

**UN PROBLEMA INVERSO PARA UN MODELO MATEMÁTICO
NO LINEAL EN DERIVADAS PARCIALES**

ROSALBA MENDOZA SUÁREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER Centro de Documentación y Bibliografía BIBLIOTECA		No. Clasificación XJ 9229
No. Adquisición	Fecha Recibo 22 FEB. 2000	
No. Inventario 95092	Precio	Epto. No. de Folios

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

1999

UN PROBLEMA INVERSO PARA UN MODELO MATEMÁTICO
NO LINEAL EN DERIVADAS PARCIALES

ROSALBA MENDOZA SUÁREZ

Trabajo presentado como requisito para optar
al título de
Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Director
Henry Lamos Díaz
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

1999

Nota de aceptación

Calificador

Calificador

Calificador

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DEL ZULIA

Bucaramanga, 13 de Octubre de 1999

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS PROCESOS DE SORCIÓN	
DINÁMICA	15
1.1 SISTEMA DE COORDENADAS	17
1.2 VARIABLES GLOBALES E INTERNAS	18
1.3 HIDRODINÁMICA DEL MEDIO POROSO	20
1.4 ECUACIÓN DE BALANCE DE LA SUSTANCIA	20
1.5 CONCENTRACIONES	22
1.6 CINÉTICA DE DIFUSIÓN EXTERNA Y DIFUSIÓN LONGITUDINAL	23
1.7 ECUACIÓN DE BALANCE DE LA SUSTANCIA DE LA COMPONENTE ABSORBIDA	24
1.8 DIFUSIÓN EXTERNA	29
1.9 DIFUSIÓN INTERNA	31
2. INVESTIGACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO DE SORCIÓN	
DINÁMICA CON CINÉTICA DE DIFUSIÓN MIXTA	35

3.EL PROBLEMA INVERSO Y LA UNICIDAD DE SU SOLUCIÓN	48
3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO	48
3.2 UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO	49
4. MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN DE DIMENSIÓN FINITA PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO	67
5. RESULTADOS	80
BIBLIOGRAFÍA	81

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Tubo de flujo	19
Figura 2. El caso de simetría cilíndrica	20
Figura 3. El caso de simetría esférica	21

BIBLIOTECA UDEL

1. TITULO

UN PROBLEMA INVERSO PARA UN MODELO MATEMATICO NO LINEAL EN DERIVADAS PARCIALES *

2. AUTOR

MENDOZA S. ROSALBA **

3. PALABRAS CLAVES

- sorción dinámica
- problemas inversos
- derivadas parciales
- modelos matemáticos
- método de parametrización

4. DESCRIPCION O CONTENIDO

El presente trabajo esta dedicado a la investigación de un problema inverso sobre la identificación de un coeficiente para un modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta y a la elaboración de un método para su solución.

Actualmente los problemas medioambientales son consecuencia de una gestión de residuos industriales que ahora se considera equivocada. Los métodos de modelamiento matemático permiten resolver gran cantidad de problemas en relación con el manejo de los residuos medioambientales; el modelamiento matemático juega un papel principal en las investigaciones de fenómenos de sorción , los cuales se emplean ampliamente en los problemas actuales de contaminación y en muchos otros.

Uno de los principales campos de aplicación de los métodos matemáticos para el estudio de los procesos de sorción es la determinación de sus características, el cual esta basado en la solución de problemas inversos, siguiendo un modelo matemático tomado de antemano. Su importancia se debe a que estos permiten obtener información a partir de una medición experimental, y en otras, los métodos existentes no son muy efectivos por su inexactitud y costos.

El trabajo consta de cuatro capítulos. El primero está dedicado al modelamiento matemático de sorción dinámica con diferentes cinéticas de difusión: interna, externa y mixta. El segundo capítulo estudia las propiedades de la solución del problema inicial – contorno. El tercero hace el planteamiento del problema inverso y demuestra la unicidad de su solución. El cuarto resuelve el problema inverso por el método de parametrización y determina la derivada de la funcional con la ayuda de un problema de valor inicial - frontera.

* Tesis

** Facultad: Escuela de Matemáticas. Programa: Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Asesor: PhD Henry Lamos Díaz.

1. TITLE

AN INVERSE PROBLEM FOR A NON LINEAR MATHEMATICAL MODEL IN PARTIAL DERIVATIVES. *

2. AUTHOR

MENDOZA S. ROSALBA **

3. KEY WORDS

Sorption dynamics
Inverse problems
Partial derivatives
Mathematical models
Parametrization methods

4. CONTENTS

This work is devoted to the research of an inverse problem on the identification of a coefficient for a sorption dynamics model with cinetics of compound diffusion and the elaboration of a method for its solution.

Environmental problems are currently consequences of an industrial waste gestion considered wrong. The mathematical modeling methods permit to solve many problems related to the enviromental waste handling; the mathematical modeling plays a main role in the sorption phenomenon researches, which are widely used in the current pollution problems and in many others.

One of the main fields in the mathematical model application for studying sorption processes is the determination of their characteristics, which is based on solving inverse problems following a mathematical model studied before, its importance is based on the possibility to obtain information from an experimental measure and in others, the current methods are not effective because of their unaccuracy and costs.

The work consists of 4 chapters. The first is about mathematical modeling of sorption dynamics with different diffusion cinetics: internal, external and combined. The second studies the proprieties of the initial problem solution: contour. The third proposes the inverse problem and demonstrates the uniqueness of its solution. The fourth solves the inverse problem by the parametrization method and determines the functional derivative with the help of an initial-value problem: frontiers.

* Thesis

** Faculty: Escuela de Matemática. Program: Master in teaching of Mathematics.
Director: PhD Henry Lamos Diaz

INTRODUCCIÓN

No existe duda de que el creciente dominio de la humanidad sobre las leyes naturales ha proporcionado expectativas y calidad de vida más alta a un número de personas mucho mayor que en el pasado, pero esta evolución conlleva de modo paralelo grandes riesgos de calamidades a nivel global y de deterioro de la salud humana.

La mayor parte de los problemas medioambientales que sufrimos en la actualidad son consecuencia de una gestión de residuos industriales con más de dos siglos de antigüedad que ahora consideramos equivocada. Las prácticas del pasado han contaminado cientos de miles de terrenos, de modo proporcional al nivel de industrialización.

La gestión de residuos medioambientales es un campo multidisciplinar en el que es preciso recurrir a conocimientos previos y, a la vez, adquirir conocimientos más amplios de otras disciplinas científicas y no técnicas. Es además un tema que abarca aspectos muy diferentes, ya que los iniciados en la materia deben conocer y tratar temas que afectan al medio ambiente y a la salud en relación con la contaminación de aguas y de la atmósfera, con los residuos sólidos y con las aguas subterráneas.

Los métodos del modelamiento matemático permiten resolver gran cantidad de problemas en relación con el manejo de los residuos medioambientales; el modelamiento matemático juega un papel principal en las investigaciones de fenómenos de sorción, los cuales se emplean ampliamente en los problemas actuales de contaminación y en muchos otros.

Uno de los principales campos de aplicación de los métodos matemáticos para el estudio de los procesos de sorción es la determinación de sus características, definidas a partir de la solución de problemas inversos bajo un modelo matemático tomado con anterioridad.

Los procesos de sorción como regla general se realizan bajo condiciones dinámicas de transporte de la mezcla de la sustancia respecto al sorbente. Los modelos matemáticos para estos procesos utilizan la ecuación de balance de masas que relaciona las concentraciones de la sustancia libre con la de la sustancia absorbida, la ecuación de la cinética, y otras ecuaciones y condiciones complementarias que determinan el proceso de sorción.

Los modelos matemáticos de los procesos de sorción dinámica son problemas iniciales y de contorno para un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes que son características del proceso de sorción; más específicamente, es el proceso por medio del cual un componente (la sustancia

contaminante absorbida) se traslada de una fase a otra atravesando una barrera.

El presente trabajo está dedicado a la investigación de un problema inverso sobre la identificación de un coeficiente para un modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta y a la elaboración de un método para su solución.

El trabajo consta de cuatro capítulos. El primer capítulo está dedicado al modelamiento matemático de sorción dinámica con diferentes cinéticas de difusión: interna, externa y mixta.

Se describen diferentes modelos matemáticos de sorción dinámica, escogiéndose el siguiente problema de valor inicial y de frontera para la investigación:

$$\nu u_x = -\beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t = \beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$v_t = -\gamma v + \gamma a + \lambda \beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$a(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

en donde $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, γ , λ son constantes positivas, la función $F(\xi)$ es la función inversa a la isoterma $f(\xi)$; y las funciones $\nu, \mu(t)$ son la velocidad del flujo y la concentración del gas a la entrada de la columna,

respectivamente.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de la solución $u(x, t), a(x, t), v(x, t)$ del problema inicial-contorno (1)-(5), que se emplean más adelante para la investigación del problema inverso. Bajo ciertas condiciones respecto a las funciones $\mu(t), \nu(t)$ y $F(v)$ se demuestra el teorema de existencia y unicidad de la solución del problema (1)- (5). Se establecen propiedades de su suavidad, y se demuestra que

$$u_t(x, t) > 0, \quad a_t(x, t) > 0, \quad v_t(x, t) > 0, \quad (x, t) \in Q_T^o, \quad (6)$$

$$u_x(x, t) < 0, \quad a_x(x, t) < 0, \quad v_x(x, t) < 0, \quad (x, t) \in Q_T^o, \quad (7)$$

donde

$$Q_T^o = \{(x, t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\};$$

finalmente se obtienen cotas para las funciones $u(x, t), a(x, t), v(x, t)$.

El tercer capítulo está dedicado a la investigación del problema inverso para el modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta.

Este capítulo consta de dos partes. En la primera se considera el planteamiento del problema inverso, en cual consiste en identificar el coeficiente cinético $\beta(s)$

a través de la información complementaria sobre la solución del problema inicial contorno (1)-(5) dada de la siguiente manera:

$$\psi(t) = u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

La segunda parte investiga la unicidad de la solución del problema inverso en la clase de funciones de suavidad finita. Cuando se demuestran los teoremas sobre la unicidad de la solución de problemas inversos sobre los coeficientes para ecuaciones diferenciales no-lineales en esta clase de funciones, frecuentemente se supone que el coeficiente buscado se conoce para valores pequeños de su argumento [8], [9].

En el trabajo [8] se logra demostrar el teorema de unicidad global sin esta suposición. En el presente trabajo se aplica este método para el caso de la determinación del coeficiente $\beta(s)$ formulado en el primer párrafo de este capítulo.

En el cuarto capítulo se estudia el método de parametrización de dimensión finita para la solución del problema inverso, esto es, la determinación de $\beta(s)$. El método se basa en la representación de la función buscada en forma analítica $\beta(s) = \beta(s; c)$, la cual contiene un conjunto finito de parámetros que no son conocidos: $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. En este caso el problema inverso se lleva a la

minimización de una función de n variables $\Phi(c)$ sobre un conjunto acotado y cerrado. Ya que para la solución de estos problemas a menudo se emplean métodos del gradiente, en el trabajo se obtienen fórmulas para el gradiente de la función $\Phi(c)$, que emplea la solución de un problema inicial-contorno de ayuda.

En cada párrafo del trabajo se emplea una numeración independiente para cada fórmula. Para la referencia de una fórmula que se encuentra en otro párrafo del mismo capítulo se utiliza una numeración doble.

Para referencias sobre fórmulas que se encuentran en otros capítulos se emplea una numeración triple, donde la primera cifra muestra el capítulo, la segunda cifra representa el número del párrafo y la tercera el número de la fórmula en el párrafo.

1. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS PROCESOS DE SORCIÓN DINÁMICA

Los métodos de sorción se emplean en diferentes procesos tecnológicos, investigaciones científicas y especialmente en la solución de problemas del medio ambiente.

La sorción es el proceso por medio del cual un componente, la sustancia contaminante absorbida, se traslada de una fase a otra atravesando una barrera.

La sorción es debida a la interacción de tres diferentes moléculas:

Moléculas sorbentes, como el carbono activado.

Moléculas absorbidas, la sustancia contaminante en su proceso de eliminación.

Moléculas disolventes, como el agua.

En el proceso de absorción la sustancia absorbida es captada por la sustancia absorbente (fase absorbente). El proceso de adsorción es un proceso de tipo

superficial.

Los procesos de sorción se realizan primordialmente de manera dinámica, esto es, en condiciones de movimiento dirigido y relativo de las fases sólidas y líquidas del sistema heterogéneo. Un papel principal juegan la estática y la cinética en los procesos de sorción dinámica.

La sorción estática tiene en cuenta la dependencia entre la concentración de la sustancia y la concentración de ella en la solución, cuando se alcanza el equilibrio termodinámico para una temperatura constante, y se describe mediante la isoterma de sorción.

La sorción cinética describe el traslado de masas en las fases y entre las fases, como también ciertos factores que influyen en ella, lo que permite tener en cuenta la redistribución de la sustancia que aparece como resultado de las condiciones de no equilibrio en el transcurso del proceso.

Los primeros pasos para la descripción matemática de los procesos dinámicos de sorción se realizaron a principios de siglo. Ha habido un desarrollo posterior que se ha basado fundamentalmente en la construcción de modelos matemáticos a través de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.

Los modelos matemáticos de la sorción dinámica tienen una característica especial.

Por un lado, los modelos suponen la posibilidad de describir el sistema heterogéneo que incluye tanto el sorbato como el sorbente por medio de la mecánica de los medios continuos, lo que es físicamente factible siempre y cuando las dimensiones del grano del sorbente sea sustancialmente menor que las dimensiones de todo el sistema de absorción. Por otro lado, los modelos consideran el carácter macroscópico de la dimensión del grano; por esto la introducción del volumen elemental de los medios continuos que contienen una gran cantidad de partículas elementales (un volumen físico pequeño) en los modelos de sorción dinámica no es posible.

Veamos sucesivamente las características geométricas y físicas del sistema de sorción en los lineamientos de la mecánica de los medios continuos.

1.1 Sistema de Coordenadas

En los modelos clásicos del medio continuo es suficiente considerar la introducción de un sistema de coordenadas globales, de tal manera que cada punto del medio continuo se determina por un conjunto de números, y la cantidad de ellos determinan la dimensionalidad del modelo. Esto se explica por el hecho de que los modelos del medio continuo no tienen en cuenta la construcción interna de los elementos que determinan el medio (moléculas, iones).

Por otro lado, ya que los elementos del modelo cuasi-homogéneo del sistema

de sorción tienen una dimensión macroscópica, en muchos problemas se debe tener en cuenta la distribución de ciertas características respecto al volumen de los elementos. En otras palabras: a diferencia de los modelos clásicos del medio continuo, es importante la construcción interna de los elementos de que está compuesto el medio.

Así que además de las variables globales es necesario introducir coordenadas para la descripción de las características internas de los glóbulos del sorbente; estas coordenadas las llamaremos internas.

En calidad de ejemplo consideremos un sorbente que consiste de granos esféricos de igual radio R . Es natural entonces introducir coordenadas esféricas en calidad de coordenadas internas. Si para la descripción de las variables globales se introducen las coordenadas cartesianas (x, y, z) , entonces el sistema completo de coordenadas será $(r, \theta, \varphi, x, y, z)$.

1.2 Variables Globales e Internas

Se llaman características globales aquellas que no dependen de la construcción interna del glóbulo del sorbente, es decir, dependen sólo de las coordenadas globales. Las características locales (o internas) son aquellas que no sólo dependen de las coordenadas globales sino también de las coordenadas internas (todas las

características de un sistema de sorción son internas). Sin embargo, en muchos de los casos se consideran solo las características globales.

Para un ejemplo de las concentraciones locales en un grano de un sorbente anotemos la siguiente particularidad de las variables locales. Supóngase que el grano tiene forma esférica y la distribución de la concentración en el grano depende solo de r . La posición del grano se determina por las coordenadas globales, por ejemplo, mediante la distancia x que existe de la entrada del sorbato a la posición en que se encuentra este sorbato. Entonces la concentración local $a^{(s)}$ depende de (x, r, t) .

En nuestro caso la ecuación de la frontera de división de las fases se determina por la ecuación $r = R$ y la concentración local sobre la frontera de división $a^{(s)}(x, R, t)$ depende solo de las coordenadas globales y del tamaño del grano. Este ejemplo tiene un carácter universal: las características internas sobre la frontera de división de las fases no dependen de las coordenadas internas, sino que se determinan sólo por las globales.

Se puede decir que las características globales son el resultado de un proceso de promediación de las características internas. Así que otra particularidad de la modelación matemática de los procesos de sorción dinámica es el proceso de promediar las características debido a la estructura compleja de los campos locales (como la velocidad, las concentraciones y los flujos) que describen la hidrodinámica

y la cinética en el medio poroso.

En adelante consideraremos las siguientes características globales: la concentración en la fase líquida u , la concentración en la fase de absorción a , la porosidad ϵ , el tamaño del glóbulo del sorbente R y la velocidad del flujo de la fase líquida, ν .

1.3 Hidrodinámica del medio poroso

En vista de que sobre la geometría de las capas sólo se conocen las características promediadas, la formulación del problema de contorno para el sistema de Navier-Stokes con el propósito de calcular los campos locales de velocidad no es posible. Así que la salida es una descripción promediada de la hidrodinámica en el espacio poroso, cuando el campo de velocidades se vuelve característica global del sistema.

1.4 Ecuación de balance de la sustancia

Consideremos la deducción de la ecuación de balance de la sustancia absorbida en el proceso de su movimiento a través del medio poroso. Supóngase que dentro del medio poroso se mueve en cierta dirección un flujo de mezcla de una sustancia a absorber. Consideremos que la porosidad media y las propiedades adsorptivas del medio en todos los puntos son iguales.

Supóngase que el campo de velocidad local en la capa porosa se da por la función vectorial v_l . Consideremos que la superficie de control consta de las líneas de flujo (Figura 1.0).

Introduciendo en el tubo de flujo el eje de coordenadas. En términos generales él puede ser curvilíneo. Definamos la velocidad promedio como el promedio formal a través de la sección transversal del tubo. La sección del tubo se define por medio de cortes de planos normales al eje de coordenadas. Por lo tanto, la familia de secciones depende de un sólo parámetro. Por definición la velocidad promedio v se define por la integral

$$v = \frac{1}{S} \int \int_S v_l dS,$$

en donde S es el área de la sección. Por lo tanto, la velocidad promedio también es una función de un sólo parámetro.

Aunque la velocidad promedio fue definida formalmente, la componente normal v_n a la sección tiene un significado físico. La cantidad de líquido que pasa a través de la sección transversal S con vector unitario normal n es igual a

$$v_n = \int \int_S v_l n dS,$$

además la magnitud de v_n no depende de la posición de la sección transversal del tubo de flujo. Esto es, consideremos el volumen cerrado que se forma por las secciones S_1 y S_2 y la superficie lateral σ del tubo de flujo. En virtud de la continuidad del fluido se tiene

$$\int_{S_1+S_2+\sigma} v_n dS = 0.$$

Ya que no hay flujo a través de la superficie lateral de la expresión anterior se desprende que

$$\iint_{S_1} v_n dS = \iint_{S_2} v_n dS = v_n.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial(vS)}{\partial\xi} = 0, \quad (1)$$

en donde ξ es la coordenada a lo largo del tubo v es la componente normal del vector de velocidad promedio. La ecuación (1) es la ecuación de continuidad del flujo en las coordenadas globales para los procesos de sorción dinámica.

1.5 Concentraciones

Los campos de concentraciones también se promedian a través de las secciones transversales del volumen de control (tubo de flujo). Por lo tanto se introducen las

concentraciones promedias u en el flujo y a en el sorbente. La concentración en la solución está calculada por unidad de volumen de la solución y en el sorbente por unidad de volumen de todo el medio.

Además de las concentraciones globales se introducen las concentraciones internas, las cuales dependen tanto de las coordenadas internas como de las globales ξ .

Las características globales son la velocidad de reacción química ν_1 en la solución, la cual es igual a la velocidad de cambio de las concentraciones debido a las reacciones químicas, y también la velocidad de las reacciones químicas ν_2 en la fase sólida.

1.6 Cinética de difusión externa y difusión longitudinal

Como consecuencia de la introducción en el modelo de las características globales se pierde la información acerca del campo local de velocidades y las condiciones de intercambio de masas de las componentes a absorberse en el flujo hacia la superficie del sorbente. Esta es una de las razones principales de la descripción fenomenológica de la cinética de difusión externa, esto es, las leyes de transmisión de masas entre la fase líquida y la fase sólida del sistema de sorción.

Otras consecuencias de la promediación de los campos de velocidades es la necesidad

de introducir la difusión longitudinal dispersión longitudinal. El traslado real de la sustancia a través de las capas se realiza por el campo de velocidades locales. Consideremos la sección transversal del tubo y definimos la difusión longitudinal del flujo a través de la sección transversal S como la variación de la cantidad de sustancia por unidad de tiempo, mediante la fórmula

$$j_l S dt.$$

Es claro que j_l es una función de la coordenada global ξ . Para la descripción del flujo es frecuente utilizar una aproximación basada en la ley de Fick,

$$j_l = -D_l \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

donde D_l es el coeficiente de difusión longitudinal que depende de la coordenada ξ .

Debido a que no se conocen los campos locales de velocidades en el espacio poroso la cinética de difusión externa y la difusión longitudinal se deben describir fenomenológicamente.

1.7 Ecuación de Balance de la sustancia de la componente absorbida.

Siguiendo los lineamientos de los modelos de los medios continuos deduzcamos la ecuación de balance de la sustancia en la dinámica de la sorción para un sistema de

una componente. Esta ecuación es una consecuencia de la ley de la conservación de la sustancia.

Consideremos un elemento arbitrario del tubo de flujo de volumen V acotado por la superficie cerrada σ . El flujo de la sustancia a través de la superficie σ se determina por convección y dispersión. Por lo tanto debe ser dada la velocidad ν (recordemos que nosotros operamos con velocidades promediadas) y el flujo de dispersión j_i ; además debe ser definida la concentración $u(\xi)$ en la solución, la cual es una variable global y promediada a través de la sección transversal del tubo de flujo $S(\xi)$. Entonces la cantidad total de sustancia que pasa en el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ esta dada por la expresión

$$\int_{t_1}^{t_2} (\nu u + j_i) S dt. \quad (2)$$

En este mismo intervalo de tiempo Δt la variación de la cantidad de sustancia en el volumen V ocurre como resultado de la variación de las concentraciones en la solución y en el sorbente, como también de las reacciones químicas en la solución (con velocidad ν_1) y en el sorbente (con velocidad ν_2) y es igual

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} (\epsilon u + a)|_{t=t_2} S(\xi) d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\epsilon u + a)|_{t=t_1} S(\xi) d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\epsilon \nu_1 + \nu_2) S d\xi dt. \quad (3)$$

De (2) y (3) se desprende la ecuación del balance de masas en forma integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\nu u + j)|_{\xi_1} - (\nu u + j)|_{\xi_2}] S dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\xi_1}^{\xi_2} [(\epsilon u + a)|_{t=t_2} - \int_{x_1}^{x_2} (\kappa u + a)|_{t=t_1}] S dx + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\epsilon \nu_1 + \nu_2) S d\xi dt. \tag{4}
\end{aligned}$$

La ecuación de balance en forma integral permite tener en cuenta las soluciones discontinuas cuando las funciones que aparecen en la ecuación no son diferenciables.

Si las funciones que aparecen en (4) y sus correspondientes derivadas están definidas y son continuas sobre el conjunto $(\xi_1, \xi_2) \times (t_1, t_2)$, entonces dividiendo ambas partes por $\Delta t \Delta \xi$ y luego tendiendo $\Delta \xi$ y Δt hacia cero, obtenemos la ecuación de balance en forma diferencial de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (S \nu u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (j_i S) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon S u + S a) + \epsilon \nu_1 S + S \nu_2 = 0.$$

Con base en la ecuación de continuidad del flujo, la cual en este caso tiene la forma $\partial(\nu S)/\partial \xi = 0$, obtenemos en forma definitiva

$$S \nu u_{xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (j_i S) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon S u + S a) + \epsilon \nu_1 S + S \nu_2 = 0. \tag{5}$$

Escribamos la ecuación de balance para algunos casos particulares:

1. El tubo de flujo es un cilindro con sección transversal constante.

En este caso el eje de coordenadas se puede dirigir a través de la generatriz del cilindro. En adelante, por tradición para el caso considerado la variable global ξ se

BIBLIOTECA

representa por x S es una magnitud constante. Entonces dividiendo la ecuación (5) por S obtenemos

$$\nu u_{xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(j_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon u + a) + \epsilon \nu_1 + \nu_2 = 0.$$

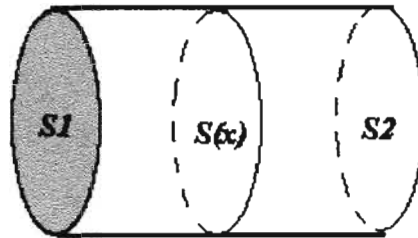


Fig 1 Tubo de flujo

2. El caso simétrico cilíndrico .

La salida del líquido ocurre de la recta OO' con salida constante a través de la longitud. El vector radio r es una coordenada generalizada, y la superficie cilíndrica $r = const$ secciones transversales del tubo de flujo. Su área por unidad de altura OO' es igual a $2\pi r$.

Entonces de (5) se desprende que

$$\nu u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r j_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon u + a) + \epsilon \nu_1 + \nu_2 = 0.$$



Fig 2 El caso de simetria cilíndrica

3. El caso simétrico esférico.

La salida del líquido ocurre de la fuente puntual.

Entonces la coordenada del eje ξ coincide con el radio r , y la sección transversal del tubo de flujo con superficie de la esfera tiene centro en el punto de la salida del líquido. La superficie de la esfera es igual $4\pi r^2$. Reemplazando en (5) y dividiendo por $4\pi r^2$, obtenemos

$$\nu u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_l) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon u + a) + \epsilon \nu_1 + \nu_2 = 0.$$

Consideremos cómo se debe cerrar el sistema de ecuaciones de la dinámica de sorción. Tanto la velocidad de sorción de la sustancia a_t por el sorbente como el flujo longitudinal de difusión externa j que aparecen en la ecuación deben ser dados en forma independiente (fenomenológicamente) a partir de razonamientos

suplementarios.

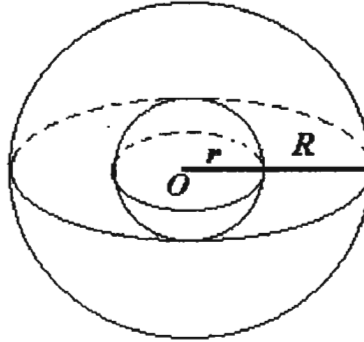


Fig 3 El caso de simetría esférica

1.8 Difusión externa

La ecuación cinética de difusión externa describe la velocidad de cambio de la concentración $\partial a/\partial t$ en el sorbente debido a las condiciones de transferencia de masa en el flujo hacia la superficie del sorbente.

Si consideramos despreciables las características del sistema de sorción en la capa porosa y en el sorbente, es decir, nos quedamos en el marco de las variables globales, la ecuación de la difusión externa está dada por la expresión

$$\frac{\partial a}{\partial t} = f(a, u). \quad (6)$$

Consideremos el caso cuando $\partial a/\partial t = 0$. Resolviendo la ecuación $f = 0$ respecto a a , obtenemos la expresión

$$a = \varphi(u), \quad (7)$$

la cual en la dinámica de sorción se llama isoterma. El sentido físico de la isoterma es el siguiente. En el sistema de sorción dinámica la isoterma describe el estado de equilibrio entre las concentraciones en la fase líquida y en el sorbente cuando $\partial a/\partial t = 0$. La isoterma es una característica termodinámica del sistema heterógeno sorbato sorbente y se determina bien sea experimentalmente o sobre la base de ciertas representaciones sobre las propiedades del sorbato-sorbente.

Si es importante tener en cuenta las características locales y la concentración en el sorbente, entonces el equilibrio se alcanza en la frontera de la división de las fases. Representemos la concentración local en el sorbente sobre la superficie de división por $a_*^{(s)}$. Ella es una variable global, por las consideraciones hechas anteriormente. Dado que la estructura local del flujo no se considera en este enfoque, entonces se introduce una característica global, la concentración en la superficie en la fase líquida u_* determinada de la isoterma

$$(1 - \epsilon)a_*^{(s)} = \varphi(u_*), \quad (8)$$

en donde, como ya se dijo, ϵ es el coeficiente de porosidad; aquél factor $(1 - \epsilon)$ se debe a que la concentración local $a_*^{(s)}$ se calcula sobre el volumen unidad de la fase sólida, y la concentración global a en la unidad de volumen de la capa.

Entonces la ecuación de difusión externa se escribe de la forma

$$\frac{\partial a}{\partial t} = f(u, u_*), \quad (9)$$

en donde u_* esta relacionado con la concentración de la superficie en el sorbente por la ecuación (8).

De un razonamiento totalmente físico se verifica que la cinética de difusión externa se determina por las condiciones en la fase líquida incluyendo la superficie de división. En particular, si la difusión interna ocurre de manera instantánea (que corresponde a que $D_l \rightarrow \infty$), entonces de (8) se desprende que $(1-\epsilon)a = a_*^{(s)}$, y que existe una relación entre las concentraciones calculadas por unidad de volumen de la solución u o por unidad x de volumen del sorbente ã con las concentraciones por unidad de volumen del filtro \hat{u} (respectivamente a) de la forma $\hat{u} = u\epsilon$, $a = (1-\epsilon)^{-1}$. Así que la ecuación de difusión externa no cambia y empleando (8) y (9) obtenemos

$$f(a, u) = f_1(u, \varphi^{-1}(a)),$$

que corresponde a la ecuación (6)

1.9 Difusión Interna

Introduzcamos la variable interna que caracteriza la distribución de la concentración en los elementos del sorbente y que depende de las coordenadas internas. Llamemos a esta variable a^s , concentración local en el sorbente, la cual se calcula en la

unidad de volumen del sorbente. La concentración a^s también es función de la variable global x . Debido a que en el sorbente no se considera la convección (no hay velocidad), entonces la transferencia se realiza debido a la difusión, y consideraremos como medida de la transferencia de difusión al flujo J_i , calculado en la unidad de área interna del grano del sorbente en la unidad de tiempo. Si en el sorbente ocurren reacciones químicas que afectan a la concentración a^s , entonces se emplea como característica la velocidad de salida $\mu^{(s)}$, que es calculada en la unidad de volumen del sorbente en la unidad de tiempo.

Deduzcamos la ecuación de difusión interna, la cual se basa en la ley de la conservación de la cantidad de sustancia. Consideremos en el sorbente el volumen elemental V_s acotado por la superficie cerrada σ_s . La cantidad de sustancia que pasa a través de la superficie σ_s en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\sigma_s} j_i n d\sigma,$$

en donde n es el vector normal a la superficie σ_s y $d\sigma$ un elemento de superficie.

En el intervalo de tiempo Δt la variación de la cantidad de sustancia en el volumen V_s se da por la expresión

$$\iiint_{V_s} \{[a^{(s)}]_{t_2} - [a^{(s)}]_{t_1}\} dV,$$

en donde dV es el elemento de volumen del sorbente. Por lo tanto podemos escribir la ecuación de la difusión interna en forma integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\sigma_s} j_i n d\sigma - \int_{t_1}^{t_2} \int \int \int_{V_s} \mu^{(s)} dV = \int \int \int_{V_s} \{[a^{(s)}]_{t_2} - [a^{(s)}]_{t_1}\} dV.$$

Si $a^{(s)}$ y j_i son funciones continuamente diferenciables, entonces empleando la fórmula de Ostrogradskii Gauss y tendiendo Δt y V_s a cero obtenemos la ecuación de difusión en forma diferencial:

$$\frac{\partial a^{(s)}}{\partial t} + \text{div} j_i - \mu^{(s)} = 0. \quad (10)$$

La dependencia de j_i de la concentración como de otros factores de sorción es el resultado de una descripción fenomenológica.

Consideremos formas concretas de realización de la ecuación (10) para diferentes formas del grano.

1. Un cilindro con superficie lateral aislada. Supóngase que la longitud de la generatriz es igual a $2R$. La coordenada interna r la dirigimos a través de la generatriz del cilindro, y colocando el origen en la mitad, entonces $s^{(s)} = a^{(s)}(\xi, t; r)$, y la ecuación (10) toma la forma

$$\frac{\partial a^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial r} - \mu^{(s)} = 0.$$

2. Un grano de forma esférica de radio r . En base a la simetría esférica es cómodo introducir coordenadas esféricas. Entonces la coordenada local será una

función sólo de la variable interna r . En coordenadas esféricas la ecuación (10)

toma la forma

$$\frac{\partial a^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial j_i}{\partial r} - \mu^{(s)} = 0.$$

BIBLIO

2. INVESTIGACION DE UN MODELO MATEMÁTICO DE SORCIÓN DINÁMICA CON CINÉTICA DE DIFUSIÓN MIXTA

En este capítulo damos la descripción del modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta.

Supongamos que a través de una columna cilíndrica de sección transversal constante (el eje del cual lo tomamos como el eje de coordenada x), llena uniformemente de granos de un sorbente (con coeficiente de porosidad igual a $\kappa \in (0, 1)$), se hace pasar un gas con velocidad constante igual a ν bajo temperatura constante. La concentración del gas en la entrada de la columna es igual a $\mu(t)$. Representemos por $u(x, t)$ la concentración del gas en el flujo calculado en un volumen unitario del espacio libre, y por $a(x, t)$ la concentración del gas absorbido calculado sobre el volumen unitario de la columna.

Consideremos un elemento arbitrario de la columna acotado por las secciones transversales $x = x_1$ y $x = x_2$.

El flujo de la sustancia a través de estas secciones se determina de acuerdo con la difusión conveccional y longitudinal (dispersión). La cantidad de sustancia que pasa a través de las secciones transversales de la columna en el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se

da por la expresión

$$\int_{t_1}^{t_2} (\nu u + j)|_{x=x_i} S dt \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

donde $j = j(x, t)$ es el flujo difusional longitudinal y S es la superficie de la sección de la columna.

En este mismo intervalo de tiempo Δt la variación de la cantidad de sustancia en el volumen es

$$\int_{x_1}^{x_2} (\kappa u + a)|_{t=t_2} S dx - \int_{x_1}^{x_2} (\kappa u + a)|_{t=t_1} S dx. \quad (2)$$

De (1) y (2) se desprende la ecuación del balance de masas en forma integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\nu u + j)|_{x=x_1} - \int_{x_1}^{x_2} (\nu u + j)|_{x=x_2}] S dt =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\kappa u + a)|_{t=t_2} - \int_{x_1}^{x_2} (\kappa u + a)|_{t=t_1}] S dx. \quad (3)$$

Si las funciones que aparecen en (3) y sus correspondientes derivadas están definidas y son continuas sobre el conjunto $(x_1, x_2) \times (t_1, t_2)$, entonces dividiendo ambas partes por $S \Delta t \Delta x$ y luego tendiendo Δx y Δt hacia cero, obtenemos la ecuación de balance en forma diferencial:

$$(\nu u)_x + j_x + (\kappa u + a)_t = 0. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad del flujo el cual en este tiene la forma $v_x = 0$, obtenemos en forma definitiva

$$\nu u_x + \kappa u_t + a_t = j_x. \quad (5)$$

Tanto la velocidad de sorción de la sustancia a_t como el flujo longitudinal de difusión externa j que aparecen en la ecuación deben ser dados en forma independiente (fenomenológicamente) a partir de razonamientos suplementarios.

El carácter de variación de a_t se determina de la ecuación de la cinética. Si la velocidad de variación de la concentración en el sorbente se determina por las condiciones de transmisión de la masa hacia la superficie del sorbente entonces se dice que hay difusión externa de la sorción. En este caso se supone que la nivelación de la concentración a través del grano ocurre de manera instantánea.

Nosotros consideraremos la ecuación de cinética

$$a_t = \beta(u - u^*), \quad (6)$$

donde $\beta > 0$ es el coeficiente cinético y u^* es la concentración en el flujo sobre la superficie del grano, la cual se encuentra en equilibrio con la concentración de la sustancia absorbida; esto es,

$$a = \varphi(u^*). \quad (7)$$

La relación (7) se denomina la ecuación de la isoterma de sorción.

En adelante consideraremos que existe $\varphi^{-1} = F$. Igualmente con (6) consideremos también la ecuación de la cinética

$$a_t = \gamma(a^* - a), \quad (8)$$

$$a^* = \varphi(u), \quad (9)$$

la cual condicionalmente se puede llamar difusión interna, ya que en la ecuación (8) figuran solo las concentraciones en el grano del sorbente. Aquí a^* es la concentración superficial en el sorbente, la cual se encuentra en equilibrio con la concentración de la sustancia en el flujo.

Lo que se refiere al flujo difusional longitudinal para su descripción frecuentemente se emplea una aproximación basado en la ley de Fick:

$$j(x, t) = -Du_x, \quad D > 0. \quad (10)$$

El signo menos indica que la difusión tiene lugar en la dirección de concentración decreciente. El factor de proporcionalidad D se llama coeficiente de difusión, que no es estrictamente una constante porque puede depender de la concentración. Cuando se considera que la velocidad ν es lo suficientemente grande y el proceso de difusión longitudinal no juega un papel importante en la transmisión de masa, se hace $j \equiv 0$.

Si no se toma en cuenta ninguno de los factores cinéticos, esto es $a = \varphi(u)$, entonces se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual corresponde a la sorción dinámica en equilibrio:

$$\nu u_x + \kappa u_t + a_t = 0, \quad a = \varphi(u). \quad (11)$$

En el trabajo de A.V. Lukshin [13] y posteriormente en [8] se investigó un modelo matemático de sorción dinámica con cinética difusional mixta, el cual considera al mismo tiempo la difusión externa e interna. Consideremos este modelo

Supóngase que a través de una columna cilíndrica de sección transversal constante (el eje del cual lo tomamos como el eje de coordenada x), se llena uniformemente con granos de un sorbente (con coeficiente de porosidad igual a $\kappa \in (0, 1)$) y se hace pasar un gas con velocidad constante igual ν_1 bajo temperatura constante. La concentración del gas en la entrada de la columna es igual a $\mu(t)$. Imaginemos el grano dividido en dos partes; la superficie del grano con volumen α_0 se considerara como una de las partes, la concentración del gas absorbido es igual $v(x, t)$, y la otra, la parte interna del grano con volumen igual a $(1 - \alpha_0)$ y concentración $c(x, t)$. Condicionalmente consideraremos que el proceso de difusión externo está unido con la capa superficial y el intercambio entre capas en el sorbente está ligado con el proceso de difusión interno.

Representemos por $u(x, t)$ la concentración del gas en el flujo, por $a(x, t)$ la concentración del gas absorbido y por $y(x, t)$ la concentración en equilibrio con la concentración $v(x, t)$ en la parte de la superficie del grano. El proceso de absorción dinámica con cinética de difusión mixta, la cual no está en equilibrio, puede ser descrito por el siguiente problema:

$$\nu u_x(x, t) + a_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (12)$$

$$a_t(x, t) = \beta(u(x, t) - y(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (13)$$

$$v(x, t) = f(y(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (14)$$

$$a(x, t) = \alpha_o v(x, t) + (1 - \alpha_o)c(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (15)$$

$$c_t(x, t) = \gamma_o(v(x, t) - c(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (16)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

$$a(x, 0) = c(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (18)$$

Realizando transformaciones sobre este modelo lo podemos reducir a

$$\nu u_x + \beta(u)u = \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (19)$$

$$a_t = \beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (20)$$

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda \beta(u)u - \lambda \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (21)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (22)$$

$$a(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (23)$$

donde

$$Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l \quad 0 \leq t \leq T\},$$

$\nu = \nu_1 \frac{\kappa}{1 - \kappa}$; β y γ_0 son los coeficientes cinéticos positivos de difusión externa y de difusión interna respectivamente, α_0 es una constante también positiva, $\alpha_0 < 1$, y la isoterma de sorción $f(\xi)$ es una función monótona creciente tal que $f(0) = 0$.

Definición: Se llama solución del problema (12)-(16) a las funciones $u(x, t)$, $a(x, t)$ $v(x, t)$ tales que $u(x, t)$, $a(x, t)$, $v(x, t)$, $u_x(x, t)$, $a_t(x, t)$ y $v_t(x, t)$ son funciones continuas en $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l \quad 0 \leq t \leq T\}$ y las funciones $u(x, t)$, $a(x, t)$ y $v(x, t)$ satisfacen el problema (12)-(16).

Integrando (12)-(16) y realizando transformaciones obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integrales para las funciones $u(x, t)$, $a(x, t)$, $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \\ & \mu(t) \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u(s, t)) ds \right\} + \\ & + \int_0^x \exp \left\{ - \int_\xi^x \beta(u(s, t)) ds \right\} \beta(u(\xi, t)) F(v(\xi, t)) d\xi, \end{aligned} \quad (24)$$

$$a(x, t) =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \mu(\tau) \beta(u(x, \tau)) \exp \left\{ - \int_0^x \alpha(u(s, \tau)) ds \right\} d\tau - \\
& - \int_0^t \beta(u(x, \tau)) F(v(x, \tau)) d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^x \beta(u(x, \tau)) \exp \left\{ - \int_\xi^x \alpha(u(s, \tau)) ds \right\} \cdot \\
& \cdot \alpha(u(\xi, \tau)) F(v(\xi, \tau)) d\xi d\tau,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$v(x, t) =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \mu(\tau) \beta(u(x, \tau)) \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u(s, \tau)) ds \right\} d\tau + \\
& + \int_0^x \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u(s, \tau)) ds \right\} \beta(u(x, \tau)) \beta(u(\xi, \tau)) \cdot \\
& \cdot F(v(\xi, \tau)) d\xi d\tau - \int_0^t \beta(u(x, \tau)) F(v(x, \tau)) d\tau - \\
& - \int_0^t \exp \left\{ -\gamma(t - \tau) \right\} \beta_1(u(x, \tau)) \cdot \\
& \cdot \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u(s, \tau)) ds \right\} \mu(\tau) d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \beta_1(u(x,\tau)) \cdot \\
& \cdot \exp\left\{-\int_\xi^x \beta(u(s,\tau)) ds\right\} \beta(u(\xi,\tau)) F(v(\xi,\tau)) d\tau d\xi + \\
& + \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \beta_1(u(x,\tau)) F(v(x,\tau)) d\tau, \tag{26}
\end{aligned}$$

donde

$$\beta_1(u) = \beta(u) - \lambda\beta(u).$$

Por lo tanto, si las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$ son soluciones del problema (12)-(16), entonces ellas satisfacen a (17)-(19).

Por otro lado si, las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t) \in C[Q_T]$ satisfacen el sistema (17)-(19), entonces en Q_T existen las derivadas continuas u_x , a_t y v_t , y las funciones u, a, v satisfacen (12)-(16), así que para la demostración de la existencia y de la unicidad de la solución del problema (12)-(16) es suficiente demostrar la existencia y la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones integrales (17)-(19).

Teorema 1: Suponga que las funciones $\mu(t), F(\varepsilon), \beta(s)$, satisfacen las siguientes

condiciones

$$\mu \in C^2[0, T], \mu(0) = 0, \mu'(t) > 0, t \in [0, T], \quad (27)$$

$$\beta \in C^1(-\infty, \infty), \beta(0) = 0, 0 < \beta'(\xi) < c_1, \xi \in (-\infty, \infty), c_1 = \text{const}, \quad (28)$$

$$F \in C^1(-\infty, \infty), \quad F(0) = 0,$$

$$F(+\infty) > F(\mu(T)); 0 < F'(\xi) < c_2, \xi \in (-\infty, \infty) c_2 = \text{const}; \quad (29)$$

entonces el problema de valor inicial frontera (12)-(14) tiene solución $u(x, t), a(x, t), v(x, t)$.

Para demostrar la existencia de la solución procedemos así:

a. Construimos la sucesión $Z_n = (u_n(x, t), a_n(x, t), v_n(x, t))$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

siguiendo la regla

$$u_n(x, t) =$$

$$\mu(t) \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u_{n-1}(s, t)) ds \right\} +$$

$$+ \int_0^x \exp \left\{ - \int_\xi^x \beta(u_{n-1}(s, t)) ds \right\} \beta(u_{n-1}(\xi, t)) F(v_{n-1}(\xi, t)) d\xi,$$

$$a_n(x, t) =$$

$$\int_0^t \mu(\tau) \beta(u_{n-1}(x, \tau)) \exp \left\{ - \int_0^x \alpha(u_{n-1}(s, \tau)) ds \right\} d\tau -$$

$$- \int_0^t \beta(u_{n-1}(x, \tau)) F(v_{n-1}(x, \tau)) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x \beta(u_{n-1}(x, \tau)) \exp \left\{ - \int_{\xi}^x \alpha(u_{n-1}(s, \tau)) ds \right\} \cdot$$

$$\cdot \alpha(u_{n-1}(\xi, \tau)) F(v_{n-1}(\xi, \tau)) d\xi d\tau,$$

$$v_n(x, t) =$$

$$\int_0^t \mu(\tau) \beta(u_{n-1}(x, \tau)) \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u_{n-1}(s, \tau)) ds \right\} d\tau +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u_{n-1}(s, \tau)) ds \right\} \beta(u_{n-1}(x, \tau)) \beta(u_{n-1}(\xi, \tau)) \cdot$$

$$\cdot F(v_{n-1}(\xi, \tau)) d\xi d\tau - \int_0^t \beta(u_{n-1}(x, \tau)) F(v_{n-1}(x, \tau)) d\tau -$$

$$- \int_0^t \exp \{ -\gamma(t - \tau) \} \beta_1(u_{n-1}(x, \tau)) \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ - \int_0^x \beta(u_{n-1}(s, \tau)) ds \right\} \mu(\tau) d\tau -$$

$$- \int_0^x \int_0^t \exp \{ -\gamma(t - \tau) \} \beta_1(u_{n-1}(x, \tau)) \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ - \int_{\xi}^x \beta(u_{n-1}(s, \tau)) ds \right\} \beta(u_{n-1}(\xi, \tau)) F(v_{n-1}(\xi, \tau)) d\tau d\xi +$$

$$+ \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \beta_1(u_{n-1}(x, \tau)) F(v_{n-1}(x, \tau)) d\tau,$$

b. Se demuestra que $\{Z_n\}$ converge uniformemente hacia $Z(x, t)$, donde $Z(x, t) = \{u(x, t), a(x, t), v(x, t)\}$ ver [16]

Los Teoremas 2 y 3 se emplean en la investigación del problema inverso y se demuestran en [16].

Teorema 2: Supóngase que las funciones $\mu(t)$, $\beta(\xi)$ y $F(\xi)$ satisfacen las condiciones (20), (21) y (22) respectivamente, y $\{u(x, t), a(x, t), v(x, t)\}$ son soluciones del problema (17)-(19). Entonces

$$u_t(x, t) > 0, \quad a_t(x, t) > 0, \quad v_t(x, t) > 0, \quad (x, t) \in Q_T^\circ, \quad (30)$$

$$u_x(x, t) < 0, \quad a_x(x, t) < 0, \quad v_x(x, t) < 0, \quad (x, t) \in Q_T^\circ, \quad (31)$$

donde $Q_T^\circ = \{(x, t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$.

Teorema 3: Si las funciones $\{u(x, t), a(x, t), v(x, t)\}$ son soluciones del problema (17)-(19), satisfacen las condiciones (20),(21) y $F(+\infty) > \mu(T)$, entonces para cualquier $\tau \in (0, T]$ en Q_τ son válidas las siguientes desigualdades:

$$0 \leq u(x, t) \leq u(0, \tau) = \mu(\tau), \quad (32)$$

$$0 \leq a(x, t) \leq a(0, \tau), \quad (33)$$

$$0 \leq v(x, t) \leq f(u(x, t)) \leq f(\mu(\tau)). \quad (34)$$

La primera condición afirma que la concentración del gas en cualquier parte de la columna y para cualquier $t \leq \tau$ no puede ser mayor a la concentración del gas a la entrada de la columna; las condiciones (26) y (27) tienen interpretaciones análogas.

BIBLIOTECA

3.EL PROBLEMA INVERSO Y LA UNICIDAD DE SU SOLUCIÓN

3.1 Planteamiento del Problema Inverso.

Una de las principales direcciones de aplicación de los métodos matemáticos en la investigación de los procesos de sorción es el análisis y la solución de problemas inversos para la identificación de las características desconocidas del proceso u objeto bajo estudio sobre la base de la información experimental que se tiene.

En este capítulo se considera el problema inverso de identificación de un coeficiente utilizando los resultados de un experimento dinámico. En calidad de información suplementaria para la determinación del coeficiente cinético se emplea la curva dinámica de salida, esto es, la concentración de la mezcla o sustancia a la salida de la columna.

El problema inverso se plantea para el modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta.

Consideremos el modelo matemático de un proceso de sorción dinámica con cinética

de difusión mixta:

$$\nu u_x + \beta(u)u = \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t = \beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda \beta(u)u - \lambda \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$a(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Las funciones $\mu(t)$, $\beta(\xi)$ y $F(\xi)$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$\mu \in C^2[0, T], \mu(0) = 0, \mu'(t) > 0, t \in [0, T]; \quad (6)$$

$$\beta \in C^1(-\infty, \infty), 0 < d_1 < \beta(\xi) < d_2, \xi \in (-\infty, \infty); 0 < \beta'(\xi) < d_3 \quad (7)$$

$$F \in C^1(-\infty, \infty), F(0) = 0;$$

$$F(+\infty) > F(\mu(T)), 0 < F'(\xi) < c_1, \xi \in (-\infty, \infty), \quad (8)$$

donde d_1, d_2, d_3, c_1 son constantes.

Supongamos que la función $\beta(\xi)$ que aparece en la ecuación (1)-(3) es desconocida; el problema consiste en identificar el coeficiente utilizando información suplementaria sobre la solución del problema.

Sean las constantes ν, γ, λ conocidas, y para $t \in [0, T]$ se conocen las funciones $\mu(t)$ y

$$\psi(t) = u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Se deben determinar las funciones $\beta(\xi)$, $u(x, t)$, $a(x, t)$ y $v(x, t)$, las cuales satisfacen las ecuaciones (1)-(5),(9).

Además, nosotros vamos a suponer que existe un número $\tau_0 \in (0, T)$ tal que

$$\begin{aligned} \mu &\in C^4[0, \tau_0], \\ F &\in C^2[0, f(\mu(T))] \cap C^4[0, f(\mu(\tau_0))]. \end{aligned} \quad (10)$$

Demos la definición del problema inverso del problema (1)-(5),(9).

Definición. El conjunto de funciones $\{\beta(\xi), u(x, t), a(x, t), v(x, t)\}$ se llama solución del problema inverso (1)-(5),(9) si

$$\begin{aligned} \beta &\in C^1(-\infty, \infty), \quad 0 < \beta(\xi) < d_3, \quad \xi \in (-\infty, \infty), \\ \beta &\in C^2[0, \mu(T)] \cap C^4[0, \mu(\tau_0)], \end{aligned} \quad (11)$$

$u, a, v \in C^2[Q_T] \cap C^4[Q_{\tau_0}]$ y las funciones $\beta(\xi)$, $u(x, t)$, $a(x, t)$, $v(x, t)$ satisfacen el problema (1)-(5),(9).

Anotemos que el número positivo τ_0 que aparece en la definición puede ser lo suficientemente pequeño. Ese número determina la suavidad que se desee de $\beta(\xi)$ para valores pequeños del argumento de la función.

3.2 Unicidad de la solución del Problema Inverso

En este párrafo se estudia la pregunta sobre la unicidad de la solución del problema inverso en las clases de funciones con suavidad finita. Cuando se demuestra el teorema de unicidad en estas clases de funciones frecuentemente se hace la suposición sobre el conocimiento del coeficiente buscado para valores pequeños del argumento ([7], [8]). En el trabajo [4] se propuso un método que permite demostrar la unicidad de la solución del problema inverso en lo global, sin la suposición en lo pequeño.

En este párrafo se aplica este método para la investigación del problema inverso para la ecuación no-lineal del modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta.

Consideremos el modelo matemático de un proceso de sorción dinámica con cinética de difusión mixta:

$$\nu u_x + \beta(u)u = \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t = \beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda \beta(u)u - \lambda \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$a(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

donde $\lambda = \frac{1}{\alpha_0}$, ν , γ son constantes positivas, la función $F(\xi)$ es la función inversa a la isoterma $f(\xi)$ y

$$Q_T = \{(x, t); 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}.$$

Sean las constantes ν , γ , λ y la función $F(\xi)$ conocidas, y para $t \in [0, T]$ se dan las funciones $\mu(t)$ y

$$\psi(t) = u(l, t). \quad (6)$$

Formulemos el resultado principal que muestra la unicidad de la solución del problema inverso (1)-(5) y(6):

Teorema 4: Sean $\mu(t)$ y $F(s)$ funciones que satisfacen las condiciones siguientes:

$$\mu \in C^2[0, T], \mu(0) = 0, \mu'(t) > 0, t \in [0, T],$$

$$F \in C^1(-\infty, \infty), \quad F(0) = 0,$$

$$F(+\infty) > F(\mu(T)); \quad 0 < F'(\xi) < c_1, \quad \xi \in (-\infty, \infty), \quad c_1 = const$$

si $\{\beta_i(\xi), u_i(x, t), a_i(x, t), v_i(x, t)\}$, $i = 1, 2$, son soluciones del problema inverso (1)-(5),(6), entonces $\beta_1(s) = \beta_2(s)$ para $s \in [0, \mu(T)]$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, $a_1(x, t) = a_2(x, t)$, $v_1(x, t) = v_2(x, t)$ en Q_T .

Demostración. Sean $\beta_i(\xi), u_i(x, t), a_i(x, t), v_i(x, t)$, $i = 1, 2$ soluciones del problema inverso (1)-(5). Entonces para $i = 1, 2$,

$$\nu(u_x)_i + \beta_i(u_i)u_i = \beta_i(u_i)F(v_i), \quad x, t \in Q_T, \quad (7)$$

$$(a_t)_i = \beta_i(u_i)(u_i - F(v_i)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

$$(v_t)_i + \gamma v_i = \gamma a_i + \lambda \beta_i(u_i)u_i - \lambda \beta_i(u_i)F(v_i), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (9)$$

$$u_i(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

$$a_i(x, 0) = v_i(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (11)$$

$$u_i(l, t) = \psi(t), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (12)$$

Introduciendo las funciones

$$\begin{aligned} q(x, t) &= u_1(x, t) - u_2(x, t), & p(x, t) &= a_1(x, t) - a_2(x, t), \\ w(x, t) &= v_1(x, t) - v_2(x, t), & z(s) &= \beta_1(s) - \beta_2(s), \end{aligned} \quad (13)$$

para $i = 1, 2$ encontramos en (7)

$$\nu(u_x)_1 + \beta_1(u_1)u_1 = \beta_1(u_1)F(v_1), \quad (14)$$

$$\nu(u_x)_2 - \beta_2(u_2)u_2 = \beta_2(u_2)F(v_2). \quad (15)$$

Realizando las diferencias entre (14) y (15) nos quedaría:

$$\nu(u_x)_1 - \nu(u_x)_2 + \beta_1(u_1)u_1 + \beta_2(u_2)u_2 = \beta_2(u_2)u_2 - \beta_2(u_2)F(v_2);$$

$$\nu(u_1 - u_2)_x + \beta_1(u_1)(u_1 - F(v_1)) - \beta_2(u_2)(u_2 - F(v_2)) = 0.$$

Para $i = 1, 2$ encontramos en (8)

$$(a_t)_1 = \beta_1(u_1)(u_1 - F(v_1)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (16)$$

$$(a_t)_2 = \beta_2(u_2)(u_2 - F(v_2)), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (17)$$

restando,

$$(a_1 - a_2)_t = \beta_1(u_1)(u_1 - F(v_1)) - \beta_2(u_2)(u_2 - F(v_2)),$$

$$(a_1 - a_2)_t = -\{\beta_1(u_1)(F(v_1) - u_1) - \beta_2(u_2)(F(v_2) - u_2)\}.$$

Para $i = 1, 2$ encontramos en (9)

$$(v_t)_1 + \gamma v_1 = \gamma a_1 + \lambda \beta_1(u_1)u_1 - \lambda \beta_1(u_1)F(v_1), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (18)$$

$$(v_t)_2 + \gamma v_2 = \gamma a_2 + \lambda \beta_2(u_2)u_2 - \lambda \beta_2(u_2)F(v_2), \quad (x, t) \in Q_T; \quad (19)$$

restando,

$$(v_t)_1 + \gamma v_1 - (v_t)_2 - \gamma v_2 = \gamma a_1 + \lambda \beta_1(u_1)u_1 - \lambda \beta_1(u_1)F(v_1)$$

$$- \gamma a_2 - \lambda \beta_2(u_2)u_2 + \lambda \beta_2(u_2)F(v_2),$$

$$(v_1 - v_2)_t + \gamma(v_1 - v_2) = \gamma(a_1 - a_2) + \lambda\{\beta_1(u_1)(u_1 - F(v_1))$$

$$- \beta_2(u_2)(u_2 - F(v_2))\}.$$

Utilizando las representaciones (13) y realizando transformaciones simples para la diferencia $\beta_1(u_1)(u_1 - F(v_1)) - \beta_2(u_2)(u_2 - F(v_2))$, se tiene

$$R(x, t) =$$

$$\beta_1(u_1)(u_1 - F(v_1)) - \beta_2(u_2)(u_2 - F(v_2)) =$$

$$r(x, t)(u_1 - u_2) + g(x, t)(\beta_1(u_1) - \beta_2(u_2)) - A(x, t)(v_1 - v_2),$$

donde las funciones $g(x, t)$, $r(x, t)$ y $A(x, t)$ se definen de la siguiente forma:

$$g(x, t) = u_1(x, t) - F_1(v_1(x, t));$$

$$r(x, t) = \beta_2(u_2(x, t)) + g(x, t) \int_0^1 \beta_1'(u_2(x, t) + \theta(u_1(x, t) - u_2(x, t))) d\theta :$$

$$A(x, t) = \int_0^1 F'(v_2(x, t) + \theta(v_1(x, t) - v_2(x, t))) d\theta \cdot \beta_2(u_2(x, t)).$$

Por lo tanto, las funciones $q(x, t)$, $p(x, t)$, $w(x, t)$ son soluciones del siguiente problema:

$$\nu q_x + r(x, t)q = -z(u_2(x, t))g(x, t) + A(x, t)w, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (20)$$

$$p_t = r(x, t)q + z(u_2(x, t))g(x, t) - A(x, t)w, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (21)$$

$$w_x + \gamma w = \gamma p + \lambda r(x, t)q$$

$$+ \lambda z(u_2(x, t))g(x, t) - \lambda A(x, t)w, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (22)$$

$$q(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23)$$

$$p(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (24)$$

$$q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (25)$$

Integrando las ecuaciones (20), (21), (22), y resolviendo las ecuaciones integrales de Volterra de segunda clase, obtenemos la siguiente representación para la función $q(x, t)$ con $(x, t) \in Q_T$:

$$\begin{aligned} q(x, t) = & \frac{1}{\nu} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_\xi^x r(s, t) ds \right\} z(u_2(\xi, t)) g(\xi, t) d\xi \\ & + \int_0^x \int_0^t B_1(x, \xi, t, \tau) g(\xi, \tau) z(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi, \end{aligned} \quad (26)$$

donde $B_1(x, \xi, t, \tau)$ es una función continua junto con sus primeras derivadas parciales cuando $0 \leq \xi \leq x \leq l$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Esta representación la podemos encontrar en [1].

Reemplazando en (26) $x = l$ y utilizando (25) tenemos

$$0 = \int_0^l h(\xi, t)g(\xi, t)z(u_2(\xi, t))d\xi - \int_0^l \int_0^t B(\xi, t, \tau)g(\xi, \tau)z(u_2(\xi, \tau))d\tau d\xi, \quad (27)$$

donde

$$h(\xi, t) = \exp\left\{-\frac{1}{\nu} \int_{\xi}^l r(s, t)ds\right\},$$

$$B(\xi, t, \tau) = \nu B_1(l, \xi, t, \tau).$$

De las desigualdades 1.1.23, 1.1.24 para la función $u_2(x, t)$ se desprende que para cualquier $t \in (0, T)$ la función $u_2(x, t)$ decrece monotónamente respecto a x .

Hagamos en la primera integral que aparece en (27) el cambio de variable $\eta = u_2(\xi, t)$, y denotemos $y(\eta, t)$ la función inversa de $u_2(\xi, t)$; entonces (27) nos quedaría

$$0 = \int_{u_2(0,t)}^{u_2(l,t)} h(y(\eta, t), t)g(y(\eta, t), t)z(\eta) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(y(\eta, t), t)\right)^{-1} d\eta$$

$$- \int_0^l \int_0^t B(\xi, t, \tau)g(\xi, \tau)z(u_2(\xi, \tau))d\tau d\xi, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (28)$$

Derivando (28) respecto a t , tenemos

$$0 = h(y(u_2(l, t), t))z(u_2(l, t))g(y(u_2(l, t), t)) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(y(u_2(l, t), t))^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial t}(l, t) \right) - \\
& - h(y(u_2(0, t), t)) z(u_2(0, t)) (y(u_2(0, t), t)) \cdot \\
& \cdot g(y(u_2(0, t), t)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(y(u_2(0, t), t))^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t) \right) + \\
& + \int_{u_2(0, t)}^{u_2(l, t)} ((h(y(\eta, t), t)))' g(y(\eta, t), t) + h(l, y(\eta, t), t) (g(y(\eta, t), t))' z(\eta) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(y(\eta, t), t) \right)^{-1} - h(l, y(\eta, t), t) g(y(\eta, t), t) z(\eta) \frac{1}{[(u_2)_x(y(\eta, t), t)]^2} \cdot \\
& \cdot \left[-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(y(\eta, t), t) \frac{u_{2t}(y(\eta, t), t)}{u_{2x}(y(\eta, t), t)} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t}(y(\eta, t), t) \right] d\eta + \\
& + \int_0^l B(\xi, t, t) z(u_2(\xi, t)) g(\xi, t) dt + \\
& + \int_0^t \int_0^l B_t(\xi, t, \tau) z(u_2(\xi, \tau)) g(\xi, \tau) d\tau d\xi. \tag{29}
\end{aligned}$$

Haciendo en la primera integral el cambio de variable $\xi = y(\eta, t)$, obtenemos

$$h(l, 0, t) g(0, t) \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) \right)^{-1} z(u_2(0, t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= h(l, l, t)g(l, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(l, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t)\right)^{-1}z(u_2(l, t)) + \\
&+ \int_0^l H(\xi, t)z(u_2(\xi, t))d\xi + \int_0^l B(\xi, t, t)z(u_2(\xi, t))g(\xi, t)d\xi + \\
&+ \int_0^t \int_0^l B_t(\xi, t, \tau)z(u_2(\xi, \tau))g(\xi, \tau)d\tau d\xi, \quad 0 < t \leq T, \tag{30}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
H(\xi, t) &= -h_\xi(l, \xi, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(\xi, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi, t)\right)^{-1}g(\xi, t) - \\
&- g_\xi(\xi, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(\xi, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi, t)\right)^{-1}h(l, \xi, t) + h_t(l, \xi, t)g(\xi, t) + \\
&+ g_t(\xi, t)h(l, \xi, t) + h(l, \xi, t)g(\xi, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi, t)\right)^{-1} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x}(\xi, t) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(\xi, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(\xi, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi, t)\right)^{-1} \right].
\end{aligned}$$

Y para las asintóticas cuando $t \rightarrow 0$ de las funciones $u_i(x, t)$ $i = 1, 2$ y de la derivada u_x respecto a t , se desprende que

$$\beta_1^{(k)}(0) = \beta_2^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2;$$

de aquí se puede ver que $z^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, 2$. Esto es así ya que $z(s) = \beta_1 - \beta_2$,

luego $z \in c^2[0, \varphi_0]$, donde $\varphi_0 = \mu(\tau)$.

BIBLIOTECA

Veamos que $z(0) = 0$. En efecto sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z > 0$; entonces existe un $\varphi \in (0, \varphi_0)$ tal que $z(\varphi) > 0$ para $\varphi \in [0, \varphi_1]$. Representemos por T_1 la raíz de la ecuación $\mu(t) = \varphi_1$. Consideremos la ecuación (26) en Q_{T_1} : de la desigualdad 1.1.25 para la función $u_2(x, t)$ es válida la desigualdad $0 \leq u_2(x, t) \leq \varphi_1$, y de 1.2.23 la función $z(u_2(x, t))$ crece monótonamente respecto a t en Q_{T_1} . Entonces de (20) tenemos que para $0 < t \leq t^*$, donde t^* es tal que

$$\exp\{-at\} > t^* \max | \beta_1(x, \varphi, t, z) |,$$

donde $0 \leq x, \varphi \leq l, 0 \leq t, -\tau \leq t^*$.

Por lo tanto $q(x, t) > 0$. Pero esta última desigualdad contradice (25), por lo tanto $z(0) = 0$. Las igualdades $z'(0) = z''(0) = 0$ se demuestran de manera análoga.

Por lo tanto para la función $z(s)$ es válida la representación $z(s) = s^2\varphi(s)$, donde $\varphi \in C[0, \mu(\tau_0)]$. De esta representación y de la ecuación (26) obtenemos para la función $\varphi(s)$

$$\begin{aligned} & h(l, 0, t)g(0, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)\right)^{-1} (u_2(0, t))^2\varphi(u_2(0, t)) = \\ & = h(l, l, t)g(l, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(l, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t)\right)^{-1} (u_2(l, t))^2\varphi(u_2(l, t)) + \\ & + \int_0^l H(\xi, t)(u_2(\xi, t))^2\varphi(u_2(\xi, t))d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l B(\xi, t, t)(u_2(\xi, t))^2 \varphi(u_2(\xi, t))g(\xi, t)d\xi - \\
& - \int_0^t \int_0^l B_t(\xi, t, \tau)(u_2(\xi, \tau))^2 \varphi(u_2(\xi, \tau))g(\xi, \tau)d\tau d\xi, \quad 0 < t \leq \tau_0, \quad (31)
\end{aligned}$$

De aquí, y despejando de (27) $\varphi(u_2(0, t))$, nos quedaría

$$\begin{aligned}
\varphi(u_2(0, t)) = & \\
& \frac{h(l, l, t)g(l, t)u_{2t}(l, t)(u_2(l, t))^2 \varphi(u_2(l, t))u_{2x}(l, t)}{(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)u_{2x}(l, t)(u_2(0, t))^2} + \\
& + \frac{\int_0^l H(\xi, t)(u_2(\xi, t))^2 \varphi(u_2(\xi, t))d\xi}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)u_{2x}(0, t)^{-1}(u_2(0, t))^2} + \\
& + \frac{\int_0^l B(\xi, t, t)(u_2(\xi, t))^2 \varphi(u_2(\xi, t))g(\xi, t)d\xi}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)[u_{2x}(0, t)]^{-1}(u_2(0, t))^2} + \\
& + \frac{\int_0^t \int_0^l B_t(\xi, t, \tau)(u_2(\xi, \tau))^2 \varphi(u_2(\xi, \tau))g(\xi, \tau)d\tau d\xi}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)[u_{2x}(0, t)]^{-1}(u_2(0, t))^2}, \\
& 0 < t \leq \tau_0. \quad (32)
\end{aligned}$$

De la suavidad de las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ se desprende que

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \mu'(0) \exp \left\{ -\frac{\beta(0)}{\nu} x \right\}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x}(x, 0) = \frac{-\beta(0)}{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0), \quad (34)$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x^2}(x, 0) = \frac{-\beta^2(0)}{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0), \quad (35)$$

$$h(x, 0) = \exp \left\{ -\frac{\beta(0)}{\nu}(l-x) \right\}, \quad (36)$$

$$g_t(x, 0) = \mu'(0) \exp \left\{ -\frac{\beta(0)}{\nu}x \right\}, \quad (37)$$

donde $\beta(0) = \beta_1(0) = \beta_2(0)$. Por lo tanto los siguientes límites existen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(l, t)}{g(0, t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_t(l, t)}{g_t(0, t)} = \frac{u_{1t}(l, 0)}{u_{1t}(0, 0)} = \exp \left\{ -\frac{\beta_2(0)}{\nu}l \right\};$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{2x}(0, t)}{u_{2x}(l, t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{2xt}(0, t)}{u_{2xt}(l, t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\alpha(0)u_{2t}(0, t)}{-\alpha(0)u_{2t}(l, 0)} = \exp \left\{ \frac{\beta_2(0)}{\nu}l \right\};$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(l, l, t)g(l, t)u_{2t}(l, t)u_{2x}(0, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)u_{2x}(l, t)} &= \\ &= \frac{h(l, l, 0)u_{2t}(l, 0)}{h(l, 0, 0)u_{2t}(0, 0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(l, t)u_{2x}(0, t)}{g(0, t)u_{2x}(l, t)} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-h_\xi(l, \xi, t)g(\xi, t)u_{2t}(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)u_{2x}(\xi, t)} &= \\ &= \frac{h_\xi(l, \xi, 0)u_{2t}(\xi, 0)}{h(l, 0, 0)u_{2t}(0, 0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{g(0, t)u_{2x}(\xi, t)} = -\frac{1}{\nu}\beta_2(0); \end{aligned}$$

BIBLIOTECA UFRJ

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-g_\xi(\xi, t)h(l, \xi, t)u_{2t}(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)u_{2x}(\xi, t)} = \\ & = \frac{-h(l, \xi, 0)u_{2t}(\xi, 0)}{h(l, 0, 0)u_{2t}(0, 0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_\xi(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{g(0, t)u_{2x}(\xi, t)} = \frac{1}{\nu} \beta_2(0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_t(\xi, t)h(l, \xi, t)u_{2x}(0, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)} = \\ & = \frac{g_t(\xi, 0)h(l, \xi, 0)}{h(l, 0, 0)u_{2t}(0, 0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{2x}(0, t)}{g(0, t)} = \frac{1}{\nu} \beta_2(0); \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\xi, t)h_t(l, \xi, t)u_{2x}(0, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)} = 0;$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-h(l, \xi, t)g(\xi, t)u_{2t}(\xi, t)u_{2x}(0, t)u_{2xx}(\xi, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)(u_{2x}(\xi, t))^2} = \\ & = \frac{-h(l, \xi, 0)u_{2t}(\xi, 0)}{h(l, 0, 0)u_{2t}(0, 0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\xi, t)}{g(0, t)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{2xx}(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{(u_{2x}(\xi, t))^2} = \frac{1}{\nu} \beta_2(0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(l, \xi, t)g(\xi, t)u_{2xt}(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t)u_{2x}(\xi, t)} = \\ & = \frac{h(l, \xi, 0)u_{2xt}(\xi, 0)}{h(l, 0, 0)u_{2t}(0, 0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\xi, t)u_{2x}(0, t)}{g(0, t)u_{2x}(\xi, t)} = -\frac{1}{\nu} \beta_2(0). \end{aligned}$$

De lo anterior se desprende que existe un $T_1 \in (0, \tau_0]$ tal que para $t \in (0, T_1]$ la

función $\varphi(s)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}
\varphi(u_2(0, t)) &= \\
&= \exp \left\{ -2 \frac{\beta(0)}{\nu} l \right\} \varphi(u_2(l, t)) + k_1(t) \varphi(u_2(l, t)) - \\
&- \int_0^l \frac{\beta}{\nu} \left[\exp \left\{ -2 \frac{\beta \xi}{\nu} \right\} + k_2(\xi, t) \right] \cdot \varphi(u_2(\xi, t)) d\xi + \\
&+ \int_0^l \int_0^t K_3(\xi, t, \tau) \varphi(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi, \tag{38}
\end{aligned}$$

donde las funciones

$$\begin{aligned}
&\max \left\{ |k_1(t)| + \int_0^l |k_2(\xi, t)| d\xi + \int_0^l \int_0^t |k_3(\xi, t, \tau)| d\xi d\tau \right\} \\
&\leq \frac{1}{4} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\beta(0)}{\nu} l \right\} \right), \quad t \in [0, \tau_0]. \tag{39}
\end{aligned}$$

Demostremos que $\varphi(s) = 0$ para $s \in [0, u_2(0, T_1)]$. Supongamos que esto no es así. Representemos por M el máximo en valor absoluto de $\varphi(s)$ sobre el segmento $[0, u_2(0, T_1)]$, y por t_{02} el valor que pertenece a $(0, T_1]$ tal que $\|\varphi(u_2(0, t_{02}))\| = M$; entonces

$$\begin{aligned}
\max \varphi(u_2(0, t_{02})) &\leq \max \left| \exp \left\{ -\frac{2\beta(0)l}{\nu} \right\} \varphi(u_2(l, t)) \right| + \max |k_1(t) \varphi(u_2(l, t))| + \\
&+ \int_0^l \max \left| \frac{\beta}{\nu} \exp \left\{ -\frac{2\beta}{\nu} \xi \right\} \varphi(u_2(\xi, t)) d\xi \right| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \max |k_2(\xi, t) \varphi(u_2(\xi, t)) d\xi | + \\
& + \int_0^l \int_0^t \max |K_3(\xi, t, \tau) \varphi(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi | \quad (40)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
M & \leq M \exp\left(-\frac{2\beta(0)l}{\nu}\right) + M k_1 + \int_0^l \frac{\beta}{\nu} \exp\left(-\frac{2\beta}{\nu}\xi\right) M \\
& + \max \int_0^l |k_2(\xi, t)| M d\xi + \int_0^l \int_0^t \max |K_3(\xi, t, \tau)| M d\tau d\xi \\
& = M \exp\left(-\frac{2\beta(0)l}{\nu}\right) + M |k_1| + \frac{M}{2} \exp\left(-\frac{2\beta l}{\nu}\right) + M \max \int_0^l |k_2(\xi, t)| d\xi \\
& + M \int_0^l \int_0^t |K_3(\xi, t, \tau)| d\tau d\xi < M.
\end{aligned}$$

La desigualdad obtenida contradice la positividad de M . Por lo tanto, $\varphi(s) = 0$ para $s \in [0, u_2(0, T_0)]$. Consecuentemente $z(s) = 0$ para $s \in [0, u_2(0, T_0)]$.

Demostremos ahora que la función $z(s)$ es igual a cero para valores grandes del argumento. Definamos la magnitud T_2 de la siguiente forma: si $\psi(T) < \mu(T_1)$, entonces $T_2 = T$; si $\psi(T) > \mu(T_1)$, entonces T_2 es la raíz de la ecuación $\psi(t) = \mu(T_1)$.

Consideremos la ecuación (30) y de ahí despejemos $z(u_2(0, t))$ para $t \in [T_0, T_1]$, donde $z(u_2(l, t)) = 0$:

$$\begin{aligned}
z(u_2(0, t)) &= \\
&= \frac{h(l, l, t)g(l, t)u_{2t}(l, t) (u_{2x}(l, t))^{-1} z(u_2(l, t))}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t) (u_{2x}(0, t))^{-1}} + \\
&+ \frac{\int_0^l H(\xi, t)z(u_2(\xi, t))d\xi}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t) (u_{2x}(0, t))^{-1}} + \\
&+ \frac{\int_0^l B(\xi, t, t)z(u_2(\xi, t))g(\xi, t)d\xi}{h(l, 0, t)g(0, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)\right)^{-1}} + \\
&+ \frac{\int_0^t \int_0^l B_t(\xi, t, \tau)z(u_2(\xi, \tau))g(\xi, \tau)d\tau d\xi}{h(l, 0, t)g(0, t)u_{2t}(0, t) (u_{2x}(0, t))^{-1}}, \\
&0 < t \leq T.
\end{aligned}$$

Escribiendo lo anterior

$$\begin{aligned}
z(u_2(0, t)) &= \int_0^l H_3(\xi, t)z(u_2(\xi, t))d\xi + \int_{T_0}^t \int_0^l H_4(\xi, t, \tau)z(u_2(\xi, \tau))d\xi d\tau, \\
t &\in [T_0, T_1],
\end{aligned} \tag{41}$$

donde

$$H_3(\xi, t) = H(\xi, t) + B(\xi, t, t) \left(h(l, 0, t)g(0, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) \right)^{-1} \right)^{-1}, \tag{42}$$

$$H_4(\xi, t, \tau) = B_t(\xi, t, \tau)g(\xi, \tau) \left(h(l, 0, t)g(0, t)\frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) \right)^{-1} \right)^{-1}, \tag{43}$$

y haciendo en las integrales que aparecen en la ecuación anterior el cambio de variable

$$u_2(\xi, t) = s \quad \xi = u_2^{-1}(s, t) \quad ds = \frac{\partial u_2}{\partial x}(\xi, t) d\xi,$$

y considerando que $z(\xi) = 0$ para $\xi \in [0, u_2(0, T_0)]$, obtenemos:

$$\begin{aligned} z(u_2(0, t)) = & \\ & = \int_{u_2(0, T_0)}^{u_2(0, t)} H_3(u_2^{-1}(s, t), t) z(s) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(u_2^{-1}(s, t), t) \right)^{-1} d\xi + \\ & + \int_{T_0}^t \int_{u_2(0, T_0)}^{u_2(0, t)} H_4(u_2^{-1}(s, t), t, \tau) z(s) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(u_2^{-1}(s, t), t) \right)^{-1} d\xi d\tau, \end{aligned}$$

$$t \in [T_0, T_1].$$

Cambiando en la segunda integral el orden de integración e introduciendo la variable

$\theta = u_2(0, t)$, obtenemos la ecuación de Volterra de segundo orden para la función

$z(s)$,

$$z(\theta) = \int_{u_2(0, T_0)}^{\theta} Q(s, t) z(s) ds \quad \theta \in [u_2(0, T_0), u_2(0, T_1)],$$

con núcleo

$$\begin{aligned} Q(s, t) = & H_3(u_2^{-1}(s, t), t) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(u_2^{-1}(s, t), t) \right)^{-1} d\xi + \\ & + \int_{y(\theta)}^t H_4(u_2^{-1}(s, t), t, \tau) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(u_2^{-1}(s, t), t) \right)^{-1} d\tau, \end{aligned}$$

con $t \in [T_0, T_1]$ y $y(\theta)$ la función inversa de $\theta = u_2(0, t)$. Por lo tanto $z(s) = 0$ para $s \in [u_2(0, T_0), u_2(0, T_1)]$.

Considerando después la ecuación

$$z(\theta) = \int_{u_2(0, T_0)}^{\theta} Q(s, t) z(s) ds$$

sobre el segmento $[T_1, T_2]$, donde T_2 es la raíz de la ecuación

$$u_2(l, t) = u_2(0, T_1)$$

para $u_2(l, T) > u_2(0, T_1)$ ó $T_2 = T$,

análogamente a como se hizo anteriormente obtenemos que $z(s) = 0$ para

$s \in [0, u_2(0, T_2)]$.

En virtud de que

$$u_x(x, t) \leq \text{const} < 0; \quad 0 \leq x \leq l, \quad T_0 \leq t \leq T,$$

entonces continuando con el proceso se obtiene en un número finito de pasos que

$$z(s) = 0$$

para $s \in [0, u_2(0, T)]$.

Ya que en Q_T se cumple la desigualdad $0 \leq u_2(x, t) \leq u_2(0, T)$, entonces

$$z(u_2(x, t)) = 0$$

en Q_T , y de

$$q(x, t) = -\frac{1}{\nu} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_\xi^x r(s, t) ds \right\} z(u_2(\xi, t)) g(\xi, t) d\xi$$

$$+ \int_0^x \int_0^t B_1(x, \xi, t, \tau) g(\xi, \tau) z(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi, \quad (x, t) \in Q_T \quad (44)$$

se tiene que $q(x, t) = 0$. De donde se obtiene que $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ en Q_T . Ahora bien, puesto que

$$w(x, t) = f(x, t) + \int_0^t f(x, \tau) R_1(x, t, \tau) d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_0^x R_3(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (45)$$

se obtiene que $w(x, t) = 0$, y por lo tanto $v_1(x, t) = v_2(x, t)$.

Integrando (17) con la condición $p(x, 0) = w(x, 0) = 0$ resulta

$$p(x, t) = \beta \int_0^t q(x, \tau) d\tau - \beta \int_0^t A(x, \tau) w(x, \tau) d\tau - \beta \int_0^t z(u_2(x, \tau)) d\tau.$$

De esta representación para $p(x, t)$ y $z(u_2(x, t)) = 0$ Se desprende que

$$a_1(x, t) = a_2(x, t) \text{ en } Q_T.$$

El teorema queda demostrado.

4. MÉTODO DE PARAMETRIZACION DE DIMENSION FINITA PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO

Uno de los problemas principales que aparecen cuando se resuelve un problema inverso sobre la identificación de los coeficientes en una ecuación diferencial no lineal que depende de la solución del problema, es encontrar al mismo tiempo el coeficiente buscado y el valor de su argumento.

Un método lo suficientemente difundido para la solución de estos problemas inversos es el método de parametrización de dimensión finita que consiste en lo siguiente: suponemos que los coeficientes buscados se representan por cierta función en forma analítica, la cual depende de un conjunto finito de parámetros que deben ser determinados. En este caso el problema inverso se convierte en la minimización de cierta función de n variables.

En el presente párrafo consideraremos la aplicación del método de parametrización para encontrar la solución del problema inverso.

Consideremos el problema inicial-contorno.

$$\nu u_x + \beta(u)u = \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t = \beta(u)(u - F(v)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda \beta(u)u - \lambda \beta(u)F(v), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$a(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

donde $\lambda = \frac{1}{\alpha_0}$, ν , γ son constantes positivas, la función $F(\xi)$ es la función inversa a la isoterma $f(\xi)$, y $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$.

Las funciones $\mu(t)$, $\beta(s)$, $F(\xi)$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$\mu \in C^1[0, T], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\beta \in C^1(-\infty, \infty),$$

$$\beta(0) = 0, \quad 0 < \beta'(\xi) < c_1, \quad \xi \in (-\infty, \infty), \quad c_1 \rightarrow \text{const}, \quad (7)$$

$$F \in C^1(-\infty, \infty), \quad F(0) = 0,$$

$$F(+\infty) > F(\mu(T)); \quad 0 < F'(\xi) < c_2, \quad c_2 \rightarrow \text{const}. \quad (8)$$

El problema inverso investigado por nosotros consiste en identificar el coeficiente cinético $\beta(s)$ a través de la información suplementaria sobre la solución del problema (1)-(5), más exactamente, la condición

$$\psi(t) = u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Dada la función $\mu(t)$, la función $F(\xi)$ y las constantes ν, γ, λ el problema (1)-(5) define el operador A , que hace corresponder la función $\beta(s)$ con la función $u(l, t)$. Por lo tanto el problema de determinar la función $\beta(s)$ a través de la función $\psi(t)$ se puede considerar como el problema de resolver la ecuación operacional

$$A\beta = \psi. \quad (10)$$

Supongamos que para la parte derecha $\bar{\psi}(t)$ de la ecuación (10) se tiene solución única $\bar{\beta}(s) = \bar{\beta}(s; \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n)$, donde $\bar{c} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n\}$ son parámetros numéricos. Supongamos que el vector $\bar{c} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n\} \in W$, donde W es un conjunto acotado y cerrado en el espacio euclidiano de dimensión finita E^n . Supongamos también que para cualquier $c \in W$ la función $\beta(s; c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv \beta(s; c)$ satisface la condición (7), y además $\beta(s; c)$ es una función dos veces derivables continuamente respecto a todos sus argumentos sobre el conjunto

$$W_s^n = \{(s; c_1, c_2, \dots, c_n) : s \in E^1, c \in W\}.$$

La correspondencia entre la función $\beta(s; c)$ y el vector c es biunívoca. Supongamos ahora que la función $\bar{\psi}(t)$ es conocida solo en forma aproximada, esto es, en lugar de $\bar{\psi}(t)$ se da la función continua $\psi_\delta(t)$ y el número $\delta > 0$ de tal forma que

$$\|\bar{\psi}(t) - \psi_\delta(t)\|_{L_2[0, T]} \leq \delta.$$

Mostremos que en este caso en calidad de solución aproximada del problema inverso se puede considerar la función $\beta(s; c_\delta)$ con el vector $c_\delta \in W$, la cual satisface la desigualdad

$$\|A\beta(s; c_\delta) - \psi_\delta\|_{L_2[0, T]} = \|u(l, t, c_\delta) - \psi_\delta(t)\|_{L_2[0, T]} \leq \delta, \quad (11)$$

donde $u(x, t; c)$, $a(x, t; c)$, $v(x, t; c)$ son solución del problema (1)-(5) con

$$\beta(s) = \beta(s; c).$$

Esto es cierto, ya que el operador A se puede considerar como un operador que actúa del conjunto $W \subset E^n$ en el espacio $L_2[0, T]$.

Del teorema sobre la dependencia continua de la solución del problema (1)-(5) respecto a la función $\beta(s)$ se desprende que el operador A es continuo sobre el conjunto W . Puesto que W es acotado y cerrado, esto es, un conjunto compacto en E^n , entonces de la desigualdad (11) se desprende que $\|c_\delta - c\|_{E^n} \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

Por lo tanto, la solución aproximada puede ser encontrada minimizando sobre el conjunto W el funcional

$$\Phi(c) = \|A\beta(s; c_\delta) - \psi_\delta\|_{L_2[0, T]}^2 = \int_0^T [u(l, t, c) - \psi_\delta(t)]^2 dt.$$

Para la solución del anterior problema se pueden emplear los métodos del gradiente. Encontremos una expresión para el gradiente de la función $\Phi(c)$. Representemos por

$u(x, t; \bar{c})$, $a(x, t; \bar{c})$, $v(x, t; \bar{c})$ las soluciones del problema (1)-(5) correspondiente a la función $\beta(s; \bar{c})$ y por $u(x, t; \bar{c} + \Delta c)$, $a(x, t; \bar{c} + \Delta c)$, $v(x, t; \bar{c} + \Delta c)$ las soluciones del mismo problema pero ahora correspondiente a la función $\beta(s; \bar{c} + \Delta c)$.

Introduciendo las funciones

$$q(x, t; \bar{c}, \Delta c) = u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - u(x, t; \bar{c}),$$

$$p(x, t; \bar{c}, \Delta c) = a(x, t; \bar{c} + \Delta c) - a(x, t; \bar{c}),$$

$$w(x, t; \bar{c}, \Delta c) = v(x, t; \bar{c} + \Delta c) - v(x, t; \bar{c}),$$

la variación de la función $\Phi(c)$ es igual a

$$\begin{aligned} & \Phi(\bar{c} + \Delta c) - \Phi(\bar{c}) = \\ & = \int_0^T [u(l, t; \bar{c} + \Delta c) - \psi_\delta(t)]^2 dt - \int_0^T [u(l, t; \bar{c}) - \psi_\delta(t)]^2 dt = \\ & = \int_0^T (u^2(l, t; \bar{c} + \Delta c) - 2u(l, t; \bar{c} + \Delta c)\psi_\delta(t) + \psi_\delta^2(t) - \\ & - u^2(l, t; \bar{c}) + 2u(l, t; \bar{c})\psi_\delta(t) - \psi_\delta^2(t)) dt = \\ & = \int_0^T (u^2(l, t; \bar{c} + \Delta c) - u^2(l, t; \bar{c}) + 2u(l, t; \bar{c})\psi_\delta(t) - \\ & - 2u(l, t; \bar{c} + \Delta c)\psi_\delta(t)) dt = \\ & = \int_0^T (u^2(l, t; \bar{c} + \Delta c) - u(l, t; \bar{c} + \Delta c)u(l, t; \bar{c}) + \\ & + u(l, t; \bar{c} + \Delta c)u(l, t; \bar{c}) - u(l, t; \bar{c} + \Delta c)u(l, t; \bar{c}) + \\ & + u(l, t; \bar{c} + \Delta c)u(l, t; \bar{c}) + u(l, t; \bar{c})u(l, t; \bar{c}) - \\ & - u(l, t; \bar{c})u(l, t; \bar{c}) - u(l, t; \bar{c})u(l, t; \bar{c}) + 2u(l, t; \bar{c})\psi_\delta(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2u(l, t; \bar{c} + \Delta c)\psi_\delta(t)dt = \\
& = 2 \int_0^T (u(l, t; \bar{c}) - \psi_\delta(t))(u(l, t; \bar{c} + \Delta c) - u(l, t; \bar{c}))dt + \\
& + \int_0^T (u(l, t; \bar{c} + \Delta c) - u(l, t; \bar{c}))^2 dt = \\
& = 2 \int_0^T [u(l, t; \bar{c}) - \psi_\delta(t)]q(l, t; \bar{c}, \Delta c)dt + \\
& + \int_0^T [q(l, t; \bar{c}, \Delta c)]^2 dt \tag{12}
\end{aligned}$$

Desarrollemos la expresión $p_t(x, t; \bar{c}, \Delta c)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
p_t(x, t; \bar{c}, \Delta c) & = \\
& = a_t(x, t; \bar{c} + \Delta c) - a_t(x, t; \bar{c}) = \\
& = \beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c)u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - \\
& - \beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c)F(v(x, t; \bar{c} + \Delta c), g) - \\
& - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})u(x, t; \bar{c}) + \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})F(v(x, t; \bar{c}), g) = \\
& = \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})(u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - u(x, t; \bar{c})) + \\
& + u(x, t; \bar{c} + \Delta c)(\beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})) - \\
& - [\beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c)F(v(x, t; \bar{c} + \Delta c), g) - \\
& - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})F(v(x, t; \bar{c}), g)] = \\
& \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})(u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - u(x, t; \bar{c})) + \\
& + \{\beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c} + \Delta c)\} \cdot \\
& \cdot ((u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - u(x, t; \bar{c})) + \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c} + \Delta c) \cdot \\
& \cdot u(x, t; \bar{c} + \Delta c) + \beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c) \cdot \\
& \cdot u(x, t; \bar{c}) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c} + \Delta c)u(x, t; \bar{c}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - \\
& -\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c) + F(v(x, t; \bar{c}), g) + O(w^2)\right] \cdot \right. \\
& \cdot (\beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c}) + \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})) - \\
& \left. -\beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})F(v(x, t; \bar{c}), g)\right\} = \\
& = \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + q(x, t; \bar{c}, \Delta c) \cdot \\
& \cdot \{\beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c} + \Delta c)\} + u(x, t; \bar{c} + \Delta c) \cdot \\
& \cdot \{\beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})\} + \\
& + u(x, t; \bar{c})\{\beta(u(x, t; \bar{c} + \Delta c); \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c} + \Delta c)\} = \\
& = -\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c) + F(v(x, t; \bar{c}), g) + O(w^2)\right] \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \right. \\
& \left. + O(q^2) + \left(\frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c) + F(v(x, t; \bar{c}), g) + \right. \right. \\
& \left. \left. + O(w^2) \cdot \beta(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) - \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})F(v(x, t; \bar{c}), g)\right)\right\} = \\
& = \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + u(x, t; \bar{c} + \Delta c)h(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \\
& + \frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)(q^2(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \\
& + u(x, t; \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c)) + O(q^2)\{q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + u(x, t; \bar{c})\} - \\
& -\left\{\frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)O(q^2) + F(v(x, t; \bar{c}), g)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) \cdot \right. \\
& \cdot q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + F(v(x, t; \bar{c}), g)O(q^2) + O(w^2)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) \cdot \\
& \cdot q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)\beta(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) + \\
& \left. + O(w^2)O(q^2)\right\} + F(v(x, t; \bar{c}), g)h(x, t; \bar{c}, \Delta c) +
\end{aligned}$$

$$+O(w^2)\beta(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)\}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
p_t(x, t; \bar{c}, \Delta c) &= \\
&= \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + u(x, t; \bar{c} + \Delta c)h(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \\
&+ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q^2(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \\
&+ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) \cdot u(x, t; \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \\
&+ O(q^2)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + O(q^2)u(x, t; \bar{c}) - \\
&- \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) - \\
&- \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)O(q^2) - F(v(x, t; \bar{c}), g)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) \cdot \\
&\cdot q(x, t; \bar{c}, \Delta c) - O(w^2)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) - \\
&- F(v(x, t; \bar{c}), g)O(q^2)O(w^2)O(q^2) - \\
&- \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)\beta(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) - \\
&- F(v(x, t; \bar{c}), g)h(x, t; \bar{c}, \Delta c) - O(w^2)(x, t; \bar{c}, \Delta c)\beta(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) \quad (13)
\end{aligned}$$

Escribamos (12) en forma más compacta:

$$\begin{aligned}
p_t(x, t; \bar{c}, \Delta c) &= \\
&= \beta(u(x, t; \bar{c}); \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c) + u(x, t; \bar{c} + \Delta c)h(x, t; \bar{c}, \Delta c) + \\
&+ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c) \cdot u(x, t; \bar{c})q(x, t; \bar{c}, \Delta c) - \\
&- \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \bar{c}, \Delta c)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) - \\
&- F(v(x, t; \bar{c}), g)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \bar{c}), \bar{c} + \Delta c)q(x, t; \bar{c}, \Delta c) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \tilde{c}, \Delta c)\beta(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c) - \\
& -F(v(x, t; \tilde{c}), g)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + R_1,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c)q^2(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + O(q^2)q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) \\
&= +O(q^2)u(x, t; \tilde{c}) - \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t; \tilde{c}, \Delta c)O(q^2) - \\
&-O(w^2)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c)q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) - F(v(x, t; \tilde{c}), g)O(q^2) - \\
&-O(w^2)O(q^2) - O(w^2)\beta(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c).
\end{aligned}$$

Así que las funciones $q(x, t, \tilde{c}, \Delta c)$, $p(x, t, \tilde{c}, \Delta c)$, $w(x, t, \tilde{c}, \Delta c)$ son soluciones del problema

$$\nu q_x(x, t, \tilde{c}, \Delta c) = -p_t(x, t, \tilde{c}, \Delta c), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
p_t(x, t, \tilde{c}, \Delta c) &= \\
&= \beta(u(x, t, \tilde{c}); \tilde{c})q(x, t, \tilde{c}, \Delta c) + u(x, t, \tilde{c} + \Delta c)h(x, t, \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t, \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c) \cdot u(x, t, \tilde{c})q(x, t, \tilde{c}, \Delta c) - \\
&- \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t, \tilde{c}, \Delta c)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t, \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c)q(x, t, \tilde{c}, \Delta c) - \\
&- F(v(x, t, \tilde{c}), g)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u(x, t, \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c)q(x, t, \tilde{c}, \Delta c) - \\
&- \frac{\partial F}{\partial v}w(x, t, \tilde{c}, \Delta c)\beta(u(x, t, \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c) - \\
&- F(v(x, t, \tilde{c}), g)h(x, t, \tilde{c}, \Delta c) + R_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_t(x, t, \tilde{c}, \Delta c) + \gamma w(x, t, \tilde{c}, \Delta c) &= \\
&= \gamma p(x, t, \tilde{c}, \Delta c) + \lambda p_t(x, t, \tilde{c}, \Delta c),
\end{aligned} \tag{15}$$

$$q(0, t, \tilde{c}, \Delta c) = 0, \tag{16}$$

$$p(x, 0, \tilde{c}, \Delta c) = w(x, 0, \tilde{c}, \Delta c) = 0. \tag{17}$$

Consideremos las funciones $m(x, t; \tilde{c})$, $n(x, t; \tilde{c})$, $r(x, t; \tilde{c})$, las cuales son soluciones del problema conjugado

$$m_x(x, t; \tilde{c}) = \{\beta(u(x, t; \tilde{c}); \tilde{c})\} \cdot \left\{ \frac{1}{\nu} m(x, t; \tilde{c}) - n(x, t; \tilde{c}) - \lambda r(x, t; \tilde{c}) \right\}, \tag{18}$$

$$n_t(x, t; \tilde{c}) = -\gamma r(x, t; \tilde{c}); (x, t) \in Q_T, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
r_t(x, t; \tilde{c}) &= \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \tilde{c}) + n(x, t; \tilde{c}) + \lambda r(x, t; \tilde{c}) \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial v} \beta(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c}) \right\} + r(x, t; \tilde{c}) \gamma,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$m(l, t; \tilde{c}) = 2(u(l, t; \tilde{c}) - \psi_\delta(t)), 0 \leq t \leq T, \tag{21}$$

$$n(x, T; \tilde{c}) = r(x, T; \tilde{c}) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{22}$$

Regresando a la ecuación (11) y utilizando las condiciones (16)-(17) y (21)-(22), tenemos

$$\Phi(\tilde{c} + \Delta c) - \Phi(\tilde{c}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T (q(l, t; \tilde{c}, \Delta c))^2 dt + \int_0^T \int_0^l \{m(x, t; \tilde{c})q_x(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ m_x(x, t; \tilde{c})q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + n(x, t; \tilde{c})p_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ n_t(x, t; \tilde{c})p(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + r(x, t; \tilde{c})w_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ r_t(x, t; \tilde{c})w(x, t; \tilde{c}, \Delta c)\} dx dt = \\
&= \int_0^T (q(l, t; \tilde{c}, \Delta c))^2 dt + \\
&+ \int_0^T \int_0^l m(x, t; \tilde{c}) \left\{ -\frac{1}{\nu} p_t(x, t; \tilde{c}, \tilde{c}, \Delta c) \right\} + \\
&+ m_x(x, t; \tilde{c})q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + n(x, t; \tilde{c})p_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ n_t(x, t; \tilde{c})p(x, t; \tilde{c}, \Delta c) - r(x, t; \tilde{c})\gamma w(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ r(x, t; \tilde{c})\gamma p(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + r(x, t; \tilde{c})\lambda p_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ r_t(x, t; \tilde{c})w(x, t; \tilde{c}, \Delta c)\} dx dt = \\
&= \int_0^T (q(l, t; \tilde{c}, \Delta c))^2 dt + \\
&+ \int_0^T \int_0^l \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \tilde{c})u(x, t; \tilde{c} + \Delta c)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \right. \\
&+ \frac{1}{\nu} m(x, t; \tilde{c})F(v(x, t; \tilde{c}), g)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) - \\
&- \frac{1}{\nu} m(x, t; \tilde{c})R_1 + n(x, t; \tilde{c})u(x, t; \tilde{c} + \Delta c)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) - \\
&- n(x, t; \tilde{c})F(v(x, t; \tilde{c}), g)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ n(x, t; \tilde{c})R_1 + r(x, t; \tilde{c})\lambda u(x, t; \tilde{c} + \Delta c)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) - \\
&- r(x, t; \tilde{c})\lambda F(v(x, t; \tilde{c}), g)h(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\
&+ r(x, t; \tilde{c})\lambda R_1 \left. \right\} dx dt.
\end{aligned}$$

Como las funciones $q(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$, $p(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$, $w(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ y $m(x, t; \tilde{c})$, $n(x, t; \tilde{c})$,

$r(x, t; \bar{c})$ satisfacen las ecuaciones (13)-(17) y (18)-(22), respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(\bar{c} + \Delta c) - \Phi(\bar{c}) &= \int_0^T (q(l, t; \bar{c}, \Delta c))^2 dt + \\
&+ \int_0^T \int_0^l \left\{ \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \bar{c}) h(x, t; \bar{c}, \Delta c) (u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - F(v(x, t; \bar{c}), g)) + \right. \right. \\
&+ n(x, t; \bar{c}) h(x, t; \bar{c}, \Delta c) (u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - F(v(x, t; \bar{c}), g)) + \\
&+ \lambda r(x, t; \bar{c}) h(x, t; \bar{c}, \Delta c) (u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - F(v(x, t; \bar{c}), g)) \cdot \\
&\cdot \left. \left. \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \bar{c}) + n(x, t; \bar{c}) + \lambda r(x, t; \bar{c}) \right\} R_1, \right. \right.
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\Phi(\bar{c} + \Delta c) - \Phi(\bar{c}) &= \int_0^T (q(l, t; \bar{c}, \Delta c))^2 dt + \\
&+ \int_0^T \int_0^l \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \bar{c}) + n(x, t; \bar{c}) + \right. \\
&+ \left. \lambda r(x, t; \bar{c}) \right\} h(x, t; \bar{c}, \Delta c) (u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - F(v(x, t; \bar{c}), g)) dx dt + \\
&+ \int_0^T \int_0^l \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \bar{c}) + n(x, t; \bar{c}) + \lambda r(x, t; \bar{c}) \right\} R_1 dx dt. \tag{23}
\end{aligned}$$

De la representación (23) para el incremento de la función $\Phi(c)$ y de las definiciones $h(x, t; \bar{c}, \Delta c)$ y $R_1(x, t; \bar{c}, \Delta c)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial c_i}(\bar{c}) &= \int_0^T \int_0^l \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t; \bar{c}) + n(x, t; \bar{c}) \right. \\
&+ \left. \lambda r(x, t; \bar{c}) \right\} \frac{\partial \beta}{\partial c_i}(v(x, t; \bar{c}); \bar{c}) (u(x, t; \bar{c} + \Delta c) - F(v(x, t; \bar{c}), g)) dx dt.
\end{aligned}$$

La fórmula obtenida para el gradiente de la función $\Phi(c)$ puede ser empleada cuando se aplica a alguno de los métodos del gradiente para la minimización de la función $\Phi(c)$. Mostrémoslo para el caso del método del gradiente condicionado para la

minimización de la función $\Phi(c)$ sobre el conjunto W . De acuerdo con [6], para determinar la aproximación $(k+1)$ -ésima a través de la aproximación k -ésima $c^{(k)}$ (conocida) es necesario encontrar la aproximación de ayuda $c^{(k)} \in W$ de la condición

$$\begin{aligned}
 & \{\Phi'(c^{(k)}), c^{\sim(k)} - c^{(k)}\} = \\
 & = \min_{c \in W} \{\Phi'(c^{(k)}), c - c^{(k)}\} = \\
 & = \min_{c \in W} \sum_{i=1}^n \Phi'(c^{(k)})(c_i - c_i^{(k)}) = \\
 & = \min_{c \in W} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_0^l \left\{ -\frac{1}{\nu} m(x, t, \tilde{c}) \right. \\
 & \quad \left. + n(x, t, \tilde{c}) + \lambda r(x, t, \tilde{c}) \right\} \frac{\partial F}{\partial c_i}(v(x, t; c^{(k)}); c^{(k)}) \cdot \\
 & \quad \cdot (c_i - c_i^{(k)}) dx dt,
 \end{aligned}$$

y después calcular $c^{(k+1)}$ por la fórmula

$$c^{(k+1)} = c^{(k)} + \alpha_k (c^{\sim(k)} - c^{(k)}), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1. \quad (24)$$

5. RESULTADOS

Resumimos a continuación los principales resultados obtenidos en la realización de este trabajo:

1. Se investigaron los modelos de los procesos de sorción dinámica con cinética de difusión interna, externa y mixta.
2. Se estudiaron algunas propiedades de la solución $u(x, t)$, $a(x, t)$, $v(x, t)$ del problema inicial-contorno, entre ellas, la positividad de las derivadas u_t , a_t y v_t y la negatividad de las derivadas u_x , a_x y v_x , al mismo tiempo que se establecieron las cotas para la solución del problema.
3. Se demostró el teorema de unicidad de la solución del problema inverso en lo global.
4. Se resolvió el problema inverso por el método de parametrización y se determinó la derivada de la funcional con la ayuda de un problema de valor inicial-frontera.

REFERENCIAS

- [1] ANGER G. *Inverse problems in differential Equations.* Akademie - Verlag, Berlin, Plenum Press, 1990.
- [2] CANNON J. R. DU CHATEAN P. *An inverse problem for an unknown source in a heat equation.* J. of Math. Anal. and App., (75), p. 465-485, 1980.
- [3] CANNON J. R., DU CHATEAN P. *An inverse problem for a nonlinear diffusion equations.* SIAM J. Appl Math., (39), p. 272-289, 1980.
- [4] DENISOV A. M. *Local and global uniqueness of solution to the problem of determining a nonlinear coefficient in a system of partial differential equations.* Siberian Mathematical Journal, V. 36 (1), p. 55-65, 1995.
- [5] GUZMÁN G., REYES E., CARRILLO ESCOBAR J.C., LAMOS H. *Propiedades de la solución de un modelo matemático para un proceso de absorción dinámica.* Revista INTEGRACIÓN.v.16, No 2,1998.

- [6] KRASNOV M.L., KISELIOV A.I., MAKÁREMKO G.I. *Ecuaciones Integrales*. Mir, Moscú, 1970.
- [7] LAGREGA-BICKINGHAM-EVANS. *Gestión de Residuos Tóxicos. Tratamiento, eliminación y recuperación de suelos*. McGraw Hill, V. 1, España, 1972.
- [8] LAMOS H., DENISOV A. M. *An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics*. *J. Inv ill-posed problems*, V.4 (3), p. 191-202, 1996
- [9] LAMOS H. *Numerical solution of the inverse problem for a nolinear mathematical model of sorption dynamics with mixed--diffusional kinetics*. *Inverse and Ill--Posed Problems. Abstracts of International conference dedicated to the memory of academician A. N. Tikhonov*. Moscow, 113, 1996.
- [10] LAVRENT'EV M. M., SAVEL'EV Y. YA. *Linear Operators and Ill-Posed Problems*. 1995 Consultants Bureau, New York.
- [11] LORENZI A. *An inverse problem for a semilinear parabolic equation*. *Annali de Mat. Pura ed Applicata*. 1982, V. 31, P. 145-166.

- [12] LORENZI A., PAPARONI E. *An inverse problem arising in the theory of absorption.* Annali de Mat. Pura ed Applicata. 1992, v. 36 249-263.
- [13] LUKSHIN A.V. "Sobre un modelo de sorción dinámica" (en ruso). *Dokl A.N. URSS*, T. 213(3).
- [14] MURIO D. A. *The mollification methods and the numerical solution for the inverse heat conduction problem by finite difference.* Com. App., V. 17 (10), 1989.
- [15] MURAVIEV D.N., CHANOV A.V., DENISOV A.M., OMAROVA F. AND TUIKINA S.R. *A numerical method for calculating isotherms of ion exchange on impregnated sulfonate ion-exchangers based on the data of dynamic experiments.* Reactive Polymers. V. 17, 29-38 1992.
- [16] ORELLANA Y. R. *Solución tipo onda viajera para un modelo matemático de sorción dinámica.* Tesis de Maestría en Matemática, UIS, 1998.
- [17] SIMMONDS F. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.* McGraw Hill, Segunda Edición, 1996.
- [18] TÍJONOV A. N., SAMARSKY A. *Ecuaciones de la Física Matemática.* Mir, Moscú, 1972.