &\equiv \frac{g_4(A^2)}{4} A^2 F \cdot \tilde{F} + \partial_\nu G_4(A^2) A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \\
&= \frac{g_4(A^2)}{4} A^2 F \cdot \tilde{F} + \partial_\nu (G_4(A^2) A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}) - G_4(A^2) \partial_\nu (A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}) \\
&= \frac{g_4(A^2)}{4} A^2 F \cdot \tilde{F} + \partial_\nu (G_4(A^2) A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}) - G_4(A^2) \left(\frac{1}{2} F_{\nu\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right). \quad (297)
\end{aligned}$$

La identidad de Bianchi $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$ lo que lleva a concluir que $\tilde{F}^{\nu\mu}$ y sin divergencia. La conclusión final es, por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{4,A}^{\text{Gal,bis}} \equiv \frac{g_4(A^2)A^2 + 2G_4(A^2)}{4} F \cdot \tilde{F} + \partial_\nu (G_4(A^2) A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}), \quad (298)$$

donde el primer término pertenece a $\mathcal{L}_{2,A}^{\text{Gal}}$ y el segundo puede descartarse ya que es una derivada total. La generalización a un espacio-tiempo curvo de este resultado todavía se aplica debido a la identidad de Bianchi del tensor de Riemann que garantiza que $\tilde{F}^{\mu\nu}$ sigue siendo sin divergencia.

Apéndice B. Ecuaciones de campo gravitacional

A continuación se mostrará los detalles del cálculo de las ecuaciones de campo para el modelo:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} + \alpha \mathcal{L}_4^1 \right], \quad (299)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^1 = & A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\beta}^\beta A^{a\pi}{}_{;\pi} - A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\sigma}^\lambda A_\lambda^{a;\sigma} + \frac{1}{4} A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\gamma A_a^\gamma R \\ & + 2A_a^\alpha A_\alpha^b A_{;\beta}^{a\beta} A_{b;\pi}^\pi - 2A_a^\alpha A_\alpha^b A^{b\lambda}{}_{;\sigma} A_{b\lambda}{}^{;\sigma} + A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R. \end{aligned} \quad (300)$$

S resalta de manera explícita las contracciones entre los índices espacio-temporales solamente con fines prácticos para el cálculo de las variaciones.

La variación de la acción en la ecuación (299) a primer orden es:

$$\delta \mathcal{S} = \delta \left(\int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_p^2}{2} R \right) - \delta \left(\int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} \right) + \delta \left(\int d^4x \sqrt{-g} \alpha \mathcal{L}_4^1 \right). \quad (301)$$

A continuación se mostrara la variación de los términos relevantes para encontrar las ecuaciones de campo, como resultado de la variación de la acción de la ecuación.

Variación: $\delta g_{\mu\nu}$ y $\delta g^{\mu\nu}$

Para encontrar la variación del tensor métrico doblemente covariante y doblemente contravariante, se parte de la definición: $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ y se calcula su variación:

$$\begin{aligned}\delta(g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu}) &= 0 \\ \delta g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} + g_{\mu\sigma}\delta g^{\sigma\nu} &= 0 \\ \delta g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} &= -g_{\mu\sigma}\delta g^{\sigma\nu} \text{ (se multiplica por } g_{\lambda\nu}\text{)} \\ g_{\lambda\nu}g^{\sigma\nu}\delta g_{\mu\sigma} &= -g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma}\delta g^{\delta\nu}\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta g_{\mu\lambda} = -g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma}\delta g^{\sigma\nu}} \quad (302)$$

Realizando un procedimiento similar se obtiene

$$\boxed{\delta g^{\lambda\nu} = -g^{\lambda\mu}g^{\sigma\nu}\delta g_{\mu\sigma}} \quad (303)$$

Variación: δg

Se tiene la métrica $g_{\mu\nu}$, por lo que su inversa se puede escribir como:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \mathcal{A}^{\nu\mu},$$

donde g es el determinante de métrica y $\mathcal{A}^{\nu\mu}$ es la matriz de cofactores de $g_{\mu\nu}$, por lo tanto:

$$g = g_{\mu\nu}\mathcal{A}^{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \mathcal{A}^{\mu\nu} \Rightarrow \mathcal{A}^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}.$$

En consecuencia, si se varia la g se obtiene

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \mathcal{A}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

de lo que resulta,

$$\boxed{\delta g = gg^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}} \quad (304)$$

Variación: $\delta(\sqrt{-g})$

Para encontrar esta variación se procede de la siguiente forma:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2\sqrt{-g}} gg^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Utilizando el resultado de la ecuación (302), la anterior expresión se puede escribir como:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g_{\mu\sigma}\delta g^{\sigma\rho}.$$

Simplificando la anterior expresión se obtiene

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (305)$$

Variación: $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$

Se parte de la definición del símbolo de Cristoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (306)$$

Al variar el simbolo de Christoffel se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\ &+ \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}). \end{aligned} \quad (307)$$

Con ayuda de la siguiente contracción del símbolo de Christoffel de la ecuación (306):

$$g_{\sigma\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}, \quad (308)$$

y el resultado en la ecuación (303), la variación de la ecuación (307) se puede escribir como:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma} - 2\delta g_{\sigma\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}) \quad (309)$$

Por conveniencia, se hallan las derivadas covariantes de las variaciones de la métrica, calculadas respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\delta g_{\mu\sigma;\nu} = \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\mu} \quad (310)$$

$$\delta g_{\nu\sigma;\mu} = \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\nu} \quad (311)$$

$$\delta g_{\mu\nu;\sigma} = \delta g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \delta g_{\lambda\mu} \quad (312)$$

Reemplazando las tres expresiones anteriores en la ecuación (309), se obtiene

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\delta g_{\mu\sigma;\nu} - \delta g_{\nu\sigma;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}) \quad (313)$$

Debido a que las variaciones se tomarán respecto a $\delta g^{\mu\nu}$, se utilizan las expresiones en las ecuaciones (302) y (303) en la ecuación anterior, por lo que resulta

$$\boxed{\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\frac{1}{2} (g_{\mu\gamma} \delta g^{\gamma\lambda}{}_{;\nu} + g_{\nu\gamma} \delta g^{\gamma\lambda}{}_{;\mu} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta;\lambda})} \quad (314)$$

Variación: $\delta R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu}$, $\delta R_{\mu\nu}$ y δR

El tensor de Riemann se define como

$$R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} \equiv \Gamma_{\mu\nu,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}. \quad (315)$$

La variación del tensor de Riemann resulta en

$$\delta R^\rho{}_{\mu\lambda\nu} = \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} - \delta\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \quad (316)$$

Ahora se procede a calcular las derivadas covariantes de las variaciones de los símbolos de Christoffel de la ecuación (314),

$$\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu;\lambda} = \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}. \quad (317)$$

$$\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda;\nu} = \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}. \quad (318)$$

Realizando la resta de la ecuación (318) de la ecuación (317), se obtiene justamente la ecuación (316). De esta manera se obtiene una expresión para la variación del tensor de Riemann, más adecuada:

$$\boxed{\delta R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu} = \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu;\sigma} - \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma;\nu}.} \quad (319)$$

Ahora, para determinar la variación del tensor de Ricci, se utiliza la siguiente definición para éste:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (320)$$

por lo que su variación se puede escribir a partir de la contracción de uno de los índices del resultado

de la ecuación (319), de lo que resulta:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu;\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda;\nu} \quad (321)$$

En el caso del escalar de Ricci, se parte de la definición de éste

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (322)$$

por lo que su variación se puede escribir como

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (323)$$

Variación: $\delta\mathcal{S}_{EH}$

La acción de Einstein-Hilbert se define como

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_p^2}{2} R. \quad (324)$$

Aplicando la variación a primer orden a la acción anterior se obtiene

$$\delta\mathcal{S}_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \left[\int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R + \int d^4x \sqrt{-g} \delta R \right] \quad (325)$$

con ayuda de las ecuaciones (305), (314), (321) y (323) la variación anterior se puede escribir como:

$$\delta \mathcal{S}_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \left[\int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right]. \quad (326)$$

Sin embargo, del ultimo término se tiene

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\delta \Gamma_{\mu\nu;\lambda}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\mu\lambda;\nu}^{\lambda} \right] &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta \Gamma^{\lambda\nu}{}_{\nu;\lambda} - \delta \Gamma^{\lambda\nu}{}_{\lambda;\nu} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta \Gamma^{\lambda\nu}{}_{\nu} - \delta \Gamma^{\nu\lambda}{}_{\nu} \right]_{;\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} W^{\lambda}{}_{;\lambda}, \end{aligned} \quad (327)$$

donde $W^{\lambda} = \delta \Gamma^{\lambda\nu}{}_{\nu} - \delta \Gamma^{\nu\lambda}{}_{\nu}$. Si W^{λ} es un campo vectorial sobre una región \mathcal{M} con frontera Σ , el teorema de Stokes aplicado a este campo vectorial es:

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} W^{\lambda}{}_{;\lambda} = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} n_{\lambda} W^{\lambda}, \quad (328)$$

en donde n_{ν} es un vector normal a la hipersuperficie Σ . Esta ecuación es una integral con respecto al elemento de volumen de la divergencia covariante de un vector. Usando el teorema de Stokes, esto es igual a una contribución en la frontera en el infinito que se puede ajustar a cero. Por lo tanto, este término no contribuye en nada a la variación total:

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (329)$$

De esta manera, la variación en la ecuación (326) se puede escribir como

$$\delta \mathcal{L}_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (330)$$

donde lo que se encuentra dentro de los paréntesis es el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \quad (331)$$

Variación: $\delta \mathcal{L}_{YM}$

La acción de Yang-Mill se define como

$$\mathcal{L}_{YM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right). \quad (332)$$

Aplicando la variación a primer orden a la acción anterior se obtiene

$$\delta \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \left[\int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) \right]. \quad (333)$$

La variación del término de Yang-Mills se puede determinar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\delta(F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}) &= \frac{\partial(g^{\sigma\alpha} g^{\gamma\beta} F_{\alpha\beta}^a F_{a\sigma\gamma})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\
&= (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\alpha g^{\gamma\beta} + \delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\beta g^{\sigma\alpha}) F_{\alpha\beta}^a F_{a\sigma\gamma} \delta g^{\mu\nu} \\
&= (g^{\gamma\beta} F_{\nu\beta} F_{\mu\gamma} + g^{\sigma\alpha} F_{\alpha\nu} F_{a\sigma\mu}) \delta g^{\mu\nu} \\
&= 2g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{a\nu\beta} \delta g^{\mu\nu}. \tag{334}
\end{aligned}$$

En consecuencia, con ayuda de la ecuación (305) y el resultado anterior, la variación en la ecuación (333) se puede escribir como:

$$\delta \mathcal{S}_{YM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{a\nu\beta} \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \tag{335}$$

Variación: $\delta \mathcal{S}_4^1$

La acción del Lagrangiano \mathcal{L}_4^1 es definido como

$$\mathcal{S}_4^1 = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_4^1. \tag{336}$$

La variación de esta acción, con ayuda de la ecuación (305), es

$$\delta \mathcal{S}_4^1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_4^1 \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \delta(\mathcal{L}_4^1), \tag{337}$$

donde \mathcal{L}_4^1 es como se define en la ecuación (300). Se definen Lagrangianos individuales de la siguientes manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{1(1)} &= A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\beta}^\beta A^{a\pi};\pi \\
\mathcal{L}_4^{1(2)} &= A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\sigma}^\lambda A_\lambda^{a;\sigma} \\
\mathcal{L}_4^{1(3)} &= \frac{1}{4} A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\gamma A_\gamma^a R \\
\mathcal{L}_4^{1(4)} &= 2A_a^\alpha A_\alpha^b A_{;\beta}^{a\beta} A_{b;\pi}^\pi \\
\mathcal{L}_4^{1(5)} &= 2A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\lambda};\sigma A_{b\lambda};\sigma \\
\mathcal{L}_4^{1(6)} &= A_a^\alpha A_\gamma^b A^{a\gamma} A_{b\alpha} R
\end{aligned} \tag{338}$$

Se procede a calcular la variación respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$ de cada uno de los Lagrangianos individuales presentados en la ecuación anterior.

$\delta\mathcal{L}_4^{1(1)}$. La variación de este término respecto a la métrica se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\delta\left(\mathcal{L}_4^{1(1)}\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = \delta\left(g^{\alpha k} A_{bk} A_\alpha^b g^{\beta\theta} A_{a\theta;\beta} g^{\pi\tau} A_{\tau;\pi}^a\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(A_{b\mu} A_\nu^b A_{a;\beta}^\beta A^{a\pi};\pi + A_b^\alpha A_\alpha^b (A_{\mu;\nu}^a + A_{\nu;\mu}^a) A_{a;\pi}^\pi\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + 2A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\theta} \delta(A_{a\theta;\beta}) A^{a\pi};\pi.
\end{aligned} \tag{339}$$

Ahora es necesario determinar la forma en que se varia el término de la ultima linea en la ecuación anterior respecto a la métrica. La derivada covariante de un campo vectorial se puede escribir como:

$$A_{\lambda;w}^a = A_{\lambda,w}^a - \Gamma_{w\lambda}^k A_k^a, \quad (340)$$

por lo tanto la variación respecto a la métrica sólo afectara al símbolo de Christoffel, Γ ; en consecuencia

$$\delta(A_{\lambda;w}^a) = -\delta\Gamma_{w\lambda}^k A_k^a, \quad (341)$$

donde la variación del simbolo de Christoffel es como se muestra en la ecuación (314). En consecuencia, se puede escribir:

$$\begin{aligned} A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\theta} \delta(A_{a\theta;\beta}) A^{a\pi}{}_{;\pi} = & \frac{1}{2} \left(A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\theta} g_{\beta\gamma} \delta g^{\gamma\lambda}{}_{;\theta} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right. \\ & + A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\theta} g_{\theta\gamma} \delta g^{\gamma\lambda}{}_{;\beta} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \\ & \left. - A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\theta} g_{\beta\rho} g_{\theta\sigma} \delta g^{\sigma\rho;\lambda} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right). \end{aligned} \quad (342)$$

Realizando contracciones de índices se obtiene

$$A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\theta} \delta(A_{a\theta;\beta}) A^{a\pi}{}_{;\pi} = A_b^\alpha A_\alpha^b \delta g^{\gamma\lambda}{}_{;\gamma} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} - \frac{1}{2} A_b^\alpha A_\alpha^b g_{\rho\sigma} \delta g^{\sigma\rho;\lambda} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi}, \quad (343)$$

pudiéndose escribir los dos términos del miembro derecho de la anterior ecuación como:

$$A_b^\alpha A_\alpha^b \delta g^{\gamma\lambda}{}_{;\gamma} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} = \left[A_b^\alpha A_\alpha^b \delta g^{\gamma\lambda} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]_{;\gamma} - \delta g^{\gamma\lambda} \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]_{;\gamma}, \quad (344)$$

$$A_b^\alpha A_\alpha^b g_{\rho\sigma} \delta g^{\sigma\rho}{}_{;\lambda} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} = \left[A_b^\alpha A_\alpha^b g_{\rho\sigma} \delta g^{\sigma\rho} A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]^{;\lambda} - \delta g^{\sigma\rho} g_{\sigma\rho} \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]^{;\lambda}. \quad (345)$$

Los términos dentro de los parentesis, $[\dots]_{;\gamma}$ y $[\dots]^{;\lambda}$ al reemplazarlos en la variación de la acción en (337) y aplicando el teorema de Stokes como en la ecuación (328), estos términos se pueden tomar para que sean cero, de esta manera las variaciones de las métricas, $\delta g^{\gamma\lambda}$ y $g^{\sigma\rho}$ se pueden expresar como:

$$g^{\gamma\lambda} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\lambda} + g^{\lambda\gamma}) \Rightarrow \delta g^{\gamma\lambda} = \frac{1}{2}(\delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\lambda + \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\gamma) \delta g^{\mu\nu}, \quad (346)$$

$$g^{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(g^{\sigma\rho} + g^{\rho\sigma}) \Rightarrow \delta g^{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho + \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma) \delta g^{\mu\nu}, \quad (347)$$

Al reemplazar las expresiones (346) y (347) en (343) y (345) respectivamente, seguidamente se incluyen dentro de la expresión en (343), y realizando algunas contracciones y cambios de índices, la variación de $\mathcal{L}_4^{1(1)}$ se puede escribir como:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} = A_{b\mu} A_\nu^b A_{a;\beta}^\beta A^{a\pi}{}_{;\pi} + A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu;\nu} A^{a\pi}{}_{;\pi} + A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\nu;\mu} A^{a\pi}{}_{;\pi} - \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\nu} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]_{;\mu} - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]_{;\nu} + g_{\mu\nu} \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\lambda} A^{a\pi}{}_{;\pi} \right]^{;\lambda}. \quad (348)$$

Estos procedimiento aquí mostrados se seguirán para encontrar las demás variaciones de los Lagrangianos individuales. Cabe resaltar que el único término que necesita un calculo diferente es el asociado con el acoplamiento no mínimo a la gravedad, es decir, los dos acoples de la forma: $A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\gamma A_\gamma^a R$. En este caso es necesario, al momento de encontrar la variación de δR , que ésta se escriba de la siguiente forma:

$$\delta R = R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta;\pi}_{;\pi}, \quad (349)$$

en consecuencia, de los términos acoplados al escalar de Ricci se obtienen las ecuaciones de campo siguiendo el mismo procedimiento mostrado en las ecuaciones (342)-(345.)

$\mathcal{L}_4^{1(2)}$. La variación respecto a la métrica de este término es:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = A_\mu^b A_{b\nu} A_{a;\sigma}^\lambda A_\lambda^{a;\sigma} + A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu;\sigma} A_\nu^{a;\sigma} + A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\mu}^\lambda A_{\lambda;\nu}^a + \frac{1}{2} \left(- \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\mu}^\lambda A_\nu^a \right]_{;\lambda} - \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\nu}^\lambda A_\mu^a \right]_{;\lambda} - \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu}^{;\omega} A_\nu^a \right]_{;\omega} - \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\nu}^{;\omega} A_\mu^a \right]_{;\omega} + \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\mu;\nu} A_\kappa^a \right]^{;\kappa} + \left[A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a\nu;\mu} A_\kappa^a \right]^{;\kappa} \right) \quad (350)$$

$\delta \mathcal{L}_4^{1(3)}$. La variación respecto a la métrica de este término es:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{4} \left[2A_{b\mu} A_\nu^b A_a^\beta A_\beta^a R + A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\beta A_\beta^a R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left(A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\beta A_\beta^a \right)_{;\pi} - \left(A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^\beta A_\beta^a \right)_{;\mu\nu} \right] \quad (351)$$

$\delta \mathcal{L}_4^{1(4)}$. La variación respecto a la métrica de este término es:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left(A_{a\nu} A_\mu^b A^{a\beta} A_{b;\pi}^\pi + A_a^\alpha A_\alpha^b A_\nu^a A_{b;\pi}^\pi + A_a^\alpha A_\alpha^b A_{\mu;\nu}^a A_{b;\pi}^\pi \right. \\ \left. - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\mu^a A_{b;\pi}^\pi \right]_{;\nu} - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\nu^a A_{b;\pi}^\pi \right]_{;\mu} + g_{\mu\nu} \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\kappa^a A_{b;\pi}^\pi \right]^{;\kappa} \right) \quad (352)$$

$\delta \mathcal{L}_4^{1(5)}$. La variación respecto a la métrica de este término es:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left(A_{a\nu} A_\mu^b A^{a\lambda}{}_{;\sigma} A_{b\lambda}{}^{;\sigma} + A_a^\alpha A_\alpha^b A_\nu^a A_{b\mu}{}^{;\sigma} + A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\lambda}{}_{;\mu} A_{b\lambda}{}_{;\nu} \right) \\ - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\nu^a A_{b;\mu}^\kappa \right]_{;\kappa} - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\mu^a A_{b;\nu}^\kappa \right]_{;\kappa} - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\nu^a A_{b\mu}{}^{;\sigma} \right]_{;\sigma} \\ - \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\mu^a A_{b\nu}{}^{;\sigma} \right]_{;\sigma} + \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\lambda^a A_{b\mu;\nu} \right]^{;\lambda} + \left[A_a^\alpha A_\alpha^b A_\lambda^a A_{b\nu;\mu} \right]^{;\lambda} \quad (353)$$

$\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}$. La variación respecto a la métrica de este término es:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left(A_{a\nu} A_\mu^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R \right) + A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left(A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} \right)_{;\pi} \\ - \left(A_a^\alpha A_\alpha^b A^{a\gamma} A_{b\gamma} \right)_{;\mu\nu} \quad (354)$$

Apéndice C. Ecuaciones de evolución para los campos A_μ^a

Término: \mathcal{L}_{YM}

La acción asociada a este término es como se muestra en la ecuación (332), en consecuencia, la variación respecto a: A_μ^a y $\delta(A_\mu^a)$ se escribe como:

$$\delta(\mathcal{L}_{YM}) = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_\mu^a} [F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}] \delta A_\mu^a + \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} [F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}] \delta (\partial_\nu A_\mu^a) \right\}. \quad (355)$$

Se calculan cada uno de los términos de la variación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_\mu^a} [F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}] &= \frac{\partial}{\partial A_\mu^a} [g^{\alpha\pi} g^{\beta\theta} F_{\alpha\beta}^b F_{b\pi\theta}] \\ &= g^{\alpha\pi} g^{\beta\theta} \left[-g \varepsilon^b{}_{cd} \delta_a^c \delta_\mu^\alpha A_\beta^d F_{\pi\theta}^b - g \varepsilon^b{}_{cd} \delta_a^d \delta_\mu^\beta A_\alpha^c F_{\pi\theta}^b \right. \\ &\quad \left. - g \varepsilon^b{}_{ef} \delta_a^e \delta_\mu^\pi A_\theta^f F_{\alpha\beta}^b - g \varepsilon^b{}_{ef} \delta_a^f \delta_\mu^\theta A_\pi^e F_{\mu\beta}^b \right] \\ &= -g \left[\varepsilon^b{}_{ad} A_\beta^d F_b^{\mu\beta} + \varepsilon^b{}_{ca} A_\alpha^c F_b^{\alpha\mu} + \varepsilon^b{}_{af} A_\theta^f F_b^{\mu\theta} + \varepsilon^b{}_{ea} A_\pi^e F_b^{\pi\mu} \right], \end{aligned} \quad (356)$$

lo cual, después de realizar un cambio de índices, resulta en:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial A_\mu^a} [F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}] = -4g \varepsilon^b{}_{ad} A_\beta^d F_b^{\mu\beta}.} \quad (357)$$

Se procede a calcular el segundo término de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} [F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}] &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} [g^{\alpha\pi} g^{\beta\theta} F_{\alpha\beta}^b F_{b\pi\theta}] \\
&= g^{\alpha\pi} g^{\beta\theta} [(\delta_\alpha^\nu \delta_a^b \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\nu \delta_a^b \delta_\alpha^\mu) F_{\pi\theta}^b + (\delta_\pi^\nu \delta_a^b \delta_\theta^\mu - \delta_\theta^\nu \delta_a^b \delta_\pi^\mu) F_{\alpha\beta}^b] \\
&= F_a^{\nu\mu} - F_a^{\mu\nu} + F_a^{\nu\mu} - F_a^{\mu\nu} = -4F_a^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{358}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)} [F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}] = -4F_a^{\mu\nu}} \tag{359}$$

Al reemplazar los resultados: (357) y (359), en la ecuación (355) se obtiene:

$$\mathcal{S}_{YM} = \int d^4x \sqrt{-g} [g \varepsilon^b{}_{ad} A_\beta^d F_b^{\mu\nu} \delta A_\mu^a + F_a^{\mu\nu} \delta(\partial_\nu A_\mu^a)] = 0, \tag{360}$$

donde se puede utilizar la propiedad de que: $\delta(A_{\mu,\nu}^a) = (\delta A_\mu^a)_{,\nu}$. Se define la siguiente derivada covariante:

$$[F_a^{\mu\nu} \delta A_\mu^a]_{;\nu} = (F_a^{\mu\nu} \delta A_\mu^a)_{,\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu F_a^{\mu\lambda} \delta A_\mu^a \tag{361}$$

Se utiliza la propiedad del símbolo de Christoffel: $\Gamma_{\nu\lambda}^\nu = \frac{(\sqrt{-g})_{,\lambda}}{\sqrt{-g}}$.

$$F_a^{\mu\nu} (\delta A_\mu^a)_{,\nu} = [F_a^{\mu\nu} \delta A_\mu^a]_{;\nu} - (F_a^{\mu\nu})_{,\nu} \delta A_\mu^a - \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g})_{,\lambda} F_a^{\mu\lambda} \delta A_\mu^a \tag{362}$$

El término $[F_a^{\mu\nu} \delta A_\mu^a]_{;v}$ es la divergencia de un campo vectorial, por lo que al aplicar el teorema de Stokes se puede tomar como cero. Por lo tanto, el término resultante es:

$$\mathcal{S}_{YM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g \epsilon^b{}_{ad} A_\beta^d F_b^{\mu\beta} - (F_a^{\mu\nu})_{;v} - \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g})_{;\lambda} F_a^{\mu\lambda} \right] \delta A_\mu^a \quad (363)$$

Términos: \mathcal{L}_4^1

A continuación determinamos la variación respecto al campo vectorial y su derivada para cada uno de los Lagrangianos en la ecuación (338).

$\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}$. La variación respecto al campo vectorial y su derivada es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial (A_{\mu,v}^a)} \delta (A_{\mu,v}^a) \right] \quad (364)$$

Empezaremos calculando $\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial A_\mu^a}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial A_\mu^a} = & g^{\alpha\theta} (\delta_a^c \delta_\mu^\theta A_\alpha^c + A_{c\theta} \delta_a^c \delta_\nu^\alpha) A_{b;\beta}^\beta A_{;\pi}^{b\pi} + \\ & g^{\beta\lambda} g^{\pi\kappa} A_c^\alpha A_\alpha^c (-\gamma_{\beta\lambda}^\omega \delta_a^b \delta_\mu^\omega A_{\kappa;\pi}^b - \gamma_{\pi\kappa}^\lambda \delta_a^b \delta_\mu^\lambda A_{b\lambda;\beta}) \end{aligned} \quad (365)$$

Realizando los cambio de índices respectivos con ayuda de los δ_μ^a , la anterior expresión se reduce a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial A_\mu^a} = (g^{\alpha\mu} A_\alpha^a + g^{\mu\theta} A_{a\theta}) A_{b;\beta}^\beta A_{;\pi}^{b\pi} - A_c^\alpha A_\alpha^c (g^{\beta\lambda} \gamma_{\beta\lambda}^\mu A_{;\pi}^{a\pi} + g^{\pi\kappa} \gamma_{\pi\kappa}^\mu A_{a;\beta}^\beta) \quad (366)$$

Reduciendo índices mudos, la anterior expresión se puede simplificar a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial A_\mu^a} = 2A_a^\mu A_{b;\beta}^\beta A_{;\pi}^{b\pi} - 2A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\lambda} \gamma_{\beta\lambda}^\mu A_{a;\pi}^\pi \quad (367)$$

Se procede a calcular $\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial (A_{\mu,\nu}^a)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial (A_{\mu,\nu}^a)} &= g^{\beta\lambda} g^{\pi\kappa} A_c^\alpha A_\alpha^c (\delta_a^b \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\beta A_{\kappa;\pi}^b + A_{b\lambda;\beta} \delta_a^b \delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\pi) \\ &= A_b^\alpha A_\alpha^b (g^{\nu\mu} A_{a;\pi}^{a\pi} + g^{\nu\mu} A_{a;\beta}^\beta) \\ &= 2A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\mu\nu} A_{a;\pi}^\pi \end{aligned} \quad (368)$$

A partir de las ecuaciones (367) y (368) la variación de la acción $\mathcal{S}_4^{1(1)}$, respecto al campo vectorial y sus derivadas, se puede escribir como:

$$\delta \mathcal{S}_4^{1(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[(2A_a^\mu A_{b;\beta}^\beta A_{;\pi}^{b\pi} - 2A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\lambda} \gamma_{\beta\lambda}^\mu A_{a;\pi}^\pi) \delta(A_\mu^a) + 2A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\mu\nu} A_{a;\pi}^\pi \delta(A_{\mu,\nu}^a) \right], \quad (369)$$

donde se puede utilizar la propiedad de que: $\delta(A_{\mu,\nu}^a) = (\delta A_{\mu}^a)_{,\nu}$. Definimos el tensor $M_a^{\mu\nu} = A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\mu\nu} A_{a;\pi}^\pi$ y determinamos la siguiente derivada covariante:

$$\left[M_a^{\mu\nu} \delta A_{\mu}^a \right]_{;\nu} = (M_a^{\mu\nu})_{,\nu} \delta A_{\mu}^a + M_a^{\mu\nu} (\delta A_{\mu}^a)_{,\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} M_a^{\mu\lambda} \delta A_{\mu}^a \quad (370)$$

Se utiliza la propiedad del símbolo de Christoffel: $\Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} = \frac{(\sqrt{-g})_{,\lambda}}{\sqrt{-g}}$.

$$M_a^{\mu\nu} (\delta A_{\mu}^a)_{,\nu} = \left[M_a^{\mu\nu} \delta A_{\mu}^a \right]_{;\nu} - (M_a^{\mu\nu})_{,\nu} \delta A_{\mu}^a - \frac{(\sqrt{-g})_{,\lambda} M_a^{\mu\lambda}}{\sqrt{-g}} \delta A_{\mu}^a \quad (371)$$

Al reemplazar la anterior expresión en la ecuación (369), podemos aplicar el teorema de Stokes al término:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[M_a^{\mu\nu} \delta A_{\mu}^a \right]_{;\nu} = \int_{\sigma} d^3x \sqrt{-g} n_{\nu} M_a^{\mu\nu} \delta A_{\mu}^a, \quad (372)$$

en donde n_{ν} es un vector normal a la hipersuperficie σ . Esta ecuación es una integral con respecto al elemento de volumen de la divergencia covariante de un vector. Usando el teorema de Stokes, esto es igual a una contribución en la frontera en el infinito que se puede ajustar a cero por la desaparición de la variación en el infinito.

Así, la variación resultante es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[2 \left(A_a^\mu A_{b;\beta}^\beta A^{b\pi} - A_b^\alpha A_\alpha^b g^{\beta\lambda} \gamma_{\beta\lambda}^\mu A_{a;\pi}^\pi - (M_a^{\mu\nu})_{,\nu} - \frac{(\sqrt{-g})_{,\lambda} M_a^{\mu\lambda}}{\sqrt{-g}} \right) \right] \delta A_\mu^a \quad (373)$$

donde $M_a^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} A_b^\alpha A_\alpha^b A_{a;\pi}^\pi$.

$\delta \mathcal{L}_4^{1(2)}$. La variación respecto al campo vectorial y su derivada es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\partial (A_{\mu,\nu}^a)} \delta (A_{\mu,\nu}^a) \right]. \quad (374)$$

Siguiendo el mismo procedimiento mostrado en la sección 3, el resultado de la variación de la ecuación anterior es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[2 \left(A_a^\mu A_{b;\pi}^\lambda A^{b;\pi} - A_b^\alpha A_\alpha^b \gamma_{\kappa\omega}^\mu A_a^{\omega;\kappa} - (N_a^{\mu\nu})_{,\nu} - \frac{(\sqrt{-g})_{,\lambda} N_a^{\mu\lambda}}{\sqrt{-g}} \right) \right] \delta A_\mu^a \quad (375)$$

donde $N_a^{\mu\nu} \equiv A_b^\alpha A_\alpha^b A_a^{\mu;\nu}$.

$\delta \mathcal{L}_4^{1(3)}$. La variación respecto al campo vectorial y su derivada es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(3)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a \right], \quad (376)$$

ya que este término no depende de las derivadas de los campos vectoriales. En consecuencia, el resultado de la variación anterior es:

$$\boxed{\delta \mathcal{L}_4^{1(3)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[A_a^\mu A_b^\beta A_\beta^b R \right] \delta A_\mu^a.} \quad (377)$$

$\delta \mathcal{L}_4^{1(4)}$. La variación respecto al campo vectorial y su derivada es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\partial (A_{\mu,\nu}^a)} \delta (A_{\mu,\nu}^a) \right]. \quad (378)$$

Siguiendo el mismo procedimiento mostrado en la sección 3, el resultado de la variación de la ecuación anterior es:

$$\boxed{\delta \mathcal{L}_4^{1(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[4 \left(A_b^\mu A_{;\pi}^{b\pi} A_{a;\beta}^\beta - g^{\beta\lambda} A_a^\alpha A_\alpha^b A_{b;\pi}^\pi \gamma_{\beta\lambda}^\mu - (P_a^{\mu\nu})_{,\nu} - \frac{(\sqrt{-g})_{,\lambda} P_a^{\mu\lambda}}{\sqrt{-g}} \right) \right] \delta A_\mu^a} \quad (379)$$

donde $P_a^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} A_a^\alpha A_\alpha^b A_{b;\pi}^\pi$.

$\delta \mathcal{L}_4^{1(5)}$. La variación respecto al campo vectorial y su derivada es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(5)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\partial (A_{\mu,\nu}^a)} \delta (A_{\mu,\nu}^a) \right]. \quad (380)$$

Siguiendo el mismo procedimiento mostrado en la sección 3, el resultado de la variación de

la ecuación anterior es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(5)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[4 \left(A^{b\mu} A_{b\lambda}{}^{;\sigma} A_a^\lambda{}_{;\sigma} - A_a^\alpha A_{\alpha b} A_b^{\kappa;\sigma} \gamma_{\sigma\kappa}^\mu - (Q_a^{\mu\nu})_{, \nu} - \frac{(\sqrt{-g})_{, \lambda} Q_a^{\mu\lambda}}{\sqrt{-g}} \right) \delta A_\mu^a \right] \quad (381)$$

donde $Q_a^{\mu\nu} \equiv A_a^\alpha A_{\alpha b} A_b^{\mu;\nu}$.

$\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}$. La variación respecto al campo vectorial y su derivada es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(6)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a \right], \quad (382)$$

ya que este término no depende de las derivadas de los campos vectoriales. En consecuencia, el resultado de la variación anterior es:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(6)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[4 A_b^\mu A^{b\alpha} A_{a\alpha} R \right] \delta A_\mu^a. \quad (383)$$

Apéndice D. Existencia del comportamiento asintótico

\mathcal{L}_4^1

La existencia de un comportamiento asintótico por parte del sistema autónomo es dada por

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \beta y, \\y &\rightarrow \infty, \\ \text{cuando } N &\rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{384}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$. A partir de lo anterior, es sencillo notar que: $x' = \beta y'$ y a partir de las ecuaciones (253) y (254), que en el límite asintótico ($y \rightarrow \infty$) se cumple:

$$0 = \frac{p}{\beta y \sqrt{2}} + \varepsilon - \beta \rightarrow 0 = \frac{145\beta^3 - 2781\beta^2 + 570\beta + 176}{327\beta}.\tag{385}$$

La segunda condición resulta de la restricción de Fridmann, en donde $z^2 > 0$, esto con el fin de obtener un comportamiento del parámetro de Hubble real y positivo, $H > 0$. Por lo tanto, a partir de la ecuación (248) el comportamiento de z^2 en el límite asintótico resulta es

$$z^2 \rightarrow \sqrt{-2\alpha(5\beta^2 - 94\beta - 16)} > 0.\tag{386}$$

Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (385) y (386) se encuentra que

$$\alpha > 0 \quad \text{y} \quad \beta = \frac{11}{29}. \quad (387)$$

$$\mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_4^2 + \mathcal{L}_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$$

La existencia de un comportamiento asintótico por parte del sistema autónomo es dada por

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \beta y, \\ y &\rightarrow \infty, \\ \text{cuando } N &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (388)$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$. A partir de las ecuaciones (286) y (288), que en el límite asintótico ($y \rightarrow \infty$) se cumple:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{\beta y \sqrt{2}} + \varepsilon - \beta \\ 0 &= \frac{1}{\beta (2289\alpha^2 + 1584\alpha\Theta + 516\alpha\kappa + 256\Theta^2 + 176\Theta\kappa + 31\kappa^2)} \times \\ &\quad \left[7\alpha^2 (145\beta^3 - 2781\beta^2 + 570\beta + 176) + 16\alpha (20\beta^3 - 777\beta^2 - 207\beta + 61) \Theta \right. \\ &\quad \left. - 6\alpha (53\beta^3 - 704\beta^2 - 277\beta + 53) \kappa + 256 (8\beta^2 + 6\beta + 1) \Theta^2 \right. \\ &\quad \left. + 16 (4\beta^3 - 85\beta^2 - 75\beta - 15) \Theta\kappa + (23\beta^3 - 221\beta^2 - 228\beta - 54) \kappa \right]. \end{aligned} \quad (389)$$

La segunda condición resulta de la restricción de Fridmann, en donde $z^2 > 0$ y a partir de la ecuación (283) el comportamiento de z^2 en el límite asintótico resulta en

$$z^2 \rightarrow 2(\alpha(-5\beta^2 + 94\beta + 16) + (-\beta^2 + 10\beta + 6)\kappa + 16(2\beta + 1)\Theta) > 0. \quad (390)$$

Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (389) y (390) se encuentra que

$$\alpha > 0, \Theta > 0, \kappa > 0 \quad \text{y} \quad \beta = \frac{77\alpha - 16\Theta - 9\kappa}{203\alpha + 64\Theta + 23\kappa}. \quad (391)$$

Apéndice E. Soluciones numéricas

A continuación se muestra el código implementado en Mathematica® para la solución numérica y construcción de las figuras: 13, 14, 15, 19 y 21. Es importante aclarar que los *label* de las diferentes figuras se implementó el paquete MaTeX.m para Mathematica®, el cual se puede encontrar en el siguiente link: <https://github.com/szhorvat/MaTeX>.

Solución numérica $L\frac{1}{4}$ para energía oscura

```
Quit[]
[detén núcleo del sistema]

Needs["MaTeX`"]
[necesita]

(*PacletInstall["~/Downloads/MaTeX-1.7.4.paclet"]*)
SetOptions[MaTeX, "Preamble" -> {"\\usepackage{amsmath,amssymb}",
[asigna opciones]
    "\\usepackage{txfonts}", "\\usepackage{eulervm,antpolt}",
    "\\usepackage{bm}" (*, "\\usepackage{ccfonts,eulervm}"*)}];

Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
[necesita]

Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];
[necesita]

Fehlbergamat = {{1/4}, {3/32, 9/32},
    {1932/2197, -7200/2197, 7296/2197}, {439/216, -8, 3680/513, -845/4104},
    {-8/27, 2, -3544/2565, 1859/4104, -11/40}};
Fehlbergbvec = {25/216, 0, 1408/2565, 2197/4104, -1/5, 0};
Fehlbergcvec = {1/4, 3/8, 12/13, 1, 1/2};
Fehlbergevec = {-1/360, 0, 128/4275, 2197/75240, -1/50, -2/55};
FehlbergCoefficients[4, p_] :=
    N[{Fehlbergamat, Fehlbergbvec, Fehlbergcvec, Fehlbergevec}, p];
[valor numérico]

Fehlberg45 = {"ExplicitRungeKutta", "Coefficients" -> FehlbergCoefficients,
    "DifferenceOrder" -> 4, "EmbeddedDifferenceOrder" -> 5, "StiffnessTest" -> False};
[orden de diferencias] [falso]
```

```

soln[x0_, y0_, α_] := NDSolve[
  [resolvedor diferencial numérico]
  {x'[t] == (10 α x[t]^3 y[t]^3 (51 + 406 α y[t]^2) + 2 (1 - y[t]^2 + 32 α y[t]^4) (-1 + 77 α y[t]^4) +
    3 x[t] (y[t] + 5320 α^2 y[t]^7 + 6 α y[t]^3 (-33 + 2 y[t]^2)) +
    x[t]^2 (2 + 2 α y[t]^2 (5 + 267 y[t]^2 - 34 356 α y[t]^4))) /
    (y[t] + 10 α y[t]^3 - 166 α y[t]^5 + 9156 α^2 y[t]^7),
  y'[t] == x[t],
  x[0] == x0, y[0] == y0}, {x, y}, {t, -100, 160},
  (*Method→{StiffnessSwitching, Method→{ExplicitRungeKutta, Automatic}}*)
  [método] [método] [automático]
  Method → Fehlberg45, PrecisionGoal → 40
  [método] [objetivo de precisión]
  (*,MaxSteps→1000000*)
  [máximo de pasos]
  (*Method→"StiffnessSwitching"*)
  [método]
]

Clear[α]
[borra]

α = 0.0075;

sol1 = soln[-0.1, 1.1982354975183969`, 0.0075]
(*el campos permanece constante (0.1,1.1982354975183969`,0.007)*)

sol2 = soln[0.05, 1.18, 0.0075]

sol3 = soln[1.6, 2.2, 0.0075]

```

Error residual

```

resix[t_] =
  x'[t] - ((10 α x[t]^3 y[t]^3 (51 + 406 α y[t]^2) + 2 (1 - y[t]^2 + 32 α y[t]^4) (-1 + 77 α y[t]^4) +
    3 x[t] (y[t] + 5320 α^2 y[t]^7 + 6 α y[t]^3 (-33 + 2 y[t]^2)) +
    x[t]^2 (2 + 2 α y[t]^2 (5 + 267 y[t]^2 - 34 356 α y[t]^4))) /
    (y[t] + 10 α y[t]^3 - 166 α y[t]^5 + 9156 α^2 y[t]^7));
resiy[t_] = y'[t] - (x[t]);

```

```

Plot[Evaluate[{resix[t] /. sol3}], {t, 0, 500}, PlotStyle -> {Black},
  [repr... [evalúa] [estilo de represe... [negro]
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 90}, {-10, 10}}]
  [origen de ejes] [rango de representación]
Plot[Evaluate[RealExponent[{resix[t] /. sol3}]], {t, 0, 500},
  [repr... [evalúa] [exponente de un real]
  PlotStyle -> {Black}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 100}, {-10, 10}}]
  [estilo de represe... [negro] [origen de ejes] [rango de representación]
Plot[Evaluate[RealExponent[{resiy[t] /. sol3}]], {t, 0, 500},
  [repr... [evalúa] [exponente de un real]
  PlotStyle -> {Red}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 60}, {-10, 10}}]
  [estilo de represe... [rojo] [origen de ejes] [rango de representación]
shadowbox[legend_] :=
  Graphics[{{Gray, Rectangle[{0.05, -0.05}, {1.05, 0.95}]}, {White, EdgeForm[Gray],
  [gráfico] [gris] [rectángulo] [blanco] [forma de b... [gris]
    Rectangle[]}, Inset[legend, {0.5, 0.5}, Center]}, ImageSize -> 90]
    [rectángulo] [encarte] [centro] [tamaño de imagen]

```

Variables

```
Show[Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol3], {t, 0, 70}, PlotRange → All,
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"", ""}, {"N", ""},
  PlotStyle →
    {{Thickness[0.006], Black}, {Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}}},
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
  },
    { (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["x"],
      (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["y"]
    },
    LegendFunction → "Frame", (*LegendLabel→MaTeX[
      "\\bm{(x_{0},y_{0})}", Magnification→1.7], *) LegendLayout → {"Row", 3},
      {0.7, 0.6}],
  RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500] (*,
  Plot[1.2297958594356906`, {t, 0, 90}] *)
]
```

```

Plot[Evaluate[{{ $\frac{11.}{29}$ , x[t] / y[t]} /. sol3}], {t, 0, 70}, PlotRange → All,
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"", ""}, {"N", ""},
  PlotStyle →
    {{Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.03, 0.018}]}, {Thickness[0.006], Black}},
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
  }, {
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\\frac{x}{y}"],
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\\beta=\\frac{11}{29}"]
  },
  LegendFunction → "Frame",
  (*LegendLabel→MaTeX["\\bm{(x_{0},y_{0})}"],Magnification→1.7),*)
  LegendLayout → {"Row", 3},
  {0.7, 0.5}],
  RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]

```

zf[t] =

$$\sqrt{\left(\frac{1}{y[t]^4} (1 - x[t]^2 - 2 x[t] y[t] - y[t]^2 - 10 \alpha x[t]^2 y[t]^2 + 188 \alpha x[t] y[t]^3 + 32 \alpha y[t]^4)\right)}$$

g = 2.472305581241777`*^-60;

$$hhoy = \frac{29 g}{\sqrt{42837} \sqrt{\alpha}}$$

4. × 10⁻⁶⁰

```

Plot[Evaluate[ $\left\{\frac{2g x[t]}{zf[t]}, \sqrt{2} y[t]\right\} /. sol3$ ], {t, 0, 70}, PlotRange → All,
  _repr... _evalúa
  _rango de repr... _todo

  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"", ""}, {"N", ""},
  _etiqueta de marco
  _magnificación
  _valor numérico

  PlotStyle → {{Thickness[0.006], Black},
  _estilo de represen... _grosor
  _negro

    {Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}}},
    _grosor
    _azul
    _especificación de rayado

  PlotLegends → Placed[LineLegend[{Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
  _leyendas de repr...
  _colocado
  _línea leyenda
  _directiva
  _negro
  _grosor absoluto

    Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
    _directiva
    _azul
    _grosor absoluto
    _especificación de rayado

  },
  { (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\\dot{\\psi}/M_{p}^{2}"],
  _magnificación
  _estilo

    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\\psi/M_{p}"]
    _magnificación
    _estilo

  },

  LegendFunction → "Frame",
  _función de leyenda
  _marco

  (*LegendLabel→MaTeX["\\bm{(x_{0},y_{0})}"],Magnification→1.7,*),
  _etiquete de leyenda
  _magnificación

  LegendLayout → {"Row", 3},
  _disposición de leyenda
  _fila

  {0.25, 0.6}],

  RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  _rota etiqueta
  _falso
  _estilo base
  _familia de tipo de l...
  _multiplic...
  _tamaño de tipo de letra

  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  _estilo de represen... _grosor
  _negro

  LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]
  _estilo de etiqueta
  _negro
  _marco
  _verd...
  _tamaño de imagen

```

Hubble

```

Plot[Evaluate[{h hoy,  $\frac{g \sqrt{2}}{zf[t]}$ } /. sol3], {t, 0, 70}, PlotRange → All,
  [repr... [evalúa [rango de repr... [todo
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.2] &) /@ {"N", ""},
  [etiqueta de marco [magnificación [valor numérico
  PlotStyle → {
  [estilo de representación
    {Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.03, 0.018}]},
    [grosor [rojo [especificación de rayado
    {Thickness[0.006], Black}},
    [grosor [negro
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{
  [leyendas de repr... [colocado [línea leyenda
    Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    [directiva [negro [grosor absoluto
    Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
    [directiva [rojo [grosor absoluto [especificación de rayado
  }, { (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\frac{H}{M_{p}}"],
  [magnificación [estilo
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@
    [magnificación
    Style["\frac{29 g}{\sqrt{42837 \alpha}}"],
    [estilo
    LegendFunction → "Frame", LegendLayout → {"Row", 3}], {0.6, 0.6}],
    [función de leyenda [marco [disposición de leyenda [fila
  RotateLabel → False,
  [rota etiqueta [falso
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  [estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  [estilo de represen... [grosor [negro
  LabelStyle → {Black, 18},
  [estilo de etiqueta [negro
  Frame → True,
  [marco [verdadero
  ImageSize → 500
  [tamaño de imagen
]

```

Epsilon

```

epsi =
  (2 (1 - 94 α y[t]^2 + 255 α x[t]^2 y[t]^2 + 178 α x[t] y[t]^3 - 77 α y[t]^4 + 2030 α^2 x[t]^2 y[t]^4 -
    19 852 α^2 x[t] y[t]^5 + 7238 α^2 y[t]^6)) / (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6);

Plot[Evaluate[{epsi} /. sol3], {t, 0, 70}, PlotRange → All,
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"N", "\\epsilon"},
  PlotStyle → {
    {Thickness[0.006], Black},
    {Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018}]},
    {Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.02, 0.0125, 0.001, 0.0125]}}
  },
  RotateLabel → False,
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle → {Black, 18},
  Frame → True,
  ImageSize → 500
]

```

Relación entre densidades de energía ρ_α y ρ_{YM}

```

rhoym = 1 - α (10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4);
rhoalpha = α (10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4);

```

```

Plot[Evaluate[{rhoym, rhoalpha} /. sol2], {t, 0, 90},
  [repr... [evalúa
  PlotRange → All,
  [rango de repr... [todo
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.2] &) /@ {"N", ""},
  [etiqueta de marco [magnificación [valor numérico
  PlotStyle → {
  [estilo de representación
    {Thickness[0.006], Black},
    [grosor [negro
    {Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018}]}
    [grosor [azul [especificación de rayado
  },
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{
  [leyendas de repr... [colocado [línea leyenda
    Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    [directiva [negro [grosor absoluto
    Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
    [directiva [azul [grosor absoluto [especificación de rayado
  }, {
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\\Omega_{YM}"],
    [magnificación [estilo
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["\\Omega_{\\alpha}"]
    [magnificación [estilo
  },
  LegendFunction → "Frame",
  [función de leyenda [marco
  (*LegendLabel→MaTeX["\\bm{(x_{0},y_{0})}"],Magnification→1.7],*)
  [etiqueta de leyenda [magnificación
  LegendLayout → {"Row", 3}],
  [disposición de leyenda [fila
  {0.6, 0.74}],
  RotateLabel → False,
  [rota etiqueta [falso
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  [estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  [estilo de represen... [grosor [negro
  LabelStyle → {Black, 18},
  [estilo de etiqueta [negro
  Frame → True,
  [marco [verdadero
  ImageSize → 500
  [tamaño de imagen
]

```

```

Plot[Evaluate[{rhoym + rhoalpha} /. sol1], {t, 0, 170},
  [repr... [evalúa
    PlotRange → All,
    [rango de repr... [todo
    FrameLabel →
    [etiqueta de marco
      (MaTeX[#, Magnification → 2.2] &) /@ {"N", "\rho_{YM} + \rho_{\alpha}"},
      [magnificación [valor numérico
    PlotStyle → {{Thickness[0.005], Black}},
    [estilo de represen... [grosor [negro
    RotateLabel → True, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
    [rota etiqueta [verd... [estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra
    PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
    [estilo de represen... [grosor [negro
    LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]
    [estilo de etiqueta [negro [marco [verd... [tamaño de imagen

Plot[Evaluate[{-1, rhoym / rhoalpha} /. sol3], {t, 0, 80}, PlotRange → All,
  [repr... [evalúa [rango de repr... [todo
    FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"N", ""},
    [etiqueta de marco [magnificación [valor numérico

    PlotStyle → {
    [estilo de representación
      {Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.03, 0.018}]},
      [grosor [rojo [especificación de rayado
      {Thickness[0.006], Black}
      [grosor [negro
    },

    PlotLegends → Placed[LineLegend[{
    [leyendas de repr... [colocado [línea leyenda
      Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
      [directiva [negro [grosor absoluto
      Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
      [directiva [rojo [grosor absoluto [especificación de rayado
    }, {
      (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@
      [magnificación
        Style["\frac{\rho_{\alpha}}{\rho_{YM}}"],
        [estilo
        (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["-1"]
        [magnificación [estilo
    },
    LegendFunction → "Frame",
    [función de leyenda [marco
    (*LegendLabel → MaTeX["\bm{(x_{0}, y_{0})}"], Magnification → 1.7], *)
    [etiqueta de leyenda [magnificación

```

```

LegendLayout → {"Row", 3}],
[disposición de leyenda [fila

{0.6, 0.6}],

RotateLabel → False,
[rota etiqueta [falso

BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
[estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra

PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
[estilo de represen... [grosor [negro

LabelStyle → {Black, 18},
[estilo de etiqueta [negro

Frame → True,
[marco [verdadero

ImageSize → 500]
[tamaño de imagen

palfa[t] = 
$$\frac{1}{3 + 6 \alpha y[t]^2 (5 - 83 y[t]^2 + 4578 \alpha y[t]^4) - 2 \alpha y[t]^2 (-208 + 515 x[t]^2 + 262 x[t] y[t] + 162 y[t]^2 - 9156 \alpha^2 y[t]^6 (-5 x[t]^2 + 94 x[t] y[t] + 16 y[t]^2) + 2 \alpha y[t]^2 (5 x[t]^2 (411 - 83 y[t]^2) + 2 y[t]^2 (-999 + 664 y[t]^2) + x[t] (-20322 y[t] + 7802 y[t]^3)))}$$


Plot[
[representación gráfica

Evaluate[{1/3, (palfa[t]) / ((10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4) \alpha)} /. sol3],
[evalúa

{t, 0, 70}, PlotRange → {{-0.4, 70}, {- .1, 0.5}}, PlotTheme → "Scientific",
[rango de representación [tema de representación

PlotStyle → {
[estilo de representación

{Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.02}]},
[rojo [grosor absoluto [especificación de rayado

{Black, AbsoluteThickness[2.5]}},
[negro [grosor absoluto

FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@
[etiqueta de marco [magnificación

{"N", ""},
[valor numérico

RotateLabel → False,
[rota etiqueta [falso

BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
[estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra

PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
[estilo de represen... [grosor [negro

LabelStyle → {Black, 18},
[estilo de etiqueta [negro

Frame → True,
[marco [verdadero

```

`ImageSize` → 500,

`PlotLegends` → Placed[LineLegend[{

Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],

Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.02}]]

{

(MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\omega_{"

(MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\frac{1}{3}"]

}, {

},

LegendFunction → "Frame", (*, LegendLabel → Curvatura,

LabelStyle → {Black, Bold, 15}, *) LegendLayout → {"Row", 2},

{0.5, 0.4}]

]

```

Plot[Evaluate[{-1, (2 / 3) epsi - 1} /. sol3],
  {t, 0, 70}, PlotRange -> All, PlotTheme -> "Scientific",
  PlotStyle -> {
    {Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.02}]},
    {Black, AbsoluteThickness[2.5]}},
  FrameLabel -> (MaTeX[#, Magnification -> 2.5] &) /@
    {"N", ""},
  RotateLabel -> False,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle -> {Black, 18},
  Frame -> True,
  ImageSize -> 500,
  PlotLegends -> Placed[LineLegend[{
    Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.02}]]
  }, {
    (MaTeX[#, Magnification -> 2.0] &) /@ Style["\\omega_{tot}"],
    (MaTeX[#, Magnification -> 2.0] &) /@ Style["-1"]
  },
  LegendFunction -> "Frame", (*, LegendLabel -> Curvatura,
  LabelStyle -> {Black, Bold, 15}, *) LegendLayout -> {"Row", 2},
  {0.8, 0.55}]
]

```

Solución numérica $L\frac{1}{4}$ para inflación

```
Quit[]
[detén núcleo del sistema]

Clear["Global`*"]
[borra]

Needs["MaTeX`"]
[necesita]

(*PacletInstall["~/Downloads/MaTeX-1.7.4.paclet"]*)
SetOptions[MaTeX, "Preamble" -> {"\\usepackage{amsmath,amssymb}",
[asigna opciones]
    "\\usepackage{txfonts}", "\\usepackage{eulervm,antpolt}",
    "\\usepackage{bm}" (*, "\\usepackage{ccfonts,eulervm}"*) }];

Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
[necesita]

Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];
[necesita]

Fehlbergamat = {{1/4}, {3/32, 9/32},
    {1932/2197, -7200/2197, 7296/2197}, {439/216, -8, 3680/513, -845/4104},
    {-8/27, 2, -3544/2565, 1859/4104, -11/40}};
Fehlbergbvec = {25/216, 0, 1408/2565, 2197/4104, -1/5, 0};
Fehlbergcvec = {1/4, 3/8, 12/13, 1, 1/2};
Fehlbergevec = {-1/360, 0, 128/4275, 2197/75240, -1/50, -2/55};
FehlbergCoefficients[4, p_] :=
    N[{Fehlbergamat, Fehlbergbvec, Fehlbergcvec, Fehlbergevec}, p];
[valor numérico]

Fehlberg45 = {"ExplicitRungeKutta", "Coefficients" -> FehlbergCoefficients,
    "DifferenceOrder" -> 4, "EmbeddedDifferenceOrder" -> 5, "StiffnessTest" -> False};
[orden de diferencias] [falso]
```

```

soln[x0_, y0_, α_] := NDSolve[
  [resolvidor diferencial numérico]
  {x'[t] == (10 α x[t]^3 y[t]^3 (51 + 406 α y[t]^2) + 2 (1 - y[t]^2 + 32 α y[t]^4) (-1 + 77 α y[t]^4) +
    3 x[t] (y[t] + 5320 α^2 y[t]^7 + 6 α y[t]^3 (-33 + 2 y[t]^2)) +
    x[t]^2 (2 + 2 α y[t]^2 (5 + 267 y[t]^2 - 34 356 α y[t]^4))) /
    (y[t] + 10 α y[t]^3 - 166 α y[t]^5 + 9156 α^2 y[t]^7),
  y'[t] == x[t],
  x[0] == x0, y[0] == y0}, {x, y}, {t, 0, 81}
  (*Method→{StiffnessSwitching, Method→{ExplicitRungeKutta, Automatic}}*)
  [método] [método] [automático]
  (*Method→Fehlberg45,*) (*PrecisionGoal→50*)
  [método] [objetivo de precisión]
  (*,MaxSteps→1000000*)
  [máximo de pasos]
  (*Method→"StiffnessSwitching"*)
  [método]
]

Clear[α]
[borra]

α = 0.00649;

N[[valor numérico]  $\frac{1}{77^{1/4} 11881.}$ , 20]

1.18978

1/128.

0.0078125

77/11881.

0.00648094

1.1897833481707565`
1.18978

sol1 = soln[0.001096, 1.189, 0.00649]
(*el campos permanece constante (0.1,1.1982354975183969`,0.007)*)

sol2 = soln[0.0011, 1.189, 0.00649]

sol3 = soln[0.0011, 1.1897, 0.00649]

```

Error residual

```

resix[t_] =
  x'[t] - ((10 α x[t]^3 y[t]^3 (51 + 406 α y[t]^2) + 2 (1 - y[t]^2 + 32 α y[t]^4) (-1 + 77 α y[t]^4) +
    3 x[t] (y[t] + 5320 α^2 y[t]^7 + 6 α y[t]^3 (-33 + 2 y[t]^2)) +
    x[t]^2 (2 + 2 α y[t]^2 (5 + 267 y[t]^2 - 34 356 α y[t]^4))) /
    (y[t] + 10 α y[t]^3 - 166 α y[t]^5 + 9156 α^2 y[t]^7));
resiy[t_] = y'[t] - (x[t]);

Plot[Evaluate[{resix[t] /. sol1}], {t, 0, 80}, PlotStyle -> {Black},
  [repr... [evalúa] [estilo de represe... [negro]
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 90}, {-0.1, 0.1}}]
  [origen de ejes] [rango de representación]
Plot[Evaluate[RealExponent[{resix[t] /. sol1}]], {t, 0, 80},
  [repr... [evalúa] [exponente de un real]
  PlotStyle -> {Black}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 100}, {-15, 10}}]
  [estilo de represe... [negro] [origen de ejes] [rango de representación]
Plot[Evaluate[RealExponent[{resiy[t] /. sol1}]], {t, 0, 80},
  [repr... [evalúa] [exponente de un real]
  PlotStyle -> {Red}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 60}, {-10, 10}}]
  [estilo de represe... [rojo] [origen de ejes] [rango de representación]

shadowbox[legend_] :=
  Graphics[{{Gray, Rectangle[{0.05, -0.05}, {1.05, 0.95}]}, {White, EdgeForm[Gray],
  [gráfico] [gris] [rectángulo] [blanco] [forma de b... [gris]
    Rectangle[]}, Inset[legend, {0.5, 0.5}, Center]}, ImageSize -> 90]
  [rectángulo] [encarte] [centro] [tamaño de imagen]

```

Variables

```

Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1], {t, 0, 80.3}, PlotRange → All,
  [repr... [evalúa] [rango de repr... [todo]
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"", ""}, {"N", ""},
  [etiqueta de marco] [magnificación] [valor numérico]
  PlotStyle →
  [estilo de representación]
  {{Thickness[0.006], Black}, {Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.03, 0.018}]}}},
  [grosor] [negro] [grosor] [rojo] [especificación de rayado]
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
  [leyendas de repr... [colocado] [línea leyenda] [directiva] [negro] [grosor absoluto]
    Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
    [directiva] [rojo] [grosor absoluto] [especificación de rayado]
  },
  { (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["x"],
    [magnificación] [estilo]
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["y"]
    [magnificación] [estilo]
  },
  LegendFunction → "Frame",
  [función de leyenda] [marco]
  (*LegendLabel→MaTeX["\\bm{(x_{0},y_{0})}"],Magnification→1.7),*)
  [etiquete de leyenda] [magnificación]
  LegendLayout → {"Row", 1},
  [disposición de leyenda] [fila]
  {0.5, 0.2}],
  RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  [rota etiqueta] [falso] [estilo base] [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra]
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  [estilo de represen... [grosor] [negro]
  LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]
  [estilo de etiqueta] [negro] [marco] [verd... [tamaño de imagen]

```

```
Plot[Evaluate[{\sqrt{2} y[t]} /. sol1], {t, 77, 80.8}, PlotRange -> All,
```

```
FrameLabel ->
```

```
(MaTeX[#, Magnification -> 2.5] &) /@ {"\frac{\psi}{M_{p}}", ""}, {"N", ""},
```

```
PlotStyle -> {{Thickness[0.006], Black},
```

```
{Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}}},
```

```
RotateLabel -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12},
```

```
PlotStyle -> {{Thickness[0.004], Black}},
```

```
LabelStyle -> {Black, 18}, Frame -> True, ImageSize -> 500]
```

```
zf[t] =
```

$$\sqrt{\left(\frac{1}{y[t]^4} (1 - x[t]^2 - 2 x[t] y[t] - y[t]^2 - 10 \alpha x[t]^2 y[t]^2 + 188 \alpha x[t] y[t]^3 + 32 \alpha y[t]^4)\right)};$$

```
g = 0.0001;
```

$$hhoy = \frac{29 g}{\sqrt{42837} \sqrt{\alpha}}$$

```
0.000173927
```

```
Plot[Evaluate[{\frac{2 g x[t]}{zf[t]} /. sol1], {t, 0, 80.39}, PlotRange -> All,
```

```
FrameLabel -> (MaTeX[#, Magnification -> 2.2] &) /@
```

```
{"\frac{\dot{\psi}}{M_p^2}", ""}, {"N", ""},
```

```
PlotStyle -> {{Thickness[0.006], Black},
```

```
{Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}}},
```

```
RotateLabel -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12},
```

```
PlotStyle -> {{Thickness[0.004], Black}},
```

```
LabelStyle -> {Black, 18}, Frame -> True, ImageSize -> 500]
```

Hubble

```

Plot[Evaluate[ $\left\{\frac{g\sqrt{2}}{zf[t]}\right\}$  /. sol1], {t, 0, 80.39},
  PlotTheme → "Scientific", PlotRange → All,
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.2] &) /@ {"N", "\\frac{H}{M_{p}}"},
  PlotStyle → {
    {Thickness[0.006], Black}
  },
  RotateLabel → False,
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle → {Black, 18},
  Frame → True,
  ImageSize → 500
]

```

Epsilon

```

epsi =
  (2 (1 - 94 α y[t]^2 + 255 α x[t]^2 y[t]^2 + 178 α x[t] y[t]^3 - 77 α y[t]^4 + 2030 α^2 x[t]^2 y[t]^4 -
    19 852 α^2 x[t] y[t]^5 + 7238 α^2 y[t]^6)) / (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6);

```

$$\begin{aligned} \text{eta} = & \left(2 \left(1 - 94 \alpha y[t]^2 + 255 \alpha x[t]^2 y[t]^2 + 178 \alpha x[t] y[t]^3 - 77 \alpha y[t]^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. 2030 \alpha^2 x[t]^2 y[t]^4 - 19852 \alpha^2 x[t] y[t]^5 + 7238 \alpha^2 y[t]^6 \right) \right) / \left(1 + 10 \alpha y[t]^2 - \right. \\ & \left. 166 \alpha y[t]^4 + 9156 \alpha^2 y[t]^6 \right) - \left(\left(1 + 10 \alpha y[t]^2 - 166 \alpha y[t]^4 + 9156 \alpha^2 y[t]^6 \right) \right. \\ & \left. \left(2 \left(510 \alpha x[t] y[t]^2 x'[t] + 178 \alpha y[t]^3 x'[t] + 4060 \alpha^2 x[t] y[t]^4 x'[t] - 19852 \alpha^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. y[t]^5 x'[t] - 188 \alpha y[t] y'[t] + 510 \alpha x[t]^2 y[t] y'[t] + 534 \alpha x[t] y[t]^2 \right. \right. \\ & \left. \left. y'[t] - 308 \alpha y[t]^3 y'[t] + 8120 \alpha^2 x[t]^2 y[t]^3 y'[t] - 99260 \alpha^2 x[t] y[t]^4 \right. \right. \\ & \left. \left. y'[t] + 43428 \alpha^2 y[t]^5 y'[t] \right) \right) / \left(1 + 10 \alpha y[t]^2 - 166 \alpha y[t]^4 + 9156 \alpha^2 y[t]^6 \right) - \\ & \left(2 \left(1 - 94 \alpha y[t]^2 + 255 \alpha x[t]^2 y[t]^2 + 178 \alpha x[t] y[t]^3 - 77 \alpha y[t]^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. 2030 \alpha^2 x[t]^2 y[t]^4 - 19852 \alpha^2 x[t] y[t]^5 + 7238 \alpha^2 y[t]^6 \right) \right. \\ & \left. \left(20 \alpha y[t] y'[t] - 664 \alpha y[t]^3 y'[t] + 54936 \alpha^2 y[t]^5 y'[t] \right) \right) / \\ & \left(1 + 10 \alpha y[t]^2 - 166 \alpha y[t]^4 + 9156 \alpha^2 y[t]^6 \right)^2 \Big) / \\ & \left(4 \left(1 - 94 \alpha y[t]^2 + 255 \alpha x[t]^2 y[t]^2 + 178 \alpha x[t] y[t]^3 - 77 \alpha y[t]^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. 2030 \alpha^2 x[t]^2 y[t]^4 - 19852 \alpha^2 x[t] y[t]^5 + 7238 \alpha^2 y[t]^6 \right) \right); \end{aligned}$$

```

Plot[Evaluate[{0, 1, 2,
[repr... [evalúa
    eta, epsi] /. sol1], {t, 0, 80.3}], PlotRange -> All,
[rango de repr... [todo
    PlotTheme -> "Scientific", (*AxesLabel->{N,ε}*)
[tema de representación [etiqueta de ejes [valor numérico
    PlotStyle -> {
[estilo de representación
    {Black, Dashing[{0.001, 0.01}]},
    [negro [especificación de rayado
    {Black, Dashing[{0.001, 0.01}]},
    [negro [especificación de rayado
    {Black, Dashing[{0.001, 0.01}]},
    [negro [especificación de rayado
    {Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.007, 0.018}]},
    [rojo [grosor absoluto [especificación de rayado
    {Blue, AbsoluteThickness[2.5]}},
    [azul [grosor absoluto
    FrameLabel -> {MathX[#, Magnification -> 2.5] &} /@ {"N", ""},
    [etiqueta de marco [magnificación [valor numérico
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 19},
    [estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra
    LabelStyle -> {Black, 18},
    [estilo de etiqueta [negro
    RotateLabel -> False,
    [rota etiqueta [falso
    ImageSize -> 500,
    [tamaño de imagen
    Frame -> True,
    [marco [verdadero

```

```

PlotLegends → Placed[LineLegend[{
  Leyendas de repr... Colocado Línea leyenda

  Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5]],
  Directiva azul Grosor absoluto
  Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.007, 0.018}]]
  Directiva rojo Grosor absoluto Especificación de rayado
}], {
  (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\epsilon"],
  Magnificación Estilo
  (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\eta"]
  Magnificación Estilo
}],
LegendFunction → "Frame", (*, LegendLabel → Curvatura,
  función de leyenda marco Etiqueta de leyenda
LabelStyle → {Black, Bold, 15}, *) LegendLayout → {"Row", 2}, Background → White],
  Estilo de etiqueta Negro Negrita Disposición de leyenda fila Fondo de imagen blanco
{0.5, 0.56}]
]

```

Relación entre densidades de energía ρ_α y ρ_{YM}

$$\rho_{YM} = 1 - \alpha (10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4);$$

$$\rho_\alpha = \alpha (10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4);$$

```

Plot[Evaluate[{rhoalpha} /. sol1], {t, 0, 80.3}, PlotRange -> All,
  PlotTheme -> "Scientific", (*AxesLabel->{N, rho_beta / rho_tot}*)
  PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2.5], Black},
  FrameLabel -> (MathX[#, Magnification -> 2.5] &) /@
  {"N", "\\Omega_{\\alpha}"},
  RotateLabel -> False,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle -> {Black, 18},
  Frame -> True,
  ImageSize -> 500
]

```

```

palfa = 
$$\frac{1}{3 + 6 \alpha y[t]^2 (5 - 83 y[t]^2 + 4578 \alpha y[t]^4) - 2 \alpha y[t]^2 (-208 + 515 x[t]^2 + 262 x[t] y[t] + 162 y[t]^2 - 9156 \alpha^2 y[t]^6 (-5 x[t]^2 + 94 x[t] y[t] + 16 y[t]^2) + 2 \alpha y[t]^2 (5 x[t]^2 (411 - 83 y[t]^2) + 2 y[t]^2 (-999 + 664 y[t]^2) + x[t] (-20322 y[t] + 7802 y[t]^3)))}$$

pym =
  1 -
  palfa;

```

```

Plot[Evaluate[{palfa/pym} /. sol1], {t, 0, 80.3},
  [repr... [evalúa
    PlotRange → All, PlotTheme → "Scientific", (*AxesLabel→{N,Pβ/PYM}*)
    [rango de repr... [todo [tema de representación [etiqueta de ejes [valor numérico

    FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@
    [etiqueta de marco [magnificación
      {"N", "\frac{P_{\scriptscriptstyle \alpha}}{P_{\scriptscriptstyle YM}}"},
      [valor numérico

    RotateLabel → False,
    [rota etiqueta [falso

    BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
    [estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra

    PlotStyle → {{Thickness[0.006], Black}},
    [estilo de represen... [grosor [negro

    LabelStyle → {Black, 18},
    [estilo de etiqueta [negro

    Frame → True,
    [marco [verdadero

    ImageSize → 500
    [tamaño de imagen

  ]

```

Espacio de fase

```

pp1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1], {t, 0, 80.8},
  [gráfico paramétrico [evalúa
    PlotTheme → "Scientific", PlotStyle → {Thickness[0.003], Black} /.
    [tema de representación [estilo de represe... [grosor [negro
    Line[x_] → Sequence[Arrowheads → Table[.03, {10}], Arrow[x]]
    [línea [secuencia [cabeceras de fl... [tabla [flecha
    (*Line[r_] → {Black, Arrowheads[{0., .05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.}], Arrow[r]}*)
    [línea [negro [cabeceras de flecha [flecha

```

$$z = \sqrt{\frac{1 - x^2 - 2xy - y^2 - 10x^2y^2\alpha + 188xy^3\alpha + 32y^4\alpha}{y^4}};$$

$$\tau = \frac{1 - x^2 - 2xy - y^2 - 10x^2y^2\alpha + 188xy^3\alpha + 32y^4\alpha}{y^4};$$

$$\epsilon = (2(1 - 94y^2\alpha + 255x^2y^2\alpha + 178xy^3\alpha - 77y^4\alpha + 2030x^2y^4\alpha^2 - 19852xy^5\alpha^2 + 7238y^6\alpha^2)) / (1 + 10y^2\alpha - 166y^4\alpha + 9156y^6\alpha^2);$$

$$p = -\frac{1}{y(1 + 10y^2\alpha - 166y^4\alpha + 9156y^6\alpha^2)} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}y^2 - 10\sqrt{2}x^2y^2\alpha + 406\sqrt{2}xy^3\alpha - 90\sqrt{2}y^4\alpha - 178\sqrt{2}x^2y^4\alpha - 190\sqrt{2}xy^5\alpha + 154\sqrt{2}y^6\alpha + 29008\sqrt{2}x^2y^6\alpha^2 - 1484\sqrt{2}xy^7\alpha^2 - 4928\sqrt{2}y^8\alpha^2);$$

```
xp = FullSimplify[ $\sqrt{2} p/2 + x \epsilon$ ]
      [simplifica completamente]
```

```
yp = x
```

```
(-5.18603 + 5.18603 y2 + 1.51458 y4 - 2.59161 y6 + 0.538226 y8 +
  x3 y3 (8.58262 + 0.443425 y2) + x2 (5.18603 + 0.168287 y2 + 8.9865 y4 - 7.50459 y6) +
  x y (7.77904 - 9.99622 y2 + 0.605832 y4 + 1.74312 y6)) /
(y (2.59301 + 0.168287 y2 - 2.79356 y4 + 1. y6))
```

```
x
```

```
Options[myStreamPlot] = Options[StreamPlot];
```

```
[opciones] [opciones] [representación de flujo]
```

```
myStreamPlot[f_, {x_, x0_, x1_}, {y_, y0_, y1_}, opts : OptionsPattern[]] :=
      [patrón de opciones]
```

```
With[{a = OptionValue[AspectRatio]}, Show[StreamPlot[{1 / (x1 - x0), a / (y1 - y0)}
      [con] [valor de la opción] [cociente de aspecto] [muestr] [representación de flujo]
```

```
(f /. {x → x0 + u (x1 - x0), y → y0 + v / a (y1 - y0)}), {u, 0, 1}, {v, 0, a}, opts] /.
```

```
Arrow[pts_] => Arrow[{x0, y0} + {x1 - x0, (y1 - y0) / a} #] & /@pts],
      [flecha] [flecha]
```

```
PlotRange → {{x0, x1}, {y0, y1}}]]
      [rango de representación]
```

```
ag[α_] := α;
```

```
yo =  $\frac{1}{77^{1/4} \alpha^{1/4}}$ 
```

```
1.18937
```

```
(*xmi=-0.3;
```

```
xma=0.3;
```

```
ymi=1;
```

```
yma= 1.3;*)
```

```
xmi = -1.5;
```

```
xma = 1.1;
```

```
ymi = -0.3;
```

```
yma = 1.19;
```

```
ffg1 = Show[
      [muestra]
```

```
RegionPlot[ε > 2, {x, xmi, xma}, {y, ymi, yma}, BoundaryStyle → None,
      [representación gráfica de una región] [estilo de frontera] [ninguno]
```

```
PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["Orange"], Opacity[0.4]],
      [estilo de repre...] [directiva] [datos de colores] [naranja] [opacidad]
```

```
FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"x", "y"},
      [etiqueta de marco] [magnificación]
```

```
RotateLabel → False, PlotTheme → "Scientific", BoundaryStyle → None,
      [rota etiqueta] [falso] [tema de representación] [estilo de frontera] [ninguno]
```

```
PlotLabel → Grid[{{Style[MaTeX["\\alpha\\,"], Magnification → 2]}, ag[α]}],
      [etiqueta de re...] [reilla] [estilo] [magnificación]
```

```

BoundaryStyle → None, AspectRatio → 0.7,
  [estilo de frontera] [ninguno] [cociente de aspecto]
BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  [estilo base] [familia de tipo de l...] [multiplic...] [tamaño de tipo de letra]
LabelStyle → {Black, 18}, ImageSize → 500],
  [estilo de etiqueta] [negro] [tamaño de imagen]
RegionPlot[1 ≤  $\epsilon$  ≤ 2, {x, xmi, xma}, {y, ymi, yma},
  [representación gráfica de una región]
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["PacificBlue"], Opacity[0.4]],
  [estilo de repre...] [directiva] [datos de colores] [opacidad]
  BoundaryStyle → None],
  [estilo de frontera] [ninguno]
RegionPlot[ $\epsilon$  < 0, {x, xmi, xma}, {y, ymi, yma},
  [representación gráfica de una región]
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["RedViolet"], Opacity[0.4]],
  [estilo de repre...] [directiva] [datos de colores] [opacidad]
  BoundaryStyle → None],
  [estilo de frontera] [ninguno]
RegionPlot[0 ≤  $\epsilon$  < 1, {x, xmi, xma}, {y, ymi, yma},
  [representación gráfica de una región]
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["PineGreen"], Opacity[0.6]],
  [estilo de repre...] [directiva] [datos de colores] [opacidad]
  BoundaryStyle → None],
  [estilo de frontera] [ninguno]

RegionPlot[l > 0, {x, xmi, xma}, {y, ymi, yma}, BoundaryStyle →
  [representación gráfica de una región] [estilo de frontera]
  Directive[Red, Thickness[0.008], Dashing[{0.03, 0.018}]], PlotStyle → None],
  [directiva] [rojo] [grosor] [especificación de rayado] [estilo de repre...] [ninguno]

myStreamPlot[{xp, yp}, {x, xmi, xma},
  {y, ymi, yma}, StreamStyle → Gray, StreamPoints → 60],
  [estilo de flujo] [gris] [puntos de flujo]

Graphics[{PointSize[0.02], Point[{0, yo}],
  [gráfico] [tamaño de punto] [punto]
  Text[Style[MaTeX["{\cal Q}_2"], Magnification → 2], Blue, Italic, 18,
  [texto] [estilo] [magnificación] [azul] [itálica]
  Background → None ], {-0.05, yo}]]]
]

Show[ffg1, pp1]
[muestra]

```

Solución numérica para L^1_4 + materia + radiación

```
Quit[]  
|detén núcleo del sistema  
  
Needs["MaTeX`"]  
|necesita  
  
(*PacletInstall["~/Downloads/MaTeX-1.7.4.paclet"]*)  
SetOptions[MaTeX, "Preamble" → {"\\usepackage{amsmath,amssymb}",  
|asigna opciones  
    "\\usepackage{txfonts}", "\\usepackage{eulervm,antpolt}",  
    "\\usepackage{bm}" (*, "\\usepackage{ccfonts,eulervm}"*) }];  
  
Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];  
|necesita  
Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];  
|necesita  
  
Fehlbergamat = {{1/4}, {3/32, 9/32},  
    {1932/2197, -7200/2197, 7296/2197}, {439/216, -8, 3680/513, -845/4104},  
    {-8/27, 2, -3544/2565, 1859/4104, -11/40}};  
Fehlbergbvec = {25/216, 0, 1408/2565, 2197/4104, -1/5, 0};  
Fehlbergcvec = {1/4, 3/8, 12/13, 1, 1/2};  
Fehlbergevec = {-1/360, 0, 128/4275, 2197/75240, -1/50, -2/55};  
FehlbergCoefficients[4, p_] :=  
    N[{Fehlbergamat, Fehlbergbvec, Fehlbergcvec, Fehlbergevec}, p];  
|valor numérico  
  
Fehlberg45 = {"ExplicitRungeKutta", "Coefficients" → FehlbergCoefficients,  
    "DifferenceOrder" → 4, "EmbeddedDifferenceOrder" → 5, "StiffnessTest" → False};  
|orden de diferencias |falso
```

```

soln[x0_, y0_, r0_, m0_, α_] := NDSolve[
  [resolver diferencial numérico
  {x'[t] == (12 (-1 + r[t] + x[t]^2) + 18 x[t] y[t] +
    3 m[t] (4 + 14 α (29 x[t] - 11 y[t]) y[t]^3 - y[t] (x[t] + y[t])) +
    2 y[t] (6 y[t] - r[t] (x[t] + y[t]) +
      84 α^2 y[t]^4 (145 x[t]^3 - 2454 x[t]^2 y[t] + 570 x[t] y[t]^2 + 176 y[t]^3) +
      2 α y[t] (15 x[t]^2 + x[t] (-891 + 307 r[t] + 765 x[t]^2) y[t] +
        (135 - 139 r[t] + 801 x[t]^2) y[t]^2 + 54 x[t] y[t]^3 - 231 y[t]^4))) /
    (6 (y[t] + 10 α y[t]^3 - 166 α y[t]^5 + 9156 α^2 y[t]^7))),
  y'[t] == x[t],
  r'[t] ==
    2 r[t] (-2 - (-12 + 3 m[t] + 2 r[t] + 1128 α y[t]^2 - 1218 α m[t] y[t]^2 - 1228 α r[t] y[t]^2 -
      3060 α x[t]^2 y[t]^2 - 2136 α x[t] y[t]^3 + 924 α y[t]^4 -
      24 360 α^2 x[t]^2 y[t]^4 + 238 224 α^2 x[t] y[t]^5 - 86 856 α^2 y[t]^6) /
      (6 (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6))),
  m'[t] == m[t] (-3 - (-12 + 3 m[t] + 2 r[t] + 1128 α y[t]^2 - 1218 α m[t] y[t]^2 -
    1228 α r[t] y[t]^2 - 3060 α x[t]^2 y[t]^2 - 2136 α x[t] y[t]^3 + 924 α y[t]^4 -
    24 360 α^2 x[t]^2 y[t]^4 + 238 224 α^2 x[t] y[t]^5 - 86 856 α^2 y[t]^6) /
    (3 (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6))),
  x[0] == x0, y[0] == y0, r[0] == r0, m[0] == m0}, {x, y, r, m}, {t, -80, 50}
  (*Method→Fehlberg45*) (*, PrecisionGoal→25*)
  [método [objetivo de precisión
  ]
α = .
α = 0.007;
-  $\frac{1}{77^{1/4} \alpha^{1/4}}$ 
-1.16709
yi = 2;
mi = 0.1;
ri = 0.9;
Reduce[1 - mi - ri - xi^2 - 2 xi yi - yi^2 - 10 xi^2 yi^2 α + 188 xi yi^3 α + 32 yi^4 α > 0, xi]
[reduce
0.0645423 < xi < 5.03546
sol1 = soln[0.1, yi, ri, mi, α] (*soln[x0_,y0_,r0_,m0_,α_]*)
(*sol1=soln[0.01,1.1670,0.001,0.0001,0.007]=campo permanece constante all
time. soln[0.01,1.1670,0.001,-0.0001,0.01]=radiación y materia constantes *)
sol2 = soln[10^-20, 2, 0.2, 0.1, 0.007] (*soln[1,10,1,1,0.01]*)
sol3 = soln[0.001, 1.6, 0.1, 0.9, 0.1]

```

Error residual

```
resix[t_] = x'[t] - ((4 (-1 + r[t] + x[t]^2) + 6 x[t] y[t] +
  m[t] (4 + 14 α (29 x[t] - 11 y[t]) y[t]^3 - y[t] (x[t] + y[t])) +
  4 y[t]^2 (1 + α (5 x[t]^3 y[t] (51 + 406 α y[t]^2) + x[t]^2 (5 + 267 y[t]^2 - 34 356 α y[t]^4) +
    y[t]^2 (45 - 62 r[t] - 77 y[t]^2 + 2464 α y[t]^4) +
    x[t] y[t] (-297 + 104 r[t] + 18 y[t]^2 + 7980 α y[t]^4)))) /
  (6 (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6) (y[t] + 10 α y[t]^3 -
    166 α y[t]^5 + 9156 α^2 y[t]^7)));
```

```
resiy[t_] = y'[t] - (x[t]);
```

```
resir[t_] =
```

```
  r'[t] - (2 r[t] (-2 - (-4 + m[t] + 376 α y[t]^2 - 406 α m[t] y[t]^2 - 416 α r[t] y[t]^2 - 1020 α
    x[t]^2 y[t]^2 - 712 α x[t] y[t]^3 + 308 α y[t]^4 - 8120 α^2 x[t]^2 y[t]^4 + 79 408 α^2 x[t]
    y[t]^5 - 28 952 α^2 y[t]^6) / (2 (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6))));
```

```
resim[t_] = m'[t] - (m[t] (-3 - (-4 + m[t] + 376 α y[t]^2 - 406 α m[t] y[t]^2 - 416 α r[t] y[t]^2 -
  1020 α x[t]^2 y[t]^2 - 712 α x[t] y[t]^3 + 308 α y[t]^4 - 8120 α^2 x[t]^2 y[t]^4 + 79 408 α^2
  x[t] y[t]^5 - 28 952 α^2 y[t]^6) / (1 + 10 α y[t]^2 - 166 α y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6)));
```

```
Plot[Evaluate[RealExponent[{resix[t] /. sol3}], {t, -12, 2},
```

```
  \[repr... \[evalúa \[exponente de un real
```

```
  PlotStyle -> {Black}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-12, 2}, {-10, 10}}]
```

```
  \[estilo de represe... \[negro \[origen de ejes \[rango de representación
```

```
Plot[Evaluate[RealExponent[{resiy[t] /. sol3}], {t, -12, 2},
```

```
  \[repr... \[evalúa \[exponente de un real
```

```
  PlotStyle -> {Red}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-12, 2}, {-10, 10}}]
```

```
  \[estilo de represe... \[rojo \[origen de ejes \[rango de representación
```

```
Plot[Evaluate[RealExponent[{resir[t] /. sol3}], {t, -12, 2},
```

```
  \[repr... \[evalúa \[exponente de un real
```

```
  PlotStyle -> {Red}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-12, 2}, {-10, 10}}]
```

```
  \[estilo de represe... \[rojo \[origen de ejes \[rango de representación
```

variables

```
rhoal = α (10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4);
```

```
rhoym = 1 - rhoal - r[t] - m[t];
```

```
Show[Plot[Evaluate[{rhoym + rhoal, r[t], m[t]} /. sol2], {t, -30, 5}, PlotRange -> All,
[mues· [repr· [evalúa [rango de repr· [todo
FrameLabel ->
[etiqueta de marco
(MatEX[#, Magnification -> 2.5] &) /@ {"", ""}, {"-\ln(z_{r}+1)", ""}},
[magnificación
PlotStyle -> {{Thickness[0.006], Black},
[estilo de represen· [grosor [negro
{Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}]},
[grosor [azul [especificación de rayado
{Black, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.002, 0.02]}]},
[negro [grosor absoluto [especificación de rayado
PlotLegends -> Placed[LineLegend[
[leyendas de repr· [colocado [línea leyenda
{Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
[directiva [negro [grosor absoluto
Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018]}]},
[directiva [azul [grosor absoluto [especificación de rayado
Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.002, 0.02]}]}
[directiva [negro [grosor absoluto [especificación de rayado
}],
{(MaTeX[#, Magnification -> 2] &) /@ Style["\Omega_{E0}"],
[magnificación [estilo
(MaTeX[#, Magnification -> 2] &) /@ Style["r"],
[magnificación [estilo
(MaTeX[#, Magnification -> 2] &) /@ Style["m"]
[magnificación [estilo
}],
LegendFunction -> "Frame", (*LegendLabel->MaTeX[
[función de leyenda [marco [etiquete de leyenda
"\bm{(x_{0},y_{0})}", Magnification->1.7, *) LegendLayout -> {"Row", 3}],
[magnificación [disposición de leyenda [fila
{0.4, 0.55}],
RotateLabel -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12},
[rota etiqueta [falso [estilo base [familia de tipo de l· [multiplic· [tamaño de tipo de letra
PlotStyle -> {{Thickness[0.004], Black}},
[estilo de represen· [grosor [negro
LabelStyle -> {Black, 18}, Frame -> True, ImageSize -> 500] (*,
[estilo de etiqueta [negro [marco [verd· [tamaño de imagen
Plot[1.2297958594356906`, {t, 0, 90}] *)
[representación gráfica
]
```

epsilon

$$\text{epsi}[t] = - \left((-12 + 3 m[t] + 2 r[t] + 1128 \alpha y[t]^2 - 1218 \alpha m[t] y[t]^2 - 1228 \alpha r[t] y[t]^2 - 3060 \alpha x[t]^2 y[t]^2 - 2136 \alpha x[t] y[t]^3 + 924 \alpha y[t]^4 - 24360 \alpha^2 x[t]^2 y[t]^4 + 238224 \alpha^2 x[t] y[t]^5 - 86856 \alpha^2 y[t]^6) / (6 (1 + 10 \alpha y[t]^2 - 166 \alpha y[t]^4 + 9156 \alpha^2 y[t]^6)) \right);$$

$$\begin{aligned} \text{epsi10} = & \left(- \left((-12 + 3 m[t] + 2 r[t] + 1128 \alpha y[t]^2 - 1218 \alpha m[t] y[t]^2 - 1228 \alpha r[t] y[t]^2 - 3060 \alpha x[t]^2 y[t]^2 - 2136 \alpha x[t] y[t]^3 + 924 \alpha y[t]^4 - 24360 \alpha^2 x[t]^2 y[t]^4 + 238224 \alpha^2 x[t] y[t]^5 - 86856 \alpha^2 y[t]^6) / \right. \right. \\ & \left. \left. (6 (1 + 10 \alpha y[t]^2 - 166 \alpha y[t]^4 + 9156 \alpha^2 y[t]^6)) \right) \right) /. t \rightarrow -20. \\ & - \left((-12 + 3 m[-20.] + 2 r[-20.] + 7.896 y[-20.]^2 - 8.526 m[-20.] y[-20.]^2 - 8.596 r[-20.] y[-20.]^2 - 21.42 x[-20.]^2 y[-20.]^2 - 14.952 x[-20.] y[-20.]^3 + 6.468 y[-20.]^4 - 1.19364 x[-20.]^2 y[-20.]^4 + 11.673 x[-20.] y[-20.]^5 - 4.25594 y[-20.]^6) / \right. \\ & \left. (6 (1 + 0.07 y[-20.]^2 - 1.162 y[-20.]^4 + 0.448644 y[-20.]^6)) \right) \end{aligned}$$

```

Plot[Evaluate[{-1 + epsi[t], -1 +  $\frac{2}{3}$  epsi[t]} /. sol3], {t, -30, 5}, PlotRange → All,
  [repre... [evalúa] [rango de repr... [todo]

  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"-\ln(z_{r}+1)", ""},
  [etiqueta de marco] [magnificación]

  PlotStyle → {
  [estilo de representación]

    {Thickness[0.006], Black},
    [grosor] [negro]

    {Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018}]},
    [grosor] [azul] [especificación de rayado]

    {Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.02, 0.0125, 0.001, 0.0125]}}
    [grosor] [rojo] [especificación de rayado]

  },

  RotateLabel → False,
  [rota etiqueta] [falso]

  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  [estilo base] [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra]

  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  [estilo de represen... [grosor] [negro]

  LabelStyle → {Black, 18},
  [estilo de etiqueta] [negro]

  Frame → True,
  [marco] [verdadero]

  ImageSize → 500,
  [tamaño de imagen]

  PlotLegends → Placed[LineLegend[{
  [leyendas de repr... [colocado] [línea leyenda]

    Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    [directiva] [negro] [grosor absoluto]

    Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
    [directiva] [azul] [grosor absoluto] [especificación de rayado]

  }, {
    (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["q"],
    [magnificación] [estilo]

    (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\omega_{tot}"]
    [magnificación] [estilo]

  },

  LegendFunction → "Frame", (*, LegendLabel → Curvatura,
  [función de leyenda] [marco] [etiquete de leyenda]

  LabelStyle → {Black, Bold, 15}, *) LegendLayout → {"Row", 1}],
  [estilo de etiqueta] [negro] [negrita] [disposición de leyenda] [fila]

  {0.4, 0.4}]
]

```

Solución numérica $L_4^1 + L_4^2 + L_{\text{Curv},4,A}^{\text{Gal}}$

```
Quit[]
|detén núcleo del sistema

Clear["Global`*"]
|borra

Needs["MaTeX`"]
|necesita

(*PacletInstall["~/Downloads/MaTeX-1.7.4.paclet"]*)
SetOptions[MaTeX, "Preamble" -> {"\\usepackage{amsmath,amssymb}",
|asigna opciones
    "\\usepackage{txfonts}", "\\usepackage{eulervm,antpolt}",
    "\\usepackage{bm}" (*, "\\usepackage{ccfonts,eulervm}"*)}];

Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
|necesita

Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];
|necesita

Fehlbergamat = {{1/4}, {3/32, 9/32},
    {1932/2197, -7200/2197, 7296/2197}, {439/216, -8, 3680/513, -845/4104},
    {-8/27, 2, -3544/2565, 1859/4104, -11/40}};
Fehlbergbvec = {25/216, 0, 1408/2565, 2197/4104, -1/5, 0};
Fehlbergcvec = {1/4, 3/8, 12/13, 1, 1/2};
Fehlbergevec = {-1/360, 0, 128/4275, 2197/75240, -1/50, -2/55};
FehlbergCoefficients[4, p_] :=
    N[{Fehlbergamat, Fehlbergbvec, Fehlbergcvec, Fehlbergevec}, p];
|valor numérico

Fehlberg45 = {"ExplicitRungeKutta", "Coefficients" -> FehlbergCoefficients,
    "DifferenceOrder" -> 4, "EmbeddedDifferenceOrder" -> 5, "StiffnessTest" -> False};
|orden de diferencias |falso
```

```

soln[x0_, y0_, α_, κ_, θ_] := NDSolve[
  [resolvidor diferencial numérico
  {x'[t] == (2 (-1 + (77 α - 16 θ - 9 κ) y[t]^4) (1 - y[t]^2 + 4 (8 (α + θ) + 3 κ) y[t]^4) +
    2 x[t]^2 (1 + (5 α + κ) y[t]^2 + 3 (89 α + 48 θ + 19 κ) y[t]^4 -
    4 (8589 α^2 + 5424 α θ + 896 θ^2 + 1854 α κ + 592 θ κ + 95 κ^2) y[t]^6) +
    3 x[t] (y[t] - 2 (99 α + 32 θ + 11 κ) y[t]^3 + 4 (3 α + 16 θ + 7 κ) y[t]^5 +
    8 (665 α^2 - 552 α θ - 256 θ^2 - 277 α κ - 200 θ κ - 38 κ^2) y[t]^7) + 2 x[t]^3 y[t]^3 (80 θ +
    29 κ + 4 (159 α + 32 θ) κ y[t]^2 + 46 κ^2 y[t]^2 + 5 α (51 + 2 (203 α + 64 θ) y[t]^2))) /
    (y[t] + 2 (5 α + κ) y[t]^3 - 2 (83 α + 16 θ + 5 κ) y[t]^5 +
    4 (2289 α^2 + 1584 α θ + 256 θ^2 + 516 α κ + 176 θ κ + 31 κ^2) y[t]^7),
  y'[t] == x[t],
  x[0] == x0, y[0] == y0}, {x, y}, {t, 0, 300} (*{t,0,87}*)
  (*,Method→Fehlberg45*) (*,PrecisionGoal→40,*)
  [método [objetivo de precisión
  (*Method→{StiffnessSwitching, Method→{ExplicitRungeKutta, Automatic}}*)
  [método [método [automático
  (*Method→{ExplicitRungeKutta}*)
  [método
  (*Method→
  [método
  {"DiscontinuityProcessing"→False, "TimeIntegration"→"Extrapolation"}*)
  [falso
  (*Method→{"TimeIntegration"→{"ExplicitRungeKutta"}, "DifferenceOrder"→2}*)
  [método [orden de diferencias
  (*Method→{"PDEDiscretization"→
  [método
    {"MethodOfLines", "SpatialDiscretization"→{"FiniteElement"}}*)
  (*,PrecisionGoal→10*)
  [objetivo de precisión
  ]
α = 10^-3
  1
  1000
κ = 6 * α
  3
  500
θ = 4 * α
  1
  250
yii = 4. * 10^2
400.

```

$$\frac{77 \alpha - 16 \theta - 9 \kappa}{203 \alpha + 64 \theta + 23 \kappa} - \frac{41}{597}$$

$$N\left[-\frac{41}{597}\right]$$

-0.0686767

$$xii = -0.06 \times 10^2$$

-6.

$$z4ii =$$

$$-(-1 + yii^2 + 2 xii yii + xii^2 + (-188 * xii * yii^3 - 32 * yii^4 + 10 * xii^2 * yii^2) * \alpha + (-12 * yii^4 - 20 * xii * yii^3 + 2 * xii^2 * yii^2) * \kappa + (-32 * yii^4 - 64 * xii * yii^3) * \theta) / 2$$

$$2.86117 \times 10^9$$

`sol1 = soln[xii, yii, α , κ , θ];`

Error residual

$$\begin{aligned} \text{resix}[t_] = & x'[t] - \left((2(-1 + (77\alpha - 16\theta - 9\kappa)y[t]^4)(1 - y[t]^2 + 4(8(\alpha + \theta) + 3\kappa)y[t]^4) + \right. \\ & 2x[t]^2(1 + (5\alpha + \kappa)y[t]^2 + 3(89\alpha + 48\theta + 19\kappa)y[t]^4 - \\ & 4(8589\alpha^2 + 5424\alpha\theta + 896\theta^2 + 1854\alpha\kappa + 592\theta\kappa + 95\kappa^2)y[t]^6) + \\ & 3x[t](y[t] - 2(99\alpha + 32\theta + 11\kappa)y[t]^3 + 4(3\alpha + 16\theta + 7\kappa)y[t]^5 + \\ & 8(665\alpha^2 - 552\alpha\theta - 256\theta^2 - 277\alpha\kappa - 200\theta\kappa - 38\kappa^2)y[t]^7) + 2x[t]^3y[t]^3(80\theta + \\ & 29\kappa + 4(159\alpha + 32\theta)\kappa y[t]^2 + 46\kappa^2y[t]^2 + 5\alpha(51 + 2(203\alpha + 64\theta)y[t]^2))) / \\ & \left. (y[t] + 2(5\alpha + \kappa)y[t]^3 - 2(83\alpha + 16\theta + 5\kappa)y[t]^5 + \right. \\ & \left. 4(2289\alpha^2 + 1584\alpha\theta + 256\theta^2 + 516\alpha\kappa + 176\theta\kappa + 31\kappa^2)y[t]^7) \right); \end{aligned}$$

$$\text{resiy}[t_] = y'[t] - x[t];$$

`Plot[Evaluate[{resix[t] /. sol1}], {t, 0, 77}, PlotStyle -> {Black},`

`[repr... [evalúa`

`[estilo de represe... [negro`

`AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 90}, {-0.1, 0.1}}]`

`[origen de ejes`

`[rango de representación`

`Plot[Evaluate[RealExponent[{resix[t] /. sol1}], {t, 0, 79},`

`[repr... [evalúa`

`[exponente de un real`

`PlotStyle -> {Black}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 100}, {-15, 10}}]`

`[estilo de represe... [negro`

`[origen de ejes`

`[rango de representación`

`Plot[Evaluate[RealExponent[{resiy[t] /. sol1}], {t, 0, 79},`

`[repr... [evalúa`

`[exponente de un real`

`PlotStyle -> {Red}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{0, 100}, {-10, 10}}]`

`[estilo de represe... [rojo`

`[origen de ejes`

`[rango de representación`

```
Evaluate[{x[0.1], y[0.1]} /. sol1]
```

[evalúa]

```
{{-11.6866, 399.099}}
```

Variables

```
Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1], {t, 0, 78.5}, PlotRange → All,
[repre... [evalúa] [rango de repre... [todo]
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"", ""}, {"N", ""},
[etiqueta de marco] [magnificación] [valor numérico]
  PlotStyle →
[estilo de representación]
  {{Thickness[0.006], Black}, {Thickness[0.006], Red, Dashing[{0.03, 0.018}]}}},
[grosor] [negro] [grosor] [rojo] [especificación de rayado]
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
[leyendas de repre... [colocado] [línea leyenda] [directiva] [negro] [grosor absoluto]
    Directive[Red, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.018}]]
[directiva] [rojo] [grosor absoluto] [especificación de rayado]
  },
  { (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["x"],
[magnificación] [estilo]
    (MaTeX[#, Magnification → 2] &) /@ Style["y"]
[magnificación] [estilo]
  },
  LegendFunction → "Frame",
[función de leyenda] [marco]
  (*LegendLabel → MaTeX["\bm{(x_{0}, y_{0})}]", Magnification → 1.7], *)
[etiquete de leyenda] [magnificación]
  LegendLayout → {"Row", 1}],
[disposición de leyenda] [fila]
  {0.5, 0.2}],
  RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
[rota etiqueta] [falso] [estilo base] [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra]
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
[estilo de represen... [grosor] [negro]
  LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]
[estilo de etiqueta] [negro] [marco] [verd... [tamaño de imagen]
```

slow-roll

```

epsi[t_] =
  (2 (1 - 94 α y[t]^2 - 32 θ y[t]^2 - 10 κ y[t]^2 + 255 α x[t]^2 y[t]^2 + 80 θ x[t]^2 y[t]^2 + 29 κ x[t]^2
    y[t]^2 + 178 α x[t] y[t]^3 + 96 θ x[t] y[t]^3 + 38 κ x[t] y[t]^3 - 77 α y[t]^4 + 16 θ y[t]^4 +
    9 κ y[t]^4 + 2030 α^2 x[t]^2 y[t]^4 + 640 α θ x[t]^2 y[t]^4 + 636 α κ x[t]^2 y[t]^4 +
    128 θ κ x[t]^2 y[t]^4 + 46 κ^2 x[t]^2 y[t]^4 - 19 852 α^2 x[t] y[t]^5 -
    12 352 α θ x[t] y[t]^5 - 2048 θ^2 x[t] y[t]^5 - 4256 α κ x[t] y[t]^5 -
    1344 θ κ x[t] y[t]^5 - 212 κ^2 x[t] y[t]^5 + 7238 α^2 y[t]^6 + 960 α θ y[t]^6 -
    512 θ^2 y[t]^6 - 76 α κ y[t]^6 - 448 θ κ y[t]^6 - 90 κ^2 y[t]^6)) /
  (1 + 10 α y[t]^2 + 2 κ y[t]^2 - 166 α y[t]^4 - 32 θ y[t]^4 - 10 κ y[t]^4 + 9156 α^2 y[t]^6 +
    6336 α θ y[t]^6 + 1024 θ^2 y[t]^6 + 2064 α κ y[t]^6 + 704 θ κ y[t]^6 + 124 κ^2 y[t]^6);

```

```

Plot[Evaluate[{0, 1, 2, epsi[t]} /. sol1], {t, 0, 78.5}, PlotRange -> All,
  [repr... [evalúa] [rango de repr... [todo]

```

```
PlotStyle -> {
```

```
[estilo de representación
```

```
{Black, Dashing[{0.001, 0.01}]},
```

```
[negro [especificación de rayado
```

```
{Black, Dashing[{0.001, 0.01}]},
```

```
[negro [especificación de rayado
```

```
{Black, Dashing[{0.001, 0.01}]},
```

```
[negro [especificación de rayado
```

```
{Black, AbsoluteThickness[2.5]}},
```

```
[negro [grosor absoluto
```

```
FrameLabel -> {MathTeX[#, Magnification -> 2.5] &} /@ {"N", "\\epsilon"},
```

```
[etiqueta de marco
```

```
[magnificación
```

```
[valor numérico
```

```
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 19},
```

```
[estilo base
```

```
[familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra
```

```
LabelStyle -> {Black, 18},
```

```
[estilo de etiqueta [negro
```

```
RotateLabel -> False,
```

```
[rota etiqueta [falso
```

```
ImageSize -> 500,
```

```
[tamaño de imagen
```

```
Frame -> True]
```

```
[marco [verdadero
```

Hubble

```

z[t] =
  Sqrt[ (1/y[t]^4 (1 - x[t]^2 - 2 x[t] y[t] - y[t]^2 - 10 α x[t]^2 y[t]^2 - 2 κ x[t]^2 y[t]^2 + 188 α x[t]
    y[t]^3 + 64 θ x[t] y[t]^3 + 20 κ x[t] y[t]^3 + 32 α y[t]^4 + 32 θ y[t]^4 + 12 κ y[t]^4)) );

```

```
g = 0.001;
```

```
Plot[Evaluate[{{ $\sqrt{2}$  y[t]} /. sol1}], {t, -20, 79.1}, PlotRange → All,
```

```
[_repr... [evalúa
```

```
[_rango de repr... [todo
```

```
FrameLabel →
```

```
[_etiqueta de marco
```

```
(MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {" $\frac{\psi}{M_{\{p\}}}$ ", ""}, {"N", ""},
```

```
[_magnificación
```

```
[_valor numérico
```

```
PlotStyle → {{Thickness[0.006], Black},
```

```
[_estilo de represen...[_grosor
```

```
[_negro
```

```
{Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}}},
```

```
[_grosor
```

```
[_azul
```

```
[_especificación de rayado
```

```
RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
```

```
[_rota etiqueta
```

```
[_falso
```

```
[_estilo base
```

```
[_familia de tipo de l...[_multiplic...[_tamaño de tipo de letra
```

```
PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
```

```
[_estilo de represen...[_grosor
```

```
[_negro
```

```
LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]
```

```
[_estilo de etiqueta
```

```
[_negro
```

```
[_marco
```

```
[_verd...[_tamaño de imagen
```

```
Plot[Evaluate[{{ $\frac{2g x[t]}{z[t]}$ } /. sol1}], {t, 0, 79.1}, PlotRange → All,
```

```
[_repr... [evalúa
```

```
[_rango de repr... [todo
```

```
FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.2] &) /@
```

```
[_etiqueta de marco
```

```
[_magnificación
```

```
{" $\frac{\dot{\psi}}{M_{\{p\}}^2}$ ", ""}, {"N", ""},
```

```
[_valor numérico
```

```
PlotStyle → {{Thickness[0.006], Black},
```

```
[_estilo de represen...[_grosor
```

```
[_negro
```

```
{Thickness[0.006], Blue, Dashing[{0.03, 0.018]}}},
```

```
[_grosor
```

```
[_azul
```

```
[_especificación de rayado
```

```
RotateLabel → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
```

```
[_rota etiqueta
```

```
[_falso
```

```
[_estilo base
```

```
[_familia de tipo de l...[_multiplic...[_tamaño de tipo de letra
```

```
PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
```

```
[_estilo de represen...[_grosor
```

```
[_negro
```

```
LabelStyle → {Black, 18}, Frame → True, ImageSize → 500]
```

```
[_estilo de etiqueta
```

```
[_negro
```

```
[_marco
```

```
[_verd...[_tamaño de imagen
```

```

Plot[Evaluate[ $\left\{\frac{g\sqrt{2}}{z[t]}\right\}$  /. sol1], {t, 0, 79.1},
  [repre... [evalúa

  PlotTheme → "Scientific", PlotRange → All,
  [tema de representación [rango de repr... [todo

  FrameLabel → (MathX[#, Magnification → 2.2] &) /@ {"N", "\frac{H}{M_{p}}"},
  [etiqueta de marco [magnificación [valor numérico

  PlotStyle → {
  [estilo de representación
    {Thickness[0.006], Black},
    [grosor [negro
  },

  RotateLabel → False,
  [rota etiqueta [falso

  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  [estilo base [familia de tipo de l... [multiplic... [tamaño de tipo de letra

  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  [estilo de represen... [grosor [negro

  LabelStyle → {Black, 18},
  [estilo de etiqueta [negro

  Frame → True,
  [marco [verdadero

  ImageSize → 500
  [tamaño de imagen
]

```

densidades de energía

$$\text{rhogal}[t] = \left((10 x[t]^2 y[t]^2 - 188 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4) \alpha + (-64 x[t] y[t]^3 - 32 y[t]^4) \theta + (2 x[t]^2 y[t]^2 - 20 x[t] y[t]^3 - 12 y[t]^4) \kappa \right);$$

$$\text{rhoym}[t] = \left(1 - 10 x[t]^2 y[t]^2 \alpha + 188 x[t] y[t]^3 \alpha + 32 y[t]^4 \alpha + 64 x[t] y[t]^3 \theta + 32 y[t]^4 \theta - 2 x[t]^2 y[t]^2 \kappa + 20 x[t] y[t]^3 \kappa + 12 y[t]^4 \kappa \right);$$

```

Plot[Evaluate[{rhogal[t]/rhoym[t] /. sol1}, {t, 0, 79.1},
|repr...|evalúa
  PlotRange → All, PlotTheme → "Scientific", (*AxesLabel→{N,ρβ/ρtot}*)
|rango de repr...|todo |tema de representación |etiqueta de ejes |valor numérico
  PlotStyle → {AbsoluteThickness[2.5], Black},
|estilo de represe...|grosor absoluto |negro
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@
|etiqueta de marco |magnificación
    {"N", "\rho_{Gal}/\rho_{YM}"},
|valor numérico
  RotateLabel → True,
|rota etiqueta |verdadero
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
|estilo base |familia de tipo de l...|multiplic...|tamaño de tipo de letra
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
|estilo de represen...|grosor |negro
  LabelStyle → {Black, 18},
|estilo de etiqueta |negro
  Frame → True,
|marco |verdadero
  ImageSize → 500
|tamaño de imagen

]

Plot[Evaluate[{rhogal[t], rhoym[t] /. sol1}, {t, 0, 81.55},
|repr...|evalúa
  PlotTheme → "Scientific", PlotRange → {{-2, 81.55}, {-4.5 × 1030, 9 × 1030}},
|tema de representación |rango de representación
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.2] &) /@ {"N", ""},
|etiqueta de marco |magnificación |valor numérico
  PlotStyle → {
|estilo de representación
    {Black, AbsoluteThickness[2.5]},
|negro |grosor absoluto
    {Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.02}]}},
|azul |grosor absoluto |especificación de rayado
  RotateLabel → True,
|rota etiqueta |verdadero
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
|estilo base |familia de tipo de l...|multiplic...|tamaño de tipo de letra
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
|estilo de represen...|grosor |negro
  LabelStyle → {Black, 18},
|estilo de etiqueta |negro
  ImageSize → 500,
|tamaño de imagen

  Epilog → Inset[
|epiloco |encarte

```

```

Plot[Evaluate[{1, rhoGal, rhoYM} /. sol1], {t, 77, 81},
  Ticks → {Automatic},
  PlotStyle → {
    {Gray, Dashing[{0.001, 0.01}]},
    {Black, AbsoluteThickness[2.5]},
    {Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.03]}}},
  RotateLabel → True,
  Frame → True,
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  PlotStyle → {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle → {Black, 18}, ImageSize → 500/2, {38, 4.5 × 1030}],

PlotLegends → Placed[LineLegend[
  Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
  Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.02, 0.02}]]],
  {
    (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\Omega_{Gal}"],
    (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\Omega_{YM}"]
  },
  LegendFunction → "Frame", (*, LegendLabel → Curvatura,
  LabelStyle → {Black, Bold, 15}, *) LegendLayout → {"Row", 1}],
{0.5, 0.15}]
]

```

```

Plot[Evaluate[
  {
    
$$\left\{ \frac{1}{93 y[t]^2} \left( 2 (23 x[t]^2 - 106 x[t] y[t] - 107 y[t]^2 + 155 x[t]^2 y[t]^4 \alpha - 2914 x[t] y[t]^5 \alpha - 496 y[t]^6 \alpha - 992 x[t] y[t]^5 \theta - 496 y[t]^6 \theta + 31 y[t]^4 (x[t]^2 - 10 x[t] y[t] - 6 y[t]^2) \kappa + (-2 x[t] y[t] (-53 + 8 y[t]^4 (410 \alpha - 160 \theta - 81 \kappa) - 106 y[t]^2 (5 \alpha + \kappa) + 16 y[t]^6 (8134 \alpha^2 + 2944 \alpha \theta + 576 \theta^2 + 1409 \alpha \kappa + 272 \theta \kappa)) + y[t]^2 (107 - 4 y[t]^4 (3061 \alpha + 112 \theta - 27 \kappa) - 2 y[t]^2 (2689 \alpha + 992 \theta + 265 \kappa) + 8 y[t]^6 (107597 \alpha^2 + 43080 \alpha \theta + 1792 \theta^2 + 11021 \alpha \kappa + 488 \theta \kappa)) - x[t]^2 (23 + 46 y[t]^2 (5 \alpha + \kappa) - 4 y[t]^4 (4907 \alpha + 1424 \theta + 507 \kappa) + 8 y[t]^6 (10591 \alpha^2 + 13256 \alpha \theta + 2944 \theta^2 + 1005 \alpha \kappa + 1032 \theta \kappa)) \right) \right) / (1 + 2 y[t]^2 (5 \alpha + \kappa) - 2 y[t]^4 (83 \alpha + 16 \theta + 5 \kappa) + 4 y[t]^6 (2289 \alpha^2 + 1584 \alpha \theta + 256 \theta^2 + 516 \alpha \kappa + 176 \theta \kappa + 31 \kappa^2)) \right) \left. \right\} / \left( \frac{1}{3} (1 - 10 x[t]^2 y[t]^2 \alpha + 188 x[t] y[t]^3 \alpha + 32 y[t]^4 \alpha + 64 x[t] y[t]^3 \theta + 32 y[t]^4 \theta - 2 x[t]^2 y[t]^2 \kappa + 20 x[t] y[t]^3 \kappa + 12 y[t]^4 \kappa) \right) \right\} /.
  }
  sol1], {t, 0, 81.5}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2.5], Black},
  FrameLabel -> {MaTeX[#, Magnification -> 2.5] &} /@ {"N", "p_{Gal}/p_{YM}"},
  RotateLabel -> True,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.004], Black}},
  LabelStyle -> {Black, 18},
  Frame -> True,
  ImageSize -> 500
]$$

```

```

Plot[Evaluate[{-1 +  $\frac{2}{3}$  epsi[t], 1/3} /. sol1],
  {t, 0, 81.5}, PlotRange → All, PlotTheme → "Scientific",
  PlotStyle → {
    {Black, AbsoluteThickness[2.5]},
    {Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.03, 0.02]}}
  },
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"N", ""},
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 19},
  LabelStyle → {Black, 18},
  RotateLabel → True,
  ImageSize → 500,
  PlotLegends → Placed[LineLegend[{
    Directive[Black, AbsoluteThickness[2.5]],
    Directive[Blue, AbsoluteThickness[2.5], Dashing[{0.02, 0.02}]]
  }, {
    (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["\\omega_{tot}"],
    (MaTeX[#, Magnification → 2.0] &) /@ Style["1/3"]
  },
  LegendFunction → "Frame", (*, LegendLabel → Curvatura,
  LabelStyle → {Black, Bold, 15}, *) LegendLayout → {"Row", 2}],
  {0.5, 0.3}]
]

```

espacio de fase

```

pp1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1], {t, 50, 78.5},
  [gráfico paramétrico [evalúa
  PlotTheme -> "Scientific", PlotStyle -> {Thickness[0.003], Black}] /.
  [tema de representación [estilo de represe· [grosor [negro
  Line[x_] -> Sequence[Arrowheads -> Table[.03, {20}], Arrow[x]]
  [línea [secuencia [cabeceras de fl· [tabla [flecha
  (*Line[r_] -> {Black, Arrowheads[{0., 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.}], Arrow[r]}]*)
  [línea [negro [cabeceras de flecha [flecha
  xp = (2 x^3 y^3 (80 ̘ + 5 ̑ (51 + 2 y^2 (203 ̑ + 64 ̘)) + 29 ̑ + 4 y^2 (159 ̑ + 32 ̘) ̑ + 46 y^2 ̑^2) +
    2 (-1 + y^4 (77 ̑ - 16 ̘ - 9 ̑)) (1 - y^2 + 4 y^4 (8 (̑ + ̘) + 3 ̑)) +
    3 x (y + 4 y^5 (3 ̑ + 16 ̘ + 7 ̑) - 2 y^3 (99 ̑ + 32 ̘ + 11 ̑)) +
    8 y^7 (665 ̑^2 - 552 ̑ ̘ - 256 ̘^2 - 277 ̑ ̑ - 200 ̘ ̑ - 38 ̑^2)) +
    2 x^2 (1 + y^2 (5 ̑ + ̑) + 3 y^4 (89 ̑ + 48 ̘ + 19 ̑) -
    4 y^6 (8589 ̑^2 + 5424 ̑ ̘ + 896 ̘^2 + 1854 ̑ ̑ + 592 ̘ ̑ + 95 ̑^2))) / (y + 2 y^3 (5 ̑ + ̑) -
    2 y^5 (83 ̑ + 16 ̘ + 5 ̑) + 4 y^7 (2289 ̑^2 + 1584 ̑ ̘ + 256 ̘^2 + 516 ̑ ̑ + 176 ̘ ̑ + 31 ̑^2));
  yp = x;
  ̕ = (2 (1 - 94 y^2 ̑ + 255 x^2 y^2 ̑ + 178 x y^3 ̑ - 77 y^4 ̑ + 2030 x^2 y^4 ̑^2 -
    19 852 x y^5 ̑^2 + 7238 y^6 ̑^2 - 32 y^2 ̘ + 80 x^2 y^2 ̘ + 96 x y^3 ̘ + 16 y^4 ̘ +
    640 x^2 y^4 ̑ ̘ - 12 352 x y^5 ̑ ̘ + 960 y^6 ̑ ̘ - 2048 x y^5 ̘^2 - 512 y^6 ̘^2 - 10 y^2 ̑ +
    29 x^2 y^2 ̑ + 38 x y^3 ̑ + 9 y^4 ̑ + 636 x^2 y^4 ̑ ̑ - 4256 x y^5 ̑ ̑ - 76 y^6 ̑ ̑ +
    128 x^2 y^4 ̘ ̑ - 1344 x y^5 ̘ ̑ - 448 y^6 ̘ ̑ + 46 x^2 y^4 ̑^2 - 212 x y^5 ̑^2 - 90 y^6 ̑^2)) /
    (1 + 10 y^2 ̑ - 166 y^4 ̑ + 9156 y^6 ̑^2 - 32 y^4 ̘ + 6336 y^6 ̑ ̘ + 1024 y^6 ̘^2 +
    2 y^2 ̑ - 10 y^4 ̑ + 2064 y^6 ̑ ̑ + 704 y^6 ̘ ̑ + 124 y^6 ̑^2);
  z = 1/y^4 (1 - x^2 - 2 x y - y^2 - 10 x^2 y^2 ̑ +
    188 x y^3 ̑ + 32 y^4 ̑ + 64 x y^3 ̘ + 32 y^4 ̘ - 2 x^2 y^2 ̑ + 20 x y^3 ̑ + 12 y^4 ̑);
Options[myStreamPlot] = Options[StreamPlot];
[opciones [opciones [representación de flujo
myStreamPlot[f_, {x_, x0_, x1_}, {y_, y0_, y1_}, opts : OptionsPattern[]] :=
  [patrón de opciones
  With[{a = OptionValue[AspectRatio]}, Show[StreamPlot[{1 / (x1 - x0), a / (y1 - y0)}
  [con [valor de la opción [cociente de aspecto [mues· [representación de flujo
    (f /. {x -> x0 + u (x1 - x0), y -> y0 + v / a (y1 - y0)}), {u, 0, 1}, {v, 0, a}, opts] /.
    Arrow[pts_] -> Arrow[{x0, y0} + {x1 - x0, (y1 - y0) / a} #] & /@ pts],
    [flecha [flecha
    PlotRange -> {{x0, x1}, {y0, y1}}]]
  [rango de representación

```

```
(*xmi=-0.3;
xma=0.3;
ymi=1;
yma= 1.3;*)
xi = -2;
xa = 2;
yi = -1;
ya = 6;
```

```
Show[
  |muestra
```

```
RegionPlot[ $\epsilon > 2$ , {x, xi, xa}, {y, yi, ya}, BoundaryStyle → None,
  |representación gráfica de una región |estilo de frontera |ninguno
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["Orange"], Opacity[0.4]],
  |estilo de repre... |directiva |datos de colores |naranja |opacidad
  FrameLabel → (MaTeX[#, Magnification → 2.5] &) /@ {"x", "y"},
  |etiqueta de marco |magnificación
  RotateLabel → False, PlotTheme → "Scientific", BoundaryStyle → None,
  |rota etiqueta |falso |tema de representación |estilo de frontera |ninguno
  PlotLabel → MaTeX[""], Magnification → 1.7],
  |etiqueta de representación |magnificación
  BoundaryStyle → None, AspectRatio → 0.7,
  |estilo de frontera |ning... |cociente de aspecto
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 12},
  |estilo base |familia de tipo de l... |multiplic... |tamaño de tipo de letra
  LabelStyle → {Black, 18}, ImageSize → 500],
  |estilo de etiqueta |negro |tamaño de imagen
RegionPlot[ $1 \leq \epsilon \leq 2$ , {x, xi, xa}, {y, yi, ya},
  |representación gráfica de una región
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["PacificBlue"], Opacity[0.4]],
  |estilo de repre... |directiva |datos de colores |opacidad
  BoundaryStyle → None],
  |estilo de frontera |ninguno
RegionPlot[ $\epsilon < 0$ , {x, xi, xa}, {y, yi, ya},
  |representación gráfica de una región
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["RedViolet"], Opacity[0.4]],
  |estilo de repre... |directiva |datos de colores |opacidad
  BoundaryStyle → None],
  |estilo de frontera |ninguno
RegionPlot[ $0 \leq \epsilon < 1$ , {x, xi, xa}, {y, yi, ya},
  |representación gráfica de una región
  PlotStyle → Directive[ColorData["Crayola"]["PineGreen"], Opacity[0.6]],
  |estilo de repre... |directiva |datos de colores |opacidad
  BoundaryStyle → None],
  |estilo de frontera |ninguno
RegionPlot[ $z > 0$ , {x, xi, xa}, {y, yi, ya}, BoundaryStyle →
  |representación gráfica de una región |estilo de frontera
```

