Unidad Didáctica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden y Aplicaciones

Carlos Andrés Guevara Reyes

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciado en Matemáticas

Directora:
Doris Evila González Rojas
Magíster en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Bucaramanga
2026

Dedicatoria

Dedico este trabajo y la culminación de esta carrera a Dios, por brindarme la sabiduría y la fortaleza para afrontar cada reto; a mis padres y a mi nonita, porque gracias a ellos y a sus consejos he podido llegar hasta este punto; y a mi niña Isabella, por ser ese granito de inspiración en cada momento.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme sabiduría y fortaleza para llegar hasta este punto, a pesar de las veces en que quise rendirme.

A toda mi familia, especialmente a mi papá, por ser ese hombre valiente que, a pesar de sus dificultades de salud, siempre se mostró fuerte, y de quien siempre tuve palabras de aliento; a Yasmir, por su apoyo constante, su cariño y su disposición para ayudar. A mi madre, por ser una mujer amorosa, por escucharme, aconsejarme y estar presente en cada momento importante; a mi nonita, porque gran parte de lo que hoy he logrado ha sido gracias a ella, por impulsarme a ser mejor, a ser fiel a mí mismo y por enseñarme a ser valiente; y a mi Isabella, por llegar a darle luz a mi vida cuando todo parecía oscuro.

A Rolando y Willam, por su apoyo en la experimentación y mejora del material implementado en la unidad didáctica; y a Hernán, por acompañarme en este reto de desarrollar el trabajo de grado con un curso de ecuaciones diferenciales.

A la profesora Doris, por su abundante paciencia, orientación y disposición constante para escuchar y guiar este proceso; porque me enseñó que ser docente va más allá del conocimiento, implica también ser paciente, comprender y aprender de los errores.

A mis estudiantes de ecuaciones diferenciales, por permitirme implementar esta propuesta con ellos, por su disposición y participación en cada actividad, y por hacerme sentir no solo como profesor, sino también como parte del grupo.

A la profesora Lina, por cada consejo en pro de mejorar este proyecto; a la Escuela de Matemáticas, por permitirme realizar mi proyecto de grado en esta modalidad.

A mis amigos, profesores y compañeros de carrera, porque cada uno aportó un granito de arena en este proceso y de cada uno aprendí algo valioso.

Muchas gracias a todos.

Tabla de Contenido

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Lista de Apéndices

Pág.

Resumen

Título: Unidad Didáctica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden y Aplicaciones*

Autor: Carlos Andrés Guevara Reyes**

Palabras Clave: ecuaciones diferenciales, ABP, TIC, modelación matemática, práctica docente.

Descripción:

El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en educación superior presenta dificultades relacionadas con la comprensión conceptual, la interpretación de resultados y la aplicación en contextos reales, lo que evidencia la necesidad de proponer alternativas didácticas que favorezcan procesos más significativos. El presente trabajo desarrolla una unidad didáctica orientada a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden (EDOLPO), por medio del Aprendizaje Basado en Problemas y mediada por el uso de herramientas tecnológicas. La propuesta fue implementada en el contexto de una práctica docente, por medio de talleres estructurados en fases que promovieron la exploración, la modelación de fenómenos y la discusión de resultados. Para el análisis de la experiencia se emplearon instrumentos como un quiz, parcial, encuestas, entrevistas y el seguimiento del desempeño de los estudiantes.

Los resultados exponen que el trabajo con situaciones contextualizadas y el uso de recursos tecnológicos favorecen la motivación, la participación y la comprensión de los contenidos. Asimismo, se identificaron avances en la capacidad de relacionar las ecuaciones diferenciales con fenómenos del entorno. Sin embargo, se encontraron dificultades en procesos como el razonamiento y la comunicación matemática. En conclusión, la implementación de metodologías activas apoyadas en TIC constituye una alternativa pertinente para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, aunque su efectividad depende de factores del contexto educativo y de las características de los estudiantes. Finalmente, la experiencia permitió generar reflexiones sobre el fortalecimiento de la práctica docente en educación matemática.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas.
Directora: Doris Evila González Rojas. Magíster en Educación Matemática.

Abstract

Title: Teaching Unit on First Order Linear Ordinary Differential Equations and Applications [*]

Author: Carlos Andrés Guevara Reyes[**]

Key Words: differential equations, PBL, ICT, modeling, teaching practice.

Description:

Learning differential equations in higher education presents difficulties related to conceptual understanding, interpretation of results, and application in real-world contexts, highlighting the need to propose didactic alternatives that foster more meaningful learning processes. This paper presents a didactic unit focused on First-Order Linear Ordinary Differential Equations, based on Problem-Based Learning and facilitated by the use of technological tools. The proposal was implemented within a teaching practice setting, through workshops structured in phases that promoted exploration, modeling of phenomena, and discussion of results. Instruments such as surveys, interviews, and monitoring of student performance were used to analyze the experience. The results show that working with contextualized situations and using technological resources promotes motivation, participation, and comprehension of the content. Furthermore, progress was identified in the ability to relate differential equations to phenomena in the environment. However, difficulties were found in processes such as mathematical reasoning and communication. In conclusion, the implementation of active methodologies supported by ICTs constitutes a relevant alternative for teaching differential equations, although its effectiveness depends on factors related to the educational context and the characteristics of the students. Finally, the experience allowed for reflection on strengthening teaching practices in mathematics education.

[*] Degree Work

[**] Science Faculty. Mathematics School. Bachelor’s degree in Mathematics.
Director: Doris Evila González Rojas. Master's degree in Mathematics Education.

Introducción

La comprensión de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden (EDOLPO) constituye un componente fundamental en la formación matemática en la educación superior, debido a su capacidad para representar y analizar fenómenos de cambio en diversos contextos. Sin embargo, su enseñanza suele desarrollarse bajo enfoques tradicionales centrados en la transmisión de procedimientos y algoritmos, lo que limita la comprensión conceptual, la interpretación de resultados y la conexión entre la teoría y su aplicación en situaciones reales. Esta situación genera una brecha entre el conocimiento formal y su uso significativo, afectando el desarrollo de habilidades como la modelación, el razonamiento y la resolución de problemas matemáticos (Mejía et al., 2025).

En respuesta a esta problemática, el presente trabajo tiene como propósito diseñar, implementar y analizar una unidad didáctica orientada a la enseñanza de las EDOLPO, fundamentada en el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y apoyada en el uso de herramientas TIC como GeoGebra, simuladores web y el Aula Moodle de la UIS. La propuesta se enmarca en una perspectiva constructivista del aprendizaje, en la que el estudiante asume un rol activo mediante la exploración, la modelación y la resolución de situaciones contextualizadas. En este sentido, se sostiene que la integración de metodologías activas y recursos tecnológicos favorece la comprensión conceptual y la aplicación significativa de las ecuaciones diferenciales.

La relevancia de esta práctica docente radica en su aporte al fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación superior, particularmente en asignaturas de alta complejidad, al proponer una integración entre la teoría y su aplicación en contextos significativos. Asimismo, promueve el desarrollo de habilidades como la autonomía, la comunicación, la metacognición, el trabajo colaborativo y el uso crítico de herramientas tecnológicas, contribuyendo a una formación acorde con las demandas del mundo moderno.

En coherencia con lo anterior, el presente documento se estructura en siete capítulos. En el primero se expone la problemática y la justificación de la propuesta, junto con la hipótesis pedagógica y los objetivos que orientan su desarrollo. El segundo capítulo presenta los fundamentos teóricos desde los ámbitos pedagógico, didáctico y matemático. En el tercero se describen los aspectos metodológicos de la intervención pedagógica. El cuarto capítulo aborda el desarrollo y análisis a priori de la unidad didáctica implementada. En el quinto se presentan los resultados y evidencias de aprendizaje obtenidas. Finalmente, en los capítulos sexto y séptimo se exponen las conclusiones y recomendaciones derivadas de la experiencia educativa.

1. Problemática y Justificación

Las ecuaciones diferenciales constituyen un componente fundamental en la educación universitaria, particularmente en los programas de ingeniería y ciencias, ya que permiten modelar y comprender fenómenos reales de naturaleza física, biológica, económica o social. En particular, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden (EDOLPO) posibilitan la representación matemática de procesos como crecimiento, decaimiento, mezclas y flujo de corriente, entre otros fenómenos; esto las convierte en una herramienta clave para el desarrollo del pensamiento matemático, la abstracción formal y la adquisición de competencias científicas. No obstante, su enseñanza en la educación superior representa un reto debido a la abstracción conceptual, la complejidad de sus procedimientos y su dificultad para integrar los registros algebraicos, gráficos y contextuales. Esta situación requiere de docentes universitarios comprometidos con una actualización pedagógica continua que les permita guiar a los estudiantes en la comprensión profunda y significativa de este tipo de contenidos matemáticos (Bonilla, 2021; Mejía et al., 2025).

En el ámbito universitario, la enseñanza de las EDOLPO suele desarrollarse bajo un enfoque tradicional centrado en la memorización de algoritmos y la repetición de procedimientos formales. Este modelo de transmisión unidireccional del saber ha suscitado problemas en la comprensión conceptual, la interpretación de resultados y la transferencia del conocimiento a situaciones reales (Velastegui et al., 2025). Como consecuencia, se genera una brecha entre la formulación teórica de los modelos diferenciales y su implementación efectiva en la resolución de problemas complejos, lo que incide directamente en la consolidación de competencias relacionadas con el modelado y la resolución de problemas del entorno profesional. Esta desconexión no solo afecta el rendimiento académico inmediato, sino que también limita el desarrollo de habilidades analíticas, críticas, colaborativas y creativas fundamentales en la formación integral del estudiante universitario (Mantilla et al., 2025).

Investigaciones como las de Fonseca (2023) y Guerra (2024) señalan que estas problemáticas provienen de la poca conexión entre la teoría y la práctica, la limitada integración de procesos de modelación matemática, la escasa incorporación de herramientas TIC interactivas y la persistencia de prácticas pedagógicas centradas en la memorización y la ejecución mecánica de procedimientos. En esta misma línea, Cabrera et al. (2025) advierten que la rigidez curricular y la insuficiente formación docente en enfoques interdisciplinarios y en uso de TIC restringen la posibilidad de implementar experiencias de aprendizaje más significativas, lo que ocasiona una separación conceptual entre la matemática formal y su aplicación en entornos cotidianos. En consecuencia, esta situación dificulta en los estudiantes el desarrollo de una comprensión profunda de los fenómenos, ya que tienden a reproducir procedimientos sin entender su trasfondo conceptual, lo que afecta la motivación, limita la participación auténtica en el aprendizaje y debilita el desarrollo de habilidades analíticas y competencias matemáticas en su entorno profesional (Ortega y Romero, 2023)

En la Universidad Industrial de Santander, el comportamiento de las tasas de aprobación del curso de Ecuaciones Diferenciales entre 2022 y 2025 permite identificar una situación que, aunque ha mostrado algunos avances, continúa siendo motivo de reflexión. Los datos evidencian variaciones importantes en el aprovechamiento de los cupos, con porcentajes de aprobación que oscilan aproximadamente entre el 29% y el 64%, así como niveles de desaprovechamiento (pérdida, cancelación o abandono) que en ciertos periodos alcanzan valores cercanos al 71%. Si bien en algunos semestres se observan mejoras graduales, estas no se consolidan de manera sostenida ni progresiva, lo que sugiere la persistencia de dificultades en los procesos de aprendizaje. En este sentido, más que tratarse de resultados aislados, estos comportamientos pueden reflejar una problemática recurrente en la que un número significativo de estudiantes no logra alcanzar los niveles de comprensión esperados, lo que invita a indagar y profundizar en las condiciones bajo las cuales se está desarrollando la enseñanza de esta asignatura.

Figura 1.

Comportamiento del aprovechamiento de cupos en la asignatura Ecuaciones Diferenciales (2022–2025)

RESUMEN DE LAS ESTADISTICAS DE APROBACIÓN - 20255 - ECUACIONES DIFERENCIALES

Semestre	Cantidad Grupos	Matriculados inicialmente	Cancelaron	Finalizarón	Aprobaron	Perdieron	Deserción	% Cancelación (Canc / Term)	% Finalización Curso	% Aprobrobación (Aprob / Term)	% Perderdida (Perd / Term)	% Aprovechamiento (Aprob / Matric)	% Desaprov. (Deser / Matric)
2022-1	22	751	187	564	218	346	533	24,90 %	75,10 %	38,65 %	61,35 %	29,03 %	70,97 %
2022-2	28	941	124	817	334	483	607	13,18 %	86,82 %	40,88 %	59,12 %	35,49 %	64,51 %
2023-1	32	976	156	820	367	453	609	15,98 %	84,02 %	44,76 %	55,24 %	37,60 %	62,40 %
2023-2	30	946	145	801	426	375	520	15,33 %	84,67 %	53,18 %	46,82 %	45,03 %	54,97 %
2024-1	33	991	130	861	630	231	361	13,12 %	86,88 %	73,17 %	26,83 %	63,57 %	36,43 %
2024-2	31	907	105	802	454	348	453	11,58 %	88,42 %	56,61 %	43,39 %	50,06 %	49,94 %
2025-1	30	931	102	829	539	290	392	10,96 %	89,04 %	65,02 %	34,98 %	57,89 %	42,11 %
2025-2	31	958	116	842	535	307	423	12,11 %	87,89 %	63,54 %	36,46 %	55,85 %	44,15 %

Nota. Elaboración propia con base en información recopilada por diversos docentes durante los diferentes semestres académicos.

Frente a este panorama, surge la necesidad de incorporar metodologías pedagógicas alternativas como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) que se presenta como el núcleo pedagógico de esta propuesta, dado que autores como Nevárez et al (2025) y Ortiz (2022) señalan que este enfoque constituye una alternativa pertinente frente a los tradicionales centrados en la transmisión pasiva del conocimiento, al favorecer la participación y la aplicación del aprendizaje en contextos auténticos. Este método sitúa al estudiante como protagonista de su proceso educativo mediante la resolución de problemas reales que promueven la indagación conceptual, la reflexión crítica y la construcción activa del saber. En esta metodología se encuentran inherentes los principios del constructivismo, la metacognición, el aprendizaje colaborativo, la modelación matemática, el aprendizaje significativo y la resolución de problemas que se abordarán en esta propuesta de acuerdo con el enfoque de Pólya (1945). Así se genera un marco total para el desarrollo de competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales.

La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), como simuladores web, GeoGebra y la plataforma Moodle, complementa este enfoque al facilitar la visualización dinámica de los conceptos, la exploración de representaciones múltiples y el seguimiento continuo del proceso de aprendizaje. De esta manera, se promueve un ambiente interactivo donde los estudiantes integran lo simbólico, lo gráfico y lo contextual, con el fin de superar el aprendizaje mecánico convencional (Rodríguez, 2022; Lascano et al., 2024).

Además, esta propuesta se ajusta al modelo pedagógico de la UIS, que entiende la formación integral como un proceso centrado en el estudiante, dirigido al desarrollo de competencias reflexivas, creativas y colaborativas. Asimismo, responde a la necesidad institucional de fortalecer la calidad educativa y reducir los índices de reprobación y deserción en asignaturas de alta dificultad matemática. En este contexto, la implementación de estrategias fundamentadas en el ABP y facilitadas por TIC ayuda a asegurar aprendizajes contextualizados, relevantes y alineados con los objetivos educativos de la universidad. Por otra parte, este modelo pedagógico promueve la creación de entornos de aprendizaje flexibles y adaptables, en los que el estudiante no solo se familiariza con los principios claves de las EDOLPO, sino que los emplea para interpretar, modelar y resolver problemáticas reales, lo que potencia su habilidad crítica e innovadora (UIS, 2021).

En coherencia con lo anterior, la propuesta tiene como objetivo diseñar, implementar y analizar una unidad didáctica sobre las EDOLPO fundamentada en el ABP y el uso de TIC, que potencie la comprensión conceptual, la autonomía y el aprendizaje significativo de los estudiantes. Se plantea la hipótesis pedagógica de que la incorporación de estrategias activas centradas en el

ABP, y respaldadas por herramientas tecnológicas como simuladores web, GeoGebra y el Aula Moodle UIS, facilitará la comprensión conceptual y la aplicación práctica de las EDOLPO, al promover un aprendizaje más participativo, reflexivo y contextualizado.

En este contexto, la propuesta pretende reconsiderar el rol del aprendizaje matemático en la educación universitaria, donde el aula se convierte en un espacio dinámico en el que los estudiantes construyen conocimiento a través de la investigación, el análisis, la modelación y la solución de problemas reales. De esta forma, se pretende dejar a un lado la enseñanza tradicional centrada en la repetición de algoritmos, por una experiencia educativa que fomente la exploración, la argumentación y la conexión entre la teoría y la práctica. En resumen, esta iniciativa busca establecer e implementar un proceso educativo integral en el que el aprendizaje de las matemáticas se perciba como una experiencia significativa y transformadora, que fortalezca la autonomía intelectual, el pensamiento crítico, el compromiso con la realidad académica y la resolución de problemáticas de la praxis laboral.

1.1. Objetivos

Las problemáticas identificadas en la enseñanza y aprendizaje de las EDOLPO evidencian la necesidad de implementar enfoques pedagógicos que favorezcan una comprensión conceptual profunda y una aplicación significativa del saber matemático. En este sentido, los siguientes objetivos orientan el desarrollo de la propuesta, centrada en el diseño, implementación y análisis de una unidad didáctica fundamentada en el ABP y apoyada en herramientas TIC que promuevan la exploración, la reflexión y el aprendizaje autónomo.

1.1.1 Objetivo General

Diseñar, implementar y analizar una unidad didáctica orientada a fortalecer la comprensión conceptual y la aplicación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden mediante estrategias pedagógicas apoyadas en herramientas TIC como GeoGebra y el Aula Moodle de la UIS, que promuevan el aprendizaje activo y la resolución de problemas.

1.1.2 Objetivos Específicos

Diseñar una unidad didáctica fundamentada en el ABP que oriente la enseñanza de las EDOLPO, integrando de manera complementaria la modelación matemática, la resolución de problemas, la reflexión metacognitiva y el uso de herramientas TIC como GeoGebra y el Aula Moodle de la UIS.

Implementar la unidad didáctica en el marco de la práctica docente con un grupo de estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales de la UIS, mediante el uso de GeoGebra, simuladores web, el Aula Moodle y dinámicas propias del ABP.

Analizar los aportes de la unidad didáctica en el desarrollo de la comprensión conceptual, el pensamiento crítico y la percepción de los estudiantes frente al aprendizaje de las EDOLPO, identificando avances, dificultades y posibles mejoras en las prácticas pedagógicas.

2. Aspectos Teóricos

En el presente capítulo se encuentran los fundamentos pedagógicos, didácticos y matemáticos que orientan el desarrollo de esta propuesta de enseñanza y aprendizaje. En primer lugar, se abordan los principios pedagógicos que sustentan el enfoque constructivista del aprendizaje, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y el uso de TIC, en coherencia con el modelo pedagógico de la Universidad Industrial de Santander. Posteriormente, se presentan referentes didácticos derivados de investigaciones previas centradas en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior, los cuales permiten identificar elementos clave para el diseño de propuestas educativas contextualizadas. Finalmente, se exponen los aspectos matemáticos relacionados con las EDOLPO, que constituyen el eje conceptual de este trabajo. En conjunto, estos elementos proporcionan el sustento teórico que guía la propuesta didáctica desarrollada en este trabajo.

2.1 Aspectos Pedagógicos

Este apartado aborda los fundamentos pedagógicos que orientan el desarrollo de esta propuesta, los cuales permiten comprender el enfoque desde el que se proyecta la enseñanza y el aprendizaje de las EDOLPO. En este sentido, se presentan los principios del constructivismo como base para entender el aprendizaje como un proceso activo, social y reflexivo, así como el ABP y el uso de las TIC como estrategias que favorecen la construcción de conocimiento en contextos significativos. Finalmente, se expone el modelo pedagógico de la Universidad Industrial de Santander, con el fin de establecer la coherencia entre la propuesta didáctica y los lineamientos institucionales que orientan la formación de los estudiantes.

2.1.1. Fundamentos Constructivistas del Aprendizaje

El constructivismo concibe el aprendizaje como un proceso activo mediante el cual los individuos construyen conocimiento a partir de la interacción con su entorno físico, social y cultural. Desde esta perspectiva, el aprendizaje no se entiende como la simple transmisión de información, sino como una actividad dinámica en la que el estudiante participa activamente en la construcción de su propio saber (Piaget, 1978; Benítez-Vargas, 2023). En este sentido, el conocimiento se desarrolla a partir de la relación entre la nueva información y las estructuras cognitivas previas del estudiante, lo que favorece procesos de comprensión profunda y duradera. Así, en el ámbito educativo, esta concepción ha transformado la manera de entender la enseñanza, al reconocer que el aprendizaje surge de la actividad intelectual del estudiante, la reflexión sobre los contenidos y la interacción con otros sujetos (Bolaño, 2020).

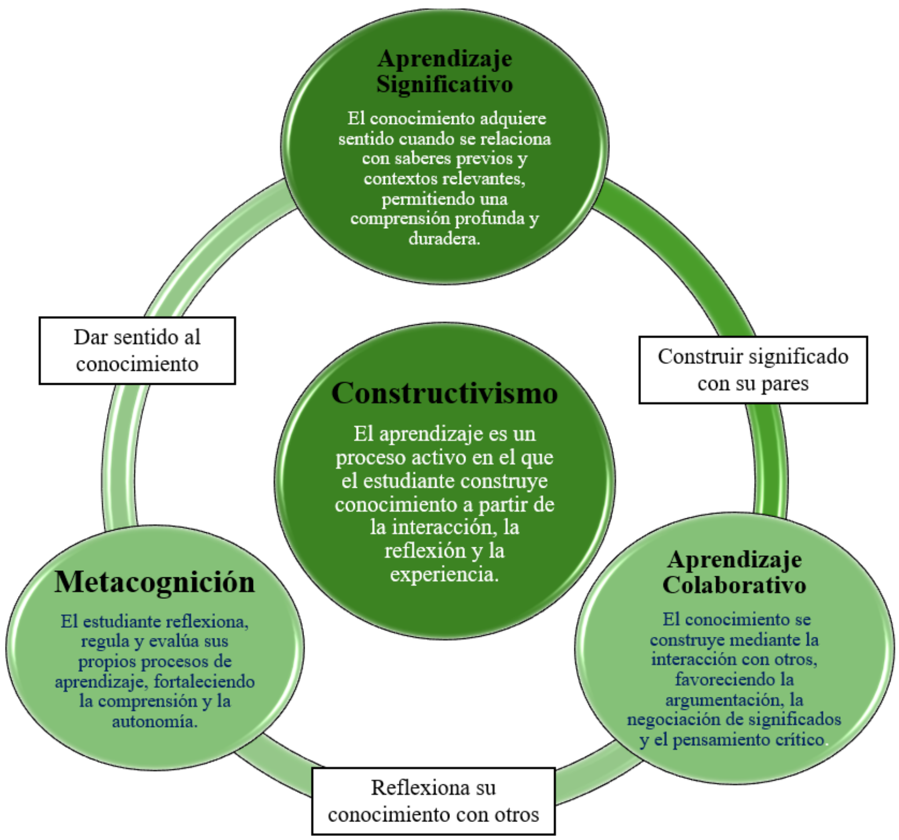
Desde esta perspectiva, el aprendizaje significativo adquiere un papel central. Ausubel et al. (1983), plantean que los nuevos conocimientos tienen sentido cuando logran vincularse con los saberes previos del estudiante y con situaciones cotidianas. En otras palabras, aprender implica establecer relaciones sustanciales entre la nueva información y los conocimientos existentes, lo que permite reorganizar las estructuras cognitivas y construir significados cada vez más elaborados. En el campo de la educación matemática, esta idea es importante, ya que el aprendizaje de conceptos requiere comprender relaciones, interpretar representaciones y reflexionar sobre los procedimientos utilizados, más allá de la simple aplicación mecánica de algoritmos (Miranda-Núñez, 2020).

Asimismo, las teorías constructivistas reconocen que el aprendizaje posee una dimensión social fundamental, ya que el conocimiento no se construye únicamente a nivel individual, sino también a través de la interacción con otros (Vygotsky, 1978). En este contexto surge el aprendizaje colaborativo, entendido como un enfoque pedagógico en el que los estudiantes trabajan conjuntamente para alcanzar objetivos comunes de aprendizaje. Investigaciones como León et al. (2023) y Useche (2021) señalan que la cooperación entre estudiantes favorece la participación activa, el intercambio de conocimientos y la construcción conjunta de soluciones frente a problemas complejos, al tiempo que la interacción entre pares promueve la responsabilidad, el respeto, los procesos de argumentación, la confrontación de ideas y la negociación de significados que fortalecen el pensamiento crítico y la comprensión de los contenidos. En el ámbito de la educación matemática, este paradigma resulta pertinente, pues la discusión de procedimientos, la comparación de estrategias de solución y la argumentación colectiva facilitan reconstruir conceptos matemáticos, explorar diferentes métodos de resolución y fortalecer habilidades de comunicación y razonamiento lógico, así se favorece tanto la comprensión conceptual como la transferencia del conocimiento a situaciones relacionadas con el campo disciplinar (Aguilar et al., 2015).

Por otra parte, otro elemento fundamental oculto dentro de los enfoques constructivistas es la metacognición, entendida como la capacidad del estudiante para reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento y aprendizaje. Flavell (1979) plantea que la metacognición implica conocer, supervisar y regular las estrategias cognitivas utilizadas para alcanzar determinados objetivos. En esta misma línea, Otondo y Torres (2020) señalan que estas habilidades permiten a los estudiantes identificar sus fortalezas y debilidades cognitivas, ajustar sus estrategias y evaluar su propio proceso de aprendizaje. En la educación matemática, la metacognición adquiere un papel especial, ya que comprender cómo se construye y valida el conocimiento matemático requiere procesos de análisis, planificación y evaluación durante la modelación y resolución de problemas (Rodríguez, 2022).

Figura 2.

Interrelación de los fundamentos constructivista del aprendizaje.



Nota. La figura presenta un resumen de los aportes del enfoque constructivista del aprendizaje, integrando el aprendizaje significativo (Ausubel et al., 1983), el aprendizaje colaborativo (Vygotsky, 1978) y la metacognición (Flavell, 1979), como dimensiones interrelacionadas en la construcción del conocimiento. Elaboración propia.

En el contexto particular de la enseñanza de las EDOLPO, estos principios constructivistas permiten concebir el aprendizaje como un proceso reflexivo en el que los estudiantes construyen significado al relacionar los modelos matemáticos con los fenómenos que describen. De esta manera, el estudiante no se limita a aplicar procedimientos algorítmicos, sino que reflexiona con sus pares sobre los métodos utilizados, interpretan los resultados obtenidos y establecen conexiones entre diferentes representaciones matemáticas.

En conjunto, estas perspectivas pedagógicas coinciden en presentar el aprendizaje como un proceso activo, social y reflexivo, en el que los estudiantes construyen conocimiento a partir de la interacción con problemas interesantes y del intercambio de ideas con otros. Desde este enfoque, aprender no solo implica adquirir información, sino también desarrollar habilidades de análisis, comunicación, argumentación y autorregulación. En coherencia con estos principios, el ABP se configura como una metodología pedagógica pertinente, ya que promueve la indagación, el trabajo colaborativo, la reflexión metacognitiva y la construcción del conocimiento a partir de la resolución de problemas contextualizados.

2.1.2 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) surge en coherencia con los principios constructivistas y se configura como un enfoque pedagógico que sitúa al estudiante en el centro del proceso de aprendizaje. En esta metodología, el conocimiento no se transmite de forma directa, sino que se construye a partir de la exploración de situaciones problemáticas que requieren análisis, discusión y toma de decisiones. De esta manera, el problema se convierte en el punto de partida para la construcción del conocimiento, mientras que el docente asume un rol de mediador que orienta el proceso de indagación y reflexión (Vera et al., 2021; Chacón et al., 2020).

Desde esta perspectiva, el ABP promueve un aprendizaje activo en el que los estudiantes investigan, contrastan ideas, formulan hipótesis y construyen explicaciones a partir del trabajo colaborativo. Este enfoque no se limita a la obtención de una respuesta correcta, sino que busca desarrollar habilidades de análisis, argumentación y autonomía intelectual. En el contexto de la educación matemática superior, el ABP es importante al contribuir a la formación de profesionales capaces de enfrentar problemas complejos, interpretar información, tomar decisiones de forma crítica y aplicar el conocimiento en diversos contextos familiares, sociales y profesionales (Palomino y Osorio, 2023; Ortiz, 2022).

Bajo este panorama, la resolución de problemas es un componente fundamental del aprendizaje matemático dentro del ABP. En este sentido, la propuesta de Pólya (1945) ofrece una referencia clave al plantear un proceso orientado por cuatro etapas: comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y verificar la solución. Estas fases, más que una secuencia rígida a seguir, deben entenderse como orientaciones no obligatorias, que guían el pensamiento matemático, favoreciendo la reflexión sobre los procedimientos utilizados y la toma de decisiones durante el proceso de resolución. De acuerdo con Quiñones y Huiman (2022), este enfoque no solo fortalece habilidades de análisis, comunicación y argumentación, sino que también permite establecer conexiones entre los conocimientos previos del estudiante y las nuevas situaciones que enfrenta.

Figura 3.

Etapas del proceso de resolución de problemas según el enfoque de Pólya

Nota. La figura representa el proceso de resolución de problemas propuesto por Pólya (1945), el cual comprende cuatro fases interrelacionadas: comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar la estrategia y verificar la solución, favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático. Elaboración propia.

De manera complementaria, la modelación matemática se conecta de forma natural con el ABP, debido a que ambos enfoques parten del análisis de fenómenos del mundo real para construir conocimiento. La modelación implica representar, interpretar y analizar situaciones mediante el lenguaje matemático, lo que supone identificar variables esenciales, establecer relaciones entre ellas y validar los resultados obtenidos (Villa-Ochoa et al., 2022). Desde una perspectiva didáctica, este proceso permite que los estudiantes comprendan el sentido de los conceptos matemáticos al aplicarlos en contextos significativos, lo que favorece la construcción de modelos que describen procesos de cambio y variación.

Figura 4.

Modelo integrador del Aprendizaje Basado en Problemas en la educación matemática

Nota. La figura presenta la conexión entre la modelación matemática, la resolución de problemas y el uso de herramientas tecnológicas en el marco del Aprendizaje Basado en Problemas, destacando su papel en la construcción activa del conocimiento. Elaboración propia con apoyo de IA (GPT).

En el contexto de las EDOLPO, la integración entre el ABP, la resolución de problemas y la modelación matemática permite que los estudiantes interpreten los fenómenos que describen estas ecuaciones y comprendan el significado de los parámetros involucrados. A través de situaciones contextualizadas, los estudiantes pueden relacionar las ecuaciones diferenciales con procesos de cambio y variación presentes en distintos fenómenos, lo que favorece una comprensión más profunda de los conceptos y su aplicación en la interpretación de la realidad.

Finalmente, el desarrollo de estas estrategias pedagógicas puede potenciarse mediante el uso de herramientas tecnológicas que favorezcan la exploración, la visualización y la experimentación con los modelos matemáticos. Por esta razón, el uso de recursos tecnológicos se convierte en un elemento que complementa el ABP y fortalece la comprensión conceptual de los contenidos matemáticos, aspecto que se aborda en el siguiente apartado.

2.1.3 Uso de TIC en la Educación Matemática

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han adquirido un papel importante en los procesos educativos contemporáneos, al ofrecer nuevas posibilidades para la representación, exploración y comprensión del conocimiento. En el ámbito de la educación matemática, su integración permite favorecer la visualización de objetos abstractos, la experimentación con diferentes representaciones y la exploración dinámica de las temáticas, lo que contribuye a fortalecer la apropiación conceptual de los contenidos (Vera y Yánez, 2023).

En este contexto, las TIC se constituyen como herramientas que amplían las posibilidades de interacción y construcción del conocimiento, al facilitar la simulación de fenómenos, el análisis de representaciones gráficas, la exploración de distintos escenarios matemáticos y la reflexión sobre los procesos de modelación y resolución de problemas. No obstante, de acuerdo con Chérrez et al. (2021), su efectividad está ligada al papel del docente como diseñador de entornos digitales que integren lo tecnológico con lo pedagógico, promoviendo experiencias de aprendizaje inspiradoras, llamativas y significativas.

En relación con metodologías como el ABP, las TIC actúan como mediadoras del proceso educativo al facilitar el acceso a información, la exploración de modelos y la comunicación entre los estudiantes. Estas herramientas permiten generar entornos de aprendizaje interactivos en los que los estudiantes pueden analizar diferentes representaciones de los fenómenos estudiados, contrastar resultados y reflexionar sobre los procesos de modelación y resolución de problemas (Feliciano y Cuevas, 2021; Morales-Rovalino et al., 2022). En el estudio de las EDOLPO, el uso de herramientas tecnológicas favorece la comprensión de los procesos de cambio y variación mediante la visualización de soluciones, la exploración de representaciones gráficas y la simulación de fenómenos dinámicos. De esta manera, el uso de recursos tecnológicos contribuye a fortalecer la conexión entre la teoría matemática y su aplicación en la interpretación de situaciones reales.

2.1.4 Modelo Pedagógico de la Universidad Industrial de Santander

El modelo pedagógico de la Universidad Industrial de Santander se fundamenta en la formación integral del estudiante y en un enfoque educativo centrado en el aprendizaje interactivo. Desde esta perspectiva, el estudiante es concebido como un sujeto multidimensional que integra dimensiones cognitivas, sociales, éticas, afectivas, biológicas y tecnológicas, y que participa activamente en la construcción de su propio conocimiento. En consecuencia, el modelo promueve la apropiación crítica del saber, el desarrollo del pensamiento analítico y la formación de profesionales capaces de enfrentar problemas complejos en contextos diversos, lo que contribuye de manera responsable al desarrollo social y al mejoramiento de la calidad de vida (UIS, 2021).

Desde el punto de vista curricular, este modelo se despliega en tres niveles: macro, meso y micro curricular. En primer lugar, el nivel macro se relaciona con las políticas institucionales y los principios que orientan la formación integral. En segundo lugar, el nivel meso corresponde a los proyectos educativos de los programas académicos, en los cuales se definen los resultados de aprendizaje y las competencias que se espera desarrollar en los estudiantes. Finalmente, el nivel micro se materializa en las experiencias de aprendizaje que tienen lugar dentro de las asignaturas, a través de estrategias didácticas, recursos pedagógicos y procesos de evaluación. De esta manera, esta estructura busca garantizar la congruencia entre los propósitos formativos institucionales, el currículo de cada programa y las prácticas de enseñanza que se desarrollan en el aula (UIS, 2021).

Desde esta perspectiva, el modelo pedagógico de la UIS promueve el uso de metodologías activas, la incorporación de tecnologías digitales y una formación orientada a la innovación. Estos elementos se conectan con los enfoques constructivistas del aprendizaje presentados y con estrategias pedagógicas basadas en la resolución de problemas y la modelación de fenómenos reales. En coherencia con estos principios pedagógicos institucionales, la propuesta didáctica desarrollada para la enseñanza de las EDOLPO se fundamenta en el ABP, integra el uso de herramientas TIC y plantea el análisis de situaciones contextualizadas que favorecen la comprensión conceptual, la toma de decisiones, el trabajo entre pares y el desarrollo de competencias matemáticas.

En síntesis, los fundamentos pedagógicos abordados permiten comprender la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde una perspectiva activa, reflexiva y contextualizada, en la que el estudiante asume un rol protagónico en la construcción del conocimiento. De esta manera, se obtiene un marco que orienta la propuesta didáctica hacia el fortalecimiento de procesos de comprensión, modelación y aplicación, en concordancia con las demandas de la educación matemática en el nivel superior.

2.2 Aspectos Didácticos

Los aspectos pedagógicos presentados anteriormente permiten establecer el marco desde el cual se orienta esta propuesta educativa. No obstante, para el diseño de estrategias de enseñanza resulta pertinente considerar investigaciones que han analizado la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde perspectivas afines a dichas teorías. En esta línea, estos trabajos ofrecen referentes didácticos que permiten identificar dificultades y fortalezas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que, además, sirven como orientación para el diseño de propuestas educativas contextualizadas como la que se desarrolla en esta práctica.

Una de las investigaciones relevantes para esta praxis es la de Del Rivero-Jiménez y Ruiz-Moreno (2020), desarrollada en el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme (México), en la cual se analizó la implementación de material didáctico contextualizado en el estudio de circuitos eléctricos, apoyado en el uso de la plataforma Moodle en un curso universitario de ecuaciones diferenciales. En esta propuesta, los estudiantes trabajaron con situaciones propias de su campo disciplinar, en las que las ecuaciones diferenciales se empleaban para modelar fenómenos eléctricos, lo que permitió vincular los contenidos matemáticos con aplicaciones reales de la ingeniería. Para ello, se diseñaron e implementaron diversos recursos en la plataforma Moodle, tales como foros de discusión, glosarios de conceptos, cuestionarios en línea, talleres de ejercicios y actividades colaborativas, que favorecieron la interacción entre estudiantes, el acceso permanente a los materiales y el seguimiento del proceso de aprendizaje. Los resultados evidenciaron mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes, así como una percepción positiva frente al uso de la plataforma, destacando su utilidad para fortalecer la comprensión de los contenidos y promover un aprendizaje más autónomo.

En esta misma línea, el estudio desarrollado por Rincón-Leal (2016), en la Universidad Francisco de Paula Santander, analiza la incorporación de herramientas tecnológicas como mediadoras en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden, a partir de una intervención pedagógica en la que se integró el uso de la computadora para la resolución, representación y análisis de problemas en el aula. Mediante un diseño descriptivo con aplicación de instrumentos antes y después de la experiencia, se evaluaron dimensiones como la comprensión, la motivación, el trabajo colaborativo y las actitudes hacia el aprendizaje, mostrando cambios significativos en la percepción de los estudiantes. En particular, se observó una mejora en la comprensión de los contenidos, una mayor disposición hacia el aprendizaje y el reconocimiento de la tecnología como un recurso útil para la resolución de problemas y la visualización de fenómenos matemáticos. Asimismo, los resultados destacan que el uso de las TIC favorece la interacción en el aula, promueve el aprendizaje autónomo y estimula la creatividad, sin sustituir la comprensión conceptual, sino complementándola, lo que resalta su potencial como mediadoras en la construcción de aprendizajes más dinámicos y significativos.

Con base en el uso de situaciones contextualizadas, Arcila et al. (2024) proponen una estrategia didáctica basada en la modelación matemática para la enseñanza de ecuaciones diferenciales, utilizando como contexto un circuito eléctrico en serie tipo RC. La propuesta se desarrolla a partir de tres enfoques: un modelo teórico, uno simulado mediante software especializado y uno experimental en laboratorio, lo que permite a los estudiantes transitar entre situaciones reales, representaciones físicas y modelos matemáticos. Este proceso favorece la comprensión de los conceptos al vincular herramientas tecnológicas, simulaciones y experiencias prácticas, promoviendo el análisis, la interpretación y la validación de resultados. Los autores destacan que este tipo de estrategias fortalece el pensamiento matemático, la conexión con fenómenos reales y el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas en contextos aplicados.

En relación con la resolución de problemas, Vera et al. (2021) presentan una propuesta de implementación del ABP en la enseñanza de las matemáticas, dirigida a estudiantes de ingeniería agropecuaria. La metodología se desarrolló a partir de un diagnóstico inicial que evidenció dificultades en conocimientos básicos, lo que orientó el diseño de actividades centradas en la resolución de problemas contextualizados en el entorno profesional de los estudiantes. A través de una guía didáctica, se promovió el trabajo colaborativo, la investigación autónoma y la discusión de los resultados obtenidos. Los resultados evidenciaron mejoras en la motivación, la participación y la comprensión de los contenidos, destacando el potencial del ABP para integrar el aprendizaje matemático con situaciones reales y fortalecer el pensamiento crítico.

Desde una perspectiva pedagógica aplicada, Luo (2024) presenta una propuesta para la enseñanza de ecuaciones diferenciales en un curso intensivo en línea, centrada en el diseño de un entorno interactivo y flexible que favorece la participación activa del estudiante. La estrategia incluye el uso de materiales multimedia, foros de discusión, actividades colaborativas en pequeños grupos y la resolución de problemas contextualizados en situaciones reales, promoviendo la modelación matemática como eje del aprendizaje. Este enfoque permitió fortalecer la fluidez matemática, la comunicación de ideas y la comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas para analizar fenómenos del mundo real, demostrando la importancia de integrar recursos digitales y metodologías activas en la enseñanza de estos contenidos.

Desde un enfoque valorativo, Ortiz (2022) analiza la incidencia del ABP en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales mediante un estudio comparativo realizado en la Universidad de Guayaquil (Ecuador), en el que se contrastaron dos grupos de estudiantes: uno con implementación de ABP y otro con metodología tradicional. La estrategia se aplicó en temas de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, evaluando aspectos como habilidades comunicativas, trabajo colaborativo, autogestión del conocimiento, creatividad y desempeño académico. Los resultados evidenciaron un mejor rendimiento en el grupo que trabajó bajo ABP, mientras que el grupo de control presentó resultados más dispersos y niveles bajos de desempeño. Asimismo, se destacan mejoras significativas en la comunicación, el trabajo en equipo y la creatividad, lo que reafirma el potencial del ABP como estrategia didáctica.

En síntesis, los estudios revisados mostraron que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales se potencia mediante la integración de estrategias centradas en metodologías activas, la resolución de problemas, la modelación matemática y el uso de herramientas tecnológicas que favorecen la participación activa del estudiante. Más allá de los resultados reportados, estos aportes permiten identificar elementos clave para el diseño de propuestas didácticas en educación superior, tales como la contextualización de los contenidos, la conexión entre diferentes representaciones y la promoción del aprendizaje autónomo y colaborativo. En este sentido, la propuesta desarrollada en este trabajo retoma e integra estos elementos mediante el diseño de talleres contextualizados apoyados en TIC, con el propósito de favorecer una comprensión conceptual de las EDOLPO y su aplicación en diversos contextos.

2.3 Aspectos Matemáticos

En este apartado se presentan los conceptos matemáticos fundamentales relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden (EDOLPO), las cuales constituyen el objeto matemático central de esta propuesta. Estas ecuaciones permiten describir procesos de cambio y variación presentes en diversos fenómenos de la naturaleza, la ingeniería, la economía y otras áreas del conocimiento. Con el propósito de exponer los principales elementos conceptuales que sustentan la comprensión de las EDOLPO en el contexto educativo, se muestran secuencialmente algunas definiciones, propiedades y modelos matemáticos asociados a este tipo de ecuaciones, y se toma como referencia libros de ecuaciones diferenciales (Zill & Cullen, 2006; Stewart, 2012; Blanchard et al., 1999; Pérez, 2018; Ramírez, 2022; González y Lara, 2023; Vergel et al., 2022).

2.3.1 Ecuaciones Diferenciales

Definición 1. Ecuaciones Diferenciales (ED)

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Para ejemplificar esta definición, se presentan los siguientes casos:

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Esta es una ecuación diferencial que modela el crecimiento poblacional, donde $y(t)$ representa el tamaño de la población y k es una constante de proporcionalidad. En este caso, la ecuación involucra derivadas respecto a una sola variable independiente.

Ejemplo 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta es una ecuación diferencial conocida como la ecuación del calor, describe la distribución de temperatura en una barra a lo largo del tiempo. Aquí la función $u(x,t)$ depende de más de una variable independiente, y aparecen derivadas parciales.

A partir de los ejemplos anteriores, se puede observar que las ecuaciones diferenciales pueden presentar características diversas en cuanto a las variables involucradas, el tipo de derivadas y su comportamiento algebraico. En este aspecto, resulta pertinente establecer una clasificación que permita organizar y comprender estas diferencias. A continuación, se presenta una clasificación de las ecuaciones diferenciales según distintos criterios fundamentales.

Tabla 1.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales según distintos criterios

Criterio	Tipo	Descripción	Ejemplo
Según el tipo de derivada	Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)	Involucra derivadas respecto a una sola variable independiente.	$\frac{dy}{dx} = ky$
	Ecuación Diferencial Parcial (EDP)	Involucra derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes.	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Según el Orden	Primer Orden	La derivada de mayor orden que aparece es de primer orden.	$\frac{dy}{dx} + y = x$
	Segundo Orden	La derivada de mayor orden es de segundo orden.	$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
	Orden n	La derivada de mayor orden es de orden n, con $n \in \mathbb{N}$.	$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$
Según Linealidad	Lineal	La variable dependiente y así como todas sus	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

		derivadas son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran y es 1. Además, los coeficientes dependen a lo sumo de la variable independiente x.	
	No Lineal	No cumple ninguna o a lo sumo una de las condiciones dispuestas en el ítem anterior.	$\frac{dy}{dx} = y^2 + x$

Nota. Clasificación con base en textos académicos de ecuaciones diferenciales. Elaboración propia.

Desde una perspectiva didáctica, esta clasificación resulta fundamental, ya que permite a los estudiantes organizar y comprender los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, facilitando la identificación de métodos de solución adecuados y favoreciendo la construcción de significado en torno a estos conceptos. En base a lo anterior, la presente práctica se enfoca en las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de tipo lineal, dado que constituyen el objeto central de estudio. De esta manera, se presentan las definiciones correspondientes a este tipo de ecuaciones, las cuales servirán de soporte para el desarrollo de la propuesta.

Definición 2. Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden (EDOPO)

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es aquella en la que interviene la primera derivada de la variable dependiente respecto a una sola variable independiente, sin aparecer derivadas de orden mayor a uno.

Su forma general puede expresarse como: $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$

y de forma equivalente puede representarse como:

$$y' = f(x, y)$$

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, ya que involucra únicamente la primera derivada de la función $y(x)$ respecto a la variable x.

Definición 3. Solución de una Ecuación Diferencial

Toda función **Φ(x)**, definida sobre un intervalo **I** y que posea al menos *n* derivadas continuas sobre **I**, y que al ser sustituida en una ecuación diferencial ordinaria de *n-ésimo* orden reduzca la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación sobre el intervalo considerado.

En las ecuaciones diferenciales, es posible distinguir diferentes tipos de soluciones, las cuales permiten interpretar de diversas maneras el comportamiento de las funciones que satisfacen la ecuación. En este sentido, se presenta una clasificación de las soluciones más comunes, con el propósito de facilitar su comprensión y diferenciación en el análisis de ecuaciones diferenciales.

Tabla 2.

Clasificación de las soluciones de una ecuación diferencial

Tipo de solución	Descripción	Ejemplo
Solución general	Expresión que contiene una o varias constantes arbitrarias, cuyo número depende del orden de la ecuación diferencial, y que representa una familia de soluciones.	Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ $su\ solución\ general\ es$: $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$
Solución particular	Se obtiene al asignar valores específicos a las constantes de la solución general.	Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ $su\ solución\ particular\ es$:

		$y = \frac{1}{16}x^4$
Solución singular*	Solución que no se obtiene a partir de la solución general, pero que también satisface la ecuación diferencial.	Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ Para la solución general $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$, la solución singular es $y = 0$, dado que no es miembro de la familia.
Solución explícita	La variable dependiente está despejada en función de la variable independiente.	Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ Se obtiene la solución explícita: $\mathrm{y} = ce^{-5x}$
Solución implícita	La solución se expresa como una relación entre las variables sin despejar la variable dependiente	Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ Se obtiene la solución implícita: $x^2 + y^2 = 25$
Solución trivial	Solución constante o simple que satisface la ecuación, generalmente igual a cero.	Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ Se obtiene la solución trivial: $y = 0$

Nota. Clasificación con base en textos académicos de ecuaciones diferenciales. *La existencia de soluciones singulares depende de la ecuación diferencial considerada, no todas las ecuaciones presentan este tipo de solución. Elaboración propia.

A partir de los conceptos elementales presentados previamente, se profundiza en un tipo particular de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: las ecuaciones lineales. Este tipo de ecuaciones resulta de especial interés tanto por su estructura como por su aplicabilidad en la modelación de diversos fenómenos. A continuación, se introduce su definición formal y algunos ejemplos que permiten caracterizar sus principales fundamentos.

Definición 4. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden (EDOLPO)

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \text{ (Ecuación 1)}$$

donde $y = y(x)$ es la variable dependiente, x la variable independiente, $\frac{dy}{dx}$ la primera derivada de y respecto a x y $a_0(x), a_1(x)$ y $g(x)$ son funciones conocidas definidas en un intervalo I con $a_1(x) \neq 0$ en dicho intervalo.

La ecuación es lineal porque tanto la variable dependiente como su derivada aparecen en primer grado y no se multiplican entre sí.

Su forma más común de escribirla es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \text{ (Ecuación 2)}$$

donde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ (Ecuación 3) y $Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$, (Ecuación 4), siendo $P(x)$ una función continua en el intervalo de solución.

Esta forma estándar resulta pertinente en el contexto educativo, ya que permite a los estudiantes reconocer patrones en las ecuaciones y seleccionar la estrategia de solución de la manera más adecuada.

Ejemplo 4.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

Esta es una EDOLPO, debido a que la variable dependiente y y su derivada aparecen en primer grado y están relacionadas mediante funciones de la variable independiente x. En este caso, $P(x) = 2$ y $Q(x) = x$, ambas funciones continuas en cualquier intervalo de interés, lo que garantiza la existencia de solución en dicho intervalo.

A partir de la forma general de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden, es posible establecer una clasificación en función del término independiente. Esta clasificación permite identificar entre ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas, lo cual resulta fundamental, ya que determina tanto la estructura de la ecuación como el método de solución más adecuado. A continuación, se presentan ambos casos, junto con sus principales características y formas de resolución.

Definición 5. EDOLPO Homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden se denomina homogénea cuando el término independiente es nulo, es decir, cuando $Q(x) = 0$. En este caso, la ecuación toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \text{ (Ecuación 5)}$$

En la resolución de este tipo de ecuaciones se utiliza el método de variables separables. Para ello, es necesario que la ecuación esté expresada en su forma estándar (Ecuación 5); en caso contrario, primero debe llevarse a esta forma para poder aplicar el método. Ya que la ecuación podrá reescribirse de forma que las variables queden separadas en cada miembro de la igualdad; de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

Al integrar ambos lados, se obtiene:

$$\ln\ |\,y\,| = -\int P(x)\,dx + C$$

y, despejando $y(x)$, se llega a la solución general:

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \text{ (ecuación 6)}$$

Esta expresión muestra que la solución de una ecuación lineal homogénea de primer orden depende de una constante arbitraria, lo que da lugar a una familia de soluciones. Además, permite evidenciar que el comportamiento de la solución está determinado por la integración de la función $P(x)$, la cual influye directamente en la forma de decrecimiento o crecimiento de la solución.

Ejemplo 5.

Se tiene la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Al identificar que es EDOLPO homogénea, se aplica el procedimiento de resolución correspondiente (ya sea mediante la definición presentada previamente o el uso de la ecuación general *(ecuación 6)*) tal que:

$$y(x) = Ce^{-\int 2dx}$$

y se obtiene como solución general:

$$y(x) = Ce^{-2x}$$

En este caso, la solución describe un comportamiento exponencial decreciente, donde la constante C determina la condición inicial de la situación.

En contraste con el caso homogéneo, cuando el término independiente no es nulo, la ecuación se clasifica como no homogénea. Esta diferencia introduce una mayor complejidad en su resolución, lo que hace necesario emplear un procedimiento distinto que permita incorporar la influencia del término externo en la solución.

Definición 6. EDOLPO no Homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden se denomina no homogénea cuando el término independiente es distinto de cero, es decir, cuando $Q(x) \neq 0$. En este caso, la ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

En la resolución de este tipo de ecuaciones se utiliza el método del factor integrante. Pero, para ello, se recomienda que la ecuación esté escrita en su forma estándar (ecuación 2); en caso contrario, es necesario transformarla previamente. Este método consiste en multiplicar la ecuación por una función adecuada que permite expresar el lado izquierdo como la derivada de un producto.

Una vez se tiene la ecuación en su forma estándar, se define el factor integrante como:

$$F.I. = e^{\int P(x)\,dx}$$

Luego, se multiplica la ecuación por el factor integrante:

$$\frac{dy}{dx}e^{\int P(x)\,dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

El lado izquierdo puede escribirse como la derivada de un producto, por lo que la ecuación se transforma en:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}\,y\right] = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

A continuación, se integran ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}\,y\right]dx = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx$$

De dónde se obtiene:

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C$$

Finalmente, al despejar $y(x)$, se obtiene la solución general:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C\right), \text{(ecuación 7)}$$

Esta solución refleja la combinación de dos componentes: uno asociado a la solución de la ecuación homogénea correspondiente y otro que incorpora el efecto del término independiente $Q(x)$. De esta manera, se logra describir el comportamiento completo de la solución considerando tanto la estructura interna de la ecuación como la influencia de términos adicionales.

Ejemplo 6.

Se tiene la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + y = x$

Al identificar que es EDOLPO no homogénea, se aplica el procedimiento de resolución correspondiente (ya sea mediante la definición presentada previamente o el uso de la ecuación general *(ecuación 7)*), tal que:

$$y(x) = e^{-\int dx}\left(\int xe^{\int dx}dx + C\right)$$

Luego, se tiene que:

$$y(x) = e^{-x}\left(\int xe^{x}dx + C\right)$$

Entonces:

$$y(x) = e^{-x}(e^{x}(x-1) + C)$$

Finalmente, como solución general:

$$y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$$

En este caso, la solución combina un término particular que depende de la variable independiente y un término exponencial asociado a la solución homogénea, lo que permite describir de manera más completa el comportamiento de la función.

A partir de los métodos de solución abordados, es posible analizar las EDOLPO en contextos más específicos mediante los denominados problemas de valor inicial (PVI). Un PVI consiste en una ecuación diferencial acompañada de una condición inicial que permite determinar una solución única dentro de la familia de soluciones generales. Este aspecto resulta fundamental en las aplicaciones, ya que los fenómenos reales no solo requieren un modelo matemático, sino también información inicial que permita describir su comportamiento de manera particular. En este sentido, las ecuaciones diferenciales, junto con sus condiciones iniciales, constituyen una herramienta esencial para la modelación de situaciones reales, lo que da paso al estudio de diversas aplicaciones en múltiples contextos.

2.3.2 Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden.

Las ecuaciones diferenciales desempeñan un papel fundamental en las matemáticas aplicadas, ya que permiten la descripción y el análisis de fenómenos de cambio en diversas disciplinas científicas. En particular, las EDOLPO ocupan un lugar destacado, pues representan los modelos más simples y, a la vez, más útiles para la formulación e interpretación de fenómenos reales, al facilitar la comprensión matemática y su aplicación en situaciones como el crecimiento poblacional, el interés compuesto, la ley de enfriamiento/calentamiento y los circuitos eléctricos.

Figura 5.

Representación visual de aplicaciones de las EDOLPO

Nota. La imagen ilustra diversas aplicaciones abordadas en la unidad didáctica, tales como la propagación de virus, el enfriamiento de bebidas, el calentamiento de alimentos, los circuitos eléctricos y el interés compuesto continuo. Elaboración propia con apoyo de IA GPT.

2.3.2.1 Crecimiento Poblacional (Ley de Malthus)

Uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento poblacional fue el propuesto por Thomas Malthus, que describe cómo varía la población en ausencia de limitaciones externas y bajo la suposición de que las tasas de natalidad y mortalidad permanecen constantes en el tiempo. En esencia, la hipótesis central del modelo sostiene que la rapidez con la que crece una población es proporcional al tamaño que esta posee en un instante de tiempo determinado.

Este comportamiento se describe mediante la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dP}{dt} = k\,P(t) \text{ (ecuación 8)}$$

donde $P(t)$ representa el tamaño de la población en el tiempo t y k es una constante denominada tasa de crecimiento poblacional.

2.3.2.2 Interés Compuesto Continuo

El interés compuesto constituye uno de los conceptos más significativos en las matemáticas financieras, pues describe el crecimiento de un capital cuando los intereses generados en un período se reinvierten para producir nuevos rendimientos en periodos posteriores. A diferencia del interés simple, en el que los intereses se calculan únicamente sobre el capital inicial, en el interés compuesto cada acumulación se suma al capital, lo que genera un proceso de crecimiento progresivo y acumulativo.

Desde el punto de vista matemático, el interés compuesto continuo puede modelarse mediante la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden:

$$\frac{dC}{dt} = rC(t) \text{ (ecuación 9)}$$

donde $C(t)$ representa el capital acumulado en el tiempo t y r es una constante denominada tasa de interés continuo.

2.3.2.3 Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton

Newton formuló un modelo matemático para describir cómo varía la temperatura de un objeto cuando se encuentra en un ambiente cuya temperatura difiere de la suya. Este planteamiento se fundamenta en la idea de que la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura del entorno.

Matemáticamente se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \text{ (ecuación 10)}$$

Donde $T(t)$ representa la temperatura del objeto, T_a la temperatura del ambiente o medio (Si las condiciones atmosféricas se mantienen constantes, el cuerpo tiende progresivamente a igualarse con ellas; sin embargo, si T_a varía con el tiempo, la solución de la ecuación deja de ser simple y el comportamiento térmico depende directamente de dicha variación) y k una constante de proporcionalidad que dependerá de las características del sistema.

2.3.2.4 Circuitos en Serie

El estudio de los circuitos eléctricos constituye una de las aplicaciones más destacadas de las ecuaciones diferenciales en ingeniería y física. Si bien el comportamiento completo de los sistemas eléctricos se explica a través de ecuaciones más elaboradas, para fines de modelación elemental resulta suficiente recurrir a la Ley de Kirchhoff. Esta ley establece que la suma de las caídas de voltaje en los elementos del circuito es igual al voltaje suministrado por la fuente, lo que permite describir la relación entre el voltaje, la corriente y los elementos del circuito en forma de EDOLPO. Este modelo permite entender cómo se almacena, disipa y transfiere la energía en sistemas eléctricos básicos, y constituyen la base para el análisis de circuitos más complejos.

- **Circuitos LR (Inductor – Resistor)**

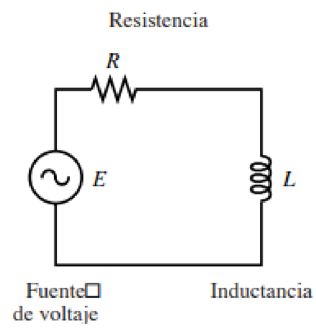
El circuito LR está conformado por una resistencia R y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $E(t)$. Bajo la Ley de Kirchhoff el comportamiento de la corriente se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t) \text{ (Ecuación 11)}$$

donde $i(t)$ es la corriente eléctrica en el tiempo. Este modelo refleja cómo la corriente evoluciona en el tiempo, influenciada tanto por la resistencia como por la inductancia.

Figura 6.

Ejemplo circuito Inductor- Resistor



Nota. En la figura se representa la conexión que presenta un circuito LR. Tomado de *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (p. 145), por Nagle et al., (2005). Pearson Education.

- **Circuitos RC (Resistor – Capacitor)**

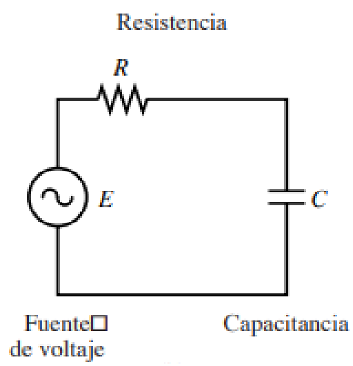
En el circuito RC, una resistencia R y un capacitor de capacitancia C se encuentran conectados en serie con una fuente de voltaje $E(t)$. Bajo la Ley de Kirchhoff el comportamiento de la corriente se interpreta de la siguiente manera:

$$E(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t) \text{ (ecuación 12)}$$

donde $q(t)$ representa la carga almacenada en el capacitor. Este modelo explica cómo el capacitor almacena y libera energía, modulada por la resistencia que controla la dinámica del proceso.

Figura 7.

Ejemplo circuito Resistor - Capacitor



Nota. En la figura se representa la conexión que presenta un circuito RC. Tomado de *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (p. 145), por Nagle et al., (2005). Pearson Education.

En síntesis, los aspectos matemáticos abordados en este apartado permiten establecer una base conceptual sólida para la comprensión de las EDOLPO, tanto desde su estructura formal como desde sus métodos de solución. Asimismo, la incorporación de diversas aplicaciones evidencia la importancia de estas ecuaciones para modelar fenómenos reales en distintos contextos, lo cual resulta fundamental en el ámbito educativo. En particular, la integración entre los conceptos teóricos, los problemas de valor inicial y las situaciones de modelación trabajadas en la propuesta didáctica favorece una comprensión más significativa del objeto matemático, esto permite que los estudiantes no solo reconozcan las ecuaciones diferenciales como expresiones simbólicas, sino como herramientas útiles para interpretar y analizar el mundo que los rodea.

3. Aspectos Metodológicos

La presente propuesta pedagógica se desarrolla en el marco de la práctica docente como proyecto de grado del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. En este escenario, se adopta un enfoque metodológico de carácter mixto, con predominio cualitativo, orientado al análisis de la experiencia educativa derivada del diseño e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de las EDOLPO en un curso de Ecuaciones Diferenciales en la sede principal de la UIS.

Más que dar respuesta a una pregunta de investigación, este trabajo se centra en el diseño, puesta en práctica y valoración crítica de una intervención pedagógica orientada al fortalecimiento de la comprensión conceptual de las EDOLPO. Desde esta perspectiva, el estudio parte de una hipótesis pedagógica según la cual la incorporación de estrategias didácticas fundamentadas en el ABP, la modelación matemática y el uso de herramientas tecnológicas puede favorecer una comprensión más significativa de los mencionados conceptos matemáticos. En este sentido, a partir de la implementación de la propuesta didáctica se analizan los aportes de dichas estrategias al proceso de aprendizaje de los estudiantes, así como se reflexiona sobre su potencial como alternativa pedagógica para la enseñanza de las matemáticas en el contexto universitario.

En coherencia con lo anterior, en este capítulo se presenta el enfoque metodológico que orienta el desarrollo de la experiencia educativa. Asimismo, se describen el contexto de la práctica, los instrumentos utilizados para la recolección de información, las fases de desarrollo de la intervención pedagógica y los criterios de análisis de la información obtenida durante el proceso.

3.1 Enfoque Metodológico

La práctica docente se desarrolla bajo un enfoque metodológico mixto, con predominio cualitativo, que permite analizar el proceso educativo desde una perspectiva que combina la interpretación de las experiencias de aprendizaje con el análisis descriptivo de algunos resultados obtenidos durante la implementación de la propuesta. Este enfoque resulta pertinente en el estudio de los procesos educativos, ya que facilita la comprensión de las dinámicas que surgen en el aula y permite interpretar la forma en que los estudiantes interactúan tanto con los contenidos matemáticos como con las estrategias pedagógicas aplicadas.

Desde la perspectiva cualitativa, el interés principal se centra en interpretar las dinámicas de aprendizaje que aparecen durante el desarrollo de las actividades propuestas, así como en analizar las percepciones, reflexiones y valoraciones de los estudiantes frente a los procesos de aprendizaje desarrollados en el aula bajo esta metodología (Medina et al, 2023). Este enfoque permite comprender de qué manera los estudiantes construyen significados en torno a los conceptos asociados a las EDOLPO, particularmente cuando estos se abordan a través de problemas contextualizados y estrategias activas de aprendizaje.

De forma complementaria, aparece en menor medida el componente cuantitativo, que se incorpora a través del análisis estadístico de los resultados obtenidos mediante algunos instrumentos aplicados durante la intervención pedagógica. La información obtenida a partir de estos instrumentos permite identificar tendencias generales en el desempeño de los estudiantes y aportar elementos adicionales para la valoración de las actividades propuestas, así se contribuye al mejoramiento de la unidad didáctica como instrumento para futuras intervenciones pedagógicas o investigaciones en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Medina et al, 2023).

Asimismo, el estudio tiene un carácter descriptivo y aplicado. Su carácter descriptivo se relaciona con el interés por documentar y analizar la experiencia educativa desarrollada durante la práctica docente, mientras que su carácter aplicado se evidencia en el diseño e implementación de una intervención pedagógica orientada a fortalecer la comprensión conceptual de las EDOLPO mediante el uso de metodologías activas y herramientas TIC.

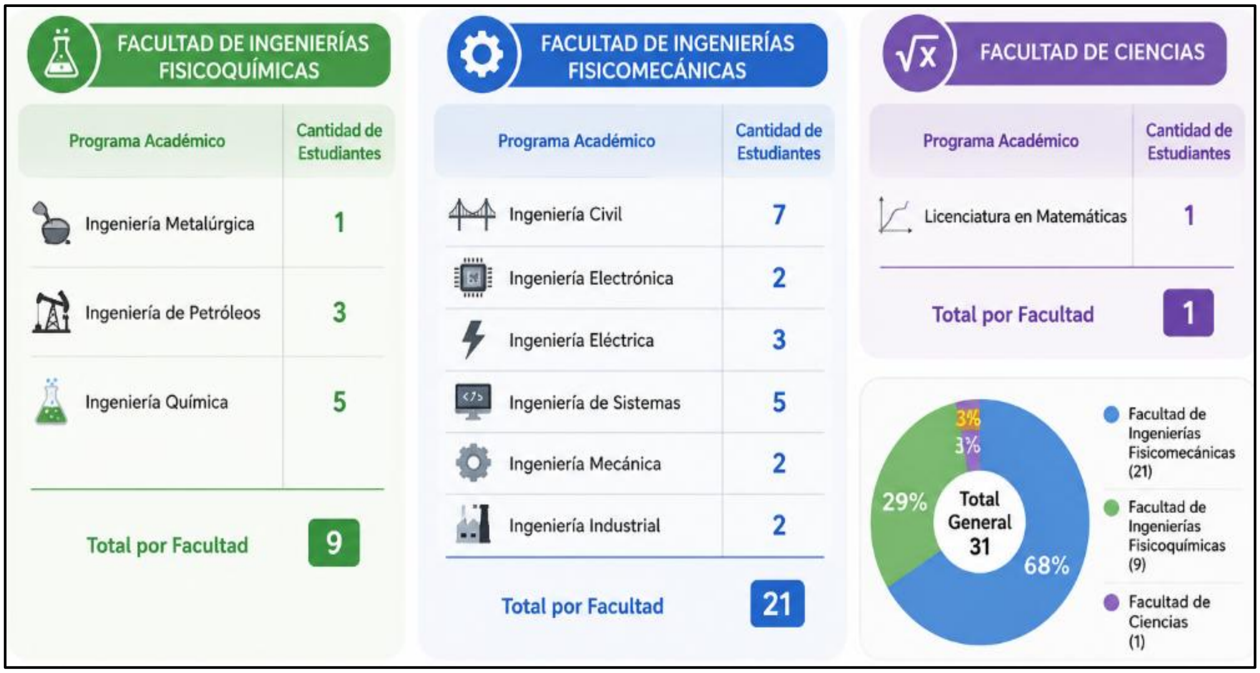
3.2 Contexto de la Práctica

La práctica docente se desarrolló con el grupo B4 del curso de Ecuaciones Diferenciales durante el semestre 2026-1. En este contexto, resulta pertinente describir la organización académica del semestre en la Universidad Industrial de Santander, el cual tiene una duración de 16 semanas y se estructura en tres cortes o unidades evaluativas. Estos cortes corresponden a períodos de desarrollo temático delimitados por la realización de un examen parcial o una actividad evaluativa. En este sentido, cada corte representa una etapa del proceso formativo en la que se abordan determinados contenidos y normalmente se evalúa la apropiación temática mediante un examen parcial.

Las sesiones de clase se desarrollaban los martes y jueves de 8:00 a 10:00 de la mañana en el salón 403 del edificio Camilo Torres. El grupo estaba conformado por 31 estudiantes provenientes de distintos programas académicos, quienes cursaban la asignatura como parte de su formación disciplinar. En términos generales, la edad de los estudiantes oscilaba entre los 18 y 27 años, lo que corresponde a una población universitaria en etapa de formación inicial. En particular, los estudiantes se encontraban distribuidos en diferentes facultades y carreras, la diversidad del aula por programa académico se puede observar en la *Figura 8*

Figura 8.

Distribución de los estudiantes de la asignatura por programa académico



Nota. Distribución de los estudiantes de la asignatura Ecuaciones Diferenciales del grupo B4 semestre 2026-1 por facultades y programas académicos de la UIS. Elaboración propia con apoyo de IA (GPT).

Esta diversidad disciplinar configuraba un grupo muy heterogéneo en sus enfoques disciplinares y formas de apropiarse del conocimiento. Además, en el desarrollo del curso participaron la docente titular de la asignatura como guía principal y dos estudiantes en práctica, quienes desarrollaron su proceso formativo mediante la planificación y ejecución de sesiones de clase dentro del curso.

Figura 9.

Estudiantes del grupo B4 en el aula de clase

Nota. Fotografía tomada por el autor en una de las clases con los estudiantes de Ecuaciones Diferenciales del grupo B4.

La implementación de la práctica docente se organizó de manera progresiva a lo largo del primer corte académico. En la primera sesión se realizó la presentación de la asignatura y la aplicación de la prueba diagnóstica, con el propósito de explorar los conocimientos previos de los estudiantes. Posteriormente, las dos sesiones siguientes fueron desarrolladas por la docente titular, en las cuales se abordaron contenidos iniciales del curso. Una vez terminadas las actividades iniciales a cargo de la docente titular, se empezó la intervención pedagógica donde se asumió la orientación de cuatro sesiones de clase, en las cuales se implementaron las actividades correspondientes a la unidad didáctica diseñada para la enseñanza de las EDOLPO. Finalmente, el segundo estudiante en práctica continuó con el desarrollo de las sesiones restantes del primer corte. En la *Figura 10* se presenta el cronograma de actividades correspondiente a este corte, en el cual se detalla la organización de las sesiones, los temas abordados y los responsables de cada una de las temáticas.

Figura 10.

Cronograma de actividades del primer corte de Ecuaciones Diferenciales

Clase	Fecha	Sección	Temas	Actividades TI	Persona a cargo de la clase
1	3/02/2026	N/A	Presentación del curso y prueba diagnóstica	Lectura previa sección 1.1	Todos
2	5/02/2026	1.1	Introducción a las definiciones y teminología	Lectura previa sección 1.2	Docente titular
3	10/02/2026	1.2	Problemas de valor inicial	Crucigrama secciones 1.3, 2.2 y 2.3	Docente titular
4	12/02/2026	2.2 y 2.3	Variables separables y Ecuaciones Lineales	Talleres de aplicación Ley de Newton	Practicante 1
5	17/02/2026	2.7 y 2.3	Aplicaciones Lineales - Ley de Malthus	Talleres de aplicación Ley de Newton	Practicante 1
6	19/02/2026	2.7 y 2.3	Aplicaciones Lineales - Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton	Talleres Interés y circuitos	Practicante 1
7	24/02/2026	2.7 y 2.3	Aplicaciones Lineales - Interés Compuesto Continuo y Circuitos en Serie	Cuestionario sección 2.1 y 2.6	Practicante 1
8	26/02/2026	2.1 y 2.6	Curvas solución sin solución y un método numérico	Modelo Logistico	Practicante 2
9	3/03/2026	2.5	Soluciones por sustitución	Lectura previas sección 2.4	Practicante 2
10	5/02/2026	2.4	Ecuaciones Exactas	Taller vaciado de tanques	Practicante 2
11	10/03/2026	2.8	Modelos No Lineales	Lectura Previa trayectorias	Practicante 2
12	12/03/2026		Trayectorias Ortogonales	Quiz en Moodle primer corte	Practicante 2
13	17/03/2026	N/A	Sección de Ajuste	Preparación Parcial	Todos
14	19/03/2026	N/A	Primer Examen Parcial	Inicio segundo Corte	Todos

Nota. La figura muestra el cronograma de actividades del primer corte académico de ecuaciones diferenciales con el grupo intervenido, en el que se detallan los temas, actividades y responsables de cada sesión. Se destacan en color celeste las sesiones correspondientes a la intervención pedagógica implementada en el marco de esta unidad didáctica. Elaboración propia.

Tras las implementaciones, ambos estudiantes en práctica asumieron un rol de acompañamiento y apoyo a la docente durante los dos cortes restantes, con el fin de contribuir al desarrollo del curso y acompañar el proceso formativo de los estudiantes hasta la finalización de la asignatura.

3.3 Instrumentos de Recolección de Información

Con el propósito de analizar el desarrollo de la intervención pedagógica y comprender un poco más el proceso de aprendizaje de los estudiantes, se emplearon diversos instrumentos de recolección de datos. Estos instrumentos permitieron obtener tanto información cualitativa como cuantitativa relacionada con la comprensión conceptual de las EDOLPO, la participación de los estudiantes en las actividades propuestas y sus percepciones frente a la experiencia educativa desarrollada durante la implementación de las actividades.

Los instrumentos utilizados durante el desarrollo de la intervención fueron: la prueba diagnóstica, los talleres de GeoGebra, un quiz de evaluación conceptual, un examen parcial, una encuesta de percepción aplicada a los estudiantes y entrevistas semiestructuradas realizadas a algunos participantes. Estos instrumentos fueron desarrollados a través del aula Moodle UIS, en la cual se organizaron los recursos y actividades de la unidad didáctica (disponible en: https://lms.uis.edu.co/ava/course/view.php?id=23333). A continuación, se describe cada uno de estos instrumentos.

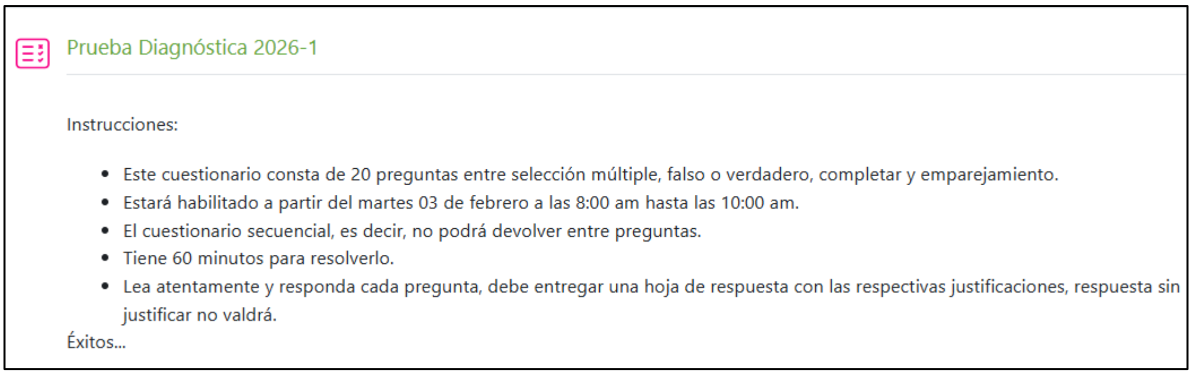
3.3.1 Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica fue aplicada al inicio del proceso de intervención pedagógica con el propósito de explorar los conocimientos previos de los estudiantes, relacionados con conceptos esenciales para el estudio de las ecuaciones diferenciales. Este instrumento fue diseñado de manera conjunta por la docente titular y los estudiantes en práctica, permitiendo identificar el nivel inicial de comprensión respecto a las ideas asociadas con procesos de cambio, logaritmos, interpretación de funciones, derivadas, integrales y análisis de situaciones problemáticas vinculadas a fenómenos.

En el proceso de diseño, la docente titular asumió un rol de supervisión y acompañamiento, brindando orientaciones generales basadas en su experiencia y estableciendo los parámetros académicos del instrumento. No obstante, se otorgó a los estudiantes en práctica la autonomía para proponer y seleccionar las preguntas en coherencia con dichos lineamientos. En total, la prueba estuvo conformada por 20 preguntas: 15 elaboradas por el autor de este trabajo y 5 por el segundo estudiante en práctica. (Preguntas de la prueba diagnóstica en *Apéndice 6*).

Figura 11.

Interfaz prueba diagnóstica



Nota. La figura presenta la interfaz del Moodle UIS donde los estudiantes ingresaban para resolver la prueba diagnóstica, junto con las indicaciones para la resolución. Elaboración propia.

Como se observa en la *Figura 11*, la prueba tuvo una duración máxima de una hora, fue aplicada de manera secuencial y se desarrolló en el salón de clase. Durante su aplicación, los estudiantes debían justificar sus respuestas en formato físico, utilizando lápiz y papel, lo que permitía complementar la información obtenida en la plataforma con respaldo de los procesos de razonamiento desarrollados.

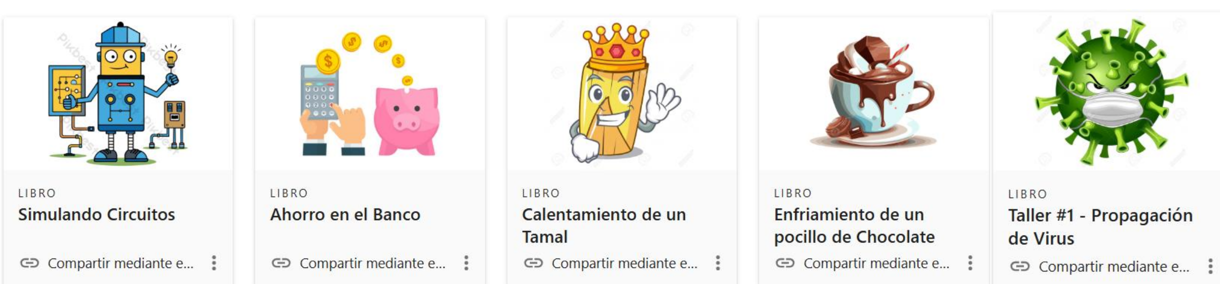
En términos de evaluación, la prueba contó con una valoración cuantitativa automática proporcionada por Moodle. Aunque se revisaron los procedimientos y análisis consignados por los estudiantes, no se estableció una rúbrica específica de evaluación, dado que su propósito principal fue diagnóstico y no calificativo en profundidad. La aplicación de este instrumento permitió obtener una primera aproximación al estado conceptual del grupo antes de la implementación de la unidad didáctica, siendo este un punto de referencia para orientar el desarrollo posterior de las actividades y para el análisis de los avances en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

3.3.2 Talleres en GeoGebra Classroom

Los talleres constituyeron el eje central de la unidad didáctica. A través de estos se desarrollaron actividades orientadas a la resolución de problemas contextualizados relacionados con diferentes fenómenos que pueden ser modelados mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden. Cada taller fue diseñado con el propósito de promover el análisis de situaciones problemáticas, la construcción de modelos matemáticos y la interpretación de los resultados obtenidos, así como de recoger información sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes y las dificultades que surgían durante el desarrollo de las actividades.

Figura 12.

Interfaz de los libros en GeoGebra Classroom



Nota. Libros elaborados en GeoGebra Classroom como actividad central en el desarrollo de la unidad didáctica. Elaboración propia.

En términos evaluativos, los talleres fueron valorados mediante una rúbrica que integraba tanto aspectos cualitativos como cuantitativos, en coherencia con las exigencias institucionales de asignación de una calificación numérica. Esta rúbrica se diseñó tomando como referencia los procesos generales de la actividad matemática, con el fin de evaluar el desempeño de los estudiantes más allá de la ejecución de procedimientos aislados.

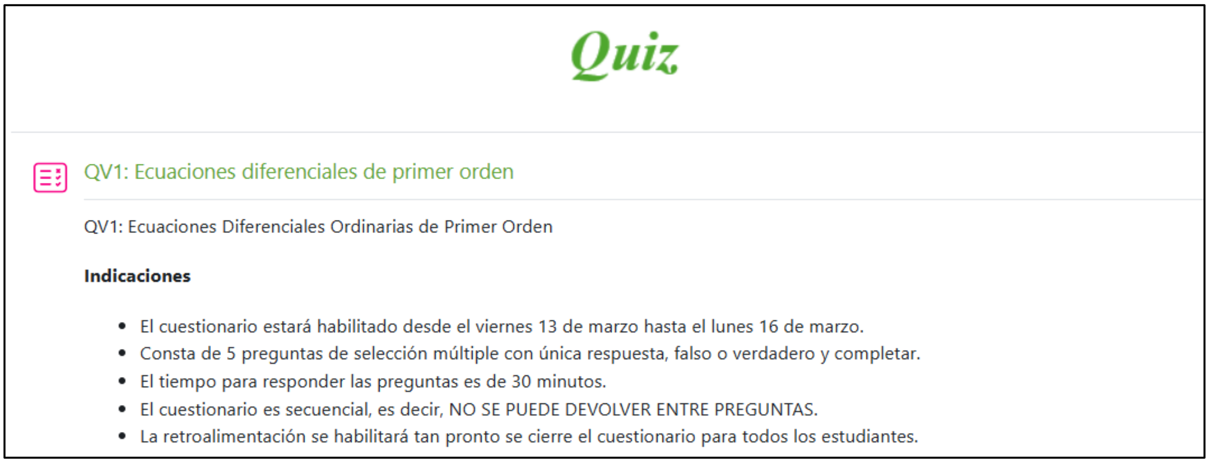
En este sentido, la rúbrica se estructuró en cinco dimensiones: Formulación y Resolución de Problemas, Modelación de Procesos y Fenómenos, Razonamiento y Comunicación Matemática, Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos, y Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). La elección de estos criterios respondió a la intención de valorar el aprendizaje matemático de manera integral, al reconocer que el trabajo con ecuaciones diferenciales implica no solo resolver expresiones, sino también interpretar fenómenos, establecer relaciones entre representaciones, argumentar resultados y comunicar ideas de forma coherente. De esta manera, la rúbrica permitió relacionar el enfoque pedagógico de la propuesta con los procesos evaluativos y las microcompetencias a desarrollar, favoreciendo una valoración más formativa del aprendizaje y evitando reducir el desempeño del estudiante a resultados numéricos descontextualizados.

3.3.3 Quiz

El quiz constituyó un instrumento orientado a valorar la comprensión conceptual de los estudiantes en relación con los contenidos trabajados durante el desarrollo de las actividades del primer corte. Este instrumento fue diseñado de manera conjunta por la docente titular y los estudiantes en práctica, e incluyó preguntas que requerían la interpretación de situaciones, el reconocimiento de estructuras propias de las ecuaciones diferenciales y la aplicación de conceptos asociados a su resolución. En cuanto a su estructura, cada estudiante debía responder un total de cinco preguntas: una proveniente del banco de ítems de la docente titular, dos correspondientes al banco elaborado en el marco de la presente intervención pedagógica y dos adicionales diseñadas por el otro estudiante en práctica. Estas preguntas no eran iguales para todos los estudiantes, ya que aparecían de manera aleatoria a partir de los tres bancos de preguntas independientes, lo que permitió diversificar los ítems presentados y reducir la repetición entre cada intento.

Figura 13.

Interfaz quiz primer corte



Nota. En la figura se presenta la interfaz de Moodle para los estudiantes, con la indicaciones y parámetros para la resolución del quiz correspondiente a las temáticas trabajadas durante el primer corte. Elaboración propia.

El quiz fue aplicado a través del Aula Moodle de la UIS en un horario extra-clase de fin de semana, lo que permitió a los estudiantes desarrollarlo de manera autónoma; sin embargo, debido a esta modalidad, se consideró la posibilidad del uso de ayudas externas. En este sentido, su propósito se orientó principalmente hacia la preparación y anticipación del examen parcial, más que a la obtención de información evaluativa concluyente. La valoración del quiz fue de carácter exclusivamente cuantitativo, sin el uso de rúbrica, y permitió identificar tendencias generales en el desempeño de los estudiantes, así como reconocer fortalezas y debilidades conceptuales previas a la evaluación formal del curso. Para efectos del análisis de la experiencia educativa, se consideraron únicamente las respuestas correspondientes a las dos preguntas asociadas al banco de ítems diseñado bajo lo trabajado en esta intervención pedagógica.

3.3.4 Examen Parcial

El examen parcial constituyó un instrumento de evaluación formal orientado a valorar la comprensión conceptual, práctica y procedimental de los estudiantes en relación con los conocimientos adquiridos durante el corte. Este instrumento fue diseñado de manera conjunta por la docente titular y los estudiantes en práctica, e incorporó un total de cuatro preguntas, cada una con sus respectivos incisos. En su estructura, dos de las preguntas fueron elaboradas por la docente, enfocadas en la resolución de algoritmos y la apropiación de conceptos fundamentales; una pregunta fue diseñada en el marco de la presente intervención pedagógica, centrada en la modelación de situaciones mediante ecuaciones diferenciales lineales; y la pregunta restante fue propuesta por el otro estudiante en práctica, orientada al abordaje de situaciones no lineales. En conjunto, el examen integró distintos tipos de tareas que permitieron evaluar tanto habilidades procedimentales como comprensiones conceptuales en diversos contextos.

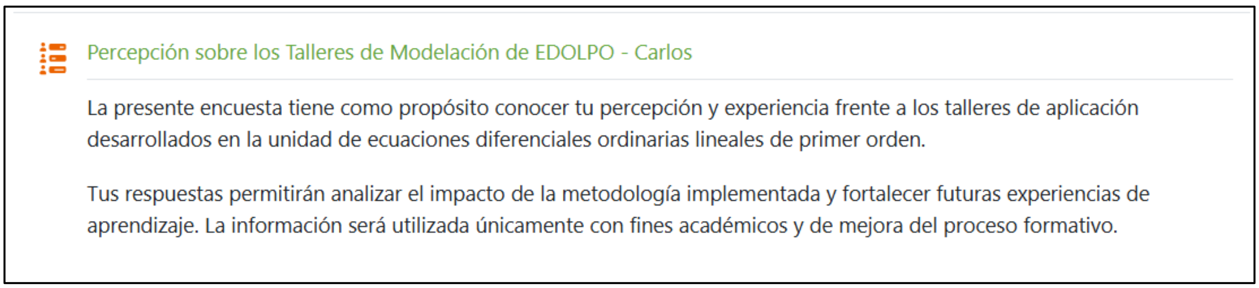
La evaluación, calificación y retroalimentación del examen fueron realizadas por la docente titular, en función de su criterio pedagógico, experiencia y lineamientos institucionales, sin el uso de una rúbrica previamente estructurada. En el marco de esta práctica docente, el examen parcial se asumió no solo como un instrumento de evaluación formal, sino también como un insumo determinante para el análisis del proceso de aprendizaje, dado que enfrentó a los estudiantes a la resolución individual de situaciones en condiciones similares a las de los talleres desarrollados, pero sin apoyo de sus pares y herramientas TIC. No obstante, para efectos de la presente práctica docente, el análisis se centró exclusivamente en la pregunta asociada a la modelación con ecuaciones lineales debido a su correspondencia directa con los objetivos de la unidad didáctica.

3.3.5 Encuesta de Percepción

Con el fin de conocer la opinión de los estudiantes respecto a las actividades implementadas durante la unidad didáctica, se aplicó una encuesta de percepción orientada a recoger sus valoraciones sobre los talleres, las estrategias pedagógicas utilizadas y el uso de herramientas tecnológicas durante las sesiones de clase.

Figura 14.

Interfaz encuesta de percepción de los talleres



Nota. La figura presenta la interfaz en Moodle, donde los estudiantes ingresaban a responder la encuesta de percepción sobre sus perspectivas y apreciaciones respecto a las actividades realizadas con ayuda del GeoGebra Classroom.

Adicionalmente, este instrumento buscó indagar sí los estudiantes habían tenido experiencias previas con metodologías similares, sí percibían avances o dificultades en su proceso de aprendizaje, sí consideran recomendable este tipo de estrategias en otros cursos y sí la experiencia resultó significativa y agradable. De esta manera, la encuesta permitió no solo identificar percepciones generales, sino también recoger elementos relacionados con la aceptación, pertinencia y posible impacto de la propuesta didáctica en el contexto formativo.

3.3.6 Entrevistas Semiestructuradas

Finalmente, se realizaron entrevistas semiestructuradas con el propósito de profundizar en los procesos de pensamiento de los estudiantes, más allá de los resultados obtenidos en los instrumentos netamente escritos. Para ello, y teniendo en cuenta las actividades desarrolladas hasta el momento (la prueba diagnóstica, el trabajo en los talleres, el quiz y la participación observada en clase), se realizó una preselección inicial de siete estudiantes que representaban distintos niveles de desempeño y formas de participación en el proceso. A partir de esta preselección, se invitó a los estudiantes a participar en la entrevista de manera voluntaria, explicándoles los propósitos de la actividad y las condiciones de su realización. De los siete estudiantes invitados, cinco aceptaron participar, mientras que los demás manifestaron no estar interesados o indicaron tener otros compromisos académicos en el momento de la invitación, lo que permitió garantizar que la participación se diera desde la disposición de los estudiantes y no como una obligación académica. Las entrevistas se planearon con una duración aproximada de una hora por estudiante, se desarrollaron de manera presencial y se estructuraron en cinco ítems que fueron abordados mediante trabajo a lápiz y papel.

Es importante señalar que la participación en estas entrevistas no tuvo ningún tipo de incidencia en las calificaciones del curso, con el fin de generar un ambiente de confianza que permitiera a los estudiantes expresarse con libertad. En este sentido, la entrevista se concibió como un espacio de diálogo en el que los estudiantes pudieran explicar sus razonamientos, compartir sus estrategias y evidenciar sus comprensiones, sin la presión asociada a una evaluación formal.

Estas entrevistas permitieron explorar aspectos como las estrategias utilizadas para abordar los problemas propuestos, las dificultades encontradas durante el proceso de aprendizaje, la forma en que interpretan los modelos matemáticos trabajados y su percepción sobre el uso de metodologías activas en la enseñanza de las EDOLPO. De esta manera, la información obtenida complementa los datos recogidos mediante los otros instrumentos y aporta una comprensión más profunda del proceso educativo desarrollado durante la intervención, especialmente en relación con cómo los estudiantes piensan, razonan y construyen significado en torno a las ecuaciones diferenciales, lo que permitió profundizar en la comprensión de los procesos de aprendizaje desde una perspectiva cualitativa y directa.

3.4 Fases de Desarrollo de la Intervención Pedagógica

El desarrollo de la intervención pedagógica se organizó en una serie de fases que permitieron estructurar el proceso desde la revisión teórica inicial hasta la valoración de la experiencia educativa obtenida durante la práctica docente. Estas fases orientaron el diseño, implementación y análisis de la unidad didáctica, así como la recolección de información necesaria para reflexionar sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes y sobre la pertinencia de las estrategias didácticas empleadas.

La organización por fases permitió desarrollar la intervención de manera progresiva, al acoplar los fundamentos teóricos con el diseño de las actividades, su aplicación en el aula, los instrumentos de evaluación y el posterior análisis de la experiencia educativa. A continuación, se describen las fases que conformaron el desarrollo de esta intervención pedagógica.

3.4.1 Revisión Bibliográfica

En esta fase se realizó la recopilación y análisis de referentes teóricos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, así como con enfoques pedagógicos y didácticos pertinentes para el diseño de la intervención educativa. En particular, se revisaron aportes asociados a los principios constructivistas, el ABP, la modelación matemática, la resolución de problemas y el uso de herramientas TIC en la educación matemática. Esta revisión permitió establecer los fundamentos pedagógicos y didácticos que orientaron el diseño de la unidad didáctica y de las actividades que la conforman. Asimismo, facilitó la definición de los objetivos pedagógicos de la intervención y la elaboración de los instrumentos ya mencionados que posteriormente serían utilizados durante la implementación.

3.4.2 Diseño y Elaboración de los Recursos Didácticos

Con base en los referentes teóricos analizados en la fase anterior y dispuestos en el capítulo 2, se procedió al diseño y elaboración de los recursos didácticos que conforman la unidad orientada a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden. En esta etapa se diseñaron y desarrollaron las actividades junto con los talleres en GeoGebra que posteriormente serían implementados durante las sesiones de clase.

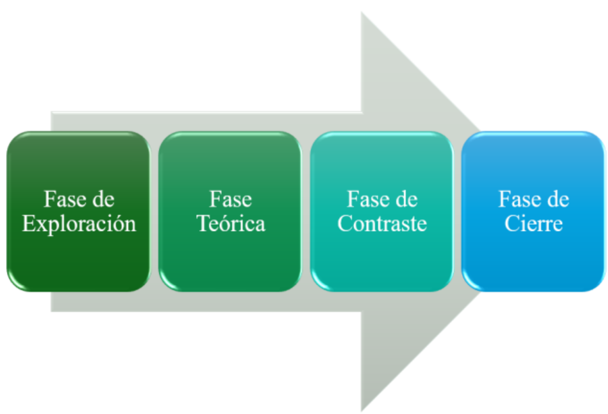
El diseño de estos recursos se fundamentó en la integración de metodologías activas de aprendizaje, particularmente el ABP y el modelo UIS21, junto con el uso pedagógico de herramientas tecnológicas como GeoGebra, simuladores interactivos y el Aula Moodle institucional. Esta combinación permitió plantear actividades centradas en la resolución de problemas contextualizados, la interpretación de fenómenos reales y la construcción de modelos matemáticos asociados a procesos de cambio y variación.

Los recursos diseñados incluyen planes de clase, guías de aprendizaje, materiales de apoyo, un taller de resolución manual (este taller solo será para repaso antes del parcial, no se evaluará, ni se tendrá en cuenta para la valoración de la unidad didáctica) y cinco talleres desarrollados en el Classroom de GeoGebra, organizados en una secuencia progresiva de actividades que parte de situaciones más intuitivas y avanza hacia procesos de modelación matemática más estructurados.

Durante el desarrollo de cada taller se plantean cuatro momentos de trabajo. En primer lugar, una fase de exploración, simulación y análisis (varían de acuerdo con el taller trabajado), en la cual los estudiantes interactúan con el fenómeno propuesto mediante el uso de herramientas tecnológicas que permiten observar el comportamiento del fenómeno modelado. Posteriormente, se desarrolla un momento de formalización teórica, en el que se introducen o consolidan los conceptos matemáticos asociados al modelo diferencial estudiado. En tercer lugar, se propone una fase de contraste teórico-empírico, orientada a relacionar los resultados obtenidos con la interpretación del fenómeno analizado y a reflexionar sobre el significado de las soluciones matemáticas en el contexto del problema. Finalmente, se incorpora una fase de cierre y socialización, en la cual se promueve la discusión colectiva, la puesta en común de resultados y la valoración conjunta de los aprendizajes alcanzados, favoreciendo así la reflexión crítica y el intercambio de ideas entre los estudiantes.

Figura 15.

Estructura de las fases de trabajo en los talleres de la unidad didáctica.



Nota. Representación de la secuencia metodológica implementada en los talleres de la unidad didáctica, organizada en cuatro fases: exploración, formalización teórica, contraste teórico-empírico y cierre. Elaboración propia.

En particular, se diseñaron cinco talleres contextualizados orientados a explorar diferentes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales:

- *Taller #1 Propagación de virus (Ley de Malthus)*
- *Taller #2 Enfriando chocolate (Ley de Enfriamiento de Newton)*
- *Taller #3 Calentando un tamal (Ley de Calentamiento de Newton)*
- *Taller #4 Ahorro en el banco (Interés Compuesto Continuo)*
- *Taller #5 Simulando circuitos (Circuitos en Serie RC)*

Cada uno de estos talleres conecta la resolución de problemas contextualizados con el análisis gráfico y analítico de las soluciones diferenciales, promoviendo la reflexión metacognitiva de los estudiantes y la comprensión del vínculo entre los conceptos matemáticos y los fenómenos que modelan. En su diseño se consideraron referentes como el enfoque de resolución de problemas de Polya, no como una estructura rígida a seguir (ni obligatoria), sino como una guía orientadora que permitiera a los estudiantes aproximarse a las situaciones desde diferentes estrategias. En este sentido, se buscó favorecer la exploración, la toma de decisiones y la construcción de procedimientos propios, evitando limitar el quehacer matemático a una única forma de resolución. Estos talleres conforman el eje central de la unidad didáctica y orientan la planeación de las sesiones de clase descritas en la fase de implementación de esta intervención. En esta fase se diseñaron, además, los instrumentos de evaluación y las herramientas de seguimiento del aprendizaje. (instrumentos descritos en el apartado *3.3)*.

3.4.3 Pilotaje de los Talleres

Con el propósito de evaluar la pertinencia y claridad de las actividades diseñadas, se realizó un pilotaje preliminar de la prueba diagnóstica y de los talleres 1, 2, 3 y 4 durante el semestre 2025-2 con dos grupos de la asignatura Ecuaciones Diferenciales.

Figura 16.

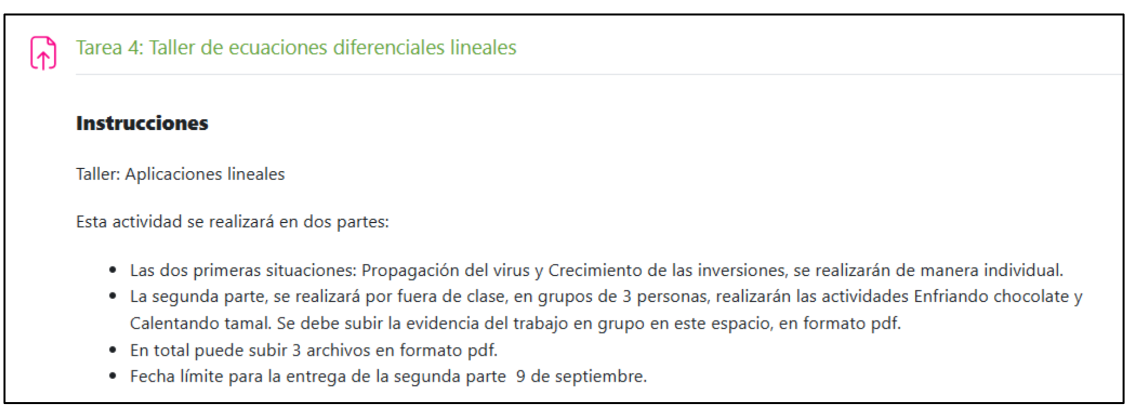
Aula Moodle con los cursos donde se hizo el pilotaje

Nota. Grupos de ecuaciones diferenciales donde se hizo la aplicación de la prueba piloto. Elaboración propia.

En primer lugar, el pilotaje se desarrolló con el grupo B1, conformado por 33 estudiantes. En este grupo se aplicó al iniciar el semestre una prueba diagnóstica que constaba de 15 preguntas y se implementaron los cuatro talleres diseñados hasta ese momento, de los cuales el primero se desarrolló de manera presencial en el aula durante una sesión de clase de dos horas, mientras que los tres restantes se propusieron como trabajo extra-clase con un especio de entrega de una semana. Posteriormente, se llevó a cabo una sesión de dos horas para la socialización en la que se discutieron las soluciones y se analizaron las estrategias utilizadas por los estudiantes.

Figura 17.

Interfaz Moodle aplicación de los talleres prueba piloto


Tarea 4: Taller de ecuaciones diferenciales lineales

Instrucciones

Taller: Aplicaciones lineales

Esta actividad se realizará en dos partes:

- Las dos primeras situaciones: Propagación del virus y Crecimiento de las inversiones, se realizarán de manera individual.
- La segunda parte, se realizará por fuera de clase, en grupos de 3 personas, realizarán las actividades Enfriando chocolate y Calentando tamal. Se debe subir la evidencia del trabajo en grupo en este espacio, en formato pdf.
- En total puede subir 3 archivos en formato pdf.
- Fecha límite para la entrega de la segunda parte 9 de septiembre.

Nota. En la figura se muestra el espacio Moodle de los grupos B1 y B4 de ecuaciones en el semestre 2025-2 donde los estudiantes debían subir la solución manual y evidencias de trabajo de los 4 taller de GeoGebra. Elaboración propia.

De manera complementaria, el pilotaje se realizó con el grupo B4, integrado por 34 estudiantes. En este caso, por cuestiones de tiempo no se aplicó la prueba diagnóstica, pero se implementaron los cuatro talleres como actividades extra-clase con un tiempo máximo para entregarlos de una semana, y posteriormente se desarrolló una sesión de dos horas para socialización general. Es importante señalar que, en este grupo, la intervención fue más limitada, lo que permitió observar el comportamiento de los talleres en condiciones de menor acompañamiento docente.

Esta etapa tuvo como finalidad explorar cómo los estudiantes interpretaban las situaciones planteadas en los talleres, así como analizar el nivel de dificultad de las actividades y el tiempo requerido para su desarrollo. Durante el pilotaje se observaron aspectos relacionados con la comprensión de los enunciados, la participación de los estudiantes y las estrategias utilizadas para abordar los problemas planteados, lo cual permitió identificar tanto fortalezas como algunos aspectos susceptibles de mejora en el diseño de los instrumentos.

En el caso de la prueba diagnóstica, el pilotaje permitió evidenciar la necesidad de fortalecer algunos componentes conceptuales. En particular, se identificó la ausencia de preguntas relacionadas con problemas de valor inicial (PVI) y situaciones propias del cálculo, así como vacíos en la evaluación de habilidades básicas de manipulación algebraica. Durante su aplicación, se encontraron dificultades en procesos como despejes, factorización, manejo de potencias y raíces, lo cual llevó a incorporar posteriormente preguntas orientadas a las operaciones con reales y al uso de logaritmos y exponentes, dada su relevancia en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Por su parte, en los talleres se identificaron falencias principalmente en la claridad de las indicaciones, las cuales resultaban limitadas y generaban confusión en los estudiantes al momento de abordar las actividades. En particular, el *Taller #3* fue el que requirió mayores ajustes, debido a su nivel de complejidad al abordar situaciones de temperatura ambiente variable en el manejo de la ley de enfriamiento y calentamiento de Newton. Esto implicó una reestructuración del taller con el fin de hacerlo más accesible, menos extenso y cognitivamente más manejable.

Asimismo, se consideró necesario reducir el número de preguntas en los talleres, mejorar la redacción para hacerlas más concisas y enfatizar la importancia de seguir la secuencia por fases. Durante el pilotaje se evidenció que varios estudiantes tendían a omitir las fases iniciales de exploración y análisis, pasando directamente a la resolución algebraica de los problemas. Este comportamiento rompe la intención pedagógica del taller, ya que desconecta el proceso progresivo de construcción del conocimiento y limita la comprensión del fenómeno modelado.

Finalmente, se realizó una valoración general anónima de la experiencia de pilotaje con los estudiantes, en la cual se identificaron aspectos altamente favorables frente a la propuesta. En particular, los estudiantes destacaron de forma positiva el hecho de abordar las EDOLPO en contextos cercanos, cotidianos y simples, lo cual no esperaban encontrar en este tipo de curso por su complejidad. Este reconocimiento permitió reafirmar la pertinencia de los talleres y motivó la mejora de estos, fortaleciendo así su validez didáctica dentro de la propuesta.

A partir de estas observaciones, se realizaron ajustes en la redacción, organización y enfoque de los elementos de la unidad didáctica, lo que permitió consolidar una versión refinada de los talleres y de la prueba diagnóstica que posteriormente fueron utilizados en la implementación formal de la unidad didáctica.

3.4.4 Implementación de la Unidad Didáctica

La implementación de la unidad didáctica se llevó a cabo durante las sesiones de clase en las cuales el estudiante en práctica asumió la orientación del curso dentro del grupo B4 de Ecuaciones Diferenciales del primer corte en el semestre 2026-1. En estas sesiones se desarrollaron los talleres diseñados previamente, los cuales abordaban diferentes situaciones contextualizadas orientadas a la comprensión de las EDOLPO.

Previo al desarrollo formal de los elementos principales de la unidad didáctica, en la primera sesión de clase se aplicó la prueba diagnóstica con el fin de explorar los conocimientos previos de los estudiantes y contar con un punto de partida para orientar el desarrollo de las actividades propuestas. Esta se desarrolló en el aula de clase mediante el uso del Moodle como medio de registro de respuestas, mientras que los estudiantes consignaban en formato físico la justificación y el análisis de cada una de las situaciones planteadas. El propósito de esta prueba fue explorar los conocimientos previos de los estudiantes y contar con un punto de partida que permitiera orientar el desarrollo de las actividades propuestas.

La intervención pedagógica formal se desarrolló a lo largo de cuatro sesiones de clase de dos horas cada una, para las cuales se diseñaron cuatro planes de clase. Para la elaboración de estos planes se tomaron como referencia la *plantilla para el diseño pedagógico de un curso* y la *plantilla para planeación didáctica (*ver *Apéndices 2 y 3)* de la Universidad Industrial de Santander, a partir de las cuales se construyó una plantilla propia adaptada a las necesidades de la unidad didáctica, manteniendo coherencia con los lineamientos institucionales (ver *Apéndice 4*). La primera sesión se llevó a cabo el jueves 12 de febrero y tuvo un carácter principalmente teórico, orientado a la introducción de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden, al presentar sus principales características, formas de representación y algunos de los métodos de solución asociados (ver plan de clase sección 1, *Apéndice 7*).

Figura 18.

Implementación de una de las clases de Ecuaciones Diferenciales

Nota. Fotografía tomada en una de las implementaciones de la unidad didáctica, donde se observa la interacción entre el docente practicante y el grupo B4 de Ecuaciones Diferenciales.

Las tres sesiones restantes se centraron en el desarrollo y socialización de los talleres que se construyeron en GeoGebra y que forman el eje principal de la unidad didáctica. En la segunda sesión, realizada el martes 17 de febrero, se trabajó en clase el *Taller 1*, lo cual permitió a los estudiantes interactuar directamente con la situación problemática propuesta y explorar el fenómeno modelado mediante el uso de herramientas tecnológicas. Además, en este espacio, el acompañamiento docente favoreció la resolución de inquietudes y posibilitó la observación directa de los avances conceptuales, las fortalezas y dificultades que surgían en esta primera aproximación a la modelación y resolución de problemas. En contraste, los talleres posteriores fueron desarrollados de manera autónoma por los estudiantes fuera del aula, con el propósito de fortalecer su capacidad de autonomía de trabajo y la apropiación de los conceptos trabajados.

La tercera sesión implementada el jueves 19 de febrero estuvo dedicada a la socialización y discusión de los talleres 2 y 3, mientras que en la cuarta sesión llevada a cabo el martes 24 de febrero se realizó la socialización y análisis de los talleres 4 y 5. Durante estos espacios de socialización se promovió la discusión de ideas, el contraste de estrategias de solución y la interpretación de los resultados obtenidos por los estudiantes.

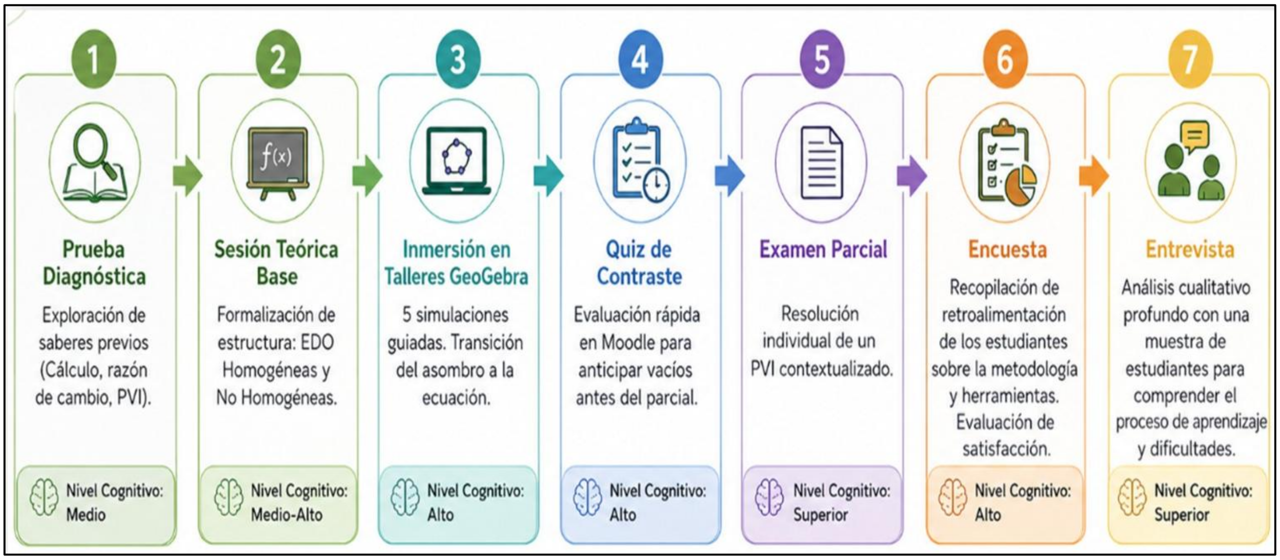
Las sesiones se desarrollaron a partir de una dinámica que favorecía la participación de los estudiantes. En un primer momento se presentaba la situación problemática con el fin de contextualizar el fenómeno a estudiar y activar conocimientos previos; posteriormente, los estudiantes abordaban el taller correspondiente, formulando el modelo matemático, analizando sus soluciones y estableciendo relaciones entre los resultados teórico-prácticos. Durante este proceso se promovió tanto el trabajo individual como el colaborativo, así como la discusión entre pares, apoyada en el uso de herramientas tecnológicas que facilitaron la visualización y comprensión de los modelos diferenciales. De igual manera, se mantuvo cierta flexibilidad académica en el desarrollo de las actividades, brindando apoyo a aquellos estudiantes cuyas situaciones personales podían afectar su rendimiento, así como a quienes presentaban mayores dificultades en la resolución de las tareas propuestas, con el fin de favorecer su participación y continuidad en el proceso de aprendizaje.

Una vez finalizadas las cuatro sesiones, se dejó el taller de resolución manual o de práctica para el parcial (este no tenía nota, ni valoración sobre esta unidad, solo sería de trabajo independiente) y llegando al final del corte, se implementaron diversas actividades de seguimiento y evaluación que complementaron la unidad didáctica. En este sentido, entre el viernes 13 y el lunes 16 de marzo se aplicó un quiz virtual a través del Aula Moodle, el cual fue desarrollado de manera autónoma por los estudiantes. Este instrumento estuvo conformado por cinco preguntas principalmente de selección múltiple, sin requerimiento de justificación de procesos, y tuvo un tiempo de 30 minutos, es decir, un promedio de 6 minutos por pregunta, su carácter fue principalmente formativo, orientado a la preparación del examen parcial más que a una evaluación estricta del conocimiento individual. Cabe volver a mencionar que, de las cinco preguntas, dos estuvieron directamente relacionadas con los contenidos abordados en la unidad didáctica, ya que se trataba del quiz del corte.

Posteriormente, el jueves 19 de marzo se llevó a cabo de forma física y presencial el examen parcial correspondiente al corte, el cual constaba de cuatro preguntas, de las cuales una se encontraba directamente relacionada con los contenidos y enfoques trabajados en la unidad didáctica. Este examen hizo parte del proceso evaluativo formal del curso y tuvo una duración máxima de 100 minutos. Adicionalmente, se dispuso la encuesta de percepción con el fin de recoger las valoraciones de los estudiantes frente a las actividades realizadas. Finalmente, una semana después de la aplicación del parcial se contempló la realización de entrevistas semiestructuradas a estudiantes seleccionados, con el propósito de profundizar en sus experiencias y en los procesos de aprendizaje desarrollados durante la intervención.

Figura 19.

Secuencia de actividades de la unidad didáctica implementada



Nota. La figura presenta la secuencia metodológica desarrollada durante la implementación de la unidad didáctica, organizada en siete momentos. Elaboración propia con apoyo de IA (GPT).

Esta organización permitió integrar la exploración, formalización y reflexión, en coherencia con el enfoque metodológico adoptado. En particular, se favoreció que los estudiantes no solo se enfrentaran a los procedimientos matemáticos, sino que construyeran significado a partir de la interacción con situaciones cercanas, el uso de herramientas TIC y el diálogo con sus pares. Asimismo, esta estructura facilitó la transición de una comprensión intuitiva hacia una comprensión más formal de los modelos diferenciales, promoviendo procesos de interpretación, argumentación y análisis crítico. De esta manera, la intervención no se centró únicamente en la resolución de ejercicios, sino en la construcción de un aprendizaje más significativo y conectado con los fenómenos estudiados.

3.4.5 Valoración y Análisis de la Experiencia Educativa

La última fase del proceso correspondió a la valoración de la experiencia educativa desarrollada durante la intervención pedagógica. En esta etapa se establecieron los criterios y procedimientos para el análisis de la información obtenida a partir de los diferentes instrumentos aplicados, con el propósito de identificar avances en la comprensión conceptual de los estudiantes y reconocer posibles dificultades en el desarrollo de las actividades propuestas. Esta valoración se sustentó en la información recolectada mediante la prueba diagnóstica, los talleres, el quiz, la encuesta, el examen parcial y las entrevistas semiestructuradas, los cuales permitieron obtener evidencias tanto del desempeño académico de los estudiantes como de sus percepciones frente a la experiencia educativa.

Para el análisis de estos datos se consideraron como criterios la interpretación de situaciones, la formulación de modelos matemáticos, la aplicación de métodos de solución, la comunicación matemática, la representación de situaciones, las conexiones en contextos y la argumentación de resultados. En este sentido, la unidad de análisis estuvo centrada en las respuestas y producciones de los estudiantes en cada uno de los instrumentos, así como en las explicaciones y razonamientos expresados durante las entrevistas. Asimismo, se definieron estrategias de análisis de tipo cuantitativo y cualitativo. En el caso de los instrumentos escritos, se contempló la revisión de respuestas, la identificación de errores frecuentes, el análisis de tendencias generales en el desempeño y la comparación de resultados obtenidos en las diferentes actividades.

Por su parte, en las entrevistas se consideró la interpretación de los razonamientos, estrategias y formas de comprensión expresadas por los estudiantes, lo que permitió profundizar en los procesos de pensamiento involucrados en la resolución de las actividades propuestas.

Finalmente, el análisis se desarrolló a partir de un proceso de triangulación de la información, en el cual se contrastaron los resultados obtenidos en los diferentes instrumentos con las observaciones realizadas durante la implementación, con el fin de obtener una comprensión más amplia y fundamentada del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Los resultados derivados de este proceso se presentan y discuten posteriormente.

4. Desarrollo y Análisis de la Unidad Didáctica

El presente capítulo tiene como propósito analizar, desde una perspectiva pedagógica y didáctica, el diseño, la intención y la estructura de la unidad didáctica orientada a la enseñanza de las EDOLPO. En este sentido, no se limita a describir la propuesta, sino que examina de manera crítica las decisiones de enseñanza que la sustentan, las intenciones formativas que la orientan y las posibles formas en que los estudiantes podrían interactuar con las actividades planteadas. Asimismo, se busca anticipar los posibles procesos de pensamiento de los estudiantes, las estrategias de resolución que podrían presentar y las dificultades que podrían tener durante el desarrollo de las actividades, en coherencia con los objetivos de aprendizaje planteados.

La competencia general que orienta la unidad didáctica se centra en que los estudiantes sean capaces de modelar, resolver y analizar fenómenos reales de cambio y variación mediante las EDOLPO, al integrar la exploración, la representación gráfica, el razonamiento matemático y el uso de herramientas TIC, con el fin de interpretar resultados, argumentar sobre el comportamiento de los fenómenos y reflexionar críticamente sobre la validez y las limitaciones de los modelos en contextos reales. En coherencia con esta intención, se definen microcompetencias que se desarrollan de manera transversal a lo largo de la unidad didáctica, organizadas en dimensiones cognitivas, procedimentales y actitudinales. Estas orientan las acciones de aprendizaje esperadas en los estudiantes, tanto en la comprensión de los conceptos asociados a las EDOLPO como en su aplicación, comunicación y reflexión. Con el fin de sistematizar dichas microcompetencias y facilitar su lectura, en la *Tabla 3* se presentan de manera estructurada según las dimensiones mencionadas.

Tabla 3.

Microcompetencias de la Unidad Didáctica

Microcompetencias de la Unidad Didáctica		
Competencias Cognitivas (Saber)	Competencias Procedimentales (Hacer)	Competencias Actitudinales (Ser)
MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento de este. **MC-C.** Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.	**MC1-P.** Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales. **MC-P.** Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.	**MC7-A.** Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas. **MC9-A.** Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado. **MC10-A.** Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Nota. Las microcompetencias con numeración corresponden a las establecidas en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad Industrial de Santander. Las microcompetencias que no presentan numeración fueron diseñadas en el marco de la presente unidad didáctica, con el fin de complementar y fortalecer los procesos de aprendizaje propuestos. La descripción de las microcompetencias institucionales pueden consultarse en el *Apéndice 5*.

A partir de las microcompetencias planteadas y de lo descrito en el apartado metodológico, la unidad didáctica se estructura en una secuencia de cuatro sesiones de clase, en las cuales se integran momentos de exploración, formalización y análisis mediante situaciones contextualizadas. Desde una perspectiva pedagógica, esta organización busca favorecer una aproximación progresiva al objeto matemático, promoviendo la comprensión conceptual, la resolución de problemas y la modelación de fenómenos a través de diferentes formas de representación matemática, así como anticipar diversas formas de interacción de los estudiantes con las actividades propuestas.

Desde esta perspectiva, la estructura adoptada para el desarrollo de la intervención se fundamenta en principios del constructivismo, el ABP, el modelo pedagógico UIS y el uso de TIC, promoviendo la resolución de situaciones significativas, la interacción entre pares y la exploración de múltiples representaciones. En este marco, los instrumentos diseñados adquieren un papel central al convertirse en espacios donde se espera que los estudiantes analicen situaciones, construyan modelos, validen resultados y reflexionen sobre el alcance y las limitaciones de las soluciones obtenidas.

Es importante precisar que el análisis a priori no se desarrollará de manera detallada para cada una de las preguntas incluidas en la prueba diagnóstica, los talleres y el quiz, debido a la cantidad de actividades e ítems que conforman estos instrumentos. En estos casos, se realizará un análisis de carácter general, orientado a identificar las intenciones formativas, los tipos de tareas propuestas, las posibles estrategias de resolución y las dificultades que podrían surgir de manera global en los estudiantes.

Por el contrario, en el caso de la pregunta relacionada con las aplicaciones lineales en el examen parcial y en las preguntas planteadas en las entrevistas semiestructuradas, se llevará a cabo un análisis a priori más detallado, abordando cada ítem de manera individual. Esta decisión responde a la importancia de estos instrumentos dentro de la unidad didáctica y a su potencial para exponer con mayor profundidad los procesos de pensamiento y comprensión de los estudiantes frente a las situaciones propuestas.

A partir de estos elementos, en los apartados siguientes se desarrolla el análisis a priori de los diferentes componentes de la unidad didáctica, con el fin de anticipar los aprendizajes esperados, las posibles dificultades y las oportunidades que ofrecen las actividades diseñadas.

4.1 Análisis de la Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica se concibe como el instrumento inicial de la unidad didáctica, orientado a explorar el estado de los conocimientos previos de los estudiantes antes de abordar formalmente el estudio de las EDOLPO. Su diseño y aplicación se describen en el apartado metodológico correspondiente (*Sección 3.3.1*), donde se establece su papel como punto de partida para la caracterización del grupo y la toma de decisiones pedagógicas. Desde una perspectiva didáctica, este instrumento permite identificar el nivel inicial de comprensión de los estudiantes en torno a conceptos fundamentales del cálculo que sustentan el estudio de las ecuaciones diferenciales. En este sentido, se anticipa un desempeño diverso que servirá como referencia para interpretar los avances evidenciados durante la intervención pedagógica.

En la *Tabla 4* se sintetizan los principales elementos del análisis de la prueba diagnóstica:

Tabla 4.

Síntesis del análisis a priori de la prueba diagnóstica

Categoría	Descripción
Propósito	Caracterizar los conocimientos previos de los estudiantes en relación con conceptos de cálculo necesarios para la comprensión y manejo de las EDOLPO.
Tipos de tareas	Ideas asociadas con procesos de cambio, logaritmos, interpretación de funciones, derivadas, integrales y análisis de situaciones problemáticas vinculadas a fenómenos.
Pensamientos matemáticos involucrados	Numérico, algebraico y variacional; en menor medida, pensamiento espacial.

Fortalezas esperadas	Dominio de procedimientos operativos básicos (cálculo de derivadas e integrales en contextos conocidos), reconocimiento de expresiones algebraicas y ejecución de algoritmos previamente trabajados. Algunos estudiantes pueden identificar relaciones simples entre variables en contextos familiares.
Dificultades esperadas	Comprensión de la razón de cambio como concepto, interpretación de situaciones de variación, establecimiento de relaciones entre variables y transición entre representaciones (tabular, gráfica y algebraica). Se anticipan dificultades para interpretar resultados en contexto y para vincular procedimientos con su significado matemático.
Errores esperados	Aplicación mecánica de algoritmos sin comprensión, confusión entre crecimiento lineal y no lineal, dificultades en el uso e interpretación de derivadas e integrales y errores en la lectura e interpretación de gráficas.
Nivel de exigencia cognitiva	Medio-Alto, con énfasis en interpretación y comprensión conceptual más que en complejidad algorítmica.
Uso didáctico de los resultados	Orientar el diseño y ajuste de la unidad didáctica, priorizando la construcción de significado, el fortalecimiento del pensamiento variacional y desarrollo de los procesos de resolución de problemas y modelación matemática en problemas contextualizados.

Nota. Síntesis del análisis a priori de la prueba diagnóstica, construida a partir de la identificación de categorías didácticas como propósito, tipos de tareas, pensamientos matemáticos involucrados, nivel de exigencia cognitiva y posibles dificultades y errores esperados, en función de los objetivos de la unidad didáctica. Elaboración propia.

A partir de este análisis, la prueba diagnóstica se configura no solo como un instrumento de caracterización inicial, sino como un referente fundamental para interpretar la evolución del aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, los resultados obtenidos permitirán contrastar las dificultades y fortalezas identificadas inicialmente con los desempeños evidenciados en los demás instrumentos, lo cual será desarrollado en el capítulo de resultados.

4.2 Análisis de la Intervención Didáctica

Este apartado tiene como propósito analizar didácticamente el eje principal de la intervención pedagógica (planes de clase y talleres), con el fin de revisar las intenciones formativas, los saberes en juego y las posibles dificultades y fortalezas que pueden surgir durante el proceso de aprendizaje. En este sentido, el análisis no se limita a describir las actividades realizadas, sino que busca interpretar el sentido pedagógico de las mismas y anticipar la manera en que los estudiantes podrían interactuar con las situaciones propuestas.

En un primer momento, se presenta el análisis a priori de la sesión inicial a cargo del autor de este documento, correspondiente al inicio de la implementación formal de la unidad didáctica. Esta sesión cumple una función introductoria fundamental, ya que establece las bases conceptuales y procedimentales necesarias para el desarrollo de las actividades a lo largo de la propuesta didáctica; por esta razón, su análisis se presenta con mayor nivel de detalle, al considerarse como el primer acercamiento de los estudiantes al objeto matemático. Posteriormente, se aborda el análisis a priori de los talleres diseñados, los cuales constituyen el eje central de la unidad didáctica, en la medida en que integran la modelación de fenómenos, la resolución de problemas contextualizados, el uso de herramientas tecnológicas y el trabajo colaborativo.

En relación con las sesiones posteriores (segunda, tercera y cuarta), aunque también fueron planificadas mediante planes de clase institucionales, su desarrollo se centró en la implementación, acompañamiento y socialización de los talleres. A partir de lo anterior, no se analizan como unidades independientes, dado que su sentido didáctico se encuentra directamente vinculado con los talleres desarrollados. Por esta razón, su análisis se integra dentro del estudio de dichos talleres.

Para una revisión más detallada de la planeación de las sesiones de clase, se pueden consultar los *Apéndices 7, 8, 9 y 10* correspondientes a los planes de clase 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

4.2.1 Análisis Sesión 1: Introducción a las EDOLPO

La primera sesión de la unidad didáctica se analiza desde una perspectiva a priori en función de las intenciones didácticas que orientan su diseño y de las posibles formas en que los estudiantes podrían interactuar con las actividades propuestas. En este sentido, el análisis se centra en el papel que cumple esta sesión en la construcción de los primeros significados asociados a las EDOLPO, así como en la anticipación de estrategias, dificultades y procesos de comprensión.

De manera general, la intención didáctica de esta sesión se orienta en promover una transición entre los conocimientos previos y los conceptos claves trabajados hasta el momento, para lograr una buena formalización de las EDOLPO como herramienta para modelar fenómenos de cambio, favoreciendo no solo la apropiación de métodos de solución, sino también el reconocimiento de su estructura, su aplicabilidad y su sentido práctico en contextos reales. En este proceso, se busca que los estudiantes comiencen a integrar procedimientos algebraicos con procesos de interpretación, sentando así las bases para el desarrollo posterior de la modelación y el análisis de fenómenos.

Tabla 5.

Análisis de la sesión introductoria de la unidad didáctica sobre EDOLPO

Momentos de la sesión	Intención didáctica	Actividades propuestas	Procesos esperados en los estudiantes	Dificultades y errores esperados
Antes de la clase	Activar saberes previos y favorecer una primera aproximación al lenguaje y de las EDOLPO.	Lectura del texto guía y resolución de crucigrama en Moodle.	Reconocimiento inicial de conceptos, relacionados con ecuaciones diferenciales lineales y sus métodos de solución principales.	Comprensión fragmentada de los conceptos, reconocimiento aislado de términos y dificultades para relacionar las ideas

				con fenómenos de cambio.
Inicio de la clase	Recuperar, reorganizar y problematizar los saberes previos para construir una base conceptual común.	Socialización de la lectura y discusión de conceptos clave.	Contraste de ideas, explicitación de concepciones previas, identificación de vacíos conceptuales y construcción progresiva de significados compartidos.	Baja participación, persistencia de ideas erróneas, dificultades en la argumentación, comunicación y en la apropiación del lenguaje matemático.
Desarrollo (EDO Lineales Homogéneas)	Introducir las EDO lineales homogéneas y el método de solución enfatizando la identificación de su estructura y condiciones de aplicación.	Explicación del método y resolución de ejercicios que incluyen situaciones de PVI.	Reconocimiento de la forma de la ecuación, aplicación del método de solución, identificación de condiciones de uso y establecimiento de relaciones entre procedimiento y estructura algebraica.	Aplicación mecánica del algoritmo sin verificación de su pertinencia, errores en procesos de integración, manejo inadecuado de constantes y dificultades en problemas de valor inicial.
Desarrollo (EDO Lineales NO Homogéneas)	Identificar las EDO lineales no homogéneas Comprender el método del factor integrante como estrategia de resolución y su importancia en las aplicaciones.	Introducción del método y resolución guiada de ejercicios que incluyen situaciones de PVI.	Integración de múltiples métodos de solución algebraicos, organización del procedimiento, comprensión del papel del factor integrante y reconocimiento de su utilidad en distintos contextos.	Dificultades en el cálculo del factor integrante, errores en integración, manejo de funciones exponenciales y logarítmicas, y desarticulación entre pasos del procedimiento. Problemas en la identificación de una EDOLPO
Cierre	Favorecer la transición hacia procesos de modelación y trabajo autónomo.	Orientación hacia talleres de aplicación y trabajo independiente.	Transferencia de procedimientos a nuevas situaciones, formulación de hipótesis,	Enfoque centrado en lo procedimental, dificultades para interpretar resultados en contexto y para

		aproximación inicial a la modelación y reconocimiento del papel de las EDOLPO en contextos reales.	relacionar el modelo con el fenómeno representado.

Nota. La tabla presenta el análisis a priori de la primera sesión de la unidad didáctica, organizado en función de los momentos de la clase, las intenciones didácticas, las actividades propuestas, los procesos esperados en los estudiantes y las posibles dificultades y errores anticipados. Elaboración propia.

A partir de este análisis, se evidencia que los estudiantes podrían centrarse en la ejecución de los procedimientos, sin lograr inicialmente una comprensión profunda del sentido de los métodos utilizados. Aunque la sesión presenta un énfasis teórico y procedimental, no se pretende que los estudiantes se limiten a este tipo de trabajo, sino que puedan proyectarlo hacia la aplicación de estos métodos en contextos más significativos. En esta línea, los procedimientos no se excluyen del proceso matemático, pero tampoco deben constituirse como el único eje del aprendizaje. Esto plantea la necesidad de orientar las actividades posteriores hacia la interpretación de resultados, la vinculación entre diferentes representaciones y la comprensión del fenómeno modelado. Así, los talleres adquieren un papel fundamental al propiciar espacios en los que los estudiantes puedan avanzar más allá de lo procedimental y fortalecer procesos de modelación, análisis y construcción de significado como se presentará a continuación.

4.2.2 Análisis de los Talleres en GeoGebra Classroom

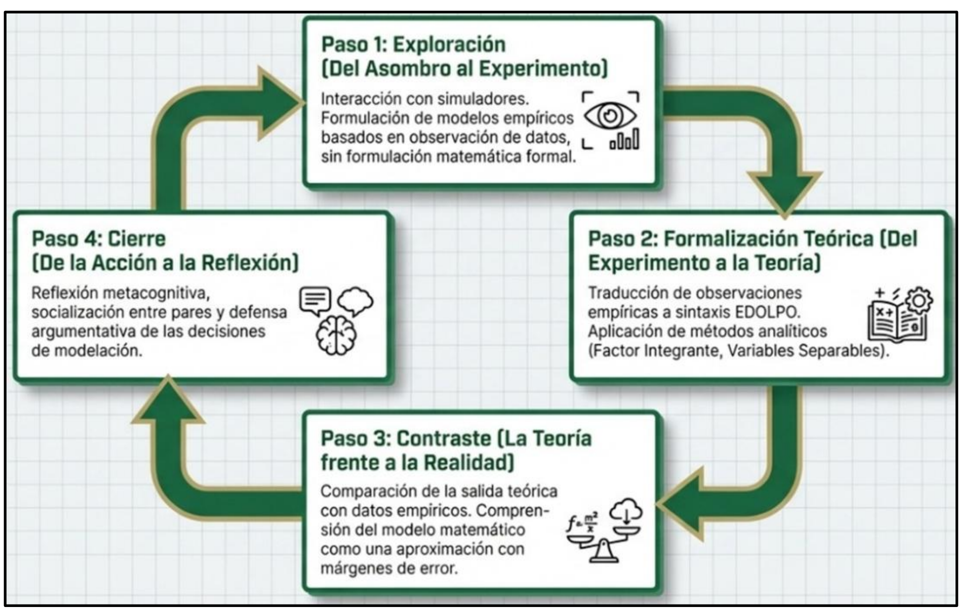
Los talleres constituyen el eje central de la intervención pedagógica, en la medida en que en ellos se concretan las principales apuestas didácticas de la unidad. A diferencia de la sesión inicial, orientada a la introducción conceptual y procedimental de las EDOLPO, estos espacios buscan que los estudiantes construyan significado a partir de la modelación de fenómenos, la resolución de problemas contextualizados y la interacción con herramientas TIC. Desde una perspectiva de análisis a priori, el interés se centra en anticipar las formas de interacción de los estudiantes con las actividades propuestas, los procesos cognitivos involucrados, los saberes movilizados y las posibles dificultades que pueden surgir durante su implementación.

Los talleres se desarrollan en el marco de las sesiones 2, 3 y 4, y abordan diversos contextos de modelación como la propagación de un virus, el enfriamiento de un chocolate, el calentamiento de un tamal, el crecimiento de un capital y la simulación de circuitos eléctricos. Estos contextos responden a una progresión intencionada que busca favorecer un tránsito desde aproximaciones intuitivas hacia procesos de modelación más estructurados, en los que se requiere una mayor conexión entre variables, representaciones contextos y validación de resultados. En este proceso se movilizan principalmente el pensamiento variacional y el pensamiento algebraico, al interpretar fenómenos de cambio y formalizarlos mediante ecuaciones diferenciales.

En términos generales, todos los talleres comparten una estructura común organizada en cuatro fases: exploración, formalización, contraste y cierre.

Figura 20.

Ruta cognitiva de cada uno de los talleres en GeoGebra



Nota. La figura presenta la ruta cognitiva utilizada en los talleres desarrollados durante la implementación de la unidad didáctica. El proceso se organiza en cuatro momentos: exploración, formalización teórica, contraste y cierre, orientados a favorecer la modelación matemática, la comprensión conceptual y la reflexión sobre los procesos de aprendizaje. Elaboración propia con apoyo de IA (GPT).

Esta organización favorece el paso progresivo desde la experimentación del fenómeno, su modelación, su formalización teórica y análisis metacognitivo. A partir de esta estructura, el análisis se desarrolla considerando cada una de estas fases, atendiendo a su intención didáctica, a los procesos de aprendizaje esperados y a las posibles dificultades que pueden aparecer en los distintos contextos trabajados.

4.2.2.1. Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento

La fase exploratoria constituye el punto de partida del proceso de aprendizaje en cada uno de los talleres, al situar al estudiante frente a una situación problema antes de introducir cualquier formalización matemática. Su propósito es favorecer una primera aproximación al fenómeno de cambio mediante la observación, la experimentación o la interacción con simulaciones, lo que permite una construcción de significados iniciales que posteriormente serán formalizados. En esta fase, el estudiante se enfrenta a comportamientos, datos y representaciones del fenómeno, lo que promueve la formulación de conjeturas, la identificación de regularidades y el establecimiento de relaciones entre variables. Desde el punto de vista cognitivo, se moviliza principalmente el pensamiento variacional, junto con procesos de interpretación, comparación y modelación inicial. A partir de estas consideraciones, en la *Tabla 6* se presentan los principales elementos de análisis que comparten los cinco talleres en esta fase.

Tabla 6.

Análisis general de la fase exploratoria

Categoría	Descripción
Propósito	Propiciar una aproximación inicial al fenómeno de cambio antes de su formalización matemática, promoviendo la construcción de significados a partir de la observación, la experimentación o la simulación. Se busca que el estudiante establezca relaciones entre variables y construya modelos empíricos que sirvan de base para la formalización posterior.
Procesos esperados	Identificación de patrones de comportamiento, establecimiento de relaciones entre variables, formulación de conjeturas, interpretación de datos en diferentes representaciones y construcción de modelos iniciales del fenómeno.
Nivel de exigencia cognitiva	Alto-superior, ya que implica interpretar información no formalizada, establecer relaciones entre variables y construir conjeturas a partir de la observación y el análisis del fenómeno.
Dificultades esperadas	Dificultades para interpretar el tipo de crecimiento, establecer relaciones entre variables, comprender la variación en el tiempo y construir un modelo adecuado para representar el fenómeno.
Errores frecuentes esperados	Confusión entre comportamientos lineales y no lineales, análisis superficial de datos, ejecución mecánica de tareas sin interpretación y tendencia a omitir la fase exploratoria para centrarse en la manipulación algebraica.
Intención didáctica	Establecer las bases para la modelación, permitir la construcción de significados iniciales y favorecer la conexión entre el fenómeno y su representación, preparando el paso hacia la formalización matemática.

Nota. La tabla presenta una síntesis del análisis a priori de la fase exploratoria en función de los objetivos de la unidad didáctica. Elaboración propia.

Si bien esta fase mantiene una intención didáctica común en todos los talleres, su desarrollo adquiere particularidades según el tipo de interacción que se establece con el fenómeno propuesto. En este sentido, cada contexto introduce formas específicas de aproximación al conocimiento, diferentes niveles de complejidad y diversas oportunidades y dificultades para la construcción de modelos iniciales. A continuación, se presentan estas variaciones considerando las características propias de cada taller.

Tabla 7.

Análisis fase exploratoria según el contexto de los talleres

Taller	Tipo de exploración y propósito	Procesos esperados en los estudiantes	Dificultades y errores esperados
Taller #1	Análisis de datos en entorno digital. Se busca que el estudiante identifique patrones de crecimiento y formule un modelo inicial a partir de la información proporcionada.	Reconocimiento de regularidades, interpretación de datos, formulación de conjeturas y establecimiento de relaciones entre variables.	Interpretación superficial de datos, dificultad para establecer relaciones entre variables y confusión entre crecimiento lineal y exponencial.
Taller #2	Experimento real de enfriamiento. Se pretende que el estudiante observe directamente el fenómeno, tome los datos y construya un modelo a partir de su experiencia.	Registro y organización de datos, interpretación de variaciones en el tiempo y construcción de relaciones entre temperatura y tiempo.	Variabilidad en los datos, dificultades en el registro e interpretación y problemas para identificar el tipo de comportamiento del fenómeno.
Taller #3	Experimento real con un tamal y temperatura ambiente variable. Se	Coordinación de múltiples variables, análisis del	Confusión en la identificación de variables relevantes,

	busca comprender relaciones más complejas entre variables.	comportamiento del sistema y formulación de modelos más elaborados a partir de regresiones.	dificultades en la interpretación del fenómeno y desconexión entre lo experimental y lo modelado.
Taller #4	Simulación con manipulación de parámetros. Se pretende analizar cómo cambian las variables en función de distintos valores.	Interpretación del papel de los parámetros, identificación de relaciones generales y procesos de generalización.	Uso superficial del simulador, enfoque en casos particulares y dificultad para interpretar el papel de cada variable.
Taller #5	Simulación en contexto abstracto. Se busca transferir la comprensión a un contexto menos intuitivo.	Interpretación del fenómeno desde representaciones matemáticas, integración entre contexto físico y modelo.	Dificultades en la comprensión del contexto, interpretación de variables y enfoque técnico sin análisis del comportamiento.

Nota. La tabla describe las variaciones de la fase exploratoria según el contexto de cada taller. Elaboración propia.

En conjunto, la fase exploratoria se configura como un espacio fundamental para la construcción de significado, en el que el estudiante establece un primer vínculo entre el fenómeno y su posible modelación matemática. No obstante, también se anticipa que, sin una orientación adecuada, algunos estudiantes pueden limitarse a una interacción superficial con las actividades, lo que afecta la calidad de los modelos construidos. Por ello, esta fase no solo introduce el fenómeno, sino que condiciona el desarrollo de las fases posteriores, en las que se espera que los modelos empíricos sean contrastados, formalizados y analizados desde una perspectiva matemática más estructurada.

4.2.2.2. Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría

La fase teórica se orienta a la formalización matemática de los fenómenos abordados en la etapa exploratoria, siendo un momento clave en la evolución de las comprensiones intuitivas hacia estructuras conceptuales más rigurosas. En esta fase, el estudiante deja de trabajar únicamente con datos o representaciones empíricas para centrarse en la construcción, análisis y solución de modelos matemáticos expresados mediante las EDOLPO. Desde una perspectiva didáctica, esta formalización no se concibe como una introducción aislada de la teoría, sino como un proceso de reorganización del conocimiento previamente construido, en el que la ecuación diferencial se reconoce como una herramienta para explicar, generalizar y validar el comportamiento del fenómeno. En este proceso, se moviliza principalmente el pensamiento algebraico, junto con procesos de generalización, validación e interpretación. A partir de estas consideraciones, en la *Tabla 8* se presentan los principales elementos del análisis general de esta fase.

Tabla 8.

Análisis general de la fase teórica

Categoría	Descripción
Propósito	Formalizar los modelos construidos en la fase exploratoria, permitiendo que el estudiante comprenda la ecuación diferencial como una herramienta para describir y explicar el comportamiento de fenómenos.
Procesos esperados	Formulación del modelo matemático, aplicación de métodos de solución, interpretación básica de parámetros y establecimiento de conexiones con el fenómeno trabajado.
Nivel de exigencia cognitiva	Alto, al requerir la coordinación entre procedimientos algebraicos y la interpretación del modelo en contexto un contexto práctico.

Dificultades esperadas	Desconexión entre el procedimiento algebraico y el fenómeno, dificultades en la formulación del modelo y en la interpretación de la solución.
Errores frecuentes esperados	Errores en métodos de solución, integración, manejo de constantes, manejo de exponenciales y aplicación de condiciones iniciales.
Intención didáctica	Consolidar el paso hacia la formalización y fortalecer la comprensión de los modelos como herramientas para analizar fenómenos de cambio.

Nota. La tabla presenta una síntesis del análisis a priori de la fase teórica en función de los objetivos de la unidad didáctica. Elaboración propia.

Aunque esta fase mantiene un propósito didáctico común en todos los talleres, su desarrollo presenta particularidades según la estructura matemática del modelo trabajado y el contexto en el que se sitúa.

Figura 21.

Modelos de EDOLPO trabajados en los talleres contextualizados

Nota. La figura presenta los principales contextos de aplicación utilizados en los talleres desarrollados durante la implementación de la unidad didáctica. Cada situación permitió abordar diferentes modelos asociados a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden, favoreciendo procesos de modelación matemática, interpretación y conexión entre la teoría y fenómenos reales. Elaboración propia con apoyo de IA (GPT).

Estas diferencias permiten identificar oportunidades específicas de generalización, así como dificultades asociadas a la comprensión de las relaciones entre variables y la interpretación de los modelos. A continuación, se presentan estas variaciones en función de los contextos abordados.

Tabla 9.

Análisis fase teórica según el contexto de los talleres

Taller	Tipo de exploración y propósito	Procesos esperados en los estudiantes	Dificultades y errores esperados
Taller #1 y #4	Formalización de modelos de crecimiento (Ley de Malthus). Se busca que el estudiante reconozca la estructura del modelo y su presencia en distintos contextos.	Formulación de la ecuación, resolución del modelo y reconocimiento de la relación entre la variable y su tasa de cambio.	Dificultad para identificar la estructura común entre contextos y para interpretar la constante de proporcionalidad.
Taller #2	Aplicación de la ley de Newton con temperatura ambiente constante. Se pretende que el estudiante comprenda que la variación depende de la diferencia entre valores.	Construcción del modelo, resolución e interpretación del comportamiento de la solución.	Dificultad en la interpretación de la diferencia de temperaturas y del comportamiento del sistema.
Taller #3	Formalización de una situación con dos variables que varían en el tiempo. Se busca comprender	Identificación de variables, formulación del modelo, resolución por factor integrante y	Confusión en variables, dificultades en la formulación y resolución de modelo planteado al

	relaciones más complejas dentro del modelo.	análisis de relación entre variables.	tratarse dos temperaturas variables en el tiempo.
Taller #5	Formalización en un contexto físico más abstracto. Se pretende reconocer la aplicabilidad de las EDOLPO en otros campos.	Traducción del fenómeno al modelo matemático e interpretación básica de variables físicas.	Dificultad en la comprensión del contexto, la formalización de la situación y en la interpretación de parámetros.

Nota. La tabla describe las variaciones de la fase teórica según el contexto de cada taller. Elaboración propia.

De manera global, la fase teórica permite que los estudiantes consoliden la ecuación diferencial como una herramienta para modelar fenómenos de cambio, a partir de la aplicación de procedimientos algebraicos determinados por comunidades intelectuales. No obstante, también se anticipa que, sin una adecuada integración con el contexto, algunos estudiantes pueden limitarse a la resolución mecánica de las ecuaciones, lo que afecta la comprensión del modelo y su propósito. Por ello, esta fase resulta fundamental para establecer conexiones entre la estructura matemática y el fenómeno, sentando las bases para su análisis, contraste e interpretación en las fases posteriores.

4.2.2.3. Fase de Contraste: La Teoría frente al Experimento

La fase de contraste se orienta a la comparación y validación de los modelos construidos en las fases anteriores, convirtiéndose en el momento clave en el que el estudiante confronta el modelo empírico obtenido en la exploración con el modelo teórico formal desarrollado mediante las ecuaciones diferenciales. Desde una perspectiva didáctica, esta fase permite integrar la intuición con la formalización, favoreciendo el reconocimiento de similitudes, diferencias y posibles discrepancias entre ambas aproximaciones al fenómeno. En este proceso, no se busca únicamente la comparación de resultados, sino la interpretación y justificación de los mismos, así como la identificación de posibles fuentes de error y la reflexión sobre el alcance de los modelos construidos. A partir de estas consideraciones, en la *Tabla 10* se presentan los principales elementos del análisis general de esta fase.

Tabla 10.

Análisis general de la fase de contraste

Categoría	Descripción
Propósito	Comparar y validar los modelos empírico y teórico, promoviendo la interpretación de resultados y la reflexión sobre el alcance, pertinencia y limitaciones de los modelos construidos en relación con el fenómeno.
Procesos esperados	Comparación de representaciones (gráficas, numéricas y analíticas), interpretación de resultados, identificación de similitudes y diferencias, y justificación de conclusiones a partir del comportamiento del fenómeno.
Nivel de exigencia cognitiva	Alto, al requerir análisis crítico de resultados, establecimiento de relaciones entre representaciones y elaboración de justificaciones fundamentadas.
Dificultades esperadas	Dificultad para interpretar diferencias entre modelos, establecer relaciones entre representaciones y comprender el carácter igual o aproximado de los modelos matemáticos.
Errores frecuentes esperados	Asumir que cualquier diferencia implica un error en el procedimiento, realizar comparaciones superficiales sin análisis y responder sin justificar los resultados obtenidos.
Intención didáctica	Favorecer la validación de modelos, fortalecer procesos de interpretación y argumentación, y promover la comprensión de la modelación como una aproximación al comportamiento de los fenómenos.

Nota. La tabla presenta una síntesis del análisis a priori de la fase de contraste en función de los objetivos de la unidad didáctica. Elaboración propia.

Aunque esta fase mantiene una estructura común en todos los talleres, las características del contexto influyen en el tipo de resultados obtenidos y en la forma en que los estudiantes interpretan las diferencias entre los modelos. En este sentido, es posible identificar particularidades según el tipo de interacción con el fenómeno trabajado.

Tabla 11.

Análisis fase de contraste según el contexto de los talleres

Tipo de taller	Características del contraste	Procesos esperados en los estudiantes	Dificultades y errores esperados
Talleres #2 y #3	Los modelos empírico y teórico pueden presentar diferencias debido a la variabilidad de los datos, errores de medición y condiciones no controladas del entorno. Esto permite evidenciar el carácter aproximado del modelo matemático.	Comparación entre datos experimentales y modelo teórico, identificación de discrepancias, análisis de posibles causas (errores de medición, condiciones iniciales) e interpretación del comportamiento del fenómeno en contexto.	Considerar las diferencias como errores del procedimiento, dificultad para identificar fuentes de variación, interpretación limitada de los resultados y problemas para justificar conclusiones.
Talleres #1, #4 y #5	Los modelos empírico y teórico tienden a coincidir en mayor medida debido a condiciones controladas, lo que facilita la validación del comportamiento del modelo matemático.	Validación del modelo teórico a partir de la coincidencia con los datos, análisis del comportamiento del sistema y reconocimiento de patrones consistentes entre representaciones.	Comparación superficial sin análisis, aceptación del resultado sin justificación y dificultad para explicar por qué los modelos coinciden.

Nota. La tabla describe las variaciones de la fase de contraste según el contexto de cada taller. Elaboración propia.

En conjunto, la fase de contraste permite que los estudiantes reconozcan los modelos matemáticos como aproximaciones del fenómeno, favoreciendo procesos de validación, interpretación y análisis crítico. Asimismo, abre la puerta a reflexionar sobre las limitaciones de los modelos trabajados y de reconocer la necesidad de aproximaciones más complejas para describir ciertos fenómenos, ampliando así la comprensión de la modelación matemática.

4.2.2.4. Fase de Cierre: De la Acción a la Reflexión

La fase de cierre se orienta a la socialización de resultados y a la reflexión sobre el proceso de aprendizaje desarrollado a lo largo de cada taller, siendo un espacio en el que los estudiantes consolidan, reorganizan y comunican las ideas construidas en las fases anteriores. Desde una perspectiva didáctica, esta fase no se limita a la presentación de respuestas, sino que promueve procesos de metacognición, en los que el estudiante analiza sus estrategias, reconoce sus dificultades y valora los aprendizajes alcanzados. En este sentido, se espera que los estudiantes no solo expongan sus resultados, sino que los justifiquen, los contrasten con los de sus compañeros y participen en discusiones que permitan enriquecer la comprensión del fenómeno modelado. A partir de estas consideraciones, en la *Tabla 12* se presentan los principales elementos del análisis a priori de esta fase.

Tabla 12.

Análisis general de la fase de cierre

Categoría	Descripción
Propósito	Favorecer la socialización, reflexión y consolidación de los aprendizajes, promoviendo la comunicación matemática, la argumentación y procesos metacognitivos sobre el trabajo realizado.
Procesos esperados	Presentación y justificación de resultados, argumentación de procedimientos, contraste de ideas entre pares, organización del

	discurso matemático y reflexión sobre el proceso de aprendizaje desarrollado.
Nivel de exigencia cognitiva	Medio, enfocado en la organización de ideas, la explicación de procedimientos y la reflexión sobre el sentido de los resultados obtenidos.
Dificultades esperadas	Dificultad para argumentar y justificar conclusiones, tendencia a describir procedimientos sin interpretación y limitaciones en la comunicación de ideas matemáticas.
Errores frecuentes esperados	Explicaciones superficiales, ausencia de justificación, participación limitada en las discusiones y dificultades para establecer relaciones entre representaciones.
Intención didáctica	Consolidar aprendizajes, fortalecer la comunicación matemática, promover la reflexión sobre el proceso seguido y favorecer la integración de lo empírico, lo teórico y lo interpretativo.

Nota. La tabla presenta una síntesis del análisis a priori de la fase de cierre en función de los objetivos de la unidad didáctica. Elaboración propia.

En cuanto a las particularidades de la implementación, se identifican diferencias en el desarrollo de esta fase según el nivel de acompañamiento docente y el grado de autonomía de los estudiantes. En el caso del *Taller 1*, al desarrollarse en un espacio de clase presencial con mayor intervención del docente, la socialización se orienta de manera más guiada, lo que permite promover la participación, resolver dudas en el momento y fortalecer la argumentación mediante la mediación constante.

Por su parte, en los talleres posteriores, la fase de cierre adquiere un carácter más autónomo, en el que los estudiantes deben organizar y comunicar sus ideas con menor intervención docente y en tiempos más limitados. Esta condición favorece el desarrollo de la autonomía y la responsabilidad en el proceso de aprendizaje, pero también puede incidir en la profundidad de las discusiones, la participación desigual y la dificultad para sostener procesos argumentativos sin acompañamiento constante.

En términos generales, la fase de cierre permite consolidar el proceso desarrollado en cada taller, al favorecer la reflexión sobre lo aprendido, fortalecer la comunicación matemática y promover la construcción colectiva del conocimiento. Asimismo, posibilita que los estudiantes integren lo empírico, lo teórico y lo interpretativo, reconociendo el sentido de los modelos construidos y su pertinencia en la comprensión de fenómenos de cambio, lo que contribuye a una comprensión más estructurada del papel de las EDOLPO en la modelación.

4.3 Análisis de los Instrumentos de Evaluación

En el marco de la intervención pedagógica, los instrumentos de evaluación se diseñan con el propósito de valorar no solo la adquisición de procedimientos asociados a las EDOLPO, sino también la comprensión conceptual de los modelos trabajados, la interpretación de fenómenos de cambio y la transferencia del conocimiento a distintos contextos. En este sentido, la evaluación se integra al propósito didáctico de la unidad, en la medida en que permite evidenciar los procesos de aprendizaje desarrollados a lo largo de intervención pedagógica. Desde una perspectiva de análisis a priori, este apartado se centra en anticipar los saberes que se evalúan, los procesos cognitivos involucrados y las posibles dificultades que pueden surgir en el desarrollo de las actividades evaluativas propuestas (quiz y examen parcial).

4.3.1 Análisis del Quiz

El quiz se estructura a partir de preguntas de selección múltiple que abordan tanto aspectos teóricos como aplicaciones de los modelos trabajados durante la unidad, incluyendo el modelo de Malthus, la ley de enfriamiento y calentamiento de Newton, el modelo de interés compuesto continuo y el modelo de circuitos eléctricos en serie. En este sentido, el instrumento no se limita a la verificación de procedimientos, sino que busca evaluar la comprensión de la estructura de las ecuaciones diferenciales, la interpretación de sus soluciones y el reconocimiento de relaciones entre distintos modelos.

Desde el punto de vista cognitivo, el quiz moviliza principalmente procesos de reconocimiento, clasificación, interpretación y generalización. Se espera que los estudiantes sean capaces de identificar el tipo de ecuación diferencial, reconocer sus características, interpretar el significado de sus soluciones y establecer conexiones entre diferentes contextos que comparten estructuras matemáticas similares. En particular, algunas preguntas están orientadas a que el estudiante reconozca la equivalencia estructural entre modelos como el de Malthus y el interés compuesto continuo, lo cual implica un nivel de comprensión que va más allá de lo procedimental.

No obstante, es posible anticipar algunas dificultades. Por un lado, los estudiantes pueden presentar confusiones en la clasificación de ecuaciones diferenciales, especialmente al diferenciar entre ecuaciones lineales, no lineales, separables, exactas u otros tipos. Asimismo, pueden surgir errores en la interpretación de las hipótesis de los modelos, como confundir una tasa de cambio proporcional con una tasa constante, o no reconocer el papel de la diferencia de temperaturas en la ley de Newton. De igual manera, algunas preguntas que requieren interpretar el comportamiento de las soluciones pueden generar dificultades si el estudiante no ha desarrollado una comprensión sólida de las representaciones y su correlación con la situación a la que se enfrenta.

En contraste, se espera que los estudiantes con mayor dominio conceptual logren identificar patrones comunes entre los distintos modelos, interpretar correctamente las situaciones planteadas y justificar sus elecciones a partir de argumentos coherentes. En estos casos, el quiz permite evidenciar no solo el conocimiento adquirido, sino también la capacidad de establecer relaciones entre conceptos y llevar el aprendizaje a nuevas situaciones.

4.3.2 Análisis del Problema del Examen Parcial (Aplicación Lineal)

El problema del parcial se plantea como una situación contextualizada asociada al enfriamiento de un cuerpo, modelada mediante la ley de enfriamiento de Newton. A diferencia del quiz, este instrumento exige un desarrollo completo, en el que el estudiante debe incorporar procesos de modelación, resolución, interpretación y análisis del comportamiento de la solución.

Figura 22.

Problema de aplicación lineal en el examen parcial.

Problema Parcial – Aplicaciones Lineales

La familia García prepara agua panela para el desayuno. Al servirla en el pocillo, la temperatura inicial es de 84.2°C. La cocina se encuentra a temperatura constante de 25°C y no hay corrientes de aire. La señora García sabe que, después de 8 minutos, la temperatura del agua panela es de 65.3°C. Su intención es servirla en el momento adecuado para que esté aproximadamente a 40°C cuando su familia baje a desayunar.

- Plantee el modelo diferencial que describe el proceso de enfriamiento.
- Resuelva la ecuación diferencial asociada al problema.
- Determine el valor de la constante de enfriamiento.
- ¿Cuánto tiempo tardará el agua panela en alcanzar los 40°C?
- Analice el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

Nota. La figura presenta el problema presentado a los estudiantes en el examen parcial relacionado con la ley de enfriamiento / calentamiento de Newton en una situación familiar. Elaboración propia.

El problema presentado en la *Figura 22* sitúa al estudiante en un contexto cotidiano, en el que debe modelar el enfriamiento del agua panela a partir de información inicial y condiciones del entorno. A partir de esta situación, se espera que el estudiante reconozca que el fenómeno responde a la ley de enfriamiento de Newton, en la cual la razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del ambiente. En este sentido, el estudiante debe identificar las variables involucradas, las condiciones iniciales y el significado de cada elemento del modelo en el contexto del problema.

En cuanto a la resolución, se espera que el estudiante plantee una ecuación diferencial de la forma $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$ y proceda a resolverla, preferiblemente mediante el método del factor integrante, dado que se trata de una EDOLPO lineal no homogénea. No obstante, también es posible su resolución mediante el método de variables separables, lo cual se reconoce como un procedimiento alternativo válido desde el punto de vista matemático. A partir de la solución obtenida, el estudiante debe determinar la constante de enfriamiento con base en los datos proporcionados y utilizar el modelo para responder a las preguntas planteadas, lo que implica interpretar los resultados en el contexto y analizar el comportamiento de la solución en el tiempo, particularmente en el largo plazo.

En este proceso, se anticipa que el estudiante siga una secuencia estructurada que integre la formulación del modelo, su resolución y la interpretación de los resultados, constituyéndose como el camino esperado para la solución del problema. A partir de los elementos descritos, se presenta a continuación una síntesis del análisis del problema de parcial, en la cual se organizan los principales componentes evaluados, los procesos de la actividad matemática involucrados, así como las posibles dificultades que pueden surgir en su resolución.

Tabla 13.

Análisis del problema del parcial en relación con los procesos de la actividad matemática

Componente evaluado	Procesos matemáticos involucrados	Procesos esperados en los estudiantes	Dificultades y errores esperados
Modelación (ítem 1)	Modelación de procesos y fenómenos	Identificar la ley de Newton, formular la ecuación diferencial y establecer condiciones iniciales.	Confusión en la relación entre variables, modelo utilizado incorrecto o planteamiento del modelo inconcluso.

Resolución (Ítem 2)	Ejercitación de procedimientos y algoritmos / Resolución de problemas	Resolver la ecuación mediante factor integrante o separables y obtener la solución general y particular.	Errores en manejo algebraico, en integración, constantes o condiciones iniciales.
Determinación de parámetros (Ítem 3)	Ejercitación de procedimientos y algoritmos / Resolución de problemas	Calcular la constante de enfriamiento a partir de los datos.	Dificultades algebraicas o en sustitución de valores e interpretación del modelo adecuado.
Interpretación en el contexto (Ítem 4)	Razonamiento y comunicación matemática	Interpretar la solución en el contexto y responder preguntas del problema.	Respuestas numéricas inconclusas sin interpretación o sin justificación.
Análisis cualitativo (Ítem 5)	Razonamiento y comunicación matemática / Conexiones	Analizar el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.	Dificultad para interpretar y argumentar el comportamiento asintótico.

Nota. La tabla presenta una síntesis del análisis a priori del problema de parcial, organizada a partir de los componentes evaluados, los procesos de la actividad matemática involucrados y las posibles dificultades y errores esperados en los estudiantes. Elaboración propia.

Desde la perspectiva de los procesos generales de la actividad matemática definidos en la metodología (como parte de los procesos trabajados en la implementación de los talleres), el problema de parcial aborda principalmente la modelación, la resolución de problemas y la interpretación de resultados, en la medida en que el estudiante debe construir el modelo diferencial, resolver la ecuación y analizar su comportamiento en el contexto del fenómeno. No obstante, otros procesos como las representaciones se evidencian en menor medida, dado que el enunciado no exige explícitamente el uso de múltiples representaciones o comparaciones entre modelos. En este sentido, el problema presenta un énfasis en los aspectos procedimentales, de resolución y de modelación, aunque ofrece oportunidades para el desarrollo de procesos interpretativos dependiendo del nivel de comprensión del estudiante.

En conjunto, este instrumento permite notar un nivel de integración de los aprendizajes desarrollados durante la unidad, en la medida en que el estudiante vincula la modelación, la resolución, la argumentación y la interpretación en un mismo proceso, mostrando así su comprensión de las EDOLPO como herramientas para analizar fenómenos de cambio en contextos cotidianos o de sus profesiones.

4.4 Análisis de las Entrevistas Semiestructuradas

La entrevista semiestructurada se incorpora como un instrumento de recolección de información cualitativa que permite profundizar en los procesos de pensamiento de los estudiantes, más allá de las respuestas escritas obtenidas en los talleres y en los instrumentos de evaluación. En este sentido, su propósito no se limita a verificar si el estudiante responde correctamente, sino a comprender cómo interpreta las situaciones, qué estrategias utiliza, qué dificultades experimenta y qué significados construye en torno a las EDOLPO.

Para el diseño de la entrevista, se optó por trabajar a partir de cinco problemas o situaciones específicas (ver *Apéndice 14*), en lugar de retomar directamente los talleres desarrollados. Esta decisión responde a que la extensión de los talleres y el tiempo disponible para la entrevista, estas situaciones hacían poco viable su implementación completa en este espacio. En este sentido, se seleccionaron y adaptaron situaciones representativas que permitieran abordar los principales ejes conceptuales de la unidad didáctica, manteniendo un equilibrio entre profundidad y viabilidad.

Desde una perspectiva didáctica, este instrumento permite acceder a dimensiones del aprendizaje que no siempre son evidentes en producciones escritas, tales como los razonamientos intermedios, las dudas o las interpretaciones parciales, favoreciendo así una comprensión más profunda del proceso de aprendizaje. A partir de la estructura de la entrevista, en la *Tabla 14* se sintetiza el análisis a priori de cada una de las actividades propuestas, considerando su intención didáctica, los procesos esperados en los estudiantes y las posibles dificultades asociadas.

Tabla 14.

Análisis de las actividades de la entrevista semiestructurada

Actividad	Intención didáctica	Procesos esperados en los estudiantes	Dificultades y errores esperados
Clasificación de ecuaciones diferenciales	Analizar la estructura de las ecuaciones diferenciales y reconocer las principales características de una EDOLPO.	Identificar si una ecuación es lineal o no, determinar si es homogénea o no homogénea y justificar la clasificación a partir de su estructura algebraica.	Confusión en la identificación de términos dependientes, dificultades para distinguir entre linealidad y homogeneidad, y respuestas sin justificación ni argumentación.
Ley de Newton (temperatura constante)	Integrar procesos de modelación, resolución e interpretación en un contexto físico conocido.	Formular la ecuación diferencial a partir de la ley de Newton, resolverla, determinar la constante de enfriamiento e interpretar la solución en contexto. (Tipo problema del parcial)	Errores en la formulación del modelo, dificultades en la resolución algebraica y tendencia a no interpretar los resultados obtenidos.

Modelo de Malthus	Reconocer la estructura de modelos de crecimiento exponencial y su forma de solución.	Relacionar la situación con la estructura general del modelo, identificar la forma de la solución y seleccionar la opción correcta.	Confusión en la forma de la solución, dificultades para reconocer patrones y errores en la interpretación del crecimiento exponencial.
Modelo de Newton (temperatura variable)	Comprender un modelo más complejo en el que intervienen condiciones dinámicas y múltiples variables.	Identificar variables involucradas, formular el modelo, analizar la representación gráfica y describir el comportamiento de la solución a lo largo del tiempo.	Dificultad para coordinar variables, confusión en la interpretación de la gráfica y limitaciones en el análisis del comportamiento del modelo.
Circuitos eléctricos	Validar una solución en un contexto físico, estableciendo relaciones entre el modelo matemático y el fenómeno.	Interpretar la expresión dada, analizar su validez y justificar la respuesta a partir del comportamiento del sistema.	Dificultades en la argumentación, en la interpretación del contexto físico y en la conexión entre el modelo y la situación planteada.

Nota. La tabla presenta una síntesis del análisis a priori de las actividades de la entrevista semiestructurada, en función de la intención didáctica, los procesos de la actividad matemática involucrados y las dificultades esperadas. Elaboración propia.

En particular, se anticipa que los estudiantes integren procesos de modelación, resolución, comunicación e interpretación, así como de argumentación en aquellos casos en los que se requiere justificar respuestas o validar afirmaciones. Esta estructura permite evidenciar no solo el dominio procedimental, sino también la forma en que el estudiante organiza su pensamiento toma decisiones y construye significado a partir de las situaciones planteadas. Desde el punto de vista cognitivo, la entrevista permite reportar procesos como la argumentación, la interpretación y la validación, así como identificar posibles vacíos conceptuales o dificultades que no surgen en los instrumentos escritos. En particular, posibilita analizar la relación entre el dominio procedimental y la comprensión conceptual, al contrastar lo que el estudiante es capaz de hacer con lo que logra explicar y justificar en torno a las situaciones planteadas.

Asimismo, este instrumento favorece la identificación de conexiones entre los diferentes modelos trabajados durante la unidad, permitiendo reconocer si el estudiante logra establecer relaciones entre ellos, transferir el conocimiento a nuevos contextos y construir explicaciones coherentes a partir de su experiencia de aprendizaje. En este sentido, la entrevista no solo evidencia resultados, sino que aporta información sobre la forma en que estos se construyen.

En conjunto, la entrevista semiestructurada se consolida como un instrumento fundamental dentro de la propuesta, en la medida en que complementa la información obtenida mediante los otros instrumentos y permite acceder a los procesos cognitivos derivados del aprendizaje. De esta manera, se contribuye a una comprensión más integral del desempeño de los estudiantes, entendiendo lo que hacen, lo que comprenden y la forma en que construyen significado en torno a las EDOLPO y su uso en la modelación de fenómenos.

En base a lo anterior, el análisis a priori desarrollado permite anticipar no solo los aprendizajes esperados, sino también las posibles dificultades, errores y formas de interacción de los estudiantes con las actividades propuestas en la unidad didáctica. A través de este proceso, se muestra una vinculación intencionada entre los diferentes momentos de enseñanza, los instrumentos de evaluación y los procesos de la actividad matemática definidos en la metodología, lo cual permite establecer un marco de referencia sólido para la interpretación de los resultados. En este sentido, el análisis a priori no se limita a una descripción de las actividades, sino que se configura como una herramienta que orienta la lectura del proceso de aprendizaje, al permitir contrastar lo esperado con lo observado. De esta manera, se sientan las bases para el análisis de resultados, en el que se examinará cómo los estudiantes trabajan y se apropian de los procesos de modelación, resolución, interpretación y argumentación en relación con las EDOLPO y su uso como instrumento clave en la comprensión de fenómenos de cambio.

5. Resultados y Evidencias de Aprendizaje

En este apartado se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de la unidad didáctica, con el propósito de analizar el desempeño de los estudiantes y sus procesos de aprendizaje asociados a las EDOLPO. Para ello, se integran los hallazgos derivados de los diferentes instrumentos aplicados, a saber: la prueba diagnóstica, talleres, quiz, examen parcial, entrevistas semiestructuradas y encuesta de percepción. A partir de estos instrumentos, se examinan aspectos relacionados con los procesos generales de la actividad matemática, así como las percepciones de los estudiantes frente a las estrategias implementadas. Este análisis permite abordar el proceso de aprendizaje desde una perspectiva amplia, considerando tanto el desempeño observable como las formas de razonamiento, dificultades y valoraciones expresadas por los estudiantes a lo largo de la experiencia.

5.1 Resultados de la Prueba Diagnóstica

En la prueba diagnóstica participaron 26 de los 31 estudiantes matriculados en el curso, lo que corresponde aproximadamente al 83.9% del grupo, siendo una muestra importante para caracterizar los conocimientos previos con los que los estudiantes inician la asignatura. En términos generales, los resultados evidencian un desempeño diverso, con un promedio global de 2.98/5.0, valor que se ubica ligeramente por debajo de la nota mínima aprobatoria establecida por la universidad (3.0). Este resultado coincide con lo observado en la prueba piloto aplicada durante el semestre 2025-2, en la que se obtuvo exactamente el mismo promedio (2.98/5.0), a pesar de las diferencias en la cantidad de ítems (15 ítems en 2025-2 y 20 en 2026-1) y los ajustes realizados en el instrumento.

Este comportamiento sugiere que las dificultades identificadas no responden únicamente a la estructura de la prueba, sino que reflejan tendencias persistentes en la comprensión de conceptos fundamentales del cálculo. En particular, los ítems con menor porcentaje de aciertos corresponden a aquellos que demandan un mayor nivel de interpretación conceptual y de modelación matemática. Con el fin de profundizar en estas dificultades, se realizó un análisis específico de los ítems con menor porcentaje de aciertos, considerando tanto el contenido matemático involucrado como los procesos cognitivos requeridos para su resolución. Este análisis permitió identificar no solo las temáticas en las que los estudiantes presentan mayores dificultades, sino también las características de dichas dificultades en términos de interpretación, modelación y comprensión conceptual.

Tabla 15.

Ítems con menor porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstica

Temática	% de aciertos	Análisis
Integrales Impropias	23.1%	Se encontró que los estudiantes presentan dificultad para comprender el comportamiento límite de las funciones y distinguir entre convergencia y divergencia, lo que muestra una comprensión fragmentada del concepto de integral en contextos no rutinarios.
Optimización	23.1%	Se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en la traducción de situaciones a expresiones matemáticas, particularmente en la construcción del modelo y en la identificación de variables y restricciones, lo que limita la resolución del problema.
Continuidad VS Derivabilidad	34.6%	Los estudiantes presentan confusión en la relación conceptual entre continuidad y derivabilidad, demostrando un manejo más memorístico que comprensivo de estos conceptos y sus implicaciones.

Integración por Partes	42.3%	Se observó que los estudiantes presentan dificultades en la selección adecuada del método de resolución y en la ejecución del procedimiento, lo que sugiere un uso mecánico sin comprensión del porqué del algoritmo.
Razón de Cambio	42.3%	Se encontró que los estudiantes presentan dificultad para interpretar la derivada como tasa de variación y para relacionarla con el contexto del problema, lo que afecta directamente la comprensión de fenómenos de cambio.

Nota. Tabla elaborada a partir de los resultados de la prueba diagnóstica aplicada en el semestre 2026-1. Elaboración propia.

Como se observa en la *Tabla 15*, las dificultades no se limitan a errores procedimentales, sino que se relacionan directamente con la comprensión conceptual, la interpretación de situaciones y la capacidad de establecer relaciones entre variables. Estos resultados guardan coherencia con lo anticipado en el análisis a priori, en el que se preveían mayores dificultades en la comprensión de la razón de cambio, la interpretación de fenómenos de variación, la modelación de situaciones y la integración entre distintos conceptos del cálculo.

Asimismo, al comparar estos resultados con los obtenidos en la prueba piloto, se observa un comportamiento similar en los ítems de mayor dificultad. En particular, las integrales impropias, la relación entre continuidad y derivabilidad y los problemas de optimización presentan consistentemente bajos porcentajes de acierto. En la prueba piloto, estos ítems registraron porcentajes de acierto del 33.3%, 40.7% y 44.4%, respectivamente, siendo los más bajos en dicha aplicación. Esta correspondencia entre ambos momentos refuerza la estabilidad de los hallazgos y sugiere que estas dificultades no son circunstanciales, sino que hacen parte de tendencias estructurales en el aprendizaje de los estudiantes.

No obstante, se identifica una diferencia relevante en la forma en que los estudiantes abordaron la prueba. Mientras que en la aplicación piloto los estudiantes tendían a intentar desarrollar procedimientos en la hoja de trabajo (independientemente de que estos fueran correctos o no), en la aplicación actual se observó que un número considerable de estudiantes optó por seleccionar una respuesta en la plataforma Moodle sin realizar una justificación explícita de su proceso. Esta situación sugiere una menor disposición a presentar el razonamiento matemático y pone de manifiesto posibles dificultades en la comunicación, argumentación y en la explicitación de ideas, aspectos fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático y en coherencia con el enfoque de esta unidad didáctica.

En contraste, los mayores niveles de acierto en esta aplicación se presentan en ítems asociados a procedimientos más directos. Por ejemplo, la integración básica fue resuelta correctamente por el 92.3%, el dominio de funciones por el 84.6% y un problema de valor inicial en contexto de aceleración por el 80.8% de los estudiantes. De manera similar, en la prueba piloto se evidenciaron altos niveles de acierto en tareas de carácter procedimental, como la integración básica (88.9%) y el manejo de notación algebraica y derivadas (85.2%). Estos resultados indican que los estudiantes poseen un dominio adecuado de herramientas algebraicas básicas en contextos rutinarios, pero presentan dificultades cuando estas deben ser utilizadas en situaciones que requieren análisis crítico, interpretación, modelación y toma de decisiones.

Con el propósito de profundizar en estos resultados, se realizó un análisis de las producciones escritas de los estudiantes, lo que permitió identificar no solo el nivel de desempeño, sino también observar cómo los estudiantes interpretan, modelan y resuelven diferentes tipos de situaciones matemáticas.

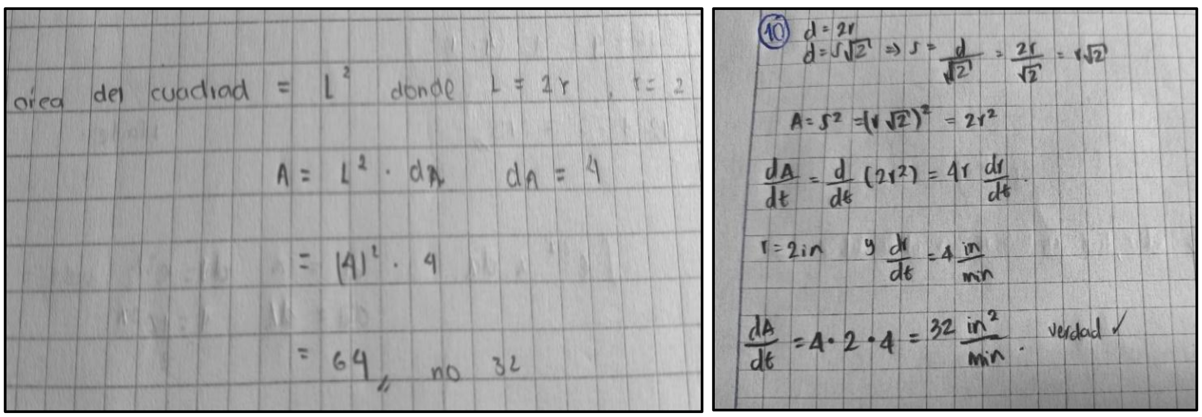
Una de las situaciones propuestas que presentó mayor dificultad para los estudiantes fue la orientada a evaluar la comprensión de razones de cambio, correspondiente a la pregunta 15 de la prueba diagnóstica, presentada a continuación:

Cuando un cuadrado está inscrito en un círculo de radio r, y el radio del círculo mide 2 pulgadas y está creciendo a razón de 4 pulgadas por minuto, la razón de cambio del área del cuadrado en ese instante es de 32 pulgadas cuadradas por minuto. Falso/Verdadero.

Con base en esta situación, la *Figura 23* presenta algunos ejemplos de las respuestas elaboradas por los estudiantes durante la prueba diagnóstica en este ítem.

Figura 23.

Ejemplos de respuestas de los estudiantes en la pregunta 15 de la prueba diagnóstica



Nota. Foto tomada de las producciones entregadas por los estudiantes al finalizar la prueba diagnóstica del semestre 2026-1.

Como se observa en la *Figura 23 izquierda*, algunos estudiantes presentan dificultades para establecer relaciones entre las variables, lo que se traduce en respuestas incorrectas o incompletas. En estos casos, se evidencia una interpretación superficial del problema, en la que no se logra construir un modelo matemático que describa la situación.

En contraste, otros estudiantes establecen correctamente la relación entre las magnitudes involucradas, construyen una función adecuada y aplican procesos de derivación para obtener la razón de cambio solicitada. No obstante, incluso en estos casos, se observan limitaciones en la interpretación del resultado obtenido, lo que sugiere que la dificultad no se restringe a la construcción del modelo, sino que se extiende a la comprensión del significado de la derivada en el contexto del problema. Estas diferencias permiten identificar distintos niveles de desarrollo del pensamiento variacional, desde aproximaciones intuitivas hasta construcciones más estructuradas del concepto (Prueba diagnóstica, pregunta 15, ver *Apéndice 6*).

Asimismo, otra de las preguntas donde se encontró mayor dificultad fue la pregunta 10, relacionada con tareas de optimización, la cual solicitaba:

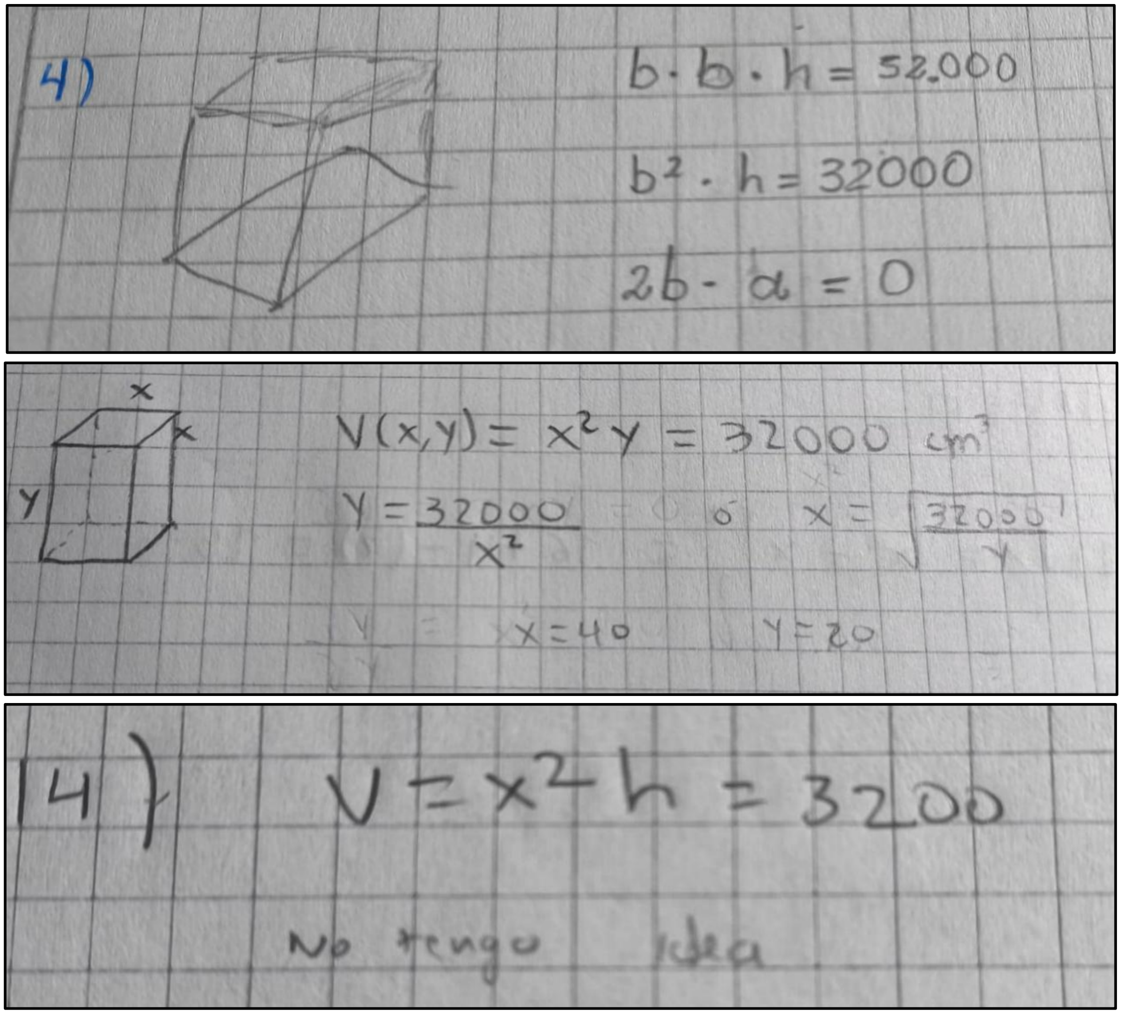
Se quiere construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32000 cm³. ¿Cuáles son las dimensiones que requieren la menor cantidad de material?

a) Lado = 40 cm, Altura = 20 cm
b) Lado = 20 cm, Altura = 80 cm
c) Lado = 32 cm, Altura = 31.25 cm
d) Lado = 25 cm, Altura = 51.2 cm
e) Lado = 31.75 cm, Altura = 31.75 cm
f) Ninguna de las anteriores

Con base en esta situación, la *Figura 24* presenta algunos ejemplos de las respuestas elaboradas por los estudiantes.

Figura 24.

Ejemplos de respuestas de los estudiantes en la pregunta 10 de la prueba diagnóstica



Nota. Foto tomada de las producciones entregadas por lo estudiantes al finalizar la prueba diagnóstica del semestre 2026-1.

En esta tarea se evidencia una situación similar. Algunos estudiantes no logran iniciar el proceso de resolución, aun cuando reconocen parcialmente la relación algebraica del problema, lo que sugiere dificultades en la comprensión del objetivo de la tarea. Otros representan adecuadamente la situación y establecen relaciones entre variables, aunque sin llegar a formular una función susceptible de optimización. Asimismo, se identifican casos en los que los estudiantes logran construir el modelo, pero no completan el proceso de optimización, omitiendo etapas clave como la derivación o el análisis de extremos. Esto demuestra que la principal dificultad no radica únicamente en el cálculo, sino en la vinculación de las diferentes fases del proceso de resolución, lo que se relaciona directamente con las etapas propuestas en la resolución de problemas (Prueba diagnóstica, pregunta 10, ver *Apéndice 6*).

Por otra parte, la pregunta 9, relacionada con integrales impropias, también mostró dificultades para los estudiantes. La situación planteada requería:

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a la integral definida

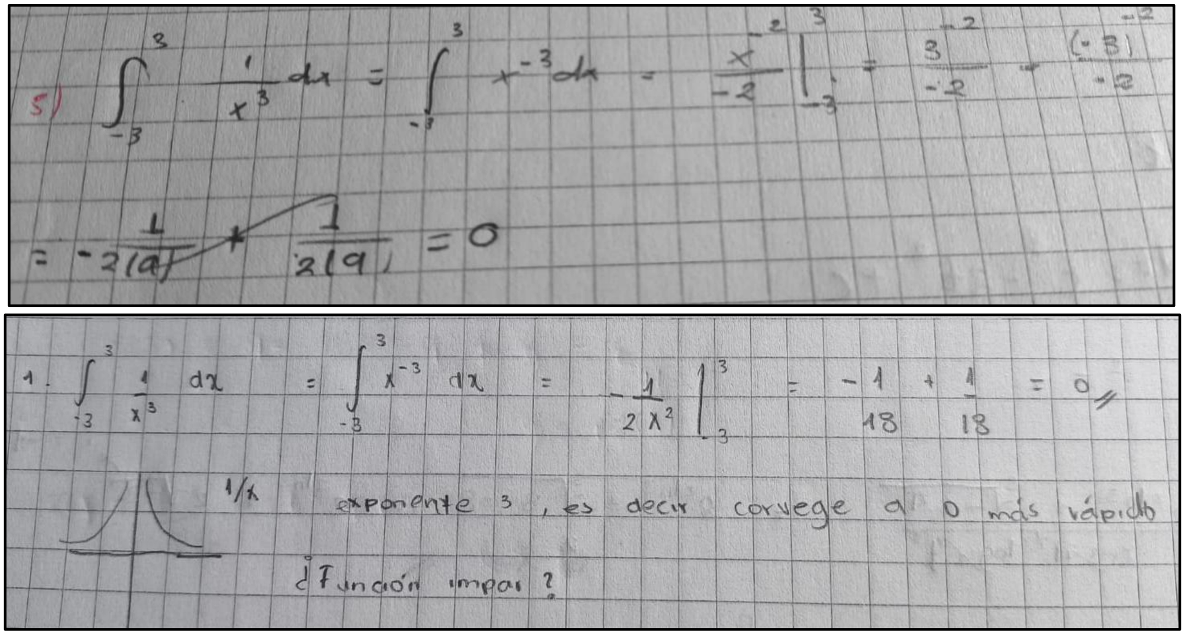
$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{x^3}\, dx?$$

a) La integral converge y su valor es 0, ya que la función es impar.
b) La integral converge y su valor es distinto de cero.
c) La integral diverge, ya que presenta una discontinuidad en el límite superior.
d) La integral es divergente porque la función es discontinua en el intervalo.
e) La integral diverge, ya que presenta una discontinuidad en el límite inferior.
f) Ninguna de las anteriores

Con base en esta situación, la *Figura 25* presenta algunos ejemplos de las respuestas elaboradas por los estudiantes durante la prueba diagnóstica.

Figura 25.

Ejemplos de respuestas de los estudiantes en la pregunta 9 de la prueba diagnóstica



Nota. Foto tomada de las producciones entregadas por lo estudiantes al finalizar la prueba diagnóstica del semestre 2026-1.

En este tipo de actividades, se identifican errores de carácter conceptual más que procedimental. Algunos estudiantes desarrollan correctamente el proceso de integración y reconocen propiedades como la simetría de funciones, llegando a la conclusión de que la integral es cero. Sin embargo, omiten el análisis de la discontinuidad en el intervalo, tratándola como una integral definida normal. Este tipo de respuesta evidencia una comprensión parcial, en la que se dominan técnicas de cálculo, pero no se reconocen las condiciones de aplicabilidad de dichas técnicas. En particular, se observa una débil integración entre los conceptos de continuidad, límite y convergencia, lo que limita la interpretación adecuada del problema y la validación del resultado obtenido (Prueba diagnóstica, pregunta 9, ver *Apéndice 6*).

Además, la pregunta 7, relacionada con integración por partes, fue una de las tareas que requería un mayor carácter procedimental, sin dejar de lado la toma de decisiones sobre los métodos. Sin embargo, a pesar de su enfoque algorítmico, también presentó dificultades significativas para los estudiantes. La situación planteada era la siguiente:

¿Cuál es el resultado obtenido al resolver la siguiente integral?

$$\int e^{2x}\, x\, dx$$

a) $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$

b) $\frac{e^{2x}}{2}(x-1)+C$

c) $\frac{e^{x}}{4}(2x-1)+C$

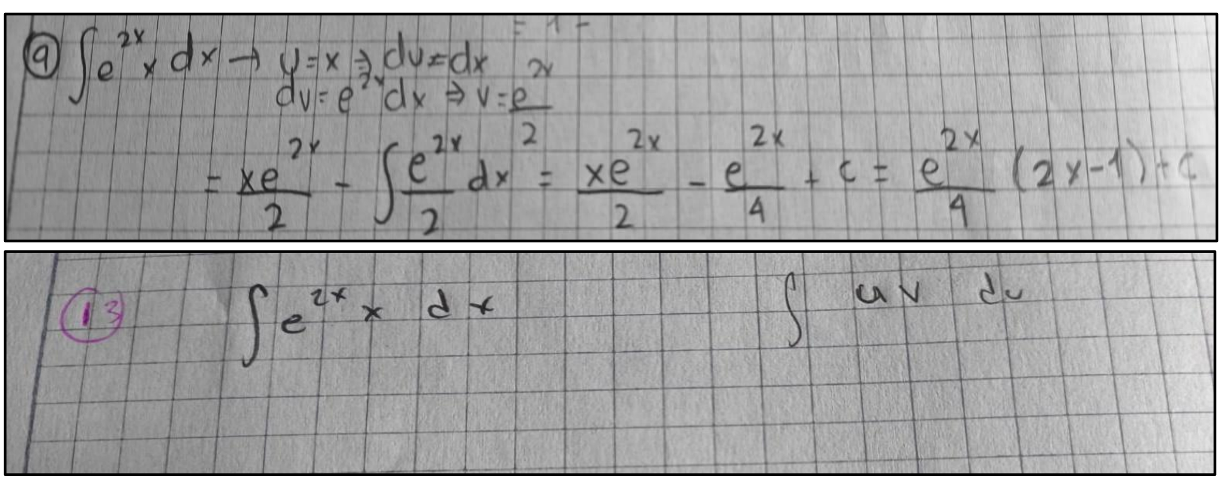
d) $\frac{e^{2x}}{4}(2x+1)+C$

e) *Ninguna de las anteriores*

Con base en esta situación, la *Figura 26* presenta algunos ejemplos de las respuestas desarrolladas por los estudiantes.

Figura 26.

Ejemplos de respuestas de los estudiantes en la pregunta 7 de la prueba diagnóstica



Nota. Foto tomada de las producciones entregadas por lo estudiantes al finalizar la prueba diagnóstica del semestre 2026-1.

En relación con la integración por partes, se observa un contraste marcado entre estudiantes que reconocen y aplican correctamente el método, y aquellos que no logran iniciar el procedimiento. En los casos exitosos, los estudiantes seleccionan adecuadamente las funciones y ejecutan el algoritmo sin errores significativos, lo que evidencia un dominio estructurado del procedimiento. En contraste, otros estudiantes presentan dificultades para identificar la estrategia adecuada, lo que indica que el principal obstáculo no está en la ejecución del algoritmo, sino en la toma de decisiones respecto al método a emplear. Esto sugiere un aprendizaje centrado en la aplicación mecánica de procedimientos memorísticos, sin una comprensión profunda de los criterios que orientan su uso (Prueba diagnóstica, pregunta 7, ver *Apéndice 6*).

Como última tarea a resaltar, se encuentra la pregunta 20, relacionada con la simplificación de expresiones logarítmicas, necesaria para el trabajo con EDOLPO. Esta tarea exigía al estudiante:

Simplifique la siguiente expresión, asumiendo que $x > 4$.

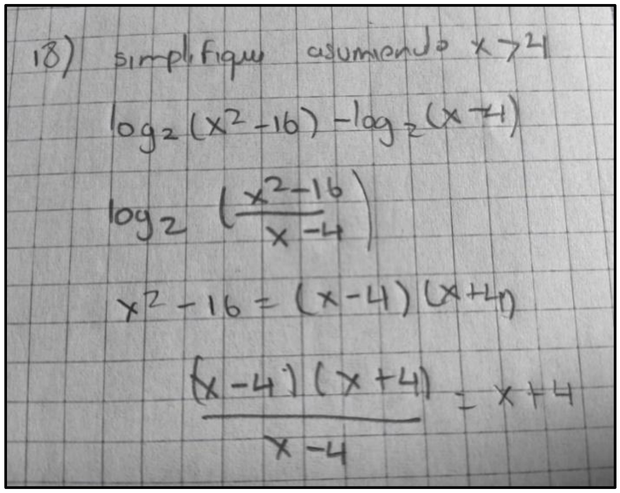
$$log_2(x^2 - 16) - log_2(x - 4)$$

a) $log_2(x - 4)$
b) $log_2(x + 4)$
c) $log_2(x^2 - 4)$
d) *1*
e) *Ninguna de las anteriores*

Con base en esta situación, la *Figura 27* presenta algunos ejemplos de las respuestas elaboradas por los estudiantes durante la prueba diagnóstica.

Figura 27.

Ejemplos de respuestas de los estudiantes en la pregunta 20 de la prueba diagnóstica



Nota. Foto tomada de las producciones entregadas por lo estudiantes al finalizar la prueba diagnóstica del semestre 2026-1.

En las situaciones de simplificación de expresiones logarítmicas, se identifican respuestas correctas en la aplicación de propiedades algebraicas, lo que muestra un dominio procedimental adecuado. No obstante, se presentan omisiones en el análisis del dominio, particularmente en la verificación de las condiciones de validez de las expresiones. Esto sugiere que, aunque los estudiantes logran ejecutar procedimientos de manera correcta, persisten dificultades en la interpretación de las restricciones matemáticas asociadas, lo que limita una comprensión integral de los objetos matemáticos y su validez dentro de un determinado contexto. (Prueba diagnóstica, pregunta 20, ver *Apéndice 6*).

De manera complementaria, se identificó que un número considerable de estudiantes tendía a proponer respuestas sin justificar sus procedimientos o a plantear expresiones algebraicas sin una comprensión clara de la situación. Esta tendencia fue especialmente evidente en tareas de optimización y razones de cambio, en las que se presentaron dificultades para traducir las palabras a funciones. En contraste, en ejercicios de carácter procedimental, se observó un desempeño bastante superior.

En conjunto, estos resultados permiten evidenciar que las principales dificultades de los estudiantes se concentran en la interpretación, la modelación y la comprensión conceptual, más que en la ejecución de procedimientos. Estos hallazgos no solo coinciden con lo anticipado en el análisis a priori, sino que también refuerzan la pertinencia de la unidad didáctica propuesta, la cual se orienta a promover la construcción de significado, la conexión entre representaciones y el desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de estrategias basadas en el ABP y el apoyo de herramientas TIC. Estos elementos serán retomados en el análisis de los resultados de los talleres, donde se examinan los avances y transformaciones en el aprendizaje de los estudiantes.

5.2 Resultados de los Talleres de GeoGebra Classroom

El presente apartado recoge el análisis de los resultados obtenidos en los talleres desarrollados mediante la herramienta GeoGebra Classroom, los cuales constituyen el eje central de la unidad didáctica implementada. A través de estos cinco talleres, diseñados en torno a situaciones problema contextualizadas, se propició en los estudiantes la exploración, modelación y análisis de fenómenos de cambio a partir de las EDOLPO. En este sentido, más allá de la revisión de productos finales, el análisis se centra en los procesos desarrollados por los estudiantes, considerando aspectos como la interpretación de los fenómenos, la construcción de modelos, la formalización matemática, la validación de resultados y la capacidad de transferencia entre contextos, aspectos propios de la labor docente al momento de evaluar competencias de aprendizaje.

De igual manera, este apartado permite observar la evolución del aprendizaje a lo largo de la intervención, identificando tanto los avances como las dificultades que surgieron en cada uno de los talleres. Para ello, se presenta un análisis detallado organizado por fases en cada taller, lo que permite comprender de manera progresiva cómo los estudiantes fueron creando una comprensión más estructurada de la modelación matemática. Asimismo, se incorporan evidencias de las producciones de los estudiantes, con el fin de sustentar el análisis realizado y dar cuenta de los distintos niveles de comprensión alcanzados en el desarrollo de la propuesta.

5.2.1 Resultados Taller #1 - Propagación de Virus - Ley de Malthus

El Taller 1 establece el primer acercamiento formal de los estudiantes a la modelación de fenómenos mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden. Tal como se planteó en el diseño de la intervención, esta actividad se desarrolló durante el tiempo de clase con acompañamiento permanente por parte del docente, lo cual permitió orientar y observar directamente los procesos de interpretación, discusión y construcción de los modelos matemáticos.

Inicialmente, se consideró la posibilidad de desarrollar la actividad de manera individual; sin embargo, durante la implementación se evidenció la pertinencia de promover el trabajo colaborativo, por lo que se optó por organizar a los estudiantes en parejas o grupos de hasta tres integrantes. Esta decisión favoreció el intercambio de ideas, la discusión de estrategias y la construcción conjunta del conocimiento, en coherencia con los principios del Aprendizaje Basado en Problemas, donde la interacción entre pares constituye un elemento clave en la construcción del aprendizaje.

Adicionalmente, se tenía previsto realizar el taller en las salas de cómputo de la universidad, con el fin de facilitar el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. No obstante, debido a la falta de disponibilidad de estos espacios en el horario de clase, fue necesario adaptar la actividad a las condiciones reales del aula. En este contexto, algunos estudiantes utilizaron computadores personales, tablets o dispositivos móviles, lo que permitió mantener el componente tecnológico de la propuesta. La flexibilidad de la herramienta GeoGebra resultó clave para esta adaptación, posibilitando el desarrollo de la actividad sin afectar significativamente los objetivos planteados.

Este ajuste, lejos de representar una limitación, permitió evidenciar la viabilidad de la propuesta en contextos reales de aula, donde no siempre se cuenta con condiciones ideales. En este sentido, se destaca la importancia de diseñar estrategias didácticas flexibles, capaces de adaptarse a diferentes escenarios sin perder su intencionalidad pedagógica, lo cual se alinea con el uso significativo de las TIC en la educación matemática.

En términos de participación, el taller contó con la asistencia de 28 de los 31 estudiantes matriculados (90.3%), organizados en 12 grupos de trabajo. A partir de la revisión de los productos entregados, se obtuvo un promedio general de 4.5 sobre 5.0. Si bien este resultado sugiere un desempeño global alto, la evaluación por medio de los procesos de la actividad matemática (dispuesto en las rúbricas de evaluación) permite identificar diferencias importantes entre los distintos tipos de habilidades evaluadas.

En particular, las principales dificultades se encontraron en el razonamiento y la comunicación matemática (3.8), especialmente en la justificación de procedimientos y la argumentación de resultados. Por su parte, el proceso de modelación alcanzó un desempeño adecuado (4.2), con dificultades asociadas a la formulación de la ecuación diferencial a partir del contexto. En contraste, la ejercitación de procedimientos presentó un desempeño sobresaliente (5.0), evidenciando un dominio sólido de técnicas algebraicas en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Estos resultados confirman lo sustentado en la prueba diagnóstica y anticipado en el análisis a priori: los estudiantes presentan fortalezas en el manejo procedimental, pero dificultades en procesos de interpretación, argumentación, modelación y comunicación matemática. En este sentido, el Taller 1 no solo permite caracterizar el desarrollo de procesos de resolución de problemas dentro de la unidad didáctica, sino también orientar las decisiones pedagógicas necesarias para el desarrollo progresivo de estas habilidades.

Figura 28.

Situación problema planteada en el Taller 1: Propagación de un virus

> *"La Isla de las Flores tiene una población aproximada de 25.000 habitantes. El 16 de marzo se detectaron 5 personas infectadas con un virus desconocido. De esas 5, tres son residentes que regresaron de un viaje y dos son viajeros temporales. Según la investigación inicial, cada persona infectada contagia en promedio a 2 personas nuevas por día (en este contexto no hay muertes ni medidas de control)."*

Nota. Situación elaborada con base a situaciones clásicas sobre la ley de Malthus y la propagación de virus. Elaboración propia.

Con el fin de contextualizar la actividad propuesta, en la *Figura 28* se presenta el enunciado de la situación problema planteada a los estudiantes, la cual sirvió como punto de partida para el desarrollo de las actividades y de los procesos de interpretación, modelación y análisis a lo largo del taller. A partir de este panorama general, resulta pertinente analizar en detalle lo ocurrido en cada una de sus fases, con el fin de identificar aquellos aspectos que llamaron particularmente la atención, ya sea por las dificultades evidenciadas, los avances logrados o las situaciones no previstas que surgieron durante la implementación.

- **Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento**

En esta fase, los estudiantes abordaron la situación problema sin formalización teórica, con el objetivo de identificar patrones y construir un modelo inicial. En general, la mayoría logró reconocer el comportamiento creciente de los datos, identificando en varios casos un patrón exponencial. Sin embargo, este reconocimiento no siempre se logró de forma adecuada y se tradujo en una construcción idónea del modelo matemático. En algunos casos, la secuencia de datos fue incorrecta y los estudiantes propusieron expresiones que, aunque capturaban un comportamiento, no era la estructura a la que debían llegar dada la situación inicial.

Figura 29.

Respuestas del grupo 1 en la fase exploratoria del taller 1

	A	B	C
1	Días (t)	Número de Infectados I(t)	
2	0	5	
3	1	35	
4	2	245	
5	3	1715	
6	4	12005	

Con base en tus observaciones y análisis, ¿puedes proponer un modelo inicial (regla, expresión o función) que describa el número de infectados en un tiempo *n*? **Explica por qué consideras que este modelo es adecuado.**

Aa π Proponemos la siguiente expresión para los infectados en un tiempo n: I(t)=7^(t)*5. Ya que, se pueden relacionar los valores de la tabla de la gráfica o cumplen con esa correspondencia.

¿A qué razón cambia el número de infectados día a día? ¿En qué medida crece? **Justifica tu respuesta**

Aa π La razón de cambio es del doble de los infectados por día, de manera ascendente.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En esta producción se observa un modelo que, aunque presenta una estructura de crecimiento exponencial, no corresponde completamente a las condiciones del problema. Los estudiantes logran identificar la tendencia del fenómeno, pero incorporan de manera inadecuada los valores asociados al crecimiento. Esto evidencia una comprensión parcial, en la que se reconoce el comportamiento global del sistema, pero no se establecen relaciones precisas entre los datos y los parámetros del problema. Esta situación refleja dificultades en la relación entre lo numérico, lo algebraico y lo contextual, aspecto que ya había sido identificado en la prueba diagnóstica.

Figura 30.

Respuestas del grupo 5 en la fase exploratoria del taller 1

Con base en tus observaciones y análisis, ¿puedes proponer un modelo inicial (regla, expresión o función) que describa el número de infectados en un tiempo *n*? **Explica por qué consideras que este modelo es adecuado.**

Consideramos que un modelo adecuado que puede describir el comportamiento del aumento de número de infectados por día es uno exponencial dado al crecimiento tan abrupto entre datos

Tarea 4

¿A qué razón cambia el número de infectados día a día? ¿En qué medida crece? **Justifica tu respuesta**

Van aumentando teniendo en cuenta el numero de infectados del día multiplicado por 3

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En estos casos, los estudiantes muestran una interpretación adecuada del fenómeno desde el punto de vista contextual; sin embargo, presentan dificultades al traducir dicha comprensión al lenguaje matemático. Aunque logran identificar elementos relevantes de la situación y describir el comportamiento del sistema, no consiguen establecer relaciones claras entre las variables ni consolidar una expresión que represente formalmente el modelo. Esto se traduce en formulaciones incompletas o en la ausencia de un modelo matemático coherente, lo que muestra una desconexión entre el análisis cualitativo y su formalización. En este sentido, se identifican dificultades tanto en la organización de la información como en la construcción de relaciones, aspectos fundamentales para avanzar hacia procesos de modelación más estructurados y en coherencia con los objetivos de la unidad didáctica.

Figura 31.

Respuestas del grupo 10 en la fase exploratoria del taller 1

Con base en tus observaciones y análisis, ¿puedes proponer un modelo inicial (regla, expresión o función) que describa el número de infectados en un tiempo *n*? **Explica por qué consideras que este modelo es adecuado.**

Aa π

Modelo numerico de Euler que es una aproximación de la solución analitica, que es: P(i+1)= 2P(i)*(t(i+1)-(t(i)))+P(i) . No consideramos que precisa porque es una aproximación.

Tarea 4

¿A qué razón cambia el número de infectados día a día? ¿En qué medida crece? **Justifica tu respuesta**

Aa π

3 es la razon de cambio, crece en medida proporcional y teniendo en cuenta el numero de dias y el promedio de infectados (2).

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En contraste, se identifican producciones en las que los estudiantes emplean estrategias no previstas inicialmente, como relaciones iterativas o aproximaciones numéricas, para modelar el fenómeno. Estas respuestas evidencian procesos de exploración y experimentación que permiten reconocer patrones de crecimiento de manera progresiva. Además, de hacer uso de otros elementos, lo que permite incorporar otros conocimientos matemáticos adicionales y validarlos correctamente, favoreciendo una construcción más significativa del conocimiento.

Figura 32.

Respuestas del grupo 8 en la fase exploratoria del taller 1

¿Cómo describirías el comportamiento de la población infectada a lo largo del tiempo? ¿Notas algún patrón o regularidad en los datos? **Justifica tu respuesta**

Aa π

El comportamiento de la población infectada describe un crecimiento exponencial, donde el número de contagiados aumenta de forma acelerada cada día debido a que no existen medidas de control. El patrón principal es una razón constante de triplicación (r=3), lo que significa que la cantidad total de enfermos de un día es siempre el triple del día anterior; esto se debe a que cada infectado existente permanece enfermo y suma a dos personas nuevas al grupo cada 24 horas.

Tarea 3

Con base en tus observaciones y análisis, ¿puedes proponer un modelo inicial (regla, expresión o función) que describa el número de infectados en un tiempo *n*? **Explica por qué consideras que este modelo es adecuado.**

Aa π

I(t)= 5*3^t

Este modelo matemático es el más adecuado porque refleja exactamente cómo se comporta el virus en la vida real según los datos. Como se puede leer en el problema todo comienza con 5 personas contagiadas el primer día, y como cada una de ellas enferma a 2 más cada 24 horas, el grupo total se termina triplicando diariamente (la persona que ya estaba infectada más sus dos nuevos contagios). Al no haber muertes ni hospitales que frenen el avance, esta regla matemática nos permite ver cómo el problema deja de ser pequeño muy rápido, pasando de unos pocos casos a miles en cuestión de días solo con seguir esa potencia de tres.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En este tipo de producciones, los estudiantes logran identificar correctamente un patrón de crecimiento exponencial a partir de los datos y proponen modelos coherentes desde el punto de vista algebraico. Sin embargo, al justificar sus respuestas, incorporan interpretaciones del fenómeno que no están explícitamente establecidas en la situación problema. Este tipo de argumentación evidencia un intento por dotar de significado al modelo matemático. En este sentido, los estudiantes no solo construyen el modelo a partir de los datos, sino que además introducen supuestos adicionales sin cuestionar su pertinencia, lo que refleja un nivel avanzado del proceso de modelación matemática, en la que se distingue claramente entre los datos proporcionados y las interpretaciones inferidas.

En congruencia, la fase exploratoria expone que los estudiantes poseen herramientas para identificar patrones y realizar aproximaciones iniciales; sin embargo, presentan dificultades en la formalización del modelo, en la interpretación de los parámetros y en la vinculación entre diferentes representaciones matemáticas.

- **Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría**

En esta fase, los estudiantes abordaron el problema desde un enfoque formal mediante el planteamiento y resolución de la ecuación diferencial del modelo malthusiano. A diferencia de la fase exploratoria, en este momento no se esperaba una construcción empírica del modelo, sino que los estudiantes utilizaran las herramientas matemáticas presentadas en clase y en el mismo desarrollo del taller para representar y resolver el fenómeno de manera formal. En términos generales, se evidenció un dominio adecuado de los procedimientos matemáticos, confirmando las fortalezas previamente identificadas en la resolución de problemas y procedimientos.

Figura 33.

Respuestas del grupo 1 en la fase teórica del taller 1

Determina y escribe con claridad la solución encontrada para la ecuación diferencial asociada al modelo malthusiano para la situación planteada.

Aa π

$$P(t) = 5e^{(7t)}$$

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En esta producción se observa que los estudiantes logran plantear y resolver correctamente la ecuación diferencial desde el punto de vista algebraico; sin embargo, los valores utilizados no corresponden a los del problema. Esto da lugar a una solución matemáticamente válida, pero conceptualmente incorrecta en términos del fenómeno modelado. Este tipo de respuesta evidencia una desconexión entre la manipulación simbólica y la interpretación contextual (Fase 1 del taller), lo que limita la coherencia del modelo construido.

Figura 34.

Respuestas del grupo 3 en la fase teórica del taller 1

Tarea 5

A partir de la situación problema, plantea la ecuación diferencial correspondiente al modelo malthusiano que describe la propagación del virus.

Aa π

$$\frac{dp}{dt} = 5\left[2\left(3^{(t)}\right)\right]$$

Tarea 6

Determina y escribe con claridad la solución encontrada para la ecuación diferencial asociada al modelo malthusiano para la situación planteada.

Aa π

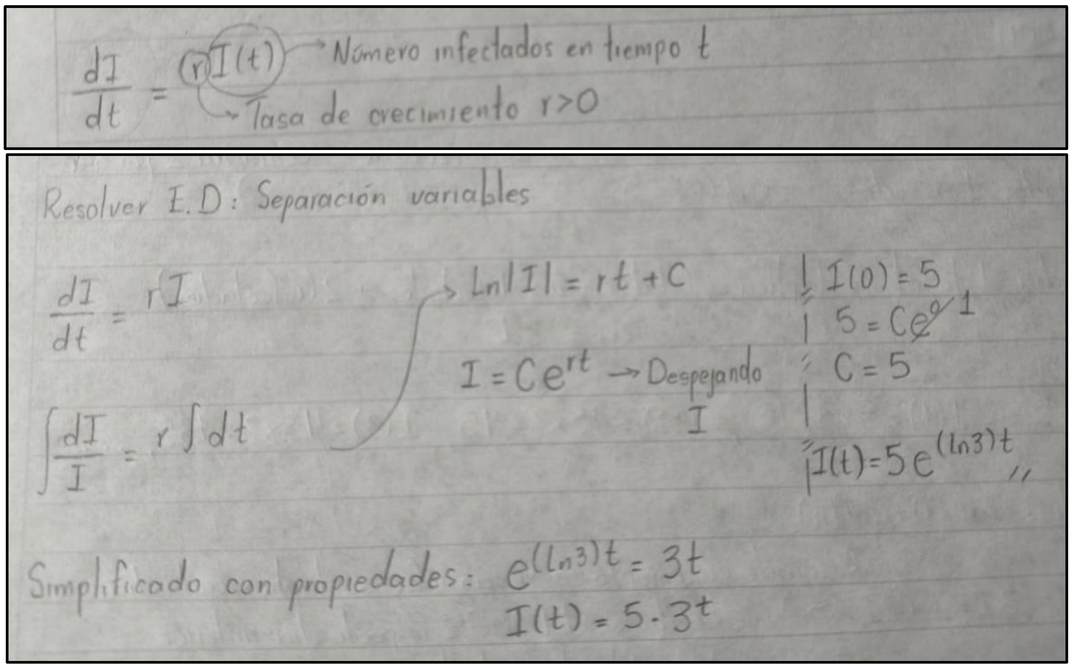
$$p(t) = \frac{10}{\ln(3)}\left(3^{(t)} - 1\right) + 5$$

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En este caso, se observa que los estudiantes no desarrollan el proceso teórico esperado, sino que recurren a resultados obtenidos en la fase exploratoria. Esta decisión sugiere una dificultad en la apropiación de la teoría como herramienta para resolver el problema, ya que los estudiantes combinan el uso de procedimientos formales con el apoyo de las aproximaciones previas. Esto pone de manifiesto la necesidad de fortalecer la comprensión de la teoría no solo como un conjunto de técnicas, sino como una herramienta para modelar y analizar fenómenos.

Figura 35.

Respuestas del grupo 12 en la fase teórica del taller 1



Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

En contraste, se identifican producciones en las que los estudiantes logran articular de manera adecuada la teoría y el contexto del problema. En estos casos, se plantea correctamente la ecuación diferencial y se obtiene una solución coherente con la situación inicial. Estas respuestas dejan ver un uso significativo del conocimiento matemático, en el que los procedimientos no solo se ejecutan correctamente, sino que se integran dentro de un proceso de modelación con sentido.

En conjunto, la fase teórica permite evidenciar que los estudiantes, en su mayoría, poseen un dominio adecuado de los procedimientos matemáticos necesarios para resolver ecuaciones diferenciales lineales; sin embargo, presentan dificultades en la identificación de los elementos del modelo dentro del contexto del problema y en el uso autónomo de la teoría como herramienta de resolución.

- **Fase de Contraste: La Teoría frente al Experimento**

En esta fase, los estudiantes compararon los resultados obtenidos en las fases anteriores, promoviendo procesos de análisis y validación. A diferencia de las fases anteriores, en este momento sí se esperaba que los estudiantes establecieran conexiones entre distintas representaciones del fenómeno y reflexionaran sobre la validez de los modelos construidos.

Figura 36.

Respuestas del grupo 10 en la fase de contraste del taller 1

Después de 3 días, ¿el valor de la población infectada encontrado con el modelo malthusiano coincide con el valor obtenido en la exploración previa? **Justifica tu respuesta.**

Aa π Sí coincide, porque la aproximación de la solución numerica estuvo acertada

Tarea 12

Según el modelo malthusiano, ¿en qué momento la población infectada alcanza el total de habitantes de la isla? **Explica qué significa este resultado en el contexto del problema.**

Aa π En 8 dias el numero de infectados es superior a la población

Tarea 13

¿Qué limitaciones podrías encontrar si intentaras usar el modelo de Malthus para predecir en un período de tiempo más extenso (por ejemplo, a 40 días)? **Justifica tu respuesta**

Aa π En 40 dias ya habria pasado por mucho el numero de población inicial y seria un numero muy grande.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En este caso, los estudiantes logran establecer una relación clara entre los resultados obtenidos mediante un enfoque numérico y la solución analítica del modelo. Esta correspondencia permite validar el modelo construido y evidencia una comprensión que integra diferentes representaciones del fenómeno. Este tipo de respuesta resulta especialmente valioso, ya que el estudiante no solo obtiene resultados, sino que reflexiona sobre su coherencia.

Figura 37.

Respuestas del grupo 3 en la fase de contraste del taller 1

Al comparar la representación gráfica de la solución obtenida en la fase exploratoria con la representación gráfica de la solución obtenida con el modelo malthusiano, ¿en qué se parecen y en qué se diferencian ambas curvas? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Se parecen en que las dos tienen esa forma de exponelcial que crece sin parar porque ambas dependen de 3^(t.) La diferencia principal es que la naranja empieza en el 5 (cuando el tiempo es 0), mientras que la azul empieza desde un dato negativo, sin embargo, se debe analizar la fución y la solución para valores mayores a 0, aun así se perciben ligeras diferencias como que la azul es mucho más empinada.

Tarea 11

Después de 3 días, ¿el valor de la población infectada encontrado con el modelo malthusiano coincide con el valor obtenido en la exploración previa? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

No coinciden, en la exploración te da 135 infectados. Pero con el modelo de Malthus, la operación da alrededor de 236 . El modelo de Malthus hace que la enfermedad parezca mucho más rápida de lo que salió en la primera parte.

Tarea 12

Según el modelo malthusiano, ¿en qué momento la población infectada alcanza el total de habitantes de la isla? **Explica qué significa este resultado en el contexto del problema.**

Aa π

Llegaría súper rápido porque el crecimiento exponencial no tiene freno. Lo que esto significa en la vida real es que el modelo relativamente básico; solo sirve para el puro principio de un brote, porque llega un punto donde ya no queda nadie más a quien contagiar y el modelo no sabe "ver" ese límite.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En otros casos, los estudiantes identifican discrepancias entre los resultados obtenidos en ambas fases. Aunque no siempre logran determinar con precisión la causa del error, sí reconocen que existe una diferencia y proponen explicaciones relacionadas con el comportamiento del modelo. Esto demuestra un proceso de análisis significativo, en el que la comparación se convierte en una herramienta para cuestionar y revisar los resultados obtenidos; aunque estos resultados no sean coherentes con la situación planteada.

Figura 38.

Respuestas del grupo 7 en la fase de contraste del taller 1

¿Qué limitaciones podrías encontrar si intentaras usar el modelo de Malthus para predecir en un período de tiempo más extenso (por ejemplo, a 40 días)? **Justifica tu respuesta**

no se tiene en cuenta que el numero de población es finita, se ignoran los factores de control y no se tiene en cuenta las muertes o recuperaciones, este modelo solo crece exponencialmente sin limite

Tarea 14

¿Crees que este modelo sería útil en la realidad si se aplicaran medidas de control (vacunas, aislamiento, etc.)? **Justifica tu respuesta**

No ya que, con este modelo solo el virus se esparce sin limite y al dar lugar a posibles recuperaciones, en el intervalo de tiempo que se quiera ver cuantas personas han sido infectadas según el modelo va a tener una variabilidad con respecto a las recuperaciones

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En algunas producciones, los estudiantes avanzan hacia interpretaciones más profundas, analizando el comportamiento global del modelo. Se identifican reflexiones sobre el crecimiento ilimitado y sus implicaciones, lo que evidencia la capacidad de reconocer las limitaciones del modelo malthusiano. Este tipo de respuestas refleja el desarrollo de pensamiento crítico, en el que el estudiante trasciende la resolución matemática para analizar la pertinencia del modelo en el contexto real y da a entender la incorporación de modelos más sofisticados.

En general, esta fase presenta avances importantes en procesos de validación, comparación e interpretación, consolidando aprendizajes que no se limitan a lo procedimental, sino que integran análisis y reflexión. Si bien no todos los estudiantes alcanzan el mismo nivel de profundidad en sus análisis, se identifican aspectos claros de aprendizaje muy satisfactorias, particularmente en la comparación entre modelos y en la identificación de sus limitaciones.

A modo de cierre, este taller permite mostrar un panorama caracterizado por una clara fortaleza en el dominio procedimental y, al mismo tiempo, por dificultades en procesos de modelación, argumentación y comunicación matemática. A lo largo de las diferentes fases, los estudiantes lograron identificar patrones y resolver ecuaciones diferenciales; sin embargo, se evidenciaron algunas limitaciones en la construcción del modelo a partir del contexto, en la interpretación de los parámetros y en la justificación de sus respuestas. No obstante, la fase de contraste permitió observar avances significativos, particularmente en la capacidad de comparar resultados, reconocer inconsistencias y reflexionar sobre las limitaciones del modelo. Estos resultados demuestran el inicio del desarrollo del pensamiento crítico y la validación matemática, en coherencia con los objetivos de la unidad didáctica.

5.2.2 Resultados Taller #2 – Enfriando Chocolate – Ley de Enfriamiento de Newton

El *Taller 2* se plantea como una continuación del proceso de modelación iniciado en el *Taller 1,* incorporando un cambio significativo tanto en el tipo de fenómeno abordado como en las condiciones de desarrollo de la actividad. En esta ocasión, el fenómeno de estudio corresponde al enfriamiento de un cuerpo, modelado a partir de la ley de enfriamiento de Newton, lo que introduce a los estudiantes en un contexto físico, experimental y cercano a su cotidianidad.

A diferencia del taller anterior, esta actividad se desarrolló de manera autónoma fuera del aula, otorgando a los estudiantes aproximadamente una semana para su realización. La tarea consistía en la preparación de una taza de chocolate caliente, cuyo proceso de enfriamiento debía ser registrado mediante mediciones periódicas de temperatura (Ver *Apéndice 20 y 21*). Esta dinámica introduce un elemento fundamental en la modelación matemática: la generación de datos reales en condiciones no controladas, lo que implica enfrentar variabilidad experimental, posibles errores de medición y diferencias en los instrumentos utilizados.

Desde una perspectiva didáctica, este taller representa un aumento en el nivel de exigencia cognitiva, ya que no solo se espera que los estudiantes interpreten y modelen un fenómeno, sino que además diseñen y ejecuten un proceso de recolección de datos. En este sentido, se busca que establezcan relaciones entre la temperatura del cuerpo, la temperatura ambiente y el tiempo, reconociendo el comportamiento del enfriamiento y aproximándose a su modelación mediante una ecuación diferencial.

Asimismo, el carácter autónomo de la actividad permite observar cómo los estudiantes gestionan el proceso de modelación sin la guía directa del docente, lo que brinda información valiosa sobre sus estrategias, decisiones y formas de trabajo. Este aspecto resulta importante, ya que permite evidenciar avances respecto al *Taller 1*, particularmente en la apropiación del proceso de modelación y en la toma de decisiones frente a situaciones reales.

En términos de participación, el taller contó con el trabajo de 27 de los 31 estudiantes (87.1%), distribuidos en 11 grupos de trabajo. En este taller se tuvo un promedio general de 43 sobre 50 puntos, lo que deja en manifiesto un desempeño favorable. No obstante, al analizar los resultados por procesos, se mantiene una tendencia similar a la observada previamente: el mayor nivel de desempeño se presenta en la ejercitación de procedimientos (4.9), mientras que el razonamiento y la comunicación matemática (3.5) continúan siendo los aspectos con mayores dificultades. Por su parte, la modelación presenta un desempeño intermedio (4.2), con avances importantes, aunque aún con aspectos por fortalecer.

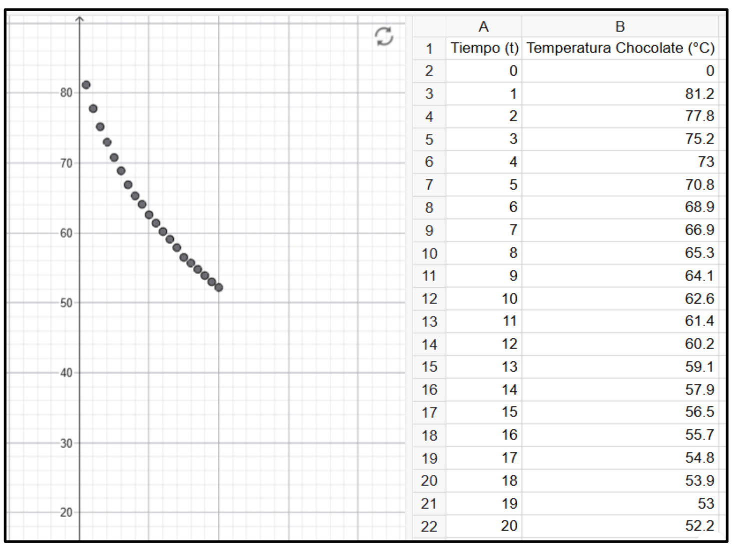
Con base en este panorama general, resulta pertinente profundizar en el análisis del desarrollo del taller a través de cada una de sus fases, con el propósito de identificar de manera detallada cómo los estudiantes abordaron el proceso de modelación en un contexto experimental. Este análisis permitirá reconocer no solo los avances logrados en la interpretación y formalización del fenómeno, sino también las dificultades persistentes y las decisiones que marcaron el desarrollo de la actividad, aportando así una visión más completa del proceso de aprendizaje evidenciado en este segundo momento de la intervención.

- **Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento**

En esta fase, los estudiantes se enfrentaron a la recolección y análisis de datos experimentales asociados al enfriamiento de una taza de chocolate, lo que implicó interpretar información no ideal y establecer relaciones entre variables a partir de mediciones reales. A diferencia del *Taller 1*, en esta ocasión los datos no fueron proporcionados, sino generados por los propios estudiantes. Este aspecto permitió evidenciar cómo enfrentan la variabilidad propia de un contexto experimental y cómo aprenden a partir de datos que no necesariamente siguen un comportamiento perfecto. En este sentido, la fase exploratoria no solo se configura como un espacio de observación del fenómeno, sino también como un escenario clave para el desarrollo de un aprendizaje significativo en contextos reales.

Figura 39.

Respuestas del grupo 8 en la fase experimental del taller 2



	A	B
1	Tiempo (t)	Temperatura Chocolate (°C)
2	0	0
3	1	81.2
4	2	77.8
5	3	75.2
6	4	73
7	5	70.8
8	6	68.9
9	7	66.9
10	8	65.3
11	9	64.1
12	10	62.6
13	11	61.4
14	12	60.2
15	13	59.1
16	14	57.9
17	15	56.5
18	16	55.7
19	17	54.8
20	18	53.9
21	19	53
22	20	52.2

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En general, todos los grupos lograron recolectar datos consistentes, mostrando una disminución progresiva de la temperatura, lo que se refleja en representaciones gráficas coherentes con el fenómeno de enfriamiento. La consistencia en las mediciones sugiere una apropiación adecuada del proceso experimental y una comprensión inicial del comportamiento del sistema.

Figura 40.

Respuestas del grupo 5 en la fase experimental del taller 2

Tarea 4

En cada instante de tiempo, compara la disminución de la temperatura del chocolate con la diferencia que tiene respecto a la temperatura ambiente. ¿La razón entre estas dos cantidades se mantiene aproximadamente constante? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Sí, aproximadamente se mantiene constante. Porque en cada instante la disminución de temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del chocolate y la del ambiente como indica la Ley de Enfriamiento de Newton. Al hacerse más pequeña la diferencia, también disminuye la rapidez de enfriamiento en la misma proporción.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En este caso, los estudiantes afirman que la razón entre la disminución de la temperatura y la diferencia respecto a la temperatura ambiente es constante, lo cual es coherente con el modelo teórico. Sin embargo, la justificación presentada no se construye a partir del análisis de los datos experimentales, sino que parece apoyarse directamente en el conocimiento previo de la ley de enfriamiento de Newton. Esto evidencia una inversión en la lógica del proceso didáctico de los talleres, donde la exploración debería preceder a la formalización, y pone de manifiesto una dificultad en la construcción de significado a partir de la experiencia empírica.

Figura 41.

Respuestas del grupo 10 en la fase experimental del taller 2

Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

La función se asemeja a una función polinómica de grado 4. En el intervalo analizado, la gráfica muestra un comportamiento decreciente, ya que la temperatura del chocolate disminuye con el tiempo y no vuelve a aumentar. Este descenso ocurre hasta que la temperatura del chocolate se aproxima a la temperatura ambiente, momento en el cual la variación de temperatura tiende a estabilizarse. T(t) = 0.0002t^4 - 0.0106t^3 + 0.2421t^2 - 3.7502t + 84.6098

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En esta producción se observa que, al realizar ajustes mediante herramientas tecnológicas, algunos estudiantes proponen modelos polinómicos de alto grado, a pesar de que los datos presentan un comportamiento claramente exponencial decreciente. Esta elección expone una tendencia a privilegiar el criterio de "mejor ajuste" en términos numéricos sobre la coherencia del "mejor ajuste" respecto al modelo con el fenómeno. En este sentido, se identifica una dificultad en la interpretación de los resultados de las herramientas tecnológicas, ya que los estudiantes no siempre reconocen que un buen ajuste no implica necesariamente un modelo adecuado desde el punto de vista físico.

Figura 42.

Respuestas del grupo 7 en la fase experimental del taller 2

¿A qué función se asemeja la gráfica de la temperatura del chocolate en función del tiempo? **Justifica tu respuesta.**

Aa π f(t) = 24+54.4 e^(-0.028t). Es una función decreciente y es la que más se ajusta a los datos.

Tarea 8

Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? **Justifica tu respuesta.**

Aa π La función que ofrece mejor ajuste es la logística y algebraicamente se ve así: y(t)=34.0666/(1-0.5609e^(-0.017t)). Este ajuste es adecuado porque la curva pasa muy cerca de los datos experimentales y representa correctamente el comportamiento de lo que le pasa al chocolate.

Tarea 9

Expresa mediante un modelo matemático o una ecuación diferencial el enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t. **Justifica tu modelo.**

Aa π y(t)=34.0666/(1-0.5609e^(-0.017t)). Es la ED que satisface el intervalo evaluado.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En otros casos, los estudiantes identifican correctamente el comportamiento exponencial del fenómeno y proponen modelos coherentes; sin embargo, al utilizar herramientas de regresión, optan por funciones logísticas debido a su ajuste numérico. Este cambio en la elección del modelo evidencia una comprensión parcial del proceso de modelación, en la que se prioriza la precisión del ajuste sobre la interpretación del fenómeno. Además, esta decisión afecta etapas posteriores, ya que el modelo logístico es asumido como solución sin cuestionar su validez, lo que refleja dificultades en la modelación.

Figura 43.

Respuestas del grupo 1 en la fase experimental del taller 2

Tarea 8

Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Al realizar la regresión en GeoGebra, la función que mejor se ajusta es una exponencial, porque la gráfica no es una línea recta. Se ve que al principio la temperatura baja más rápido y después más despacio, como que se va suavizando la caída. La función obtenida es:
$f(x)= 83.3863e^{(-0.0168x)}$
Esta función modela el enfriamiento porque el exponente es negativo, lo que indica que la temperatura disminuye con el tiempo. Además, la forma de la curva coincide con el comportamiento observado en los datos: el chocolate se enfría rápido al principio y después más lentamente, acercándose progresivamente a la temperatura ambiente.

Tarea 9

Expresa mediante un modelo matemático o una ecuación diferencial el enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t. **Justifica tu modelo.**

Aa π

El enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t se puede representar:
$T(t)= 21+64.3/(1+kt)$
Propongo este modelo porque empieza en 85.3 °C cuando el tiempo es 0 y, a medida que pasa el tiempo, la temperatura va bajando y acercándose a 21 °C, que es la temperatura del ambiente. La forma de la fracción hace que al principio baje más rápido y después más despacio, que es justo lo que se ve en la tabla y en la gráfica. Además, cuando el tiempo es muy grande, la parte de arriba se vuelve cada vez más pequeña, entonces la temperatura se aproxima a 21 sin pasarse. Por eso creo que este modelo también representa bien el enfriamiento del chocolate.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Asimismo, se identifican casos en los que los estudiantes logran interpretar correctamente el comportamiento del fenómeno y realizar ajustes coherentes; sin embargo, al proponer un modelo general, presentan expresiones diferentes a las obtenidas previamente, generando inconsistencias en el proceso. Este tipo de respuesta resulta especialmente interesante, ya que no refleja una dificultad conceptual, sino un problema de coherencia en el proceso didáctico planteado para la actividad. Los estudiantes comprenden el fenómeno, pero no logran mantener consistencia entre las diferentes etapas del análisis.

Figura 44.

Respuestas del grupo 8 en la fase experimental del taller 2

¿A qué función se asemeja la gráfica de la temperatura del chocolate en función del tiempo? **Justifica tu respuesta.**

Aa π Según los datos observados estos se pueden describir a partir de una función exponencial decreciente ya que disminuye mas rápido al principio y a medida que pasa el tiempo este cambio es mas lento.

Tarea 8

Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? **Justifica tu respuesta.**

Aa π La mejor función es una exponencial ya que si utilizamos una algebraica según el comportamiento de estas funciones en algún momento después de decrecer esta empieza con su comportamiento creciente y esto no es un modelo real para el enfriamiento del chocolate, por lo tanto el mas acertado es una exponencial decreciente. T(t)=80.3691e^[-0.0169x]

Tarea 9

Expresa mediante un modelo matemático o una ecuación diferencial el enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t. **Justifica tu modelo.**

Aa π T(t)=83e^[-0.0367x] este modelo fue propuesto tomando en cuenta la grafica que se obtuvo en GeoGebra y la función que esta nos proporcionó, se realizó el calculo de nuevo de la constante y el K teniendo en cuenta los datos tomados anteriormente para hallarlas y generar un modelo similar al planteado en la regresión pero con nuevas constantes que pueden hacer a la ecuación mas precisa.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En contraste, se observan producciones en las que los estudiantes logran mantener coherencia a lo largo de todo el proceso. En estos casos, se identifica correctamente el comportamiento exponencial, se realiza un ajuste adecuado y se propone un modelo consistente con los datos y con la interpretación inicial. Este tipo de respuestas demuestran un nivel de comprensión más avanzado, en el que se vinculan de manera adecuada la experimentación, el uso de herramientas TIC y la construcción del modelo matemático.

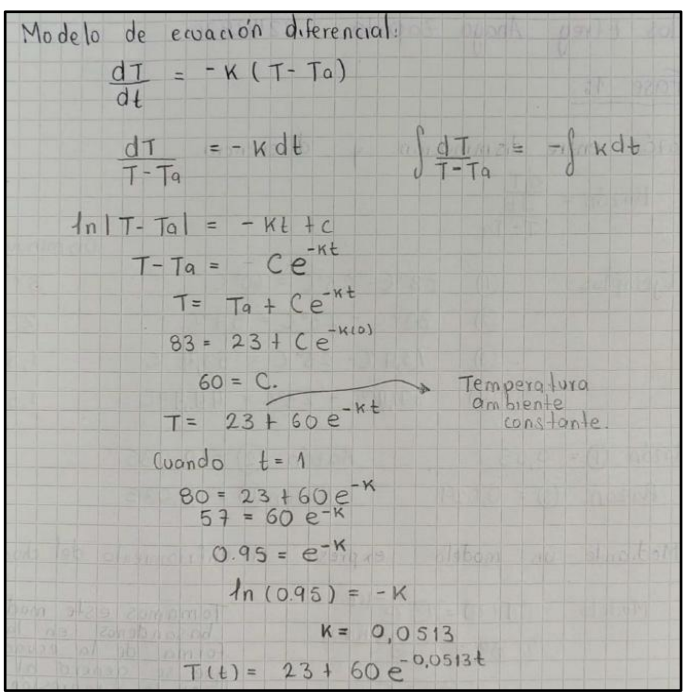
En conjunto, esta fase presenta un avance importante respecto al *Taller 1*, particularmente en la capacidad de los estudiantes para generar, interpretar y analizar datos en contextos reales. No obstante, persisten dificultades en la construcción de modelos matemáticos empíricos a partir de los datos. Se observa que, aunque los estudiantes logran identificar patrones y utilizar herramientas tecnológicas, no siempre establecen una conexión clara entre el comportamiento del fenómeno y la forma funcional del modelo. Estos hallazgos resaltan la importancia de esta fase como un espacio de transición entre la intuición y la formalización, en el que se comienzan a consolidar elementos fundamentales para el desarrollo de la modelación matemática.

- **Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría**

En la fase teórica, los estudiantes abordaron la formalización del fenómeno de enfriamiento a partir de la ley de enfriamiento de Newton, lo que implicó el planteamiento y resolución de una ecuación diferencial. A diferencia de la fase exploratoria, donde predominaba el análisis empírico, en este momento se esperaba que los estudiantes lograran integrar sus observaciones con herramientas matemáticas formales. Este paso desde lo experimental hacia lo teórico se convierte en un momento clave en el proceso de modelación, ya que permite evidenciar la capacidad de los estudiantes para representar fenómenos reales mediante estructuras matemáticas. En este sentido, esta fase no solo evalúa el dominio procedimental, sino también la comprensión al momento de enfrentarse a la resolución de problemas.

Figura 45.

Respuestas del grupo 8 en la fase teórica del taller 2

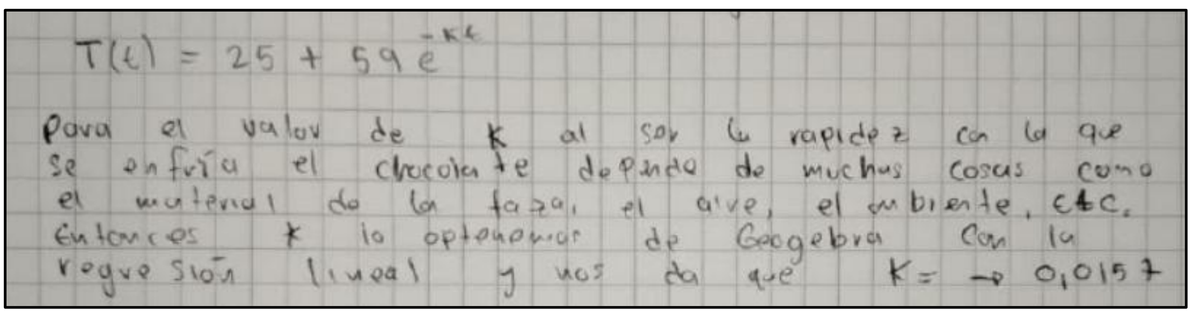


Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

Se encuentra un desempeño sólido en la formulación y resolución de la ecuación diferencial, con un adecuado uso de técnicas como la separación de variables (aunque el procedimiento aplicado es correcto, se trata de una ecuación diferencial no homogénea, por lo que el método más adecuado para su resolución corresponde al factor integrante). Los estudiantes logran establecer correctamente la relación entre la variación de la temperatura y la diferencia respecto al ambiente, lo que refleja una apropiación significativa del modelo teórico. Además, se observan procesos ordenados y coherentes, lo que indica un fortalecimiento del dominio procedimental.

Figura 46.

Respuestas del grupo 10 en la fase teórica del taller 2



$T(t) = 25 + 59e^{-kt}$

Para el valor de K al ser la rapidez con la que se enfría el chocolate depende de muchas cosas como el material de la taza, el aire, el ambiente, etc. Entonces K lo optenemos de Geogebra con la regresión lineal y nos da que K= → 0,0157

Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

No obstante, se identifican decisiones metodológicas interesantes, como el uso de valores obtenidos mediante regresión para determinar la constante de enfriamiento. Aunque esta estrategia puede generar resultados cercanos, introduce aproximaciones adicionales que no siempre son reconocidas por los estudiantes. Esto evidencia una comprensión en construcción del proceso de modelación, en la que se integran herramientas tecnológicas y procedimientos analíticos, pero sin una distinción clara entre datos experimentales y parámetros del modelo.

En síntesis, la fase teórica confirma que los estudiantes poseen un dominio sólido de los procedimientos matemáticos necesarios para resolver ecuaciones diferenciales, lo cual representa una de sus principales fortalezas. Sin embargo, también se muestran dificultades en la interpretación de los elementos del modelo y en la toma de decisiones metodológicas durante el proceso de solución. En particular, se observa que, aunque logran obtener resultados correctos, no siempre reflexionan sobre la pertinencia de los datos utilizados o las implicaciones de las aproximaciones realizadas. Esto sugiere la necesidad de fortalecer no solo el componente técnico, sino también la comprensión del proceso de modelación como una actividad que involucra una lectura crítica del problema, interpretación, validación y toma de decisiones.

- **Fase de Contraste: La Teoría frente al Experimento**

En la fase de contraste, los estudiantes se enfrentaron a la comparación entre el modelo experimental y el modelo teórico, con el objetivo de analizar su coherencia, validez y alcances. Esta fase resulta fundamental dentro de la propuesta didáctica, ya que permite a los estudiantes confrontar sus ideas, identificar posibles inconsistencias y construir interpretaciones más elaboradas del fenómeno. En este sentido, el contraste entre modelos no solo favorece la comprensión matemática, sino que también contribuye al desarrollo del pensamiento crítico, la comunicación y la argumentación matemática.

Figura 47.

Respuestas del grupo 8 en la fase de contraste del taller 2

Tarea 13

¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre el modelo experimental obtenido en la fase 1 y el modelo de enfriamiento de Newton trabajado en la fase 2? ¿Qué razones crees que explican estas similitudes y diferencias?

Aa π

Como similitud tenemos que son dos ecuaciones exponenciales decrecientes donde se evidencia que el enfriamiento del chocolate es proporcional a la diferencia entre la temperatura del chocolate y la temperatura ambiente, sin embargo el modelo experimental puede presentar ciertas variaciones que se deben a los errores experimentales que se pueden presentar cuando se realiza este tipo de trabajos caseros ya que hay muchos factores que no se tienen en cuenta y algunos que no se pueden controlar, otra diferencia muy marcada es que la grafica muestra que el chocolate puede llegar a temperatura cercanas a 0, lo que evidencia que no se tomó en cuenta la temperatura ambiente, mientras tanto el modelo teórico modela situaciones ideales donde nada afecta el sistema evaluado con valores fijos, estas diferencias pueden estar ligadas a que un modelo es la simplificación de la realidad mientras que el otro muestra los cambios que pasan en la realidad.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En este caso, se observa que los estudiantes logran identificar similitudes entre ambos modelos, reconociendo que describen un comportamiento decreciente con una disminución rápida al inicio y más lenta posteriormente. Esto refleja una comprensión adecuada del fenómeno y una capacidad para interpretar el comportamiento global del sistema.

Figura 48.

Respuestas del grupo 1 en la fase de contraste del taller 2

¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre el modelo experimental obtenido en la fase 1 y el modelo de enfriamiento de Newton trabajado en la fase 2? ¿Qué razones crees que explican estas similitudes y diferencias?

Ambos muestran un enfriamiento exponencial, la temperatura baja rápido al principio y luego más despacio hasta acercarse a la temperatura ambiente. En cuanto a las diferencias, el modelo experimental puede tener algunas variaciones porque proviene de mediciones reales, mientras que el modelo de Newton es lo más ideal. Y lo que refiere a la razón, las diferencias se deben a factores como errores de medición, el ambiente o el material de la taza, que afectan el experimento.

Si tuvieras que mejorar el experimento para aumentar su precisión, ¿qué cambios realizarías en la forma de medir, en los materiales o en las preguntas planteadas? **Justifica tu respuesta.**

Propondría un cambio mas que todo en los materiales; se podría usar una taza con tapa para evitar la pérdida de calor por evaporación y con mas presupuesto también se podría realizar dentro de una cámara de aislamiento térmico para asegurar que el ambiente no varíe ni una décima de grado.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Asimismo, los estudiantes reconocen diferencias entre los modelos y las atribuyen a factores propios del proceso experimental, como errores de medición, condiciones del entorno o variaciones en la temperatura ambiente. Este tipo de argumentaciones resulta especialmente valioso, ya que evidencia una comprensión del carácter aproximado de los modelos matemáticos y su relación con la realidad. Adicionalmente, se observa que los estudiantes comienzan a cuestionar la precisión de los datos recolectados y su impacto en el modelo, lo que sugiere una mayor conciencia sobre la calidad de la información utilizada. Este tipo de reflexiones fortalece la idea de la modelación como un proceso dinámico, en el que los resultados deben ser interpretados y no asumidos como exactos.

Figura 49.

Respuestas del grupo 9 en la fase de contraste del taller 2

¿Qué crees que pasa con la solución del modelo de enfriamiento de Newton cuando la temperatura ambiente es variable? ¿Es igual a cuando la temperatura ambiente es constante? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Cuando la temperatura ambiente es variable, la solución ya no es una función exponencial simple como en el caso constante. En lugar de acercarse a un valor fijo, la temperatura del objeto tenderá a seguir los cambios de la temperatura ambiente a lo largo del tiempo. No es igual al caso constante porque ahora la ecuación diferencial incluye una función Ta(t), lo que hace que la solución dependa de cómo varíe el ambiente y no tienda a un único valor límite fijo.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Finalmente, algunos estudiantes logran identificar limitaciones del modelo teórico, como el supuesto de temperatura ambiente constante, y proponen posibles extensiones del modelo. Este tipo de respuestas demuestra un desarrollo significativo del pensamiento crítico, en el que los estudiantes no solo aplican modelos, sino que reflexionan sobre su validez y sus condiciones de aplicación. Estas producciones reflejan un avance importante hacia una visión más flexible y contextualizada de las matemáticas, en la que los modelos son entendidos como herramientas que dependen de las condiciones del fenómeno.

En términos generales, esta fase presenta avances significativos en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, particularmente en lo relacionado con la interpretación, validación y análisis de modelos. Más allá de la precisión de los resultados, se observa una mayor capacidad para reconocer el carácter aproximado de los modelos matemáticos, identificar factores que afectan su validez y reflexionar sobre sus condiciones de aplicación.

A modo de cierre, este análisis permite visualizar un avance significativo en el proceso de modelación de los estudiantes. Si bien persisten algunas dificultades en la coherencia del proceso y en la toma de decisiones metodológicas, los resultados muestran una evolución clara en la comprensión del fenómeno y en la vinculación entre diferentes representaciones y conexiones. En particular, se demuestran avances en la interpretación de datos experimentales, en la validación de modelos y en el reconocimiento de sus limitaciones. En este sentido, los estudiantes comienzan a reconocer que los modelos no solo deben ajustarse a los datos, sino también ser coherentes con el fenómeno que representan, lo que constituye un avance fundamental en la comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas para describir la realidad.

5.2.3 Resultados Taller #3 – Calentando un Tamal – Ley de Calentamiento de Newton

El *Taller 3* se plantea como una continuación del proceso de modelación desarrollado en el taller anterior, incorporando un nuevo fenómeno que amplía la comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas para describir procesos de cambio en distintos contextos. En esta ocasión, el fenómeno de estudio corresponde al calentamiento de un alimento, modelado a partir de la ley de calentamiento de Newton, lo que introduce a los estudiantes en una situación cercana a su cotidianidad, pero con un nivel de complejidad matemática significativamente mayor.

A diferencia de los talleres anteriores, en este se incorpora una situación con temperatura ambiente variable, lo que implica una ruptura con las condiciones más simples trabajadas previamente. Este cambio introduce un elemento clave en la modelación matemática: la necesidad de adaptar el modelo a condiciones más realistas, lo cual exige una comprensión más profunda tanto del fenómeno como de la estructura de la ecuación diferencial.

Desde una perspectiva didáctica, este taller representa el punto de mayor exigencia cognitiva dentro de la unidad didáctica, ya que no solo se espera que los estudiantes reconozcan el comportamiento del fenómeno y construyan el modelo matemático correspondiente, sino que también reflexionen sobre los supuestos que lo sustentan, analicen sus implicaciones y tomen decisiones frente a diferentes formas de modelación. En este sentido, se busca promover una comprensión más crítica del uso de las ecuaciones diferenciales en contextos reales.

En términos de participación, el taller contó con la intervención de 28 de los 31 estudiantes (90.3%), distribuidos en 10 grupos de trabajo. De donde se tuvo un promedio general de 37.8/50, lo que refleja un desempeño básico, e inferior al observado en el Taller 2, relacionado también con la ley de newton, pero con temperatura ambiente constante. Este resultado confirma el carácter más exigente de la actividad y se ve reflejado en las dificultades identificadas en los diferentes procesos evaluados.

En particular, la resolución de problemas presentó el menor desempeño (30.5/50), evidenciando dificultades en la formulación del modelo diferencial, especialmente en la consideración de la temperatura ambiente como función del tiempo. De manera similar, el proceso de modelación (35/50) muestra limitaciones en la traducción del fenómeno al lenguaje matemático, mientras que la ejercitación (44/50), aunque continúa siendo el aspecto más fuerte, comienza a verse tensionada ante la complejidad del problema.

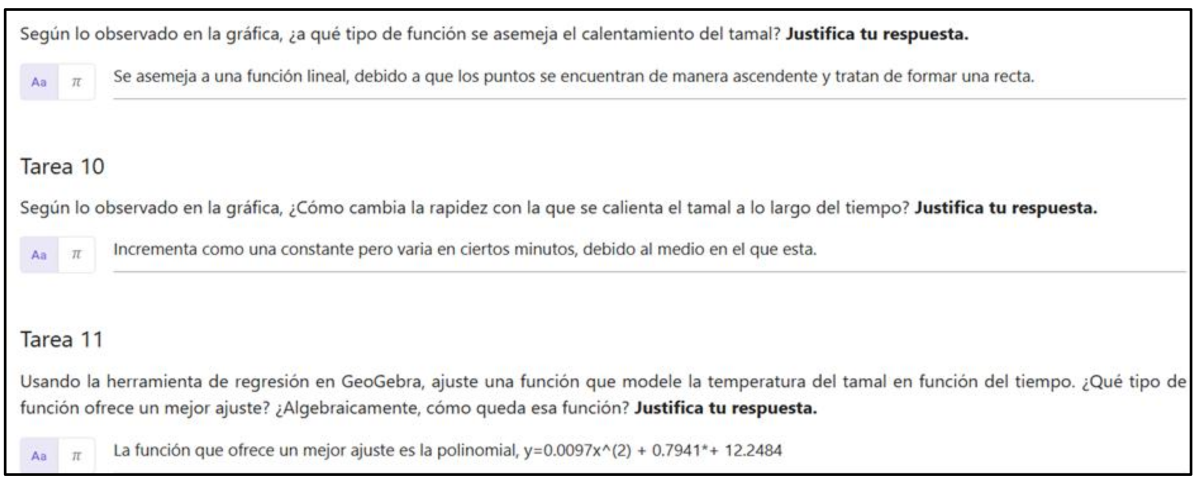
Estos resultados dejan en manifiesto que, a medida que aumenta la exigencia del proceso de modelación, las dificultades en la interpretación, la formulación y las conexiones entre situaciones se hacen más visibles, lo cual resulta coherente con el análisis a priori y con los objetivos de la unidad didáctica. Con base en este panorama general, resulta pertinente analizar en detalle el desarrollo del taller a través de cada una de sus fases, con el propósito de comprender cómo los estudiantes enfrentaron un proceso de modelación de mayor complejidad. Este análisis permitirá identificar no solo las dificultades asociadas a la interpretación del fenómeno y la formulación del modelo en condiciones más realistas, sino también los avances logrados en la comparación entre lo empírico y lo teórico.

- **Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento**

En esta fase, los estudiantes se enfrentaron al análisis simultáneo de la temperatura del cuerpo y del ambiente en función del tiempo, lo que implicó la interpretación de múltiples variables y su interacción. A diferencia de los talleres anteriores, esta fase no se limitaba a la identificación de patrones en una sola magnitud, sino que exigía establecer relaciones entre variables y comprender la dinámica del fenómeno de manera más integral. Este cambio representa un aumento significativo en la exigencia cognitiva, ya que los estudiantes debían coordinar diferentes niveles de interpretación: lectura gráfica, análisis de la variación y establecimiento de relaciones funcionales.

Figura 50.

Respuestas del grupo 9 en la fase exploratoria del taller 3


Según lo observado en la gráfica, ¿a qué tipo de función se asemeja el calentamiento del tamal? **Justifica tu respuesta.**

Aa π Se asemeja a una función lineal, debido a que los puntos se encuentran de manera ascendente y tratan de formar una recta.

Tarea 10

Según lo observado en la gráfica, ¿Cómo cambia la rapidez con la que se calienta el tamal a lo largo del tiempo? **Justifica tu respuesta.**

Aa π Incrementa como una constante pero varia en ciertos minutos, debido al medio en el que esta.

Tarea 11

Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del tamal en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? **Justifica tu respuesta.**

Aa π La función que ofrece un mejor ajuste es la polinomial, y=0.0097x^(2) + 0.7941*+ 12.2484

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En relación con la temperatura del cuerpo, la mayoría de los estudiantes logró reconocer el carácter creciente del fenómeno, identificando que la temperatura aumenta progresivamente hasta aproximarse a un valor límite. Sin embargo, al caracterizar el tipo de función, se evidenciaron dificultades importantes, ya que en muchos casos se clasificó el comportamiento como lineal o se recurrió a descripciones generales sin identificar el modelo exponencial subyacente. Este tipo de respuestas muestra una comprensión global del fenómeno, pero con limitaciones en la identificación de su estructura matemática.

Figura 51.

Respuestas del grupo 3 en la fase exploratoria del taller 3

Según lo observado en la gráfica, ¿Cómo varía la temperatura del agua en la olla a lo largo del tiempo? ¿Se mantiene constante o cambia? **Justifica tu respuesta.**

Aa π La temperatura del agua no es constante, al principio aumenta rápido y después lo hace mas lentamente.

Tarea 15

Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del ambiente en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? **Justifica tu respuesta.**

Aa π Según GeoGebra y luego de probar con todas las graficas que se podían utilizar se determino que tiene la forma de una función polinómica de grado 4 debido a que primero tiene un comportamiento exponencial y después de cierto tiempo uno casi lineal. Esta es una grafica que pasa por casi todos los puntos tomados y es 0,0004x^4 - 0,0267x^3 + 0,4167x^2 + 1,9972x + 27,2943

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En el análisis de la temperatura del ambiente, se observa que los estudiantes logran describir adecuadamente el comportamiento creciente del sistema; no obstante, al momento de formalizar esta observación, se presentan dificultades similares a las identificadas previamente. En particular, se recurre a modelos polinómicos obtenidos mediante regresión sin una justificación teórica, lo que deja ver una tendencia a privilegiar el ajuste numérico sobre la interpretación del fenómeno. Esta situación refleja una desconexión entre el uso de herramientas tecnológicas y la comprensión del significado de los modelos en contextos físicos.

Figura 52.

Respuestas del grupo 5 en la fase exploratoria del taller 3

Según la gráfica, ¿qué tipo de relación observa entre ambas variables? ¿Qué indica esto sobre el proceso de calentamiento? **Justifica tu respuesta.**

La relación muestra que al principio el agua se calienta mas rápido que el tamal, pero con el tiempo el tamal se acerca a la temperatura del agua, indicando un proceso de equilibrio térmico.

Tarea 18

Con base en los resultados experimentales, las gráficas y las regresiones obtenidas, ¿cómo escribirías un modelo matemático (ecuación diferencial) que describa el calentamiento del tamal en función del tiempo y de la temperatura del agua? **Justifica cada término del modelo.**

Con base en los resultados experimentales y las regresiones obtenidas, el calentamiento del tamal puede modelarse mediante la ecuación diferencial:
dT/dt= k (Ta(t)-T(t)) donde
T(t) es la temperatura del tamal, (t) es la temperatura del agua en función del tiempo y k es una constante positiva que mide la rapidez de transferencia de calor.
(t)−T(t) representa la diferencia de temperaturas, la cual experimentalmente se observó que determina la velocidad del calentamiento. Este modelo indica que el tamal tiende a alcanzar el equilibrio térmico con el agua.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Además, uno de los aspectos más complejos de esta fase fue la creación de un modelo que vincule la temperatura del cuerpo y la del ambiente. En todos los casos, los estudiantes analizaron estas variables de manera independiente, sin reconocer su interdependencia dentro del fenómeno. Solo algunos grupos lograron identificar que el sistema tiende hacia un equilibrio térmico, lo que constituye un avance significativo en la comprensión del modelo, pero presentan dificultades al momento de formalizarlo en términos de ecuación diferencial se quedaban cortos. Aunque estas respuestas no son las más satisfactorias, evidencian una aproximación más cercana a la estructura conceptual de la ley de Newton y muestran la necesidad de desarrollar en los estudiantes no solo procesos algorítmicos, sino aquellos de razonamiento y modelación matemática.

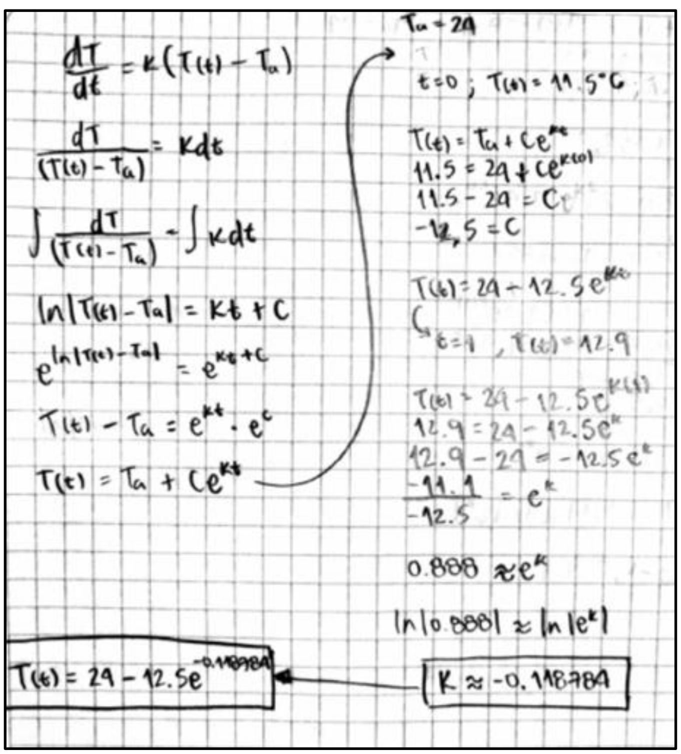
En particular, esta fase permitió observar que, aunque los estudiantes logran interpretar el comportamiento de las variables de manera individual, presentan dificultades al configurar un modelo que las conecte entre ellas y en la construcción de relaciones estructurales más complejas. Estas dificultades no deben entenderse únicamente como falencias, sino como manifestaciones propias de la complejidad del proceso de modelación en contextos más exigentes.

- **Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría**

En la fase teórica, los estudiantes abordaron la formulación y resolución del modelo diferencial que describe el proceso de calentamiento del tamal, incorporando la dependencia de la temperatura ambiente respecto al tiempo. A diferencia de los talleres anteriores, en los que las condiciones del entorno eran constantes o no requerían un tratamiento explícito, en este caso la variabilidad del ambiente introduce una complejidad adicional que exige una comprensión más profunda de la estructura de la ecuación diferencial y el modelo de solución más adecuado. El paso de la interpretación hacia la formalización implica no solo el dominio de técnicas algebraicas, sino también la capacidad de asignar significado a las variables, reconocer la estructura del modelo y seleccionar métodos de solución acordes con dicha estructura.

Figura 53.

Respuestas del grupo 1 en la fase exploratoria del taller 3

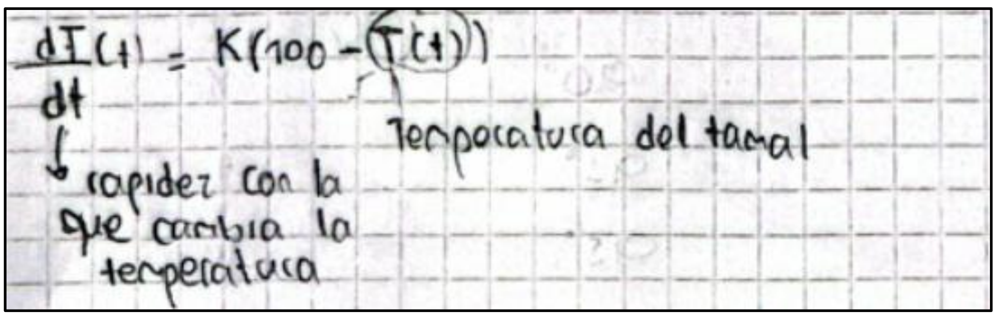


Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

A lo largo de la valoración de los talleres se evidencia que varios grupos simplifican el problema asumiendo una temperatura ambiente constante, lo que les permite utilizar métodos de resolución más familiares, ocho de los diez grupos intentaron resolver la ecuación diferencial mediante variables separables, sin establecer una relación formal entre la temperatura ambiente variable y la temperatura del cuerpo. Esta decisión refleja una tendencia a adaptar el problema a estructuras previamente conocidas, en lugar de ajustar el modelo a las condiciones reales del fenómeno. Este tipo de respuestas pone en manifiesto dificultades en la interpretación de las condiciones del problema.

Figura 54.

Respuestas del grupo 10 en la fase teórica del taller 3

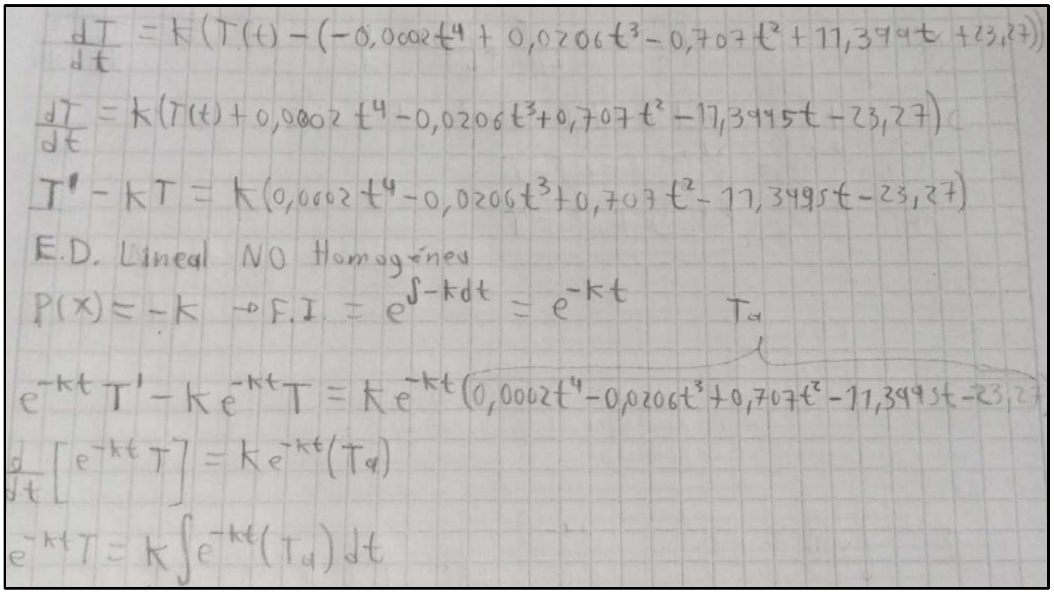


Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

Asimismo, se identifican errores en la interpretación de las variables, en los que se confunde la temperatura del cuerpo con la del ambiente dentro del modelo diferencial. Este tipo de errores resulta especialmente significativo, ya que no se trata únicamente de un problema algebraico, sino de una dificultad en la comprensión del fenómeno físico que sustenta el modelo.

Figura 55.

Respuestas del grupo 5 en la fase teórica del taller 3



$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - (-0{,}0002t^4 + 0{,}0206t^3 - 0{,}707t^2 + 11{,}3995t + 23{,}27))$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) + 0{,}0002t^4 - 0{,}0206t^3 + 0{,}707t^2 - 11{,}3995t - 23{,}27)$$

$$T' - kT = k(0{,}0002t^4 - 0{,}0206t^3 + 0{,}707t^2 - 11{,}3495t - 23{,}27)$$

E.D. Lineal NO Homogénea

$$P(x) = -k \rightarrow F.I. = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

$$e^{-kt}T' - ke^{-kt}T = ke^{-kt}(\overbrace{0{,}0002t^4 - 0{,}0206t^3 + 0{,}707t^2 - 11{,}3495t - 23{,}27}^{T_a})$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-kt}T\right] = ke^{-kt}(T_a)$$

$$e^{-kt}T = k\int e^{-kt}(T_a)\,dt$$

Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

En contraste, algunos estudiantes logran reconocer la estructura lineal de la ecuación diferencial y aplican el método del factor integrante (2 de los 10 grupos intentaron este enfoque); sin embargo, la complejidad de las expresiones obtenidas dificulta la resolución completa. Estas producciones reflejan un nivel intermedio de comprensión, en el que se identifican correctamente los elementos del modelo, pero se presentan dificultades en la ejecución del procedimiento. Adicionalmente, se evidencia que las expresiones obtenidas en el análisis de los datos experimentales inciden directamente en la complejidad del modelo teórico. En este sentido, la forma estructural de la temperatura ambiente en función del tiempo genera ecuaciones diferenciales cuya resolución no resulta directa mediante los métodos y algoritmos usualmente trabajados en clase, lo que limita la posibilidad de obtener soluciones explícitas manejables. Esta situación pone de manifiesto una tensión entre la modelación empírica y la viabilidad analítica del modelo, demostrando que no todas las aproximaciones obtenidas a partir de los datos son fácilmente tratables dentro del marco algebraico tradicional. Más que ser una dificultad, esta situación se concibe como una oportunidad para profundizar en el aprendizaje, al evidenciar que no todos los procesos matemáticos admiten soluciones realizadas mediane algoritmos estándar.

En conjunto, la fase teórica permite observar que la formalización del modelo en contextos más complejos representa un desafío significativo para los estudiantes, ya que implica la integración de múltiples elementos: la interpretación adecuada del fenómeno, la formulación coherente del modelo diferencial, la selección del método de resolución y el manejo de la complejidad algebraica. Si bien se mantiene una fortaleza en el dominio de procedimientos, esta comienza a flaquear cuando el problema exige mayor flexibilidad y adaptación. En este sentido, esta fase pone de manifiesto la necesidad de seguir fortaleciendo la comprensión estructural de las ecuaciones diferenciales y su relación con los fenómenos que describen.

- **Fase de Contraste: La Teoría frente al Experimento**

En la fase de contraste del *Taller 3*, se esperaba una comprensión integrada del proceso de modelación, en la que los estudiantes lograran reconocer cómo se relacionan la experimentación, la formulación matemática y la interpretación del fenómeno. Esta fase representa un punto crítico dentro de la propuesta, ya que exige un nivel más alto de abstracción y reflexión, en el que los estudiantes deben distanciarse de sus propios procedimientos y adaptar sus conocimientos para analizar la validez de los modelos construidos.

Figura 56.

Respuestas del grupo 3 en la fase de contraste del taller 3

Al comparar el modelo empírico obtenido en la fase 1 con el modelo teórico de la fase 2, ¿en qué momento del proceso (inicio, parte intermedia o cercanía al equilibrio térmico) describen mejor el calentamiento del tamal? **Justifica tu respuesta.**

El modelo empírico describe mucho mejor el inicio y la parte intermedia del proceso real de cocción. Al tener forma de "S", captura perfectamente el "retraso" inicial mientras el agua de la olla se calienta, y la aceleración posterior cuando el agua empieza a hervir. El modelo teórico, debido a su naturaleza exponencial, describe mejor la cercanía al equilibrio térmico (la fase final), asumiendo que para ese momento la temperatura del agua ya es constante y el tamal solo está igualando su temperatura con el entorno

Tarea 24

Según el modelo de Newton de la fase 2, ¿qué temperatura debería tener el tamal después de 20 minutos? ¿Coincide con la temperatura medida experimentalmente? **Justifica tu respuesta.**

Sustituyendo $t=20$ en el modelo de Newton:
$T(20)=24-12.5e-0.118784(20)$
$T(20)=24-12.5e-2.37568\approx 24-1.16=22.84$ °C
No, en absoluto. Si evaluamos los mismos 20 minutos en tu modelo empírico (que representa los datos reales), el resultado es $y(20)\approx 96.77$ °C. El modelo teórico está parametrizado para un entorno de 24 °C (temperatura ambiente)

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En algunas producciones, los estudiantes logran identificar que el modelo empírico y el modelo teórico no describen el fenómeno de manera idéntica en todas sus etapas, reconociendo que cada uno presenta un mejor ajuste en determinados intervalos del proceso. En particular, se observa que el modelo empírico permite describir con mayor precisión el comportamiento inicial e intermedio del calentamiento, mientras que el modelo teórico se ajusta mejor en las etapas cercanas al equilibrio térmico. Este tipo de análisis resulta especialmente significativo, ya que evidencia una comprensión no lineal del proceso de modelación, en la que los estudiantes dejan de buscar un único modelo "correcto" y comienzan a reconocer la existencia de distintos dominios de validez. Además, se identifica una lectura más refinada del fenómeno, en la que se consideran aspectos como la rapidez inicial del calentamiento y la estabilización progresiva del sistema. Este análisis les permite obtener una idea de que alguno de los modelos trabajados tiene falencias o no muestra a ciencia cierta la situación presentada.

Figura 57.

Respuestas del grupo 5 en la fase de contraste del taller 3

Según el modelo de Newton de la fase 2, ¿qué temperatura debería tener el tamal después de 20 minutos? ¿Coincide con la temperatura medida experimentalmente? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Debido a la dificultad de la modelización del fenómeno, no es posible establecer una comparación numérica, sin embargo, la teoría y la practica van muy relacionadas, se vieron comportamientos coherentes con lo esperado por la Ley de Newton, se esperaba un crecimiento de la temperatura, acelerado al principio, que iba alcanzando un equilibrio, o un "tope".

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En otros casos, los estudiantes comparan valores obtenidos a partir del modelo teórico con datos experimentales, identificando discrepancias entre ambos. Aunque estas diferencias no siempre son analizadas en profundidad, algunos estudiantes logran atribuirlas a condiciones del modelo, como el supuesto de temperatura ambiente constante, lo cual no se ajusta completamente a la situación real. Este tipo de respuestas resulta interesante, ya que evidencia una comprensión inicial de cómo los supuestos del modelo influyen en los resultados obtenidos. No obstante, también se observa que en varios casos esta interpretación se mantiene en un nivel descriptivo, sin profundizar en las implicaciones de dichas diferencias.

Figura 58.

Respuestas del grupo 1 en la fase de contraste del taller 3

Si el modelo supusiera una temperatura del agua constante, es decir, si el tamal se echara al agua cuando ha alcanzado su punto de ebullición, ¿en qué aspectos cambiarían las predicciones respecto al experimento real? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Si se supone que la temperatura del agua es constante (por ejemplo, desde el inicio a su punto de ebullición), el modelo sería más simple y predeciría que el tamal se calienta más rápidamente al comienzo, ya que la diferencia de temperatura sería grande desde el primer momento.
En el experimento real, el agua también se estaba calentando, por lo que al inicio la diferencia térmica era pequeña y el tamal aumentaba su temperatura más lentamente.
Por tanto, el modelo con agua constante tendería a sobreestimar la temperatura del tamal en los primeros minutos y predeciría un tiempo menor para alcanzar el equilibrio, mientras que el experimento real muestra un calentamiento más gradual debido a que el ambiente no era constante.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Asimismo, se identifican producciones en las que los estudiantes reflexionan sobre cómo cambiarían los resultados si se modificaran las condiciones del modelo, como por ejemplo asumir una temperatura constante del ambiente desde el inicio del proceso. Este tipo de razonamiento evidencia un nivel más avanzado de comprensión, en el que el estudiante no solo analiza el modelo dado, sino que explora escenarios alternativos y anticipa sus consecuencias. En este sentido, se observa una mayor flexibilidad en el pensamiento matemático y una comprensión más profunda de la relación entre las condiciones del modelo y el comportamiento del sistema, aunque también, se observa un interés por simplificar el proceso más que por buscar una solución óptima para el problema.

Figura 59.

Respuestas del grupo 10 en la fase de contraste del taller 3

¿Qué modificaciones en el diseño experimental permitirían que el modelo empírico construido fuera más preciso en comparación con la solución del modelo teórico de Newton? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Para que el modelo empírico fuera más preciso, sería necesario mejorar el control y la calidad de los datos experimentales. Por ejemplo, mantener la temperatura del agua lo más constante posible (idealmente en ebullición estable), medir la temperatura en intervalos de tiempo más pequeños y regulares, utilizar instrumentos de mayor precisión y repetir el experimento varias veces para promediar resultados. Además, reducir pérdidas de calor al ambiente (aislando el recipiente) y asegurar que el sensor esté siempre en la misma posición dentro del tamal disminuiría errores sistemáticos. Con datos más consistentes y menos variabilidad externa, la regresión se ajustaría mejor al comportamiento real y podría competir más directamente con el modelo teórico de Newton.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Finalmente, algunos estudiantes logran proponer mejoras en el proceso experimental, reconociendo la importancia del control de variables, la precisión en la medición y la reducción de errores. Este tipo de respuestas amplía la comprensión del proceso de modelación, integrando no solo aspectos matemáticos, sino también experimentales. En particular, se evidencia una aproximación al trabajo científico, en la que el modelo no se considera como un resultado aislado, sino como parte de un proceso que involucra recolección de datos, análisis crítico y validación.

En particular, la fase de contraste demuestra que, si bien no se logró de manera generalizada la integración y correcto desarrollo del modelo empírico y del modelo teórico, se identifican avances importantes en la capacidad de los estudiantes para analizar, interpretar y cuestionar los modelos construidos. Las dificultades observadas reflejan la complejidad inherente al proceso de modelación en contextos reales, más que simples errores conceptuales. En este sentido, esta fase se consolida como un espacio fundamental para la construcción de una comprensión más profunda y contextualizada de las EDOLPO.

A modo de cierre, este taller permite observar un proceso de aprendizaje marcado por una alta exigencia cognitiva, en el que las dificultades observadas no solo responden a limitaciones conceptuales, sino también a la complejidad del fenómeno abordado. A diferencia de los talleres anteriores, en este caso los estudiantes se enfrentaron a la necesidad de integrar múltiples variables, considerar condiciones más realistas y seleccionar estrategias de resolución acordes con la estructura del modelo. Si bien no se logró de manera adecuada, los resultados evidencian avances importantes en la interpretación del fenómeno, la comparación entre modelos y la reflexión sobre sus condiciones de validez. En particular, se observa un avance significativo hacia formas de pensamiento más críticas y reflexivas, en las que los estudiantes comienzan a reconocer el carácter aproximado de los modelos matemáticos.

5.2.4 Resultados Taller #4 – Ahorro en el Banco – Interés Compuesto Continuo

Este taller representa uno de los momentos de mayor consolidación dentro del proceso de modelación desarrollado a lo largo de la unidad didáctica, al situar a los estudiantes en un contexto financiero asociado al crecimiento del capital mediante interés compuesto continuo. A diferencia de los talleres anteriores, centrados principalmente en fenómenos físicos, esta actividad introduce una situación cercana a la vida cotidiana de los estudiantes, relacionada con el ahorro y el comportamiento del dinero en el tiempo. Este cambio de contexto resultó especialmente significativo, ya que favoreció un alto nivel de interés, participación y apropiación de la actividad por parte de los estudiantes.

Inicialmente, se planteó el desarrollo del taller de manera individual; sin embargo, durante la implementación se decidió mantener el trabajo colaborativo, en coherencia con los talleres anteriores y los objetivos de esta intervención. Esta decisión permitió fortalecer la discusión de ideas, la validación de resultados y la construcción conjunta del conocimiento, aspectos que resultaron particularmente relevantes en una actividad que exigía interpretación, modelación y toma de decisiones en un contexto aplicado. Asimismo, este taller se desarrolló sin acompañamiento directo del docente, lo que implicó un mayor grado de autonomía por parte de los estudiantes. Este aspecto resulta interesante, ya que permite evidenciar el nivel de apropiación e interés alcanzado en el proceso de modelación, así como la capacidad de transferir los conocimientos construidos hacia una nueva situación sin guía permanente.

En términos de participación, el taller contó con la intervención de 29 de los 31 estudiantes (93.5%), distribuidos en 11 grupos, mostrando un alto nivel de compromiso con la actividad. En cuanto al desempeño global, se obtuvo un promedio de 46/50, el más alto dentro de la unidad didáctica, lo que sugiere una consolidación de los aprendizajes desarrollados en los talleres anteriores. Este resultado refleja no solo un dominio más sólido de los procedimientos matemáticos, sino también una mejor comprensión del comportamiento exponencial y su relación con contextos reales.

Desde la perspectiva de los procesos de la actividad matemática, el mayor desempeño se evidenció en representar y establecer conexiones intra y extra-matemática (49/50), lo que indica que los estudiantes lograron interpretar adecuadamente las representaciones del fenómeno y vincularlas con el contexto financiero y matemático. En contraste, los procesos de argumentación y comunicación (38/50), aunque con resultados positivos, continúan evidenciando aspectos por fortalecer, particularmente en la argumentación de las respuestas y en la formalización de los conceptos matemáticos. En términos generales, estos resultados presentan un avance significativo en los objetivos de aprendizaje. El carácter cercano y significativo del contexto financiero favoreció la construcción de conocimiento, permitiendo que los estudiantes desarrollaran interpretaciones más intuitivas y, al mismo tiempo, más fundamentadas del fenómeno estudiado.

Figura 60.

Situación problema del Taller 4

Situación Problema: Ahorro en el Banco

Una persona decide depositar sus ahorros en el *Banco Estelar*, una entidad que ofrece una modalidad de interés compuesto continuo. El capital inicial que puede invertir va desde 1 millón hasta 250 millones de pesos colombianos, la tasa de interés anual puede variar entre 0.1 y 2.0, y el tiempo que el dinero permanece en el banco puede ser desde 1 hasta 10 años.

Para analizar cómo crece el capital con el paso del tiempo, se les proporcionará una aplicación web interactiva. En ella podrán modificar tres parámetros fundamentales:

- El capital inicial (C_0)
- La tasa de interés anual (r)
- El tiempo de inversión (t)

Manipulen los deslizadores, observen cómo cambia el capital a lo largo del tiempo y analicen qué combinación resulta más conveniente para el ahorro. A partir de esta exploración, deberán identificar patrones, formular conjeturas y responder las preguntas que guiarán la construcción de un modelo matemático para describir el crecimiento del capital.

Nota. La figura presenta el enunciado de la situación problema planteada a los estudiantes, la cual sirvió como punto de partida para el desarrollo del proceso de modelación en el contexto financiero.

Con base en este panorama general, resulta pertinente analizar en detalle el desarrollo del taller a través de cada una de sus fases, con el propósito de comprender cómo los estudiantes abordaron el proceso de modelación en un contexto financiero y de qué manera lograron consolidar los aprendizajes construidos hasta el momento. Este análisis permitirá identificar los avances alcanzados en la interpretación, formalización y validación del modelo, así como aquellos aspectos que aún requieren fortalecimiento, particularmente en lo relacionado con la argumentación y la construcción formal de las expresiones matemáticas.

- **Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento**

En la fase exploratoria del *Taller 4,* los estudiantes analizaron el crecimiento del capital en función del tiempo mediante el uso de una herramienta interactiva que les permitió manipular variables como el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo de inversión (herramienta de elaboración propia creada con Shiny y Rstudio). A diferencia de los talleres anteriores, en esta fase se evidenció un desempeño significativamente más sólido, particularmente en la identificación de patrones de crecimiento y en la interpretación del comportamiento dinámico del sistema. Este avance sugiere una mayor apropiación del concepto de crecimiento exponencial, así como una mejor comprensión del papel de los parámetros en la evolución del fenómeno.

Figura 61.

Respuestas del grupo 5 en la fase exploratoria del taller 4

Si fijas el capital inicial y el tiempo, ¿qué ocurre con el capital cuando aumentas la tasa de interés r? **Describe con tus palabras lo que observas.**

Aa π

Cuando se aumenta la tasa de interés r, el capital final aumenta de forma acelerada.
Observación: Al deslizar r hacia la derecha, notamos que la curva de la gráfica se vuelve mucho más "empinada" o aguda.
Patrón: Pequeños cambios en r producen grandes cambios en el capital final. Si la tasa es baja, la curva es más plana; si la tasa es alta, el capital se multiplica con una fuerza mucho mayor, alcanzando valores en el eje vertical (Capital) mucho más altos en el mismo periodo de tiempo.

Tarea 4

Si fijas el capital inicial y la tasa de interés, ¿qué ocurre con el capital cuando aumentas el tiempo t? **Describe con tus palabras lo que observas.**

Aa π

Cuando se aumental eltiempo t, el capital crece indefinidamente siguiendo una progresión geométrica.
Al mover el deslizador del tiempo hacia la derecha, el efecto más notorio es el "despegue" del capital. Lo que observamos es que el beneficio generado en los últimos años es masivamente superior al de los primeros años. El tiempo actúa como el factor de "maduración". Debido a que t es la variable independiente. Es el efecto de la capitalización continua: el dinero tiene más tiempo para generar intereses sobre intereses previos.

Tarea 5

Fija una tasa de interés r y un capital inicial C_0. Luego compara el capital en dos instantes consecutivos (por ejemplo, entre un año y el siguiente). ¿La relación entre "cuánto aumenta el capital" y "el capital que ya había" se mantiene aproximadamente constante? ¿siempre pasa lo mismo? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Al analizar instantes consecutivos (ej. del año 1 al 2, o del 3 al 4), se observa que la relación entre el aumento del capital (ΔC) y el capital existente (C) se mantiene constante. Si se toma el capital en el tiempo t podemos observar cuánto creció un instante después, notamos que ese incremento no es aleatorio. Si el capital se duplica, el interés que genera también se duplica.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En relación con la variación del capital respecto a la tasa de interés, los estudiantes lograron reconocer que pequeños cambios en la tasa generan incrementos significativos en el capital final, describiendo este comportamiento como un crecimiento acelerado. En varias respuestas, se observa una interpretación adecuada de la gráfica, en la que se identifican elementos como el aumento de la pendiente y la mayor inclinación de la curva a medida que la tasa incrementa. Este tipo de descripciones evidencia no solo una lectura correcta de la representación gráfica, sino también una comprensión del impacto de los parámetros sobre el modelo.

Figura 62.

Respuestas del grupo 3 y 11 en la fase exploratoria del taller 4

¿A qué tipo de función se parece la gráfica del capital en función del tiempo? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

La gráfica corresponde a una función exponencial de la forma f(t)=ke^(at).
La curva presenta una concavidad hacia arriba siempre positiva y nunca se estabiliza; su pendiente aumenta a medida que aumenta t. Como determinamos en el punto 5, solo las funciones exponenciales poseen la propiedad de que su tasa de variación es proporcional al valor de la función en ese punto.

¿A qué tipo de función se parece la gráfica del capital en función del tiempo? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

La gráfica se parece a una función exponencial creciente.

Esto se observa porque:

La curva aumenta continuamente

La pendiente aumenta con el tiempo

El crecimiento es cada vez más rápido

No es una línea recta

Este comportamiento es característico de las funciones exponenciales, como

C (t) = C_{0} e^ (rt)

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Asimismo, al analizar la relación entre el capital y el tiempo, la mayoría de los estudiantes identificó que el crecimiento no es constante, sino que se intensifica a medida que transcurre el tiempo. En este sentido, se destacan respuestas en las que se menciona el efecto acumulativo del interés, así como la idea de que el tiempo potencia el crecimiento debido a la capitalización continua. Este tipo de interpretaciones resulta valioso, ya que demuestra una comprensión más profunda del fenómeno y una apropiación del contexto financiero desde una perspectiva matemática.

Figura 63.

Respuestas del grupo 1 en la fase exploratoria del taller 4

Expresa mediante un modelo matemático (ecuación diferencial) el crecimiento del capital en cualquier instante de tiempo t. **Justifica tu modelo.**

Aa π C(t)=100·e^(0.7t). Al ser una función donde la variable t está en el exponente, podemos deducir por qué la curva se volverá más empinada en los años 4 y 5 en comparación con el año 1.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

No obstante, en menor medida que talleres anteriores se identificaron algunas dificultades en la formalización del modelo. En ciertos casos, aunque los estudiantes reconocían el comportamiento exponencial, no lograban diferenciar entre la expresión funcional del modelo y la ecuación diferencial que lo describe. Por ejemplo, algunos estudiantes escribieron directamente la solución exponencial en lugar de plantear la relación diferencial correspondiente. Esta situación evidencia dificultades entre los niveles de representación del modelo, particularmente entre el fenómeno, lo diferencial y la solución.

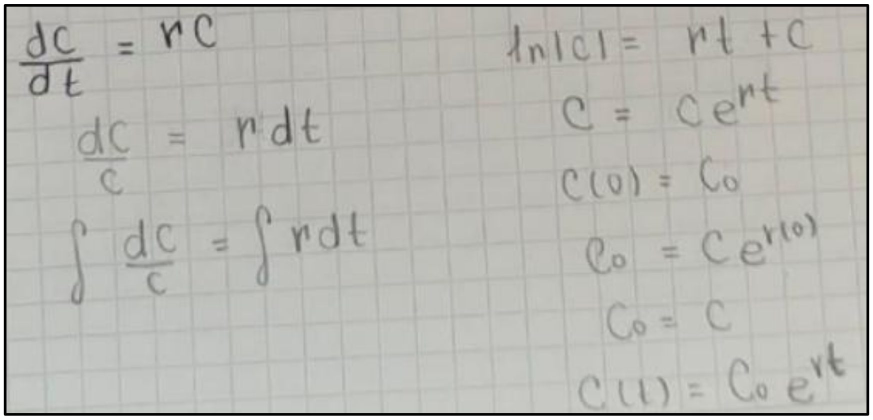
En conjunto, la fase exploratoria expone un avance significativo en la comprensión del crecimiento exponencial y en la interpretación de los parámetros del modelo. Sin embargo, persisten algunas dificultades en la formalización y en la integración entre diferentes conceptos matemáticos, lo que indica la necesidad de seguir fortaleciendo estos procesos.

- **Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría**

En la fase teórica, los estudiantes abordaron la formulación y resolución del modelo matemático asociado al crecimiento del capital bajo interés compuesto continuo. A diferencia de lo observado en el *Taller 3* (aunque se trataba de contexto, métodos y situaciones distintas), en esta fase se evidenció un desempeño considerablemente más sólido, particularmente en la identificación de la estructura de la ecuación diferencial y en la aplicación de métodos de solución.

Figura 64.

Respuestas del grupo 5 en la fase teórica del taller 4

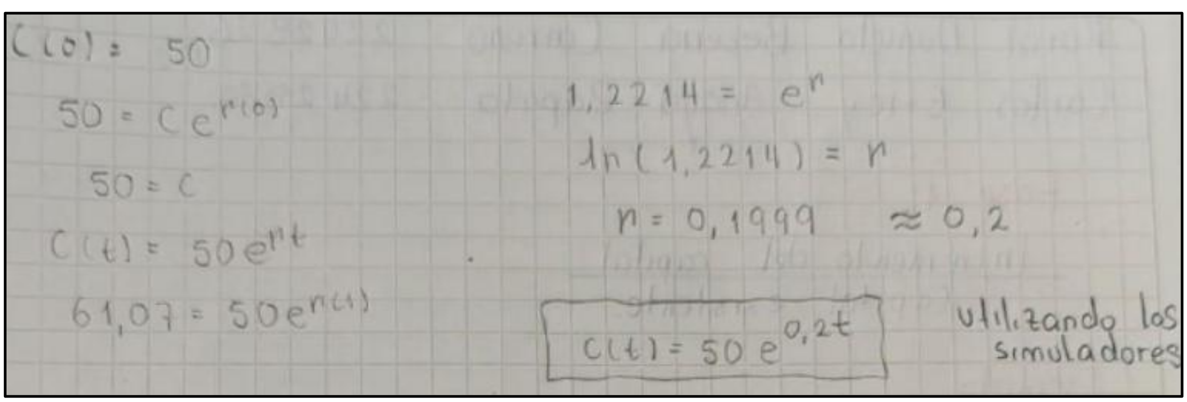


Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

En la mayoría de los casos, los estudiantes lograron plantear correctamente el modelo diferencial de la forma $\frac{dC}{dt} = rC(t)$, reconociendo que la tasa de cambio del capital es proporcional al capital acumulado. Este resultado representa un avance significativo, ya que evidencia una adecuada interpretación entre el análisis del fenómeno y su formalización matemática. Además, se observan procedimientos organizados y coherentes en la resolución de la EDOLPO.

Figura 65.

Respuestas del grupo 3 en la fase teórica del taller 4

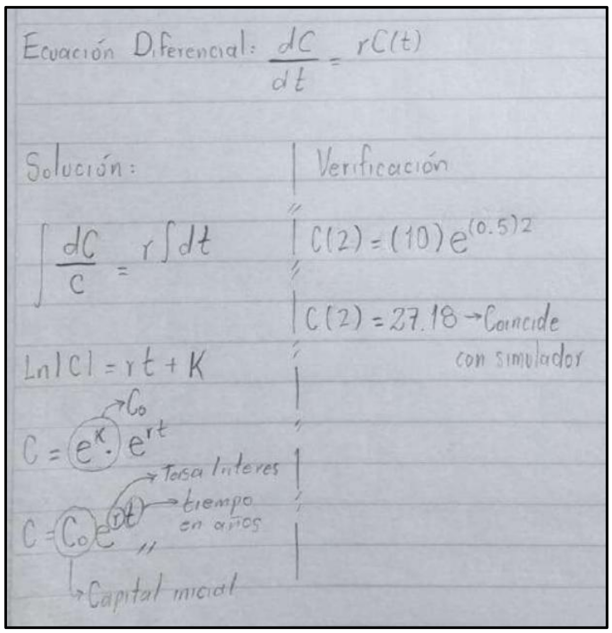


Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

Asimismo, algunos estudiantes lograron determinar la tasa de interés a partir de datos, utilizando transformaciones logarítmicas y manipulaciones algebraicas de la expresión exponencial. Este proceso evidencia un manejo adecuado de herramientas matemáticas en contextos aplicados, así como una comprensión más profunda del papel de los parámetros en el modelo.

Figura 66.

Respuestas del grupo 7 en la fase teórica del taller 4



Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

Por otra parte, en ciertos casos, se observó que los estudiantes incorporan procesos de verificación del modelo, comparando los resultados obtenidos con los valores generados por la herramienta interactiva. Este tipo de acciones muestra un nivel más avanzado de comprensión, en el que el estudiante no solo resuelve el modelo, sino que también valida su coherencia con el fenómeno.

No obstante, aunque el desempeño general fue muy alto, persisten dificultades en la argumentación de los procedimientos, ya que en algunos casos los estudiantes no justifican completamente los pasos realizados. Esto indica que, aunque existe un dominio técnico adecuado, aún es necesario fortalecer la comunicación matemática que muchas veces queda abandonada en los procesos educativos. En síntesis, la fase teórica muestra un avance significativo en la formalización matemática, en comparación con los talleres anteriores, particularmente en la construcción, resolución e interpretación de ecuaciones diferenciales en contextos aplicados.

- **Fase de Contraste: La Teoría frente al Experimento**

La fase de contraste se convirtió en un espacio de integración y consolidación del proceso de modelación, en el que los estudiantes lograron conectar de manera muy sólida el modelo empírico con el modelo teórico del interés compuesto continuo. A diferencia de lo observado en el *Taller 3*, en este caso se evidenció una mayor capacidad para establecer relaciones coherentes entre ambos enfoques, lo que permitió avanzar hacia una comprensión más integrada del fenómeno.

Figura 67.

Respuestas del grupo 5 en la fase de contraste del taller 4

Al comparar el modelo empírico que construiste en la fase exploratoria con el modelo teórico del interés compuesto continuo, ¿en qué se parecen y en qué se diferencian? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

El modelo empírico construido en la fase exploratoria y el modelo teórico del interés compuesto continuo se parecen en que ambos describen un crecimiento exponencial del capital. En los dos casos se observa que el capital aumenta cada vez más rápido con el tiempo y que el crecimiento depende del capital existente.

Además, en ambos modelos se cumple que cuando la tasa de interés aumenta, el capital crece más rápido, y cuando el tiempo aumenta, el capital final también aumenta significativamente.

La diferencia principal es que el modelo empírico se basa en datos observados en el simulador, mientras que el modelo teórico se basa en una ecuación matemática:
C(t)=C_oe^(rt)

El modelo teórico permite predecir el comportamiento del capital en cualquier instante de tiempo, mientras que el modelo empírico muestra valores específicos obtenidos de la simulación.

Por lo tanto, el modelo empírico confirma experimentalmente el comportamiento que el modelo teórico describe matemáticamente.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En varios casos, los estudiantes reconocieron que ambos modelos describen un crecimiento exponencial, identificando características comunes como el aumento acelerado del capital y su dependencia respecto al valor acumulado. Este tipo de respuestas evidencia una comprensión adecuada del fenómeno y una capacidad para interpretar diferentes representaciones del modelo.

Figura 68.

Respuestas del grupo 9 en la fase de contraste del taller 4

Si una persona quiere que su capital alcance el doble del capital inicial, ¿cuánto tiempo predice el modelo que debe esperar? **Justifica tu respuesta.**

Para que el capital sea el doble (2C_0), planteamos: 2C_0=C_0e^rt. Al simplificar, nos queda 2=e^rt. Aplicando logaritmo natural: t=(ln(2))/r.

Con la tasa de 0.7, el tiempo es t=0.70.6931≈0.99 años.

El modelo predice que se duplicará el dinero en aproximadamente 1 año. Esto se observa en la simulación: en t=0 tenemos 100 y en t=1 el gráfico llega a poco más de 200.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Por otra parte, los estudiantes no solo aplican el modelo teórico para resolver situaciones específicas, como la determinación del tiempo necesario para duplicar el capital, sino que además logran establecer una relación coherente entre los resultados obtenidos y el comportamiento observado en la simulación. Este tipo de respuestas deja en manifiesto una comprensión funcional del modelo, en la que el estudiante reconoce su utilidad como herramienta para la toma de decisiones en contextos reales. Sin embargo, en la mayoría de los casos, este proceso se desarrolla a partir de valores particulares de la tasa de interés, lo que limita el alcance del análisis a situaciones específicas. Esto sugiere que, aunque los estudiantes comprenden el uso del modelo, aún se encuentran en un nivel de aplicación concreta, sin avanzar completamente hacia procesos de generalización matemática.

Figura 69.

Respuestas del grupo 3 en la fase de contraste del taller 4

Tarea 14

$C(t) = C_0 e^{rt}$

$2C_0 = C_0 e^{rt}$

$\div C_0 \quad 2 = e^{rt}$

$\ln \rightarrow \quad \ln(2) = rt$

$t = \frac{\ln(2)}{r}$ si $r = 0.1$ $t = \frac{\ln(2)}{0.1} = 6.9$ años

Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

En contraste, algunos estudiantes logran ver más allá del uso particular del modelo y avanzar hacia una generalización del resultado, deduciendo la expresión $t = \frac{\ln(2)}{r}$. Este tipo de respuestas evidencia un nivel más alto de abstracción, en el que el estudiante no solo resuelve un caso específico, sino que identifica una relación general válida para cualquier valor de la tasa de interés. Este proceso implica una comprensión más profunda del modelo de interés compuesto continuo y del papel de sus parámetros, así como la capacidad de operar simbólicamente para obtener resultados generalizables.

Figura 70.

Respuestas del grupo 10 en la fase de contraste del taller 4

Teniendo en cuenta la simulación y el modelo teórico, ¿Cuál de los tres parámetros (capital inicial, tasa de interés o tiempo) tiene mayor impacto en el crecimiento del capital? **Justifica tu respuesta.**

El parámetro que mayor impacto tiene en el crecimiento del capital es el tiempo, despues la tasa de interés, porque ambos están en el exponente y hacen que el crecimiento sea exponencial. Aunque el capital inicial influye porque determina desde dónde empieza el ahorro, su efecto es menor que el de los otros dos parametros.

Tarea 17

¿Qué limitaciones tendría este modelo si se quisiera usar para predecir el capital a muy largo plazo? **Justifica tu respuesta.**

Este modelo tiene la limitación de que supone que la tasa de interés se mantiene constante durante todo el tiempo, lo cual no es realista a muy largo plazo, ya que las tasas cambian según la economía. Además, no tiene en cuenta factores como inflación, impuestos, crisis financieras o cambios en las condiciones del banco.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Además, se identificaron reflexiones sobre las limitaciones del modelo, particularmente en relación con la constancia de la tasa de interés y las condiciones de un sistema financiero real. Este tipo de respuestas evidencia un desarrollo del pensamiento crítico, en el que los estudiantes reconocen que los modelos matemáticos son aproximaciones que dependen de ciertos supuestos.

En términos generales, la fase de contraste presenta un nivel de integración más alto en comparación con los talleres anteriores, en el que los estudiantes logran vincular de manera más coherente la experimentación, la formalización y la interpretación del modelo. Se observa una mayor capacidad para reconocer similitudes y diferencias entre los modelos, así como para analizar sus alcances y limitaciones en función del contexto.

A modo de cierre, este análisis permite plasmar el punto de mayor consolidación del proceso de modelación desarrollado hasta el momento en la unidad didáctica, caracterizado por un mejor desarrollo y manejo de las competencias matemáticas requeridas para las EDOLPO. A diferencia de los talleres anteriores, en este caso se observa una mayor capacidad para transferir el conocimiento hacia un contexto más cercano, así como una comprensión más integrada del comportamiento del modelo. Si bien persisten algunas dificultades en la argumentación y en la formalización completa de ciertos procesos, los resultados dejan ver un avance significativo en la capacidad de los estudiantes para interpretar, modelar y analizar fenómenos en contextos reales. En particular, el contexto financiero favoreció la construcción de significado, permitiendo que los estudiantes relacionaran las matemáticas con situaciones cercanas a su vida cotidiana.

5.2.5 Resultados Taller #5 – Simulando Circuitos – Circuitos en Serie RC

El análisis del *Taller 5*, permite evidenciar una nueva aproximación al proceso de modelación desarrollado a lo largo de la unidad didáctica, incorporando en esta ocasión un contexto eléctrico que exige a los estudiantes interpretar el comportamiento del voltaje en función del tiempo y de los parámetros del sistema, como la resistencia y la capacitancia. Este cambio de contexto representa una oportunidad importante para consolidar la comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas transversales, capaces de describir fenómenos diversos bajo una misma estructura matemática.

No obstante, a diferencia de lo observado en el *Taller 4*, este contexto no resultó igualmente significativo para todos los estudiantes. En particular, se evidenció una mayor apropiación en aquellos cuya formación académica se encuentra directamente relacionada con áreas afines a los circuitos eléctricos, mientras que en otros casos se observaron dificultades asociadas tanto a la interpretación del fenómeno como al interés frente a la actividad. Este aspecto es interesante, ya que pone de manifiesto la influencia del contexto disciplinar en la motivación, demostrando que la cercanía del fenómeno con la trayectoria académica del estudiante incide directamente en su nivel de comprensión y participación.

Adicionalmente, debido a las condiciones de tiempo y a la carga cognitiva acumulada en los talleres anteriores, este taller fue abordado desde una perspectiva más flexible. En este sentido, su evaluación se realizó de manera más global, valorando no solo la corrección de los resultados, sino también el esfuerzo de los estudiantes y su disposición frente a una actividad que implicaba integrar múltiples elementos conceptuales, procedimentales y tecnológicos.

En términos de desarrollo, una de las principales dificultades se presentó en la fase de simulación, particularmente en aquellos estudiantes que no contaban con conocimientos previos sobre circuitos eléctricos ni con experiencia en el uso del simulador *Falstad*. Aunque las instrucciones estaban disponibles en el material del taller, se evidenció que para muchos estudiantes no fueron suficientes, lo que sugiere que el acompañamiento mediante recursos más guiados (como un tutorial en vídeo) habría facilitado una mejor apropiación de la herramienta.

Esta situación pone de manifiesto la importancia de considerar no solo el contenido matemático, sino también las condiciones de acceso y uso de las herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje.

A pesar de estas dificultades, el desempeño general del grupo fue positivo, alcanzando un promedio de 42/50 con una participación de 29 de los 31 estudiantes (93.5%), distribuidos en 11 grupos de trabajo. En cuanto a los procesos de la actividad matemática, se destacó el desempeño en la formulación y resolución del problema (48/50), lo que evidencia que, una vez comprendida la estructura del modelo, los estudiantes lograron trabajar adecuadamente con la ecuación diferencial. En contraste, los procesos de razonamiento y comunicación (38/50), así como la modelación, se vieron más afectados, particularmente en la fase exploratoria y en la interpretación del fenómeno.

En general, el *Taller 5* permite observar un proceso en el que, más allá de los resultados, cobra especial relevancia el esfuerzo de los estudiantes por enfrentarse a un nuevo contexto y por integrar los conocimientos construidos a lo largo de la unidad. Si bien se identifican aspectos por fortalecer, especialmente en la mediación tecnológica y en la argumentación, el taller se configura como un espacio valioso para consolidar la comprensión de los modelos diferenciales en contextos diversos y para reflexionar sobre las condiciones que favorecen un aprendizaje significativo.

Con base en este panorama, resulta pertinente analizar el desarrollo del taller a través de cada una de sus fases, con el propósito de comprender cómo los estudiantes enfrentaron la modelación en un contexto menos familiar y de mayor exigencia tecnológica. Este análisis permitirá identificar tanto los avances logrados en la simulación y formalización matemática, como las dificultades asociadas a la interpretación del fenómeno y al uso de herramientas digitales.

- **Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento**

En la fase exploratoria, los estudiantes se enfrentaron al análisis del comportamiento del voltaje en un circuito RC en serie a partir de la interacción con el simulador *Falstad*. Esta etapa implicó un reto adicional frente a talleres anteriores, ya que no solo requería interpretar un fenómeno dinámico, sino también familiarizarse con una herramienta tecnológica nueva. En este sentido, se observa que la comprensión del fenómeno estuvo fuertemente condicionada por el dominio del simulador y por los conocimientos previos de los estudiantes en el contexto eléctrico.

Figura 71.

Respuestas del grupo 11 en la fase exploratoria del taller 5

Cuando se cierra el circuito, ¿el voltaje del capacitor cambia de manera instantánea o gradual? **Describe con tus palabras** cómo evoluciona el voltaje con el paso del tiempo.

Aa π

Cuando se cierra el circuito el voltaje cambia de manera gradual, no instantánea.
Al momento de cerrar el interruptor, el capacitor comienza a cargarse desde 0 V. El voltaje aumenta rápidamente al inicio, pero a medida que pasa el tiempo el crecimiento se vuelve cada vez más lento. La curva tiene forma exponencial creciente: sube rápido al principio y luego se va "aplanando" hasta acercarse al valor de la fuente.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En general, los estudiantes lograron identificar que el voltaje en el capacitor no cambia de manera instantánea, sino gradual, describiendo un crecimiento rápido en los instantes iniciales que se desacelera progresivamente. Estas descripciones evidencian una comprensión adecuada del comportamiento global del sistema, así como una capacidad para interpretar representaciones gráficas de tipo exponencial creciente.

Figura 72.

Respuestas del grupo 1 en la fase exploratoria del taller 5

A partir de tus análisis, describe con tus palabras un modelo con el que expliques de qué factores depende la rapidez con la que cambia el voltaje en el capacitor, cómo influyen el valor actual del voltaje y el valor al que tiende el sistema, y qué papel desempeñan la resistencia y la capacitancia en este comportamiento.

Un modelo que describe el comportamiento del circuito RC es que la rapidez con la que cambia el voltaje del capacitor depende de cuanto le falta para llegar al valor final y de los valores de la resistencia y la capacitancia. La variación del voltaje es mayor cuando la diferencia entre el voltaje actual y el voltaje al que tiende el sistema es grande, y disminuye a medida que esa diferencia se hace pequeña, Además, la resistencia y la capacitancia controlan que tan rápido ocurre el proceso: Si R o C son grandes, el cambio es mas lento; si son pequeñas, el capacitor se carga mas rápido. Esto se resume en que la rapidez de cambio es proporcional a la diferencia entre el valor final y el valor actual, y esta regulada por el producto RC, que determina la constante de tiempo del sistema.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Asimismo, se evidenció una comprensión significativa de la relación entre la rapidez de cambio del voltaje y la diferencia respecto al valor final. En varias respuestas, los estudiantes lograron expresar que el sistema cambia más rápido cuando está lejos del equilibrio y más lento al aproximarse a este, lo que constituye una aproximación directa a la estructura del modelo diferencial.

Figura 73.

Respuestas del grupo 4 en la fase exploratoria del taller 5

Compara lo que ocurre cuando cambias la resistencia con lo que ocurre cuando cambias el capacitor: ¿en qué se parecen los efectos y en qué se diferencian? ¿Qué papel cumple cada uno en la rapidez con que cambia el voltaje? **Justifica tu respuesta.**

Tanto la resistencia como la capacitancia influyen en el tiempo que tarda el voltaje en estabilizarse: si cualquiera de las dos aumenta, el proceso es más lento; si disminuyen, es más rápido. La resistencia limita la corriente y la capacitancia determina cuánta carga puede almacenar el capacitor, por eso ambas afectan la rapidez con que cambia el voltaje.

Tarea 7

A partir de tus análisis, describe con tus palabras un modelo con el que expliques de qué factores depende la rapidez con la que cambia el voltaje en el capacitor, cómo influyen el valor actual del voltaje y el valor al que tiende el sistema, y qué papel desempeñan la resistencia y la capacitancia en este comportamiento.

La rapidez con que cambia el voltaje depende de cuánto le falta para llegar al valor final y de los valores de la resistencia y la capacitancia. Si la diferencia con el valor final es grande, cambia rápido; si es pequeña, cambia lento. Una mayor resistencia o una mayor capacitancia hacen que el proceso sea más lento.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En relación con los parámetros del modelo, los estudiantes lograron identificar el efecto de la resistencia y la capacitancia sobre la velocidad de respuesta del circuito. Este tipo de interpretaciones refleja una comprensión cualitativa adecuada del fenómeno, en la que se establecen relaciones entre variables y se reconoce el papel de los parámetros en la dinámica del sistema.

Figura 74.

Respuestas del grupo 8 en la fase exploratoria del taller 5

Compara lo que ocurre cuando cambias la resistencia con lo que ocurre cuando cambias el capacitor: ¿en qué se parecen los efectos y en qué se diferencian? ¿Qué papel cumple cada uno en la rapidez con que cambia el voltaje? **Justifica tu respuesta.**

Cuando la resistencia es pequeña, el sistema tarda más en estabilizarse y el voltaje sigue variando durante más tiempo. En cambio, cuando la resistencia es grande, el voltaje se estabiliza más rápido. Esto ocurre porque la resistencia regula la oposición al paso de la corriente y actúa como un factor de amortiguamiento: a mayor resistencia, más rápido se reduce la variación del sistema.

Por otro lado, al cambiar la capacitancia se nota que a mayor capacitancia las variaciones del voltaje son mayores, es decir, las oscilaciones tienen mayor amplitud. Sin embargo, el tiempo en que ocurren esas variaciones parece mantenerse igual o incluso ser menor en comparación con una capacitancia pequeña. Esto indica que la capacitancia influye más en la magnitud de la energía almacenada y en la amplitud de las variaciones, más que en el tiempo de estabilización en esta simulación.

Tarea 7

A partir de tus análisis, describe con tus palabras un modelo con el que expliques de qué factores depende la rapidez con la que cambia el voltaje en el capacitor, cómo influyen el valor actual del voltaje y el valor al que tiende el sistema, y qué papel desempeñan la resistencia y la capacitancia en este comportamiento.

La rapidez con la que cambia el voltaje depende principalmente de la diferencia entre el voltaje actual y el voltaje final. Cuando esa diferencia es grande, el voltaje cambia rápido; cuando es pequeña, el cambio es lento. La resistencia controla qué tan rápido se estabiliza el sistema: mayor resistencia produce mayor amortiguamiento y estabilización más rápida; menor resistencia permite que el voltaje varíe durante más tiempo. La capacitancia influye en la magnitud de las variaciones: a mayor capacitancia, mayores son las variaciones del voltaje; a menor capacitancia, las variaciones son menores. El cambio del voltaje depende de cuánto le falta para llegar al valor final y está regulado por la resistencia y la capacitancia.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

No obstante, también se encontraron dificultades importantes, especialmente en la interpretación del simulador y en el uso del circuito correcto. En algunos casos, se utilizaron configuraciones diferentes a las propuestas, lo que afectó la coherencia del análisis. Asimismo, se identificaron interpretaciones incorrectas del fenómeno, lo que muestra que la interacción con la herramienta no garantiza por sí sola la comprensión del sistema.

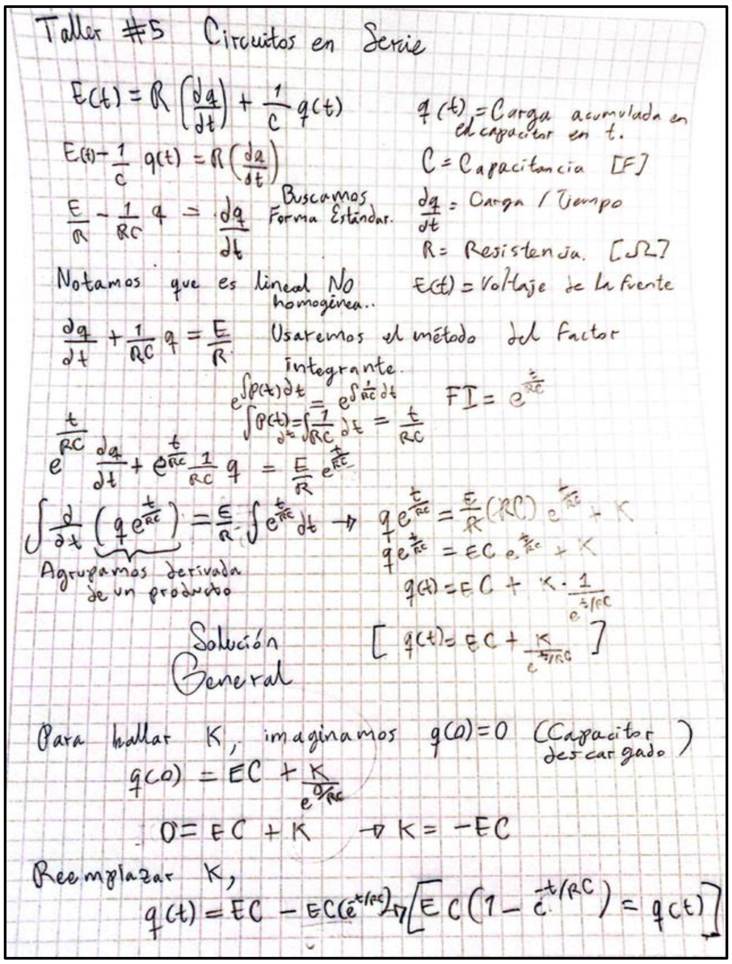
En conjunto, esta fase pone en manifiesto que los estudiantes logran captar el comportamiento general del fenómeno y establecer relaciones cualitativas entre variables; sin embargo, la mediación tecnológica y la familiaridad con el contexto juegan un papel determinante en la calidad de la comprensión.

- **Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría**

En la fase teórica, los estudiantes abordaron la formulación y resolución del modelo matemático del circuito RC, evidenciando un desempeño sólido en el uso de las EDOLPO. A pesar de las dificultades en la fase exploratoria, se observa que, una vez establecido el modelo, los estudiantes logran operar con mayor seguridad dentro de los instrumentos algebraicos.

Figura 75.

Respuestas del grupo 11 en la fase teórica del taller 5



Taller #5 Circuitos en Serie

$E(t) = R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{1}{C}q(t)$ q(t) = Carga acumulada en el capacitor en t.

$E(t) - \frac{1}{C}q(t) = R\left(\frac{dq}{dt}\right)$ C = Capacitancia [F]

$\frac{E}{R} - \frac{1}{RC}q = \frac{dq}{dt}$ Buscamos Forma Estándar. $\frac{dq}{dt}$ = Carga / Tiempo

R = Resistencia. [Ω]

Notamos que es lineal No homogénea.. E(t) = Voltaje de la fuente

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$ Usaremos el método del Factor integrante.

$e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{1}{RC}dt}$ FI = $e^{\frac{t}{RC}}$

$\int p(t) = \int \frac{1}{RC}dt = \frac{t}{RC}$

$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dq}{dt} + e^{\frac{t}{RC}}\frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}e^{\frac{t}{RC}}$

$\int \frac{d}{dt}\underbrace{\left(q e^{\frac{t}{RC}}\right)}_{\text{Agrupamos derivada de un producto}} = \frac{E}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}dt \to q e^{\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}(RC)e^{\frac{t}{RC}} + K$

$q e^{\frac{t}{RC}} = EC\, e^{\frac{t}{RC}} + K$

$q(t) = EC + K \cdot \frac{1}{e^{t/RC}}$

Solución General $\left[q(t) = EC + \frac{K}{e^{t/RC}} \right]$

Para hallar K, imaginamos q(0) = 0 (Capacitor descargado)

$q(0) = EC + \frac{K}{e^{0/RC}}$

$0 = EC + K \to K = -EC$

Reemplazar K,

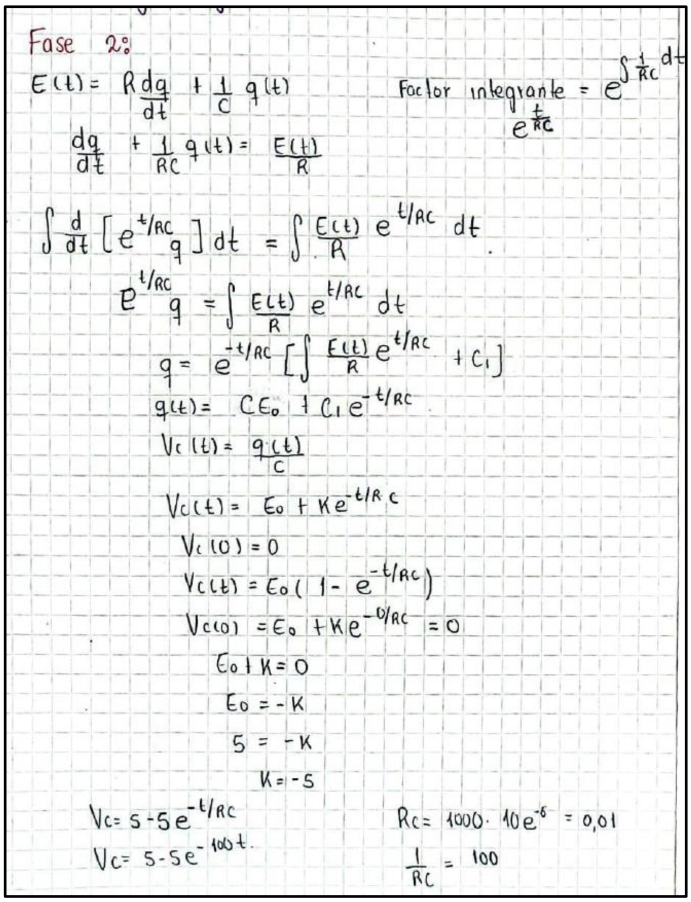
$q(t) = EC - EC(e^{-t/RC}) \to \left[EC(1 - e^{-t/RC}) = q(t) \right]$

Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

En este caso, se observa que algunos estudiantes logran formular adecuadamente el modelo diferencial a partir de la ley de Kirchhoff, identificando correctamente la relación entre el voltaje, la resistencia y la capacitancia. Además, aplican el método del factor integrante de manera organizada, demostrando un manejo sólido de los procedimientos algebraicos. Los estudiantes no solo resuelven la ecuación, sino que reconocen el significado de los términos involucrados, lo que les permite interpretar la solución en función del comportamiento del circuito.

Figura 76.

Respuestas del grupo 8 en la fase teórica del taller 5


Fase 2:

$E(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t)$ Factor integrante $= e^{\int \frac{1}{RC}dt}$

$e^{\frac{t}{RC}}$

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{E(t)}{R}$

$\int \frac{d}{dt}\left[e^{t/RC}q\right]dt = \int \frac{E(t)}{R} e^{t/RC}\,dt$

$e^{t/RC}q = \int \frac{E(t)}{R} e^{t/RC}\,dt$

$q = e^{-t/RC}\left[\int \frac{E(t)}{R} e^{t/RC} + C_1\right]$

$q(t) = CE_0 + C_1 e^{-t/RC}$

$V_c(t) = \frac{q(t)}{C}$

$V_c(t) = E_0 + Ke^{-t/RC}$

$V_c(0) = 0$

$V_c(t) = E_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

$V_c(0) = E_0 + Ke^{-0/RC} = 0$

$E_0 + K = 0$

$E_0 = -K$

$5 = -K$

$K = -5$

$V_c = 5 - 5e^{-t/RC}$ $RC = 1000 \cdot 10e^{-6} = 0{,}01$

$V_c = 5 - 5e^{-100t}$ $\frac{1}{RC} = 100$

Nota. Tomado de las producciones entregadas en Moodle por parte de los estudiantes.

En otros casos, los estudiantes optan por reescribir la ecuación diferencial en una forma que permita aplicar el método de separación de variables, privilegiando un procedimiento con el que se sienten más familiarizados. Esta estrategia, aunque válida desde el punto de vista matemático, refleja una tendencia a adaptar el problema a esquemas conocidos en lugar de trabajar directamente con su estructura original. Si bien el resultado obtenido es correcto, esta elección puede limitar la comprensión del carácter lineal de la ecuación diferencial y de los métodos específicos asociados a este tipo de modelos. En este sentido, se evidencia una comprensión operativa del proceso, en la que prima la resolución sobre la interpretación estructural.

Asimismo, se identifican producciones en las que los estudiantes centran su trabajo en la evaluación numérica de la solución obtenida, calculando valores del voltaje para instantes específicos de tiempo. Este tipo de respuestas muestra una comprensión funcional del modelo, en la que se reconoce su utilidad para obtener resultados concretos. Sin embargo, en muchos casos no se profundiza en la interpretación del comportamiento general de la solución ni en su relación con el fenómeno físico. Esto sugiere que, aunque los estudiantes logran aplicar correctamente el modelo, aún presentan dificultades para lograr una comprensión global de la situación. En base con lo anterior, esta fase confirma que los estudiantes poseen un dominio procedimental consolidado, aunque persisten dificultades en la argumentación y en la comprensión estructural de los métodos utilizados.

- **Fase de Contraste: La Teoría frente al Experimento**

La fase de contraste se configuró como un espacio especialmente valioso para la integración entre la simulación y el modelo matemático. En esta etapa, se evidenció un avance significativo en la capacidad de los estudiantes para reconocer que ambos enfoques describen un mismo fenómeno desde perspectivas complementarias que permiten entender de mejor manera el comportamiento del fenómeno.

Figura 77.

Respuestas del grupo 5 en la fase de contraste del taller 5

¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre la descripción cualitativa de la Fase 1 y la explicación que ofrece el modelo matemático de la Fase 2?**Justifica tu respuesta.**

Ambas fases muestran que el voltaje aumenta de forma gradual, crece rápido al inicio y luego se estabiliza, y que la resistencia y la capacitancia influyen en la rapidez del proceso. La diferencia es que en la Fase 1 se describe el comportamiento de manera visual e intuitiva con la simulación, mientras que en la Fase 2 el modelo matemático lo explica con una ecuación que permite calcular valores exactos y justificar el comportamiento observado.

Tarea 13

Pasado un tiempo de 15 segundos, determina el valor del voltaje (o la carga) del capacitor mediante la simulación en Falstad y el modelo matemático obtenido en la Fase 2. Luego, compara ambos resultados y explica si coinciden o no. **Justifica tu respuesta.**

En la simulación de Falstad se observa lo mismo: a los 15 segundos el capacitor está casi completamente cargado. Por lo tanto, ambos resultados coinciden, con posibles pequeñas diferencias por aproximaciones numéricas.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

En estas respuestas, los estudiantes logran identificar que tanto la simulación como el modelo matemático describen un comportamiento similar del sistema, caracterizado por un crecimiento progresivo del voltaje que se desacelera a medida que se aproxima a un valor límite. Este reconocimiento evidencia una comprensión adecuada del fenómeno en diferentes niveles de representación. Además, se observa que los estudiantes no se limitan a comparar valores puntuales, sino que analizan la forma general de las gráficas y su comportamiento a lo largo del tiempo, lo que indica un avance en la interpretación. Este tipo de respuestas refleja una integración adecuada entre lo empírico y lo teórico.

Figura 78.

Respuestas del grupo 7 y 3 en la fase de contraste del taller 5

¿Qué ventaja te dio el modelo matemático de la fase 2 frente a la simulación de la fase 1 para entender el comportamiento del circuito? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

El modelo matemático permite calcular y justificar con precisión el comportamiento del circuito, mientras que la simulación solo lo muestra de forma visual. Con la ecuación se puede predecir el voltaje en cualquier instante y entender cómo influyen R y C.

Tarea 17

Después de trabajar con simulación y con modelo matemático, ¿qué papel crees que cumple cada uno en el aprendizaje de fenómenos dinámicos? ¿Cuál te ayudó más y por qué? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

La simulación ayuda a comprender el fenómeno de forma visual e intuitiva, mientras que el modelo matemático permite explicarlo y calcularlo con precisión. La simulación facilita entender el proceso al inicio, pero el modelo es más útil para justificar y predecir el comportamiento.

Después de trabajar con simulación y con modelo matemático, ¿qué papel crees que cumple cada uno en el aprendizaje de fenómenos dinámicos? ¿Cuál te ayudó más y por qué? **Justifica tu respuesta.**

Aa π

La simulación cumple un papel fundamental para comprender el fenómeno de manera intuitiva, ya que permite observar directamente cómo evoluciona el sistema en el tiempo y cómo cambian las variables al modificar parámetros como R o C. Por otro lado, el modelo matemático permite entender con mayor profundidad las causas del comportamiento observado, ya que explica de forma exacta cómo y por qué ocurre ese cambio mediante una ecuación. En mi caso, la simulación ayudó primero a visualizar el fenómeno, pero el modelo matemático permitió comprenderlo mejor, porque mostró que la rapidez del proceso depende de la constante RC y permitió hacer cálculos precisos.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Más allá de la comparación de resultados, se logra diferenciar el papel que cumple cada enfoque dentro del proceso de modelación. En particular, reconocen que la simulación permite observar el fenómeno de manera dinámica e intuitiva, facilitando la identificación de patrones, mientras que el modelo matemático proporciona una herramienta para explicar, predecir y generalizar dicho comportamiento. Este tipo de análisis constata un nivel más avanzado de comprensión, en el que los estudiantes no solo utilizan las herramientas, sino que reflexionan sobre su función dentro del proceso de conocimiento. Asimismo, se identifica una comprensión de la función complementaria entre ambas aproximaciones, lo que deja de lado la idea de que una reemplaza a la otra.

Figura 79.

Respuestas del grupo 1, 5, 8 en la fase de contraste del taller 5

Propón una situación de la vida real (no eléctrica) que pueda modelarse con una ecuación diferencial similar a la del circuito en serie. **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Un ejemplo de la vida real es el llenado de un tanque con agua cuando el flujo depende de la diferencia entre el nivel actual y el nivel máximo. Al inicio el tanque se llena más rápido, pero a medida que se acerca al nivel final el flujo disminuye, de forma similar al comportamiento exponencial del capacitor. Este proceso puede modelarse con una ecuación diferencial donde la rapidez de cambio depende de la diferencia entre el valor actual y el valor límite, igual que en el circuito RC.

Propón una situación de la vida real (no eléctrica) que pueda modelarse con una ecuación diferencial similar a la del circuito en serie. **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Un sistema de suspensión de un automóvil es un ejemplo ideal, compuesto por un resorte y un amortiguador. Al igual que el circuito RLC, este sistema tiene una masa que se mueve (como la carga), un resorte que almacena energía (como el capacitor) y un amortiguador que disipa energía mediante fricción (como la resistencia). Ambos se rigen por la misma estructura de ecuación diferencial de segundo orden para modelar oscilaciones amortiguadas.

Propón una situación de la vida real (no eléctrica) que pueda modelarse con una ecuación diferencial similar a la del circuito en serie. **Justifica tu respuesta.**

Aa π

Una situación de la vida real que puede modelarse con una ecuación diferencial similar a la del circuito en serie, es el proceso de enfriamiento o calentamiento de un objeto, como una bebida caliente dejada a temperatura ambiente. En este caso, la rapidez con la que cambia la temperatura depende de la diferencia entre la temperatura del objeto y la del entorno, de manera análoga a como en un circuito en serie el cambio del voltaje en el capacitor depende de la diferencia entre su valor instantáneo y el valor final. Esto justifica el uso de una ecuación diferencial del mismo tipo, ya que en ambos procesos el sistema evoluciona gradualmente hacia un estado de quilibrio.

Nota. Tomado de las producciones realizadas en GeoGebra por parte de los estudiantes.

Para finalizar la actividad, los estudiantes logran identificar fenómenos análogos al comportamiento del circuito, como el enfriamiento y las situaciones trabajadas en talleres anteriores, reconociendo similitudes en la forma en que estos evolucionan hacia un estado de equilibrio. Sin embargo, en varios casos van más allá de estas asociaciones y mencionan otras aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, como el llenado de tanques o circuitos RLC, que no corresponden necesariamente a modelos lineales de primer orden. Esta situación evidencia que, aunque los estudiantes logran establecer conexiones entre distintos contextos, no siempre distinguen con claridad la estructura matemática específica que los relaciona, particularmente en lo referente a las EDOLPO como modelos lineales de primer orden. En este sentido, las analogías construidas se mantienen en un nivel principalmente descriptivo, sin una explicitación rigurosa de los elementos que determinan la linealidad o el orden de la ecuación. Este hallazgo resulta significativo, ya que pone de manifiesto una comprensión en proceso de consolidación, en la que los estudiantes reconocen la aplicabilidad general de las ecuaciones diferenciales, pero aún requieren fortalecer su capacidad de abstracción y clasificación de los modelos según su estructura matemática.

A modo de cierre, en este análisis se observa un proceso de aprendizaje en el que, más allá de las dificultades asociadas al contexto y a la mediación tecnológica, los estudiantes lograron consolidar la comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas para modelar fenómenos dinámicos. Se destacan avances en el complemento interpretativo entre la simulación y la formalización matemática, así como en la capacidad de validar modelos. No obstante, los resultados también ponen de manifiesto la importancia del contexto en la motivación y en la comprensión del fenómeno, así como la necesidad de fortalecer la mediación tecnológica y la explicitación de las estructuras matemáticas.

5.2.6 Resultados de la Fase de Cierre en los Talleres

De manera transversal a los cinco talleres, la fase de socialización y cierre se consolidó como un espacio fundamental para la integración y validación de los procesos desarrollados por los estudiantes, permitiendo contrastar resultados, discutir estrategias y construir significados de manera colectiva. A lo largo de la implementación, se evidenció que estos momentos no solo favorecieron la revisión de los procedimientos realizados, sino también la ampliación de la comprensión de los fenómenos a partir de la interacción con otros, promoviendo una visión más enriquecida del proceso de modelación. En esta línea, se observó que los estudiantes abordaban las situaciones problema a partir de estrategias diversas, sin ajustarse a un único esquema de resolución, lo que evidencia una apropiación flexible de los procesos de resolución de problemas. Esta diversidad se permitió que surgieran distintas formas de interpretar y modelar los fenómenos, favoreciendo la exploración y la construcción de procedimientos propios. No obstante, se identificaron dificultades asociadas a la participación, caracterizadas por una intervención voluntaria limitada y concentrada en un grupo reducido de estudiantes, lo que restringió la diversidad de aportes en el aula. Frente a esta situación, se implementaron estrategias como la rotación o selección aleatoria de grupos para la socialización, lo cual permitió involucrar a un mayor número de estudiantes, aunque también puso en manifiesto debilidades en la comunicación y argumentación matemática, especialmente en aquellos que no participaban de manera frecuente.

Por otra parte, las condiciones de tiempo y la dinámica propia de las sesiones representaron un reto importante, ya que en algunos casos las socializaciones no alcanzaban el nivel de profundidad esperado o tendían a perder dinamismo cuando se centraban únicamente en la exposición de resultados. A pesar de estas limitaciones, se observó que esta fase contribuyó al desarrollo de habilidades metacognitivas, al propiciar que los estudiantes reflexionaran sobre sus propios procesos de aprendizaje, reconocieran errores y los resignificaran como oportunidades de mejora. En este sentido, el error dejó de ser percibido únicamente como una dificultad para convertirse en un elemento que favorece la comprensión colectiva. Asimismo, estos espacios promovieron el fortalecimiento del trabajo colaborativo, la argumentación y la validación de ideas en contextos de discusión, consolidando la socialización no solo como un momento de cierre, sino como un componente relevante dentro del proceso de aprendizaje en la modelación matemática.

5.3 Resultados del Quiz

El análisis de los resultados del quiz permite obtener una aproximación general al nivel de comprensión conceptual alcanzado por los estudiantes en relación con las EDOLPO, en el contexto de las actividades desarrolladas durante el primer corte. No obstante, es importante señalar que, debido a su aplicación en modalidad extra-clase y en un entorno no controlado, este instrumento no se concibe como una medida concluyente del aprendizaje, sino como un indicador complementario que permite identificar tendencias en el desempeño de los estudiantes.

En términos de trabajo, el quiz fue presentado por 30 de los 31 estudiantes matriculados, lo que corresponde a un 96.8% de participación, evidenciando un alto nivel de compromiso con la actividad. Para el análisis de los resultados en la síntesis de esta práctica, se consideraron únicamente las dos preguntas asociadas al banco de ítems diseñado a partir de la presente intervención, las cuales representaban un total de 20 puntos sobre 50 dentro de la calificación del quiz.

Los resultados obtenidos muestran un desempeño favorable, en el que ningún estudiante obtuvo una puntuación de cero y solo cuatro estudiantes alcanzaron 10 de los 20 puntos posibles; el resto se ubicó en el total de puntos posibles. Teniendo en cuenta el total de participante se alcanzó un promedio de 18.6 puntos sobre 20, lo que sugiere un dominio adecuado de los conceptos fundamentales asociados a las EDOLPO. Este resultado permite revelar que los estudiantes lograron reconocer estructuras, interpretar situaciones y aplicar procedimientos relacionados con este tipo de ecuaciones en contextos similares a los trabajados durante la intervención con los talleres.

Si bien, debido a la naturaleza de la actividad, no es posible descartar completamente el uso de apoyos externos, los resultados obtenidos, junto con la coherencia observada en los desempeños de otras actividades, permiten inferir que, en su mayoría, los estudiantes abordaron el quiz de manera consciente y con base en los conocimientos construidos durante el proceso formativo. En este sentido, más que centrarse en la precisión de cada respuesta, este instrumento permite identificar una apropiación general de los conceptos trabajados.

En conjunto, los resultados del quiz sugieren que la unidad didáctica contribuyó de manera positiva al fortalecimiento de la comprensión conceptual de las EDOLPO, evidenciando avances en la interpretación, el reconocimiento de estructuras y la aplicación de los contenidos en situaciones problemáticas. Estos hallazgos, aunque deben ser considerados con cautela, se integran con los resultados observados en los talleres y permiten anticipar un desempeño favorable en la evaluación formal del curso.

5.4 Resultados del Problema de Aplicación Lineal del Parcial

El análisis de los resultados del problema de aplicación lineal incluido en el examen parcial permite valorar el nivel de integración alcanzado por los estudiantes en relación con la modelación, resolución, interpretación, argumentación y análisis crítico de las EDOLPO, en un contexto de evaluación formal e individual. A diferencia de los talleres y el quiz, este instrumento exigió a los estudiantes desarrollar de manera autónoma un proceso completo de modelación, sin apoyo de herramientas TIC ni trabajo colaborativo, lo que lo convierte en un referente clave para el análisis del aprendizaje alcanzado a través de la unidad didáctica implementada.

No obstante, es importante señalar que, aunque desde la intervención pedagógica se promovió una estructura de trabajo basada en la exploración, la construcción colectiva y el uso de herramientas de apoyo, en este caso se decidió mantener el formato institucional de evaluación del examen parcial. Esto se debe a que, dentro de la asignatura, uno de los parciales del semestre es elaborado de manera conjunta por los docentes de la materia, siendo aplicado de forma unificada por todos y destacándose por una dinámica individual, en la que el estudiante debe enfrentarse de manera autónoma a la resolución de los ítems propuestos. En este sentido, no se consideró pertinente modificar esta estructura evaluativa, sino más bien preparar a los estudiantes para este tipo de evaluación, en la que se incrementa el nivel de exigencia y se requiere una mayor autonomía en la resolución de problemas. Bajo esta perspectiva, el examen parcial aplicado en el aula, desarrollado a lápiz y papel, buscó no solo evaluar los aprendizajes alcanzados, sino también brindar a los estudiantes una experiencia cercana a las condiciones reales de evaluación institucional, permitiendo valorar su capacidad para llevar y aplicar los conocimientos construidos en un contexto más demandante.

En términos de participación, el examen fue presentado por el 100% de los estudiantes (31 de 31), lo que garantiza una visión completa del desempeño del grupo. El ítem asociado a las EDOLPO tenía un valor de 1.25 sobre 5.0, lo que, llevado a una escala de 50 puntos, corresponde a un total de 12.5 puntos posibles. En este sentido, el promedio obtenido por los estudiantes fue de aproximadamente 31.0 puntos sobre 50 en términos de calificación institucional. Esto indica un desempeño general por encima de la media para aprobar la asignatura, aunque con variabilidad significativa entre cada uno de los estudiantes.

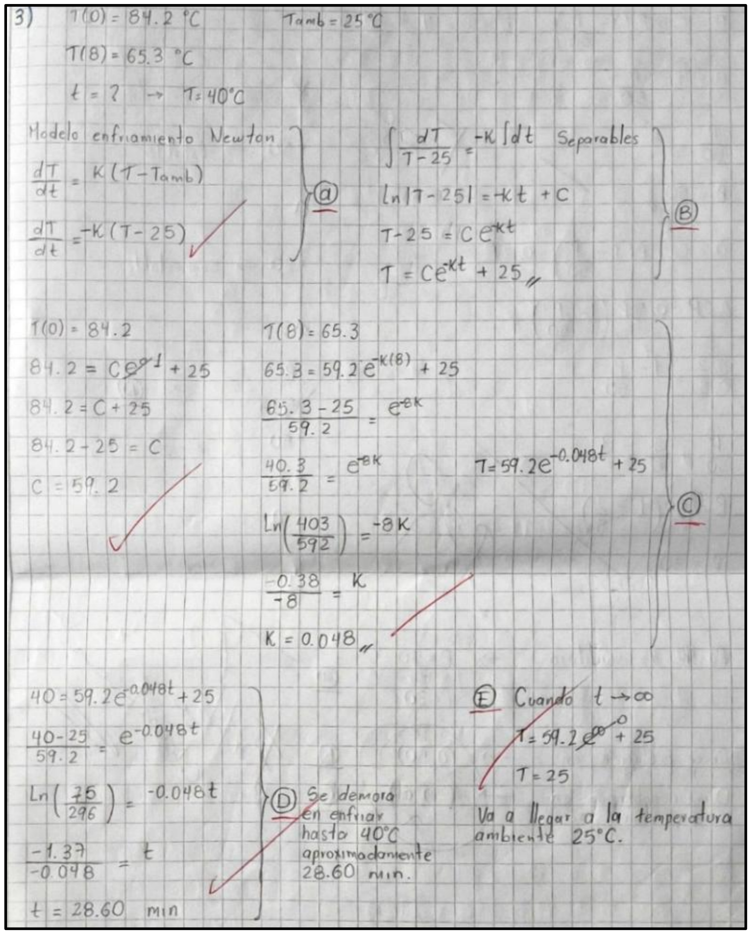
Estos resultados se encuentran puntos por encima de la prueba diagnóstica, pero muy por debajo de la nota promedio del quiz y los talleres, lo cual puede explicarse por las condiciones propias de la evaluación. A diferencia de estos últimos, en los que los estudiantes contaban con apoyo entre pares, herramientas tecnológicas o mayor flexibilidad en el desarrollo de las actividades, el examen parcial exigió una resolución individual y sin ayudas externas, lo que incrementa el nivel de exigencia. En este orden de ideas, la diferencia en los desempeños no necesariamente refleja una disminución en la comprensión de los contenidos, sino el paso hacia un contexto evaluativo más demandante, en el que se pone a prueba la autonomía, la seguridad en los procedimientos y la capacidad de transferir los aprendizajes construidos a nuevos contextos.

Al analizar de forma detallada la distribución de los resultados del parcial, se observa que 12 estudiantes lograron la totalidad de los puntos en el problema, evidenciando un dominio sólido del proceso completo, mientras que 6 estudiantes no obtuvieron puntuación en este ítem, lo que indica dificultades importantes en la aplicación de los procesos requeridos. El grupo restante alcanzó desempeños intermedios, caracterizados por avances parciales en la resolución, pero sin lograr completar adecuadamente todas las fases del proceso.

En relación con el análisis a priori, se identifican resultados que se corresponden de manera significativa con lo esperado. En particular, el ítem 1, asociado a la modelación del fenómeno, presentó el mejor desempeño, lo que muestra que los estudiantes lograron identificar adecuadamente la ley de enfriamiento de Newton, establecer las variables involucradas y plantear la ecuación diferencial correspondiente. Este resultado refleja el impacto positivo de los talleres, en los cuales se enfatizó la comprensión del fenómeno y la construcción del modelo como punto de partida del proceso.

Figura 80.

Respuesta del estudiante A en el punto del parcial.



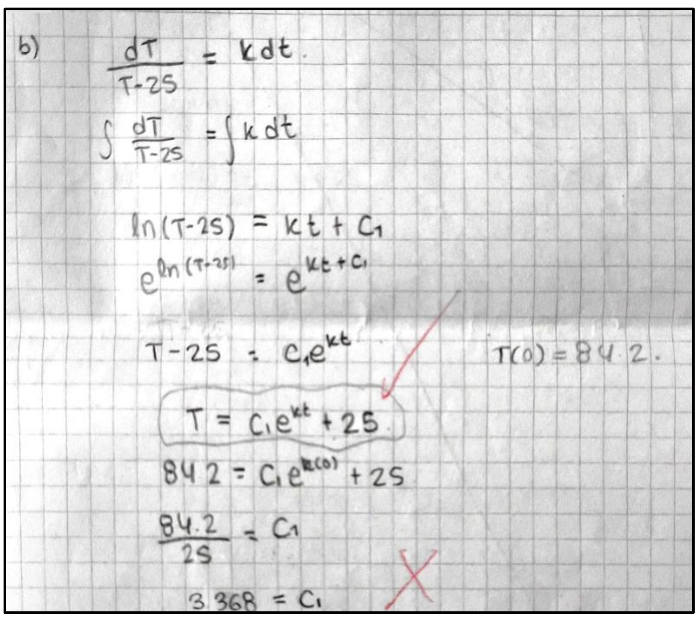
Nota. Tomado de los productos realizado por los estudiantes al resolver el parcial.

En producciones como la *Figura 80*, se evidencia un proceso completo y estructurado, en el que el estudiante logra integrar de manera coherente la formulación del modelo, su resolución mediante un método adecuado y la interpretación de los resultados. Se observa un manejo claro de las condiciones iniciales, una correcta determinación de la constante de enfriamiento y una interpretación adecuada del comportamiento de la solución en el tiempo. Este tipo de respuestas da cuenta de un nivel alto de comprensión, en el que se encuentran tanto aspectos conceptuales como procedimentales.

En cuanto al ítem 2, relacionado con la resolución de la ecuación diferencial, se evidenció el segundo mejor desempeño. No obstante, resulta particularmente interesante que, aunque el análisis a priori consideraba el uso del método del factor integrante como el procedimiento esperado, ninguno de los estudiantes empleó este método, optando en su totalidad por la resolución mediante variables separables. Este hecho, lejos de considerarse un error, refleja una apropiación flexible de los métodos de solución, en la que los estudiantes seleccionan estrategias que reconocen como más accesibles. Este resultado se vincula con el enfoque de la unidad didáctica, en el que no se promovió un único camino de resolución, sino explorar las diferentes alternativas para encontrar un resultado óptimo.

Figura 81.

Respuesta del estudiante M en el punto del parcial.



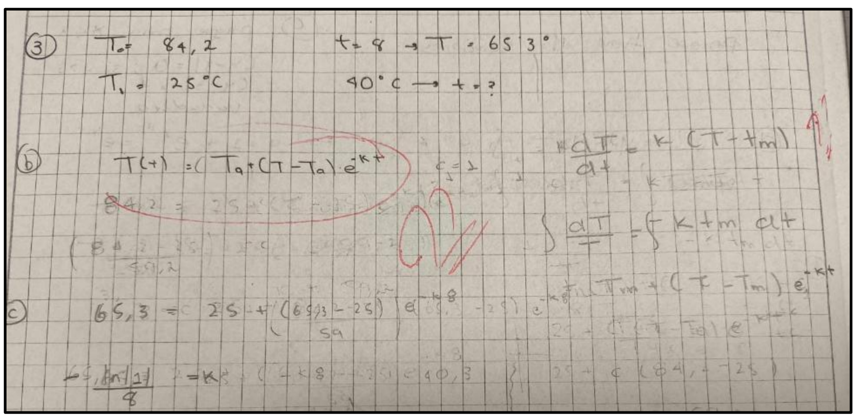
Nota. Tomado de los productos realizado por los estudiantes al resolver el parcial.

Sin embargo, en algunos casos se identificaron dificultades asociadas al manejo algebraico, no necesariamente en la resolución de la ecuación diferencial, sino en procesos básicos como despejes, sustituciones o manipulación de expresiones. En este tipo de producciones, aunque el estudiante logra avanzar en la estructura general del procedimiento, los errores algebraicos impiden llegar a una solución correcta, lo que evidencia una debilidad en conocimientos previos que incide directamente en el resultado final.

Por otra parte, los ítems 4 y 5, asociados a la interpretación en el contexto y al análisis cualitativo del comportamiento de la solución, presentaron los niveles más bajos de desempeño, tal como se anticipaba en el análisis a priori. En particular, se evidenció que muchos estudiantes, aun habiendo resuelto correctamente la ecuación diferencial, no lograban interpretar el significado de los resultados obtenidos en el contexto del problema, limitándose a presentar respuestas numéricas sin justificación o sin conexión con la situación planteada.

Figura 82.

Respuesta del estudiante J en el punto del parcial.



Nota. Tomado de los productos realizado por los estudiantes al resolver el parcial.

Por otro lado, en resultados como el obtenido en la *Figura 82,* se observa que el estudiante no logra consolidar el proceso de modelación, ya que, aunque inicia con algunos elementos del planteamiento, no desarrolla una solución estructurada ni establece relaciones claras entre el modelo matemático. Asimismo, se comprueban dificultades en la interpretación del comportamiento de los fenómenos, lo que afecta la comprensión de la situación en términos generales.

En síntesis, los resultados del problema del parcial certifican un avance significativo en los procesos de modelación y resolución de ecuaciones diferenciales, en coherencia con los objetivos de la unidad didáctica. No obstante, también ponen de manifiesto que los procesos de interpretación, argumentación y análisis cualitativo continúan siendo un desafío para los estudiantes, particularmente en la conexión entre la solución matemática y su significado en el contexto. Este resultado sugiere la necesidad de seguir fortaleciendo estas microcompetencias, con el fin de consolidar una comprensión más integral de las EDOLPO como herramientas para el análisis de fenómenos de cambio.

5.5 Resultados de las Encuestas de Percepción

El análisis de los resultados de la encuesta de percepción permite complementar la información obtenida a través de los instrumentos anteriores, incorporando la voz de los estudiantes en relación con la implementación de la unidad didáctica. Este instrumento fue respondido por 26 de los 31 estudiantes matriculados, lo que corresponde aproximadamente al 83.9% de participación, evidenciando un alto nivel de disposición para compartir sus apreciaciones. Es importante señalar que la encuesta no tuvo incidencia en la calificación del curso, con el fin de propiciar respuestas más honestas y espontáneas, orientadas a recoger opiniones genuinas sobre los talleres, las estrategias pedagógicas empleadas y el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra.

En este sentido, la encuesta permitió indagar no solo por la percepción de los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje, sino también por el grado de aceptación, pertinencia y utilidad de la propuesta didáctica. Asimismo, se exploraron aspectos relacionados con la motivación, la comprensión de los conceptos trabajados, las dificultades experimentadas y la posibilidad de implementar este tipo de estrategias en otros cursos. De esta manera, los resultados obtenidos constituyen un insumo relevante para analizar el impacto de la intervención desde la perspectiva de los estudiantes y orientar posibles ajustes en futuras implementaciones. A continuación, se presenta un análisis de las respuestas sobre la percepción de los estudiantes.

- **Percepción del Aprendizaje y Las Estrategias Utilizadas**

Figura 83.

Respuestas de los estudiantes a la encuesta de percepción (ítems del 1 al 12)

Respuestas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
1. Los talleres me ayudaron a plantear e identificar una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden y a determinar su solución.	0	0	2 (8%)	**15** (58%)	9 (35%)	**(26)**
2. Relacionar las matemáticas con situaciones reales facilitó mi aprendizaje.	0	0	5 (19%)	9 (35%)	**12** (46%)	**(26)**
3. Los talleres me ayudaron a ver la utilidad de las ecuaciones diferenciales.	0	0	3 (12%)	7 (27%)	**16** (62%)	**(26)**
4. Mi percepción sobre las ecuaciones diferenciales mejoró después de los talleres.	0	0	6 (23%)	8 (31%)	**12** (46%)	**(26)**
5. Sentí mayor motivación e interés al trabajar problemas contextualizados y simulados.	0	0	**9** (35%)	8 (31%)	**9** (35%)	**(26)**
6. Los talleres me ayudaron a comprender qué significa modelar una situación con una ecuación diferencial.	0	0	3 (12%)	**13** (50%)	10 (38%)	**(26)**
7. Comprendí el procedimiento de solución de una EDOPO Lineal por variables separables y factor integrante.	0	0	4 (15%)	9 (35%)	**13** (50%)	**(26)**
8. Pude interpretar de manera adecuada la solución obtenida dentro del contexto del problema.	0	1 (4%)	7 (27%)	**11** (42%)	7 (27%)	**(26)**
9. Los talleres facilitaron la transición entre el contexto verbal y la expresión matemática formal.	0	0	6 (23%)	9 (35%)	**11** (42%)	**(26)**
10. Después de los talleres, me siento más seguro(a) resolviendo ecuaciones diferenciales lineales.	0	2 (8%)	**9** (35%)	**9** (35%)	6 (23%)	**(26)**
11. Los talleres favorecieron mi capacidad de modelación, argumentación y comunicación matemática	0	0	9 (35%)	**11** (42%)	6 (23%)	**(26)**
12. El uso de herramientas tecnológicas (como GeoGebra, simuladores, etc.) aportó a mi aprendizaje.	0	0	2 (8%)	**12** (46%)	**12** (46%)	**(26)**

Nota. Resultados obtenidos en la encuesta aplicada en el Aula Moodle. Elaboración Propia.

El análisis de este bloque permite identificar, en primer lugar, algunos aspectos en los que la percepción de los estudiantes no es completamente homogénea. En particular, los ítems relacionados con el fortalecimiento de la capacidad de modelación, argumentación y comunicación matemática (ítem 11), la interpretación de soluciones en contexto (ítem 8) y la seguridad al resolver ecuaciones diferenciales (ítem 10) presentan una mayor variabilidad en las respuestas, con una presencia significativa de valoraciones en el nivel 3. Esto sugiere que, aunque la estrategia fue bien recibida, no todos los estudiantes lograron sentirse plenamente seguros ni desarrollar con igual solidez la capacidad de interpretar resultados dentro del contexto de los problemas

En un nivel intermedio se encuentran aquellos ítems asociados a procesos más estructurales del aprendizaje, como la comprensión de los métodos de solución (ítem 7), la transición entre el lenguaje verbal y matemático (ítem 9), sobre la motivación de las actividades (ítem 5) y la mejora en la percepción de la asignatura (ítem 4). Si bien la mayoría de los estudiantes se ubica en niveles de acuerdo (4 y 5), aún se observa una proporción relevante en niveles medios, lo que indica que estos procesos no se han consolidado de manera uniforme. En particular, aunque los estudiantes manifiestan comprender los procedimientos de solución, los resultados de otros instrumentos muestran que persisten dificultades en el uso del método del factor integrante, lo que sugiere una brecha entre la percepción del aprendizaje y su aplicación efectiva.

Finalmente, los resultados más favorables se concentran en los ítems relacionados con la utilidad de los talleres y su aporte al aprendizaje. Los estudiantes valoran positivamente la posibilidad de identificar, plantear y resolver ecuaciones diferenciales (ítem 1), así como la comprensión del proceso de modelación (ítem 6). De igual forma, se destaca el reconocimiento de la utilidad de las ecuaciones diferenciales (ítem 3) y la conexión con situaciones reales (ítem 2), aspectos que presentan altos porcentajes en las categorías de mayor valoración. Asimismo, el uso de herramientas tecnológicas (ítem 12) es uno de los elementos mejor evaluados, evidenciando su pertinencia y su impacto positivo en el desarrollo de las actividades.

En conjunto, estos resultados muestran que, aunque la propuesta didáctica es valorada de manera positiva y logra fortalecer aspectos clave como la modelación y la contextualización, aún persisten dificultades en procesos más complejos como la interpretación, la argumentación y la selección adecuada de métodos de solución. Esto refuerza lo observado en los demás instrumentos, donde se patenta que los estudiantes pueden alcanzar comprensiones operativas, pero presentan limitaciones cuando se enfrentan a situaciones que requieren mayor flexibilidad conceptual y profundidad en el razonamiento.

- **Valoración de la Dificultad, Tiempo y Cantidad de Actividades**

En este bloque se observan algunos elementos frente al diseño y la implementación de los talleres, particularmente en lo relacionado con el tiempo disponible y la carga de trabajo. En primer lugar, respecto al tiempo asignado para el desarrollo de los talleres (ítem 14), aunque un 48% de los estudiantes lo considera adecuado, un 32% lo percibe como insuficiente y un 24% como suficiente, lo que indica que más de la mitad de los estudiantes (56%) no lo valora plenamente como adecuado. Este resultado sugiere que, para una proporción importante del grupo, el tiempo disponible no fue suficiente para abordar las actividades con la profundidad requerida, lo cual puede haber influido en las dificultades observadas en otros instrumentos.

De manera similar, en relación con la cantidad de situaciones por taller (ítem 15), aunque un 48% de los estudiantes la considera suficiente, un 36% la percibe como excesiva y solo un 20% como adecuada. Esta distribución evidencia que más de un tercio del grupo experimentó una sobrecarga en las actividades propuestas, lo que podría estar directamente relacionado con la percepción de insuficiencia de tiempo y con posibles dificultades para completar los procesos de manera reflexiva, privilegiando en algunos casos la finalización de los ejercicios sobre la comprensión de los mismos.

En contraste, el nivel de dificultad general de los talleres (ítem 13) presenta una valoración más positiva, ya que el 88% de los estudiantes lo califica como adecuado y solo un 16% como alto. Este resultado indica que, en términos de complejidad conceptual, los talleres se encontraban bien ajustados al nivel de los estudiantes, lo que refuerza la idea de que las principales tensiones no estuvieron asociadas a la dificultad de las tareas, sino a las condiciones en las que estas debían desarrollarse, particularmente el tiempo disponible y la cantidad de actividades propuestas.

En conjunto, estos resultados permiten inferir que, si bien la propuesta didáctica fue pertinente en términos de dificultad, es necesario revisar el equilibrio entre la cantidad de ejercicios y el tiempo asignado, con el fin de favorecer procesos de aprendizaje más pausados y reflexivos que permitan a los estudiantes no solo resolver las actividades, sino también comprender, interpretar y argumentar con mayor profundidad.

- **Dificultades Percibidas y Procesos Desarrollados**

Figura 84.

Respuestas de los estudiantes a la encuesta de percepción (ítem 16)

16. ¿En qué parte de los talleres experimentaste mayor dificultad? (Puede seleccionar máximo 3 respuestas.)

Respuesta	Media
Fase 2-3 (Interpretación y Análisis de los Resultados)	64%
Fase 1 (Modelación del Problema)	44%
Fase 2 (Resolución Teórica del Problema)	32%
Fase 4 (Socialización en clase y trabajo en grupo)	32%
Fase 1 (Experimentación y Práctica)	24%
Fase 3 (Contraste Teórico – Práctico)	20%

Nota. Resultados obtenidos en la encuesta aplicada en el Aula Moodle. Elaboración Propia.

En relación con las dificultades percibidas por los estudiantes durante el desarrollo de los talleres (ítem 16), se identifica que la mayor concentración de respuestas se ubica en la fase 2-3, correspondiente a la interpretación y análisis de resultados, con un 64%. Este resultado evidencia que el principal obstáculo no se encuentra en la formulación o resolución de las ecuaciones diferenciales, sino en la comprensión e interpretación de las soluciones dentro del contexto del problema. En segundo lugar, la modelación del problema (fase 1) presenta un 44%, lo que indica que una parte importante de los estudiantes también experimenta dificultades al traducir una situación real a un modelo matemático. Por su parte, la resolución teórica (32%) y la socialización (32%) muestran niveles intermedios de dificultad, mientras que aspectos como la experimentación y práctica (24%) y el contraste teórico-práctico (20%) presentan menores porcentajes, sugiriendo que estas fases resultan más accesibles para los estudiantes.

Estos resultados guardan coherencia con lo encontrado en los demás instrumentos aplicados, donde se observó que, aunque los estudiantes logran ejecutar procedimientos y obtener soluciones, presentan mayores dificultades cuando deben interpretar, justificar o dar sentido a los resultados en contextos aplicados. En este sentido, la interpretación se consolida como uno de los procesos más complejos dentro del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Figura 85.

Respuestas de los estudiantes a la encuesta de percepción (ítem 17)

17. ¿Cuál de los procesos generales de la actividad matemática consideras que desarrollaste más con los talleres?

Respuesta	Media
Razonamiento y Comunicación Matemática	32%
Formulación y Resolución de Problemas.	28%
Modelación de Procesos y Fenómenos	20%
Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.	12%
Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas	12%

Nota. Resultados obtenidos en la encuesta aplicada en el Aula Moodle. Elaboración Propia.

En correspondencia con lo anterior, el ítem 17 permite identificar los procesos matemáticos que los estudiantes consideran haber desarrollado en mayor medida. Se destaca el razonamiento y la comunicación matemática con un 32%, seguido de la formulación y resolución de problemas con un 28%. En menor proporción aparecen la modelación de procesos (20%), la ejercitación de procedimientos (12%) y las representaciones y conexiones intra y extra-matemática (12%).

Al relacionar ambos resultados, se observa una tensión interesante: aunque los estudiantes perciben avances en procesos como el razonamiento, la comunicación y la resolución de problemas, continúan identificando la interpretación como una de sus principales dificultades. Resulta muy interesante que este último sea, al mismo tiempo, uno de los procesos que los estudiantes reconocen haber desarrollado, pero también aquel en el que se evidencian mayores vacíos y menor dominio durante la implementación de los talleres. Esto sugiere que, desde su percepción, las actividades contribuyeron al fortalecimiento de estas habilidades; sin embargo, dicho desarrollo aún se encuentra en proceso de consolidación.

- **Preferencias, Dificultades y Recomendaciones de los Estudiantes**

En relación con los talleres que generaron mayor agrado en los estudiantes, se observa una distribución variada, destacándose principalmente el taller del chocolate, el cual fue seleccionado por aproximadamente el 38% de los participantes. Este resultado se asocia a su carácter práctico y a la facilidad para establecer conexiones con el contenido matemático, como lo expresa un estudiante: *El del chocolate porque me pareció más práctico y se pudo relacionar con ecuaciones mucho mejor.* En segundo lugar, el taller de ahorro en el banco fue valorado por cerca del 23% de los estudiantes, quienes resaltan su pertinencia en contextos reales, especialmente en relación con la educación financiera: *Ahorro en el banco, es importante tener educación financiera, es la primera vez que veo ese tema de forma clara guiada en el entorno, me pareció interesante y es algo que se ve en la cotidianidad*.

Por su parte, el taller de propagación de virus fue seleccionado por aproximadamente el 19% de los estudiantes, seguido del taller del tamal con un 15%. En contraste, el taller de circuitos eléctricos presentó la menor preferencia, con cerca del 4%, aunque resulta significativo que el estudiante que lo seleccionó destacó su relación con su campo profesional: *El taller #5 debido a que va muy a fin con mi carrera y son ecuaciones diferenciales que ya había visto y utilizado antes sin necesidad de haberlas resuelto antes*. Este resultado pone de manifiesto que, aunque no fue ampliamente valorado, sí cumple con la intención de vincular las ecuaciones diferenciales con contextos disciplinares específicos.

En cuanto a los talleres percibidos como más difíciles, el taller del tamal se posiciona claramente como el de mayor complejidad, siendo señalado por aproximadamente el 58% de los estudiantes. Las dificultades se relacionan principalmente con la interpretación de datos y la necesidad de integrar diferentes elementos en la modelación, como lo menciona un estudiante: *El del calentamiento del tamal, ya que al tener dos tablas de datos (…) el planteamiento y la resolución del problema toma un rumbo distinto a lo habitual y se requieren modos de interpretación que muchas veces no están al alcance de un estudiante promedio.* En segundo lugar, el taller de circuitos fue identificado como difícil por cerca del 42% de los participantes, asociándose principalmente a vacíos en conocimientos previos y dificultades con el uso de herramientas tecnológicas: *El de circuitos RC, personalmente soy malo con la electrónica (…) También tuve dificultades con el programa ya que no sabía cómo usar bien el simulador*. Cabe resaltar que los demás talleres no fueron señalados como especialmente difíciles, lo que sugiere una adecuada progresión en el nivel de complejidad de la propuesta.

Finalmente, en lo relacionado con recomendaciones y aspectos a mejorar, las opiniones de los estudiantes se concentran principalmente en tres elementos: el tiempo asignado, la cantidad de actividades y la forma de socialización. Algunos estudiantes sugieren reducir la carga de trabajo para favorecer procesos más reflexivos, como se evidencia en la siguiente apreciación: *Disminuir* *la cantidad de 'tareas' por cada fase de taller, así como orientar de manera indirecta el planteamiento de soluciones para poder brindarle mayor seguridad al estudiante de que 'por ahí es, va bien'*. Asimismo, se identifican comentarios positivos frente a la propuesta, en los que se resalta su impacto en el aprendizaje y su carácter significativo:*La verdad no cambiaría nada, me parece algo muy interesante y bien planteado (...) Pude relacionar y comprender las ED's con fenómenos reales (...) Muy bacano.*

En conjunto, estas valoraciones permiten evidenciar que los talleres fueron bien recibidos por los estudiantes, especialmente aquellos con un componente contextual claro y cercano; sin embargo, también ponen de manifiesto la necesidad de ajustar aspectos logísticos y metodológicos que favorezcan un mejor equilibrio entre la carga de trabajo, el tiempo disponible y los procesos de acompañamiento durante el desarrollo de las actividades.

Figura 86.

Respuestas de los estudiantes a la encuesta de percepción (ítem 21)

21. Antes de esta unidad, ¿habías trabajado en clases de matemáticas (como cálculo I, II, III) problemas que integraran experimentación, modelación, resolución teórica y formalización?

Respuesta	Media
Nunca	44%
Algunas veces	28%
Rara vez	24%
Frecuentemente	8%

Nota. Resultados obtenidos en la encuesta aplicada en el Aula Moodle. Elaboración Propia.

En relación con la experiencia previa de los estudiantes frente a este tipo de metodologías (ítem 21), los resultados demuestran que la mayoría no había trabajado anteriormente con propuestas que integraran experimentación, modelación, resolución teórica y formalización. En particular, un 44% de los estudiantes señala que nunca había tenido este tipo de experiencias. En contraste, únicamente un 8% manifiesta haber trabajado frecuentemente bajo este enfoque. Estos resultados permiten afirmar que, para la mayoría de los participantes, la unidad didáctica representó una experiencia novedosa dentro de su formación matemática, lo cual aporta un valor significativo en términos de diversificación de estrategias pedagógicas.

En coherencia con lo anterior, al indagar sobre la pertinencia de implementar este tipo de propuestas en otros cursos, se observa una valoración ampliamente positiva. Aproximadamente el 88% de los estudiantes recomienda su aplicación, frente a un 4% que no la recomienda y un 8% que presenta opiniones divididas. Entre quienes valoran positivamente la experiencia, se destacan argumentos relacionados con la contextualización, el trabajo colaborativo y la comprensión de la utilidad de las matemáticas, como lo expresa un estudiante: *Sí, fomenta el trabajo en equipo, una visión más ampliada y real de cómo en nuestro entorno se ven estas ecuaciones, también puede ser divertido.*

Por otro lado, la postura negativa, aunque minoritaria, pone de manifiesto la preferencia por metodologías tradicionales: *No porque personalmente soy más de la metodología tradicional de clase.* Asimismo, las opiniones divididas reflejan una tensión entre el valor formativo de la propuesta y la percepción de otras posibles estrategias de aprendizaje: *Tengo opiniones divididas (…) ayuda a ver la utilidad de las matemáticas en la vida real, pero siento que hay otras maneras en las que se podría aprender sin necesidad de hacer un taller de aplicaciones.* De forma general, estos resultados constatan una alta aceptación de la propuesta didáctica, especialmente por su capacidad para acercar las ecuaciones diferenciales a contextos reales y promover un aprendizaje más activo.

5.6 Resultados de las Entrevistas Semiestructuradas

El análisis de las entrevistas semiestructuradas permite profundizar en los procesos de pensamiento de los estudiantes, complementando la información obtenida mediante otros instrumentos. A diferencia de los talleres, el quiz y el examen parcial, este instrumento se orienta a comprender cómo los estudiantes interpretan las situaciones, qué estrategias emplean, cómo justifican sus respuestas y qué significados construyen en torno a las EDOLPO. En este sentido, no se centra únicamente en el resultado final, sino en el proceso cognitivo que realiza el estudiante en la resolución de las actividades propuestas.

Para su desarrollo, se diseñaron cinco situaciones específicas basadas en los ejes conceptuales trabajados en la unidad didáctica, en lugar de retomar directamente los talleres, con el fin de favorecer un análisis más centrado y ajustado a las condiciones de tiempo. El carácter semiestructurado de la entrevista permitió mantener una guía común y, a su vez, profundizar en las respuestas de los estudiantes. La selección de los participantes se realizó mediante una muestra intencionada que incluyó distintos niveles de desempeño, lo que permitió obtener una visión amplia del proceso de aprendizaje, favorecida además por la participación voluntaria y el ambiente de confianza generado durante las entrevistas.

Con el fin de contextualizar el análisis de las respuestas obtenidas, a continuación, se presenta una caracterización general de los estudiantes participantes en las entrevistas, considerando algunos aspectos relevantes de su formación académica y trayectoria en la asignatura.

Tabla 16.

Caracterización de los participantes de la entrevista

Entrevistado	Edad	Genero	Programa Académico	Semestre / Nivel	Veces cursando la asignatura	Nivel de desempeño demostrado
A	19	M	Ing. Civil	5	2	Medio
B	21	F	Ing. Civil	4	1	Alto
M	19	M	Ing. Industrial	4	1	Medio - Alto

S	24	M	Ing. Química	7	3	Bajo
V	25	F	Lic. en Matemáticas	7	3	Medio - Bajo

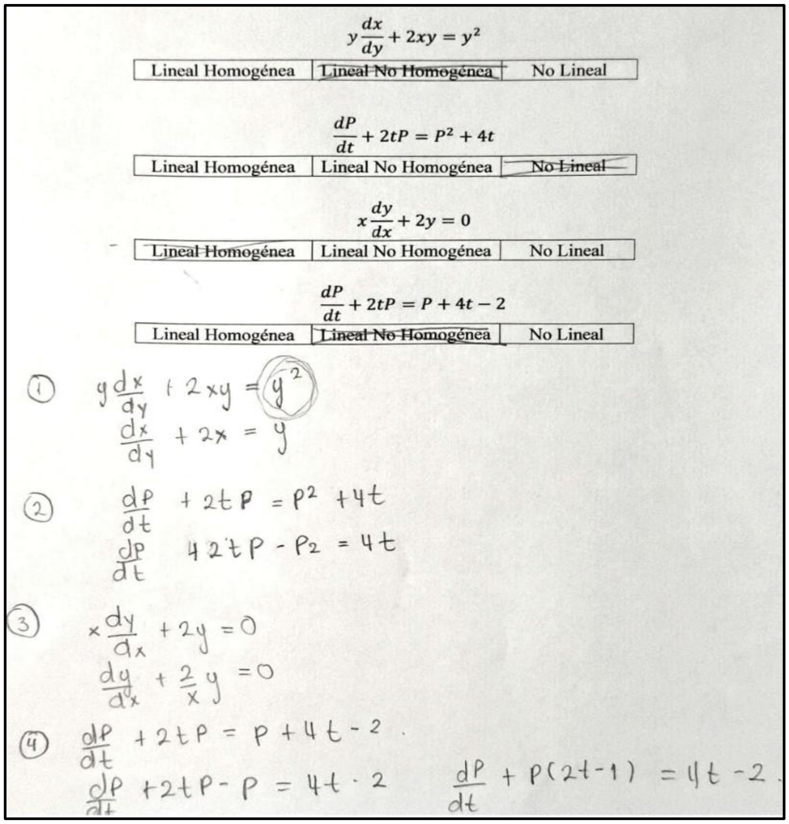
Nota. La tabla presenta la caracterización general de los estudiantes participantes en las entrevistas semiestructuradas, organizada a partir de variables como edad, género (M = Masculino, F = Femenino), programa académico, semestre, número de veces cursando la asignatura y nivel de desempeño. La codificación (A, B, M, S, V) se utiliza con el fin de garantizar el anonimato de los participantes. El nivel de desempeño se estableció con base en los resultados obtenidos en los diferentes instrumentos de la intervención (prueba diagnóstica, talleres, quiz y examen parcial). Elaboración propia.

5.6.1 Primera Situación de la Entrevista

La primera situación de la entrevista tuvo como propósito analizar la capacidad de los estudiantes para clasificar ecuaciones diferenciales de primer orden en términos de linealidad y homogeneidad, así como justificar sus decisiones a partir de criterios estructurales y conceptuales. Se esperaba que los estudiantes reconocieran la forma general de una EDOLPO y distinguieran adecuadamente entre ecuaciones lineales, no lineales y lineales homogéneas o no homogéneas.

Figura 87.

Respuestas primera situación entrevistado B



$$y\frac{dx}{dy} + 2xy = y^2$$

Lineal Homogénea	~~Lineal No Homogénea~~	No Lineal

$$\frac{dP}{dt} + 2tP = P^2 + 4t$$

Lineal Homogénea	Lineal No Homogénea	~~No Lineal~~

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

~~Lineal Homogénea~~	Lineal No Homogénea	No Lineal

$$\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$$

Lineal Homogénea	~~Lineal No Homogénea~~	No Lineal

① $y\frac{dx}{dy} + 2xy = y^2$

$\frac{dx}{dy} + 2x = y$

② $\frac{dP}{dt} + 2tP = P^2 + 4t$

$\frac{dP}{dt}\ 4\,2tP - P_2 = 4t$

③ $x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$

④ $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

$\frac{dP}{dt} + 2tP - P = 4t \cdot 2$ $\quad \frac{dP}{dt} + P(2t-1) = 4t - 2$

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado B.

En el caso del estudiante B, se evidenció un adecuado manejo de los procesos procedimentales en la clasificación de las ecuaciones; sin embargo, durante la entrevista surgieron dudas asociadas a la comprensión conceptual de los criterios utilizados. Al preguntar por las dudas observadas en el ítem 1, se desarrolló el siguiente diálogo orientado a profundizar en su razonamiento:

Profesor: ¿Me puedes contar por qué dudaste tanto en la respuesta del ítem A?

B: “No me acordaba bien… si para que sea lineal homogénea… ¿El g(x) tenía que estar acompañado de y o de x?”

Con el fin de orientar su reflexión, se le planteó una pregunta relacionada con la dependencia de las variables:

P: Recuerda que para observar la linealidad en una ecuación diferencial podemos hacerlo desde la dependencia de y o desde la de x

A partir de esta mediación, el estudiante reorganiza su respuesta:

B: "Entonces sí, esta es lineal no homogénea (haciendo referencia al ítem 1) … y está también (haciendo referencia al ítem 4) …"

De manera similar, en los estudiantes M y A se evidenció un desempeño procedimental adecuado, aunque acompañado de dificultades en la recuperación de conceptos fundamentales, particularmente en relación con la forma estándar de una EDOLPO. Al profundizar en sus respuestas, se obtuvieron afirmaciones como:

P: Voy a preguntarte por qué dudaste de tu respuesta en el ítem 1.

M: "No me acuerdo cuál es la homogénea y cuál es la no homogénea…"

P: ¿Recuerdas qué parte de la expresión debe cambiar para que sea lineal homogénea o no homogénea?

M: "Una está igualada a cero y la otra a otra expresión… creo que la homogénea está igualada a cero…"

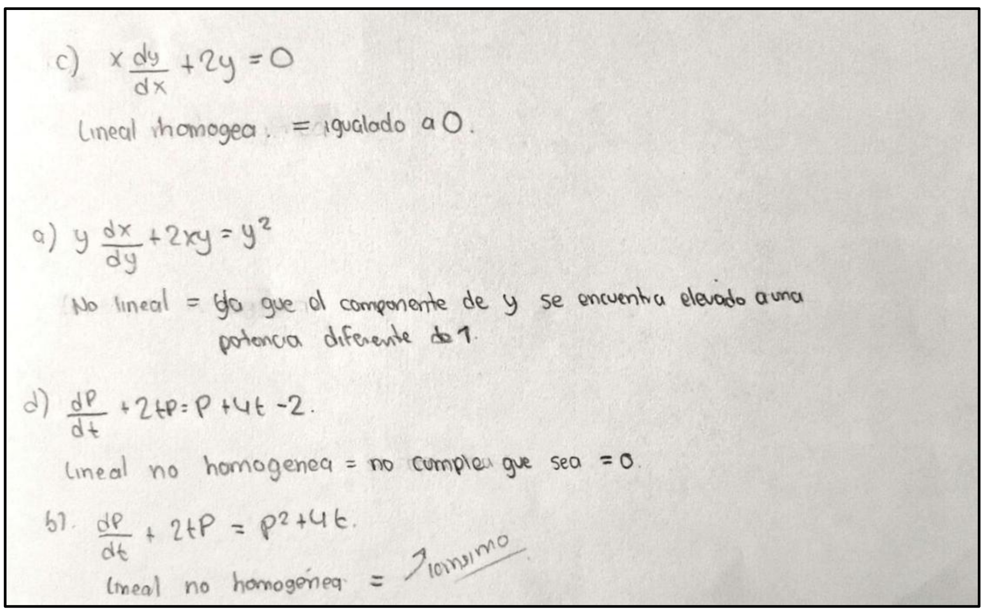
M: "Este cuadrado me choca… pero entonces sería lineal y no sería homogénea…"

Estas respuestas ponen en evidencia el uso de criterios intuitivos, en los que se reconocen algunos elementos correctos, pero sin una vinculación formal que sustente completamente la clasificación realizada. Asimismo, se observa que la intervención del docente actúa como un elemento mediador que permite activar conocimientos previos, aunque no siempre logra consolidar una comprensión estructurada.

En conjunto, los casos correspondientes a los estudiantes B, M y A presentan un desempeño globalmente adecuado, en el que logran clasificar correctamente las ecuaciones y mantener coherencia en sus procedimientos. No obstante, durante la entrevista se observó la presencia de dificultades conceptuales relacionadas con la forma general de una EDOLPO, el papel del término independiente $g(x)$ y la distinción entre linealidad y homogeneidad. Estas se manifiestan en dudas iniciales y uso de criterios intuitivos, lo que indica que, aunque se alcanza el resultado correcto, el razonamiento no es completamente sólido. En consonancia con lo anterior, su desempeño refleja una comprensión adecuada, pero que aún requiere fortalecimiento en argumentación y precisión conceptual.

Figura 88.

Respuestas primera situación entrevistado V



c) $x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Lineal homogea. = igualado a 0.

a) $y\frac{dx}{dy} + 2xy = y^2$

No lineal = ya que el componente de y se encuentra elevado a una potencia diferente de 1.

d) $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2.$

Lineal no homogenea = no cumple que sea = 0.

b). $\frac{dP}{dt} + 2tP = P^2 + 4t.$

lineal no homogénea = lo mismo

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado V.

En el caso de la estudiante V, se observa un manejo procedimental adecuado en la clasificación de las ecuaciones; sin embargo, al enfrentarse a cambios en la variable independiente, surgen dificultades que afectan la consistencia de sus respuestas, particularmente en el ítem 1. Al profundizar en su razonamiento, se encuentra lo siguiente:

P: Te he visto dudando en el caso del ítem uno.

V: "…no estoy segura si en alguna podría poner dos opciones… porque considero que en el ítem uno podría ser lineal o no lineal…"

P: ¿Por qué podría ser cualquiera de las dos?

(La estudiante duda y reflexiona antes de responder)

V: "Es una lineal homogénea según yo… bueno, pero aquí está el cuadrado… no, esta no es lineal…"

Con el fin de orientar la identificación de la estructura de la ecuación, se le preguntó por la variable dependiente:

P: En este ítem, ¿la variable dependiente es x o y?

V: "Ah verdad… la variable dependiente es la y…"

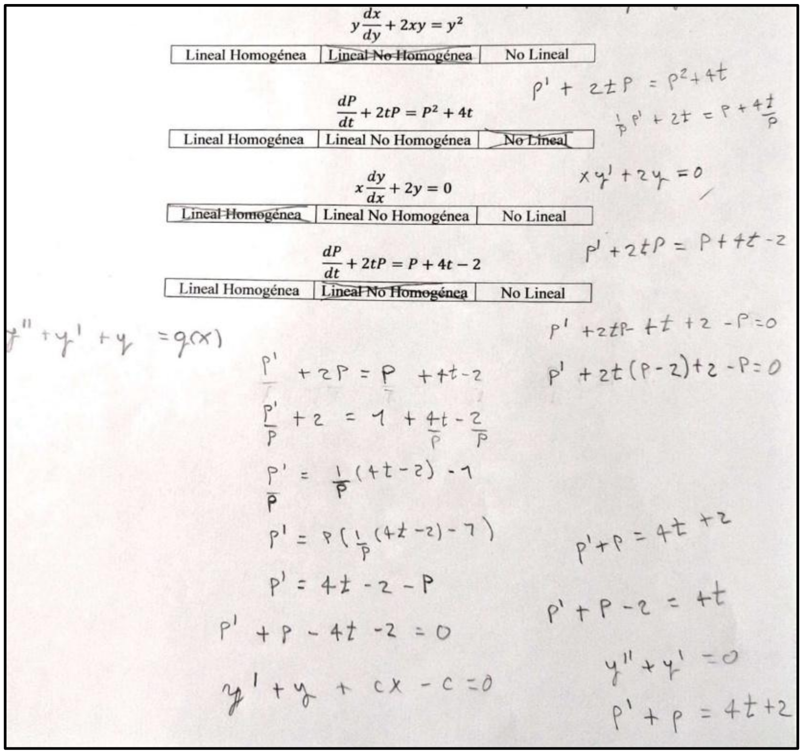
P: ¿Siempre ocurre eso?

V: "En el concepto de linealidad sí… por lo que y no tiene que estar elevada al cuadrado…"

La respuesta de la estudiante evidencia una comprensión intermedia con vacíos conceptuales, especialmente en la identificación de la variable dependiente y su relación con la linealidad. Aunque reconoce que esta no debe aparecer elevada a potencias distintas de uno, su afirmación de que "siempre" corresponde a y refleja una dependencia rígida de la forma estándar, sin tener en cuenta la estructura particular de cada ecuación. Esto limita su interpretación en casos donde la variable dependiente cambia o no es explícita. En consecuencia, no consolida un criterio general de linealidad, sino que opera desde esquemas rígidos, generando inconsistencias en su clasificación.

Figura 89.

Respuestas primera situación entrevistado S



$$y\frac{dx}{dy} + 2xy = y^2$$

Lineal Homogénea	~~Lineal No Homogénea~~	No Lineal

$p' + 2tP = P^2 + 4t$

$$\frac{dP}{dt} + 2tP = P^2 + 4t$$

$\frac{1}{P}p' + 2t = P + \frac{4t}{P}$

Lineal Homogénea	Lineal No Homogénea	~~No Lineal~~

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$xy' + 2y = 0$

~~Lineal Homogénea~~	Lineal No Homogénea	No Lineal

$$\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$$

$p' + 2tP = P + 4t - 2$

Lineal Homogénea	~~Lineal No Homogénea~~	No Lineal

$y'' + y' + y = g(x)$

$p' + 2tP - 4t + 2 - P = 0$

$p' + 2t(P-2) + 2 - P = 0$

$P' + 2P = P + 4t - 2$

$\frac{P'}{P} + 2 = 1 + \frac{4t}{P} - \frac{2}{P}$

$\frac{P'}{P} = \frac{1}{P}(4t-2) - 1$

$P' = P\left(\frac{1}{P}(4t-2) - 1\right)$

$P' = 4t - 2 - P$

$p' + p = 4t + 2$

$p' + p - 4t - 2 = 0$

$p' + p - 2 = 4t$

$y' + y + cx - c = 0$

$y'' + y' = 0$

$p' + p = 4t + 2$

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado S.

Una vez el estudiante S finaliza su resolución, se le solicita explicar el procedimiento realizado, dado que, aunque selecciona algunas respuestas correctas, su desarrollo presenta procesos distintos a los esperados. A partir de esto, se establece lo siguiente:

P: ¿Podrías explicarme lo que hiciste en el ítem 1?

S: "…recuerdo que cuando la variable estaba elevada a un exponente significa que no era lineal… en este caso la variable dependiente es la y y la independiente es la x… umm… ahora sí sería lineal, pero no homogénea…"

P: ¿Y esto que hiciste para el ítem 4?

S: "Es que quería mirar si era homogénea… según recuerdo lo de homogéneas era $y'' + y' = 0$"

P: ¿Estás seguro de que eso se revisaba para una lineal homogénea?

S: “Ahh… creo que no… lo que tenía que hacer era igualar a 0…”

(El estudiante procede a igualar expresiones a cero sin considerar la estructura de la ecuación diferencial)

P: ¿Recuerdas la forma de una ecuación lineal?

S: “Sé que era… algo con P(x)… no, la verdad no recuerdo eso.”

La respuesta del estudiante permite notar dificultades conceptuales significativas en la comprensión de las ecuaciones diferenciales lineales, tanto en la identificación de la variable dependiente como en el reconocimiento de su forma general. Aunque intenta justificar sus decisiones, sus argumentos se basan en asociaciones incompletas o incorrectas, como la idea de que la homogeneidad se determina únicamente al igualar la ecuación a cero o la confusión entre ecuaciones diferenciales lineales y otras expresiones diferenciales. Asimismo, la modificación constante de sus respuestas sin un criterio claro refleja una falta de organización conceptual, en la que los conocimientos no se encuentran estructurados de manera coherente. Este tipo de desempeño muestra un nivel bajo de comprensión, en el que predominan interpretaciones superficiales y dificultades para relacionar los conceptos con la estructura matemática de la ecuación.

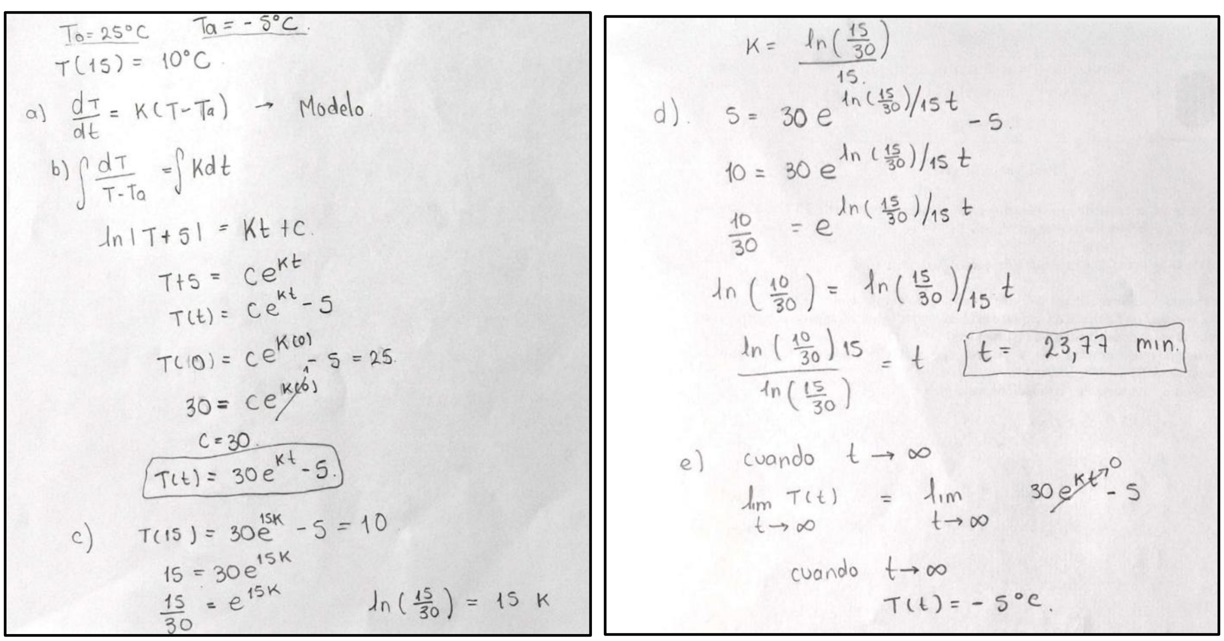
En conjunto, los resultados de esta situación evidencian tres niveles de comprensión en los estudiantes: un nivel alto, caracterizado por clasificaciones correctas con vacilaciones conceptuales; un nivel intermedio, en el que se reconocen algunos criterios, pero con inconsistencias en su aplicación; y un nivel bajo, donde predominan errores estructurales y confusiones conceptuales significativas. Estos hallazgos se alinean con lo previsto en el análisis a priori, en el que se anticipaba que los estudiantes podrían identificar patrones de manera operativa, pero presentar dificultades en la formalización y justificación de los conceptos. En este sentido, se presenta un avance significativo en la competencia de reconocimiento de estructuras, pero persisten retos en la comprensión conceptual, la argumentación, la comunicación matemática y la flexibilidad para interpretar las ecuaciones diferenciales más allá de su forma estándar.

5.6.2 Segunda Situación de la Entrevista

La segunda situación de la entrevista tuvo como propósito analizar la capacidad de los estudiantes para formular, resolver e interpretar un modelo diferencial en un contexto físico, específicamente a partir de la ley de enfriamiento de Newton. Se esperaba que los estudiantes lograran establecer la relación entre las variables involucradas, construir la ecuación diferencial correspondiente, resolverla mediante métodos analíticos, determinar la constante de enfriamiento y analizar el comportamiento de la solución en el contexto del problema (misma situación que la del problema del parcial)

Figura 90.

Respuestas segunda situación entrevistado B



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado B.

En los casos de los estudiantes A, B y M se evidenció un desempeño globalmente adecuado, caracterizado por una correcta comprensión entre el contexto físico y su formalización matemática. En el caso del estudiante A, aunque inicialmente no recordaba la expresión formal de la ley de enfriamiento de Newton, logró reconstruir el modelo a partir de la comprensión de las variables involucradas:

P: ¿Por qué cree que este modelo aplica aquí?

A: "No estoy seguro… no recuerdo bien cómo es la fórmula…"

P: Entonces créela como lo hicimos, por ejemplo, en el taller del chocolate. ¿Qué variables se relacionaban?

A: "Necesitamos la constante de enfriamiento, la temperatura ambiente y la temperatura del agua panela…"

P: ¿Cómo se relacionan?

A: "…la diferencia entre la temperatura del objeto y la del medio… ya recuerdo…"

A partir de esta reconstrucción, el estudiante logra formular correctamente el modelo y desarrollar el procedimiento de resolución, evidenciando un proceso activo de construcción del conocimiento. Asimismo, logra interpretar el comportamiento de la solución en términos globales, llegando hasta el inciso (e) donde interpreta en palabras:

A: "…cuando el tiempo tiende a infinito… la temperatura va a tender a la del medio, es decir, a -5°C…, porque no va a estar más frio el jugo que la temperatura de la nevera"

Por su parte, la estudiante B evidenció un dominio sólido tanto en la resolución como en la interpretación, destacándose especialmente su capacidad para interpretar resultados, ay que en el inciso (d), la entrevistada se queda analizando su respuesta a lo que se menciona:

P: ¿Qué paso? ¿Qué la tiene dudando?

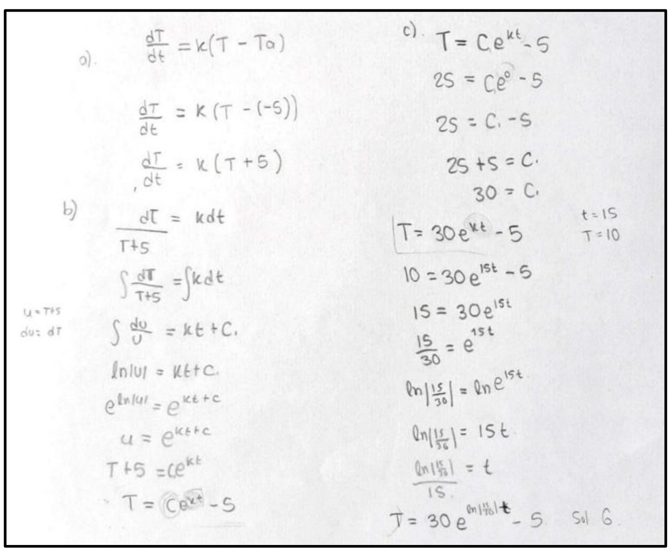
B: “El tiempo me daba 1.5 … pero no tenía sentido… tenía que ser mayor…”

Este proceso realiza la revisión y nota un error algebraico, esta corrección y análisis muestra un nivel alto de comprensión, en el que no solo ejecuta procedimientos, sino que se evalúa la coherencia de los resultados en función del contexto. En el caso del estudiante M, se observó un desarrollo correcto y sin dificultades significativas, manteniendo coherencia tanto en la modelación como en la resolución.

En conjunto, estos casos ponen de manifiesto un nivel alto de desempeño, en el que los estudiantes logran integrar la modelación, la resolución y la interpretación de manera coherente. No obstante, en algunos momentos se presentan dificultades en la evocación de la forma general del modelo, lo que indica que, aunque los conceptos han sido apropiados, aún requieren fortalecimiento en su formalización y recuperación autónoma.

Figura 91.

Respuestas segunda situación entrevistado V



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado V.

En el caso de la estudiante V, se observa un manejo adecuado en la formulación del modelo y en los primeros pasos de la resolución; sin embargo, surgen dificultades en la distinción entre conceptos clave y en la interpretación final de la solución. Al indagar sobre el tipo de solución obtenida, se presentó el siguiente diálogo:

P: ¿Es solución general o particular? (refiriéndose a la solución obtenida sin hacer uso del PVI)

V: "…general…no, particular… ¿sí? ... no sé"

Esta respuesta refleja una confusión conceptual entre ambos tipos de solución, lo que indica una comprensión incompleta de la estructura del proceso de resolución. Asimismo, la entrevistada no resolvió sino los incisos a, b y c, ya que manifestó que los demás no los tenía muy claros, sin embargo, se trató de abordar de forma verbal el ítem (e) sobre el análisis del comportamiento de la solución, a lo qué la estudiante manifiesta:

V: "Nunca supe cómo analizar cuando $t \to \infty$… En el parcial tampoco lo entendí"

A lo que interviene el docente:

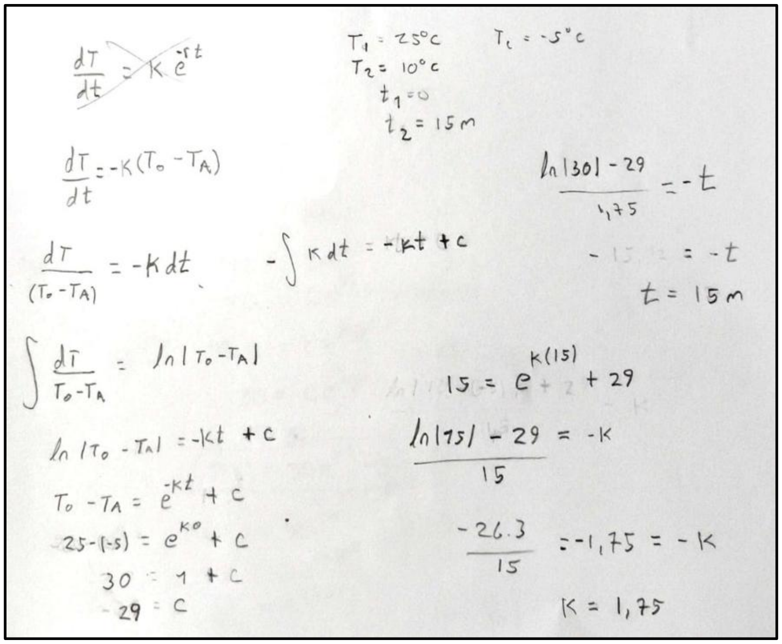
P: ¿Qué pasa si dejas mucho tiempo una botella de agua en la nevera? Por ejemplo, 30 días ¿La botella va a tener una temperatura más baja que la de la nevera?

V: "No… va a llegar a la mucho a la temperatura de la nevera… no puede ser más… ahh ya entendí…"

Este episodio evidencia que el estudiante posee intuiciones correctas desde el contexto, pero presenta dificultades para traducirlas al lenguaje matemático. Su desempeño refleja un nivel intermedio, en el que logra desarrollar gran parte del procedimiento, pero presenta vacíos en la interpretación y en la comprensión de conceptos fundamentales como la solución general y el análisis asintótico.

Figura 92.

Respuestas segunda situación entrevistado S



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado S.

En el caso del estudiante S, se notan dificultades significativas desde la formulación del modelo, lo que afecta todo el desarrollo posterior. Inicialmente, el estudiante asocia incorrectamente el problema con otro tipo de modelo, ya que propone como modelo de newton, una ecuación diferencial que tiene la solución de la ley de Malthus, lo que demuestra una confusión entre la EDO y su solución, a lo que se pregunta:

P: ¿Qué variables o letras o elementos se relacionan en el modelo de Newton?

S: “Temperatura del cuerpo… y la temperatura del ambiente…”

P: ¿Qué más falta en la ecuación diferencial?

S: “… ¿volumen?”

Esta respuesta demuestra una desconexión conceptual con el fenómeno físico, al introducir variables que no son pertinentes al modelo. A pesar de la mediación del docente, el estudiante no logra consolidar la estructura del modelo:

P: ¿Seguro que el volumen está involucrado?

S: "…no, la verdad no recuerdo bien…"

Debido a estas dificultades, se le proporciona la ecuación diferencial para continuar el proceso; sin embargo, aunque logra resolver la ecuación diferencial por el método de variables separables persisten errores en la manipulación algebraica y en el manejo de propiedades de las funciones exponenciales, lo que impide alcanzar una solución adecuada y continuar con los demás ítems de la situación. En este caso, el estudiante presenta un nivel bajo de desempeño, caracterizado por una falta de práctica para establecer conexiones entre el contexto, el modelo matemático y los procedimientos de resolución.

En síntesis, los resultados de esta situación exponen tres niveles de comprensión claramente diferenciados. Un nivel alto, en el que los estudiantes logran integrar la modelación, la resolución y la interpretación de manera coherente; un nivel intermedio, en el que se desarrollan correctamente los procedimientos, pero persisten dificultades en la comprensión conceptual y la interpretación; y un nivel bajo, donde se presentan errores desde la formulación del modelo y dificultades en la ejecución algebraica. Estos hallazgos se alinean con lo previsto en el análisis a priori, particularmente en relación con los errores en la formulación del modelo, las dificultades algebraicas y la tendencia a no interpretar los resultados.

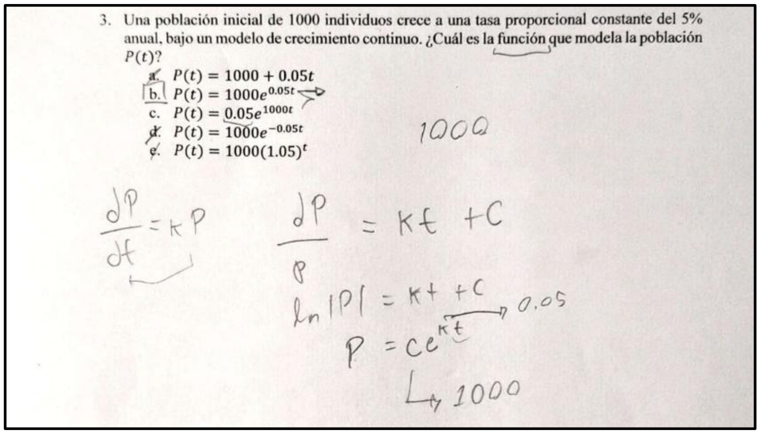
Adicionalmente, se evidenció un aspecto relevante en los procesos de resolución: todos los estudiantes optaron por el uso del método de variables separables, sin tener en cuenta el del factor integrante. Esta preferencia, es coherente con lo observado en el examen parcial, lo que sugiere una tendencia a privilegiar métodos más familiares o procedimentalmente accesibles, lo que puede estar asociado a un mayor nivel de apropiación o confianza en este tipo de técnicas. En este sentido, se presenta un avance significativo en la competencia de modelación, aunque aún se requieren procesos de fortalecimiento en la interpretación, la argumentación y la toma de decisiones estratégicas en la resolución, especialmente en lo relacionado con la selección y comprensión de distintos métodos para abordar las EDOLPO.

5.6.3. Tercera Situación de la Entrevista

La tercera situación tuvo como propósito analizar la capacidad de los estudiantes para reconocer, interpretar y aplicar modelos diferenciales en un contexto distinto, específicamente el modelo de crecimiento poblacional de Malthus. A diferencia de la situación anterior, en este caso no es necesario desarrollar todo el procedimiento de resolución (aunque se espera que ocurra), sino identificar la función que modela el fenómeno, lo que implicaba reconocer la estructura del modelo e identificar la estructura exponencial de su solución a partir de su interpretación conceptual. En este sentido, se esperaba que los estudiantes establecieran la relación proporcional entre la tasa de cambio y la población, asociaran esta condición con una ecuación diferencial del tipo $\frac{dP}{dt} = kP$ y reconocieran su solución general.

Figura 93.

Respuestas tercera situación entrevistado A


3. Una población inicial de 1000 individuos crece a una tasa proporcional constante del 5% anual, bajo un modelo de crecimiento continuo. ¿Cuál es la función que modela la población $P(t)$?

a. $P(t) = 1000 + 0.05t$
b. $P(t) = 1000e^{0.05t}$
c. $P(t) = 0.05e^{1000t}$
d. $P(t) = 1000e^{-0.05t}$
e. $P(t) = 1000(1.05)^t$

1000

$\frac{dP}{dt} = kP$

$\frac{dP}{P} = kt + C$

$\ln|P| = kt + C$

0.05

$P = ce^{kt}$

1000

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado A.

En el caso del estudiante A se evidenció un desempeño bueno (aunque con una escritura de la situación con muchos vacíos procedimentales), caracterizado por un reconocimiento inmediato de la situación, aunque razona descartando las opciones de respuesta que no se acercan, logra identificar el modelo de Malthus:

P: ¿Qué estamos buscando en esta situación la ecuación diferencial o la solución?

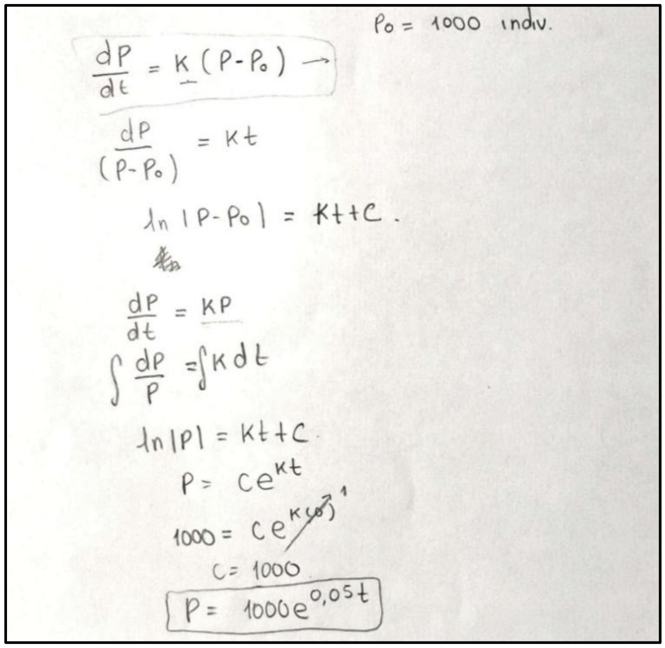
A: “La solución…esto me recuerda al modelo de Malthus…”

A: “Siendo así la solución sería… $1000e^{0.05t}$…, porque se asocia la población inicial, la tase de crecimiento la cual es positiva”

El estudiante logra identificar correctamente la estructura del modelo sin necesidad de desarrollar el procedimiento completo (aunque en la *Figura 93*, se ve la solución algebraica), lo que indica una adecuada integración entre el contexto y su representación matemática. Este tipo de respuesta evidencia un nivel de comprensión consolidado, en el que el estudiante no solo reconoce el modelo, sino que lo asocia de manera directa con su solución característica.

Figura 94.

Respuestas tercera situación entrevistado B



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado B.

En el caso de la entrevistada B se presenta inicialmente una confusión entre modelos, al asociar la situación con algo similar a lo trabajado en la situación anterior con el modelo de Newton:

P: ¿Qué modelo debemos utilizar acá?

Analiza la pregunta, vuelve a leer la situación

B: “El de Malthus…Me confundí con el modelo logístico…creo”

P: ¿Qué pasa en el modelo de Malthus?

B: “Crece a una tasa proporcional…”

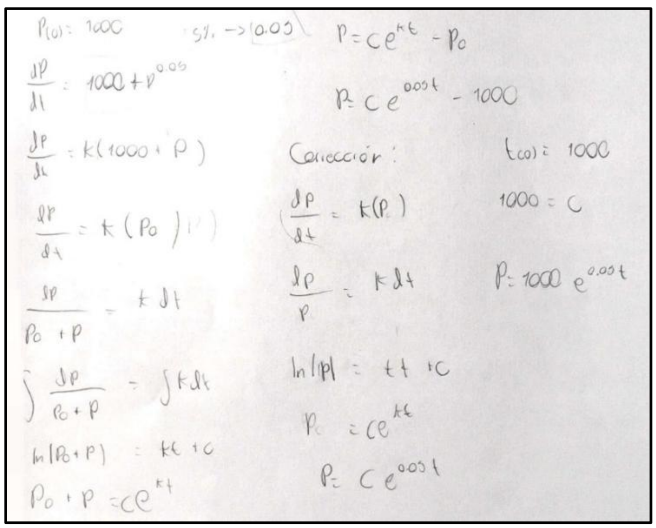
A partir de la mediación, la estudiante logra diferenciar ambos modelos y reconstruir correctamente la relación. Cabe señalar que ella, fue de los cinco entrevistados la única que antes de empezar a descartar respuesta miró como plantear y resolver una ecuación diferencial para dar respuesta sustentada en procedimientos a la situación.

Posteriormente, desarrolla de manera adecuada el proceso y selecciona la respuesta correcta. Este caso revela un buen nivel de comprensión, en el que, aunque se presentan confusiones iniciales, la estudiante es capaz de corregir su razonamiento y establecer las relaciones adecuadas. Su desempeño refleja una comprensión buena con capacidad de ajuste y validación.

En los casos de los estudiantes M y S se demuestran dificultades en la construcción del modelo, aunque con comportamientos distintos.

Figura 95.

Respuestas tercera situación entrevistado M



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado M.

En el caso de M, el estudiante no recuerda inicialmente la forma del modelo, pero logra reconstruirlo a partir de la mediación:

P: ¿Qué modelo lineal nos sirve para modelar la situación?

M: No recuerdo bien la verdad…

P: ¿Qué relaciones podemos establecer con los datos?

M: “Número de individuos, tiempo y tasa…”

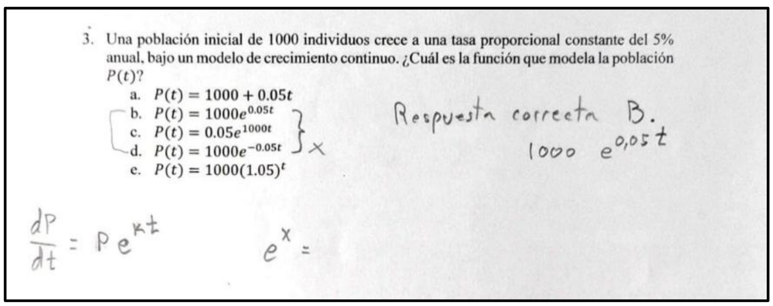
M: “…dp/p…”

M: “mmm…Estoy mezclando cosas…”

A pesar de presentar errores iniciales (como la inclusión inadecuada de la población inicial dentro de la expresión), el estudiante logra reorganizar su razonamiento, plantear correctamente la ecuación diferencial y llegar a la solución correcta $P(t) = 1000e^{kt}$. Este comportamiento evidencia un proceso de reconstrucción conceptual guiado, en el que los conocimientos están presentes, pero no completamente consolidados.

Figura 96.

Respuestas tercera situación entrevistado S



3. Una población inicial de 1000 individuos crece a una tasa proporcional constante del 5% anual, bajo un modelo de crecimiento continuo. ¿Cuál es la función que modela la población $P(t)$?
   a. $P(t) = 1000 + 0.05t$
   b. $P(t) = 1000e^{0.05t}$
   c. $P(t) = 0.05e^{1000t}$
   d. $P(t) = 1000e^{-0.05t}$
   e. $P(t) = 1000(1.05)^t$

Respuesta correcta B.
$1000 \; e^{0,05t}$

$\frac{dP}{dt} = Pe^{kt}$ $\quad e^x =$

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado S.

Por su parte, el estudiante S presenta dificultades más profundas, particularmente en la distinción entre la ecuación diferencial y su solución:

P: ¿La expresión que escribió es la ecuación diferencial o la solución?

S: “La ecuación diferencial…”

P: ¿Eso es lo que debe resolver?

S: “Sí…”

Posteriormente, el estudiante intenta resolver la ecuación diferencial que planteo y reconoce su error:

S: “No… esta es la solución…porque acá tengo la solución de tipo exponencial”

Aunque logra identificar la respuesta correcta (opción B), su proceso advierte inconsistencias conceptuales significativas, especialmente en la comprensión de la estructura del modelo y en la identificación conceptual entre objeto matemático y resultado. Este tipo de desempeño refleja un nivel bajo, en el que el reconocimiento se da más por descarte o intuición que por comprensión estructurada.

En el caso de la estudiante V, no se muestra desarrollo escrito; sin embargo, a partir del diálogo se identifican elementos destacados:

P: Lee el problema de esta situación ¿Recuerda la ecuación diferencial que sirve para modelar este fenómeno?

V: “No…”

V: “Solo sé que tiene una solución exponencial…”

V: “…yo pondría opción B porque parte de 1000 y tiene Euler con tasa de crecimiento del 5%…pero no sé cómo justificarlo de otra manera”

Este caso destaca un razonamiento basado en reconocimiento de patrones más que en comprensión formal del modelo. La estudiante logra identificar la respuesta correcta a partir de elementos clave del enunciado, pero sin establecer explícitamente la relación con la ecuación diferencial subyacente. Esto refleja un nivel bajo, en el que existe intuición contextual, pero ausencia de formalización conceptual.

En conjunto, los resultados de esta situación permiten observar mayores dificultades en comparación con las anteriores, particularmente en la transferencia del conocimiento a nuevos contextos. Aunque algunos estudiantes logran reconocer el modelo de manera directa, otros presentan confusiones entre modelos, dificultades en la construcción de la ecuación diferencial o en la distinción entre modelo y solución. Estos hallazgos se alinean con el análisis a priori, en el que se anticipaban dificultades en la identificación del modelo y en la interpretación conceptual.

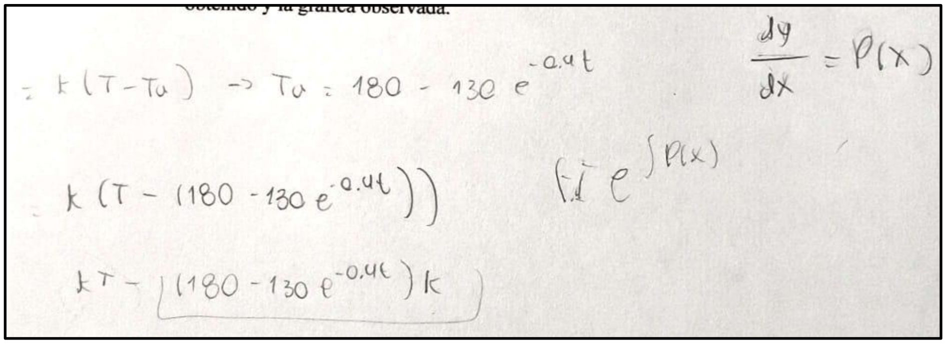
Adicionalmente, se refuerza una tendencia observada en las situaciones anteriores: los estudiantes privilegian enfoques operativos o de reconocimiento inmediato (como la identificación de formas exponenciales), en lugar de una comprensión estructural profunda del modelo. En este sentido, aunque se evidencian avances en la resolución y en la identificación de patrones, persisten retos importantes en la formalización, la argumentación y la transferencia del conocimiento, aspectos fundamentales en el desarrollo de competencias asociadas a la modelación matemática.

5.6.4. Cuarta Situación de la Entrevista

La cuarta situación tuvo como propósito analizar la capacidad de los estudiantes para interpretar y resolver un modelo de enfriamiento con temperatura ambiente variable, lo que implicaba no solo formular correctamente la ecuación diferencial, sino también seleccionar y aplicar el método de solución adecuado (factor integrante), así como interpretar los resultados en contexto. A diferencia de la situación anterior, este problema exigía un mayor nivel de formalización matemática y de integración entre el modelo y su comportamiento. De acuerdo con el análisis a priori, se esperaba que los estudiantes lograran plantear el modelo, resolver la ecuación diferencial lineal y dar sentido a los resultados obtenidos. No obstante, se anticipaban dificultades en la elección del método de solución y en la interpretación final.

Figura 97.

Respuestas cuarta situación entrevistado M



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado M.

En el caso del estudiante M, se muestra un reconocimiento adecuado del modelo, logrando plantear correctamente la ecuación diferencial. Sin embargo, al momento de resolverla, presenta dificultades asociadas al método:

P: ¿Qué métodos vimos para resolver las EDOLPO?

M: "Variables separables…"

P: ¿Algún otro?

M: "El de $p(x)$… factor integrante…"

M: "$p(x)$ es lo que acompaña la variable…"

M: "…pero no estoy seguro…"

El estudiante reconoce parcialmente la existencia del método del factor integrante, pero no logra reconstruirlo ni aplicarlo. Su dificultad radica en no identificar la estructura de la ecuación lineal ni el papel del término $p(x)$, lo que le impide avanzar en la resolución. Este caso presenta una comprensión incompleta del método, limitada al reconocimiento superficial de sus elementos, sin una apropiación operativa que permita su uso en contextos no rutinarios.

De manera similar, el estudiante A logra formular el modelo, pero no consigue avanzar en su solución:

A: "…no recuerdo bien cómo aplicar el factor integrante…"

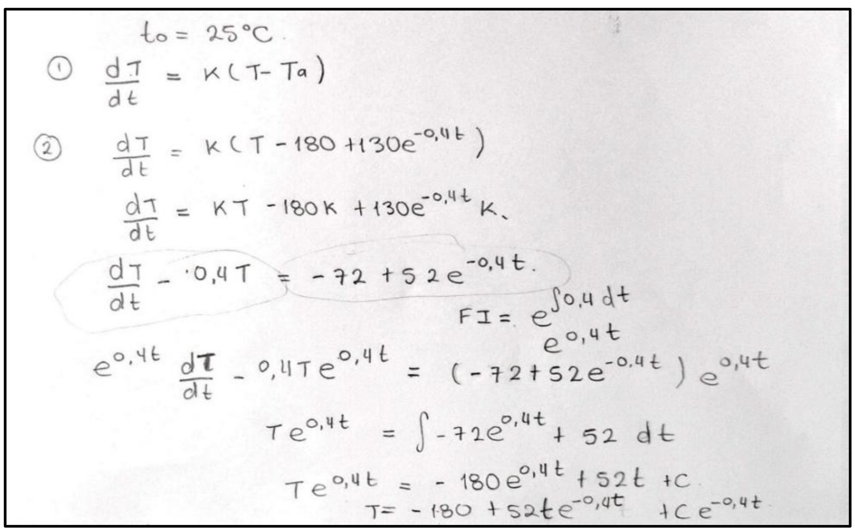
A: "…creo que lo estoy haciendo mal…"

A: "No la verdad no sé qué es lo qué debo hacer…"

En este caso, aunque existe una identificación inicial del tipo de ecuación, la falta de dominio del procedimiento genera un bloqueo en el proceso de resolución. Esto refleja una dependencia de esquemas previamente trabajados (como variables separables), que no resultan aplicables en este contexto.

Figura 98.

Respuestas cuarta situación entrevistado B



$t_0 = 25°C$

(1) $\frac{dT}{dt} = K(T - T_a)$

(2) $\frac{dT}{dt} = K(T - 180 + 130e^{-0,4t})$

$\frac{dT}{dt} = KT - 180K + 130e^{-0,4t}K.$

$\frac{dT}{dt} - 0,4T = -72 + 52e^{-0,4t}.$

$FI = e^{\int 0,4\,dt}$

$e^{0,4t}$

$e^{0,4t}\frac{dT}{dt} - 0,4Te^{0,4t} = (-72 + 52e^{-0,4t})\,e^{0,4t}$

$Te^{0,4t} = \int -72e^{0,4t} + 52\,dt$

$Te^{0,4t} = -180e^{0,4t} + 52t + C$

$T = -180 + 52te^{-0,4t} + Ce^{-0,4t}$

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado B.

En contraste, la estudiante B es la única que logra resolver completamente la situación mediante el método del factor integrante. Durante el proceso, presenta una duda puntual:

B: "Cuando obtenemos el factor integrante, ¿se multiplica solo una parte o toda la ecuación?"

P: Revisemos para qué se saca el factor integrante

B: “Esto aparece para lo del producto de una derivada… y para integrar al otro lado…”

B: “Entonces… sí es por toda la expresión.”

La estudiante logra reconocer el sentido del método y aplicarlo correctamente, mostrando una comprensión estructural del procedimiento. Además, en el ítem de interpretación final, muestra un adecuado análisis del comportamiento del modelo:

B: “No es posible que el pan supere los 180 grados…”

B: “Porque esa es la temperatura límite del ambiente…No importa que el ambiente sea variable.”

Este tipo de respuesta permite identificar un alto nivel de comprensión, en el que no solo se resuelve el modelo, sino que se interpreta adecuadamente su comportamiento en el contexto físico.

Por su parte, los estudiantes V y S no logran desarrollar la situación, de lo poco que se logra indagar con ellos se puede conocer:

En el caso de S

P: Si la temperatura ambiente es variable…

S: “No se puede resolver por variables separables…”

S: “…tendría que usar factor integrante… pero no recuerdo qué hacer.”

En el caso de V

P: ¿Cómo resolvería?

V: “No me acuerdo… se me confunden las fórmulas…”

V: “Me quedaría bloqueada… prefiero no intentarlo.”

En ambos casos se presenta un reconocimiento parcial del tipo de ecuación, pero una ausencia total de herramientas para abordarla. La falta de dominio del método del factor integrante genera un bloqueo completo, lo que impide cualquier avance en la resolución. Este comportamiento refleja una comprensión frágil, dependiente de procedimientos rutinarios, sin capacidad de adaptación a nuevas condiciones del problema.

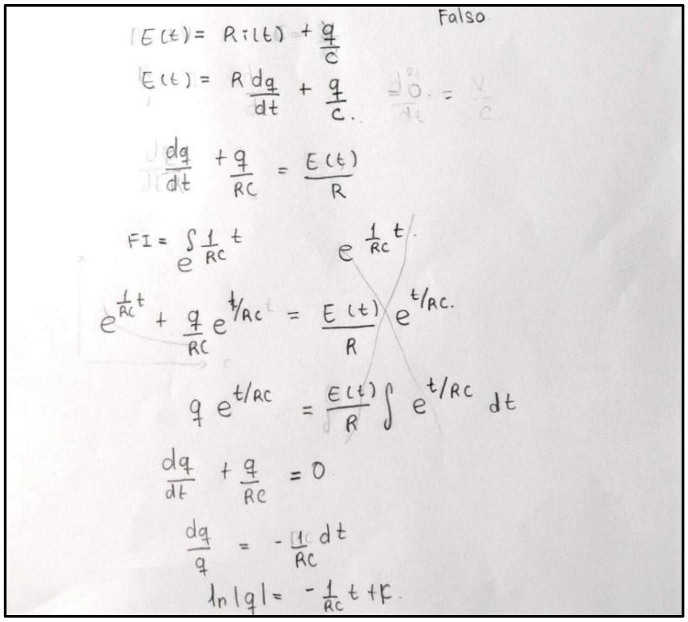
En conjunto, los resultados de esta situación evidencian dificultades significativas en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales cuando el contexto exige el uso del factor integrante. Aunque varios estudiantes logran formular correctamente el modelo, la mayoría no consigue avanzar en su solución, lo que indica una desconexión entre la identificación del tipo de ecuación y el dominio de los métodos asociados. Asimismo, se confirma una tendencia observada en situaciones anteriores: los estudiantes privilegian el uso de variables separables como estrategia principal, evitando o el factor integrante. Esta preferencia limita su capacidad para abordar problemas más complejos, como aquellos con condiciones variables.

5.6.5. Quinta Situación de la Entrevista

La quinta situación tuvo como propósito analizar la capacidad de los estudiantes para validar una solución de una ecuación diferencial en el contexto de circuitos eléctricos RC, estableciendo relaciones entre la expresión matemática dada y el fenómeno físico que modela. En particular, se esperaba que los estudiantes interpretaran la solución propuesta, identificaran las condiciones del sistema (presencia o ausencia de fuente externa) y justificaran si dicha expresión correspondía o no al comportamiento descrito. De acuerdo con el análisis a priori, se anticipaban dificultades en la argumentación, en la interpretación del contexto físico y en la conexión entre el modelo matemático y la situación planteada.

Figura 99.

Respuestas quinta situación entrevistado B



Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado B.

En el caso de la estudiante B, inicialmente manifiesta inseguridad frente al contexto, dado que de los talleres realizados el de circuitos fue el que más se le complicó. En su primer análisis logra resaltar:

B: “No hay fuente externa → voltaje = 0”

B: “Entonces se simplifica…”

B: “Diría que es falso… pero no sé cómo justificarlo.”

La estudiante reconoce un elemento clave del modelo (la ausencia de fuente externa), lo que le permite anticipar una posible respuesta. Sin embargo, presenta dificultades para argumentar formalmente su elección. Ante la mediación del docente:

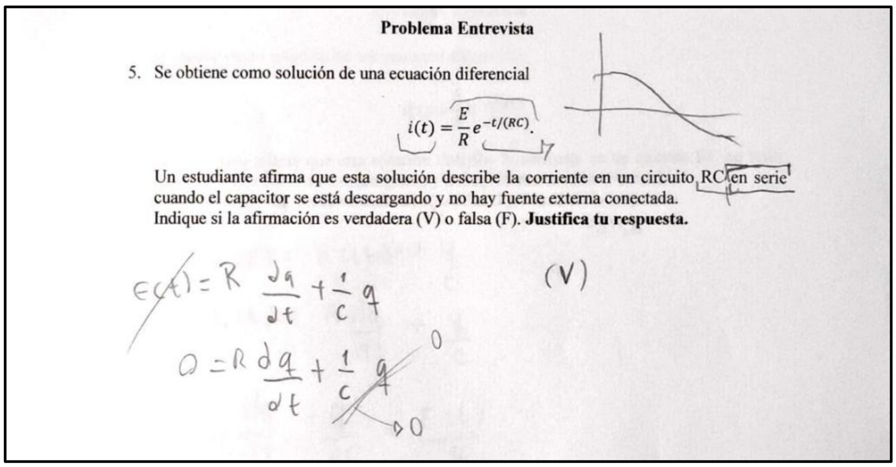
P: Si te diera la fórmula del modelo RC, ¿podrías justificarlo?

B: “Pues no sé… pero podría intentarlo.”

A partir de esto, la estudiante logra desarrollar el modelo y confirmar su respuesta, concluyendo correctamente que la afirmación es falsa. Este caso, se muestra un proceso en el que la estudiante no depende exclusivamente de la memoria, sino que es capaz de apoyarse en el análisis estructural del modelo para validar su respuesta. No obstante, persisten dificultades en la argumentación espontánea, lo que indica que la comprensión, aunque adecuada, aún requiere fortalecimiento en su comunicación matemática.

Figura 100.

Respuestas quinta situación entrevistado A



Problema Entrevista

5. Se obtiene como solución de una ecuación diferencial

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)}.$$

Un estudiante afirma que esta solución describe la corriente en un circuito RC en serie cuando el capacitor se está descargando y no hay fuente externa conectada. Indique si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). **Justifica tu respuesta.**

$$\cancel{E(t)} = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

(V)

$$0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

Nota. Tomado de las producciones entregadas por el entrevistado A.

Por su parte, el estudiante A aborda la situación desde una interpretación más intuitiva, pero desde el primer acercamiento presenta inseguridad en lo que realizará:

A: "Yo soy muy malo para circuitos… la verdad no los entiendo muy bien…"

A: "…como hay un exponencial negativo, eso representa decaimiento… entonces diría que es verdadero…"

El estudiante asocia correctamente el comportamiento exponencial con un proceso de decaimiento, lo cual es una interpretación válida desde el punto de vista matemático. Sin embargo, su análisis no incorpora las condiciones físicas del sistema (ausencia de fuente externa), lo que lo lleva a una conclusión incorrecta.

Ante la posibilidad de utilizar el modelo:

P: Si te proporciono la ecuación del circuito RC, ¿cambiarías tu respuesta?

A: “No la verdad… no sabría qué hacer con ella…”

Este comportamiento detecta una desconexión entre la interpretación matemática y el contexto físico, así como una baja apropiación del modelo de circuitos eléctricos. El estudiante basa su respuesta en características superficiales de la expresión (decaimiento exponencial), sin validar su coherencia con la situación planteada.

En cuanto a los estudiantes M, V y S, no se obtuvo evidencia directa de resolución. En los casos de M y V, ambos manifestaron explícitamente no contar con los conocimientos necesarios para abordar situaciones relacionadas con circuitos eléctricos, señalando dificultades previas con este tipo de problemas. Por su parte, el estudiante S no alcanzó a desarrollar esta situación por limitaciones de tiempo durante la entrevista.

En general, los resultados de esta situación muestran dificultades importantes en la validación de soluciones en contextos físicos, particularmente en la vinculación entre el modelo matemático y las condiciones del sistema. Aunque algunos estudiantes logran identificar elementos clave del problema, como en el caso de B, persisten debilidades en la argumentación y en la justificación formal de sus respuestas. Asimismo, se observa una tendencia a realizar interpretaciones basadas en características superficiales de las expresiones matemáticas, como el comportamiento exponencial, sin considerar su coherencia con el fenómeno modelado, como ocurre en el caso del estudiante A.

Estos hallazgos son coherentes con lo planteado en el análisis a priori, donde se anticipaban dificultades en la interpretación del contexto y en la construcción de argumentos sólidos. En este sentido, la situación pone de manifiesto la necesidad de fortalecer no solo la resolución de modelos, sino también su análisis crítico e interpretación en contextos aplicados, como parte fundamental del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

5.6.6. Opinión de los entrevistados sobre la Implementación Didáctica

En cuanto a la percepción de los estudiantes sobre la unidad didáctica y los talleres implementados, se evidencian posturas diversas pero complementarias. Por ejemplo, el estudiante A resalta de manera positiva la experiencia, señalando que los talleres fueron *mucho más dinámicos* y que le permitieron *enfrentarse a problemas reales* y *entender directamente qué es lo que está calculando*, valorando especialmente el carácter aplicado de las actividades. En una línea similar, el estudiante M afirma que, aunque los talleres eran *larguitos, sí le sirvieron*, destacando que los modelos fueron en los que mejor se desempeñó en el parcial. Asimismo, la estudiante B menciona que *sí le sirvieron mucho* y reconoce que las actividades estaban en un nivel adecuado de dificultad, aunque identifica que algunos, como el del tamal, resultaron más complejos al inicio por la falta de familiaridad con el planteamiento.

Sin embargo, también se presentaron posturas críticas que permiten identificar aspectos de mejora. La estudiante V señala que, aunque la metodología le pareció *chévere*, pero percibió que *no se explicaron los temas a profundidad*, debido a una dinámica centrada en *taller, socialización en clase y continuación de tema*, lo que generaba presión por el tiempo y dificultaba la comprensión, especialmente en los temas de aplicación. De manera similar, el estudiante S cuestiona el trabajo grupal, indicando que al dividirse las tareas *uno se especializa en un taller y no en todos* (aunque en la explicación de los talleres se detallaba, que no debían hacer esto, ya que ese no era la idea), lo que limita el aprendizaje integral, y sugiere que los talleres deberían ser individuales. Además, este mismo estudiante propone fortalecer las socializaciones, mencionando que sería útil que todos los estudiantes expusieran, por ejemplo, mediante videos, para garantizar una participación más equitativa.

En conjunto, estas opiniones muestran que, si bien los talleres fueron valorados positivamente por su enfoque práctico y su aporte al aprendizaje, también corroboran la necesidad de ajustar aspectos como el manejo del tiempo, la profundidad conceptual y la organización del trabajo, con el fin de potenciar aún más el impacto de la propuesta didáctica.

A modo de cierre, el análisis de las entrevistas presento distintos niveles de desarrollo en las competencias asociadas a la modelación, resolución, interpretación y argumentación en torno a las EDOLPO. En general, los estudiantes logran reconocer estructuras y aplicar procedimientos en contextos conocidos; no obstante, cuando las situaciones demandan una mayor vinculación conceptual, cambios en las condiciones o interpretación en contexto, se encuentran dificultades relacionadas con la comprensión estructural de los modelos, la selección adecuada de métodos de solución y la justificación de resultados.

Asimismo, se identifican limitaciones en la conexión entre la expresión matemática y el fenómeno que se modela, especialmente en contextos aplicados, donde la argumentación y validación de resultados tiende a ser insuficiente. En este sentido, también resulta interesante notar que los estudiantes que demuestran mayores dificultades corresponden, en su mayoría, a aquellos que se encuentran repitiendo la asignatura, lo que sugiere la presencia de vacíos acumulados que inciden en su desempeño y que requieren ser atendidos mediante estrategias pedagógicas especializadas.

6. Conclusiones

El desarrollo de esta práctica docente pudo establecer, a partir de la aplicación de la prueba diagnóstica, que los estudiantes ingresan al curso de Ecuaciones Diferenciales con bases conceptuales limitadas, especialmente en lo relacionado con los procesos de razonamiento, modelación e interpretación matemática, aunque presentan fortalezas en la ejecución de procedimientos algorítmicos. Esta situación inicial permite comprender que el abordaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden representa un reto significativo, dado que la asignatura exige no solo operar, sino también interpretar, modelar y argumentar matemáticamente. En este sentido, se confirma la pertinencia de implementar propuestas didácticas que vayan más allá del enfoque tradicional centrado en la mecanización de procedimientos.

En coherencia con lo anterior, la implementación de la unidad didáctica fundamentada en el ABP, el uso de herramientas TIC y el modelo pedagógico UIS permitió generar un ambiente de aprendizaje más dinámico, flexible, participativo y contextualizado. El trabajo con situaciones reales, como el enfriamiento de una bebida o el análisis de un ahorro en el banco, favoreció la motivación de los estudiantes y contribuyó a que reconocieran las ecuaciones diferenciales como herramientas útiles para interpretar fenómenos del entorno. Asimismo, el uso de GeoGebra, Moodle UIS, simuladores web y otros recursos digitales facilitó la visualización, la modelación y la exploración de los fenómenos, consolidándose como un elemento clave en el fortalecimiento de la comprensión conceptual.

En esta misma línea, el desarrollo de la unidad didáctica evidenció avances diferenciados en los procesos generales de la actividad matemática. En particular, se observaron progresos en la resolución de problemas, la modelación de fenómenos y el establecimiento de relaciones y conexiones entre distintas representaciones, mientras que la ejercitación de procedimientos continuó siendo el aspecto más consolidado. No obstante, persistieron dificultades significativas en el razonamiento y la comunicación matemática, expuestas en la limitada capacidad para expresar ideas tanto de forma verbal como escrita, justificar procedimientos y argumentar soluciones. Resulta relevante que, desde la percepción de los estudiantes, estas habilidades fueron las que más se fortalecieron; sin embargo, en los resultados de los talleres se encontró que el proceso que más se potenció fue la modelación de fenómenos. En ambos casos, se presenta un desarrollo progresivo de las competencias matemáticas, aunque aún no completamente consolidadas.

Por otra parte, se encontraron dificultades relacionadas con la autonomía de los estudiantes, particularmente en la baja disposición hacia la lectura del material de apoyo y el seguimiento de instrucciones. Esto se reflejó en la tendencia a omitir fases importantes de la ruta pedagógica y en la priorización de estrategias algorítmicas sobre procesos de análisis más profundos. Asimismo, actividades de mayor exigencia cognitiva, como el taller 3, fueron percibidas como especialmente complejas, lo que pone de manifiesto la necesidad de ajustar la secuencia y el nivel de dificultad de las actividades propuestas.

Adicionalmente, se identificaron aspectos susceptibles de mejora en la implementación, especialmente en la gestión del tiempo y las dinámicas de socialización. En efecto, varios estudiantes manifestaron que el tiempo destinado para el desarrollo de los talleres fue insuficiente, mientras que algunos espacios de socialización resultaron poco dinámicos, lo que limitó su potencial formativo. Estos elementos exponen la importancia de seguir ajustando las estrategias didácticas en función de las condiciones reales del aula.

En relación con la resolución de problemas, se observó que los estudiantes tienden a recurrir a métodos conocidos, incluso en situaciones que requerían estrategias más estructuradas. Aunque esto muestra cierta flexibilidad en el pensamiento matemático, también generó un uso limitado de métodos como el factor integrante, lo que resalta la necesidad de fortalecer la comprensión de los distintos procedimientos desde su pertinencia y sentido, más que desde su facilidad.

A pesar de las dificultades, la implementación de la unidad didáctica permitió evidenciar aportes significativos en el proceso de aprendizaje. El enfoque basado en el ABP, integrado con el uso de TIC y principios propios del constructivismo, favoreció la participación activa, el trabajo colaborativo, la metacognición y la conexión entre la teoría y situaciones reales. En este sentido, se puede afirmar que la propuesta contribuyó al fortalecimiento de la comprensión conceptual de las EDOLPO, en coherencia con los objetivos planteados. En consecuencia, los resultados permiten sostener que la hipótesis pedagógica se valida de forma parcial, ya que las estrategias implementadas favorecieron procesos de comprensión, motivación y participación; sin embargo, persisten aspectos de mejora en los procesos cognitivos, actitudinales y didácticos que deben ser considerados en futuras implementaciones.

No obstante, su efectividad se encuentra relacionada con factores del contexto educativo y las características de los estudiantes, tales como el nivel de sus bases conceptuales, su disposición hacia la lectura y el seguimiento de instrucciones, así como su capacidad para asumir un rol activo en el aprendizaje, además, de otros factores que inciden directa o indirectamente en la praxis docente en cada periodo académico y los cuales influyen en el alcance de los resultados obtenidos.

Finalmente, desde una perspectiva reflexiva, el desarrollo de esta práctica docente representó un proceso de aprendizaje significativo para el autor, al permitir no solo la aplicación de conocimientos teóricos formales en un contexto real, sino también la construcción de una mirada crítica sobre la enseñanza de las matemáticas en educación superior. A lo largo de la experiencia, fue posible reconocer la complejidad del aula como un espacio dinámico en el que intervienen múltiples factores que influyen directamente en los procesos de aprendizaje.

En este sentido, la interacción constante con los estudiantes permitió comprender sus formas de pensar, sus dificultades y sus estrategias, mientras que el trabajo conjunto con la docente titular y el otro estudiante en práctica favoreció el intercambio de ideas, la retroalimentación continua y la toma de decisiones pedagógicas más conscientes.

Asimismo, el diseño, implementación y análisis de la unidad didáctica implicó un ejercicio permanente de reflexión propia, en el que se pusieron en juego elementos como la planificación, la gestión del tiempo, la selección de recursos, la adaptación de actividades y la evaluación del aprendizaje. En conjunto, esta experiencia contribuyó al afianzamiento de la praxis docente, no solo en términos técnicos y metodológicos, sino también en el fortalecimiento de una postura pedagógica más crítica. De esta manera, se configura una experiencia formativa integral que aporta tanto al desarrollo profesional como a la comprensión profunda de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDOLPO, al establecerse un punto de partida para futuras prácticas educativas e investigaciones en el campo de la educación matemática.

7. Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos en la implementación de la unidad didáctica, se plantean algunas recomendaciones orientadas a fortalecer futuras experiencias de enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden y a profundizar en los procesos de investigación en educación matemática.

En primer lugar, se recomienda realizar un análisis más detallado de cada uno de los talleres diseñados en el marco de esta propuesta, con el fin de evaluar su estructura, nivel de complejidad y secuencia didáctica. Esto permitiría no solo identificar con mayor precisión las dificultades presentadas por los estudiantes, sino también ajustar y mejorar cada actividad de manera individual, consolidando los talleres como insumos para futuras prácticas educativas más específicas en torno a la enseñanza de las EDOLPO.

Asimismo, se sugiere implementar este tipo de propuestas en cursos iniciales, particularmente con estudiantes de primer semestre, con el propósito de dar seguimiento al desarrollo de sus procesos de aprendizaje a lo largo del ciclo básico de cálculo. La integración de metodologías activas y herramientas TIC desde etapas tempranas podría permitir analizar su impacto en la formación matemática de los estudiantes, identificando posibles mejoras en la comprensión conceptual, el razonamiento y la autonomía a lo largo de su trayectoria académica.

Por otra parte, se recomienda fortalecer estrategias que promuevan la lectura comprensiva y el seguimiento de instrucciones, por parte de los estudiantes, ya que estos aspectos influyen directamente en el desarrollo de la formación, no solo en educación matemática. En este sentido, sería pertinente diseñar mecanismos que incentiven la revisión previa de los materiales de apoyo y la apropiación de las orientaciones propuestas, favoreciendo así una participación más activa y consciente en el proceso de aprendizaje.

De igual forma, se sugiere revisar la extensión y el nivel de exigencia de los talleres, así como la gestión del tiempo dentro del aula, con el fin de lograr un equilibrio entre la profundidad conceptual de las actividades y las condiciones reales de implementación. En esta misma línea, resulta necesario replantear las dinámicas de socialización, incorporando estrategias más participativas y dinámicas que potencien estos espacios como escenarios de construcción colectiva del conocimiento. Adicionalmente, se recomienda continuar fortaleciendo los procesos de razonamiento y comunicación matemática dado que estos se identificaron como aspectos susceptibles de mejora.

Finalmente, se sugiere seguir explorando e integrando herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, no solo como apoyo visual, sino como mediadoras en los procesos de modelación, exploración y análisis de fenómenos. En esta misma línea, la formación continua del docente en el uso pedagógico de las TIC se convierte en un elemento clave para el diseño de experiencias de aprendizaje innovadoras, pertinentes y acordes con las demandas actuales de la educación superior.

Referencias Bibliográficas

Aguilar, N., Cedillo, M., & Valenzuela, J. (2015). Logro de aprendizajes significativos a través de la competencia transversal "trabajo colaborativo" en educación superior. *Voces y Silencios. Revista Latinoamericana De Educación,* *6*(1), 22-32. https://doi.org/10.18175/vys6.1.2015.03

Arcila, E., Uribe, V., & Domínguez, M. (2024). Mathematical modeling in the teaching of differential equations. *Journal of Hunan University Natural Sciences*, 51(*6*). DOI: https://doi.org/10.55463/issn.1674-2974.51.6.5

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas

Benítez-Vargas, B. (2023). El Constructivismo. *Con-Ciencia Boletín Científico De La Escuela Preparatoria No. 3*, *10*(19), 65–66. Recuperado de https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/article/view/10453

Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales.* International Thomson Editores

Bolaño, O. (2020). El constructivismo: Modelo pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. *Revista EDUCARE - UPEL-IPB - Segunda Nueva Etapa 2.0*, *24*(3), 488–502. https://doi.org/10.46498/reduipb.v24i3.1413

Bonilla, S., (2021) Utilización de software libre como estrategia didáctica para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en estudiantes del tercer semestre, Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. [Tesis de Maestría, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo] https://dspace.espoch.edu.ec:8080/server/api/core/bitstreams/533d2849-b191-44fb-870b-862fb57967d8/content

Cabrera Ortiz, A, Peñaherrera Chang, C, Brito Mancero, L & Chávez Oña, E. (2025). La integración de la modelación matemática en la educación superior como medio para fomentar la comprensión de problemas reales desde una perspectiva interdisciplinaria. *Revista Social Fronteriza 2025; 5*(5): 909. https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(5)909

Chacón, D., Rabelo, A., & Lago, I. (2020). Aprendizaje basado en problemas para la enseñanza de la matemática en un entorno virtual de aprendizaje. *Serie científica de la universidad de las ciencias informáticas*, *13*(12), 191-201. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8590438

Chérrez, R., Párraga, C., & Escalona, M. (2021). El uso de las TIC en la enseñanza de la matemática superior, el caso de los dispositivos móviles. *Revista tecnología educativa*, *6*(2).

Consejo Académico de la Universidad Industrial de Santander. (2021). Modelo Pedagógico UIS21 (Acuerdo 233 de agosto 10 de 2021). Universidad Industrial de Santander. https://convocatorias.uis.edu.co/wp-content/uploads/2023/04/Acuerdo-233-de-agosto-10-de2021-Modelo-Pedagogico-UIS21.pdf

Del Rivero-Jiménez, S., & Ruiz-Moreno, L. (2020). Evaluación en un curso de ecuaciones diferenciales con el apoyo de material en línea de matemáticas en contexto. *Científica*, 24(*1*), 11-22. DOI: https://doi.org/10.46842/ipn.cien.v24n1a02

Feliciano, A., & Cuevas, R. (2021). Uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *12*(23) https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1023

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitofing: A new area of cognitive-developmental inquilY. *Amelican Psychologist, 34*(10), 906-911.

Fonseca S., (2023). Experiencias Docentes Metodología para la enseñanza de la modelación matemática de problemas de la profesión, vía ecuaciones diferenciales. *Pensamiento Matemático, 13*(1), 25-37. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8893996

González, J., & Lara, J. (2023). *Ecuaciones diferenciales Aplicaciones y modelado de Biomatemática con Matlab y Simulink.* Editorial Universitaria Abya-Yala. https://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/26559

Guerra Cáceres M., (2024). Aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediado con GeoGebra. *Revista Guatemalteca De Educación Superior, 7*(1), 96–112. https://doi.org/10.46954/revistages.v7i1.128

Lascano, E., Alay A. &, Rivadeneira F. (2024). Uso de GeoGebra como recurso didáctico para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. *Revista MINERVA*, *2*(2), 29-37. https://doi.org/10.47460/minerva.v5i14.161

León, K., Santos, A., & Alonzo, L (2023). El trabajo colaborativo en la educación. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *7*(29), 1423-1437. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v7i29.602

Luo, B. (2024). Differential equations for a changing world: How to engage students in learning and applying differential equations. *CODEE Journal*, 17 (*4*). DOI: https://doi.org/10.5642/codee.OGOO3122

Mantilla C., Bolaños P., Márquez F., y Toscano F., (2025) *Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y sus Aplicaciones*. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) http://cimogsys.espoch.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2025-05-08-212234-LIBRO%20_ECUACIONES%20DIFERENCIALES.pdf

Medina, M., Hurtado, D., Muñoz, J., Ochoa D., & Izundegui, G. (2023). *Método mixto de investigación: Cuantitativo y cualitativo*. Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú. https://doi.org/10.35622/inudi.b.105

Mejía, A., Brito, L., Arequipa, E., y Mora, A., (2025). Análisis de Ecuaciones Diferenciales como Herramienta Fundamental para Entender y Modelar Sistemas Dinámicos en la Educación 4960. https://doi.org/10.59282/reincisol.V4(7)4940-4960

Miranda Núñez, Y. (2020). Praxis educativa constructivista como generadora de Aprendizaje Significativo en el área de Matemática. *Cienciamatria, 6*(1), 141-163. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7390787

Morales-Rovalino, V., Lara-Sinaluisa, J., & Martínez-Nogales, J. (2022) *Revista Científica: Dominio de la ciencia 8*(4), 542-559 https://doi.org/10.23857/dc.v8i3

Nagle, R., Saff, E., & Snider, A. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Pearson Education. (4ª ed., Vol. 1). https://cutbertblog.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/05/4th-r.-kent-nagle-ecuaciones-diferenciales-y-problemas-con-valores-en-la-frontera-pearson-educaciocc81n-2005.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principios y estándares para la educación matemática* (M. Fernández Reyes, Trad.). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nevárez Jiménez, L; Brito Mancero, L; Santillán Tasigchana, M y Silva Tipantasig, L. (2025) Aplicación del aprendizaje basado en problemas en la educación superior en la enseñanza de matemáticas: una estrategia innovadora para enfrentar los desafíos académicos y fomentar el pensamiento crítico. *Revista Social Fronteriza 2025; 5*(1): e586 https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(1)586

Ortega M. & Romero J., (2023). Estilos de Enseñanza de los Docentes de Ecuaciones Diferenciales. *Revista de Ciencias de la Educación, Docencia, Investigación y Tecnologías de la Información: CEDOTIC*, *8*(1), 185-204. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=10078417

Ortiz, W. (2022). Neutrosophical evaluation of the application of the problem-based learning in the field of differential equations. *Universidad y Sociedad*, 14(*1*), 384-390. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2218-36202022000100384

Otondo, M., & Torres, M. (2020). Habilidades metacognitivas de organización en educación superior. *Revista Cubana de Educación Superior, 39*(2), http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S025743142020000200014&lng=es&tlng=es.

Palomino, J., & Osorio, V. (2023). El aprendizaje basado en problemas para el logro de competencias en educación superior. *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores*. https://doi.org/10.46377/dilemas.v2i10.3484

Pérez, J. (2018). *Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.* Universidad EAN. https://editorial.universidadean.edu.co/media/pdf-ean/ecuaciones-diferenciales-tomo-I.pdf

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas.* Madrid: Siglo XXI.

Pólya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Quiñones, A., & Huiman, H. (2022). Resolución de problemas con el método matemático de Polya: La aventura de aprender. *Revista de Ciencias Sociales (Ve), XXVIII* (Especial 5), 75-86. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8471674

Ramírez J. (2022). *Ecuaciones Diferenciales Libro Interactivo.* Fondo Editorial RED Descartes. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/PDF/Ecuaciones_Diferenciales.pdf

Rincón-Leal O. L., (2016). TIC en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden. *Revista Logos Ciencia & Tecnología, 8*(1), 89-100. https://doi.org/10.22335/rlct.v8i1.347

Rodríguez E., (2022) Principios de la Educación Matemática Realista y el uso de Software en la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales. *REDHECS: Revista electrónica de Humanidades, Educación y Comunicación Social. 30*(21), 93-117 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9301399

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas.* (7ª ed., Vol. 1). Cengage Learning Editores. https://www.fbioyf.unr.edu.ar/evirtual/pluginfile.php/107533/course/section/2765/calculo-james-stewart-7ed.pdf

Useche, A. (2021). Aprendizaje cooperativo, aprendizaje colaborativo y trabajo en equipo. *Pontificia Universidad Javeriana*. https://www.javeriana.edu.co/profesores/wp-content/uploads/2021/04/E6_estudiodecaso

Velastegui, E., Chávez, A., Heredia, C., & Gavilanes, A., (2025). Aplicaciones en Ingeniería y Matemáticas Avanzadas para el Modelado y Comprensión de Sistemas Dinámicos: el Papel Esencial de las Ecuaciones Diferenciales en la Educación Superior. *Reincisol*, *4*(8), pp. 1467-1496. https://doi.org/10.59282/reincisol.V4(8)1467-1496

Vera, L., & Yánez, M. (2023). LA IMPORTANCIA DE LAS TIC EN LA ASIGNATURA https://ojs.cuadernoseducacion.com/ojs/index.php/ced/article/view/569

Vera, R., Merchán, W., Maldonado, K., & Castro, A. (2021). Metodología del aprendizaje basado en problemas aplicada en la enseñanza de las Matemáticas. *Serie científica de la universidad de las ciencias informáticas*, *14*(3), 142-155. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8590453

Vergel, M., Rincón, O., & Ibargüen, E. (2022). *Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*. Editorial Universidad de Nariño. https://sired.udenar.edu.co/7344/1/Ecuaciones%20diferenciales.pdf

Villa Ochoa, J, Sánchez Cardona, J & Parra Zapata, M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. *Ediciones Universidad Nacional de General Sarmiento*. Disponible en: https://bibliotecadigital.udea.edu.co/entities/publication/cb4ef2f7-f4ed-4a33-b604-633a261c4abe

Vygotsky, L. (1978). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Primera edición. Editorial Crítica del grupo Editorial Grijalbo. Barcelona.

Zill, D. & Cullen, M. (2006). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Ecuaciones Diferenciales.* (3ª ed., Vol. 1). McGraw-Hill Interamericana.

Apéndices

Apéndice 1.

Programación general de ecuaciones diferenciales

CLASE	SECCIÓN	TEMAS	EJERCICIOS SUGERIDOS
1		**PRESENTACIÓN GENERAL DEL CURSO**	
2	1.1 Y 1.2	Definiciones y terminología Problemas de valores iniciales	1.1: 8, 12, 14, 16, 18, 26, 27, 28, 51, 54 1.2: 8, 10, 12, 16, 20, 24, 26, 30, 40, 44
3	1.3	Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos	1.3: 3, 6, 8, 12, 14, 16, 20, 27, 28, 37
4	2.1	Curvas solución sin una solución	2.1: 3, 4, 8, 10, 12, 15, 17, 20, 26, 40
5	2.2 y 2.3	Variables separables y Ecuaciones lineales	2.2: 13, 20, 28, 33-36, 46 2.3: 18, 30, 24, 34, 44
6	2.4 y 2.5	Ecuaciones exactas y Soluciones por sustitución	2.4: 8, 20, 25, 38, 42 2.5: 10, 14, 20, 24, 35
7	2.7	Modelos lineales	2.7: 6, 12, 17, 24, 31, 37, 39, 41
8	2.8	Modelos no lineales	2.8: 5, 10, 14, 20, 21, 22, 24, 25
9	2.9	Modelación con sistemas de ecuaciones diferenciales	2.9: 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16
10		**SECCIÓN DE AJUSTE**	Secciones faltantes y/o ejercicios adicionales
11			
12	3.1	Teoría preliminar: Ecuaciones diferenciales lineales	3.1: 8, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 30, 32, 39
13	3.2 y 3.3	Reducción de orden y Ecuaciones lineales homogéneas	3.2: 12, 14, 20, 21, 22, 23 3.3: 18, 26, 36, 43-48, 49
14	3.4	Coeficientes indeterminados	4.4: 20, 26, 32, 38, 42, 44, 45
15	3.5	Variación de parámetros	3.5: 12, 14, 18, 22, 24, 26, 28, 30
16	3.6	Ecuación de Cauchy-Euler	3.6: 14, 18, 22, 28, 30, 36, 39, 40
17	3.8	Modelos lineales: problemas de valores iniciales	3.8: 6, 10, 14, 17-20, 22, 35, 36, 41, 46
18	3.8	Sistemas masa-resorte y Circuitos	Ejercicios adicionales
19	3.9	Modelos lineales: problemas de valores en la frontera	3.9: 4, 6, 7, 8, 16, 20, 24, 28
20	3.11 y 3.7	Ecuaciones y modelos no lineales	3.11: 8, 10, 12, 16, 17, 18, 20 3.7: 2, 4, 6, 8, 14, 16, 19
21	3.12	Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales	3.12: 8, 12 16, 18, 20, 22
22	5.1	Soluciones en torno a puntos ordinarios	5.1: 18, 19, 22, 26, 30, 32
23	5.2	Soluciones en torno a puntos singulares	5.2: 16, 18, 20, 22, 26, 32
23			
24	4.1	Definición de la transformada de Laplace	4.1: 6, 10, 14, 18, 26, 36, 41, 42, 46
25	4.2	Transformadas inversas y transformadas de derivadas	4.2: 6, 12, 14, 18, 26, 30, 36, 39, 40
26	4.3	Teorema de traslación	4.3: 8, 16, 20, 24, 28, 30, 33, 34, 49-54, 66, 70
27	4.4	Propiedades operacionales	4.4: 8, 14, 18, 28, 30, 44, 46, 49-54, 59
28	4.5	La función delta de Dirac	4.5: 4, 8,12, 13, 14, 15
29	4.6	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales - TL	4.6: 6, 10, 12, 14, 16, 20
30		**SECCIÓN DE AJUSTE**	Secciones faltantes y/o ejercicios adicionales
31		**REPASO**	Secciones faltantes y/o ejercicios adicionales
		EXAMEN FINAL ACUMULATIVO	**SEMANA DE EXÁMENES FINALES**

EVALUACION: La evaluación del curso tendrá dos componentes: una, por cuenta del profesor de cada curso que tendrá una valoración del 75%, y otra, en un Examen Final Acumulativo elaborado y calificado por la Escuela de Matemáticas y cuya ponderación será del 25%. Los exámenes parciales, talleres, quizes, tareas y demás elementos que defina cada profesor se harán durante las 16 semanas de clase del semestre. En la semana de previos finales se hará el Examen Final Acumulativo. Las secciones marcadas como sección de ajuste o de repaso están a criterio del profesor, pueden ser usadas libremente por cada profesor cuando lo considere necesario, para realizar ejercicios faltantes, para remplazar clases perdidas o para programar Exámenes Parciales. Se recomienda que la última evaluación programada por cada profesor no se realice en la última semana de clases, permitiendo así un lapso entre el último parcial y el Examen Final Acumulativo por Escuela.

Apéndice 2.

Plantilla para planeación didáctica Universidad Industrial de Santander

ACTIVIDAD ACADÉMICA (1):		
META DE COMPRENSIÓN ABARCADORA (2):		
METAS FORMATIVAS ASOCIADAS A LA ACTIVIDAD ACADÉMICA (3)		
Saber **Competencias Cognitivas**	**Saber Hacer** **Competencias Procedimentales**	**Saber Ser** **Competencias Actitudinales**
ÁREA DE CONOCIMIENTO Y TEMA DISCIPLINAR A TRATAR EN LA ACTIVIDAD ACADÉMICA (4)	**PROPÓSITO (5)**	
COMPRENSIONES ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES(6)	**PREGUNTAS ESENCIALES (7)**	

SECUENCIA DIDÁCTICA PROPUESTA (8)

MOMENTO DE APRENDIZAJE	HORAS DE TRABAJO DEL ESTUDIANTE(9)	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA (10)	EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE (11)	AMBIENTES DE APRENDIZAJE (12)	RECURSOS FÍSICOS (13)	RECURSOS ELECTRÓNICOS(14)	EVIDENCIAS DESARROLLO DE COMPETENCIAS (15)
ANTES DE LA CLASE	HTI						
DURANTE LA CLASE	HIP						
DESPUÉS DE LA CLASE	HTI						

NOTAS ACLARATORIAS AL ORDEN NUMÉRICO

1 Defina a partir de la Tipología de Actividades Académicas por Formato que se presenta en el Acuerdo de Consejo Académico No. 023 de enero 25 de 2022, y nombre de acuerdo con el plan de estudios del programa
2 Formule una pregunta que permita orientar al estudiante respecto del por qué y para qué desarrolla las competencias vinculadas a la actividad académica, en términos de las tareas que como profesional habrá de desempeñar.
Ejemplos: Para un programa de salud pública: ¿Qué significa nacer en Colombia?
Para un programa de matemáticas: ¿Cómo podemos averiguar lo que no sabemos, a partir de lo que sabemos?
Para un programa de Literatura: ¿Cuáles son las herramientas con que cuenta un escritor para crear una obra narrativa?
Para un programa de ingeniería: ¿Qué proceso sigue un ingeniero para solucionar un problema?
3 Registre las competencias a desarrollar en los estudiantes, desde el ámbito micro-curricular. Se clasifican en cognitivas, procedimentales y actitudinales. Las cognitivas incluyen conceptos y procesos de pensamiento, las procedimentales se refieren a procedimientos, y las actitudinales a la aplicación de valores y principios al afrontar situaciones de dilemas éticos.
4 Registre el área disciplinar a la que se vincula el tema a tratar, teniendo en cuenta el marco conceptual y epistemológico definido para el programa académico.
5 Registre cuál es su intención con el tema: Introducir un tema nuevo, reforzar un tema ya tratado, valorar cuánto han aprendido los estudiantes acerca del tema
6 Liste las comprensiones que los estudiantes harán durante el desarrollo de la secuencia de actividades (secuencia didáctica) que usted formulará como ruta para desarrollar las competencias utilizando como pretexto el tema
7 Liste un número de preguntas esenciales que los estudiantes podrán contestar al final de su trasegar por la secuencia didáctica
8 Denominación que se da a la ruta de experiencias de aprendizaje que realizan los estudiantes, las cuales están articuladas y ordenadas en función de las competencias a desarrollar, las comprensiones a alcanzar y el tema a tratar. Incluyen actividades antes, durante y después de la clase
9 Estime el tiempo en horas que podrán tardar los estudiantes en desarrollar cada una de las experiencias de aprendizaje, teniendo en cuenta las horas de interacción con profesor (HIP) y las horas de trabajo independiente (HTI)
10 Seleccione una estrategia de enseñanza para acompañar a cada experiencia de aprendizaje, o a un conjunto de experiencias de aprendizaje.
Ejemplo: Si la estrategia de enseñanza que escogió es el uso de organizadores gráficos, una experiencia de aprendizaje puede ser un video corto donde se describe la clasificación de los metales y los materiales . Los estudiantes tendrán que utilizar un organizador gráfico para presentar la clasificación de los posibles procesos de obtención, procesamiento y disposición de desechos asociados a cada tipo de metal y material.
11 Describa el paso a paso de cada experiencia de aprendizaje que ha decidido incluir en la ruta o secuencia didáctica. Tenga en cuenta que entre más próximas sean las experiencias a situaciones auténticas que tendría que abordar un profesional en el campo disciplinar, mejor.
12 Defina los espacios físicos, virtuales o de colaboración en dónde discurrirán las experiencias de aprendizaje de los estudiantes (laboratorios, aulas, visitas de campo, centros de práctica, etc)
13 y 14 Registre los recursos físicos (textos, objetos, insumos, etc) y electrónicos (aula virtual, ova, simulador) que harán parte de la experiencia de aprendizaje de los estudiantes
15 Liste las evidencias que recolectará del trabajo realizado por los estudiantes en la ruta o secuencia didáctica, que le permitirán tanto a usted como a los estudiantes valorar y medir el desarrollo de las competencias previstas.

Apéndice 3.

Plantilla para un diseño pedagógico de un curso en la Universidad Industrial de Santander

DATOS GENERALES DEL CURSO	
Programa académico	
Asignatura	
Competencias de la asignatura	
Unidades	

UNIDAD 1
Título de la unidad de aprendizaje
Competencia(s) a desarrollar Es importante formularlas de manera clara y precisa. Recordar incluir no solo las conceptuales, sino también actitudinales o procedimentales.
Tiempo estimado para el desarrollo de la Unidad Tener en cuenta que el tiempo estipulado para el desarrollo de la unidad sea el adecuado para desarrollar las actividades.
Estrategias de enseñanza y de aprendizaje Identifique las estrategias que se privilegiarán para el desarrollo de la Unidad temática.
DESARROLLO DE LA UNIDAD

No	Actividad	Tiempo	Recurso/ Herramienta tecnológica	Proceso de Evaluación
1	•Describir el desarrollo paso a paso. •Ofrecer orientaciones para guiar el trabajo de los estudiantes en cada etapa: ANTES: Describir el desarrollo paso a paso DURANTE: Describir el desarrollo paso a paso DESPUÉS: Describir el desarrollo paso a paso ACTIVIDADES EXTRA CLASE: ¿Qué actividades se proponen para que los estudiantes desarrollen durante su tiempo de trabajo independiente?	Duración de cada actividad	Considerar enlaces, libros, videos, artículos, etc. Identificar la herramienta tecnológica a utilizar en la actividad. En caso de que se vaya a utilizar el aula virtual de aprendizaje Moodle, especificar la Actividad Moodle que se va a utilizar	Si la actividad está relacionada con el proceso de evaluación, especificar la evidencia de aprendizaje y el instrumento de evaluación.
2				
3				
4				
5				

Apéndice 4.

Plantilla para el diseño pedagógico de las clases de la unidad didáctica

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Bucaramanga**	ECUACIONES DIFERENCIALES
	DISEÑO PEDAGÓGICO DE LA CLASE	

DATOS GENERALES DE LA CLASE		
Programa Académico	Ciclo Básico – Multidisciplinar – Facultades de Ciencias, Fisicoquímicas y Fisicomecánicas	
Asignatura	20255 - Ecuaciones Diferenciales	
Competencias de la Asignatura		
Competencias Cognitivas (Saber)	**Competencias Procedimentales** (Hacer)	**Competencias Actitudinales** (Ser)
Meta de Comprensión		

PLAN DE CLASE		
Título / Tema de la Clase		
Propósito		
Tiempo estimado para el desarrollo de la clase	HIP	HTI
Estrategias de enseñanza y de aprendizaje		
Objetivos de Aprendizaje:		
Recursos Físicos / Herramientas tecnológicas		

DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
Preguntas Orientadoras		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
Indicadores de Evaluación		
Evidencias de Evaluación		

Apéndice 5.

Micro competencias de la asignatura Ecuaciones Diferenciales

ECUACIONES DIFERENCIALES – Viernes26/05/2023

Micro competencias integradas propuestas	Identifique los conceptos de Ecuaciones Diferenciales vinculados.	Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje	Tiempos de desarrollo de competencias y Recursos requeridos HIP: Horas de interacción con el profesor. HTI: Horas de trabajo independiente
• **MC_15**: Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales. • **Indicador**: Aplica métodos para la solución de una ecuación diferencial. • **MC_16**: Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y (concluye) realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.	**1. MODELOS MATEMÁTICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN Y NO LINEALES** 1.1. Definiciones y terminología. Problemas de valores iniciales. Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos. 1.2. Curvas solución sin una solución. 1.3. Variables separables y Ecuaciones lineales. 1.4. Ecuaciones exactas y Soluciones por sustitución. 1.5. Modelos lineales. 1.6. Modelos no lineales. 1.7. Solución numérica de ecuaciones diferenciales.	• Lectura y comprensión previa. • Estudio de casos. • Clase Magistral. • Resolución de problemas. **Total HIP del Corte**: 16 Horas **Total HTI del Corte**: 20 Horas	**HTI**: 5 Horas **HIP**: 16 Horas **HTI**: 5 Horas HTI: 10 Horas
• **MC_17**: Modela y resuelve matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales de orden superior. • **MC_18**: Analiza la solución de una ecuación diferencial de orden superior en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.	**2. MODELOS MATEMÁTICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR** 2.1. Teoría preliminar: Ecuaciones diferenciales lineales. 2.2. Reducción de orden y Ecuaciones lineales homogéneas. 2.3. Coeficientes indeterminados. 2.4. Variación de parámetros. 2.5. Ecuación de Cauchy-Euler. 2.6. Modelos lineales: problemas de valores iniciales. 2.7. Sistemas masa-resorte y Circuitos. 2.8. Modelos lineales: problemas de valores en la frontera.	• Lectura y comprensión previa. • Estudio de casos. • Clase Magistral. • Resolución de problemas. • Talleres colaborativos.	**HTI**: 4 Horas **HIP**: 24 Horas **HTI**: 10 Horas

	2.9. Ecuaciones y modelos no lineales. 2.10. Solución numérica de ecuaciones diferenciales de orden superior.		**HTI**: 16 Horas
		Total HIP del Corte: 24 Horas **Total HTI del Corte**: 30 Horas	
• **MC_19**: Modela y resuelve matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante la transformada de Laplace. • **MC_20**: Analiza la solución de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.	**3. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE** 3.1. Definición de la transformada de Laplace. 3.2. Transformadas inversas y transformadas de derivadas. 3.3. Teoremas de traslación. 3.4. Propiedades operacionales. 3.5. La función delta de Dirac. 3.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales – TL. 3.7. Modelación con sistemas de ecuaciones diferenciales. 3.8. Solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales.	• Lectura y comprensión previa. • Estudio de casos. • Clase Magistral. • Resolución de problemas. • Talleres colaborativos.	**HTI**: 4 Horas **HIP**: 24 Horas **HTI**: 10 Horas **HTI**: 16 Horas
		Total HIP del Corte: 24 Horas **Total HTI del Corte**: 30 Horas	
Total HIP de la asignatura: **64** Horas **Total HTI de la asignatura**: 80 Horas **Horas Totales**: 144 Horas **Horas semanales HIP**: 4 Horas = 3T + 1P **Horas semanales HTI**: 5 Horas **Créditos**: 3			

ACTITUDINALES	IDEAS PARA EL DESARROLLO
• **AC_1**: Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas.	**Dejar un tópico especial para consulta en las diferentes actividades académicas.**
• **AC_2**: Desarrolla las actividades académicas de manera honesta y responsable. • **AC_3**: Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado (ingenieril). • **AC_4**: Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.	

ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN:

MICROCOMPETENCIAS	ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN PROPUESTAS
MC_8, MC_13	**El procesamiento grupal**: Reflexionar sobre una sesión del grupo para determinar que acciones de sus miembros contribuyen a llevar adelante las metas del grupo y tomar decisiones acerca de qué conductas reforzar o modificar.
MC_2, MC_7, MC_8, MC_13	**Método del Caso**: Los alumnos aprenden sobre la base de experiencias y situaciones de la vida real. Esto les permite construir su propio aprendizaje en un contexto que los aproxima a su entorno. Es un enlace entre la teoría y la práctica. El profesor debe asegurarse que el alumno cuenta con una buena base teórica que le permita trabajar con el caso y transferir sus conocimientos a una situación real. Se evaluarán los conocimientos que el alumno aporta al proceso de razonamiento grupal.
MC_1, MC_2, MC_3, MC_4, MC_5, MC_6, MC_7, MC_8, MC_9, MC_10, MC_11, MC_12, MC_13	**Participación en clase.** Se evaluarán las interacciones personales del alumno con los demás miembros del grupo.
MC_3, MC_8, MC_13	**Evaluaciones escritas**: Demostrar el ingenio, conocimientos, habilidades, destrezas, nivel de logros, actitudes, etc. La evaluación ha de representar para el estudiante una oportunidad para recibir retroalimentación específica de sus fortalezas y debilidades, y así poder rectificar las deficiencias y aprovechar las fortalezas identificadas.
MC_1, MC_2, MC_6, MC_9, MC_10, MC_12	**Autoevaluación**: Permite al alumno pensar cuidadosamente acerca de lo que sabe, de lo que no sabe y de lo que necesita saber para cumplir determinadas tareas.

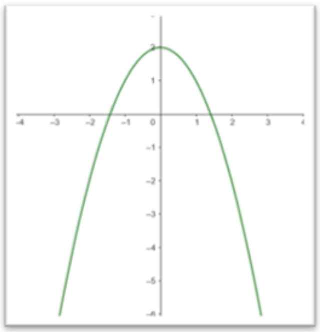
Apéndice 6.

Preguntas prueba diagnóstica.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Prueba Diagnóstica	Código: 20255
		Página: 1 de 6

Prueba Diagnóstica

1. Teniendo como referente la siguiente gráfica, llene los espacios del texto según corresponda.



Observando la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2$, notamos que es una parábola que se abre hacia abajo. El dominio de esta función corresponde a ____, ya que está definida para todos los valores de x. La función es _____ cuando $x < 0$, y ____ cuando $x > 0$. El punto donde la función cambia de comportamiento es en ____, allí alcanza su valor ____. El rango está dado por los valores ____.

[[1]] Creciente

[[2]] Decreciente

[[3]] $x = 0$

[[4]] $x = 2$

[[5]] El Conjunto de Números Reales

[[6]] Menores o Iguales que 2

[[7]] Máximo

[[8]] Mínimo

[[9]] Mayores o Iguales que 2

2. Relacione correctamente cada función con su correspondiente dominio.

$f(x) = \frac{1}{x-3} \rightarrow R - 3$

$g(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow [-2, \infty)$

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Prueba Diagnóstica	Código: 20255
		Página: 2 de 6

$h(x) = \ln(x-1) \rightarrow (1, \infty)$

$k(x) = e^x \rightarrow \mathrm{R}$

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
   a) Toda función continua es derivable en todo su dominio.
   b) Toda función derivable es continua en todo su dominio.
   c) Toda función discontinua es derivable en todo su dominio.
   d) Una función es derivable en un punto si y solo si es continua en un único punto.
   e) Ninguna de las anteriores
   f) Las 4 afirmaciones son correctas

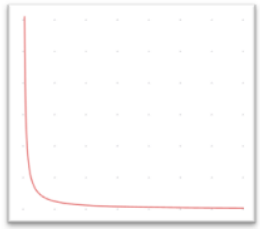
4. Sea la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. ¿Cómo se determina si esta función tiene un máximo o un mínimo, y en qué punto ocurre?
   a) Se usa la primera derivada; hay un mínimo en $x = 2$
   b) Se usa la segunda derivada; hay un máximo en $x = 2$
   c) Se usa la primera derivada; hay un máximo en $x = -2$
   d) Se evalúa la función directamente; hay un mínimo en $x = 0$
   e) Ninguna de las anteriores

5. Si $f(x) = x^2$, ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la segunda derivada de f?
   a) $f(x))^2$
   b) $f^2(x)$
   c) $f''(x)$
   d) $(f'(x))^2$
   e) Hay más de una respuesta correcta
   f) Ninguna de las anteriores

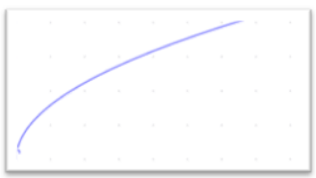
6. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función cuya derivada es negativa en todo su dominio?

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Prueba Diagnóstica	Código: 20255	
	Página: 3 de 6	

a)



b)



c)

d)

7. ¿Cuál es el resultado obtenido al resolver la siguiente integral?

$$\int e^{2x}\, x\, dx$$

a) $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$
b) $\frac{e^{2x}}{2}(x-1)+C$
c) $\frac{e^{x}}{4}(2x-1)+C$
d) $\frac{e^{2x}}{4}(2x+1)+C$
e) Ninguna de las anteriores

8. ¿Cuál es el valor de la siguiente integral definida?

$$\int_1^4 (2x+1)\, dx$$

a) 30
b) 18

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Prueba Diagnóstica	Código: 20255	
	Página: 4 de 6	

c) -18
d) 21
e) Ninguna de las Anteriores

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a la integral definida $\int_{-3}^{3} \frac{1}{x^3}\, dx$?

a) La integral converge y su valor es 0, ya que la función es impar.
b) La integral converge y su valor es distinto de cero.
c) La integral diverge, ya que presenta una discontinuidad en el límite superior.
d) La integral es divergente porque la función es discontinua en el intervalo.
e) La integral diverge, ya que presenta una discontinuidad en el límite inferior.
f) Ninguna de las anteriores

10. Se quiere construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32000 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones que requieren la menor cantidad de material?

a) Lado = 40 cm, Altura = 20 cm
b) Lado = 20 cm, Altura = 80 cm
c) Lado = 32 cm, Altura = 31.25 cm
d) Lado = 25 cm, Altura = 51.2 cm
e) Lado = 31.75 cm, Altura = 31.75 cm
f) Ninguna de las anteriores

11. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados L, teniendo en cuenta que el perímetro del rectángulo es 200m?

a) $A(L) = 200 - L$
b) $A(L) = 100 - L$
c) $A(L) = L - 100$
d) $A(L) = 2L - 200$
e) Ninguna de las anteriores

12. Evalúa el siguiente límite y si es posible resuélvelo: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

13. Si una función tiene una segunda derivada, entonces necesariamente tiene una primera derivada continua. Falso/Verdadero.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Prueba Diagnóstica	Código: 20255
		Página: 5 de 6

14. Si una función tiene derivada nula en un intervalo, entonces es constante en ese intervalo. Falso/Verdadero.

15. Cuando un cuadrado está inscrito en un círculo de radio r, y el radio del círculo mide 2 pulgadas y está creciendo a razón de 4 pulgadas por minuto, la razón de cambio del área del cuadrado en ese instante es de 32 pulgadas cuadradas por minuto. Falso/Verdadero.

16. Un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad v(t). Encuentre la función posición s(t).

$$v(t) = t^2 - 4t; s = 6\ cuando\ t = 3$$

a) $s(t) = t^3 - 2t^2 + 15$
b) $s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 15$
c) $s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 6$
d) $s(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 15$
e) Ninguna de las Anteriores

17. Un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración a(t). Encuentre la función posición $s(t)$.

$$a(t) = 6t; v = 0\ y\ s = -5\ cuando\ t = 2$$

a) $s(t) = 3t^2 - 12$
b) $s(t) = t^3 + 12t - 37$
c) $s(t) = t^3 - 12t - 5$
d) $s(t) = t^3 - 12t + 11$
e) Ninguna de las anteriores

18. Use el logaritmo natural para hallar x en la siguiente ecuación.

$$5^x = 2e^{x+1}$$

a) $x = \frac{ln\ 2}{ln\ 5 - 1}$
b) $x = \frac{ln\ 2 + 1}{ln\ 5}$
c) $x = \frac{ln\ 3}{ln\ 4}$

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Prueba Diagnóstica	Código: 20255
		Página: 6 de 6

d) $x = \frac{ln\ 2 + 1}{ln\ 5 - 1}$
e) *Ninguna de las anteriores*

19. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{e^{2ln3} + \sqrt[3]{-64}}{cos\ \pi * log_2 4}$$

a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $-\frac{5}{2}$
d) -1
e) Ninguna de las anteriores

20. Simplifique la siguiente expresión, asumiendo que $x > 4$.

$$\log_2(x^2 - 16) - \log_2(x - 4)$$

a) $\log_2(x - 4)$
b) $\log_2(x + 4)$
c) $\log_2(x^2 - 4)$
d) 1
e) Ninguna de las anteriores

Apéndice 7.

Primer plan de clase: Introducción a las EDOLPO

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Bucaramanga**	ECUACIONES DIFERENCIALES
	DISEÑO PEDAGÓGICO DE LA CLASE	

DATOS GENERALES DE LA CLASE	
Programa Académico	Ciclo Básico – Multidisciplinar – Facultades de Ciencias, Fisicoquímicas y Fisicomecánicas
Asignatura	20255 - Ecuaciones Diferenciales

Competencias de la Asignatura		
Competencias Cognitivas (Saber)	**Competencias Procedimentales** (Hacer)	**Competencias Actitudinales** (Ser)
MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo. **MC-C.** Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.	**MC1-P.** Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales. **MC-P.** Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.	**MC7-A.** Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas. **MC9-A.** Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado. **MC10-A.** Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Meta de Comprensión
La meta de comprensión de esta clase es que los estudiantes reconozcan que las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden no son únicamente procedimientos algebraicos para resolver, sino herramientas matemáticas que permiten resolver problemáticas, modelar y analizar fenómenos reales. A través de la identificación estructural de las ecuaciones, la sistematización de sus métodos de solución (variables separables, lineales) y su aplicación en el contexto de la Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton, se busca que comprendan la relación entre la forma de la ecuación, el método empleado y las hipótesis asumidas en la construcción del modelo. De este modo, las actividades diseñadas pretenden favorecer la transición desde el dominio algorítmico hacia una comprensión más amplia de la matemática como instrumento de modelación, interpretación, resolución y análisis crítico de situaciones del mundo físico.

PLAN DE CLASE		
Título / Tema de la Clase	**Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias de Primer Orden:** **Métodos de Solución: (Variables Separables y Lineales)**	
Propósito	Desarrollar en los estudiantes la comprensión estructural y el dominio procedimental de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden (variables separables y lineales), de modo que puedan reconocer la forma de una ecuación, seleccionar el método adecuado y aplicar dichos procedimientos en contextos de modelación.	
Tiempo estimado para el desarrollo de la clase	**HIP:** 120 minutos.	**HTI:** 240 minutos.
Estrategias de enseñanza y de aprendizaje	• Resolución guiada de ejercicios en tablero. • Activación de conocimientos previos mediante crucigrama. • Aprendizaje basado en problemas. • Uso de GeoGebra como herramienta de exploración.	
Objetivos de Aprendizaje:	• Identificar la forma estructural de una EDO de primer orden. • Identificar y resolver ecuaciones por separación de variables. • Identificar, analizar y resolver ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas mediante variables separables o factor integrante según las necesidades. • Interpretar las aplicaciones correspondientes a una EDO lineal. • Reconocer cómo cambia un modelo con el paso del tiempo.	
Recursos Físicos / Herramientas tecnológicas	• Libro guía de Dennis G. Zill. Secciones 1.3, 2.2 y 2.3 • Diapositivas • Tablero y marcadores. • Aula Moodle UIS, donde se encuentra el contenido de la clase, crucigrama de actividad previa para la clase junto con los talleres de chocolate y tamal como actividades posteriores a la clase. • GeoGebra Clásico y GeoGebra Classroom.	

DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
Propósito: *Activar conocimientos previos, promover lectura autónoma del texto guía y preparar el terreno conceptual para que la clase presencial se concentre en la sistematización procedimental y no en la introducción desde cero.*	***Propósito:*** *Construir de manera progresiva la comprensión estructural de las ecuaciones diferenciales de primer orden, mediante la clasificación y resolución bajo los métodos de variables separables y ecuaciones lineales (homogéneas y no homogéneas), articulando el dominio procedimental con la interpretación de problemas con condición inicial como paso previo a la modelación de fenómenos reales.*	***Propósito:*** *Consolidar la comprensión de las ecuaciones diferenciales de primer orden como herramientas de modelación, a través de una secuencia que integra experimentación, formalización matemática y contraste teórico–práctico, fortaleciendo la autonomía, el trabajo colaborativo y la capacidad de analizar críticamente la validez de un modelo.*
Desarrollo del Antes de la Clase	**Desarrollo del Durante la Clase**	**Desarrollo del Después de la Clase**
1. Los estudiantes debían leer previamente las secciones 1.3 y 2.2 del libro: Zill, D. & Cullen, M. (2006). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Ecuaciones Diferenciales. (3ª ed., Vol. 1). Mientras la lectura debía hacer énfasis en las diferentes aplicaciones que hay con las ecuaciones diferenciales, así como las particularidades de una ecuación diferencial cuyo método de solución son las variables separables. 2. Como evidencia de lectura, los estudiantes debían resolver un crucigrama construido a partir de conceptos claves encontrados textualmente en el libro guía.	1. Se inicia la clase con una socialización general de los conceptos fundamentales abordados en la lectura previa secciones 1.3 y 2.2 del libro. No se revisaron las respuestas del crucigrama de manera individual, sino que se retomaron los conceptos más relevantes de la sección. 2. Posteriormente, se introduce formalmente el método de variables separables, enfatizando la identificación de su estructura algebraica y la posibilidad de reorganizar la ecuación para integrar cada variable de manera independiente. Se explica el fundamento del procedimiento, mostrando cómo la separación conduce a la integración en ambos lados de la igualdad, resaltando la importancia del manejo adecuado de la constante de integración y del dominio de la solución. Después de esta explicación, se resolvieron diversos ejercicios en el tablero, primero de manera guiada y luego con participación de los estudiantes. Se incluyeron problemas con condición inicial (PVI), con el fin de transitar de la solución general a la solución particular y fortalecer la comprensión del significado matemático de las condiciones iniciales dentro del proceso de resolución. 3. En un segundo momento, la clase se centra en las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden. Se presenta su forma estándar y se establece la relación estructural con el caso de variables separables, evidenciando que pueden resolverse mediante un procedimiento equivalente que conduce a soluciones de tipo exponencial. Se desarrollan ejercicios representativos que permiten consolidar el método y se trabajan problemas con condición inicial, reforzando el proceso de determinación de soluciones particulares. Este apartado tuvo un énfasis procedimental, orientado a sistematizar el algoritmo de	1. Para pos-clase se asigna el taller de aprendizaje basado en problemas y modelación denominado "Taller #2 Enfriando Chocolate y Taller #3 Calentando un Tamal", con un plazo de una semana y en grupos de 2 o 3 estudiantes para su desarrollo. Esta actividad tiene como propósito trasladar el dominio procedimental trabajado en clase hacia un escenario de aplicación contextualizada, promoviendo la articulación entre experimentación, formalización matemática y contraste teórico–práctico. 2. El taller se estructuró en tres fases complementarias. En la primera fase, de carácter experimental–práctico, los estudiantes deben realizar una experiencia directa relacionada con el enfriamiento de una taza de chocolate elaborado por ellos mismos. En esta etapa se les solicitaba tomar mediciones sucesivas de temperatura y registrar los datos obtenidos. A partir de esta información, deben analizar el comportamiento observado, responder preguntas orientadoras y proponer un modelo matemático preliminar que describa el fenómeno. Esta fase busca situar la ecuación diferencial no como un objeto puramente algebraico, sino como una

	resolución y a evitar errores frecuentes en el desarrollo algebraico. 4. Finalmente, se abordan las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, presentando su forma estándar y el método del factor integrante como estrategia general de solución. Se explica la finalidad del factor integrante, mostrando cómo este permite transformar la ecuación en una expresión derivable directamente. El procedimiento se desarrolla paso a paso en el tablero, cuidando la rigurosidad algebraica y destacando los momentos críticos del proceso. Posteriormente, se resuelven ejercicios y problemas con condición inicial, consolidando así el dominio del algoritmo completo y su aplicación sistemática. 5. En la parte final de la sesión, se presentan las indicaciones correspondientes al taller extra-clase (Chocolate y Tamal), el cual tenía como propósito aplicar los métodos de solución estudiados en un contexto de modelación basado en la Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton. No se dan mayores indicaciones de los talleres ya que la idea de estos es la exploración del estudiante para llegar a la modelación del fenómeno y su	herramienta para representar una realidad observable. 3. La segunda fase, de carácter teórico, consiste en la resolución formal del modelo asociado a la Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton, considerando inicialmente el caso de temperatura ambiente constante. Aquí los estudiantes deben formular la ecuación diferencial correspondiente y resolverla mediante el método adecuado (modelo lineal, cuya solución puede ser por variables separables), aplicando condiciones iniciales cuando fuese necesario. Esta etapa permite consolidar el dominio algorítmico trabajado en clase y vincularlo explícitamente con el fenómeno estudiado. 4. En la tercera fase, se plantea un contraste teórico–práctico en el que los estudiantes

	respectiva solución. Asimismo, se brindan orientaciones sobre el uso de GeoGebra como herramienta tecnológica para el análisis y ajuste del modelo, aclarando los criterios de entrega y los aspectos conceptuales que debían evidenciarse en el desarrollo del taller.	deben comparar los resultados experimentales con las soluciones obtenidas analíticamente. Esta fase favorece procesos metacognitivos, ya que los estudiantes analizan la pertinencia del modelo, identifican posibles discrepancias y reflexionan sobre las hipótesis asumidas.
	Preguntas Orientadoras	
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
• ¿Cómo se distingue una solución general de una solución particular? • ¿Qué condiciones debe cumplir una ecuación para que sea considerada de variables separables? • ¿Qué estructura algebraica define a una ecuación diferencial lineal? • ¿Qué papel cumple la constante de integración	• ¿Cómo puedo reconocer rápidamente qué método de solución aplicar? • ¿Por qué una ecuación lineal homogénea puede resolverse como un caso particular de variables separables? • ¿Qué cambia en el proceso cuando se incorpora una condición inicial? • ¿Qué errores son frecuentes en la aplicación de estos métodos y cómo evitarlos?	• ¿La temperatura del tamal aumenta la misma cantidad cada minuto o varía con el tiempo? Justifica tu respuesta. • Desde lo observado en el experimento, ¿qué tan importante es la diferencia entre la temperatura del agua y la del tamal para que el calentamiento continúe? ¿Qué ocurre cuando esta diferencia es pequeña? Justifica tu respuesta. • Usando la herramienta de regresión en GeoGebra,

dentro del proceso de resolución? • ¿Qué modelos matemáticos se expresan bajo ecuaciones lineales de primer orden?	• ¿Qué diferencias estructurales existen entre una ecuación lineal homogénea y una no homogénea?	ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente cómo queda esa función? Justifica tu respuesta. • Expresa mediante un modelo matemático o una ecuación diferencial, el enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t. Justifica tu modelo.
Indicadores de Evaluación	• Identifica correctamente la estructura de una ecuación diferencial de primer orden y clasifica adecuadamente si corresponde a variables separables, lineal homogénea o lineal no homogénea. • Aplica de manera rigurosa los métodos de resolución correspondientes, desarrollando adecuadamente los procesos algebraicos, integraciones y manejo de la constante de integración. • Resuelve problemas con condición inicial (PVI) determinando correctamente la solución particular y justificando el procedimiento seguido. • Formula el modelo matemático asociado a la Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton, traduciendo adecuadamente el fenómeno físico a una ecuación diferencial.	

	• Analiza críticamente la pertinencia del modelo, contrastando resultados experimentales con soluciones analíticas y reconociendo las hipótesis asumidas. • Participa activamente en el trabajo colaborativo, argumentando decisiones matemáticas y mostrando disposición para la discusión académica. • Evidencia procesos metacognitivos, identificando aciertos, dificultades y decisiones tomadas durante la modelación y resolución de problemas.
Evidencias de Evaluación	• Durante la fase anterior a la clase, se recogerá como evidencia el crucigrama conceptual, el cual permitirá verificar la apropiación inicial del lenguaje y las nociones fundamentales. • Durante la sesión presencial, la evidencia estará dada por la participación en la resolución de ejercicios en el tablero y el desarrollo de problemas con condición inicial, lo que permitirá observar la comprensión estructural y el dominio procedimental. • En la fase posterior a la clase, la evidencia principal será el desarrollo del taller #2 – Enfriando un Chocolate y taller #3 Calentando un Tamal. Esos talleres se evaluarán bajo criterios basado en los procesos generales de la actividad matemático como lo son: 1. Formular y Resolver Problemas 2. Modelar Procesos y Fenómenos 3. Razonamiento y Comunicación Matemática 4. Ejercitación de Procesos y Algoritmos 5. Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas

Apéndice 8.

Segundo plan de clase: aplicaciones lineales – Ley de Malthus

Universidad Industrial de Santander	Universidad Industrial de Santander Bucaramanga	ECUACIONES DIFERENCIALES
	DISEÑO PEDAGÓGICO DE LA CLASE	

DATOS GENERALES DE LA CLASE	
Programa Académico	Ciclo Básico – Multidisciplinar – Facultades de Ciencias, Fisicoquímicas y Fisicomecánicas
Asignatura	20255 - Ecuaciones Diferenciales

Competencias de la Asignatura		
Competencias Cognitivas (Saber)	**Competencias Procedimentales** (Hacer)	**Competencias Actitudinales** (Ser)
MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo. **MC-C.** Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.	**MC1-P.** Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales. **MC-P.** Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.	**MC7-A.** Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas. **MC9-A.** Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado. **MC10-A.** Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Meta de Comprensión
La meta de comprensión de esta clase es que los estudiantes comprendan que el crecimiento poblacional descrito por la Ley de Malthus puede modelarse mediante una ecuación diferencial lineal cuya solución formal se puede obtener por medio de variables separables, a pesar de no ser una ecuación lineal homogénea. A través de la exploración de datos, la formulación de un modelo empírico, la resolución analítica de la ecuación diferencial y el contraste entre ambos enfoques se busca que los estudiantes articulen formulación de problemas, razonamiento, comunicación y modelación matemática, reconociendo la relación entre representación numérica, gráfica, algebraica y diferencial de un mismo fenómeno. Asimismo, se pretende que identifiquen los supuestos y limitaciones del modelo exponencial malthusiano, comprendiendo que su validez es más consistente en intervalos de tiempo cortos o bajo condiciones ideales, y que su aplicación debe analizarse críticamente en contextos reales.

<table>
<tr><td colspan="3">PLAN DE CLASE</td></tr>
<tr><td>Título / Tema de la Clase</td><td colspan="2">Aplicaciones de las EDOLPO: Propagación de un Virus – Ley de Malthus y Uso de TIC</td></tr>
<tr><td>Propósito</td><td colspan="2">Promover en los estudiantes la formulación, análisis y validación de un modelo matemático de crecimiento poblacional a partir de una situación contextualizada, integrando exploración empírica, formalización teórica y contraste crítico, mediante el uso de herramientas TIC como GeoGebra Classroom y el trabajo colaborativo como puente social.</td></tr>
<tr><td>Tiempo estimado para el desarrollo de la clase</td><td>HIP: 120 minutos.</td><td>HTI: 240 minutos.</td></tr>
<tr><td>Estrategias de enseñanza y de aprendizaje</td><td colspan="2">• Aprendizaje basado en problemas.
• Modelación Matemática.
• Trabajo colaborativo.
• Formulación y Resolución de problemas.
• Uso de GeoGebra Classroom como entorno interactivo.
• Comunicación y argumentación matemática.</td></tr>
<tr><td>Objetivos de Aprendizaje:</td><td colspan="2">• Formular un modelo matemático a partir de datos y regularidades observadas.
• Interpretar el significado del modelo exponencial en el contexto de propagación.
• Resolver formalmente la ecuación diferencial asociada al modelo de Malthus.
• Comparar y contrastar modelos empíricos y teóricos.
• Argumentar matemáticamente las decisiones tomadas durante el proceso.</td></tr>
<tr><td>Recursos Físicos / Herramientas tecnológicas</td><td colspan="2">• Libro guía de Dennis G. Zill. Secciones 1.3, 2.2 y 2.3
• Tablero y marcadores.
• Aula Moodle UIS, donde se encuentra el contenido de la clase, junto con el taller #1 Propagación de Virus – Ley de Malthus, además, de los talleres de chocolate y tamal como actividades posteriores a la clase (mismas actividades pos-clase anterior por la extensión de las actividades).
• GeoGebra Clásico y GeoGebra Classroom.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO</td></tr>
<tr><td>Antes de la Clase</td><td>Durante la Clase</td><td>Después de la Clase</td></tr>
<tr><td>Propósito: Fortalecer el dominio procedimental de los métodos trabajados en la clase anterior y preparar a los estudiantes para su aplicación en un contexto de modelación.</td><td>Propósito: Promover en los estudiantes la construcción y validación de un modelo matemático de crecimiento poblacional a partir de una situación contextualizada, articulando exploración empírica, formulación de la ecuación diferencial del modelo de Malthus, resolución analítica y contraste crítico entre representaciones y resultados, mediante el trabajo colaborativo y el uso de GeoGebra Classroom.</td><td>Propósito: Consolidar y transferir los aprendizajes desarrollados durante la sesión de modelación, fortaleciendo la autonomía, el trabajo colaborativo y la capacidad de establecer conexiones entre distintos modelos diferenciales, mediante la continuación y profundización de los talleres experimentales, promoviendo la reflexión crítica sobre los supuestos, el alcance y las limitaciones de los modelos construidos.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo del Antes de la Clase

1. Previo a la sesión, se hizo la recomendación sobre la resolución autónoma de ejercicios y problemas relacionados con variables separables y ecuaciones lineales, con el fin de consolidar el manejo algorítmico necesario para abordar las siguientes clases donde se trabajarían las aplicaciones, iniciando con el modelo malthusiano que sería trabajado en clase. Esta actividad</td><td>Desarrollo del Durante la Clase

1. La sesión se va a desarrollar completamente mediante el Taller #1 – Propagación de Virus en GeoGebra Classroom, trabajando en parejas durante la clase. El docente asume un rol de mediador y orientador, mientras los estudiantes son protagonistas activos del proceso de modelación y resolución de problemas.

2. La clase inicia con la presentación del GeoGebra en el cual se encuentra una situación contextualizada relacionada con la propagación de un virus en una población. A partir del análisis inicial del problema, se promueve la discusión entre las parejas sobre el comportamiento del crecimiento poblacional</td><td>Desarrollo del Después de la Clase

1. Para pos-clase los estudiantes continuaron con el desarrollo de los talleres “Enfriando un Chocolate” y “Calentando un Tamal”, asignados desde la clase anterior y cuyo plazo de entrega se mantuvo en una semana, debido a la extensión y profundidad de las actividades propuestas. Esta decisión permitió dar continuidad al proceso de modelación iniciado previamente, sin fragmentar el trabajo</td></tr>
</table>

buscaba garantizar que el espacio presencial pudiera dedicarse principalmente a procesos de formulación, exploración y modelación, en lugar de centrarse nuevamente en la explicación técnica de los métodos.	cuando no existen restricciones externas, orientando a los estudiantes a reflexionar sobre si el crecimiento ocurre de manera constante o si varía en función del tiempo. En esta primera aproximación no se introduce de inmediato la ecuación diferencial formal, sino que se busca partir de la observación y del reconocimiento de patrones. 3. A partir del análisis de patrones y regularidades observadas los estudiantes deben determinar si el crecimiento es lineal o no lineal, formular conjeturas y proponer un modelo funcional empírico que describa el comportamiento observado. Durante esta etapa se promueven procesos de formulación de problemas, razonamiento, comunicación matemática y construcción de representaciones, al favorecer la discusión y argumentación dentro de cada pareja. 4. Una vez establecido el carácter exponencial del crecimiento desde la perspectiva empírica, se conduce a los estudiantes a formalizar matemáticamente la idea central del modelo de Malthus: que la tasa de cambio de la población es proporcional a la cantidad presente en cada instante. A partir de esta interpretación se formula la ecuación diferencial correspondiente	experimental y analítico que dichas actividades requieren. 2. Asimismo, la realización del Taller #1 – Propagación de Virus durante la sesión permitió resolver inquietudes conceptuales y procedimentales que los estudiantes aún mantenían frente a la formulación y resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden, particularmente en lo relacionado con la interpretación de parámetros y la conexión entre modelo empírico y modelo formal. Este espacio de trabajo guiado facilitó aclarar dudas que impactaban directamente el desarrollo de los talleres “Enfriando un Chocolate” y “Calentando un Tamal”, brindando mayor seguridad conceptual y metodológica para su culminación.
	y los estudiantes proceden a resolverla mediante separación de variables, obteniendo la solución exponencial general. En esta fase se fortalece la articulación entre representación diferencial, representación funcional y significado contextual del parámetro de crecimiento, enfatizando la interpretación matemática del modelo más allá del procedimiento algorítmico. 5. Finalmente, en la fase de contraste, los estudiantes comparan el modelo empírico obtenido inicialmente con la solución formal derivada de la ecuación diferencial. Este momento permite analizar la coherencia entre ambas aproximaciones, interpretar el parámetro de crecimiento y reflexionar sobre el alcance y las limitaciones del modelo exponencial, reconociendo que su validez resulta más consistente en intervalos de tiempo cortos o bajo supuestos ideales. Se plantea la socialización de lo realizado, pero por cuestiones de tiempo y dado que todas las parejas no avanzan a la misma velocidad, se decide dejarla como inicio para la siguiente clase.	3. Finalmente, se dejó explícito que la siguiente clase estaría orientada a la socialización y discusión de los hallazgos obtenidos en los talleres, promoviendo un espacio de intercambio académico donde los estudiantes pudieran presentar sus modelos, contrastar resultados y reflexionar colectivamente sobre los procesos de modelación desarrollados. De este modo, se dio continuidad a la secuencia didáctica, proyectando la siguiente sesión como un momento de institucionalización y análisis compartido de los aprendizajes construidos.
Preguntas Orientadoras		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
• ¿Qué condiciones permiten resolver una ecuación	• ¿Cómo describirías el comportamiento de la población infectada a lo largo del tiempo?	• ¿La temperatura del tamal aumenta la misma cantidad

diferencial por separación de variables? • ¿Cómo se interpreta la constante de integración dentro de un modelo aplicado? • ¿Qué relación existe entre la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ y una función exponencial? • ¿Qué significa, en términos prácticos, que la velocidad de crecimiento de una población es proporcional al tamaño que esta posee en un instante dado?	¿Notas algún patrón o regularidad en los datos? Justifica tu respuesta. • Con base en tus observaciones y análisis, ¿puedes proponer un modelo inicial (regla, expresión o función) que describa el número de infectados en el tiempo n? Explica por qué consideras que este modelo es adecuado. • Determina y escribe con claridad la solución encontrada para la ecuación diferencial asociada al modelo malthusiano para la situación planteada. • ¿Después de 3 días, ¿el valor de la población infectada encontrado con el modelo malthusiano coincide con el valor obtenido en la exploración previa? Justifica tu respuesta. • Según el modelo malthusiano, ¿en qué momento la población infectada alcanza el total de habitantes de la isla? Explica qué significa este resultado en el contexto del problema.	cada minuto o varía con el tiempo? Justifica tu respuesta. • Desde lo observado en el experimento, ¿qué tan importante es la diferencia entre la temperatura del agua y la del tamal para que el calentamiento continúe? ¿Qué ocurre cuando esta diferencia es pequeña? Justifica tu respuesta. • Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente cómo queda esa función? Justifica tu respuesta. • Expresa mediante un modelo matemático o una ecuación diferencial, el enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t. Justifica tu modelo.
Indicadores de Evaluación	• Identifica patrones y regularidades en datos tabulares o gráficos y propone un modelo funcional coherente con el comportamiento observado.	

	• Modela y fórmula un modelo matemático que describa la situación presentada en el problema • Formula correctamente la ecuación diferencial correspondiente al modelo de crecimiento poblacional de Malthus. • Resuelve rigurosamente la ecuación diferencial utilizando el método adecuado. • Establece comparaciones fundamentadas entre el modelo empírico y el modelo teórico. • Argumenta matemáticamente sus decisiones durante el proceso de modelación. • Participa activamente en el trabajo colaborativo, evidenciando comunicación matemática clara y fundamentada.
Evidencias de Evaluación	• Se consideran como evidencia los registros digitales generados en GeoGebra Classroom durante el desarrollo del taller, incluyendo las construcciones gráficas, el modelo empírico propuesto, los procedimientos de resolución y las respuestas consignadas por cada pareja. • La correcta formulación y resolución de la ecuación diferencial del modelo de Malthus, así como la interpretación contextual de su solución, permiten evidenciar el dominio conceptual y procedimental alcanzado. • El contraste entre el modelo empírico y el modelo formal constituye evidencia de razonamiento crítico, especialmente en la identificación del alcance y las limitaciones del modelo exponencial.

Apéndice 9.

Tercer plan de clase: socialización aplicaciones lineales – Ley de Newton

Universidad Industrial de Santander **Bucaramanga**	
DISEÑO PEDAGÓGICO DE LA CLASE	

DATOS GENERALES DE LA CLASE		
Programa Académico	Ciclo Básico – Multidisciplinar – Facultades de Ciencias, Fisicoquímicas y Fisicomecánicas	
Asignatura	20255 - Ecuaciones Diferenciales	
Competencias de la Asignatura		
Competencias Cognitivas (Saber)	**Competencias Procedimentales** (Hacer)	**Competencias Actitudinales** (Ser)
MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo. **MC-C.** Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.	**MC1-P.** Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales. **MC-P.** Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.	**MC7-A.** Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas. **MC9-A.** Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado. **MC10-A.** Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.
Meta de Comprensión		
La meta de comprensión de esta clase es que los estudiantes integren y articulen los procesos de modelación matemática desarrollados en los talleres de crecimiento poblacional, enfriamiento y calentamiento, reconociendo las estructuras diferenciales comunes de fenómenos aparentemente distintos. A través de la socialización colectiva, el contraste argumentado y la discusión crítica de resultados, se busca que consoliden su comprensión sobre la formulación, resolución e interpretación de las EDOLPO, identificando similitudes, diferencias, alcances y limitaciones de los modelos construidos en cada contexto. Asimismo, se pretende fortalecer procesos metacognitivos, promoviendo que los estudiantes reflexionen sobre sus propias decisiones matemáticas, las dificultades encontradas y las estrategias empleadas para superarlas, así como potenciar el trabajo colaborativo como espacio de construcción conjunta del conocimiento. Finalmente, se enfatiza la importancia de abordar la modelación desde situaciones cotidianas para reconocer que las ecuaciones diferenciales no son únicamente estructuras algebraicas abstractas, sino herramientas que nos permiten comprender, describir y analizar fenómenos reales de su entorno.		

PLAN DE CLASE		
Título / Tema de la Clase	**Socialización y Consolidación Talleres Aplicaciones de GeoGebra**	
Propósito	Consolidar los procesos de modelación desarrollados en los talleres previos, promoviendo la argumentación matemática, el contraste crítico entre resultados y la identificación de estructuras diferenciales comunes en distintos fenómenos, fortaleciendo la transferencia conceptual hacia nuevas aplicaciones.	
Tiempo estimado para el desarrollo de la clase	**HIP:** 120 minutos.	**HTI:** 240 minutos.
Estrategias de enseñanza y de aprendizaje	• Socialización guiada. • Modelación matemática. • Resolución de Problemas y Comunicación Matemática • Trabajo colaborativo. • Discusión y contraste colectivo. • Generalización del conocimiento. • Uso de TIC y simuladores digitales.	
Objetivos de Aprendizaje:	• Socializar y argumentar los procesos de modelación desarrollados en los talleres. • Comparar estructuras diferenciales presentes en distintos fenómenos aplicados. • Identificar consensos y discrepancias en la construcción e interpretación de modelos. • Consolidar la resolución formal de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en contextos aplicados. • Transferir la estructura conceptual hacia nuevos escenarios como interés compuesto continuo y circuitos eléctricos.	
Recursos Físicos / Herramientas tecnológicas	• Libro guía de Dennis G. Zill. Secciones 1.3, 2.2 y 2.3 • Tablero y marcadores.	

	• Aula Moodle UIS, donde se encuentra el contenido de la clase, junto con el taller #1, taller #2 y taller #3. • GeoGebra Clásico y GeoGebra Classroom. • Simulador digital de interés compuesto continuo (propio). • Simulador web de circuitos eléctricos en serie.

DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
Propósito: *Garantizar la consolidación y organización de los procesos de resolución de problemas y modelación desarrollados en los talleres de crecimiento, enfriamiento y calentamiento, promoviendo la preparación argumentativa y reflexiva necesaria para una socialización fundamentada.*	***Propósito:*** *Generalizar y consolidar los procesos de modelación desarrollados en los talleres previos mediante la socialización de las fases exploratoria, teórica y de contraste, promoviendo la argumentación matemática, el análisis crítico y la identificación de estructuras diferenciales comunes entre distintos fenómenos. Asimismo, favorecer procesos metacognitivos y de trabajo colaborativo que permitan a los estudiantes reflexionar sobre sus decisiones, reconocer dificultades, contrastar resultados y fortalecer la comprensión conceptual de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden como herramienta transversal de modelación.*	***Propósito:*** *Consolidar los aprendizajes obtenidos durante la socialización, reforzar las dificultades identificadas —especialmente en el modelo de calentamiento bajo un enfoque de ambiente variables— y ampliar la transferencia de la estructura diferencial lineal de primer orden hacia nuevos contextos aplicados, fortaleciendo la autonomía y la continuidad del proceso resolución de problemas.*
Desarrollo del Antes de la Clase 1. Previo a la sesión, los estudiantes debían finalizar y revisar cuidadosamente los talleres “Enfriando un Chocolate” y “Calentando un Tamal”, además de organizar los resultados obtenidos en el Taller #1 – Propagación de Virus, trabajado en la clase anterior. Esta preparación no se limitaba a completar procedimientos, sino que implicaba estructurar de manera clara las tres fases desarrolladas en cada taller al asegurar coherencia entre el modelo empírico construido, la formulación de la ecuación diferencial y la interpretación contextual de la solución obtenida. 2. Se solicitó a cada grupo analizar críticamente los parámetros encontrados, revisar posibles inconsistencias en sus cálculos y reflexionar sobre las dificultades experimentadas durante el proceso, especialmente en aquellos casos donde los datos experimentales presentaron alta variabilidad. De este	**Desarrollo del Durante la Clase** 1. La sesión se desarrolla como un espacio de socialización académica estructurada, en el que los estudiantes presentan progresivamente los resultados obtenidos en los talleres de Propagación de Virus, Enfriando un Chocolate y Calentando un Tamal. Dado que cada taller estaba organizado en tres fases —exploratoria, teórica y de contraste— la dinámica consistía en que cada grupo presenta una fase específica, permitiendo que la reconstrucción del proceso de resolución de problemas y modelación se realizara de manera colectiva y articulada. 2. En la fase exploratoria, los grupos exponen cómo, a partir de datos, experimentaciones, laboratorios o simulaciones, identificaron patrones y regularidades que los llevaron a proponer un modelo inicial. Este momento permitió comparar distintas estrategias de análisis, discutir la interpretación de los datos experimentales y reflexionar sobre la diferencia entre crecimientos exponenciales, logarítmicos, logísticos, lineales, entre otros. Particular atención se dio a las dificultades encontradas en el taller de calentamiento, donde la variabilidad en la tomade de los datos al calentar el tamal generó muchas soluciones algunas muy variables, otras exactas y otras muy irregulares, por lo que, al realizar la regresión y los ajustes de parámetros, las estimaciones eran difíciles de trabajar.	**Desarrollo del Después de la Clase** 1. Como actividad posterior a la sesión, se asignó el ejercicio 18 de la sección 2.7 del texto guía de Dennis G. Zill, con el propósito de trabajar el modelo de manera más controlada y estructurada, dado que en el taller de calentamiento del tamal la variabilidad experimental generó dificultades en la estimación de parámetros y en el ajuste del modelo (dificultades causadas por el uso de la temperatura ambiente variable). Este ejercicio permitió reforzar la interpretación de la ecuación diferencial bajo condiciones más estables, consolidando la comprensión del proceso sin la complejidad propia de los datos empíricos. 2. Adicionalmente, se asignaron el Taller #4 (Interés Compuesto Continuo) y el Taller #5 (Simulando Circuitos en Serie), ambos organizados en las tres fases metodológicas ya trabajadas: exploratoria, teórica y de contraste. El taller de interés compuesto continuo parte de un simulador digital de matemática financiera,

modo, la preparación previa buscaba que los estudiantes no llegaran a la clase únicamente con resultados, sino con argumentos, preguntas y reflexiones que enriquecieran la discusión colectiva. 3. Asimismo, esta fase pretendía fortalecer el trabajo colaborativo, promoviendo la distribución equitativa de responsabilidades dentro de cada grupo y la construcción conjunta de una presentación clara y estructurada. La intención pedagógica era que el espacio presencial se destinara a la institucionalización del conocimiento, al contraste de perspectivas y a la consolidación conceptual, más que a la resolución mecánica de procedimientos.	3. Posteriormente, en la fase teórica, los estudiantes socializaron la formulación de la ecuación diferencial correspondiente a cada fenómeno y su resolución formal. Se enfatizó la estructura común de los modelos de primer orden, resaltando que tanto el crecimiento poblacional como los procesos de enfriamiento y calentamiento comparten la idea de proporcionalidad entre la tasa de cambio y una cantidad dependiente del estado del sistema, al ver como los modelos representan ecuaciones lineales de primer orden. Este análisis permitió fortalecer la comprensión estructural de las ecuaciones diferenciales más allá del contexto particular. 4. Finalmente, en la fase de contraste, los grupos analizan la coherencia entre los resultados empíricos y las soluciones analíticas, identificando consensos, discrepancias y posibles fuentes de error. Este momento favoreció procesos metacognitivos, al invitar a los estudiantes a reflexionar sobre sus decisiones matemáticas, la pertinencia de los supuestos asumidos y las limitaciones de los modelos construidos. La discusión colectiva permitió institucionalizar las ideas clave, consolidando la comprensión de la modelación como un proceso que integra exploración, formalización y validación crítica.	permitiendo modelar procesos de crecimiento exponencial en un contexto económico. Por su parte, el taller de circuitos en serie utiliza una simulación web para analizar fenómenos eléctricos relacionados con carga de un capacitor, ampliando la aplicación de las ecuaciones diferenciales hacia el ámbito físico. 3. Estas actividades buscan fortalecer la transferencia conceptual, evidenciando que la estructura matemática trabajada no es exclusiva de un fenómeno particular, sino una herramienta general de modelación aplicable a contextos cotidianos, económicos y físicos. Asimismo, se continúa promoviendo la autonomía, el trabajo colaborativo y la reflexión crítica sobre los supuestos y limitaciones de los modelos construidos.
Preguntas Orientadoras		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
• ¿El modelo que construimos en el taller representa adecuadamente el fenómeno observado? ¿Por qué? • ¿Qué supuestos hicimos al formular la ecuación diferencial y cómo influyen en el resultado? • ¿Existen diferencias entre el modelo empírico y el modelo teórico obtenido? ¿A qué podrían deberse? • ¿Qué dificultades surgieron en la estimación de parámetros y cómo las resolvimos? • ¿Qué relación encuentras entre el modelo de crecimiento poblacional y el	• ¿Qué estructura matemática comparten los modelos de crecimiento, enfriamiento y calentamiento? • ¿Cómo cambia la interpretación de la constante de proporcionalidad en cada contexto? • ¿Por qué fenómenos tan distintos pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden? • ¿Qué diferencias se observan entre los resultados obtenidos por distintos grupos y cómo se pueden explicar? • ¿Qué papel juega la variabilidad experimental en la precisión del modelo? • ¿En qué casos el modelo describe adecuadamente el fenómeno y en cuáles presenta limitaciones?	• ¿Cómo se evidencia la misma estructura diferencial en el modelo de interés compuesto continuo? • ¿Qué similitudes encuentras entre el modelo financiero y el modelo poblacional trabajado anteriormente? • ¿Cómo se interpreta la ecuación diferencial en el contexto de un circuito eléctrico en serie? • ¿Qué cambia y qué permanece igual cuando trasladamos la estructura matemática a un nuevo fenómeno? • ¿Qué ventajas tiene trabajar primero con un problema experimental para luego

modelo de enfriamiento o calentamiento?	• ¿Qué aprendiste del proceso de modelación que no sea únicamente el procedimiento algebraico?	abordar problemas controlados? • ¿Cómo influye la interpretación contextual en la comprensión de la solución matemática?
Indicadores de Evaluación	• Expone con claridad y coherencia los procesos de modelación desarrollados en los talleres, articulando fase exploratoria, teórica y de contraste. • Argumenta matemáticamente sus decisiones, justificando la formulación del modelo y la interpretación de sus parámetros en distintos contextos. • Identifica y explica las estructuras matemáticas comunes entre fenómenos de crecimiento, enfriamiento y calentamiento. • Reconoce y analiza críticamente las limitaciones y supuestos de los modelos construidos. • Participa activamente en el trabajo colaborativo, aportando al consenso y al análisis colectivo. • Transfiere la estructura conceptual de las ecuaciones diferenciales de primer orden hacia nuevos contextos como interés compuesto continuo y circuitos eléctricos. • Evidencia procesos metacognitivos al reflexionar sobre dificultades, errores y estrategias empleadas en la modelación.	

Evidencias de Evaluación	• Presentación oral estructurada de los talleres trabajados (Propagación, Chocolate y Tamal), evidenciando claridad en la explicación de las fases exploratoria, teórica y de contraste, así como coherencia en la interpretación del modelo construido. • Argumentación matemática durante la discusión colectiva, reflejada en las intervenciones, preguntas, justificaciones y análisis crítico de resultados entre grupos. • Comparación y contraste explícito entre modelos, identificando similitudes estructurales, diferencias en parámetros y limitaciones derivadas de los datos experimentales. • Entrega formal en Moodle de los Talleres #2 y #3 (Chocolate y Tamal), incluyendo el desarrollo completo de las tres fases metodológicas. • Registros digitales en GeoGebra Classroom asociados a los talleres, donde se evidencien construcciones gráficas, ajustes de modelos y procedimientos realizados. • Evidencias del trabajo experimental, tales como fotografías del proceso de medición de temperatura, tablas de datos recolectados y análisis realizados a partir de dichas mediciones. • Reflexiones finales incluidas en los talleres, donde se evidencie análisis metacognitivo sobre dificultades, decisiones tomadas y validez del modelo construido.

Apéndice 10.

Cuarto plan de clase: socialización aplicaciones lineales – Interés compuesto y Circuitos

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Bucaramanga**
	DISEÑO PEDAGÓGICO DE LA CLASE

DATOS GENERALES DE LA CLASE	
Programa Académico	Ciclo Básico – Multidisciplinar – Facultades de Ciencias, Fisicoquímicas y Fisicomecánicas
Asignatura	20255 - Ecuaciones Diferenciales

Competencias de la Asignatura		
Competencias Cognitivas (Saber)	**Competencias Procedimentales** (Hacer)	**Competencias Actitudinales** (Ser)
MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo. **MC-C.** Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.	**MC1-P.** Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales. **MC-P.** Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.	**MC7-A.** Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas. **MC9-A.** Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado. **MC10-A.** Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Meta de Comprensión
La meta de comprensión de esta clase es que los estudiantes integren y articulen los procesos de modelación matemática desarrollados en los talleres de crecimiento poblacional, enfriamiento y calentamiento, reconociendo las estructuras diferenciales comunes de fenómenos aparentemente distintos. A través de la socialización colectiva, el contraste argumentado y la discusión crítica de resultados, se busca que consoliden su comprensión sobre la formulación, resolución e interpretación de las EDOLPO, identificando similitudes, diferencias, alcances y limitaciones de los modelos construidos en cada contexto. Asimismo, se pretende fortalecer procesos metacognitivos, promoviendo que los estudiantes reflexionen sobre sus propias decisiones matemáticas, las dificultades encontradas y las estrategias empleadas para superarlas, así como potenciar el trabajo colaborativo como espacio de construcción conjunta del conocimiento. Finalmente, se enfatiza la importancia de abordar la modelación desde situaciones cotidianas para reconocer que las ecuaciones diferenciales no son únicamente estructuras algebraicas abstractas, sino herramientas que nos permiten comprender, describir y analizar fenómenos reales de su entorno.

PLAN DE CLASE		
Título / Tema de la Clase	**Socialización y Consolidación Talleres Aplicaciones de GeoGebra**	
Propósito	Consolidar y generalizar la comprensión estructural de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante la resolución guiada, la socialización argumentada de nuevos contextos de aplicación y la reflexión evaluativa sobre los procesos de modelación desarrollados en la unidad.	
Tiempo estimado para el desarrollo de la clase	**HIP:** 120 minutos.	**HTI:** 240 minutos.
Estrategias de enseñanza y de aprendizaje	• Socialización guiada. • Modelación matemática. • Resolución de Problemas y Comunicación Matemática • Trabajo colaborativo. • Discusión y contraste colectivo. • Generalización del conocimiento. • Uso de TIC y simuladores digitales.	
Objetivos de Aprendizaje:	• Resolver de manera estructurada y argumentada una ecuación diferencial lineal de primer orden, identificando correctamente su método de solución y justificando cada procedimiento realizado. • Interpretar la solución de la ecuación diferencial en distintos contextos aplicados, particularmente en modelos financieros (interés compuesto continuo) y eléctricos (circuitos en serie). • Reconocer la estructura matemática común presente en los diferentes fenómenos trabajados a lo largo de la unidad didáctica, estableciendo relaciones entre modelos poblacionales, térmicos, financieros y físicos.	
Recursos Físicos / Herramientas tecnológicas	• Libro guía de Dennis G. Zill. Secciones 1.3, 2.2 y 2.3 • Tablero y marcadores.	

	• Aula Moodle UIS, donde se encuentra el contenido de la clase, junto con el taller #4 y taller #5 • GeoGebra Clásico y GeoGebra Classroom. • Simulador digital de interés compuesto continuo (propio). • Simulador web de circuitos eléctricos en serie.	
DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
Propósito: *Consolidar los aprendizajes desarrollados a lo largo de la unidad didáctica mediante la resolución de un problema y la preparación argumentativa de nuevos contextos de aplicación, favoreciendo la transferencia de la estructura de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden hacia fenómenos financieros y eléctricos.*	***Propósito:*** *Consolidar la comprensión estructural de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante la resolución guiada de un problema controlado y la socialización argumentada de nuevos contextos de aplicación, promoviendo la generalización del modelo diferencial, el contraste colectivo de procedimientos y la integración conceptual de los aprendizajes desarrollados a lo largo de la unidad didáctica.*	***Propósito:*** *Promover la reflexión crítica y metacognitiva sobre el proceso de aprendizaje desarrollado durante la unidad didáctica, valorando la experiencia de resolución y modelación matemática en distintos contextos; recogiendo las percepciones estudiantiles sobre el trabajo colaborativo, el uso de herramientas tecnológicas y la comprensión estructural de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.*
Desarrollo del Antes de la Clase	**Desarrollo del Durante la Clase**	**Desarrollo del Después de la Clase**
1. Previo a la sesión, los estudiantes debían resolver el ejercicio 18 de la sección 2.7 del texto guía de Dennis G. Zill, el cual fue propuesto como un problema controlado que permitiera reforzar la comprensión del modelo matemático sin las dificultades asociadas a la variabilidad de los datos experimentales. La intención de esta actividad era consolidar los procedimientos formales de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. 2. Adicionalmente, los estudiantes debían desarrollar el Taller #4 relacionado con interés compuesto continuo y el Taller #5 asociado al análisis de circuitos eléctricos en serie mediante un simulador web. Ambos talleres mantenían la estructura metodológica trabajada a lo largo de la unidad didáctica, compuesta por tres fases: una fase exploratoria, orientada al reconocimiento de patrones y al planteamiento del modelo empírico; una fase teórica, centrada en la formulación y	1. La sesión inicia con la socialización del ejercicio 18 de la sección 2.7 del texto de Dennis G. Zill. Un estudiante pasa al tablero para desarrollar la resolución completa del problema, mientras el docente orientaba el proceso mediante preguntas estratégicas que permitieran justificar cada paso. Este momento es clave para trabajar los procedimientos, aclarar errores recurrentes y reforzar la comprensión de la estructura algebraica y conceptual de la ecuación diferencial lineal. Además, permitió evidenciar la importancia de la organización del proceso de resolución y la interpretación contextual del resultado final. 2. Posteriormente, se da paso a la socialización de los Talleres #4 y #5. Siguiendo la metodología trabajada durante toda la unidad, los grupos presentaron sus resultados organizados en las tres fases: exploratoria, teórica y de contraste. En el taller de interés compuesto continuo, los estudiantes explicaron cómo, a partir del simulador financiero, identificaron el comportamiento exponencial del capital y formularon el modelo diferencial correspondiente, estableciendo conexiones con el modelo de crecimiento trabajado en sesiones anteriores. Se discute la interpretación de la tasa de interés como constante de proporcionalidad y el significado de la capitalización continua en términos matemáticos. 3. En el taller de circuitos eléctricos en serie, los estudiantes presentan el análisis realizado a	1. Como actividad posterior a la sesión, se propuso a los estudiantes responder una serie de preguntas de valoración orientadas a reflexionar sobre los talleres desarrollados a lo largo de la unidad didáctica. Estas preguntas buscaban indagar su percepción frente a la metodología basada en las tres fases de trabajo (exploratoria, teórica y de contraste), el uso de simuladores digitales, la integración entre datos empíricos y modelos formales, y la pertinencia de abordar fenómenos cotidianos como punto de partida para la construcción del modelo diferencial. 2. Asimismo, se promovió una reflexión sobre el trabajo colaborativo, la participación en las socializaciones y las dificultades enfrentadas durante la resolución de los talleres. Este ejercicio permitió identificar aprendizajes significativos, reconocer avances conceptuales, procedimentales, y evidenciar cómo la resolución de problemas y la modelación matemática contribuyó en la

resolución de la ecuación diferencial correspondiente; y una fase de contraste, en la que se comparaban los resultados obtenidos empíricamente con la solución formal del modelo. 3. En el caso del interés compuesto continuo, los estudiantes exploraron mediante un simulador digital el comportamiento del crecimiento del capital bajo condiciones de capitalización continua, identificando la relación entre la tasa de crecimiento y la función exponencial. Por su parte, en el taller de circuitos eléctricos, se analizó el comportamiento de la carga en un circuito en serie a partir de una simulación interactiva, permitiendo observar la evolución temporal del sistema y establecer la ecuación diferencial que modela el fenómeno.	partir de la simulación web, explicando el comportamiento de la carga del sistema y la forma en que se construyó la ecuación diferencial que describe el proceso. Se enfatiza en la interpretación física de los parámetros involucrados y la relación entre la solución matemática y el comportamiento observado en la simulación. 4. Durante las socializaciones, se promueve el contraste colectivo entre los distintos contextos trabajados a lo largo de la unidad con el fin de identificar la estructura diferencial común en todos ellos. Este ejercicio de comparación permite fortalecer la capacidad de generalización, evidenciar la transversalidad del modelo matemático y consolidar la comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramienta unificadora de diversos fenómenos. 5. Asimismo, se fomenta la participación activa, el trabajo colaborativo y la argumentación matemática, favoreciendo un espacio de discusión donde los estudiantes no solo presentaron resultados, sino que también analizaron discrepancias, justificaron decisiones tomadas en el proceso de	resolución de ecuaciones diferenciales al explicar fenómenos reales.

	modelación y reflexionaron sobre las limitaciones de los modelos construidos.	
Preguntas Orientadoras		
Antes de la Clase	**Durante la Clase**	**Después de la Clase**
• ¿Qué procedimiento general debes seguir para resolver correctamente el ejercicio 18 de la sección 2,7? • ¿Cómo identificas que una ecuación diferencial es lineal de primer orden? • ¿Qué significado tiene la constante de proporcionalidad en el modelo de interés compuesto continuo? • ¿Qué variables intervienen en el modelo de un circuito en serie y cómo se relacionan entre sí? • ¿Qué semejanzas encuentras entre el modelo financiero y los modelos trabajados anteriormente (crecimiento y enfriamiento)?	• ¿Qué estructura matemática comparten todos los fenómenos modelados en la unidad didáctica? • ¿Cómo se interpreta la solución obtenida en el ejercicio 18 dentro del contexto del problema? • ¿Qué diferencias observas entre trabajar con datos experimentales y trabajar con un problema matemáticamente estructurado? • ¿Cómo cambia la interpretación de la constante cuando pasamos de un modelo poblacional a uno financiero o eléctrico? • ¿Qué elementos permanecen invariantes al cambiar de contexto aplicado? • ¿Por qué podemos afirmar que las ecuaciones diferenciales funcionan como herramienta unificadora de fenómenos diversos?	• ¿Qué taller consideras que fortaleció más tu comprensión de las ecuaciones diferenciales y por qué? • ¿Cómo influyó el trabajo colaborativo en tu proceso de aprendizaje durante la unidad? • ¿Qué dificultades enfrentaste al modelar fenómenos reales y cómo las superaste? • ¿Consideras que trabajar con situaciones cotidianas facilita la comprensión del objeto matemático? Justifica tu respuesta. • ¿Qué mejorarías en la metodología de trabajo por fases (exploratoria, teórica y de contraste)?

Indicadores de Evaluación	• Resuelve correctamente una ecuación diferencial lineal de primer orden, identificando su estructura y aplicando el método de solución adecuado. • Justifica de manera argumentada cada procedimiento algebraico realizado durante la resolución del problema. • Interpreta la solución obtenida en distintos contextos aplicados (financiero y eléctrico), explicando el significado de las variables y parámetros involucrados. • Establece relaciones explícitas entre los diferentes modelos trabajados en la unidad, reconociendo su estructura diferencial común. • Argumenta similitudes, diferencias, alcances y limitaciones de los modelos desarrollados. • Participa activamente en la socialización y discusión colectiva, aportando ideas fundamentadas. • Evidencia procesos de reflexión y metacognición frente a su aprendizaje durante la unidad didáctica.
Evidencias de Evaluación	• Desarrollo en tablero del ejercicio 18 de la sección 2.7, con argumentación guiada y explicación de cada procedimiento realizado. • Presentación oral estructurada de los Talleres #4 (Interés compuesto continuo) y #5 (Circuitos en serie), organizada según las tres fases metodológicas (exploratoria, teórica y de contraste). • Entrega formal en Moodle de los Talleres 4 y 5, incluyendo modelación, resolución, interpretación y contraste de resultados. • Registros digitales o capturas de las simulaciones utilizadas en los talleres (simulador financiero y simulador de circuito en serie). • Participación en la discusión colectiva evidenciada mediante intervenciones, preguntas, análisis comparativos y argumentación matemática. • Resolución de encuesta con las preguntas de valoración final de la unidad, donde se evidencie reflexión crítica y metacognitiva sobre el proceso de aprendizaje.

Apéndice 11.

Preguntas del banco de preguntas sobre EDOLPO para el quiz del corte

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Quiz de la Unidad Didáctica	Página: 1 de 8

Preguntas del Quiz Ecuaciones Diferenciales Lineales

Preguntas de Teoría

1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es ordinaria lineal de primer orden, pero NO se puede resolver mediante variables separables?

A) $t\frac{dy}{dt} + y = t^2$

B) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$

C) $(1+t^2)\frac{dy}{dt} + ty = y^2$

D) $\frac{dy}{dt} + y = y^2$

E) $(2xy+3)dx + (x^2+4y)dy = 0$

F) Ninguna de las Anteriores

2. Considere la ecuación $t\frac{dy}{dt} - 2y = t^3$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

A) La ecuación puede escribirse como $\frac{dy}{dt} = t^2 - \frac{2}{t}y$.

B) Es una ecuación lineal no homogénea de primer orden.

C) Es una ecuación de Bernoulli.

D) Es una ecuación no lineal de tipo sustitución homogénea.

E) Todas las Afirmaciones son Verdaderas

3. Relacione cada ecuación con el tipo correspondiente.

a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+1}{y}$; Variables Separables

b) $e^t\frac{dy}{dt} + e^t y = 3$; Lineal No Homogénea

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y$; Lineal Homogénea

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Quiz de la Unidad Didáctica	Página: 2 de 8

Preguntas de la Ley del Malthus

4. El modelo de crecimiento poblacional propuesto por Malthus se fundamenta en una hipótesis sobre la tasa de cambio de la población $P(t)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente dicha hipótesis?

A) La tasa de cambio de la población es proporcional al tiempo transcurrido.

B) La tasa de cambio de la población es proporcional al número de individuos presentes en ese instante.

C) La tasa de cambio de la población es proporcional a la diferencia entre la población actual y un valor límite fijo.

D) La tasa de cambio de la población es constante en el tiempo.

E) La tasa de cambio de la población depende de una función arbitraria del tiempo.

F) Ninguna de las Anteriores

5. Una población inicial de 1000 individuos crece a una tasa proporcional constante del 5% anual, bajo un modelo de crecimiento continuo. ¿Cuál es la función que modela la población $P(t)$?

A) $P(t) = 1000 + 0.05t$

B) $P(t) = 1000e^{0.05t}$

C) $P(t) = 0.05e^{1000t}$

D) $P(t) = 1000e^{-0.05t}$

E) $P(t) = 1000(1.05)^t$

F) Ninguna de las Anteriores

6. Considere el modelo de crecimiento poblacional de Malthus con $P(0) > 0$. Si $k < 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$?

A) La población crece exponencialmente sin límite.

B) La población presenta oscilaciones periódicas.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Quiz de la Unidad Didáctica	Código: 20255
		Página: 3 de 8

C) La población decrece exponencialmente y tiende a cero.

D) La población se vuelve negativa para todo $t > 0$.

E) El modelo no admite solución para valores negativos de k.

Preguntas de la Ley de Calentamiento/ Enfriamiento de Newton

7. La ley de enfriamiento / Calentamiento de Newton establece una relación entre la temperatura T de un objeto y la temperatura ambiente T_a. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa correctamente la hipótesis fundamental del modelo?

A) La temperatura del objeto es proporcional a la temperatura ambiente.

B) La razón de cambio de la temperatura depende únicamente del valor instantáneo de la temperatura del objeto.

C) La razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura ambiente en cada instante de tiempo.

D) La temperatura del ambiente tiende a igualarse con la temperatura objeto porque su variación es mayor.

E) La diferencia entre la temperatura del objeto y la del ambiente es constante en el tiempo.

8. Una taza de café a 80 °C se deja enfriar en una habitación cuya temperatura ambiente varía con el tiempo debido al aire acondicionado, según $T_a(t) = 22 + 3e^{-0.2t}$ donde la temperatura está en °C y el tiempo en minutos. ¿Qué ocurre con la temperatura del café en un tiempo muy largo ($t \to \infty$)?

A) La temperatura del café se aproxima gradualmente a 22°C cuando pasa mucho tiempo

B) La temperatura del café oscilará frecuentemente entre 0 y 22°C.

C) La temperatura del café se estabiliza en 25°C, que es el promedio del ambiente.

D) La temperatura del café seguirá bajando hasta alcanzar los 0°C.

E) La temperatura del café se mantiene en 80°C debido al aire acondicionado.

F) Ninguna de las Anteriores

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Quiz de la Unidad Didáctica	Código: 20255
		Página: 4 de 8

9. Un objeto inicialmente está a $80°C$. Se coloca en un ambiente cuya temperatura varía según: $T_a(t) = 25 + 10e^{-0.4t}$. Y se modela mediante la ley de enfriamiento / calentamiento de Newton. Luego de realizar los análisis correspondientes se llega dos posibles constantes de proporcionalidad **Opción 1:** $k = -0.3$ **Opción 2:** $k = -1.2$

A) Ambos modelos alcanzan exactamente el mismo valor límite, pero el Modelo 2 se ajusta más rápidamente a la temperatura ambiente a medida que pasa el tiempo.

B) El Modelo 1 puede llegar a superar la temperatura ambiente debido a que $|k|$ es menor.

C) El Modelo 2 cambia el valor límite final de la temperatura.

D) El Modelo 1 necesariamente cambia de enfriarse a calentarse en algún instante.

E) El valor de k solo afecta el comportamiento cuando la temperatura ambiente es constante.

Preguntas de Interés Compuesto Continuo

10. Una inversión inicial de 2 millones de pesos se coloca en una cuenta que genera 8% de interés anual compuesto continuamente. ¿Cuál de las siguientes funciones modela correctamente el capital en función del tiempo?

A) $A(t) = 2e^{8t}$

B) $A(t) = 2e^{0.08t}$

C) $A(t) = 0.08e^{2t}$

D) $A(t) = 2(1.08)^t$

E) $A(t) = 2 + 0.08t$

11. Se obtiene como solución de una ecuación diferencial la función

$$A(t) = 5000e^{0.06t}.$$

¿Cuál de las siguientes situaciones describe correctamente el fenómeno modelado por esta función?

A) Una inversión inicial de 5000 pesos con 6% de interés anual compuesto continuamente.

B) Una inversión inicial de 5000 pesos con 60% de interés anual compuesto continuamente.

C) Una inversión inicial de 6 pesos con 50% de interés anual.

D) Una inversión inicial de 5000 pesos con 6% de interés compuesto una vez por año.

E) Una inversión inicial de 5000 pesos cuyo crecimiento es constante en el tiempo.

12. Los modelos de crecimiento poblacional propuesto Malthus y el de interés compuesto continuo producen soluciones de la forma:

$$y(t) = ce^{kt}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones explica mejor por qué ambos modelos son matemáticamente equivalentes?

A) En ambos modelos la tasa de cambio de la variable es proporcional a su valor instantáneo.

B) En ambos modelos la variable depende únicamente del tiempo y no de otras cantidades.

C) En ambos modelos la ecuación diferencial puede resolverse mediante separación de variables.

D) En ambos modelos la solución es una función exponencial.

E) En ambos modelos el crecimiento es constante en el tiempo.

Preguntas de Circuitos en Serie

13. En un circuito RC en serie con una fuente de voltaje $V(t)$, una resistencia R y un capacitor C, la ecuación diferencial que describe la carga $q(t)$se obtiene aplicando una ley fundamental de los circuitos eléctricos. ¿Cuál de las siguientes leyes permite establecer la ecuación diferencial del circuito?

A) La ley de Ohm aplicada únicamente a la resistencia.

B) La ley de Kirchhoff de corrientes.

C) La ley de Kirchhoff de voltajes aplicada a la malla del circuito.

D) La ley de inducción de Faraday.

E) La ley de Coulomb.

14. Se obtiene como solución de una ecuación diferencial

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/(RC)}.$$

Un estudiante afirma que esta solución describe la corriente en un circuito RC en serie cuando el capacitor se está descargando y no hay fuente externa conectada.

Indique si la afirmación es verdadera (V) o **falsa (F).**

15. Un capacitor inicialmente descargado se conecta a una batería de 10 V a través de una resistencia de 200 Ω. El capacitor tiene una capacitancia de 0.01 F. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales modela correctamente la carga del capacitor?

A) $\frac{dq}{dt} + 0.5q = 10$

B) $\frac{dq}{dt} + 0.5q = 0.05$

C) $\frac{dq}{dt} + 5q = 0.05$

D) $\frac{dq}{dt} + 5q = 10$

E) $\frac{dq}{dt} + 0.05q = 5$

16. En un circuito RC en serie con una fuente de voltaje constante E, la carga $q(t)$en el capacitor satisface

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E$$

Suponga que inicialmente el capacitor está descargado, es decir $q(0) = 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente el comportamiento del circuito cuando t aumenta?

A) La carga del capacitor crece indefinidamente con el tiempo.

B) La corriente en el circuito aumenta con el tiempo hasta alcanzar un valor constante.

C) La carga del capacitor se aproxima gradualmente al valor CE.

D) La corriente permanece constante durante todo el proceso.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Quiz de la Unidad Didáctica	Código: 20255	
	Página: 7 de 8	

E) La carga del capacitor oscila alrededor de un valor límite.

Preguntas Finales

17. Los modelos estudiados en la unidad producen distintos tipos de comportamiento en sus soluciones. ¿Cuál de los siguientes modelos NO conduce a una solución de tipo exponencial?

A) Modelo de crecimiento poblacional de Malthus

B) Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

C) Modelo de interés compuesto continuo

D) Descarga de un capacitor en un circuito RC

E) Modelo logístico de crecimiento poblacional

18. Muchos de los modelos estudiados en el curso hasta el momento tienen soluciones exponenciales. ¿Cuál de las siguientes características es común en este tipo de soluciones?

A) Siempre cambian a una velocidad constante.

B) Siempre oscilan alrededor de un valor fijo.

C) La tasa de crecimiento o decrecimiento depende del valor actual de la variable.

D) Siempre alcanzan su valor máximo en un tiempo finito.

E) Siempre son funciones lineales.

19. Un estudiante afirma lo siguiente sobre los modelos estudiados en el curso: "Todos los modelos trabajados (crecimiento poblacional, interés compuesto, enfriamiento de Newton y circuitos RC) tienen soluciones exponenciales, por lo tanto, todas las variables involucradas siempre crecen exponencialmente con el tiempo." ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente el error en el razonamiento del estudiante?

A) No todos los modelos mencionados conducen a ecuaciones diferenciales lineales.

B) Aunque muchas soluciones contienen exponenciales, algunas describen decrecimiento y no crecimiento.

C) No todos los modelos mencionados tienen soluciones exponenciales, por lo que no permiten describir el crecimiento.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Quiz de la Unidad Didáctica	Código: 20255	
	Página: 8 de 8	

D) Las ecuaciones diferenciales no pueden describir fenómenos de crecimiento, solo decrecimiento.

E) Las soluciones exponenciales siempre llevan a que las variables crezcan; no hay ningún error en el razonamiento.

Apéndice 12.

Problema de aplicación lineal para el parcial del primer corte

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Problema Parcial	Código: 20255
		Página: 1 de 1

Problema Parcial – Aplicaciones Lineales

La familia García prepara agua panela para el desayuno. Al servirla en el pocillo, la temperatura inicial es de 84.2°C. La cocina se encuentra a temperatura constante de 25°C y no hay corrientes de aire. La señora García sabe que, después de 8 minutos, la temperatura del agua panela es de 65.3°C. Su intención es servirla en el momento adecuado para que esté aproximadamente a 40°C cuando su familia baje a desayunar.

- Plantee el modelo diferencial que describe el proceso de enfriamiento.
- Resuelva la ecuación diferencial asociada al problema.
- Determine el valor de la constante de enfriamiento.
- ¿Cuánto tiempo tardará el agua panela en alcanzar los 40°C?
- Analice el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

Apéndice 13.

Preguntas encuesta de percepción estudiantil sobre la unidad didáctica.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Encuesta de Percepción	Código: 20255
		Página: 1 de 3

Percepción sobre los Talleres de Modelación de EDOLPO

Instrucciones:

A continuación, encontrarás una serie de afirmaciones. Marca con un número del 1 al 5 según tu nivel de acuerdo, donde:

1 = Totalmente en desacuerdo

2 = En desacuerdo

3 = Ni de acuerdo ni en desacuerdo

4 = De acuerdo

5 = Totalmente de acuerdo

1. Los talleres me ayudaron a plantear e identificar una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden y a determinar su solución.
2. Relacionar las matemáticas con situaciones reales facilitó mi aprendizaje.
3. Los talleres me ayudaron a ver la utilidad de las ecuaciones diferenciales.
4. Mi percepción sobre las ecuaciones diferenciales mejoró después de los talleres.
5. Sentí mayor motivación e interés al trabajar problemas contextualizados y simulados.
6. Los talleres me ayudaron a comprender qué significa modelar una situación con una ecuación diferencial.
7. Comprendí el procedimiento de solución de una EDOPO Lineal por variables separables y factor integrante.
8. Pude interpretar de manera adecuada la solución obtenida dentro del contexto del problema.
9. Los talleres facilitaron la transición entre el contexto verbal y la expresión matemática formal.
10. Después de los talleres, me siento más seguro(a) resolviendo ecuaciones diferenciales lineales.
11. Los talleres favorecieron mi capacidad de modelación, argumentación y comunicación matemática
12. El uso de herramientas tecnológicas (GeoGebra, simuladores, etc.) aportó a mi aprendizaje.

13. ¿Cómo calificarías el nivel de dificultad general de los talleres?

Muy bajo

Bajo

Adecuado

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Encuesta de Percepción	Código: 20255
		Página: 2 de 3

Alto

Muy alto

14. ¿Cómo calificas el tiempo asignado para desarrollar los talleres?
    Muy insuficiente
    Insuficiente
    Adecuado
    Suficiente
    Muy suficiente

15. ¿Cómo calificas la cantidad de ejercicios por taller?
    Muy insuficiente
    Insuficiente
    Adecuada
    Excesiva
    Muy excesiva

16. ¿En qué parte experimentaste mayor dificultad?

Fase 1 (Experimentación y Práctica)

Fase 1 (Modelación del Problema)

Fase 2 (Resolución Teórica del Problema)

Fase 2-3 (Interpretación y Análisis de los Resultados)

Fase 3 (Contraste Teórico – Práctico)

Fase 4 (Socialización en clase y trabajo en grupo)

En todas las fases experimente igual dificultad

17. ¿Cuál de los procesos generales de la actividad matemática consideras que desarrollaste más con los talleres?

Formulación y Resolución de Problemas.

Modelación de Procesos y Fenómenos

Razonamiento y Comunicación Matemática

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
	Encuesta de Percepción	Código: 20255	
		Página: 3 de 3	

Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.

Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas

18. ¿Cuál de los talleres te gustó más? ¿Por qué?

19. ¿Cuál de los talleres te resultó más difícil? ¿Por qué?

20. ¿Qué recomendaciones harías para fortalecer los talleres de aplicación en futuras implementaciones? Puedes referirte a la metodología, el nivel de dificultad, el tiempo, los recursos utilizados, entre otros.

21. Antes de esta unidad, ¿habías trabajado en clases de matemáticas (como cálculo I, II, III) problemas que integraran experimentación, modelación, resolución teórica y formalización?
    Nunca
    Rara vez
    Algunas veces
    Frecuentemente
    Siempre

22. Consideras pertinente implementar este tipo de talleres de aplicación en otros cursos de matemáticas. ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

Apéndice 14.

Problemas de la entrevista semiestructurada

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Entrevista	Código: 20255	Página: 1 de 5

Problema Entrevista

1. A continuación, se presentan varias ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Clasifique cada ecuación seleccionando la opción que corresponda. Luego, justifique brevemente su respuesta.

$$y\frac{dx}{dy} + 2xy = y^2$$

Lineal Homogénea	Lineal No Homogénea	No Lineal

$$\frac{dP}{dt} + 2tP = P^2 + 4t$$

Lineal Homogénea	Lineal No Homogénea	No Lineal

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Lineal Homogénea	Lineal No Homogénea	No Lineal

$$\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$$

Lineal Homogénea	Lineal No Homogénea	No Lineal

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Entrevista	Código: 20255	Página: 2 de 5

Problema Entrevista

2. Un jugo de mora se encuentra inicialmente a temperatura ambiente de $25°C$ y se pone en un refrigerador a temperatura constante de $-5°C$.

   Después de 15 minutos, la temperatura del jugo desciende a $10°C$.

a) Plantee el modelo diferencial que describe el proceso de enfriamiento.
b) Resuelva la ecuación diferencial y exprese explícitamente la solución general y particular.
c) Determine el valor de la constante de enfriamiento.
d) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se pone el jugo en el refrigerador hasta que baje a una temperatura de $5°C$?
e) Analice el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Entrevista	Código: 20255
		Página: 3 de 5

Problema Entrevista

3. Una población inicial de 1000 individuos crece a una tasa proporcional constante del 5% anual, bajo un modelo de crecimiento continuo. ¿Cuál es la función que modela la población $P(t)$?
   a. $P(t) = 1000 + 0.05t$
   b. $P(t) = 1000e^{0.05t}$
   c. $P(t) = 0.05e^{1000t}$
   d. $P(t) = 1000e^{-0.05t}$
   e. $P(t) = 1000(1.05)^t$

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Entrevista	Código: 20255
		Página: 4 de 5

Problema Entrevista

4. Una panadería introduce una bandeja de panes que inicialmente se encuentran a 25°C en un horno que acaba de encenderse. La temperatura interna del horno no es constante, sino que aumenta progresivamente hasta estabilizarse en 180°C, y puede modelarse por:

   $T_a(t) = 180 - 130e^{-0.4t}$ donde t está en minutos.

   Se sabe que la rapidez con la que cambia la temperatura de los panes es proporcional a la diferencia entre la temperatura del horno y la temperatura del pan. Además, la constante de proporcionalidad es $k = 0{,}4$
   - Plantee el modelo diferencial que describe el proceso de enfriamiento, según la ley de enfriamiento de Newton.
   - Resuelva la ecuación diferencial asociada al problema.
   - ¿Cuánto tiempo tardará el pan en alcanzar los 100°C?
   - Realiza la gráfica de la temperatura ambiente variable y la solución de la ecuación diferencial y analice el comportamiento de la solución a corto y largo plazo.
   - ¿Es posible que el pan supere los 180°C? Justifique su respuesta a partir del modelo obtenido y la gráfica observada.

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Entrevista	Código: 20255
		Página: 5 de 5

Problema Entrevista

5. Se obtiene como solución de una ecuación diferencial

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)}.$$

Un estudiante afirma que esta solución describe la corriente en un circuito RC en serie cuando el capacitor se está descargando y no hay fuente externa conectada.
Indique si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). **Justifica tu respuesta.**

Apéndice 15.

Interfaz GeoGebra Classroom Taller #1

Link de ingreso para el GeoGebra classroom desde la interfaz que tuvieron los estudiantes para resolver el taller:

https://www.geogebra.org/classroom/ukndkpbj

Apéndice 16.

Instrucciones para los estudiantes sobre el Taller 1

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER / ESCUELA DE MATEMÁTICAS	ECUACIONES DIFERENCIALES
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Código: 20255
		Página: 1 de 4

Taller #1 – Ley de Malthus – Propagación de Virus

Instrucciones:

1. Ingresa al Classroom de GeoGebra (https://www.geogebra.org/classroom/nqcxjvrx), o ingresa por medio del GeoGebra Classroom usando el código **NQCX JVRX**. Asegúrate de registrarte con tu correo o crear un usuario para que tu progreso quede guardado correctamente.

2. Esta secuencia didáctica se desarrollará en cuatro fases. En cada una de ellas analizarás la situación propuesta desde diferentes perspectivas, avanzando desde la exploración inicial hasta una comprensión más profunda de la problemática.

   - *Fase exploratoria:* En esta parte seguirá un paso a paso en el que deberá completar tablas, observar comportamientos y responder preguntas basadas en el análisis que vaya realizando. El propósito es que, a partir de los datos, identifique patrones, cree relaciones y construya modelos matemáticos.
   - *Fase teórica:* Se retomará la situación usando únicamente herramientas teóricas. Aquí se solucionará la ecuación diferencial ya establecida correspondiente al modelo y se analizará formalmente, sin depender del modelo realizado en la fase anterior.
   - *Fase de contraste:* Se compararán los resultados obtenidos en la parte exploratoria con los obtenidos mediante el desarrollo teórico. El objetivo es identificar similitudes, diferencias y posibles explicaciones para estas.
   - *Fase de cierre:* Finalmente, se realizará una puesta en común donde se compartirán las conclusiones, se escucharán las de los compañeros y se discutirán los resultados del trabajo realizado.

   Toda la secuencia gira en torno a la situación problema que se presenta a continuación.

   "La Isla de las Flores tiene una población aproximada de 25.000 habitantes. El 16 de marzo se detectaron 5 personas infectadas con un virus desconocido. De esas 5, tres son residentes que regresaron de un viaje y dos son viajeros temporales. Según la investigación inicial, cada persona infectada contagia en promedio a 2 personas nuevas por día (en este contexto no hay muertes ni medidas de control)."

Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento

3. Para desarrollar esta fase del taller, deberá observar el problema presentado, analizar la situación y completar la hoja de cálculo que se presenta en el Classroom de GeoGebra, una vez llenada, observa los puntos que se generan en la parte gráfica y analiza su comportamiento. A partir de esta exploración, y teniendo en cuenta las regularidades,

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER / ESCUELA DE MATEMÁTICAS	ECUACIONES DIFERENCIALES
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Código: 20255
		Página: 2 de 4

   patrones e inferencias que logres identificar en los datos y en la gráfica responde allí mismo de forma secuencial las siguientes preguntas:
   - ¿Cómo describirías el comportamiento de la población infectada a lo largo del tiempo? ¿Notas algún patrón o regularidad en los datos? Justifica tu respuesta.
   - Con base en tus observaciones y análisis, ¿puedes proponer un modelo inicial (regla, expresión o función) que describa el número de infectados en el tiempo n? Explica por qué consideras que este modelo es adecuado.
   - ¿A qué razón cambia el número de infectados día a día? ¿En qué medida crece? Justifica tu respuesta.

Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría

4. Una vez finalizada la fase exploratoria, podrás iniciar esta segunda parte del taller. Para ello, deberás consultar el PDF sobre la Ley de Malthus, donde encontrarás la información teórica necesaria para comprender el modelo matemático asociado a la propagación del virus.
   Si lo deseas, también puedes revisar otros textos de apoyo, como el libro *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* de Zill u otros recursos académicos pertinentes. En caso de hacerlo, deberás indicar claramente cuáles fueron los recursos consultados.

5. Posteriormente, deberás resolver paso a paso el problema de la propagación del virus utilizando el modelo de Malthus. Para ello:
   - Extrae los datos proporcionados en la situación problema.
   - Sustituye dichos datos en el modelo ya establecido por Malthus.
   - Encuentra la solución de la ecuación diferencial asociada y analízala.
   - Este procedimiento deberá realizarse a lápiz y papel, mostrando de manera clara cada razonamiento.
6. Finalmente:
   - Presenta tu trabajo de forma ordenada y legible.
   - Justifica cada procedimiento realizado.
   - Anota las conclusiones que obtengas a partir del modelo y su solución.
   - Sube tu trabajo al espacio de Moodle denominado (*Taller #1 – Ley de Malthus – Propagación de Virus*).
   - Entrega la versión física al docente el martes 17 de febrero de 2026 en el horario de clase establecido.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Código: 20255
		Página: 3 de 4

7. Una vez hayas resuelto el problema de propagación del virus utilizando el modelo de Malthus, ingresa nuevamente al Classroom de GeoGebra y resuelve las siguientes situaciones:
    - A partir de la situación problema, plantea la ecuación diferencial correspondiente al modelo malthusiano que describe la propagación del virus.
    - Determina y escribe con claridad la solución encontrada para la ecuación diferencial asociada al modelo malthusiano para la situación planteada.
    - Luego, grafica la solución obtenida con el modelo malthusiano para la situación planteada, indicando el intervalo de tiempo considerado.
8. Después de esto en el mismo classroom podrás avanzar a la siguiente fase.

Fase de Contraste: La Teoría Frente al Experimento

9. En esta última parte, deberás realizar en GeoGebra un gráfico paralelo entre:
   La solución obtenida en la exploración dirigida (Primera Fase).
   La solución obtenida con el modelo algebraico de Malthus (Segunda Fase).

10. Luego, responde directamente en el GeoGebra las siguientes preguntas:
    - ¿Ambas curvas crecen de la misma forma o hay diferencias visibles? Justifica tu respuesta.
    - Al comparar la representación gráfica de la solución obtenida en la fase exploratoria con la representación gráfica de la solución obtenida con el modelo malthusiano, ¿en qué se parecen y en qué se diferencian ambas curvas? Justifica tu respuesta.
    - Después de 3 días, ¿el valor de la población infectada encontrado con el modelo malthusiano coincide con el valor obtenido en la exploración previa? Justifica tu respuesta.
    - Según el modelo malthusiano, ¿en qué momento la población infectada alcanza el total de habitantes de la isla? Explica qué significa este resultado en el contexto del problema.
    - ¿Qué limitaciones podrías encontrar si intentaras usar el modelo de Malthus para predecir en un período de tiempo más extenso (por ejemplo, a 40 días)? Justifica tu respuesta
    - ¿Crees que este modelo sería útil en la realidad si se aplicaran medidas de control (vacunas, aislamiento, etc.)? Justifica tu respuesta

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Código: 20255
		Página: 4 de 4

Fase de Cierre: De la Acción a la Reflexión

11. Una vez finalizadas las actividades del taller, organiza la información obtenida en las distintas fases y participa en una socialización con tus compañeros y docentes. Durante este espacio, deberás:
    - Explicar de manera clara cómo abordaste la situación problema y qué estrategias utilizaste para construir y analizar el modelo.
    - Comparar brevemente los resultados obtenidos mediante la exploración en GeoGebra con los obtenidos a partir del modelo malthusiano.
    - Mencionar las principales dificultades que surgieron durante el desarrollo del taller y describir cómo lograste superarlas.
    - Compartir las conclusiones a las que llegaste sobre el comportamiento de la propagación del virus y las limitaciones del modelo utilizado.
    - Este espacio busca promover el diálogo, la argumentación, el intercambio de ideas y los procesos metacognitivos, lo que permite enriquecer la comprensión de las temáticas a partir de las perspectivas de los distintos participantes.

12. No es necesario enviar las respuestas de manera adicional (a menos que se solicite), ya que GeoGebra guarda automáticamente tu progreso, siempre que hayas ingresado correctamente con tu usuario.

Más allá de las ecuaciones,

las matemáticas nos enseñan

a pensar, decidir y comprender.

Apéndice 17.

Modelo de crecimiento poblacional Taller 1

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER ESCUELA DE MATEMÁTICAS	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Código: 20255 Página: 1 de 2

Modelo de Crecimiento Poblacional (Ley de Malthus)

En 1798, Thomas Malthus (1766–1834) propuso uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano. Su planteamiento, conocido como modelo malthusiano de crecimiento poblacional, describe cómo varía la población en ausencia de limitaciones externas y bajo la suposición de que las tasas de natalidad y mortalidad permanecen constantes en el tiempo (Vergel et al., 2022).

En síntesis, la hipótesis central del modelo sostiene que la velocidad de crecimiento de una población es proporcional al tamaño que esta posee en un instante dado. Esto significa que:

- Cuando la población es pequeña, el crecimiento es lento.
- Cuando la población aumenta, el crecimiento se vuelve cada vez más rápido.

Desde el punto de vista matemático, esta relación se expresa afirmando que la rapidez con la que cambia la población es proporcional al número de individuos presentes en un determinado instante de tiempo. Esta relación se representa mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = k\,P(t)$$

donde:

- $P(t)$ = número de individuos en el tiempo t.
- k = tasa de crecimiento (constante de proporcionalidad).
- $\frac{dP}{dt}$ = rapidez con que cambia la población.

Este modelo describe un crecimiento continuo en el que cada nuevo individuo contribuye al aumento total de la población, lo que genera una dinámica de crecimiento acelerado conforme pasa el tiempo.

En la vida real, el modelo de Malthus resulta útil para describir la fase inicial del crecimiento de poblaciones humanas, animales, bacterianas o incluso la propagación de

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER ESCUELA DE MATEMÁTICAS	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Código: 20255 Página: 2 de 2

enfermedades infecciosas, siempre que no existan factores que limiten dicho crecimiento. Sin embargo, el modelo no contempla aspectos como la capacidad máxima del entorno, la recuperación de enfermos, la mortalidad o la implementación de medidas de control, por lo que su aplicación es válida solo bajo condiciones ideales (Ramírez, 2022; Zill y Cullen, 2006).

Referencias Bibliográficas

Ramírez J. (2022). Ecuaciones Diferenciales Libro Interactivo. Fondo Editorial RED Descartes. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/PDF/Ecuaciones_Diferenciales.pdf

Vergel, M., Rincón, O., y Ibargüen, E. (2022). *Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*. Editorial Universidad de Nariño. https://sired.udenar.edu.co/7344/1/Ecuaciones%20diferenciales.pdf

Zill, D. & Cullen, M. (2006). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Ecuaciones Diferenciales. (3ª ed., Vol. 1). McGraw-Hill Interamericana.

Apéndice 18.

Rúbrica de Evaluación y Matriz de Competencias Taller 1

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Página: 1 de 4

Matriz de Competencias y Rúbrica de Evaluación – Taller #1

Competencias

Modela, resuelve y analiza fenómenos reales de crecimiento poblacional mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden homogéneas (modelo de Malthus), articulando la exploración, la representación gráfica, el razonamiento matemático y el uso de herramientas tecnológicas, con el fin de argumentar, interpretar y reflexionar críticamente sobre el comportamiento de fenómenos poblacionales, la validez de modelos y sus limitaciones en contextos reales.

Micro-competencias

- **Procedimental**

MC1-P. Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales.

MC-P. Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.

- **Cognitiva**

MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.

MC-C. Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.

- **Actitudinal**

MC7-A. Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas.

MC8-A. Desarrolla las actividades académicas de manera honesta y responsable.

MC9-A. Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado.

MC10-A. Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Página: 2 de 4

Rúbrica de Evaluación

Escala de valoración:

Excelente (5), Bueno (4), Aceptable (3), Deficiente (2), Bajo (1), Nulo (0)

1. **Formulación y Resolución de Problemas.**

Se evalúa la capacidad del estudiante para comprender la situación de propagación del virus, identificar las variables relevantes (población inicial, tasa de contagio, tiempo) y formular adecuadamente el problema en términos matemáticos. Incluye la interpretación del crecimiento poblacional, la construcción de estrategias de solución y la validación de resultados dentro del contexto planteado.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Formula, resuelve y valida el problema con claridad, coherencia y sentido físico.	Formula, resuelve e interpreta correctamente las situaciones propuestas.	Formula el problema y propone una estrategia básica de solución.	Plantea el problema parcialmente, con errores en las variables o condiciones.	Reconoce el fenómeno de forma superficial y sin estructuración matemática.	No identifica el problema ni responde las situaciones planteadas.	

2. **Modelación de Procesos y Fenómenos**

Se evalúa la capacidad para traducir el crecimiento de infectados a un modelo matemático, tanto en su forma discreta inicial como en su formulación continua mediante la ecuación diferencial malthusiana. Incluye la interpretación de la constante de crecimiento, la construcción de la ecuación diferencial y el análisis de sus supuestos y limitaciones.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Modela con precisión, interpreta parámetros y discute alcances y límites.	Modela adecuadamente e interpreta el significado de la constante de crecimiento.	Propone un modelo aceptable con relación básica al fenómeno.	Propone modelo incompleto o con errores en la interpretación de la tasa.	El modelo no representa el fenómeno.	No construye ningún modelo.	

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Página: 3 de 4

3. Razonamiento y Comunicación Matemática

Se evalúa la claridad, coherencia y rigurosidad en la argumentación matemática. Incluye la explicación del patrón de crecimiento, la justificación de cada procedimiento algebraico y el análisis comparativo entre las soluciones exploratoria y teórica. Se valora el uso adecuado del lenguaje matemático (en forma oral y escrita) y la reflexión crítica sobre el modelo.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Explica con claridad, rigor y buen uso del lenguaje matemático.	Comunica bien sus ideas y justifica procedimientos.	Explica de forma comprensible, aunque con vacíos conceptuales.	Argumenta con poca claridad y sin coherencia.	Comunicación muy deficiente y desorganizada.	No presenta explicaciones ni argumentación.	

4. Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.

Se evalúa la correcta aplicación de procedimientos algebraicos y técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden (separación de variables). Incluye la sustitución de datos, el despeje adecuado, el uso correcto de funciones exponenciales y la precisión en los cálculos.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Ejecuta con precisión, orden y justificación cada paso.	Procedimientos bien ejecutados, con pocos errores.	Aplica correctamente los métodos básicos.	Procedimientos incompletos o con muchos errores.	Aplica de forma incorrecta métodos o fórmulas.	No realiza procedimientos matemáticos.	

5. Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas

Se evalúa el uso e integración de distintas representaciones del crecimiento poblacional: tablas, gráficos, expresiones algebraicas y ecuaciones diferenciales. También considera las conexiones entre modelo discreto y continuo, crecimiento exponencial y tasa de cambio proporcional, así como reflexiones sobre aplicaciones reales y limitaciones del modelo.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Articula con claridad el	Integra bien distintas	Usa varias formas	Presenta representaciones	Usa representaciones	No usa representaciones	

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #1 – Propagación de Virus – Ley de Malthus	Página: 4 de 4

representar de varias formas y conexiones matemáticas y físicas.	formas de representar y conecta conceptos matemáticos.	básicas de representar y hace algunas conexiones elementales.	parciales y conexiones muy débiles.	incorrectas y no relaciona conceptos.	ni establece conexiones.	

Apéndice 19.

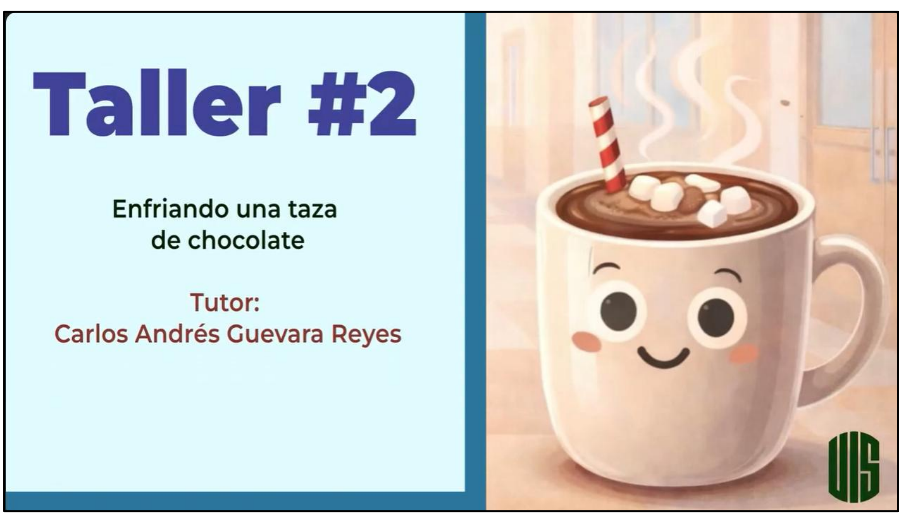
Interfaz GeoGebra Classroom Taller #2

Enlace de ingreso para el GeoGebra classroom desde la interfaz que tuvieron los estudiantes para resolver el taller:

https://www.geogebra.org/classroom/gmmkznzn

Apéndice 20.

Vídeo explicativo experimento enfriando chocolate Taller 2



Enlace vídeo de explicación: https://www.youtube.com/watch?v=O7p4Z6pUy7k

Apéndice 21.

Situación problema Taller 2

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 1 de 2

Situación Problema: El Enfriamiento de una Taza de Chocolate

En este laboratorio prepararán una taza (o pocillo) de chocolate caliente y analizarán cuánto tiempo tarda en enfriarse hasta alcanzar una temperatura adecuada para su consumo. Aunque se trata de una situación cotidiana, este proceso puede describirse mediante un modelo matemático planteado por medio de ecuaciones diferenciales. A lo largo de la actividad, realizarán mediciones experimentales de la temperatura del chocolate en función del tiempo y utilizarán los datos obtenidos para identificar patrones, construir un modelo matemático y analizar el comportamiento del proceso de enfriamiento.

Materiales

- 1 taza.
- Chocolate en polvo o en pastilla.
- Agua y/o leche.
- Cuchara para mezclar.
- Termómetro de cocina para medir la temperatura de la bebida.
- Cronómetro o reloj con segundero (puede ser el del celular).
- Cuaderno u hoja para tomar lo datos inicialmente.
- Dispositivo con acceso a GeoGebra.
- Un lugar tranquilo de la casa, sin corrientes de aire fuertes y con temperatura ambiente estable.

Preparación y Toma de Datos

Este experimento se realizará en casa y en **grupos de máximo tres y mínimo dos estudiantes**. Sigan cuidadosamente los pasos que se describen a continuación:

1. Prepararán una taza de chocolate caliente siguiendo el procedimiento habitual que usen en casa para hacer chocolate.
2. Seleccionen un lugar de la casa donde la temperatura ambiente se mantenga lo más constante posible durante todo el experimento.
3. Antes de iniciar las mediciones del chocolate, registran la temperatura ambiente (en °C). Pueden usar un termómetro de ambiente o consultar esta información mediante el celular.
4. Justo después de servir el chocolate en el pocillo, miden su temperatura inicial y la registran como el instante $t = 0$.
5. A partir de ese momento, miden y anotan la temperatura del chocolate cada minuto durante un periodo de 20 minutos.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 2 de 2

6. Mantengan el termómetro en la misma posición dentro de la taza durante todas las mediciones. Para ello, se recomienda dejarlo fijo y bien ajustado, evitando sacar el termómetro del chocolate, de modo que los datos obtenidos sean más precisos.
7. Durante el experimento, evitan mover la taza, dejarla frente a un ventilador o zona con aire acondicionado, soplar sobre el chocolate o realizar acciones que puedan alterar el proceso natural de enfriamiento.
8. Después registrarán cuidadosamente todos los datos obtenidos en la hoja de cálculo del Classroom de GeoGebra correspondiente.
9. Una vez completado el registro de datos, observan la gráfica generada, sacan hipótesis, plantean ideas, generan patrones y responden las preguntas planteadas en la fase exploratoria del taller.

Recomendaciones Finales

Realicen el experimento en un ambiente tranquilo, procurando que la temperatura del entorno se mantenga estable durante el proceso, ya que variaciones externas pueden afectar los resultados.

En caso de que no sea posible que los tres integrantes del grupo se reúnan en un mismo lugar para realizar la actividad, el trabajo podrá desarrollarse de manera virtual. En esta modalidad, deberá evidenciarse claramente una repartición equitativa de las tareas entre los integrantes del grupo (por ejemplo, uno preparación del experimento, uno toma de datos, otro registro en GeoGebra, entre todos análisis de la información, etc.)

Independientemente de la modalidad de trabajo (presencial o virtual), deberán adjuntar evidencias del proceso realizado. Estas evidencias pueden incluir fotografías, capturas de pantalla, videos cortos o registros digitales, en las que se observe claramente:

- **La realización del experimento de enfriamiento del chocolate.**
- **El proceso de toma de datos de la temperatura a lo largo del tiempo.**
- **La participación activa de los tres estudiantes en el desarrollo del trabajo.**

Las evidencias presentadas deberán ser claras, organizadas y coherentes con los datos registrados en GeoGebra. Este material se tomará en cuenta como parte del proceso de evaluación del taller, valorando tanto el rigor experimental como el trabajo colaborativo.

Apéndice 22.

Instrucciones para los estudiantes sobre el Taller 2

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 1 de 6

Taller #2 – Ley de Enfriamiento de Newton – Enfriando Chocolate

Laboratorio en Casa: *Descubriendo Ecuaciones Diferenciales en la Cocina*

Este laboratorio tiene como propósito invitarte a explorar fenómenos cotidianos que ocurren en tu casa, para comprender cómo las ecuaciones diferenciales permiten describir, interpretar y predecir el comportamiento de la realidad. A través de situaciones comunes, realizadas con objetos de la cocina, podrás observar cómo ciertas cantidades cambian con el tiempo y cómo estos cambios pueden modelarse matemáticamente.

Instrucciones generales:

1. Ingresa al Classroom de GeoGebra correspondiente a este taller (https://www.geogebra.org/classroom/bstb5kbb), o ingresa por medio del GeoGebra Classroom usando **BSTB 5KBB.** Asegúrate de registrarte con tu correo o crear un usuario, de modo que tu progreso quede guardado correctamente.

2. Esta secuencia didáctica se desarrollará en cuatro fases. En cada una de ellas analizarás el fenómeno propuesto desde diferentes perspectivas, avanzando desde la experimentación y la observación inicial hasta una comprensión teórica y reflexiva del proceso de enfriamiento de newton.

   - *Fase exploratoria:* En esta fase seguirás un paso a paso en el que deberás preparar un chocolate caliente y realizar mediciones mientras se presenta la disminución de la temperatura a lo largo del tiempo. Con estos datos, completarás tablas, observarás el comportamiento de la temperatura y responderás preguntas basadas en el análisis realizado. La idea es que, a partir de los datos obtenidos, identifiques patrones, establezcas relaciones y construyas modelos que describan el proceso de enfriamiento de tu taza o pocillo de chocolate.
   - *Fase teórica:* En esta parte se retomará la situación experimental utilizando únicamente herramientas teóricas. Aquí se planteará y resolverá la ecuación diferencial correspondiente al modelo de enfriamiento/calentamiento de Newton, analizándola formalmente, sin depender del modelo empírico construido en la fase anterior.
   - *Fase de contraste:* En esta fase se compararán los resultados obtenidos en la fase experimental con los resultados derivados del desarrollo teórico. El objetivo es identificar similitudes, diferencias y posibles explicaciones para determinar lo observado.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 2 de 6

   - *Fase de cierre:* Finalmente, se realizará una socialización en la que se compartirán las conclusiones alcanzadas, se escucharán los aportes de los compañeros y se discutirán los resultados del taller.

3. Para el desarrollo del taller se conformarán grupos de trabajo de máximo tres estudiantes. El experimento (preparación del chocolate, toma de datos y recolección de evidencias) se realizará de manera colaborativa, y los integrantes del grupo podrán compartir los mismos datos, análisis y conclusiones. Sin embargo, cada estudiante deberá ingresar de forma individual al Classroom de GeoGebra desde su propio usuario y completar las actividades correspondientes a cada fase, registrando las respuestas y reflexiones planteadas en grupo. Esto permitirá realizar una revisión individual del trabajo y facilitará la socialización y discusión de los resultados durante la clase.

Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento

4. Antes de comenzar el experimento ingresa al Classroom de GeoGebra y responde la siguiente pregunta:
   - Cuando dejas una taza (o un pocillo) de chocolate caliente sobre la mesa, ¿cómo crees que se enfría? ¿Siempre igual, más rápido al inicio o al final? Justifica tu respuesta.

5. Una vez respondas la pregunta, prepara los siguientes elementos para realizar el experimento:
   - 1 taza o pocillo.
   - Chocolate en polvo o en pastilla.
   - Agua y/o leche.
   - Cuchara o molinillo para mezclar.
   - Termómetro de cocina para medir la temperatura de la bebida.
   - Cronómetro o reloj con segundero (puede ser el del celular).
   - Cuaderno u hoja para tomar lo datos inicialmente.
   - Dispositivo con acceso a GeoGebra.
   - Un lugar tranquilo de la casa, sin corrientes de aire fuertes y con temperatura ambiente estable.

   Una vez tengan los elementos listos, sigan cuidadosamente los pasos que se describen a continuación:
   1. Prepararán una taza de chocolate caliente siguiendo el procedimiento habitual que usen en casa para hacer chocolate.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 3 de 6

2. Seleccionen un lugar de la casa donde la temperatura ambiente se mantenga lo más constante posible durante todo el experimento.
3. Antes de iniciar las mediciones del chocolate, registran la temperatura ambiente (en °C). Pueden usar un termómetro ambiental o consultar esta información mediante el celular.
4. Justo después de servir el chocolate en el pocillo, miden su temperatura inicial y la registran como el instante $t = 0$.
5. A partir de ese momento, miden y anotan la temperatura del chocolate cada minuto durante un periodo de 20 minutos.
6. Mantengan el termómetro en la misma posición dentro de la taza durante todas las mediciones. Para ello, se recomienda dejarlo fijo y bien ajustado, evitando sacar el termómetro del chocolate, de modo que los datos obtenidos sean más precisos.
7. Durante el experimento, evitan mover la taza, dejarla frente a un ventilador o zona con aire acondicionado, soplar sobre el chocolate o realizar acciones que puedan alterar el proceso natural de enfriamiento.
8. Después registrarán cuidadosamente todos los datos obtenidos en la hoja de cálculo del Classroom de GeoGebra correspondiente.

6. Una vez completado el registro de datos en la hoja de cálculo del Classroom, deberán sacar hipótesis, plantear ideas, generar patrones y responder las siguientes preguntas.
   - ¿En qué momentos el chocolate se enfría más rápido: cuando la diferencia con la temperatura ambiente es grande o cuando es pequeña? Justifica tu respuesta.
   - En cada instante de tiempo, compara la disminución de la temperatura del chocolate con la diferencia que tiene respecto a la temperatura ambiente. ¿La razón entre estas dos cantidades se mantiene aproximadamente constante? ¿Qué interpretación le darías?
   - ¿De qué factores crees que depende el valor que relaciona la rapidez con la que baja la temperatura del chocolate con la diferencia respecto a la temperatura ambiente?

7. Una vez respondidas las preguntas anteriores, completen nuevamente la tabla con los datos solicitados y observen el comportamiento de los puntos que representan la temperatura del chocolate a lo largo del tiempo. A partir de estos puntos, elaboren el boceto de la gráfica correspondiente. Posteriormente, analicen la gráfica obtenida en GeoGebra (u otro medio o aplicación) y, con base en dicho análisis, respondan las dos últimas preguntas de esta fase.

   - ¿A qué función se asemeja la gráfica de la temperatura del chocolate en función del tiempo? Justifica tu respuesta.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 4 de 6

- Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del chocolate en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente cómo queda esa función? Justifica tu respuesta.

Sugerencia: Para poder hacer el proceso de regresión en el mismo espacio de GeoGebra donde hiciste el registro de los datos y obtuviste la gráfica, puedes emplear la herramienta "*Análisis de regresión de dos variables*". Si no estás familiarizado con su uso, puedes guiarte con el siguiente video (https://www.youtube.com/watch?v=QR-KjvR6Kw4); a partir del minuto 2:10 encontrarás la información necesaria para realizar el procedimiento. Si decides utilizar otra herramienta tecnológica, puedes hacerlo sin problema. En ese caso, deberás anexar y explicar claramente toda la información adicional y el trabajo extra que realices.

- Expresa mediante un modelo matemático o una ecuación diferencial, el enfriamiento del chocolate en cualquier instante de tiempo t. Justifica tu modelo.

Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría

8. Una vez finalizada la fase exploratoria, inicia esta segunda parte del taller, en la cual se trabajará el enfriamiento del chocolate desde una perspectiva teórica. Para ello, consulta el PDF correspondiente a la **Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton**, donde encontrarás los fundamentos teóricos necesarios para comprender el modelo matemático que describe la variación de la temperatura de un cuerpo en función del tiempo.
   Adicionalmente, puedes apoyarte en otros textos académicos, como el libro *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* de Zill u otros recursos pertinentes. En caso de hacerlo, deberás indicar claramente cuáles fueron los recursos consultados.

9. Después, desarrollan paso a paso el problema de enfriamiento del chocolate utilizando el modelo de Enfriamiento/calentamiento de Newton, para ello:
   - Extrae los datos proporcionados por el experimento.
   - Describe y sustituye dichos datos en el modelo ya establecido por Newton.
   - Encuentra la solución de la ecuación diferencial asociada y analízala.
   - Este procedimiento deberá realizarse a lápiz y papel, mostrando de manera clara cada razonamiento.

10. Finalmente:
    - Presenta tu trabajo de forma ordenada y legible.
    - Justifica cada procedimiento realizado.
    - Anota las conclusiones que obtengas a partir del modelo y su solución.
    - Sube tu trabajo al espacio de Moodle denominado *Taller #2 – Enfriando Chocolate*.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Página: 5 de 6

- Entrega la versión física al docente el jueves 19 de febrero en el horario de clase establecido.

11. Una vez haya resuelto el problema del enfriamiento del chocolate utilizando el modelo de Newton, ingresa nuevamente al Classroom de GeoGebra y resuelve las siguientes situaciones:
    - A partir de la situación problema, plantea la ecuación diferencial correspondiente al modelo de enfriamiento/calentamiento de Newton que describa el enfriamiento del chocolate.
    - Determina y escribe con claridad la solución encontrada para la ecuación diferencial asociada al modelo de Newton en la situación planteada.
    - Luego, grafica la solución obtenida con el modelo de Newton para la situación planteada, indicando el intervalo de tiempo considerado.

12. Después de esto en el mismo classroom de GeoGebra podrás avanzar a la siguiente fase.

Fase de Contraste: La Teoría Frente al Experimento

13. En esta última parte, saca tus conclusiones y responde las siguientes preguntas en el Classroom de GeoGebra:
    - ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre el modelo experimental obtenido en la fase 1 y el modelo de enfriamiento de Newton trabajado en la fase 2? ¿Qué razones crees que explican estas similitudes y diferencias?
    - Según la solución de la Ley de Enfriamiento de Newton, ¿qué valor toma $T(t)$ transcurridos 18 minutos? ¿Coincide con el valor observado en el experimento? Justifica tu respuesta.
    - Si se considera que el chocolate está "tibio" cuando alcanza una temperatura de 35 °C, ¿cuánto tiempo predice el modelo de Newton que debe transcurrir para alcanzar esta temperatura? Justifica tu respuesta.
    - ¿Qué crees que pasa con la solución del modelo de enfriamiento de Newton cuando la temperatura ambiente es variable? ¿Es igual a cuando la temperatura ambiente es constante? Justifica tu respuesta.
    - Si tuvieras que mejorar el experimento para aumentar su precisión, ¿qué cambios realizarías en la forma de medir, en los materiales o en las preguntas planteadas? Justifica tu respuesta.

Fase de Cierre: De la Acción a la Reflexión

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Página: 6 de 6

14. Una vez finalizadas las actividades del taller, organiza la información obtenida en las distintas fases y participa en una socialización con tus compañeros y docentes. Durante este espacio, deberás:
    - Explicar de manera clara cómo abordaste la situación problema y qué estrategias utilizaste para construir y analizar el modelo.
    - Comparar brevemente los resultados obtenidos mediante la exploración en GeoGebra con los obtenidos a partir del modelo de Newton.
    - Mencionar las principales dificultades que surgieron durante el desarrollo del taller y describir cómo lograste superarlas.
    - Compartir las conclusiones a las que llegaste sobre el proceso de enfriar un chocolate, así como las limitaciones del modelo utilizado.
    - Este espacio busca promover el diálogo, la argumentación, el intercambio de ideas y los procesos metacognitivos, lo que permite enriquecer la comprensión de las temáticas a partir de las perspectivas de los distintos participantes.

15. No es necesario enviar las respuestas de manera adicional (a menos que se solicite), ya que GeoGebra guarda automáticamente tu progreso, siempre que hayas ingresado correctamente con tu usuario.

Más allá de los cálculos,
las matemáticas nos ayudan
a interpretar el mundo que habitamos.

Apéndice 23.

Modelo de enfriamiento /calentamiento de Newton Taller 2 y 3

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 1 de 3

Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton

A comienzos del siglo XVIII, Newton formuló un modelo matemático para describir la manera en que varía la temperatura de un objeto cuando se encuentra inmerso en un ambiente cuya temperatura es diferente y se mantiene aproximadamente constante. Este modelo, conocido como la ley de enfriamiento y calentamiento de Newton, se encuentra bajo la idea de que:

- La rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo depende de la diferencia de su temperatura respecto a la del entorno que lo rodea.

Desde un punto de vista intuitivo, si un objeto se encuentra a una temperatura mucho mayor que la del ambiente, el proceso de enfriamiento ocurre con mayor rapidez. A medida que la diferencia entre ambas temperaturas disminuye, el intercambio de calor se hace más lento. De manera análoga, si el objeto está inicialmente más frío que el ambiente, el calentamiento será más rápido cuando la diferencia térmica sea grande y se ralentizará conforme dicha diferencia se reduce (Ramírez, 2022).

Temperatura Ambiente Constante

En su forma más sencilla, el modelo de Newton asume que la temperatura del ambiente permanece constante a lo largo del tiempo. Bajo esta suposición, la rapidez con la que cambia la temperatura del objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura instantánea y la temperatura invariable del entorno.

Si se denomina $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y por T_a la temperatura constante del ambiente, esta relación se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_a)$$

donde:

- $T(t)$ = Temperatura del objeto en el tiempo t.
- T_a = Temperatura ambiente constante.
- k = constante de enfriamiento/calentamiento.

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Página: 2 de 3

- $\frac{dT}{dt}$ = rapidez con que cambia la temperatura del objeto con respecto al tiempo.

Este modelo permite describir de manera adecuada múltiples situaciones reales en las que el entorno mantiene condiciones térmicas estables, como experimentos de laboratorio o ambientes controlados. Este fenómeno permite explicar por qué la temperatura del objeto cambia rápidamente al inicio del proceso y luego lo hace cada vez más lentamente conforme se aproxima a la temperatura ambiente (Pérez, 2018).

Temperatura Ambiente Variable

En situaciones más realistas, la temperatura del ambiente no siempre se mantiene constante, sino que puede variar con el tiempo debido a cambios climáticos, fuentes externas de calor o modificaciones en las condiciones del entorno. Para estos casos, la ley de Newton puede utilizarse al considerar que la temperatura ambiente es una función del tiempo.

Matemáticamente, se tiene $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y $T_a(t)$, que representa la temperatura ambiente en el tiempo t el modelo se plantea como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_a(t))$$

donde:

- $T(t)$ = Temperatura del objeto en función del tiempo t.
- $T_a(t)$ = Temperatura ambiente en función del tiempo t.
- k = constante de enfriamiento/calentamiento.
- $\frac{dT}{dt}$ = rapidez con que cambia la temperatura del objeto con respecto al tiempo.

En este caso, la tasa de cambio de la temperatura del objeto depende no solo de su propia temperatura, sino también de cómo evoluciona la temperatura del entorno en el tiempo. Este modelo permite analizar procesos térmicos más complejos y cercanos a la realidad, como el enfriamiento o calentamiento de un objeto en ambientes que no podemos controlar (Vergel et al., 2022).

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Página: 3 de 3

En la práctica, se pueden encontrar ambas situaciones (temperatura ambiente constante o variable) lo que resulta útil para analizar y comprender fenómenos cotidianos y experimentales como el enfriamiento de bebidas calientes, el calentamiento de alimentos, el secado de materiales o el estudio de procesos térmicos en contextos científicos y educativos, siempre que se cumplan las condiciones bajo las cuales el modelo es válido (Ramírez, 2022).

Referencias Bibliográficas

Pérez, J. (2018). *Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos*. Universidad EAN. https://editorial.universidadean.edu.co/media/pdf-ean/ecuaciones-diferenciales-tomo-I.pdf

Ramírez J. (2022). Ecuaciones Diferenciales Libro Interactivo. Fondo Editorial RED Descartes. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/PDF/Ecuaciones_Diferenciales.pdf

Vergel, M., Rincón, O., y Ibargüen, E. (2022). *Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*. Editorial Universidad de Nariño. https://sired.udenar.edu.co/7344/1/Ecuaciones%20diferenciales.pdf

Zill, D. & Cullen, M. (2006). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Ecuaciones Diferenciales. (3ª ed., Vol. 1). McGraw-Hill Interamericana.

Apéndice 24.

Rúbrica de Evaluación y Matriz de Competencias Taller 2

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Página: 1 de 4

Matriz de Competencias y Rúbrica de Evaluación – Taller #2

Competencias

Modela, resuelve y analiza el fenómeno físico del enfriamiento de un cuerpo mediante una ecuación diferencial ordinaria de primer orden homogénea (Ley de Enfriamiento de Newton), articulando la experimentación, la recolección y análisis de datos, la representación gráfica, el razonamiento matemático y el uso de herramientas tecnológicas, para interpretar el comportamiento térmico, contrastar modelos y reflexionar críticamente sobre la validez y limitaciones del modelo en contextos reales.

Micro-competencias

- **Procedimental**

MC1-P. Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales.

MC-P. Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.

- **Cognitiva**

MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.

MC-C. Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.

- **Actitudinal**

MC7-A. Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas.

MC8-A. Desarrolla las actividades académicas de manera honesta y responsable.

MC9-A. Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado.

MC10-A. Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Página: 2 de 4

Rúbrica de Evaluación

Escala de valoración:

Excelente (5), Bueno (4), Aceptable (3), Deficiente (2), Bajo (1), Nulo (0)

1. **Formulación y Resolución de Problemas.**

Se evalúa la capacidad del estudiante para comprender la situación planteada, identificar las variables relevantes y formular matemáticamente el problema del enfriamiento del chocolate. Incluye la habilidad para proponer estrategias de solución, justificar decisiones y verificar la coherencia de los resultados obtenidos. Se espera que el estudiante conecte el contexto físico con el planteamiento matemático.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Formula, resuelve y valida el problema con claridad, coherencia y sentido físico.	Formula correctamente el problema y lo resuelve con buena argumentación.	Formula el problema y propone una estrategia básica de solución.	Plantea el problema parcialmente, con errores en las variables o condiciones.	Reconoce el problema de forma confusa y sin estrategia clara.	No identifica el problema ni presenta solución.	

2. **Modelación de Procesos y Fenómenos**

Se evalúa cómo el estudiante traduce un fenómeno real (enfriamiento del chocolate) a un modelo matemático. Incluye la identificación de relaciones entre variables, la elección de un tipo de función o ecuación diferencial adecuada y la interpretación de los parámetros del modelo. Se espera coherencia entre el experimento, el modelo y la teoría.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Modela con precisión, interpreta parámetros y discute alcances y límites.	Construye un buen modelo coherente con los datos experimentales, pero con algunas limitaciones.	Propone un modelo aceptable con relación básica al fenómeno.	El modelo es incompleto o mal justificado.	El modelo no representa el fenómeno observado.	No construye ningún modelo.	

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 3 de 4

3. Razonamiento y Comunicación Matemática

Evalúa la capacidad del estudiante para argumentar, explicar y comunicar sus ideas matemáticas de manera clara y coherente. Incluye el uso adecuado del lenguaje matemático, la organización del trabajo y la justificación de cada procedimiento. También considera la participación en la socialización del taller.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Explica con claridad, rigor y buen uso del lenguaje matemático.	Comunica bien sus ideas y justifica procedimientos.	Explica de forma comprensible, aunque con vacíos conceptuales.	Argumenta con poca claridad y sin coherencia.	Comunicación muy deficiente y desorganizada.	No explica ni comunica su proceso.	

4. Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.

Se evalúa la correcta aplicación de métodos matemáticos: planteamiento y resolución de la ecuación diferencial, uso de técnicas algebraicas y cálculo. Se valora la precisión, el orden y la coherencia en los procedimientos, así como la verificación de resultados.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Ejecuta con precisión, orden y justificación cada paso.	Procedimientos bien ejecutados, con pocos errores.	Aplica correctamente los métodos básicos.	Procedimientos incompletos o con muchos errores.	Aplica de forma incorrecta métodos o fórmulas.	No realiza procedimientos.	

5. Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas

Se evalúa la capacidad del estudiante para usar, interpretar y articular distintas representaciones de un mismo fenómeno (verbal, tabular, gráfica, algebraica y tecnológica). También valora las conexiones entre conceptos matemáticos dentro de la misma asignatura (ecuaciones diferenciales, funciones, tasas de cambio, límites) y con otras áreas del conocimiento como la física o situaciones reales. Se espera que el estudiante integre estas representaciones y conexiones para comprender el fenómeno del enfriamiento.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Articula con claridad el	Integra bien distintas	Usa varias formas	Presenta representaciones	Usa representaciones	No usa representaciones	

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #2 – Enfriamiento de Chocolate – Ley de Enfriamiento/ Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 4 de 4

representar de varias formas y conexiones matemáticas y físicas.	formas de representar y conecta conceptos matemáticos.	básicas de representar y hace algunas conexiones elementales.	parciales y conexiones muy débiles.	incorrectas y no relaciona conceptos.	ni establece conexiones.	

Apéndice 25.

Interfaz GeoGebra Classroom Taller #3

Enlace de ingreso para el GeoGebra classroom desde la interfaz que tuvieron los estudiantes para resolver el taller:

www.geogebra.org/classroom/zffrhgkg

Apéndice 26.

Vídeo explicativo experimento calentando un tamal Taller 3

Enlace vídeo explicación: https://www.youtube.com/watch?v=Xh5y2WDCgb4b

Apéndice 27.

Situación problema Taller 3

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 1 de 3

Situación Problema: El Calentamiento de un Tamal

En este laboratorio calentarán un tamal y analizarán cómo varía su temperatura con el paso del tiempo hasta alcanzar una temperatura adecuada para su consumo. Aunque se trata de una situación cotidiana, este proceso puede describirse mediante un modelo matemático formulado mediante ecuaciones diferenciales. A lo largo de la actividad, realizarán mediciones experimentales de la temperatura del tamal en función del tiempo y la temperatura ambiente en función del tiempo, además, utilizarán los datos obtenidos para identificar patrones, construir un modelo matemático y analizar el comportamiento del proceso de calentamiento.

Materiales

- Un tamal.
- Una olla en la que el tamal quepa cómodamente (sin ser muy grande, ni muy pequeña).
- Agua de la llave.
- Fogón o estufa para calentar la olla.
- Una bolsa plástica (por ejemplo, tipo bolsa de kilo).
- Dos termómetros de cocina: uno para medir la temperatura del tamal y otro para medir la temperatura del agua en la olla.
- Cronómetro o reloj con segundero (puede ser el del celular).
- Cuaderno u hoja para el registro inicial de los datos.
- Dispositivo con acceso a GeoGebra.

Preparación y Toma de Datos

Este experimento se realizará en casa y en grupos de **máximo tres y mínimo dos estudiantes** (preferiblemente los mismos que trabajaron en el taller #2). Sigan cuidadosamente los pasos que se describen a continuación:

1. Compran un tamal y déjenlo en la nevera mínimo desde la noche anterior, de modo que esté refrigerado (no congelado). El objetivo es que el tamal tenga una temperatura inicial baja, pero sin llegar a congelarse.
2. Seleccionen una olla de tamaño adecuado (ni muy grande ni muy pequeña) y llénenla con agua suficiente para que, al introducir el tamal, este quede completamente cubierto durante todo el experimento.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 2 de 3

3. Saquen el tamal de la nevera, introdúzcanlo en una bolsa plástica resistente y coloquen el termómetro de manera que el sensor llegue aproximadamente hasta la mitad del tamal, procurando que quede bien ajustado y fijo.
4. Introduzcan el tamal en la olla con agua y coloquen la olla sobre el fogón. El fogón puede ser grande o pequeño; sin embargo, la intensidad de la llama debe mantenerse constante durante todo el experimento, evitando agregar más agua o modificar las condiciones iniciales.
5. Antes de encender el fogón, tomen y registren la temperatura inicial $t = 0$ del tamal y del agua en la hoja destinada para la toma de datos.
6. Una vez registradas las temperaturas iniciales, enciendan el fogón y, a partir de ese momento, midan y anoten la temperatura del tamal y del agua cada minuto durante un período de 30 minutos.
7. Mantengan los termómetros en la misma posición dentro del tamal y del agua durante todas las mediciones. Eviten retirarlos o moverlos, con el fin de garantizar mayor precisión en los datos obtenidos.
8. Durante el experimento, eviten mover la olla, cambiarla de fogón, modificar el nivel de la llama, agregar más agua, sacar el tamal, o ubicar la olla cerca de ventiladores o zonas con aire acondicionado, así como cualquier acción que pueda alterar el proceso natural de calentamiento.
9. Finalmente, registren cuidadosamente todos los datos obtenidos en la hoja de cálculo del Classroom de GeoGebra correspondiente.

Recomendaciones Finales

Realicen el experimento en un ambiente tranquilo, hagan las cosas con calma y paso a paso, no se apresuren, ni tomen las conclusiones a la ligera, ya que cada observación y análisis cuenta. En caso de que no sea posible que los tres integrantes del grupo se reúnan en un mismo lugar para realizar la actividad, el trabajo podrá desarrollarse de manera virtual. En esta modalidad, deberá evidenciarse claramente una distribución equitativa de las tareas entre los integrantes del grupo (por ejemplo: uno encargado de la preparación del experimento, otro de la toma de datos, otro del registro y análisis en GeoGebra, y el análisis final realizado de manera conjunta).

Independientemente de la modalidad de trabajo (presencial o virtual), deberán adjuntar evidencias del proceso realizado. Estas evidencias pueden incluir fotografías, capturas de pantalla, videos cortos o registros digitales, en los que se observe claramente:

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 3 de 3

- La realización del experimento de calentamiento del tamal.
- El proceso de toma de datos de la temperatura del tamal (y del agua) a lo largo del tiempo.
- La participación activa de los tres integrantes del grupo en el desarrollo de la actividad.

Las evidencias presentadas deberán ser claras, organizadas y coherentes con los datos registrados en GeoGebra. Este material se tendrá en cuenta como parte del proceso de evaluación del taller, valorando tanto el rigor experimental como el trabajo colaborativo.

Apéndice 28.

Instrucciones para los estudiantes sobre el Taller 3

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 1 de 7

Taller #3 – Ley de Calentamiento de Newton – Calentando un Tamal

Laboratorio en Casa: Descubriendo Ecuaciones Diferenciales en la Cocina

Este laboratorio tiene como propósito explorar fenómenos cotidianos que ocurren en tu casa, con el fin de comprender cómo las ecuaciones diferenciales permiten describir, interpretar y predecir el comportamiento de la realidad. A través de situaciones comunes, realizadas en el día a día, podrás analizar cómo ciertas cantidades varían con el tiempo y cómo estos cambios pueden modelarse matemáticamente.

Instrucciones generales:

1. Ingresa al Classroom de GeoGebra correspondiente a este taller (https://www.geogebra.org/classroom/dnsbrast) o ingresa por medio del GeoGebra Classroom usando el código **DNSB RAST**. Asegúrate de registrarte con tu correo o crear un usuario, de modo que tu progreso quede guardado correctamente.
2. Esta secuencia didáctica se desarrollará en cuatro fases. En cada una de ellas analizarás el fenómeno propuesto desde diferentes perspectivas, avanzando desde la experimentación y la observación inicial hasta una comprensión teórica y reflexiva del proceso de calentamiento descrito por la Ley de Newton.

    - *Fase exploratoria:* En esta fase seguirás un paso a paso en el que deberás calentar un tamal y realizar mediciones de su temperatura a medida que esta aumenta con el tiempo. Con los datos obtenidos, completarás tablas, observarás el comportamiento de la temperatura y responderás preguntas basadas en el análisis realizado. La intención es que, a partir de los datos experimentales, identifiques patrones, establezcas relaciones y construyas modelos que describan el proceso de calentamiento del tamal.
    - *Fase teórica:* En esta fase se retomará la situación experimental utilizando herramientas teóricas. Se planteará y resolverá la ecuación diferencial correspondiente al modelo de enfriamiento y calentamiento de Newton, analizándola formalmente, sin depender del modelo empírico construido en la fase anterior.
    - *Fase de contraste:* En esta fase se compararán los resultados obtenidos en la fase experimental con los resultados derivados del desarrollo teórico. El objetivo es identificar similitudes, diferencias y posibles explicaciones que permitan interpretar lo observado durante el proceso de calentamiento.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 2 de 7

- *Fase de cierre:* Finalmente, se realizará una socialización en la que se compartirán las conclusiones alcanzadas, se escucharán los aportes de los compañeros y se discutirán los resultados del taller.

3. Para el desarrollo del taller se conformarán grupos de trabajo de **máximo tres y mínimo dos estudiantes** (de preferencia los mismo que trabajaron en el taller #2 de enfriar una taza de chocolate). El experimento (calentamiento del tamal, toma de datos y recolección de evidencias) se realizará de manera colaborativa, y los integrantes del grupo podrán compartir los mismos datos, análisis y conclusiones. Sin embargo, cada estudiante deberá ingresar de forma individual al Classroom de GeoGebra desde su propio usuario y completar las actividades correspondientes a cada fase, registrando las respuestas y reflexiones construidas en grupo. Esto permitirá realizar una revisión individual del trabajo y facilitará la socialización y discusión de los resultados durante la clase.

Primera Fase: Del Asombro al Experimento

4. Antes de comenzar el experimento ingresa al Classroom de GeoGebra y responde la siguiente pregunta:
   - *Si pones un tamal a calentar en una olla, ¿cómo crees que aumenta su temperatura: más rápido al principio, al final o siempre a la misma velocidad? Justifica tu respuesta.*
   - *¿A qué temperatura y aproximadamente en qué tiempo consideran que el agua alcanza el punto de ebullición durante el experimento?*

5. Una vez respondas la pregunta, prepara los siguientes elementos para realizar el experimento:
   - Un tamal.
   - Una olla en la que el tamal quepa cómodamente (sin ser muy grande, ni muy pequeña).
   - Agua de la llave.
   - Fogón o estufa para calentar la olla.
   - Una bolsa plástica (por ejemplo, tipo bolsa de kilo).
   - Dos termómetros de cocina: uno para medir la temperatura del tamal y otro para medir la temperatura del agua en la olla.
   - Cronómetro o reloj con segundero (puede ser el del celular).
   - Cuaderno u hoja para el registro inicial de los datos.
   - Dispositivo con acceso a GeoGebra.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 3 de 7

Una vez tengan los elementos listos, sigan cuidadosamente los pasos que se describen a continuación:

1. Una vez tengan el tamal, déjenlo en la nevera mínimo desde la noche anterior, de modo que esté refrigerado (no congelado). El objetivo es que el tamal tenga una temperatura inicial baja, pero sin llegar a congelarse.
2. Seleccionen una olla de tamaño adecuado (ni muy grande ni muy pequeña) y llénenla con agua suficiente para que, al introducir el tamal, este quede completamente cubierto durante todo el experimento.
3. Saquen el tamal de la nevera, introdúzcanlo en una bolsa plástica resistente y coloquen el termómetro de manera que el sensor llegue aproximadamente hasta la mitad del tamal, procurando que quede bien ajustado y fijo.
4. Introduzcan el tamal en la olla con agua y coloquen la olla sobre el fogón. El fogón puede ser grande o pequeño; sin embargo, la intensidad de la llama debe mantenerse constante durante todo el experimento, evitando agregar más agua o modificar las condiciones iniciales.
5. Antes de encender el fogón, tomen y registren la temperatura inicial $t = 0$ del tamal y del agua en la hoja destinada para la toma de datos.
6. Una vez registradas las temperaturas iniciales, enciendan el fogón y, a partir de ese momento, midan y anoten la temperatura del tamal y del agua cada minuto durante un periodo de 30 minutos.
7. Mantengan los termómetros en la misma posición dentro del tamal y del agua durante todas las mediciones. Eviten retirarlos o moverlos, con el fin de garantizar mayor precisión en los datos obtenidos.
8. Durante el experimento, eviten mover la olla, cambiarla de fogón, modificar el nivel de la llama, agregar más agua, sacar el tamal, o ubicar la olla cerca de ventiladores o zonas con aire acondicionado, así como cualquier acción que pueda alterar el proceso natural de calentamiento.
9. Finalmente, registren cuidadosamente todos los datos obtenidos en la hoja de cálculo del Classroom de GeoGebra correspondiente.

6. Una vez completado el registro de datos en la hoja de cálculo del Classroom, deberán sacar hipótesis, plantear ideas, generar patrones y responder las siguientes preguntas.

   - ¿Qué ocurre con la diferencia entre la temperatura del tamal y la temperatura del agua caliente a medida que transcurre el tiempo? ¿Aumenta, disminuye o es constante? Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 4 de 7

- ¿La temperatura del tamal aumenta la misma cantidad cada minuto o varía con el tiempo? Justifica tu respuesta.
- Para cada minuto, compara el aumento de temperatura del tamal con la diferencia de temperatura entre el agua y el tamal en ese instante. ¿Ese valor se mantiene aproximadamente constante? ¿Qué crees que representa este valor? Justifica tu respuesta.
- Para cada minuto, compara el aumento de temperatura del tamal con la diferencia de temperatura entre el agua y el tamal en ese instante. ¿Ese valor se mantiene aproximadamente constante? ¿Qué crees que representa este valor? Justifica tu respuesta.

7. Una vez respondidas las preguntas anteriores, completen nuevamente la tabla con los datos solicitados y observen el comportamiento de los puntos que representan la temperatura del tamal a lo largo del tiempo. A partir de estos puntos, elaboren el boceto de la gráfica correspondiente. Posteriormente, analicen y respondan las siguientes preguntas.
    - Según lo observado en la gráfica, ¿a qué tipo de función se asemeja el calentamiento del tamal? Justifica tu respuesta.
    - Según lo observado en la gráfica, ¿Cómo cambia la rapidez con la que se calienta el tamal a lo largo del tiempo? Justifica tu respuesta.
    - Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del tamal en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? Justifica tu respuesta.

Sugerencia: Para poder hacer el proceso de regresión en el mismo espacio de GeoGebra donde hiciste el registro de los datos y obtuviste la gráfica, puedes emplear la herramienta "*Análisis de regresión de dos variables*". Si no estás familiarizado con su uso, puedes guiarte con el siguiente video (https://www.youtube.com/watch?v=QR-KjvR6Kw4); a partir del minuto 2:10 encontrarás la información necesaria para realizar el procedimiento. Si decides utilizar otra herramienta tecnológica, puedes hacerlo sin problema. En ese caso, deberás anexar y explicar claramente toda la información adicional y el trabajo extra que realices.

8. Una vez respondidas las preguntas anteriores, completen nuevamente la tabla con los datos solicitados y observen el comportamiento de los puntos que representan la temperatura del ambiente (temperatura del agua que está en la olla) a lo largo del tiempo. A partir de estos puntos, elaboren el boceto de la gráfica correspondiente. Posteriormente, analicen y respondan las siguientes preguntas.
    - Según lo observado en la gráfica, ¿a qué tipo de función se asemeja el calentamiento del agua? Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Código: 20255
		Página: 5 de 7

- Según lo observado en la gráfica ¿Cómo varía la temperatura del agua en la olla a lo largo del tiempo? ¿Se mantiene constante o cambia? Justifica tu respuesta.
- Usando la herramienta de regresión en GeoGebra, ajuste una función que modele la temperatura del ambiente en función del tiempo. ¿Qué tipo de función ofrece un mejor ajuste? ¿Algebraicamente, cómo queda esa función? Justifica tu respuesta.

9. Una vez respondidas las preguntas anteriores, completen nuevamente la tabla con los datos solicitados y observen el comportamiento de los puntos que representan la temperatura del tamal en relación a la temperatura ambiente. A partir de estos puntos, elaboren el boceto de la gráfica correspondiente. Posteriormente, analicen y respondan las siguientes preguntas.
    - Según la gráfica, ¿qué tipo de relación observa entre ambas variables? ¿Qué indica esto sobre el proceso de calentamiento? Justifica tu respuesta.
    - Con base en los resultados experimentales, las gráficas y las regresiones obtenidas, ¿cómo escribirías un modelo matemático (ecuación diferencial) que describa el calentamiento del tamal en función del tiempo y de la temperatura del agua? Justifica cada término del modelo.

Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría

10. Una vez finalizada la fase exploratoria, inicia esta segunda parte del taller, en la cual se trabajará el enfriamiento del chocolate desde una perspectiva teórica. Para ello, consulta el PDF correspondiente a la **Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton**, donde encontrarás los fundamentos teóricos necesarios para comprender el modelo matemático que describe la variación de la temperatura de un cuerpo en función del tiempo y de la variación de la temperatura ambiente.
    Adicionalmente, puedes apoyarte en otros textos académicos, como el libro *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* de Zill u otros recursos pertinentes. En caso de hacerlo, deberás indicar claramente cuáles fueron los recursos consultados.

11. Después, desarrollan paso a paso el problema de calentamiento del tamal utilizando el modelo de Enfriamiento/calentamiento de Newton, para ello:
    - Extrae los datos proporcionados por el experimento.
    - Describe y sustituye dichos datos en el modelo ya establecido por Newton.
    - Encuentra la solución de la ecuación diferencial asociada y analízala.
    - Este procedimiento deberá realizarse **a lápiz y papel**, mostrando de manera clara cada razonamiento.

12. Finalmente:

- Presenta tu trabajo de forma ordenada y legible.
- Justifica cada procedimiento realizado.
- Anota las conclusiones que obtengas a partir del modelo y su solución.
- Sube tu trabajo al espacio de Moodle denominado (*Taller #3 Calentando un Tamal*).
- Entrega la versión física al docente el jueves 19 de febrero en el horario de clase establecido.

13. Una vez haya resuelto el problema del calentamiento de un tamal utilizando el modelo de Newton, ingresa nuevamente al Classroom de GeoGebra y resuelve las siguientes situaciones:
    - A partir de la situación problema, plantea la ecuación diferencial correspondiente al modelo de enfriamiento/calentamiento de Newton que describa el calentamiento del tamal.
    - Determina y escribe con claridad la solución encontrada para la ecuación diferencial asociada al modelo de Newton en la situación planteada.
    - Luego, grafica la solución obtenida con el modelo de Newton para la situación planteada, indicando el intervalo de tiempo considerado.

14. Después de esto en el mismo classroom de GeoGebra podrás avanzar a la siguiente fase.

Fase de Contraste: La Teoría Frente al Experimento

15. En esta última parte, saca tus conclusiones y responde las siguientes preguntas en el Classroom de GeoGebra:
    - ¿Qué diferencias encuentras entre el modelo empírico obtenido por regresión y la solución del modelo teórico de Newton? ¿En qué aspectos uno resulta más útil que el otro? Justifica tu respuesta.
    - Al comparar el modelo empírico obtenido en la fase 1 con el modelo teórico de la fase 2, ¿en qué momento del proceso (inicio, parte intermedia o cercanía al equilibrio térmico) describen mejor el calentamiento del tamal? Justifica tu respuesta.
    - Según el modelo de Newton de la fase 2, ¿qué temperatura debería tener el tamal después de 20 minutos? ¿Coincide con la temperatura medida experimentalmente? Justifica tu respuesta.
    - Si se considera que el tamal está listo para consumir cuando alcanza una temperatura de 48 °C, ¿cuánto tiempo indica el modelo que habría que esperar? Justifica tu respuesta.

- Si el modelo supusiera una temperatura del agua constante, es decir, si el tamal se echara al agua cuando ha alcanzado su punto de ebullición, ¿en qué aspectos cambiarían las predicciones respecto al experimento real? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué modificaciones en el diseño experimental permitirían que el modelo empírico construido fuera más preciso en comparación con la solución del modelo teórico de Newton? Justifica tu respuesta.

Fase de Cierre: De la Acción a la Reflexión

16. Una vez finalizadas las actividades del taller, organiza la información obtenida en las distintas fases y participa en una socialización con tus compañeros y docentes. Durante este espacio, deberás:
    - Explicar de manera clara cómo abordaste la situación problema y qué estrategias utilizaste para construir y analizar el modelo.
    - Comparar brevemente los resultados obtenidos mediante la exploración en GeoGebra con los obtenidos a partir del modelo de Newton.
    - Mencionar las principales dificultades que surgieron durante el desarrollo del taller y describir cómo lograste superarlas.
    - Compartir las conclusiones a las que llegaste sobre el proceso de calentar un tamal, así como las limitaciones del modelo utilizado.
    - Este espacio busca promover el diálogo, la argumentación, el intercambio de ideas y los procesos metacognitivos, lo que permite enriquecer la comprensión de las temáticas a partir de las perspectivas de los distintos participantes.

17. No es necesario enviar las respuestas de manera adicional (a menos que se solicite), ya que GeoGebra guarda automáticamente tu progreso, siempre que hayas ingresado correctamente con tu usuario.

Modelar es comprender,

comparar es aprender,

y cuestionar es hacer matemáticas.

Apéndice 29.

Rúbrica de Evaluación y Matriz de Competencias Taller 3

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Página: 1 de 4

Matriz de Competencias y Rúbrica de Evaluación – Taller #3

Competencias

Modelar, resolver y analizar un proceso experimental de transferencia de calor para modelar el calentamiento de un cuerpo mediante una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogéneas (Ley de Calentamiento de Newton), integrando la recolección y validación de datos, el uso crítico de herramientas tecnológicas, la construcción y contraste de modelos empíricos y teóricos, el razonamiento matemático y la argumentación científica, con el fin de interpretar el comportamiento térmico del sistema y reflexionar sobre la validez, alcances y limitaciones del modelo en situaciones reales y cotidianas.

Micro-competencias

- **Procedimental**

MC1-P. Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales.

MC-P. Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.

- **Cognitiva**

MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.

MC-C. Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.

- **Actitudinal**

MC7-A. Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas.

MC8-A. Desarrolla las actividades académicas de manera honesta y responsable.

MC9-A. Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado.

MC10-A. Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Página: 2 de 4

Rúbrica de Evaluación

Escala de valoración:

Excelente (5), Bueno (4), Aceptable (3), Deficiente (2), Bajo (1), Nulo (0)

1. **Formulación y Resolución de Problemas.**

Se evalúa la capacidad del estudiante para comprender la situación experimental del calentamiento del tamal, identificar variables relevantes (temperatura del tamal, temperatura del agua, tiempo) y formular adecuadamente el problema en términos matemáticos. Incluye la construcción de estrategias de solución, la interpretación de resultados y la validación frente al contexto físico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Formula, resuelve y valida el problema con claridad, coherencia y sentido físico.	Formula, resuelve e interpreta correctamente las situaciones propuestas.	Formula el problema y propone una estrategia básica de solución.	Plantea el problema parcialmente, con errores en las variables o condiciones.	Reconoce el fenómeno de forma superficial y sin estructuración matemática.	No identifica el problema ni responde las situaciones planteadas.	

2. **Modelación de Procesos y Fenómenos**

Se evalúa la capacidad para traducir el proceso de calentamiento del tamal a un modelo matemático, considerando que la temperatura del ambiente (agua) puede variar. Incluye la construcción de la ecuación diferencial, la interpretación de sus términos y parámetros, y la comparación entre modelo empírico y modelo teórico de Newton.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Modela con precisión, interpreta parámetros y discute alcances y límites.	Construye un buen modelo coherente con los datos experimentales, pero con algunas limitaciones.	Propone un modelo aceptable con relación básica al fenómeno.	El modelo es incompleto o mal justificado.	El modelo no representa el fenómeno observado.	No construye ningún modelo.	

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Página: 3 de 4

3. **Razonamiento y Comunicación Matemática**

Se evalúa la claridad, coherencia y rigurosidad en la argumentación matemática. Incluye la explicación de hipótesis, la justificación de procedimientos, el análisis comparativo entre modelos y la participación oral en la fase de cierre. Se valora el uso adecuado del lenguaje matemático y la conexión con el fenómeno físico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Explica con claridad, rigor y buen uso del lenguaje matemático.	Comunica bien sus ideas y justifica procedimientos.	Explica de forma comprensible, aunque con vacíos conceptuales.	Argumenta con poca claridad y sin coherencia.	Comunicación muy deficiente y desorganizada.	No presenta explicaciones ni argumentación.	

4. **Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.**

Se evalúa la correcta aplicación de técnicas matemáticas: resolución de la ecuación diferencial, despejes algebraicos, uso de regresión en GeoGebra, sustitución de datos experimentales y cálculo de tiempos o temperaturas solicitadas. Se valora precisión, orden y coherencia lógica.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Ejecuta con precisión, orden y justificación cada paso.	Procedimientos bien ejecutados, con pocos errores.	Aplica correctamente los métodos básicos.	Procedimientos incompletos o con muchos errores.	Aplica de forma incorrecta métodos o fórmulas.	No realiza procedimientos matemáticos.	

5. **Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas**

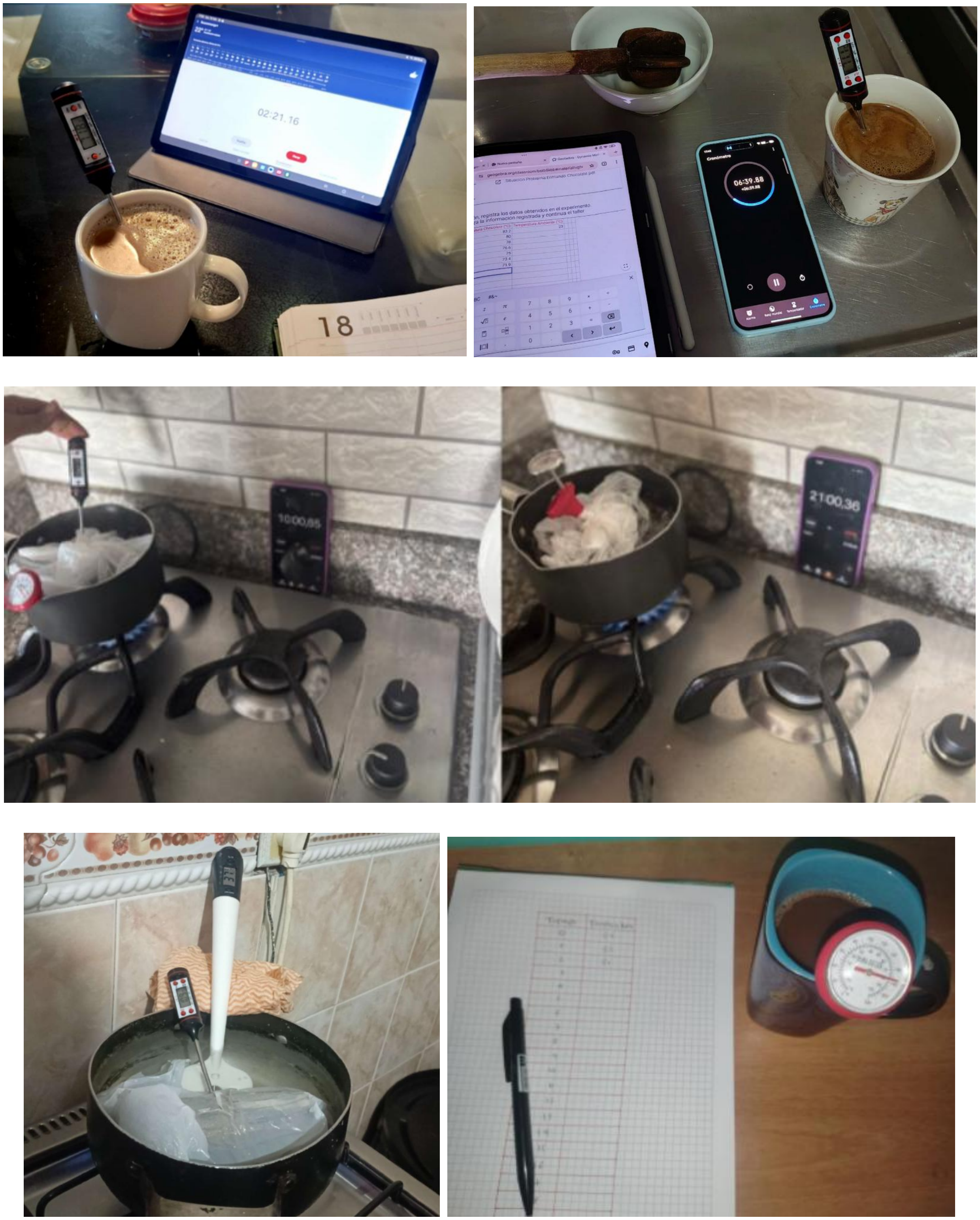
Se evalúa el uso e integración de múltiples representaciones (tablas, gráficas, regresiones, expresiones algebraicas y explicaciones verbales). También valora las conexiones entre conceptos matemáticos (tasa de cambio, ecuaciones diferenciales, funciones exponenciales, equilibrio térmico) y su relación con fenómenos físicos como transferencia de calor y variación de temperatura ambiente.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Articula con claridad el representar de varias formas y conexiones matemáticas y físicas.	Integra bien distintas formas de representar y conecta conceptos matemáticos.	Usa varias formas básicas de representar y hace algunas conexiones elementales.	Presenta representaciones parciales y conexiones muy débiles.	Usa representaciones incorrectas y no relaciona conceptos.	No usa representaciones ni establece conexiones.	

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #3 – Calentamiento de Tamal – Ley de Enfriamiento / Calentamiento de Newton	Página: 4 de 4

Apéndice 30.

Evidencias de la experimentación realizada por los estudiantes para los Talleres 2 y 3



Apéndice 31.

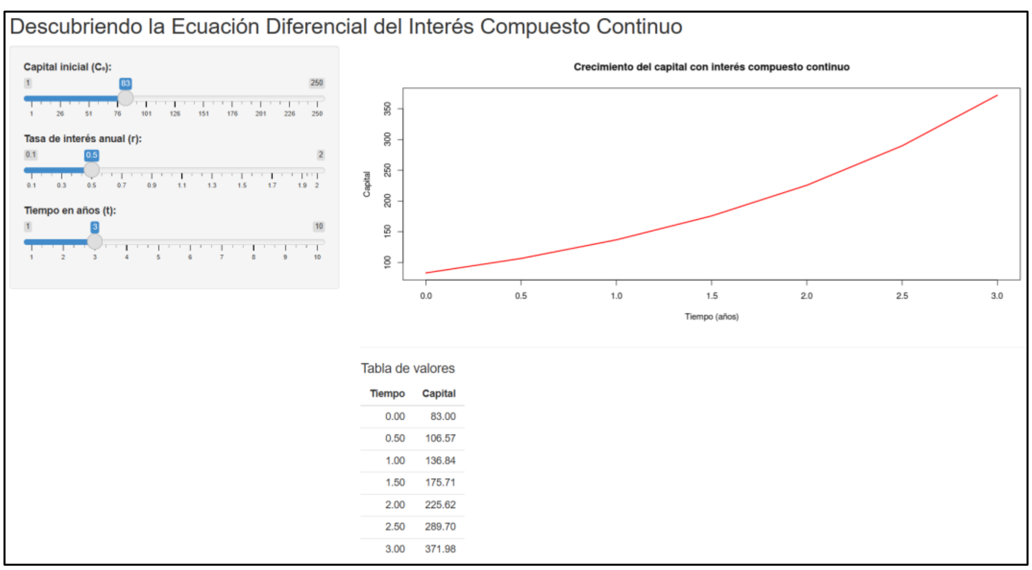
Interfaz GeoGebra Classroom Taller #4

Enlace de ingreso para el GeoGebra classroom desde la interfaz que tuvieron los estudiantes para resolver el taller:

www.geogebra.org/classroom/gwbr7krm

Apéndice 32.

Interfaz Applet elaborado en Shiny para el Taller #4



Enlace de ingreso al applet: https://ja8ssv-carlos0andres-guevara0reyes.shinyapps.io/Interescompuestov2/

Apéndice 33.

Instrucciones para los estudiantes sobre el Taller 4

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 1 de 5

Taller #4 – Interés Compuesto Continuo – Ahorro en el Banco

Instrucciones:

1. Ingresa al Classroom de GeoGebra (https://www.geogebra.org/classroom/r7jgezrn) o ingresa por medio del GeoGebra Classroom usando el código **R7JG EZRN**. Asegúrate de registrarte con tu correo o crear un usuario para que tu progreso quede guardado correctamente.

2. Esta secuencia didáctica se desarrollará en cuatro fases. En cada una de ellas analizarás la situación propuesta desde diferentes perspectivas, avanzando desde la exploración inicial hasta una comprensión más profunda de la problemática.

   - *Fase exploratoria:* En esta parte seguirá un paso a paso en el que deberá manipular los deslizadores, observar comportamientos y responder preguntas basadas en el análisis que vaya realizando. El propósito es que, a partir de los datos, identifique patrones, cree relaciones y construya modelos matemáticos.
   - *Fase teórica:* Se retomará la situación usando únicamente herramientas teóricas. Aquí se solucionará la ecuación diferencial ya establecida correspondiente al modelo y se analizará formalmente, sin depender del modelo realizado en la fase anterior.
   - *Fase de contraste:* Se compararán los resultados obtenidos en la parte exploratoria con los obtenidos mediante el desarrollo teórico. El objetivo es identificar similitudes, diferencias y posibles explicaciones para estas.
   - *Fase de cierre:* Finalmente, se realizará una puesta en común donde se compartirán las conclusiones, se escucharán las de los compañeros y se discutirán los resultados del trabajo realizado.

3. Antes de comenzar la actividad, deberás responder la siguiente pregunta según lo que tú creas. Luego, a lo largo del taller, comprobarás si tu respuesta inicial era adecuada o no.

   - Si realizas un ahorro programado en un banco durante varios años, ¿cómo crees que crece tu dinero con el paso del tiempo (lineal, exponencial u otra forma) y qué tiene mayor impacto en ese crecimiento: ¿el capital inicial, la tasa de interés o el tiempo que lo dejas invertido? Justifica tu respuesta.

4. Ahora tengamos en cuenta la siguiente situación problema: *Ahorro en el banco*. Toda la secuencia gira en torno a este contexto, que se presenta a continuación.

"Una persona decide depositar sus ahorros en el *Banco Estelar*, una entidad que ofrece una modalidad de interés compuesto continuo. El capital inicial que puede invertir va desde 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255	
	Página: 2 de 5	

millón hasta 250 millones de pesos colombianos, la tasa de interés anual puede variar entre 0.1 y 2.0, y el tiempo que el dinero permanece en el banco puede ser desde 1 hasta 10 años.

Para analizar cómo crece el capital con el paso del tiempo, se les proporcionará una aplicación web interactiva. En ella podrán modificar tres parámetros fundamentales:

- El capital inicial (C_0)
- La tasa de interés anual (r)
- El tiempo de inversión (t)

Manipulen los deslizadores, observen cómo cambia el capital a lo largo del tiempo y analicen qué combinación resulta más conveniente para el ahorro. A partir de esta exploración, deberán identificar patrones, formular conjeturas y responder las preguntas que guiarán la construcción de un modelo matemático para describir el crecimiento del capital."

Fase Exploratoria: Del Asombro al Experimento

5. Para desarrollar esta fase del taller, deberás ingresar al sitio web dispuesto para la actividad(https://ja8ssv-carlos0andres-guevara0reyes.shinyapps.io/Interescompuestov2/). Allí encontrarás una construcción interactiva con deslizadores que podrás manipular libremente. A medida que modifiques los valores, observa con atención cómo cambia la situación representada, analiza el comportamiento de las variables y reflexiona sobre lo que ocurre. Con base en estas observaciones, deberás responder y completar secuencialmente las preguntas que se presentan en el Classroom de GeoGebra.

- Con base en los datos y la gráfica, ¿Cómo describirías el comportamiento del capital a lo largo del tiempo? Justifica tu respuesta.
- Si fijas el capital inicial y el tiempo, ¿qué ocurre con el capital cuando aumentas la tasa de interés r? Describe con tus palabras lo que observas.
- Si fijas el capital inicial y la tasa de interés, ¿qué ocurre con el capital cuando aumentas el tiempo t? Describe con tus palabras lo que observas.
- Fija una tasa de interés r y un capital inicial C_0. Luego compara el capital en dos instantes consecutivos (por ejemplo, entre un año y el siguiente). ¿La relación entre "cuánto aumenta el capital" y "el capital que ya había" se mantiene aproximadamente constante? ¿siempre pasa lo mismo? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué interpretación le darías a ese valor que relaciona la rapidez con la que crece el capital con el propio capital?

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES	
ESCUELA DE MATEMÁTICAS		
Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255	
	Página: 3 de 5	

- ¿A qué tipo de función se parece la gráfica del capital en función del tiempo? Justifica tu respuesta.
- Expresa mediante un modelo matemático (ecuación diferencial) el crecimiento del capital en cualquier instante de tiempo t. Justifica tu modelo.

Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría

6. Una vez finalizada la fase exploratoria, podrán iniciar la segunda parte del taller. Para ello, deberán consultar el PDF sobre Interés Compuesto Continuo, donde encontrarán la información teórica necesaria para comprender el modelo matemático que describe el crecimiento del capital en el tiempo.
   Si lo desean, también pueden revisar otros textos de apoyo y otros recursos académicos pertinentes. En caso de hacerlo, deberán indicar claramente cuáles fueron los recursos consultados y los aportes de estos.

7. Posteriormente, deberán resolver paso a paso el problema del crecimiento del capital utilizando el modelo de interés compuesto continuo. Para ello:

   - Usen los datos proporcionados en la situación problema.
   - Sustituyan dichos datos en el modelo matemático establecido.
   - Planteen y analicen la ecuación diferencial asociada al crecimiento del capital.
   - Este procedimiento deberá realizarse a **lápiz y papel**, mostrando de manera clara cada razonamiento.

8. Finalmente:

   - Presenten su trabajo de forma ordenada y legible.
   - Justifiquen cada procedimiento realizado.
   - Anoten las conclusiones que obtengan a partir del modelo y su análisis.
   - Suban su trabajo al espacio de Moodle denominado *(Taller #4 – Interés Compuesto Continuo)*.
   - Entreguen la versión física al docente el martes 24 de febrero de 2026 en el horario de clase establecido.

9. Una vez hayas resuelto el problema de Ahorro en el Banco utilizando el modelo de Interés Compuesto Continuo, ingresa nuevamente al Classroom de GeoGebra y resuelve las siguientes situaciones:

   - A partir de la situación problema, plantea la ecuación diferencial correspondiente al modelo que describe el crecimiento de los intereses en el banco.

- Determina y escribe con claridad la solución general del modelo que describe el capital en función del tiempo para la situación planteada.
- Luego, grafica la solución obtenida con el modelo teórico del interés compuesto continuo en el intervalo de tiempo considerado e interpreta su comportamiento.

10. Después de esto en el mismo classroom podrás avanzar a la siguiente fase.

Fase de Contraste: La Teoría Frente al Experimento

11. En esta última parte, saca tus conclusiones y responde las siguientes preguntas en el Classroom de GeoGebra:

- Al comparar el modelo empírico que construiste en la fase exploratoria con el modelo teórico del interés compuesto continuo, ¿en qué se parecen y en qué se diferencian? Justifica tu respuesta.
- Según el modelo teórico, ¿cuál debería ser el capital después de, por ejemplo, 5 años? ¿Coincide con lo que observaste en la simulación? Justifica tu respuesta.
- Si una persona quiere que su capital alcance el doble del capital inicial, ¿cuánto tiempo predice el modelo que debe esperar? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué suposiciones está haciendo el modelo de interés compuesto continuo sobre el comportamiento del dinero en el banco? ¿Crees que esas suposiciones se cumplen exactamente en la realidad? Justifica tu respuesta.
- Teniendo en cuenta la simulación y el modelo teórico, ¿Cuál de los tres parámetros (capital inicial, tasa de interés o tiempo) tiene mayor impacto en el crecimiento del capital? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué limitaciones tendría este modelo si se quisiera usar para predecir el capital a muy largo plazo? Justifica tu respuesta.

Fase de Cierre: De la Acción a la Reflexión

12. Una vez finalizadas las actividades del taller, organiza la información obtenida en las distintas fases y participa en una socialización con tus compañeros y docentes. Durante este espacio deberás:

- Explicar de manera clara cómo abordaste la situación problema y qué estrategias utilizaste para construir y analizar el modelo matemático.
- Comparar brevemente los resultados obtenidos en la fase exploratoria con GeoGebra con los resultados obtenidos a partir del modelo de interés compuesto continuo.

- Mencionar las principales dificultades que surgieron durante el desarrollo del taller y describir cómo lograste superarlas.
- Compartir las conclusiones a las que llegaste sobre el comportamiento del crecimiento de los intereses en el banco y las limitaciones del modelo en este contexto.
- Este espacio busca promover el diálogo, la argumentación, el intercambio de ideas y la reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje, con el fin de enriquecer la comprensión de las temáticas desde las distintas perspectivas del grupo.

13. No es necesario enviar las respuestas de manera adicional (a menos que se solicite), ya que GeoGebra guarda automáticamente tu progreso, siempre que hayas ingresado correctamente con tu usuario.

Las Ecuaciones Diferenciales,
permiten ver el futuro del dinero
con ojos críticos y responsables.

Apéndice 34.

Modelo de Interés Compuesto Continuo Taller 4

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 1 de 2

Modelo de Crecimiento del Capital: Interés Compuesto Continuo

El interés compuesto es uno de los conceptos centrales en las matemáticas financieras, ya que describe cómo evoluciona un capital cuando los intereses generados en cada periodo se reinvierten y pasan a formar parte del capital para el siguiente periodo. A diferencia del interés simple, donde los intereses se calculan únicamente sobre el capital inicial, en el interés compuesto cada acumulación se suma al capital, lo que produce un crecimiento progresivo y acumulativo.

Cuando el número de periodos de capitalización aumenta indefinidamente, se obtiene el modelo de interés compuesto continuo. En este caso, se asume que la reinversión de los intereses ocurre de manera permanente y no en intervalos discretos. Este enfoque permite modelar el crecimiento del capital como un proceso dinámico y continuo, análogo a otros fenómenos de acumulación en contextos naturales y económicos (Ramírez, 2022).

Desde el punto de vista conceptual, la hipótesis central del modelo sostiene que la rapidez con la que cambia el capital es proporcional al capital que existe en ese mismo instante. Esto implica que:

- Cuando el capital es pequeño, el crecimiento es lento.
- A medida que el capital aumenta, el crecimiento se vuelve cada vez más rápido.

Matemáticamente, esta relación se expresa mediante la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dC}{dt} = rC(t)$$

donde:

- $C(t)$ = Capital acumulado en el tiempo t.
- r = Tasa de interés continua
- $\frac{dC}{dt}$ = Rapidez con que cambia el capital respecto al tiempo t.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 2 de 2

Este modelo describe un crecimiento continuo en el que cada unidad adicional de capital contribuye al aumento total, generando una dinámica de acumulación acelerada conforme pasa el tiempo, en estrecha analogía con el crecimiento poblacional propuesto por la Ley de Malthus. (Mantilla et al., 2025).

Referencias Bibliográficas

Mantilla C., Bolaños P., Márquez F., y Toscano F., (2025) *Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y sus Aplicaciones*. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) http://cimogsys.espoch.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2025-05-08-212234-LIBRO%20_ECUACIONES%20DIFERENCIALES.pdf

Ramírez J. (2022). Ecuaciones Diferenciales Libro Interactivo. Fondo Editorial RED Descartes. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/PDF/Ecuaciones_Diferenciales.pdf

Apéndice 35.

Rúbrica de Evaluación y Matriz de Competencias Taller 4

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 1 de 4

Matriz de Competencias y Rúbrica de Evaluación – Taller #4

Competencias

Modelar, resolver y analizar el crecimiento de un capital bajo interés compuesto continuo mediante una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, integrando la exploración paramétrica con herramientas tecnológicas, la construcción y validación de modelos empíricos y teóricos, el razonamiento matemático y la interpretación económica. El estudiante será capaz de argumentar cómo influyen el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo en el comportamiento exponencial del modelo, así como reflexionar críticamente sobre los supuestos, alcances y limitaciones del modelo en contextos financieros reales.

Micro-competencias

- **Procedimental**

MC1-P. Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales.

MC-P. Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.

- **Cognitiva**

MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.

MC-C. Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.

- **Actitudinal**

MC7-A. Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas.

MC8-A. Desarrolla las actividades académicas de manera honesta y responsable.

MC9-A. Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado.

MC10-A. Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 2 de 4

Rúbrica de Evaluación

Escala de valoración:

Excelente (5), Bueno (4), Aceptable (3), Deficiente (2), Bajo (1), Nulo (0)

1. **Formulación y Resolución de Problemas.**

Se evalúa la capacidad del estudiante para comprender la situación de ahorro en el banco, identificar las variables fundamentales (capital inicial, tasa de interés y tiempo) y formular adecuadamente el problema en términos matemáticos. Incluye la interpretación del crecimiento del capital, la construcción de estrategias de solución y el análisis de resultados en contexto económico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Formula, resuelve y analiza críticamente los resultados en contexto económico real.	Formula, resuelve e interpreta correctamente las situaciones propuestas.	Formula el problema y propone una estrategia básica de solución.	Plantea el problema parcialmente, con errores en las variables o condiciones.	Reconoce el fenómeno de forma superficial y sin estructuración matemática.	No identifica el problema ni responde las situaciones planteadas.	

2. **Modelación de Procesos y Fenómenos**

Se evalúa la capacidad para traducir el crecimiento del capital a un modelo matemático de interés compuesto continuo. Incluye la formulación de la ecuación diferencial, la interpretación de la constante de proporcionalidad y el análisis del impacto de los parámetros en el comportamiento del modelo.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Modela con precisión, interpreta parámetros y discute alcances y límites.	Modela e interpreta adecuadamente el significado económico de los parámetros.	Propone un modelo aceptable con relación básica al fenómeno.	El modelo es incompleto o mal justificado.	El modelo no representa el fenómeno observado.	No construye ningún modelo.	

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 3 de 4

3. Razonamiento y Comunicación Matemática

Se evalúa la claridad y coherencia en la argumentación matemática y económica. Incluye la explicación de patrones observados en la simulación, la justificación de procedimientos algebraicos y la comparación entre modelo empírico y modelo teórico. Se valora la capacidad de interpretar resultados más allá del cálculo.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Explica con claridad, rigor y buen uso del lenguaje matemático.	Comunica bien sus ideas y justifica procedimientos.	Explica de forma comprensible, aunque con vacíos conceptuales.	Argumenta con poca claridad y sin coherencia.	Comunicación muy deficiente y desorganizada.	No presenta explicaciones ni argumentación.	

4. Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.

Se evalúa la correcta resolución de la ecuación diferencial asociada al modelo de interés compuesto continuo, la sustitución adecuada de datos y el cálculo de valores solicitados (capital futuro, tiempo para duplicar el capital, etc.). Se valora precisión, orden y coherencia en el desarrollo algebraico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Ejecuta con precisión, orden y justificación cada paso.	Procedimientos bien ejecutados, con pocos errores.	Aplica correctamente los métodos básicos.	Procedimientos incompletos o con muchos errores.	Aplica de forma incorrecta métodos o fórmulas.	No realiza procedimientos matemáticos.	

5. Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas

Se evalúa el uso e integración de múltiples representaciones (gráfica, algebraica, verbal y simbólica) del crecimiento del capital. También valora las conexiones entre crecimiento exponencial, ecuaciones diferenciales, funciones exponenciales y contextos económicos reales, así como la comparación entre modelo empírico y modelo teórico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Articula la representación múltiple y establece	Integra bien distintas formas de representar y	Usa varias formas básicas de representar	Presenta representaciones parciales y	Usa representaciones incorrectas y no	No usa representaciones ni establece conexiones.	

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #4 – Ahorro en el Banco – Modelo de Interés Compuesto Continuo	Código: 20255
		Página: 4 de 4

conexiones profundas entre modelo matemático y contexto económico.	conecta conceptos matemáticos.	y hace algunas conexiones elementales.	conexiones muy débiles.	relaciona conceptos.		

Apéndice 36.

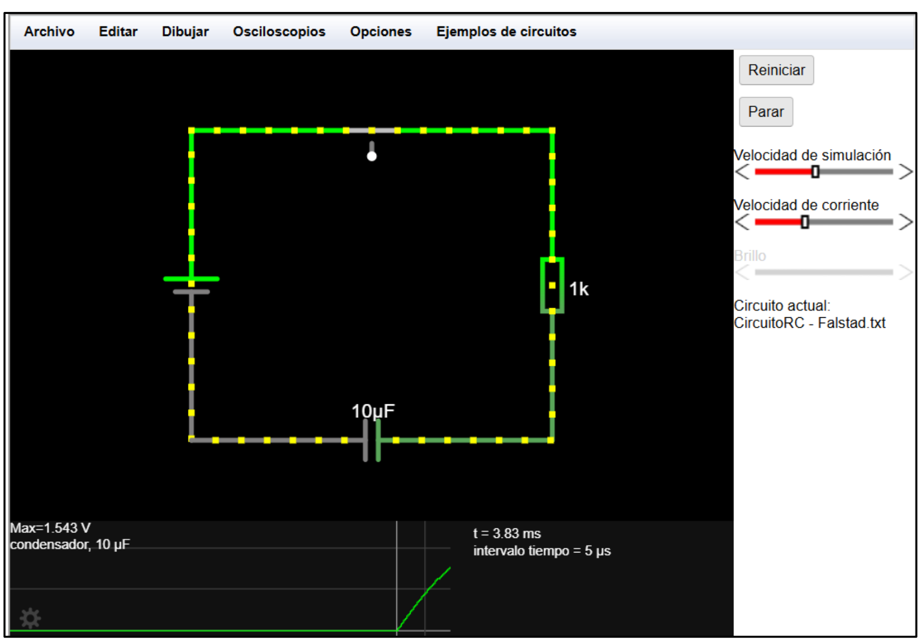
Interfaz GeoGebra Classroom Taller #5

Enlace de ingreso para el GeoGebra classroom desde la interfaz que tuvieron los estudiantes para resolver el taller:

www.geogebra.org/classroom/febbj7ej

Apéndice 37.

Interfaz Falstad circuito Taller #5



Apéndice 38.

Instrucciones para los estudiantes sobre el Taller 5

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 1 de 5

Taller #5 – Simulando Circuitos en Serie

Instrucciones:

1. Ingresa al Classroom de GeoGebra (https://www.geogebra.org/classroom/f4ynurey) o ingresa por medio del GeoGebra Classroom usando el código **F4YN UREY.** Asegúrate de registrarte con tu correo o crear un usuario para que tu progreso quede guardado correctamente.

2. Esta secuencia didáctica se desarrollará en cuatro fases. En cada una de ellas analizarás la situación propuesta desde diferentes perspectivas, avanzando desde la exploración inicial hasta una comprensión más profunda de la problemática.

   - *Fase exploratoria:* En esta parte seguirá un paso a paso en el que deberás explorar una simulación de un circuito en serie, observar comportamientos y responder preguntas basadas en el análisis que vaya realizando. El propósito es que, a partir de la simulación, identifique patrones, crees relaciones y construyas modelos matemáticos.
   - *Fase teórica:* Se retomará la situación usando únicamente herramientas teóricas. Aquí se solucionará la ecuación diferencial ya establecida correspondiente al modelo y se analizará formalmente, sin depender del modelo realizado en la fase anterior.
   - *Fase de contraste:* Se compararán los resultados obtenidos en la parte exploratoria con los obtenidos mediante el desarrollo teórico. El objetivo es identificar similitudes, diferencias y posibles explicaciones para estas.
   - *Fase de cierre:* Finalmente, se realizará una puesta en común donde se compartirán las conclusiones, se escucharán las de los compañeros y se discutirán los resultados del trabajo realizado.

3. Para iniciar, selecciona a una persona con quien trabajar. **Este taller se realizará en parejas**. Recuerden que pueden socializar sus ideas y llegar a respuestas similares; sin embargo, cada integrante deberá diligenciar de forma individual el GeoGebra correspondiente.

4. Luego, dirígete al Classroom de GeoGebra y sigue las siguientes indicaciones paso a paso, no omitas ningún detalle, para que el desarrollo del taller fluya de la mejor manera.
   - Accede a falstad.com desde el buscador de tu preferencia.
   - Una vez en la plataforma, abre el archivo titulado: “Circuito – Taller #5”, el cual encontrarás disponible en Moodle. Accede a falstad.com desde tu buscador de preferencia.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 2 de 5

- Verifica que en pantalla se encuentren correctamente dispuestos los siguientes elementos:
  Una fuente,
  Un interruptor,
  Una resistencia,
  Un capacitor,
  Y una gráfica que muestre la dinámica del voltaje en el circuito.
- Haz clic en el botón **"Reiniciar"** para observar la simulación desde el inicio, ya que esta aparece habilitada automáticamente al abrir la aplicación.
- Observa con atención el comportamiento del voltaje del capacitor a lo largo del tiempo.
- Registra todas tus observaciones, formula hipótesis, elabora bocetos de las gráficas, modifica valores, experimenta con los parámetros del circuito y discute tus interpretaciones con tu compañero de trabajo.

5. Una vez finalizada la exploración, avancen a responder de manera argumentada y ordenada las preguntas propuestas en el Classroom.
   - Cuando se cierra el circuito, ¿el voltaje del capacitor cambia de manera instantánea o gradual? Describe con tus palabras cómo evoluciona el voltaje con el paso del tiempo.
   - ¿En qué momento el voltaje aumenta más rápido: al inicio o cuando ya está cerca del valor final? Justifica tu respuesta.
   - A lo largo del proceso, observa cuánto le falta al voltaje del capacitor para llegar a su valor final y qué tan rápido va cambiando en cada momento. ¿Qué relación notas entre "lo que falta por crecer" y "qué tan rápido crece" el voltaje? Justifica tu respuesta.
   - Realiza dos simulaciones cambiando únicamente la resistencia (mantén fijo el capacitor y la batería): una con una resistencia pequeña y otra con una resistencia grande. Observa en cuál caso el voltaje del capacitor tarda más en estabilizarse. Justifica tu respuesta.
   - Ahora fija la resistencia y modifica únicamente el capacitor: realiza una simulación con capacitancia pequeña y otra con capacitancia grande. Observa cómo cambia el tiempo que tarda el voltaje en subir y explica, con tus propias palabras, cómo influye la capacitancia en la rapidez con que varía el voltaje en el circuito.
   - Compara lo que ocurre cuando cambias la resistencia con lo que ocurre cuando cambias el capacitor: ¿en qué se parecen los efectos y en qué se

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 3 de 5

diferencian? ¿Qué papel cumple cada uno en la rapidez con que cambia el voltaje? Justifica tu respuesta.

   - A partir de tus análisis, describe con tus palabras un modelo con el que expliques de qué factores depende la rapidez con la que cambia el voltaje en el capacitor, cómo influyen el valor actual del voltaje y el valor al que tiende el sistema, y qué papel desempeñan la resistencia y la capacitancia en este comportamiento.
   - A partir de tu descripción, escribe un modelo matemático en forma de ecuación diferencial que relacione la rapidez con la que cambia el voltaje a lo largo del tiempo.

Fase Teórica: Del Experimento a la Teoría

6. Una vez finalizada la fase exploratoria, podrán iniciar la segunda parte del taller. Para ello, deberán consultar el PDF sobre Circuitos en serie, donde encontrarán la información teórica necesaria para comprender el modelo matemático que describe cómo cambia el voltaje en el capacitor con el paso del tiempo.
   Si lo desean, también pueden revisar otros textos de apoyo y recursos académicos pertinentes. En caso de hacerlo, deberán indicar claramente cuáles fueron los materiales consultados y qué aportes hicieron a su comprensión del fenómeno.

7. Posteriormente, deberán resolver paso a paso el problema utilizando el modelo matemático correspondiente. Para ello:
   - Usen los datos proporcionados en la situación problema.
   - Sustituyan dichos datos en el modelo matemático establecido para el circuito RC.
   - Planteen y analicen la ecuación diferencial que describe el cambio del voltaje en el capacitor con respecto al tiempo.
   - Este procedimiento deberá realizarse a lápiz y papel, mostrando de manera clara cada razonamiento.

8. Finalmente:
   - Presenten su trabajo de forma ordenada y legible.
   - Justifiquen cada procedimiento realizado.
   - Anoten las conclusiones que obtengan a partir del modelo y su análisis.
   - Suban su trabajo al espacio de Moodle denominado (*Taller #5 – Simulación de Circuitos en Serie*).

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Página: 4 de 5

- Entreguen la versión física al docente el martes 24 de febrero de 2026 en el horario de clase establecido.

9. Una vez hayas resuelto el problema de simulación de circuitos utilizando el modelo de circuitos en serie RC, ingresa nuevamente al Classroom de GeoGebra y resuelve las siguientes situaciones:
    - A partir de la situación problema, plantea la ecuación diferencial correspondiente al modelo que describe el cargue del capacitor en un circuito RC.
    - Determina y escribe con claridad la solución general del modelo que describe la corriente en función del tiempo para la situación planteada.
    - Luego, gráfica la solución obtenida con el modelo teórico circuitos en serie en el intervalo de tiempo considerado e interpreta su comportamiento.
10. Después de esto en el mismo classroom podrás avanzar a la siguiente fase.

Fase de Contraste: La Teoría Frente al Experimento

11. En esta última parte, saca tus conclusiones y responde las siguientes preguntas en el Classroom de GeoGebra:
    - ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre la descripción cualitativa de la Fase 1 y la explicación que ofrece el modelo matemático de la Fase 2? Justifica tu respuesta.
    - Pasado un tiempo de 15 segundos, determina el valor del voltaje (o la carga) del capacitor mediante la simulación en Falstad y el modelo matemático obtenido en la Fase 2. Luego, compara ambos resultados y explica sí coinciden o no. Justifica tu respuesta.
    - Si solo tuvieras la ecuación diferencial del circuito RC (sin simulador), ¿qué aspectos del fenómeno podrías anticipar? ¿Y cuáles no? Justifica tu respuesta.
    - En la Fase 1 hiciste predicciones sobre qué pasaba al cambiar R o C. ¿Qué predicciones se confirman claramente con el modelo matemático? ¿Hubo alguna que te sorprendiera? Justifica tu respuesta.
    - ¿Qué ventaja te dio el modelo matemático de la fase 2 frente a la simulación de la fase 1 para entender el comportamiento del circuito? Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Página: 5 de 5

- Después de trabajar con simulación y con modelo matemático, ¿qué papel crees que cumple cada uno en el aprendizaje de fenómenos dinámicos? ¿Cuál te ayudó más y por qué? Justifica tu respuesta.
- Propón una situación de la vida real (no eléctrica) que pueda modelarse con una ecuación diferencial similar a la del circuito en serie. Justifica tu respuesta.

Fase de Cierre: De la Acción a la Reflexión

12. Una vez finalizadas las actividades del taller, organiza la información obtenida en las distintas fases y participa en una socialización con tus compañeros y docentes. Durante este espacio, deberás:
    - Explicar de manera clara cómo abordaste la situación problema y qué estrategias utilizaste para construir y analizar el modelo.
    - Comparar brevemente los resultados obtenidos mediante la exploración en GeoGebra con los obtenidos a partir del modelo de circuitos en serie.
    - Mencionar las principales dificultades que surgieron durante el desarrollo del taller y describir cómo lograste superarlas.
    - Compartir las conclusiones a las que llegaste sobre el proceso de simular un circuito RC en serie, así como las limitaciones del modelo utilizado.
    - Este espacio busca promover el diálogo, la argumentación, el intercambio de ideas y los procesos metacognitivos, lo que permite enriquecer la comprensión de las temáticas a partir de las perspectivas de los distintos participantes.
13. No es necesario enviar las respuestas de manera adicional (a menos que se solicite), ya que GeoGebra guarda automáticamente tu progreso, siempre que hayas ingresado correctamente con tu usuario.

Una ecuación diferencial no es solo

un objeto matemático: es una historia

sobre cómo algo cambia.

Apéndice 39.

Modelo de Circuitos en Serie Taller 5

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 1 de 4

Modelo de Circuitos Eléctricos en Serie

El estudio de los circuitos eléctricos constituye una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones diferenciales en la ingeniería y la física. Aunque el comportamiento completo de los sistemas eléctricos se describe mediante modelos más avanzados, para fines de modelación elemental es suficiente recurrir a la Ley de Kirchhoff, formulada en 1847.

Esta ley permite relacionar las caídas de voltaje y las corrientes en un circuito, dando lugar a modelos matemáticos expresados en forma de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. Entre los casos más sencillos se encuentran los circuitos en serie con resistencias, inductores y capacitores, los cuales permiten describir fenómenos como el almacenamiento y la disipación de energía, así como la respuesta transitoria y estacionaria de sistemas eléctricos básicos (Ramírez, 2022).

Circuitos LR (Inductor – Resistor)

El circuito LR está conformado por una resistencia R y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $E(t)$. Su dinámica se describe aplicando la Ley de Kirchhoff de voltajes, que establece que la suma de las caídas de voltaje en los elementos del circuito es igual al voltaje suministrado por la fuente.

Matemáticamente, se tiene la ecuación diferencial:

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t)$$

donde:

$i(t)$ = Corriente eléctrica en el capacitor en el instante t.

L = Inductancia, medida en henrios (H), que representa la oposición al cambio de corriente.

$\frac{di}{dt}$ = Razón de cambio de la carga con respecto al tiempo.

R = Resistencia en ohmios (Ω), que representa la disipación de energía en forma de calor.

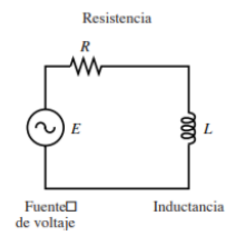
Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 2 de 4

$E(t)$ = Voltaje aplicado por la fuente en función del tiempo.

Este modelo describe cómo la corriente evoluciona en el tiempo bajo la influencia conjunta de la resistencia y la inductancia, generando una respuesta dinámica característica del sistema.

Figura 2

Ejemplo circuito Inductor- Resistor



Nota. Adaptado de *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (p. 145), por Nagle et al., (2005). Pearson Education.

Circuitos RC (Resistor – Capacitor)

En el circuito RC, una resistencia R y un capacitor de capacitancia C se encuentran conectados en serie con una fuente de voltaje $E(t)$. La Ley de Kirchhoff aplicada a este sistema indica que la suma de las caídas de voltaje en los elementos es igual al voltaje suministrado por la fuente.

Matemáticamente, se tiene la ecuación diferencial:

$$E(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t)$$

donde:

$q(t)$ = Carga eléctrica acumulada en el capacitor en el instante t.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Página: 3 de 4

C = Capacitancia, medida en faradios (F), que determina la capacidad del condensador para almacenar carga.

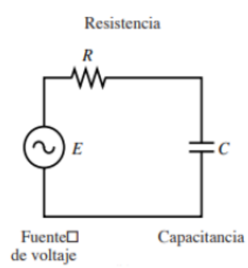
$\frac{dq}{dt}$ = Razón de cambio de la carga con respecto al tiempo.

R = Resistencia en ohmios (Ω), responsable de regular la velocidad de carga y descarga del capacitor.

$E(t)$ = Voltaje aplicado por la fuente en función del tiempo.

Figura 3

Ejemplo circuito Resistor - Capacitor



Nota. Adaptado de *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (p. 145), por Nagle et al., (2005). Pearson Education.

Este modelo explica cómo el capacitor almacena y libera energía, mientras que la resistencia controla la dinámica del proceso, dando lugar a una evolución temporal del voltaje en el sistema.

Tanto los circuitos LR como los RC se describen mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, y en ambos aparece una constante de tiempo característica que determina la rapidez con la que el sistema responde ante un cambio inicial. Estos modelos son fundamentales porque permiten comprender cómo se almacena, disipa y transfiere la energía en sistemas eléctricos básicos, y constituyen la base para el análisis de circuitos más complejos utilizados en la ingeniería moderna (Zill y Cullen, 2006; Vergel et al., 2022).

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Página: 4 de 4

Referencias Bibliográficas

Nagle, R., Saff, E., & Snider, A. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Pearson Education. (4ª ed., Vol. 1). https://cutbertblog.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/05/4th-r.-kent-nagle-ecuaciones-diferenciales-y-problemas-con-valores-en-la-frontera-pearson-educaciocc81n-2005.pdf

Ramírez J. (2022). Ecuaciones Diferenciales Libro Interactivo. Fondo Editorial RED Descartes. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/PDF/Ecuaciones_Diferenciales.pdf

Vergel, M., Rincón, O., y Ibargüen, E. (2022). *Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*. Editorial Universidad de Nariño. https://sired.udenar.edu.co/7344/1/Ecuaciones%20diferenciales.pdf

Zill, D. & Cullen, M. (2006). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Ecuaciones Diferenciales. (3ª ed., Vol. 1). McGraw-Hill Interamericana.

Apéndice 40.

Rúbrica de Evaluación y Matriz de Competencias Taller 5

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 1 de 5

Matriz de Competencias y Rúbrica de Evaluación – Taller #5

Competencias

Modelar, resolver y analizar el crecimiento de un capital bajo interés compuesto continuo mediante una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, integrando la exploración paramétrica con herramientas tecnológicas, la construcción y validación de modelos empíricos y teóricos, el razonamiento matemático y la interpretación económica. El estudiante será capaz de argumentar cómo influyen el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo en el comportamiento exponencial del modelo, así como reflexionar críticamente sobre los supuestos, alcances y limitaciones del modelo en contextos financieros reales.

Micro-competencias

- **Procedimental**

MC1-P. Modela matemáticamente fenómenos, sistemas, procesos productivos y de servicio mediante ecuaciones diferenciales.

MC-P. Utiliza herramientas TIC (GeoGebra) para representar, explorar y contrastar modelos matemáticos de fenómenos reales.

- **Cognitiva**

MC2-C. Analiza la solución de una ecuación diferencial en el marco del fenómeno modelado y realiza inferencias sobre el comportamiento del mismo.

MC-C. Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje, reconoce dificultades, evalúa la validez del modelo y propone mejoras.

- **Actitudinal**

MC7-A. Busca, identifica y utiliza conocimientos de manera autónoma en el desarrollo de sus tareas, reconociendo las fuentes utilizadas.

MC8-A. Desarrolla las actividades académicas de manera honesta y responsable.

MC9-A. Comunica las ideas y soluciones a problemas, de manera oral y escrita utilizando el lenguaje especializado.

MC10-A. Aporta constructivamente a la solución de problemas mediante el trabajo colaborativo.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Código: 20255
		Página: 2 de 5

Rúbrica de Evaluación

Escala de valoración:

Excelente (5), Bueno (4), Aceptable (3), Deficiente (2), Bajo (1), Nulo (0)

1. **Formulación y Resolución de Problemas.**

Se evalúa la capacidad del estudiante para comprender la situación del circuito RC, identificar las variables fundamentales (voltaje, tiempo, resistencia, capacitancia y fuente), formular adecuadamente el problema en términos matemáticos y analizar el comportamiento dinámico del sistema en contexto físico. Incluye la interpretación del proceso de cargue del capacitor y la construcción de estrategias de solución.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Formula, resuelve y analiza críticamente los resultados en contexto físico real.	Formula, resuelve e interpreta correctamente las situaciones propuestas.	Formula el problema y propone una estrategia básica de solución.	Plantea el problema parcialmente, con errores en las variables o condiciones.	Reconoce el fenómeno de forma superficial y sin estructuración matemática.	No identifica el problema ni responde las situaciones planteadas.	

2. **Modelación de Procesos y Fenómenos**

Se evalúa la capacidad para traducir el comportamiento del circuito RC a un modelo matemático diferencial. Incluye la formulación de la ecuación diferencial, la interpretación del papel de la resistencia y la capacitancia en la rapidez de cambio del voltaje y el análisis del impacto de los parámetros en el comportamiento exponencial del sistema.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Modela con precisión, interpreta parámetros y discute alcances y límites.	Modela e interpreta adecuadamente el significado económico de los parámetros.	Propone un modelo aceptable con relación básica al fenómeno.	El modelo es incompleto o mal justificado.	El modelo no representa el fenómeno observado.	No construye ningún modelo.	

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Página: 3 de 5

3. **Razonamiento y Comunicación Matemática**

Se evalúa la claridad y coherencia en la argumentación matemática y física. Incluye la explicación de patrones observados en la simulación, la justificación de procedimientos algebraicos y la comparación entre resultados experimentales y teóricos. Se valora la capacidad de interpretar resultados más allá del cálculo mecánico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Explica con claridad, rigor y buen uso del lenguaje matemático.	Comunica bien sus ideas y justifica procedimientos.	Explica de forma comprensible, aunque con vacíos conceptuales.	Argumenta con poca claridad y sin coherencia.	Comunicación muy deficiente y desorganizada.	No presenta explicaciones ni argumentación.	

4. **Ejercitación de Procedimientos y Algoritmos.**

Se evalúa la correcta resolución de la ecuación diferencial asociada al modelo RC, la aplicación adecuada de condiciones iniciales, la sustitución de datos y el cálculo de valores solicitados. Se valora precisión, orden y coherencia en el desarrollo algebraico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Ejecuta con precisión, orden y justificación cada paso.	Procedimientos bien ejecutados, con pocos errores.	Aplica correctamente los métodos básicos.	Procedimientos incompletos o con muchos errores.	Aplica de forma incorrecta métodos o fórmulas.	No realiza procedimientos matemáticos.	

5. **Representaciones y Conexiones Intra y Extra-Matemáticas**

Se evalúa el uso e integración de múltiples representaciones (gráfica, algebraica, verbal y simulada) del comportamiento del voltaje en el circuito RC. También valora las conexiones entre ecuaciones diferenciales lineales, funciones exponenciales, constante de tiempo y otros fenómenos dinámicos modelados con estructuras similares, así como la comparación entre simulación y modelo teórico.

Excelente	Bueno	Aceptable	Deficiente	Bajo	Nulo	Puntaje
Articula múltiples representaciones y establece	Integra bien distintas formas de representar y	Usa varias formas básicas de representar	Presenta representaciones parciales y	Usa representaciones incorrectas y no	No usa representaciones ni establece conexiones.	

	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
Universidad Industrial de Santander	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Taller #5 – Simulación de Circuitos – Modelo de Circuitos en Serie	Página: 4 de 5

conexiones profundas entre modelo matemático y fenómeno físico.	conecta conceptos matemáticos.	y hace algunas conexiones elementales.	conexiones muy débiles.	relaciona conceptos.		

Apéndice 41.

Evaluación y Matriz de Competencias Taller 5

Universidad Industrial de Santander	**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**	**ECUACIONES DIFERENCIALES**
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	
	Problemas Taller de Práctica	**Código: 20255**
		Página: 1 de 3

Modelo de Crecimiento Poblacional Ley de Malthus

1. En una comunidad universitaria con 1000 computadores conectados en red, se detecta un virus informático que se propaga entre los equipos. Al iniciar el monitoreo se registran 25 computadores infectados. Se observa que la tasa de crecimiento del número de equipos infectados es proporcional al número de equipos ya infectados. Después de 3 días se registran 80 computadores infectados.
    - Plantee el modelo diferencial que describe la situación.
    - Resuelva la ecuación diferencial.
    - Determine el valor de la constante de proporcionalidad.
    - ¿Cuántos computadores estarán infectados después de 5 días?
    - ¿En cuántos días se pronostica que todos los computadores estén infectados?

Interés Compuesto Continuo

2. David dispone de 2 millones de pesos colombianos para invertir y desea elegir la opción que le genere mayor rentabilidad. Después de analizar distintas alternativas, encuentra dos propuestas de ahorro con capitalización continua, pero con condiciones diferentes. La idea de David es dejar su dinero en aquel banco que le otorgue mayores ganancias
El Banco A ofrece una tasa de interés del 0.30% mensual, bajo capitalización continua. Sin embargo, el dinero solo puede permanecer invertido por un período máximo de 18 meses.
El Banco B ofrece una tasa de interés del 0.15% mensual, también con capitalización continua. En este caso, el dinero puede mantenerse invertido por un período de 48 meses
    - Resolver el modelo diferencial para cada banco y obtener la expresión explícita de A(t).
    - Determinar el capital acumulado:
    En el Banco A después de 18 meses.
    En el Banco B después de 48 meses.
    - Comparar los resultados obtenidos y establecer cuál alternativa genera mayor capital bajo las condiciones dadas.
    - Analizar cómo influyen la tasa de interés y el tiempo en el crecimiento del capital. ¿Qué papel juega el producto entre tasa y tiempo en este tipo de modelos?
    - Determinar para qué valores de tiempo ambas inversiones producirían el doble de la inversión inicial, teniendo en cuenta la tasa de interés que ofrece cada banco.
    - Con base en el análisis matemático, justificar cuál banco representa la mejor decisión financiera bajo las condiciones dadas.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Problemas Taller de Práctica	Página: 2 de 3

Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton

3. Un jugo de mora se encuentra inicialmente a temperatura ambiente de $25°C$ y se pone en un refrigerador a temperatura constante de $-5°C$.

Después de 15 minutos, la temperatura del jugo desciende a $10°C$.

- Plantee el modelo diferencial que describe el proceso de enfriamiento.
- Resuelva la ecuación diferencial y exprese explícitamente la solución general y particular.
- Determine el valor de la constante de enfriamiento.
- ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se pone el jugo en el refrigerador hasta que alcanza una temperatura de $5°C$?

4. Una panadería introduce una bandeja de panes que inicialmente se encuentran a 25°C en un horno que acaba de encenderse. La temperatura interna del horno no es constante, sino que aumenta progresivamente hasta estabilizarse en 180°C, y puede modelarse por:

$T_a(t) = 180 - 130e^{-0.4t}$ donde t está en minutos.

Se sabe que la rapidez con la que cambia la temperatura de los panes es proporcional a la diferencia entre la temperatura del horno y la temperatura del pan. Además, la constante de proporcionalidad es k = -0,4

- Plantee el modelo diferencial que describe el proceso de enfriamiento.
- Resuelva la ecuación diferencial asociada al problema.
- ¿Cuánto tiempo tardará el pan en alcanzar los 100°C?
- Realiza la gráfica de la temperatura ambiente variable y la solución de la ecuación diferencial y analice el comportamiento de la solución a corto y largo plazo.
- ¿Es posible que el pan supere los 180°C? Justifique su respuesta a partir del modelo obtenido y la gráfica observada.

Circuitos en Serie RL

5. Un electroimán industrial se modela como un circuito RL con inductancia de 10 H y resistencia de 3 Ω. En el instante $t = 0$ se conecta a una fuente de voltaje constante de 24 V.
   - Plantee la ecuación diferencial que describe la corriente.
   - Determine la expresión de la corriente en función del tiempo.

Universidad Industrial de Santander	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	ECUACIONES DIFERENCIALES
	ESCUELA DE MATEMÁTICAS	Código: 20255
	Problemas Taller de Práctica	Página: 3 de 3

- Analice el comportamiento cuando t→∞.
- Determine el valor de la corriente en estado estable sin resolver la ecuación diferencial. Explique su procedimiento.
- ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar el 90% de su valor final?

Circuitos en Serie RC

Un condensador de $10^{-8}F$ (10 nanofaradios) se carga hasta 50V y luego se desconecta. Se puede modelar la fuga de la carga del condensador con un circuito RC sin fuente de voltaje y la resistencia del aire ente las placas del condensador. En un día frío y seco, el brindo en la resistencia del aire es de $5 * 10^{13}\Omega$; en un día húmedo, la resistencia es de $7 * 10^{6}\Omega$.

- ¿Cuánto tiempo tardará el voltaje del condensador en disiparse hasta la mitad de su valor original en cada día?