Conjuntos omega límite en clases de continuos

Johan Camilo Cancino Rey

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemáticas

Director

Javier Enrique Camargo García

Doctor en Ciencias

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Agradecimientos

Agradezco especialmente a mis padres, Ana Mercedes Rey y Andelfo Cancino, así como a mis hermanos Willy y Ándel, por sus esfuerzos, preocupación, apoyo y compañía que siempre me han dado.

Al profesor Javier Camargo, por el tiempo, la orientación y las sugerencias que me brindó para la realización de este trabajo, y por los conocimientos nuevos que me aportó en este proceso.

A mis compañeros y amigos del posgrado que me ofrecieron su apoyo y colaboración en diferentes situaciones durante este proceso.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Resumen

Título: Conjuntos omega límite en clases de continuos [*]

Autor: Johan Camilo Cancino Rey [**]

Palabras Clave: Conjuntos omega límite, Continuo atriódico, Continuo de tipo lambda, Funciones omega límite, Sistema dinámico discreto.

Descripción: Dados un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua definida sobre X, es común llamar sistema dinámico discreto al par (X, f). Para un punto $x \in X$, se definen sus conjuntos omega límite como $\omega(x, f) = \{y \in X : y \text{ es punto límite de la sucesión } (f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}\}$ y $\Omega(x, f) = \{y \in X : \text{ existen sucesiones } (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X \text{ y } (n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ con } x_i \to x \text{ y } f^{n_i}(x_i) \to y\}$, los cuales nos permiten definir de forma natural las funciones omega límite $\omega_f, \Omega_f\colon X \to 2^X$. En este trabajo estudiaremos propiedades de los conjuntos omega límite y las funciones omega límite en ciertas clases de continuos, como continuos de tipo lambda, dendritas, dendroides o continuos atriódicos.

Iniciaremos presentando los conceptos más relevantes de teoría de continuos y sistemas dinámicos discretos que se usarán a lo largo del trabajo. Luego, abordaremos los continuos de tipo λ, y presentaremos la noción de función que preserva fibras, que será esencial al estudiar algunas propiedades dinámicas en esta clase continuos. Posteriormente, consideramos los puntos no errantes y su relación con el conjunto $\Omega(x, f)$; en esta parte se mostrará por ejemplo que la función Ω_f siempre es semicontinua superior. Seguidamente se presentarán algunas generalizaciones de resultados conocidos previamente, y para finalizar se estudiarán los continuos atriódicos y ciertas propiedades dinámicas que involucran los conjuntos omega limite, puntos periódicos, puntos recurrentes y el concepto de equicontinuidad.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias.

Abstract

Title: Omega limit sets on types of continua *

Author: Johan Camilo Cancino Rey **

Keywords: Atriodic continuum, Continuum of type lambda, Discrete dynamical system, Omega limit functions, Omega limit sets.

Description: Given a compact metric space X and $f\colon X \to X$ a continuous function defined on X, the pair (X, f) is usually called discrete dynamical system. For $x \in X$, its omega limit sets are defined as $\omega(x, f) = \{\, y \in X :$ y is a limit point of the sequence $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}\,\}$ and $\Omega(x, f) = \{y \in X :$ there exist sequences $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ and $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ with $x_i \to x$ and $f^{n_i}(x_i) \to y\}$ and these sets allow us to define in a natural way the functions $\omega_f, \Omega_f\colon X \to 2^X$. In this work, we study properties of the omega limit sets and the omega limit functions in some types of continua such as continua of type lambda, dendrites, dendroids or atriodic continua.

We start presenting the most relevant concepts about continuum theory and discrete dynamical systems that will be used through this work. Then, we will study the continua of type λ and we define the concept of function that preserves fibers, which will be esential to study some dynamical properties in this kind of continua. After that, we consider the non wandering points and their relation with the set $\Omega(x, f)$; in this part we prove that the function Ω_f is upper semicontinuous. Next, we present some generalizations of known results, and finally we study atriodic continua and certain dynamical properties that involve the omega limit sets, periodic points, recurrent points and the concept of equicontinuity.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias.

Introducción

Dados un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua definida sobre X, es común llamar sistema dinámico al par (X, f). En los sistemas dinámicos discretos, es de particular interés estudiar la órbita de un punto $x \in X$; es decir, el conjunto $\mathscr{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, donde $f^n\colon X \to X$ hace referencia a la composición de f consigo misma n veces. Puede pensarse que la órbita del punto x nos da información sobre cómo va cambiando x a medida que transcurre el tiempo.

Asimismo, en el estudio de un sistema dinámico discreto (X, f) son relevantes los puntos fijos de f, los puntos periódicos, los puntos eventualmente periódicos, y el concepto de conjunto omega límite de un punto x, el cual está conformado por los puntos en el espacio X que son puntos de acumulación de la órbita de x bajo f. Además, dichos conjuntos omega límite permiten definir de forma natural una función de X en su hiperespacio 2^X, e indagar sobre la continuidad de esta función.

Algo interesante es, dado un espacio métrico compacto X, y una función continua $f\colon X \to X$, estudiar cuándo el conjunto $\overline{\{f^n : n \in \mathbb{N}\}}$, visto como subespacio del espacio producto X^X, está conformado únicamente por funciones continuas. En este sentido, se puede verificar que si la función f es equicontinua; es decir, la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua, entonces toda función que sea punto límite de $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es continua.

En relación a esto, en (Bruckner and Ceder, Teorema 1.2) se prueba el siguiente teorema para el caso del intervalo cerrado $[0,1]$.

Teorema. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. f es equicontinua;

2. ω_f es continua;

3. ω_{f^2} es continua;

4. $\mathrm{Fix}(f^2) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n([0,1])$;

5. $\mathrm{Fix}(f^2)$ es conexo.

También, en el contexto de las dendritas, en (Camargo et al., 2019) y (Camargo and Cancino, 2020), se dan resultados que caracterizan la equicontinuidad de una función definida en una dendrita, así como condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de la función ω_f. En (Camargo and Cancino, Teorema 4.6) por ejemplo, se prueba el siguiente teorema.

Teorema. Sean X una dendrita y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Entonces son equivalentes:

1. $\mathrm{Per}(f)$ es conexo y $\overline{\mathrm{Per}(f)} = X$;

2. ω_f es continua y $X = \mathrm{Rec}(f)$;

3. ω_f es continua y $\overline{\mathrm{Per}(f)} = X$;

4. $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$;

5. f es equicontinua.

El objetivo del presente trabajo es estudiar propiedades de los conjuntos omega límite y las funciones omega límite en ciertas clases de continuos, como continuos de tipo lambda, dendritas, dendroides o continuos atriódicos. También, se revisarán propiedades relacionadas con los conceptos de puntos periódicos, puntos recurrentes, puntos no errantes y equicontinuidad. Mostraremos los resultados que obtuvimos con respecto a lo mencionado antes, y se generalizarán algunos resultados que ya se han abordado en gráficas, dendritas o dendroides.

En el Capítulo 1 presentaremos los preliminares de este trabajo. En la Sección 1.1 incluimos la definición de continuo y de algunos de los tipos de continuos que se usarán en capítulos posteriores, así como algunas propiedades de estos. En la Sección 1.2 se presentan los conceptos fundamentales de sistemas dinámicos discretos como los son: los puntos fijos, puntos recurrentes o la noción de equicontinuidad. Asimismo, se dan algunas propiedades que relacionan estos conceptos y que usaremos con frecuencia. Se agregarán algunas demostraciones y en otros casos se dará alguna referencia de consulta.

El Capítulo 2 estará basado en los continuos de tipo λ. Daremos su definición y algunos ejemplos de este tipo de continuos. Seguidamente, para una función $f\colon X \to X$ definida sobre un continuo de tipo λ, diremos qué significa que esta preserve fibras y usaremos este tipo de funciones durante todo el capítulo. Usando esto, podremos inducir una función $\tilde{f}$ en el intervalo $[0,1]$ y con ayuda de esta, probaremos algunas propiedades dinámicas en continuos de tipo λ.

En el Capítulo 3 trataremos los puntos no errantes y la función Ω_f. Para esto, iniciamos dando su definición y propiedades básicas. Durante este capitulo veremos la relación que guardan los puntos no errantes y el conjunto $\Omega(x,f)$, daremos unas condiciones suficientes para que la función Ω_f sea continua o constante sobre la órbita de cualquier punto. Veremos un caso en el que el conjunto $\Omega(x,f)$ resulta ser un continuo, y se presentarán ejemplos con respecto a dichos resultados. Además, probaremos que la función Ω_f es semicontinua superior para cualquier función f definida en un espacio métrico compacto.

En el Capítulo 4 se generalizarán algunos resultados conocidos. Veremos que, en continuos únicamente arcoconexos en los que cada subcontinuo tiene la propiedad del punto fijo, la continuidad de la función ω_f implica que el conjunto de puntos periódicos sea conexo. También, trataremos con los continuos regulares en los que cada par de puntos se une por un número finito de arcos y mostraremos que en ellos, si $\Omega(x,f)$ es totalmente disconexo, entonces la función f resulta equicontinua en el punto x. Daremos una condición necesaria y suficiente para la continuidad de la función ω_f, si f está definida en un espacio métrico compacto.

Finalmente, en el Capítulo 5 nos centraremos en continuos atriódicos, los cuales definimos allí e ilustramos con unos ejemplos muy conocidos. Probaremos que para cierta clase de continuos atriódicos y hereditariamente descomponibles, las nociones de punto recurrente y punto fijo son equivalentes. Usando esto y resultados de capítulos previos, mostraremos algunas equivalencias entre ciertos conceptos de dinámica, en dicha clase de continuos.

1. Preliminares

Este capítulo lo dividimos en dos partes: Teoría de continuos (Sección 1.1), donde introducimos las nociones básicas de algunos de los continuos que usaremos durante este trabajo; y Sistemas dinámicos discretos (Sección 1.2), donde damos los conceptos principales sobre sistemas dinámicos con los que estaremos trabajando y las propiedades más relevantes que se requerirán. Se agregarán algunas demostraciones para facilitar la comprensión de ciertas propiedades y en otros casos, se mencionará una referencia para ver más detalles.

1.1. Teoría de continuos

En este trabajo todos los espacios serán métricos compactos y no vacíos. Un espacio métrico compacto y conexo no vacío lo llamaremos continuo. Un subcontinuo es un continuo contenido en algún espacio métrico compacto.

Definición 1.1.1. Un continuo X se dice irreducible entre dos puntos $a,b \in X$, si no existe un subcontinuo propio L de X, tal que $\{a,b\} \subseteq L$. Además, un continuo X es llamado irreducible si existen a y b en X tales que X es irreducible entre a y b.

El intervalo cerrado $[0,1]$ es claramente un continuo irreducible entre 0 y 1. Más adelante, en el Capítulo 2, trabajaremos con detalle una clase particular de continuos irreducibles.

Definición 1.1.2. Se dice que un continuo X es descomponible si existen subcontinuos propios A y B de X, tales que $X = A \cup B$. X es llamado indescomponible si X no es descomponible. Además, se dice que X es hereditariamente descomponible (indescomponible) si todo subcontinuo de X es descomponible (indescomponible, respectivamente).

En (Kuratowski, 1968) y (Nadler, 2017), se pueden encontrar ejemplos y propiedades de estas clases de continuos.

Definición 1.1.3. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función continua y sobreyectiva $f: X \to Y$ es llamada monótona, si $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo de X, para cada $y \in Y$.

El resultado que se menciona a continuación sobre funciones monótonas es conocido, y una prueba de este, puede encontrarse en (Kuratowski, §46, I, Teorema 9).

Proposición 1.1.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $f: X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces, f es monótona si, y solo si, $f^{-1}(C)$ es conexo para cada subconjunto conexo C de Y.*

Haciendo uso del Lema de Zorn, no es difícil demostrar el siguiente lema.

Lema 1.1.5. *Sea X un continuo. Si a y b son puntos distintos en X, entonces existe un subcontinuo Z de X irreducible entre a y b.*

Definición 1.1.6. Un continuo X es llamado unicoherente si para cada par de subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Se dice que X es hereditariamente unicoherente si todo subcontinuo de X es unicoherente.

Note que si X es hereditariamente unicoherente, entonces para cada par de subcontinuos A y B de X se tiene que $A \cap B$ es conexo. Usando esto y el Lema 1.1.5 puede probarse lo siguiente.

Lema 1.1.7. *Sea X un continuo. Entonces, X es hereditariamente unicoherente si, y solo si, para cada par de puntos $p, q \in X$ con $p \neq q$, existe un único subcontinuo de X, $I(p,q)$, irreducible entre p y q.*

Un arco es cualquier espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$. A continuación daremos la definición de dendroide.

Definición 1.1.8. Un dendroide es un continuo hereditariamente unicoherente y arcoconexo.

Con ayuda del Lema 1.1.7, es sencillo observar que un continuo X es un dendroide si, y solo si, para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un único subcontinuo irreducible entre a y b, $I(a,b)$, y tal subcontinuo $I(a,b)$ es un arco.

A continuación se dan las definiciones de espacio uniformemente localmente arcoconexo y continuo de Peano, y algunas propiedades relacionadas con estas.

Definición 1.1.9. Un espacio métrico (X,d) es llamado uniformemente localmente arcoconexo (ULAC) si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d(x,y) < \delta$, existe un arco en X de x a y con diámetro menor que ε.

Definición 1.1.10. Un continuo X es llamado continuo de Peano si es localmente conexo en cada punto; esto es, cada punto de X tiene una base de vecindades abiertas y conexas. Además, X es hereditariamente localmente conexo (hlc) si todo subcontinuo de X es localmente conexo.

Una clase particular de los continuos de Peano son las dendritas, las cuales definimos ahora.

Definición 1.1.11. Una dendrita es un continuo de Peano que no contiene subcontinuos homeomorfos a $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

No es difícil demostrar el siguiente lema. Este se encuentra enunciado en (Nadler, Ejercicio 8.30).

Lema 1.1.12. *Todo continuo de Peano es ULAC.*

Ahora, daremos la definición de continuo regular, la cual usaremos en algunas ocasiones durante el Capítulo 4.

Definición 1.1.13. Sean X un continuo y $p \in X$. Se dice que X es regular en p, si p admite una base de vecindades con frontera finita. X es llamado regular si X es regular en cada punto.

Una demostración del lema que sigue puede ser consultada en (Nadler, Teorema 10.16).

Lema 1.1.14. *Todo continuo regular es hlc*

1.2. Sistemas dinámicos discretos

Dado un espacio métrico compacto (X,d), consideraremos los siguientes hiperespacios:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \text{ y}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

junto con la topología en 2^X inducida por la métrica de Hausdorff, $\mathscr{H}$, la cual está dada por

$$\mathscr{H}(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subseteq \mathscr{N}(B;\varepsilon) \text{ y } B \subseteq \mathscr{N}(A;\varepsilon)\},$$

donde, para cada $C \in 2^X$ y cada $r > 0$,

$$\mathscr{N}(C;r) = \{x \in X : \text{existe } c \in C \text{ tal que } d(x,c) < r\}.$$

Asimismo, puede considerarse en 2^X la topología de Vietoris T_V, la cual tiene como base a la familia

$$\mathscr{B}_V = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_n \text{ son abiertos de } X\},$$

donde

$$\langle U_1 \ldots, U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1 \ldots, n\}\}.$$

Cuando X es un espacio métrico compacto, la topología en 2^X inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris en 2^X, coinciden. Además, 2^X resulta ser un espacio compacto. Una prueba de lo mencionado antes puede encontrarse en (Illanes and Nadler, 1999) y (Nadler, 2017).

Definición 1.2.1. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. x es llamado punto fijo de f si $f(x) = x$. Se dice que x es un punto periódico de f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Si x es un punto periódico de f, su periodo es el menor entero positivo n tal que $f^n(x) = x$. El conjunto de puntos fijos de f lo denotaremos por $\text{Fix}(f)$, el conjunto de puntos de periodo k por $\mathrm{Per}_k(f)$ y el conjunto de puntos periódicos por $\mathrm{Per}(f)$.

Definición 1.2.2. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Para cada $x \in X$ definimos sus conjuntos omega límite, $\omega(x,f)$ y $\Omega(x,f)$, como sigue:

1. $\omega(x,f) = \{y \in X :$ existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y\}$.

2. $\Omega(x,f) = \{y \in X :$ existen una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = y\}$.

Además, un punto $x \in X$ es llamado recurrente si $x \in \omega(x,f)$. El conjunto de puntos recurrentes de f será denotado por $\mathrm{Rec}(f)$.

La siguiente proposición resume algunas propiedades acerca de los conjuntos omega límite de un punto $x \in X$, siendo X un espacio métrico compacto. Para ideas de las pruebas vea el Capítulo 12 en (King and Méndez, 2014), o las proposiciones 2.18 y 2.19 en (Cancino, 2019).

Proposición 1.2.3. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua, y $n,k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

1. *$\omega(x,f)$ y $\Omega(x,f)$ son subcojuntos cerrados de X.*

2. *$f^n(\omega(x,f)) = \omega(x,f)$ y $f^n(\Omega(x,f)) = \Omega(x,f)$.*

3. *$\omega(f^k(x),f) = \omega(x,f)$.*

Teniendo en cuenta esto, si X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ es continua, definimos las funciones $\omega_f\colon X \to 2^X$ dada por $\omega_f(x) = \omega(x,f)$, y $\Omega_f\colon X \to 2^X$ dada por $\Omega_f(x) = \Omega(x,f)$. Obsérvese que, por la Proposición 1.2.3, estas funciones están bien definidas.

Ahora, daremos la definición de lo que se entiende por equicontinuidad de una función definida en un espacio métrico compacto.

Definición 1.2.4. Sean X y Y espacios métricos compactos y $Y^X = \{f\colon X \to Y : f \text{ es continua}\}$, junto con la métrica uniforme. Una familia $\mathscr{F} \subseteq Y^X$ es llamada equicontinua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x_1,x_2) < \delta$, entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ para cada $f \in \mathscr{F}$. Se dice que $f\colon X \to X$ es equicontinua si la familia $\mathscr{F} = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua; esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_1,x_2) < \delta$, entonces $d(f^n(x_1), f^n(x_2)) < \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Las proposiciones y definiciones que se mencionan ahora las usaremos con frecuencia en los demás capítulos de este trabajo. Incluiremos algunas demostraciones para comodidad del lector.

Una prueba de la siguiente proposición puede encontrarse en (Camargo et al., Teorema 3.6).

Proposición 1.2.5. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es equicontinua, entonces ω_f es continua.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por ser f equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f^m(x), f^m(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Veamos que tomando este $\delta > 0$, se satisface que $\mathscr{H}(\omega(x,f), \omega(y,f)) < \varepsilon$ siempre que $d(x,y) < \delta$. Sea $x_0 \in \omega(x,f)$, entonces existe una sucesión creciente $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x_0$. Luego, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_i}(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ para $i \geq i_0$. Por la compacidad de X, tenemos que para la sucesión $(f^{n_i}(y))_{i\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión $(f^{n_{i_j}}(y))_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(y) = y_0 \in X$. Es claro que $y_0 \in \omega(y, f)$ y podemos tomar $j_0 > i_0$ tal que si $j \geq j_0$, entonces $d(f^{n_{i_j}}(y), y_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Así, para $j \geq j_0$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
d(x_0, y_0) &\leq d(x_0, f^{n_{i_j}}(x)) + d(f^{n_{i_j}}(x), f^{n_{i_j}}(y)) + d(f^{n_{i_j}}(y), y_0) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, $\omega(x, f) \subseteq \mathcal{N}(\omega(y, f); \varepsilon)$. De forma análoga vemos que $\omega(y, f) \subseteq \mathcal{N}(\omega(x, f); \varepsilon)$ y con esto, $\mathscr{H}(\omega(x, f), \omega(y, f)) < \varepsilon$ si $d(x, y) < \delta$, con lo cual concluimos que ω_f es continua. $\square$

Usando la definición de equicontinuidad puede comprobarse que una función es equicontinua si, y solo si, cada una de sus iteradas también es equicontinua.

Proposición 1.2.6. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, f es equicontinua si, y solo si, f^n es equicontinua para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.2.7. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Un subconjunto A de X es llamado minimal si es no vacío, cerrado, invariante ($f(A) \subseteq A$) y es minimal respecto a las tres condiciones anteriores.

Usando el hecho de que el conjunto $\omega(x, f)$ es cerrado e invariante (Proposición 1.2.3) puede demostrarse lo siguiente para conjuntos minimales.

Proposición 1.2.8. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X\to X$ una función continua y $A\subseteq X$. Entonces A es minimal si, y solo si, $A=\omega(x,f)$ para cada $x\in A$.*

La siguiente proposición es la misma que en (Camargo and Cancino, Lema 3.1).

Proposición 1.2.9. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X\to X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces $\omega(x,f)$ es un conjunto minimal para cada $x\in X$.*

Demostración. Usemos la Proposición 1.2.8. Sea $y\in\omega(x,f)$. Entonces, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)=y$. Por la Proposición 1.2.3 se tiene que la sucesión $(\omega(f^{n_k}(x),f))_{k\in\mathbb{N}}$ es constante de valor $\omega(x,f)$. Así, la continuidad de ω_f implica que $\omega(y,f)=\lim_{k\to\infty}\omega(f^{n_k}(x),f)=\omega(x,f)$ y por ende, $\omega(x,f)$ es un conjunto minimal. $\square$

Una prueba de la siguiente proposición puede ser consultada en (Camargo et al., Lema 3.5).

Proposición 1.2.10. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X\to X$ una función continua. Si f es equicontinua, entonces $\omega(x,f)=\Omega(x,f)$ para cada $x\in X$.*

Demostración. Es claro que $\omega(x,f)\subseteq\Omega(x,f)$. Ahora, si $y\in\Omega(x,f)$, existen sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq X$ y $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ tales que $\lim_{i\to\infty}x_i=x$ y $\lim_{i\to\infty}f^{n_i}(x_i)=y$. Así, dado $\varepsilon>0$, existe $i_0\in\mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_i}(x_i),y)<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i\geq i_0$. Por ser f equicontinua, existe $\delta>0$ tal que $d(f^m(x),f^m(y))<\frac{\varepsilon}{2}$ para cada $m\in\mathbb{N}$, siempre que $d(x,y)<\delta$. Como $\lim_{i\to\infty}x_i=x$, podemos elegir $i_1>i_0$ de modo que $d(x_i,x)<\delta$ para todo $i\geq i_1$ y con esto, $d(f^{n_i}(x_i),f^{n_i}(x))<\frac{\varepsilon}{2}$. Con lo anterior, tenemos que para $i \geq i_1$:

$$\begin{aligned} d(f^{n_i}(x), y) &\leq d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(x_i)) + d(f^{n_i}(x_i), y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{e} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo hecho antes, tenemos que $y \in \omega(x, f)$ y con esto concluimos que $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$. □

La demostración de la siguiente proposición es la misma a la presentada en (Camargo and Cancino, Teorema 3.2).

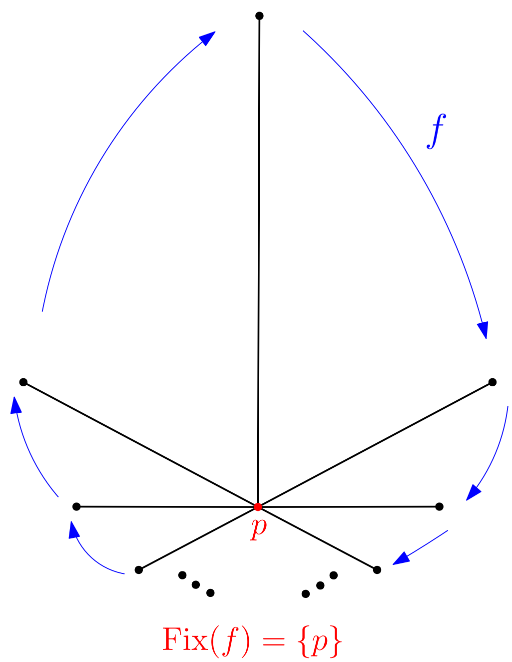
Proposición 1.2.11. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$, entonces ω_f es continua.*

Demostración. Puede probarse que bajo estas condiciones $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal para cada $x \in X$. Ahora, sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ para algún $x_0 \in X$, y probemos que $\lim_{k \to \infty} \omega(x_k, f) = \omega(x_0, f)$. Por la compacidad de 2^X, existen $A \in 2^X$ y una subsucesión $(\omega(x_{k_j}, f))_{j \in \mathbb{N}}$ de $(\omega(x_k, f))_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim_{j \to \infty} \omega(x_{k_j}, f) = A$. Veamos que $A = \omega(x_0, f)$. Si $p \in A$, entonces existe una sucesión $(y_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{k_j} \in \omega(x_{k_j}, f)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\lim_{j \to \infty} y_{k_j} = p$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{m_j}(x_{k_j}), y_{k_j}) < \frac{1}{j}$. De esto se sigue que $\lim_{j \to \infty} f^{m_j}(x_{k_j}) = p$ y por tanto, $p \in \Omega(x_0, f) = \omega(x_0, f)$. Así, $A \subseteq \omega(x_0, f)$. Por la Proposición 1.2.3, se tiene que $f(\omega(x_{k_j}, f)) = \omega(x_{k_j}, f)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y por tanto $f(A) = A$. Luego, por la minimalidad del conjunto $\omega(x_0, f)$, concluimos que $A = \omega(x_0, f)$. Como $(\omega(x_{k_j}, f))_{j \in \mathbb{N}}$ fue una subsucesión arbitraria convergente de $(\omega(x_k, f))_{k \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\lim_{k \to \infty} \omega(x_k, f) = \omega(x_0, f)$ y así, ω_f es continua. □

Con el siguiente ejemplo podemos observar que el recíproco de las proposiciones 1.2.5 y 1.2.11 no es verdadero.

Figura 1.

Continuo definido en el Ejemplo 1.2.12



Ejemplo 1.2.12. *Consideraremos los puntos en $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares, con ángulo en radianes. Sean $a_0 = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $a_{-1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Y para cada $n \geq 2$, sean $a_n = \left(\frac{1}{n+1}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(n-1)}\right)$ y $a_{-n} = \left(\frac{1}{n+1}, -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n-1)}\right)$. Denotemos por α_n al segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $p = (0,0)$ y a_n para cada $n \in \mathbb{Z}$. Sean $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n$ y definamos $f\colon X \to X$ tal que $f(p) = p$ y f envíe linealmente el arco α_n en el arco α_{n+1} de forma que $f(a_n) = a_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ (vea la Figura 1). No es difícil darse cuanta de los siguientes hechos.*

- $\omega(x, f) = \{p\}$ *para cada* $x \in X$.
- $\Omega(x, f) = \{p\}$ *para cada* $x \neq p$ *y* $\Omega(p, f) = X$.

- *f no es equicontinua en p.*

Por último, recordamos la definición de función semicontinua superior y semicontinua inferior.

Definición 1.2.13. Sean X y Y espacios topológicos y $F\colon X \to 2^Y$ una función. Entonces,

- F es semicontinua superior en $x_0 \in X$ si para cada abierto V de Y tal que $F(x_0) \subseteq V$, existe un abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $F(x) \subseteq V$ para cada $x \in U$.
- F es semicontinua inferior en $x_0 \in X$ si para cada abierto V de Y tal que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, existe un abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $F(x) \cap V \neq \emptyset$ para cada $x \in U$.

En la prueba de la próxima proposición se siguieron las mismas ideas que en (Camargo et al., Proposición 3.9).

Proposición 1.2.14. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces ω_f es semicontinua inferior.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, y W un abierto de X tal que $\omega_f(x_0) \cap W \neq \emptyset$. Sea $y \in \omega_f(x_0) \cap W$. Entonces, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_0) = y$. Así, como W es abierto, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_j}(x_0) \in W$. Por la continuidad de f^{n_j}, $\lim_{k\to\infty} f^{n_j}(x_k) = f^{n_j}(x_0)$ y por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_j}(x_k) \in W$ para cada $k \geq k_0$. Por la Proposición 1.2.3 y el hecho de que $X = \mathrm{Rec}(f)$, se sigue que $f^{n_j}(x_k) \in \omega(f^{n_j}(x_k), f) = \omega(x_k, f)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y así, $\omega(x_k, f) \cap W \neq \emptyset$ para cada $k \geq k_0$. De lo anterior, ω_f es semicontinua inferior. $\square$

2. Continuos de tipo λ

En el presente capítulo estudiaremos conceptos de sistemas dinámicos discretos en continuos de tipo λ. Para ello, iniciaremos introduciendo su definición, una caracterización que usaremos con frecuencia es este capítulo, y algunos ejemplos. A continuación definimos función que preserva fibras, la cual nos permitirá que dada una función $f\colon X \to X$ sobre un continuo de tipo λ, podamos inducir una función continua $\tilde{f}$ en el intervalo $[0,1]$ y aprovechar algunos resultados de dinámica conocidos en $[0,1]$. Entre los resultados que probaremos, veremos por ejemplo que la continuidad de ω_f implica la continuidad de $\omega_{\tilde{f}}$, y que bajo ciertas condiciones, todo punto debe ser recurrente. Asimismo, mostraremos algunas condiciones suficientes para que una función definida en un continuo de tipo λ posea al menos un punto fijo. Para finalizar el capítulo, presentamos un resultado para una clase muy particular de continuos tipo λ que tiene algunas similitudes con (Bruckner and Ceder, Teorema 1.2).

Definición 2.1. Un continuo irreducible X es llamado un continuo de tipo λ, si todo subcontinuo indescomponible de X tiene interior vacío.

Obsérvese que por la Definición 2.1, todo continuo de tipo λ es un continuo descomponible.

En el siguiente teorema se presentan algunas equivalencias para que un continuo sea de tipo λ. En ocasiones se encuentra en la literatura alguna de estas equivalencias para definir los continuos de tipo λ. Sin embargo, en este trabajo usaremos principalmente el inciso *2)* del Teorema 2.2. Para una demostración puede verse (Thomas, Teorema 10) y (Kuratowski, p. 199).

Teorema 2.2. *Sea X un continuo irreducible entre a y b. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) X es un continuo de tipo λ;

2) Existe una función monótona $m\colon X \to [0,1]$ tal que $m(a) = 0$, $m(b) = 1$ y $\mathrm{Int}_X\left(m^{-1}(t)\right) = \emptyset$ para cada $t \in [0,1]$;

3) X admite una descomposición semicontinua superiormente $\mathscr{G}$ en subcontinuos con interior vacío tal que $X/\mathscr{G}$ es homeomorfo a $[0,1]$.

4) X admite una descomposición semicontinua superiormente con más de un elemento, $\mathscr{G}$, en subcontinuos con interior vacío tal que $X \setminus L$ es disconexo para cada $L \in \mathscr{G}$ que cumple que $a, b \notin L$.

Es claro que el intervalo cerrado $[0,1]$ es un continuo de tipo λ. Otros ejemplos sencillos de continuos de tipo λ los mencionamos a continuación.

Ejemplo 2.3. *La curva senoidal del topólogo es el continuo $S = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\{\left(x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x})\right) : x \in (0,1]\}$. Es sencillo comprobar que S es irreducible entre cualquier punto de $\{0\} \times [-1,1]$ y el punto $(1, \mathrm{sen}(1))$; y además, es hereditariamente descomponible y por tanto, S es un continuo de tipo λ.*

Si consideramos el espacio cociente $I = S/(\{0\} \times [-1,1])$, donde S es la curva senoidal del topólogo, entonces I es homeomorfo a $[0,1]$ y la función cociente $m\colon S \to I$ es una función monótona que verifica lo establecido en el Teorema 2.2.

Los detalles de la construcción del siguiente ejemplo los tomamos de (Kuratowski, p. 191).

Ejemplo 2.4. *Continuo de los V y los Λ. Denotemos por $\mathscr{C}$ al conjunto ternario de Cantor en el intervalo [0,1]. Ahora, consideremos el espacio $\mathscr{C} \times [0,1]$, al cual se le irán agregando los siguientes arcos: primero, se agrega el segmento de longitud $\frac{1}{3}$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \{0\}$; ahora , agregamos los dos segmentos de longitud $\frac{1}{3^2}$, $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \times \{1\}$ y $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \times \{1\}$; luego, se unen los 4 segmentos de longitud $\frac{1}{3^3}$, $\left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right] \times \{0\}$, $\left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right] \times \{0\}$, $\left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right] \times \{0\}$ y $\left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right] \times \{0\}$; y de esta forma se continúa el proceso. Con lo hecho antes, se obtiene un continuo, llamémoslo L, el cual se ilustra al lado izquierdo de la Figura 2. Ahora, para construir el continuo de los V y los Λ, que llamaremos M, tomamos el continuo L y cada uno de los segmentos que fueron agregados los identificamos (ver lado derecho de la Figura 2). No es difícil verificar que L y M son irreducibles entre cada par de puntos a,b con $a \in \{0\} \times [0,1]$ y $b \in \{1\} \times [0,1]$, y que además L y M son continuos de tipo λ.*

Figura 2.

Continuos L y M del Ejemplo 2.4

El siguiente teorema, que es útil para definir funciones continuas cuyo dominio es un espacio cociente, es bien conocido, y una demostración del mismo puede verse en (Camargo and Villamizar-Roa, Teorema 3.44) o en (Dugundji, Teorema 3.1).

Teorema 2.5. *(Transgresión). Sean $f\colon X \to Y$ una función cociente y $g\colon X \to Z$ una función conti-*

nua. Si $g|_{f^{-1}(y)}$ *es constante, para cada* $y \in Y$*, entonces* $g \circ f^{-1} \colon Y \to Z$ *es continua y el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "g\circ f^{-1}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.6. Sean X un continuo de tipo λ, $m \colon X \to [0,1]$ una función monótona obtenida del Teorema 2.2, y $f \colon X \to X$ una función continua. Decimos que f preserva fibras, si para cada $t \in [0,1]$, existe $s_t \in [0,1]$ tal que $f\left(m^{-1}(t)\right) \subseteq m^{-1}(s_t)$.

Nótese que el elemento s_t de la definición anterior es único, pues es claro que la familia $\{m^{-1}(s) : s \in [0,1]\}$ forma una partición de X.

Pregunta 2.7. *Sean* X *un continuo de tipo* λ *junto con una función monótona* $m \colon X \to [0,1]$ *con las propiedades del Teorema 2.2, y* $f \colon X \to X$ *una función continua. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que* f *preserva fibras?*

Para el continuo de los V y los Λ, M, que se mencionó en el Ejemplo 2.4, se puede ver que si $f \colon M \to M$ es una función continua, entonces f preserva fibras. Esto se verifica usando el hecho que $m^{-1}(t)$ es un arco para cada $t \in [0,1]$, lo cual implica que $f(m^{-1}(t))$ es localmente conexo y por tanto, debe estar contenido en alguno de los arcos $m^{-1}(s)$ con $s \in [0,1]$.

Proposición 2.8. *Sean* X *un continuo de tipo* λ*,* $m \colon X \to [0,1]$ *una función monótona obtenida del Teorema 2.2, y* $f \colon X \to X$ *una función continua que preserva fibras. Entonces, existe una función* *continua* $\tilde{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ *tal que* $\tilde{f} \circ m = m \circ f$*; es deicr, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"] & X \arrow[d, "m"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\tilde{f}"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Para cada $t \in [0,1]$, sea $\tilde{f}(t) = s_t$, donde $s_t \in [0,1]$ es el único elemento que satisface que $f\left(m^{-1}(t)\right) \subseteq m^{-1}(s_t)$. Como X es compacto y $[0,1]$ es un espacio de Hausdorff, m es una función cerrada y por tanto una función cociente; además, de la continuidad de f y de m, $m \circ f$ es continua. Así, observando que, $(m \circ f)(m^{-1}(t)) = s_t$, para cada $t \in [0,1]$, del Teorema de transgresión (2.5) se sigue que $\tilde{f}$ es continua y $\tilde{f} \circ m = m \circ f$. □

Pregunta 2.9. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona dada por el Teorema 2.2, y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. ¿Si $f(m^{-1}(t)) \subseteq m^{-1}(s)$ para algunos $t,s \in [0,1]$, entonces $f(m^{-1}(t)) = m^{-1}(s)$?*

En el resultado que se presenta en seguida veremos que, para una función sobreyectiva f definida en un continuo de tipo λ y que preserve fibras, la continuidad de la función ω_f es una condición suficiente para obtener la continuidad de $\omega_{\tilde{f}}$.

Proposición 2.10. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona dada por el Teorema 2.2, y $f\colon X \to X$ una función continua que preserva fibras. Si $\omega_f\colon X \to 2^X$ es continua, entonces $\omega_{\tilde{f}}\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es continua, donde $\tilde{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ es la función de la Proposición 2.8 que satisface que $\tilde{f} \circ m = m \circ f$.*

Demostración. Como $\tilde{f} \circ m = m \circ f$, tenemos que

$$\tilde{f}^2 \circ m = (\tilde{f} \circ m) \circ f = (m \circ f) \circ f = m \circ f^2.$$

Mediante un argumento de inducción vemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}^k \circ m = m \circ f^k$.

Para probar que la función $\omega_{\tilde{f}} \colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es continua, es suficiente probar que el siguiente diagrama es conmutativo, y usar el Teorema 2.5 (Teorema de transgresión).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega_f"] \arrow[d, "m"] & 2^X \arrow[d, "2^m"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\omega_{\tilde{f}}"] & 2^{[0,1]} \end{tikzcd} \tag{2.0.1}$$

En (2.0.1), la función $2^m \colon 2^X \to 2^{[0,1]}$ es la función inducida por m entre los hiperespacios 2^X y $2^{[0,1]}$, dada por $2^m(A) = m(A)$ para cada $A \in 2^X$.

Sea $x \in X$, y veamos que $\omega_{\tilde{f}}(m(x)) = m(\omega_f(x))$. Sea $y \in \omega_{\tilde{f}}(m(x))$. Entonces, existe una sucesión creciente de naturales $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}^{n_k}(m(x)) = y$. Por la observación hecha al inicio, tenemos que $\tilde{f}^{n_k}(m(x)) = m(f^{n_k}(x))$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{j\to\infty} f^{n_{k_j}}(x) = x_0$. Nótese que $x_0 \in \omega_f(x)$ y

$$\begin{aligned} y = \lim_{j\to\infty} \tilde{f}^{n_{k_j}}(m(x)) &= \lim_{j\to\infty} m(f^{n_{k_j}}(x)) \\ &= m\left(\lim_{j\to\infty} f^{n_{k_j}}(x)\right) \\ &= m(x_0). \end{aligned}$$

Es decir, $y \in m(\omega_f(x))$ y así $\omega_{\tilde{f}}(m(x)) \subseteq m(\omega_f(x))$. Ahora, sea $z \in m(\omega_f(x))$. Entonces existe $y \in \omega_f(x)$ tal que $m(y) = z$. Como $y \in \omega_f(x)$, existe una sucesión creciente de números naturales $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x) = y$. Luego, por la continuidad de m y el hecho de que $\tilde{f}^r \circ m = m \circ f^r$ para cada $r \in \mathbb{N}$, se sigue que $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}^{n_k}(m(x)) = m(y)$. Es decir, $z = m(y) \in \omega_{\tilde{f}}(m(x))$. Así, $m(\omega_f(x)) = \omega_{\tilde{f}}(m(x))$. De lo anterior, $2^m \circ \omega_f = \omega_{\tilde{f}} \circ m$ y por tanto, la función $\omega_{\tilde{f}}$ es continua.

□

El recíproco de la Proposición 2.10 no es cierto, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. *Consideremos el continuo L definido en el Ejemplo 2.4, junto con la función monótona $m\colon L \to [0,1]$ dada por $m(x,y) = \pi_1(x,y) = x$, para cada $(x,y) \in L$. Ahora, definamos $f\colon L \to L$ dada por $f(x,y) = (x,y^2)$. Es claro que $f\left(m^{-1}(t)\right) = m^{-1}(t)$ para cada $t \in [0,1]$ y en consecuencia, $\tilde{f}(t) = t$ para cada $t \in [0,1]$, donde $\tilde{f}$ es definida como en la Proposición 2.8. Como $\tilde{f} = \mathrm{id}_{[0,1]}$, $\omega_{\tilde{f}}$ es continua, mas sin embargo, ω_f no es continua, puesto que $\omega_f(0,t) = (0,0)$ para cada $t \in [0,1)$ y $\omega_f(0,1) = (0,1)$.*

Pregunta 2.12. *Sean X un continuo de tipo λ y $f\colon X \to X$ una función continua que preserva fibras. ¿Si ω_f es continua, entonces ω_{f^n} es continua, para algún $n \geq 2$?*

En el resultado que sigue mostramos que si f está definida en un continuo de tipo λ y preserva fibras, y m es una función monótona como en el Teorema 2.2, entonces m envía puntos periódicos (recurrentes) de f en puntos periódicos (recurrentes, respectivamente) de $\tilde{f}$.

Proposición 2.13. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona que satisface las condiciones del Teorema 2.2, $f\colon X \to X$ una función continua que preserva fibras, y*

$x_0 \in X$.

1) Si $x_0 \in \operatorname{Per}(f)$, *entonces* $m(x_0) \in \operatorname{Per}(\tilde{f})$.

2) Si $x_0 \in \operatorname{Rec}(f)$, *entonces* $m(x_0) \in \operatorname{Rec}(\tilde{f})$.

Demostración. Usando la Proposición 2.8 y un argumento por inducción, se sigue que $m \circ f^n = \tilde{f}^n \circ m$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para probar *1)*, suponga que $k \in \mathbb{N}$ es tal que $f^k(x_0) = x_0$. Entonces, $\tilde{f}^k(m(x_0)) = m(f^k(x_0)) = m(x_0)$ y así, $m(x_0) \in \operatorname{Per}(\tilde{f})$. Ahora, si $x_0 \in \operatorname{Rec}(f)$, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x_0) = x_0$. Luego, usando la continuidad de la función m y la observación hecha al principio, se sigue que $\lim_{j\to\infty} \tilde{f}^{n_j}(m(x_0)) = \lim_{j\to\infty} m(f^{n_j}(x_0)) = m(x_0)$ y por tanto $m(x_0) \in \operatorname{Rec}(\tilde{f})$. $\square$

En (Bruckner and Ceder, Teorema 1.2) se prueba el siguiente teorema que caracteriza la equicontinuidad de una función definida en el intervalo $[0,1]$.

Teorema 2.14. *Sea* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *una función continua. Son equivalentes:*

1. f *es equicontinua;*

2. ω_f *es continua;*

3. ω_{f^2} *es continua;*

4. $\operatorname{Fix}(f^2) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n([0,1])$*;*

5. $\operatorname{Fix}(f^2)$ *es conexo.*

Observe que si en el Teorema 2.14 consideramos una función sobreyectiva en $[0,1]$, este nos dice que la continuidad de ω_f es equivalente a que todo punto del intervalo sea punto fijo de f^2. Con ayuda de este hecho probamos seguidamente que, considerando una función f sobreyectiva que preserva fibras sobre un continuo de tipo λ, la continuidad de ω_f implica que toda fibra $m^{-1}(t)$ es un conjunto invariante bajo f^2.

Proposición 2.15. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona como en el Teorema 2.2, y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. Si ω_f es continua, entonces $f^2(m^{-1}(t)) \subseteq m^{-1}(t)$ para cada $t \in [0,1]$.*

Demostración. Por la Proposición 2.8 sabemos que la función $\tilde{f}$ definida allí es continua y, por la Proposición 2.10, se tiene que $\omega_{\tilde{f}}\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ es continua. Además, puesto que f es sobreyectiva, es claro que $\tilde{f}$ es sobreyectiva. Luego, por el Teorema 2.14, se sigue que $\tilde{f}^2(t) = t$ para cada $t \in [0,1]$, y por como fue definida $\tilde{f}$, concluimos que $f^2(m^{-1}(t)) \subseteq m^{-1}(t)$ para cada $t \in [0,1]$. □

En la siguiente proposición vemos una condición suficiente para que una función que preserva fibras definida en un continuo de tipo λ tenga punto fijo.

Proposición 2.16. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona como en el Teorema 2.2, y $f\colon X \to X$ una función continua que preserva fibras. Si $m^{-1}(t)$ tiene la propiedad del punto fijo para cada $t \in [0,1]$, entonces f tiene punto fijo.*

Demostración. Como f preserva fibras, tenemos que por la Proposición 2.8 se sigue que $\tilde{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ es continua y por tanto, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\tilde{f}(t_0) = t_0$. Luego, $f(m^{-1}(t_0)) \subseteq m^{-1}(t_0)$, y considerando $f|_{m^{-1}(t_0)}: m^{-1}(t_0) \to m^{-1}(t_0)$, existe $x_0 \in m^{-1}(t_0)$ tal que $f(x_0) = x_0$, pues $m^{-1}(t_0)$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

En la Proposición 2.16, si se elimina la hipótesis de que cada fibra tenga la propiedad del punto fijo, no se puede concluir que dicha función tenga al menos un punto fijo, como mostramos en el siguiente ejemplo.

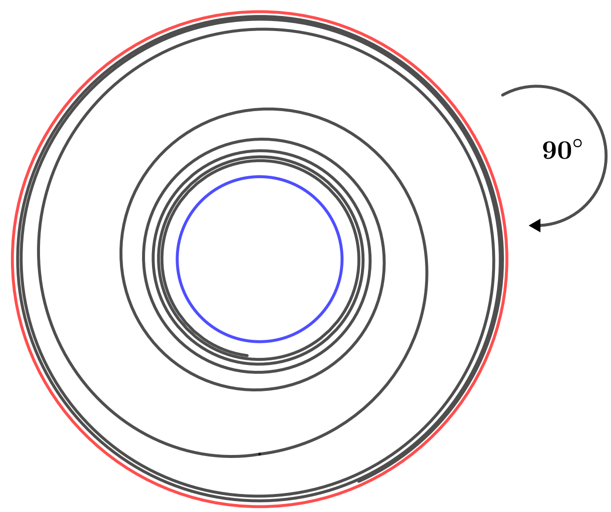
Ejemplo 2.17. *Sean $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$, $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$, y consideremos los rayos, definidos en coordenadas polares, $\alpha_1 = \{\left(\frac{3\pi-3}{\theta}+1, \theta\right) : \theta \geq \frac{3\pi}{2}\}$ y $\alpha_2 = \{\left(\frac{1}{\theta}+3, \theta\right) : \theta \leq -\frac{\pi}{2}\}$. Definamos $X = C_1 \cup C_2 \cup \alpha_1 \cup \alpha_2$ (Figura 3). Es claro que X es un continuo de tipo λ, y cada función monótona $m\colon X \to [0,1]$ dada por el Teorema 2.2 es tal que $m^{-1}(0), m^{-1}(1) \in \{C_1, C_2\}$ y $m^{-1}(t)$ tiene un único punto para cada $t \in (0,1)$. Sea $f\colon X \to X$ definida de modo que $f|_{C_1}$ y $f|_{C_2}$ sean rotaciones en sentido horario de 90 grados, y para cada punto sobre la espiral $X \setminus (C_1 \cup C_2)$, su imagen es el punto sobre la espiral ubicado a 90 grados, en sentido horario, de este. Entonces, f es una función continua y sobreyectiva sobre X que preserva fibras y sin embargo no posee puntos fijos.*

Con respecto a lo mencionado en la Proposición 2.16, resaltamos que en (Hagopian and Manka, 2005) se realizó la construcción de un continuo de tipo λ y una función definida sobre este que no tiene puntos fijos, mas todas las fibras de este continuo tienen la propiedad del punto fijo. Con esto observamos que la hipótesis de que f sea una función que preserve fibras se requiere en la Proposición 2.16.

La prueba de la siguiente proposición es muy sencilla. Se observa una condición suficiente

Figura 3.

Continuo de tipo λ del Ejemplo 2.17



para que todo punto pertenezca a $\mathrm{Fix}(f^2)$, pero para una clase muy restringida de continuos tipo λ.

Proposición 2.18. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ como en el Teorema 2.2 tal que $m^{-1}(t)$ es un arco para cada $t \in [0,1]$, y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $f(m^{-1}(t)) = m^{-1}(t)$ para todo $t \in [0,1]$ y ω_f es continua, entonces $X = \mathrm{Fix}(f^2)$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.14 y el hecho de que $X = \bigcup_{t\in[0,1]} m^{-1}(t)$. □

Pregunta 2.19. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona dada por el Teorema 2.2, y $f\colon X \to X$ una función continua tal que $f(m^{-1}(t)) \subseteq m^{-1}(t)$ para cada $t \in [0,1]$. ¿Si $f|_{m^{-1}(t)}$ es equicontinua para cada $t \in [0,1]$, entonces f es equicontinua?*

El enunciado del siguiente lema puede encontrarse en (Illanes and Nadler, Ejercicio 15.9).

Lema 2.20. *Sean X un continuo y Γ un subcontinuo de 2^X. Si $\Gamma \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\cup\Gamma$ es un subcontinuo de X.*

Los argumentos que usamos en (Camargo and Cancino, Teorema 3.7), los reproducimos en el siguiente lema para mostrar un resultado más general.

Lema 2.21. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\mathrm{Fix(f)} \neq \emptyset$ y ω_f es continua, entonces $\mathrm{Rec}(f)$ es un continuo.*

Demostración. Como ω_f es continua, $\omega_f(X)$ es un subcontinuo de 2^X, y dado que $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, $\omega_f(X) \cap C(X) \neq \emptyset$. Además, usando la continuidad de ω_f, no es difícil probar que $\bigcup \omega_f(X) = \mathrm{Rec}(f)$, y por el Lema 2.20 se sigue que $\mathrm{Rec}(f)$ es un continuo. □

Aplicando el lema anterior podemos deducir la siguiente proposición.

Proposición 2.22. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona como en el Teorema 2.2 tal que, para cada $t \in [0,1]$, $m^{-1}(t)$ tiene la propiedad del punto fijo, y $f\colon X \to X$ una función continua que preserva fibras. Si ω_f es continua, entonces $\mathrm{Rec}(f)$ es un continuo.*

Demostración. Por la Proposición 2.16 se tiene que f tiene punto fijo y aplicando el Lema 2.21 se sigue el resultado. □

Con relación a lo anterior, tenemos las siguientes preguntas.

Pregunta 2.23. *Sean X un continuo de tipo λ y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. ¿Si ω_f es continua, entonces $\mathrm{Fix}(f^2)$ es conexo?*

Pregunta 2.24. *Sean X un continuo de tipo λ y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. ¿Si ω_f es continua, entonces* $\mathrm{Per}(f)$ *es conexo?*

La prueba del siguiente lema se puede realizar usando la definición de continuo de tipo λ, y nos dice que un subontinuo de un continuo de tipo λ tiene interior no vacío únicamente si contiene todas las fibras de un subintervalo abierto de $[0,1]$.

Lema 2.25. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona que verifica las condiciones del Teorema 2.2, y Y un subcontinuo de X. Entonces,* $\mathrm{Int}(Y) \neq \emptyset$ *si, y solo si, $m^{-1}(s,t) \subseteq Y$, para algunos $s,t \in [0,1]$, con $s < t$.*

Una demostración del siguiente lema puede obtenerse usando el resultado presentado en (Barwell, Lema 2.2.7).

Lema 2.26. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces* $\mathrm{Rec}(f) \neq \emptyset$.

Demostración. Considere el conjunto $\mathscr{L} = \{\omega(x,f) : x \in X\}$ ordenado parcialmente por contenencia. Como X es compacto, se tiene que $\omega(x,f) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$. Así, usando el Principio Maximal de Hausdorff, que nos dice que en un conjunto parcialmente ordenado toda cadena está contenida en una cadena maximal, podemos obtener una cadena maximal $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}$. Note que, por ser $\mathscr{C}$ una cadena, $\mathscr{C}$ tiene la propiedad de intersecciones finitas, y así, dado que X es compacto y cada conjunto omega límite en $\mathscr{C}$ es un subconjunto cerrado de X, concluimos que $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$. Sea $y \in \bigcap \mathscr{C}$. Entonces, $\omega(y,f) \subseteq \omega(x,f)$ para cada $\omega(x,f) \in \mathscr{C}$. De esto, $\mathscr{C} \cup \{\omega(y,f)\}$ es una cadena que contiene a $\mathscr{C}$, y por tanto, dado que $\mathscr{C}$ es maximal, $\omega(y, f) \in \mathscr{C}$. Luego, $y \in \omega(y, f)$ y así $\mathrm{Rec}(f) \neq \emptyset$. $\square$

En seguida mostraremos que, para una función con puntos fijos y sobreyectiva que preserva fibras definida en un continuo de tipo λ, la continuidad de la función ω_f garantiza que todo punto sea recurrente.

Proposición 2.27. *Sean X un continuo de tipo λ y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. Si* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ *y ω_f es continua, entonces $X =$* $\mathrm{Rec}(f)$.

Demostración. Por el Lema 2.21 sabemos que $\mathrm{Rec}(f)$ es un continuo y además, por la Proposición 2.15, se tiene que $f^2(m^{-1}(t)) \subseteq m^{-1}(t)$ para cada $t \in [0,1]$. Luego, puesto que cada fibra $m^{-1}(t)$ es un conjunto compacto, el Lema 2.26 implica que $\mathrm{Rec}(f) \cap m^{-1}(t) \neq \emptyset$ para cada $t \in [0,1]$. En particular, $\mathrm{Rec}(f) \cap m^{-1}(0) \neq \emptyset$ y $\mathrm{Rec}(f) \cap m^{-1}(1) \neq \emptyset$, y por el Lema 2.25 concluimos que $m^{-1}(0,1) \subseteq \mathrm{Rec}(f)$. Así, por el hecho de que $\mathrm{Rec}(f)$ es cerrado, $X = \overline{m^{-1}(0,1)} \subseteq \mathrm{Rec}(f)$ y por tanto $X = \mathrm{Rec}(f)$. $\square$

Pregunta 2.28. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona verificando el Teorema 2.2, y $f\colon X \to X$ una función continua que preserva fibras. ¿Si $X =$* $\mathrm{Rec}(f)$*, entonces ω_f es continua?*

Al aplicar las proposiciones 2.16 y 2.27 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 2.29. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona con las propiedades del Teorema 2.2 tal que $m^{-1}(t)$ tiene la propiedad del punto fijo para cada $t \in [0,1]$,* *y* $f\colon X\to X$ *una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. Si* ω_f *es continua, entonces* $X=\mathrm{Rec}(f)$.

Las equivalencias en la siguiente proposición muestran en particular que si a la continuidad de ω_f se le agrega la condición de que $\mathrm{Rec}(f)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$, entonces se tiene la igualdad de los conjuntos omega límite para cada punto.

Proposición 2.30. *Sean* X *un espacio métrico compacto y* $f\colon X\to X$ *una función continua. Entonces son equivalentes:*

1) ω_f *es continua y* $\mathrm{Rec}(f)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$*;*

2) $\omega(x,f)=\Omega(x,f)$ *para cada* $x\in X$.

Demostración. Supongamos que ω_f es continua y $\mathrm{Rec}(f)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$, y sea $x\in X$. Claramente $\omega(x,f)\subseteq\Omega(x,f)$. Ahora, si $y\in\Omega(x,f)$, entonces existen una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq X$ y una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_k=x$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k)=y$. Por la continuidad de ω_f, se sigue que $\lim_{k\to\infty}\omega(x_k,f)=\omega(x,f)$ y $\lim_{k\to\infty}\omega(f^{n_k}(x_k),f)=\omega(y,f)$. Además, por la Proposición 1.2.3, $\omega(f^{n_k}(x_k),f)=\omega(x,f)$ para cada $k\in\mathbb{N}$ y de esto se concluye que $\omega(x,f)=\omega(y,f)$. Luego, dado que $\Omega(x,f)\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)=\mathrm{Rec}(f)$, $y\in\omega(y,f)=\omega(x,f)$. Así, 1) implica 2).

Veamos ahora que 2) implica 1). Por la Proposición 1.2.11 tenemos que ω_f es continua y, por la Proposición 1.2.3, $\mathrm{Rec}(f)\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$. Sea $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$. Entonces, para cada $k\in\mathbb{N}$, existe $x_k\in X$ tal que $f^k(x_k)=x$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\lim_{k\to\infty} x_k=y$, para algún $y \in X$. Luego, $x \in \Omega(y, f) = \omega(y, f)$ y así, puesto que $\omega(y, f)$ es minimal (Proposición 1.2.9), $x \in \omega(x, f) = \omega(y, f)$; esto es, $x \in \operatorname{Rec}(f)$. $\square$

Aplicando las proposiciones 2.27 y 2.30 se obtienen las siguientes equivalencias en continuos tipo lambda.

Corolario 2.31. *Sean X un continuo de tipo λ, $m\colon X \to [0,1]$ una función monótona como se establece en el Teorema 2.2 y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras con $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$. Entonces son equivalentes:*

1) ω_f es continua;

2) $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$.

Con respecto al corolario anterior, tenemos la siguiente pregunta, en la cual no consideramos la hipótesis de que existan puntos fijos.

Pregunta 2.32. *Sean X un continuo de tipo λ y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras. ¿Si ω_f es continua, entonces $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$?*

Combinando el Teorema 2.14 junto con el resultado en (Abdelli et al., Corolario 5.11) se obtiene el siguiente lema que usaremos posteriormente.

Lema 2.33. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Si $[0,1] = \operatorname{Rec}(f)$, entonces $[0,1] = \operatorname{Fix}(f^2)$.*

En la siguiente proposición se presentan algunas equivalencias relacionadas con propiedades dinámicas, para continuos tipo λ en los cuales al unir sus fibras degenradas se obtiene un subconjunto denso.

Proposición 2.34. *Sean X un continuo de tipo λ junto con una función monótona $m\colon X \to [0,1]$ tal que la unión de sus fibras degeneradas forma un subconjunto denso de X, y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva que preserva fibras con $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$. Entonces son equivalentes:*

1) ω_f *es continua;*

2) $\omega(x,f) = \Omega(x,f)$ *para cada* $x \in X$*;*

3) $X = \mathrm{Rec}(f)$*;*

4) $X = \mathrm{Fix}(f^2)$*;*

5) f *es equicontinua.*

Demostración. Por el Corolario 2.31, 1) implica 2). Por la Proposición 2.30, 2) implica 3). Ahora, si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces la Proposición 2.13 implica que $[0,1] = \mathrm{Rec}(\tilde{f})$ y por tanto, por el Lema 2.33, $[0,1] = \mathrm{Fix}(\tilde{f}^2)$. Sea D la unión de las fibras degeneradas de X. Si $t \in [0,1]$ es tal que $m^{-1}(t) = \{x_t\}$ para algún $x_t \in X$, entonces, por como se define $\tilde{f}$, $f^2(x_t) = x_t$ y de esto, $D \subseteq \mathrm{Fix}(f^2)$. Así, siendo $\mathrm{Fix}(f^2)$ un conjunto compacto y D un subconjunto denso de X, se sigue que $X = \overline{D} \subseteq \mathrm{Fix}(f^2)$. De lo anterior, 3) implica 4). Por la Proposición 1.2.6, 4) implica 5) y, por la Proposición 1.2.5, 5) implica 1). $\square$

3. Puntos no errantes y la función Ω_f

En este capítulo abordaremos el concepto de punto no errante. Inicialmente mencionaremos algunas propiedades, como el hecho que dicho conjunto siempre es cerrado e invariante, aunque no fuertemente invariante. Posteriormente, mostraremos la relación existente entre los puntos no errantes y el conjunto $\Omega(x, f)$. Probaremos algunos resultados relacionados con propiedades topológicas del conjunto $\Omega(x, f)$, así como condiciones necesarias y suficientes para tener la continuidad de la función Ω_f. Además, se probará que la función Ω_f siempre es semicontinua superior, cuando la definimos sobre espacios métricos compactos.

Definición 3.1. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Un punto $x \in X$ es llamado punto no errante de f si para cada abierto U de X con $x \in U$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no errantes de f lo denotaremos por $\Omega(f)$.

A continuación vemos que el conjunto de puntos no errantes de una función f siempre es un conjunto cerrado del espacio en el cual se define f.

Proposición 3.2. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Entonces $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $x \in \overline{\Omega(f)}$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, $\Omega(f) \cap U \neq \emptyset$ y por tanto existe $y \in \Omega(f) \cap U$. Luego, por la definición de $\Omega(f)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ y de esto $x \in \Omega(f)$. $\square$

El conjunto de puntos no errantes resulta ser un conjunto invariante, como se verá en la proposición que sigue. Su demostración es sencilla usando la definición de punto no errante.

Proposición 3.3. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$.*

Demostración. Sean $x \in \Omega(f)$ y V un abierto de X tal que $f(x) \in V$. Por la continuidad de f, existe un abierto U de X con $x \in U$ tal que $f(U) \subseteq V$. Dado que $x \in \Omega(f)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y \in U$ tales que $f^n(y) \in U$. Luego, $f^{n+1}(y) \in f^n(V) \cap V$ y así $f(x) \in \Omega(f)$. □

En la proposición anterior vimos que el conjunto $\Omega(f)$ es un conjunto invariante. Sin embargo, $\Omega(f)$ no necesariamente es fuertemente invariante, como vemos en el siguiente ejemplo. Este ejemplo puede encontrarse en (Block and Coppel, Ejemplo 21, p.80).

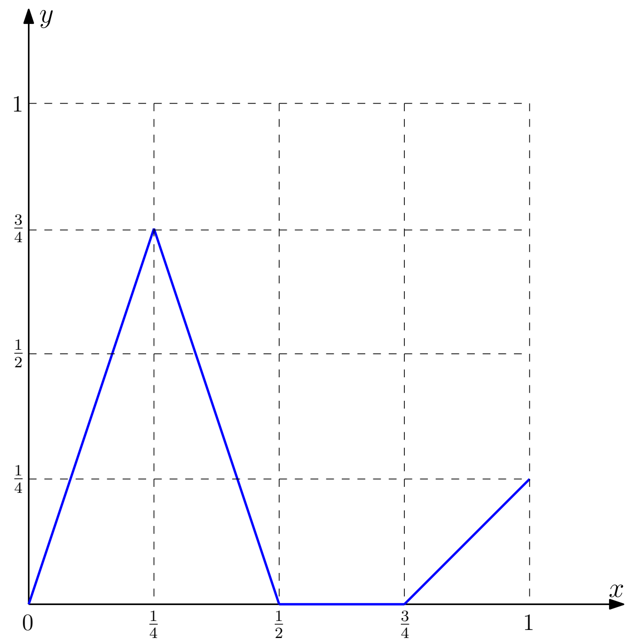
Ejemplo 3.4. *Consideremos la función $f\colon [0,1] \to [0.1]$ representada en la Figura 4 y definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & si\ x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ -3x + \frac{3}{2}, & si\ x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, & si\ x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]; \\ x - \frac{3}{4}, & si\ x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Entonces, $x = \frac{3}{4} \in \Omega(f)$ pero $x \notin f(\Omega(f))$, pues $f^{-1}(\{x\}) = \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} \notin \Omega(f)$.

Figura 4.

Función f del Ejemplo 3.4



Veremos ahora que la noción de punto no errante está relacionada con el conjunto omega límite $\Omega(x, f)$. Más precisamente, veremos que un punto x es no errante siempre y cuando este pertenezca a su conjunto omega límite $\Omega(x, f)$.

Proposición 3.5. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Entonces, $x \in \Omega(f)$ si, y solo si, $x \in \Omega(x, f)$.*

Demostración. Supongamos primero que $x \in \Omega(f)$. Si $x \in \mathrm{Per}(f)$; esto es $f^s(x) = x$, para algún $s \geq 1$. Basta tomar $x_k = x$ y $n_k = ks$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y evidentemente se tiene que $\lim_{k\to\infty} x_k = x = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k)$. Ahora, supongamos que $x \notin \mathrm{Per}(f)$. Como $x \in \Omega(f)$, existen $n_1 \in \mathbb{N}$ y $x_1 \in B(x, 1)$ tales que $f^{n_1}(x_1) \in B(x, 1)$. Dado que $x \notin \{f(x), f^2(x), \ldots, f^{n_1}(x)\}$, existen $\eta_1 > 0$ y un abierto V de X tales que $\{f(x), \ldots, f^{n_1}(x)\} \subseteq V$ y $B(x, \eta_1) \cap V = \emptyset$. Luego, por la continuidad de f, podemos hallar $0 < \eta_2 < \text{mín}\{\eta_1, \frac{1}{2}\}$ de modo que $f^j(B(x,\eta_2)) \subseteq V$ para cada $j \in \{1,\ldots,n_1\}$. Como x es no errante, existen $n_2 \in \mathbb{N}$ y $x_2 \in B(x,\eta_2) \subseteq B(x,\frac{1}{2})$ tales que $f^{n_2}(x_2) \in B(x,\eta_2) \subseteq B(x,\frac{1}{2})$. Note que, por las condiciones impuestas sobre $B(x,\eta_1)$ y V, $n_2 > n_1$. Continuando de esta forma, construimos una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $x_k, f^{n_k}(x_k) \in B(x,\frac{1}{k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\text{lím}_{k\to\infty} x_k = x = \text{lím}_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k)$ y así $x \in \Omega(x,f)$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in \Omega(x,f)$ y sea U un abierto de X con $x \in U$. Sabemos que existen una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\text{lím}_{k\to\infty} x_k = x = \text{lím}_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k)$ y así, siendo U abierto de X, podemos escoger $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in U$ y $f^{n_k}(x_k) \in U$. De esta forma, $f^{n_k}(U) \cap U \neq \emptyset$ y así $x \in \Omega(f)$. □

Ahora presentaremos la función Tienda, la cual es muy útil a la hora de trabajar con sistemas dinámicos discretos, y nos servirá para algunos ejemplos subsecuentes.

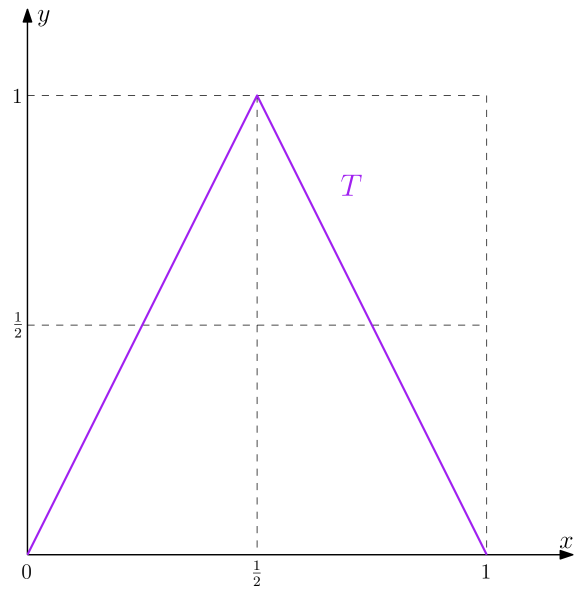
Ejemplo 3.6. *La función Tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ está definida para cada $x \in [0,1]$ como sigue:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]; \\ 2-2x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Algunas propiedades de la función Tienda, T, son que el conjunto de sus puntos periódicos es denso, y además, existen puntos cuya órbita es densa. Para más detalles sobre estas propiedades vea (King and Méndez, 2014).

Figura 5.

La Tienda



El siguiente resultado presenta una condición suficiente para garantizar la continuidad de la función Ω_f, siendo f una función continua definida en un espacio métrico compacto y sin puntos aislados.

Proposición 3.7. *Sean X un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f\colon X\to X$ una función continua. Si existe $x_0\in X$ tal que $\overline{\mathscr{O}(x_0,f)}=X$, entonces $\Omega(x,f)=X$ para cada $x\in X$ y por tanto Ω_f es continua.*

Demostración. Sea $x\in X$ y veamos que $\Omega(x,f)=X$. Sea $y\in X$. Como $\overline{\mathscr{O}(x_0,f)}=X$ y X no tiene puntos aislados, podemos obtener sucesiones estrictamente crecientes $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x_0)=x$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_0)=y$. Siendo $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente, podemos hallar $j_1\in\mathbb{N}$ de modo que $n_{j_1}-m_1\geq 1$. De igual forma, podemos escoger $j_2>j_1$ de modo que $n_{j_2} - m_2 > n_{j_1} - m_1$. Así, inductivamente construimos una sucesión estrictamente creciente $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_{j_{k+1}} - m_{k+1} > n_{j_k} - m_k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $l_k = n_{j_k} - m_k$ y $p_k = f^{m_k}(x_0)$. Note que $\lim_{k\to\infty} p_k = x$ y $\lim_{k\to\infty} f^{l_k}(p_k) = y$. Así, $y \in \Omega(x, f)$ □

Observe que, al haber puntos con órbita densa en la Tienda, la función Ω_T es continua y, de hecho, $\Omega(x,T) = [0,1]$ para cada $x \in [0,1]$. Esta observación la tendremos en cuenta para calcular lo conjuntos $\Omega(x, f)$ en las funciones de los ejemplos 3.10 y 3.13.

La prueba del siguiente lema puede verse en (Whyburn, Teorema 4.32, p.130).

Lema 3.8. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces f es abierta si, y solo si,* $\lim_{k\to\infty} f^{-1}(x_k)$ $= f^{-1}(x)$ *para cada sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Con ayuda del lema anterior probaremos que, en funciones abiertas, la función Ω_f permanece contante sobre la órbita de cualquier punto del espacio.

Proposición 3.9. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Entonces $\Omega(x, f) \subseteq \Omega(f(x), f)$. Además, si f es abierta y sobreyectiva, se tiene que $\Omega(x, f) = \Omega(f(x), f)$.*

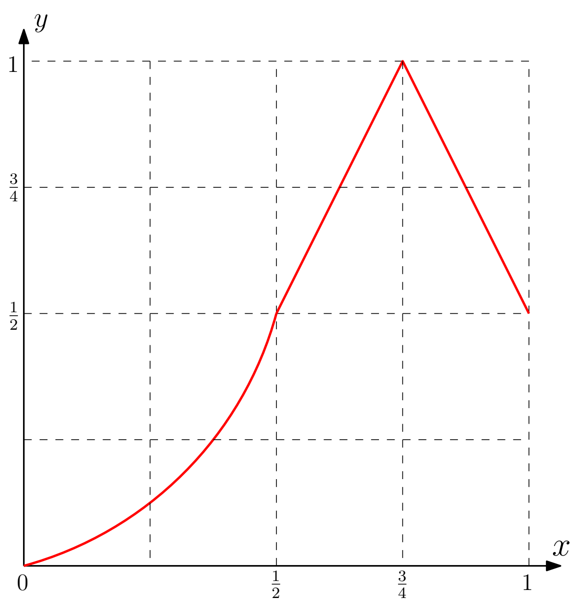
Demostración. Si $y \in \Omega(x, f)$, entonces existen una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y una sucesión creciente $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ y $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_i) = y$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $n_1 > 1$. Luego, definiendo para cada $i \in \mathbb{N}$, $m_i = n_i - 1$ y $y_i = f(x_i)$, tenemos que la sucesión $(m_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ es creciente, $\lim_{i\to\infty} y_i = f(x)$ y $\lim_{i\to\infty} f^{m_i}(y_i) = y$; es decir, $y \in \Omega(f(x), f)$ y así, $\Omega(x, f) \subseteq \Omega(f(x), f)$.

Supongamos ahora que f es abierta y sobreyectiva. Sea $y \in \Omega(f(x), f)$. Entonces existen una sucesión creciente $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, con $n_i > 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y una sucesión $(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\lim_{i\to\infty} q_i = f(x)$ y $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(q_i) = y$. Por el Lema 3.8, sabemos que $\lim_{i\to\infty} f^{-1}(\{q_i\}) = f^{-1}(\{f(x)\})$, y dado que $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$, existen una sucesión creciente $(i_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y $p_{i_j} \in f^{-1}(\{q_{i_j}\})$ para cada $j \in \mathbb{N}$, tales que $\lim_{j\to\infty} p_{i_j} = x$. Por tanto, $\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}+1}(p_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(q_{i_j}) = y$, y vemos que $y \in \Omega(x, f)$. Esto prueba que $\Omega(f(x), f) \subseteq \Omega(x, f)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que si la función en consideración no es abierta, entonces la contenencia $\Omega(x, f) \subseteq \Omega(f(x), f)$ puede ser estricta.

Figura 6.

Función definida en el Ejemplo 3.10



Ejemplo 3.10. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la función representada en la Figura 6 y definida como:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2x - \frac{1}{2}, & si\ x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]; \\ -2x + \frac{5}{2}, & si\ x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

No es difícil ver que f no es una función abierta y tenemos que $\Omega(1,f) \subseteq [\frac{1}{2},1]$ y $0 \in \Omega(f(1),f) = \Omega(\frac{1}{2},f)$. En consecuencia, $\Omega(1,f) \subsetneq \Omega(f(1),f)$.

En el siguiente lema vemos que, para un espacio métrico compacto X y una función continua $f\colon X \to X$, todo punto en $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$ pertenece a un conjunto omega límite $\Omega(x,f)$. Es sencillo observar que este hecho no se cumple si consideramos los conjuntos omega límite minúscula $\omega(x,f)$.

Lema 3.11. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, $\bigcup \Omega_f(X) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$. En particular, si X es un continuo, $\bigcup \Omega_f(X)$ también es un continuo.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.3, es claro que $\Omega_f(x) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$ para cada $x \in X$ y en consecuencia, $\bigcup \Omega_f(X) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$. Ahora, sea $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$ tal que $f^k(x_k) = y$. Como X es compacto, existen $p \in X$ y una subsucesión $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = p$. De esto, $\lim_{i\to\infty} f^{k_i}(x_{k_i}) = y$ y por tanto $y \in \Omega_f(p)$. Así, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X) \subseteq \bigcup \Omega_f(X)$. $\square$

En seguida mostraremos que, para una función definida sobre un continuo, la continuidad de la función Ω_f implica que el conjunto de puntos no errantes sea un continuo. Note que este resultado tiene cierta similitud con lo mostrado en el Lema 2.21, pero en este caso no hace falta que existan puntos fijos.

Proposición 3.12. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\Omega_f\colon X \to 2^X$ es continua, entonces $\Omega(f)$ es un continuo.*

Demostración. Veamos que $\bigcup \Omega_f(X) = \Omega(f)$ y, por el Lema 3.11, esto completaría la prueba. En efecto, por la Proposición 3.5, es claro que $\Omega(f) \subseteq \bigcup \Omega_f(X)$; además, para $x \in X$ y $y \in \Omega_f(x)$, existen una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = y$. Usando la continuidad de la función Ω_f y la Proposición 3.9, se sigue que

$$\Omega_f(x) = \lim_{k\to\infty} \Omega_f(x_k) \subseteq \lim_{k\to\infty} \Omega_f(f^{n_k}(x_k)) = \Omega_f(y),$$

y por tanto $y \in \Omega_f(y)$. Así, $y \in \Omega(f)$ y $\bigcup \Omega_f(X) \subseteq \Omega(f)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la Proposición 3.12 no siempre es verdadero.

Ejemplo 3.13. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la función representada en la Figura 7 y dada para cada $x \in [0,1]$ por:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2x - \frac{1}{2}, & si\ x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]; \\ -2x + \frac{5}{2}, & si\ x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

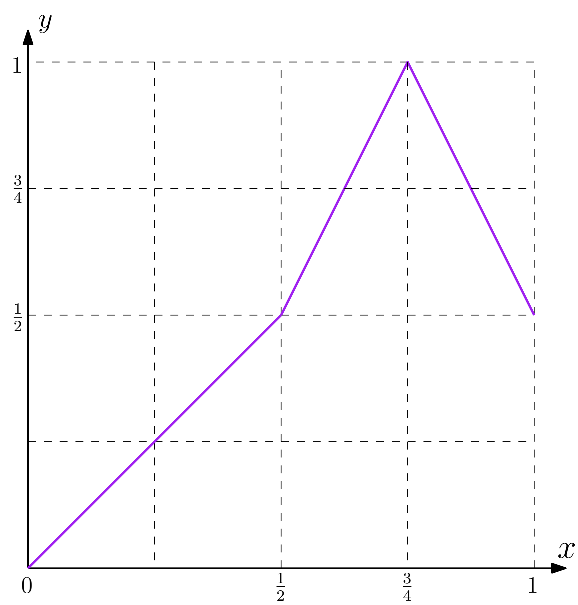
Entonces, la función $\Omega_f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ *está definida para cada* $x \in [0,1]$ *por:*

$$\Omega_f(x) = \begin{cases} \{x\}, & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right], & si\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

por tanto, todo punto del intervalo $[0,1]$ *es no errante, pero* Ω_f *no es una función continua.*

Figura 7.

Función f *definida en el Ejemplo 3.13*



En la siguiente proposición vemos que el conjunto omega límite $\Omega(x, f)$ es un continuo si x es un punto fijo de una función f definida sobre una dendrita.

Proposición 3.14. *Sean* X *una dendrita y* $f\colon X \to X$ *una función continua. Si* $x_0 \in \mathrm{Fix}(f)$*, entonces* $\Omega(x_0, f)$ *es conexo y por tanto un continuo.*

Demostración. Sea $z \in \Omega(x_0, f)$ y probemos que $[z, x_0] \subseteq \Omega(x_0, f)$. Evidentemente, $z, x_0 \in \Omega(x_0, f)$

y sabemos que existen una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = z$. Sean $p \in (z, x_0)$ y, U y V abiertos arcoconexos de X tales que $z \in U$, $x_0 \in V$, $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ y $p \notin \overline{U} \cup \overline{V}$. Entonces, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$ y $f^{n_k}(x_k) \in U$ para cada $k \geq k_0$. Dado que X es localmente arcoconexo y no contiene curvas cerradas simples, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p \in [x_0, f^{n_k}(x_k)]$ para cada $k \geq k_0$. Así, por el hecho de que $p \in [x_0, f^{n_k}(x_k)] \subseteq f^{n_k}([x_0, x_k])$, concluimos que existe $y_K \in [x_0, x_k]$ tal que $f^{n_k}(y_k) = p$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De esto, $\lim_{k\to\infty} y_k = x_0$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(y_k) = p$, lo cual significa que $p \in \Omega(x_0, f)$. Así, $\Omega(x_0, f)$ es conexo. Además, $\Omega(x_0, f)$ es un conjunto compacto, por la Proposición 1.2.3. □

Como se observa en el siguiente ejemplo, la Proposición 3.14 no se cumple si se considera un continuo arbitrario.

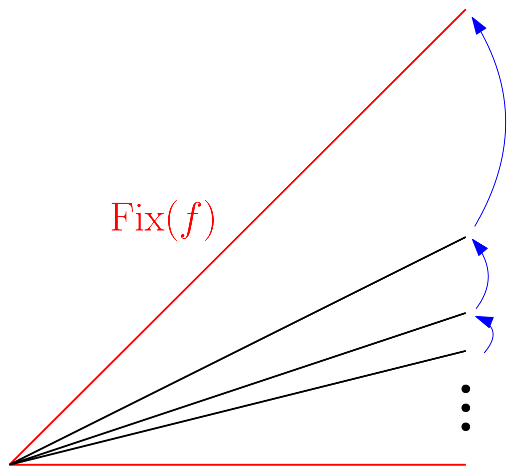
Ejemplo 3.15. *Sean $p = (0,0)$, $q = (1,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$. Considere los segmentos de recta $\alpha_0 = \{(1-t)p + tq : t \in [0,1]\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \{(1-t)p + tp_n : t \in [0,1]\}$. Definamos el continuo $X = \cup_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, el cual se conoce como abanico armónico. Sea $f : X \to X$ definida de modo que:*

- $\mathrm{Fix}(f) = \alpha_0 \cup \alpha_1$.
- *Para cada $n \geq 2$, $f|_{\alpha_n} : \alpha_n \to \alpha_{n-1}$ es un homeomorfismo que satisface que $f(p_n) = p_{n-1}$.*

Claramente, f es una función continua (vea la Figura 8) y además, si consideramos el punto q, tenemos que $q \in \mathrm{Fix}(f)$ y $\Omega(q, f) = \{q\} \cup \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, $\Omega(q, f)$ no es un conjunto conexo.

Figura 8.

Abanico armónico y función definida en el Ejemplo 3.15



Pregunta 3.16. *Sean X un continuo y $f\colon X \to X$ una función continua. ¿Cuándo existe algún $x_0 \in X$ tal que $\Omega(x_0, f)$ sea conexo?*

El siguiente lema enuncia un resultado bien conocido relacionado con la semicontinuidad superior de una función.

Lema 3.17. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $F\colon X \to 2^Y$ una función. Entonces, F es semicontinua superior si, y solo si, para cada $x_0 \in X$ y cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ se tiene que $\limsup F(x_n) \subseteq F(x_0)$.*

A continuación probamos que la función Ω_f siempre resulta ser una función semicontinua superiormente en el contexto de los espacios métricos compactos.

Proposición 3.18. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces Ω_f es semicontinua superior.*

Demostración. Usemos el Lema 3.17. Sean $x \in X$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Probemos que $\limsup \Omega(x_k, f) \subseteq \Omega(x, f)$. Sea $p \in \limsup \Omega(x_k, f)$. Entonces, existe una sucesión estrictamente creciente $(k_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos hallar $y_i \in \Omega(x_{k_i}, f)$ de modo que $\lim_{i\to\infty} y_i = p$. De lo anterior, para cada $i \in \mathbb{N}$, existen una sucesión $\left(z_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y una sucesión estrictamente creciente $\left(n_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{j\to\infty} z_j^{(i)} = x_{k_i}$ y $\lim_{j\to\infty} f^{n_j^{(i)}}\left(z_j^{(i)}\right) = y_i$. Luego, fijando $i = 1$, podemos escoger $j_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $d\left(z_{j_1}^{(1)}, x_{k_1}\right) < 1$ y $d\left(f^{n_{j_1}^{(1)}}\left(z_{j_1}^{(1)}\right), y_1\right) < 1$. Similarmente, fijando $i = 2$, podemos escoger $j_2 \in \mathbb{N}$ de modo que $j_2 > j_1$, $n_{j_2}^{(2)} > n_{j_1}^{(1)}$, $d\left(z_{j_2}^{(2)}, x_{k_2}\right) < \frac{1}{2}$ y $d\left(f^{n_{j_2}^{(2)}}\left(z_{j_2}^{(2)}\right), y_2\right) < \frac{1}{2}$. Continuando de esta forma, construimos sucesiones estrictamente crecientes $(j_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\left(n_{j_i}^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $d\left(z_{j_i}^{(i)}, x_{k_i}\right) < \frac{1}{i}$ y $d\left(f^{n_{j_i}^{(i)}}\left(z_{j_i}^{(i)}\right), y_i\right) < \frac{1}{i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, usando el hecho de que $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x$ y $\lim_{i\to\infty} y_i = p$, concluimos que $\lim_{i\to\infty} z_{j_i}^{(i)} = x$ y $\lim_{i\to\infty} f^{n_{j_i}^{(i)}}\left(z_{j_i}^{(i)}\right) = p$; es decir, $p \in \Omega(x, f)$. Así, Ω_f es semicontinua superior. □

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en (Kuratowski, p.70-71).

Proposición 3.19. *Sean Y y Z espacios métricos compactos. Si $F\colon Y \to 2^Z$ es semicontinua superior, entonces el conjunto de los puntos donde F es continua forma un conjunto G_δ denso en Y.*

Como consecuencia de las proposiciones 3.18 y 3.19 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3.20. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces $\Omega_f\colon X \to 2^X$ es continua en un subconjunto G_δ denso de X.*

4. Resultados generales

En este capítulo daremos algunas generalizaciones de resultados ya existentes que relacionan propiedades dinámicas que involucran principalmente los conjuntos omega límite $\omega(x,f)$ y $\Omega(x,f)$. También, mostraremos que la semicontinuidad superior de la función ω_f y la minimalidad de los conjuntos $\omega(x,f)$ implican que ω_f sea una función continua.

Iniciamos viendo que para continuos únicamente arcoconexos en los que todo subcontinuo tiene la propiedad del punto fijo, la continuidad de la función ω_f implica que el conjunto de puntos periódicos sea arcoconexo. Este resultado fue demostrado en (Camargo and Cancino, Teorema 3.5) para el caso en que el continuo en consideración es una dendrita. El siguiente resultado se cumple si se consideran dendroides, como lo es el abanico armónico que utilizamos en el Ejemplo 3.15.

Proposición 4.1. *Sean X un continuo únicamente arcoconexo tal que todo subcontinuo de X tiene la propiedad del punto fijo, y $f\colon X\to X$ una función continua. Si ω_f es continua, entonces* $\mathrm{Fix}(f^n)$ *es arcoconexo para cada $n\in\mathbb{N}$ y por tanto,* $\mathrm{Per}(f)$ *es arcoconexo.*

Demostración. Sean $x,y\in \mathrm{Fix}(f^n)$ y $p\in[x,y]$. Suponga que $f^n(p)\neq p$. Por la compacidad de $\mathrm{Fix}(f^n)$, podemos suponer que $[x,y]\cap \mathrm{Fix}(f^n)=\{x,y\}$. Como X es únicamente arcococnexo, se tiene que $p\in[x,f^n(p)]$ o $p\in[y,f^n(p)]$. Consideremos el caso en que $p\in[x,f^n(p)]$. Note que $f^n([x,p])$ es un subcontinuo arcoconexo de X y además $\{x,f^n(p)\}\subseteq f^n([x,p])$. Luego, $[x,f^n(p)]\subseteq f^n([x,p])$ y por tanto, existe $t_1\in[x,p]$ tal que $f^n(t_1)=p$. Note que $t_1\neq p$, pues $f^n(p)\neq p$. Similarmente, tenemos que $f^n([x,t_1])$ es un subcontinuo arcoconexo de X y $\{x,p\}\subseteq f^n([x,t_1])$, lo cual implica que $[x,p] \subseteq f^n([x,t_1])$. De esto, existe $t_2 \in [x,t_1]$ tal que $f^n(t_2) = t_1$. Continuando de esta forma, construimos una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [x,p]$ tal que $f^n(t_1) = p$, $f^n(t_k) = t_{k-1}$ y $[x,t_k] \subseteq [x,t_{k-1}]$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como dichos arcos son encajados, existe $t_0 \in [x,p]$ tal que $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0$. Note que $f^n(t_0) = f^n(\lim_{k\to\infty} t_k) = \lim_{k\to\infty} f^n(t_k) = \lim_{k\to\infty} t_{k-1} = t_0$; esto es, $t_0 \in \mathrm{Fix}(f^n)$ y en consecuencia, $t_0 = x$.

Ahora, dado que para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^{kn}(t_k) = p$, por la Proposición 1.2.3, concluimos que $\omega(t_k, f) = \omega(p, f)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y por la continuidad de ω_f se sigue que $\omega(x, f) = \lim_{k\to\infty} \omega(t_k, f) = \omega(p, f)$. De esto, $\omega(p, f) = \omega(x, f)$ siempre que $p \in [x, f^n(p)]$. De la misma forma se tiene que si $p \in [y, f^n(p)]$, entonces $\omega(p, f) = \omega(y, f)$. De lo anterior, $\omega(p, f) \in \{\omega(x, f), \omega(y, f)\} = \{\mathscr{O}(x, f), \mathscr{O}(y, f)\}$ para cada $p \in [x,y]$. Como ω_f es continua, se debe tener que $\omega_f([x,y])$ es conexo y por tanto, $\mathscr{O}(x, f) = \mathscr{O}(y, f)$.

Sea m el periodo de x. Como $y \in \mathscr{O}(y, f) = \mathscr{O}(x, f)$, existe $l < m$ tal que $f^l(x) = y$. Sea $M = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{kl}([x,y])}$. Note que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^{kl}(y) \in f^{kl}([x,y]) \cap f^{(k+1)l}([x,y])$, lo cual implica que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{kl}([x,y])$ es conexo y por tanto M es un continuo. Por la continuidad de f^l se sigue que $f^l(M) \subseteq M$ y así, considerando la función $f^l|_M \colon M \to M$, existe $p_0 \in M$ tal que $f^l(p_0) = p_0$. Dado que para cada $p \in [x,y]$ se tiene que $\omega(p, f) = \omega(x, f)$, esto implica que $\omega(f^r(p), f) = \omega(p, f) = \omega(x, f)$ para cada $r \in \mathbb{N}$; esto es, $f^r([a,b]) \subseteq {\omega_f}^{-1}(\{\mathscr{O}(x, f)\})$ para cada $r \in \mathbb{N}$, donde ${\omega_f}^{-1}(\{\mathscr{O}(x, f)\})$ es cerrado en X por la continuidad de ω_f. Luego, $M \subseteq {\omega_f}^{-1}(\{\mathscr{O}(x, f)\})$ y por tanto $\mathscr{O}(p_0, f) = \mathscr{O}(x, f)$, lo cual contradice que $l < m$, pues m es el periodo de x. Así, concluimos que $\mathrm{Fix}(f^n)$ es arcoconexo para cada $n \in \mathbb{N}$. La arcoconexidad de $\mathrm{Per}(f)$ se sigue del hecho de que $\mathrm{Per}(f) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(f^n)$ y $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Fix}(f^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Un λ-dendroide es un continuo hereditariamente unicoherente y hereditariamente descomponible (vea (Charatonik, 1970)). Puede verse por ejemplo que todo dendroide es un un λ-dendroide, y con respecto a lo demostrado en la Proposición 4.1, tenemos las siguiente pregunta.

Pregunta 4.2. *Sean X un λ-dendroide y $f\colon X \to X$ una función continua. ¿Si ω_f es continua, entonces* $\mathrm{Fix}(f^n)$ *es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$?*

A continuación damos una condición necesaria y suficiente para la continuidad de la función ω_f, cuando f está definida en un espacio métrico compacto.

Proposición 4.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, ω_f es continua si, y solo si, ω_f es semicontinua superior y $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal para cada $x \in X$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.9, se sigue que si ω_f es continua, entonces ω_f es semicontinua superior y cada conjunto $\omega(x, f)$ es minimal. Recíprocamente, supongamos que $\omega(x, f)$ es minimal para cada $x \in X$ y que ω_f es semicontinua superior, y veamos que ω_f es continua. Sean $x_0 \in X$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión tal que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x_0$. Veamos que $\text{lím}_{n\to\infty} \omega(x_n, f) = \omega(x_0, f)$. Para esto, observe que si $(\omega(x_{n_k}, f))_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\omega(x_n), f)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\text{lím}_{k\to\infty} \omega(x_{n_k}, f) = A$ para algún $A \in 2^X$, entonces, siendo ω_f semicontinua superior, el Lema 3.17 implica que $\text{lím sup}\, \omega(x_{n_k}, f) = A \subseteq \omega(x_0, f)$. Además, dado que $f(\omega(x_{n_k}, f)) = \omega(x_{n_k}, f)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $f(A) = A$, y por la minimalidad de $\omega(x_0, f)$ concluimos que $A = \omega(x_0, f)$. De lo anterior, toda subsucesión convergente de $(\omega(x_n, f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\omega(x_0, f)$ y en consecuencia, $\lim_{n\to\infty} \omega(x_n, f) = \omega(x_0, f)$. Así, ω_f es continua. □

Recuerde que en la Proposición 3.18 mostramos que: si $f\colon X \to X$ es una función continua definida en un espacio métrico compacto, entonces la función Ω_f es semicontinua superiormente. Usando esto y el hecho de que $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$ para cada $x \in X$, se sigue el siguiente lema.

Lema 4.4. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, para toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, se tiene que* $\limsup \omega(x_k, f) \subseteq \Omega(x_0, f)$.

El lema que viene en seguida nos será útil en la prueba de la proposición que se presenta posterior a este.

Lema 4.5. *Sean X un espacio métrico compacto, $x, y \in X$ y $f\colon X \to X$ una función continua tal que $X = \mathrm{Rec}(f)$. Si $x \in \Omega(y, f)$, entonces $y \in \Omega(x, f)$.*

Demostración. Como $x \in \Omega(y, f)$, existen una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} y_k = y$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(y_k) = x$. Dado que $X = \mathrm{Rec}(f)$, tenemos que $y_k \in \omega(y_k, f)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y por tanto, $y \in \limsup \omega(y_k, f)$. Luego, por la Proposición 1.2.3 y el Lema 4.4, $y \in \limsup \omega(y_k, f) = \limsup \omega(f^{n_k}(y_k), f) \subseteq \Omega(x, f)$. □

Note que en lema anterior es necesario que todo punto sea recurrente, pues en caso contrario no es cierto el resultado, como puede verse al considerar la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[0, 1]$, escogiendo $x = 0$ y $y = 1$.

Compare el siguiente resultado con el Teorema 3.10 en (Camargo et al., 2019). En dicho teorema se prueba que las afirmaciones *2)*, *3)* y *4)* de la Proposición 4.6 son equivalentes cuando todo punto es periódico. Veremos que dichas equivalencias son ciertas cuando todo punto es recurrente y agregamos una nueva afirmación equivalente.

Proposición 4.6. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\Omega(x, f)$ *es minimal para cada* $x \in X$*;*

2) $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$ *para cada* $x \in X$*;*

3) ω_f *es continua;*

4) ω_f *es usc.*

Demostración. Las equivalencias entre los items *2)*, *3)* y *4)* se siguen a partir de las proposiciones 2.30 y 1.2.14. También, al ser todo punto recurrente, es claro que *1)* implica *2)*. Finalmente, veamos que *2)* implica *1)*. Sea $y \in \Omega(x, f)$. Entonces, por la igualdad $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$, $y \in \omega(x, f)$. Puesto que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado e invariante (Proposición 1.2.3) concluimos que $\omega(y, f) \subseteq \omega(x, f)$. Ahora, por el Lema 4.5, tenemos que $x \in \Omega(y, f) = \omega(y, f)$, y nuevamente, por ser $\omega(y, f)$ cerrado e invariante, obtenemos la contenencia $\omega(x, f) \subseteq \omega(y, f)$. Así, $\Omega(x, f) = \omega(x, f) = \omega(y, f)$ y, por la Proposición 1.2.8, $\Omega(x, f)$ es un conjunto minimal. □

Respecto a la proposición anterior, tenemos las siguientes preguntas.

Pregunta 4.7. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. ¿Si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal para cada $x \in X$?*

Pregunta 4.8. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. ¿Si $X = \mathrm{Per}(f)$, entonces ω_f es continua?*

En (Camargo et al., Lema 4.2) se demostró que si $f\colon X \to X$ es una función continua definida en una dendrita y $\Omega(x, f)$ es totalmente disconexo para cada $x \in X$, entonces f es equicontinua. Más recientemente, en (Abdelli et al., Teorema 5.2), se probó este resultado en dendritas locales, viendo que si $\Omega(x, f)$ es totalmente disconexo, entonces f es equicontinua en x. Usando argumentos similares, en la Proposición 4.10 demostraremos que este resultado sigue siendo válido si se considera un continuo regular donde cada par de puntos se une solo por un número finito de arcos. Para ello usaremos el siguiente lema.

Lema 4.9. *Sean X un continuo regular tal que para cada par de puntos en X hay solo un número finito de arcos que los une. Si $x \neq y$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de subconjuntos arcoconexos de X tal que para cada $\varepsilon > 0$ con $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ y $A_n \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$, entonces existe un arco α en X tal que $\alpha \subseteq A_n$ para infinitos n.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. Como X es regular, existen vecindades U_x y U_y de x e y, respectivamente, tales que $U_x \subseteq B(x, \varepsilon)$, $U_y \subseteq B(y, \varepsilon)$ y ∂U_x y ∂U_y son conjuntos finitos. Por la hipótesis, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A_{n_k} \cap U_x \neq \emptyset$ y $A_{n_k} \cap U_y \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $U_x \cap U_y = \emptyset$, la conexidad de cada A_{n_k} implica que $A_{n_k} \cap \partial U_x \neq \emptyset$ y $A_{n_k} \cap \partial U_y \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, puesto que ∂U_x y ∂U_y son finitos, existen $a \in \partial U_x$ y $b \in \partial U_y$

tales que $\{a,b\} \subseteq A_{n_k}$ para infinitos A_{n_k}. Luego, dado que hay solo un número finito de arcos que unen a y b y cada A_{n_k} es arcoconexo, tenemos que existe un arco α de a a b tal que $\alpha \subseteq A_{n_k}$ para infinitos A_{n_k}. $\square$

En la Figura 9 se muestran unos ejemplos de continuos regulares. En la parte superior observamos dos continuos regulares en los que cada par de puntos se une solo por un número finito de arcos. Sin embargo, el continuo regular mostrado en la parte inferior cumple que del punto p a cualquier otro punto hay un número infinito de arcos que los une.

Proposición 4.10. *Sean X un continuo regular tal que para cada par de puntos en X hay solo un número finito de arcos que los une, y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\Omega(a,f)$ es totalmente disconexo, entonces f es equicontinua en a.*

Demostración. Supongamos que f no es equicontinua en a. Entonces, existen una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$, de modo que $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, y una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = b$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(a) = c$, para algunos $b, c \in X$ con $b \neq c$. Por los lemas 1.1.12 y 1.1.14, X es ULAC y por tanto, existe una sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de arcos en X tal que α_k une x_k y a para cada $k \in \mathbb{N}$, y

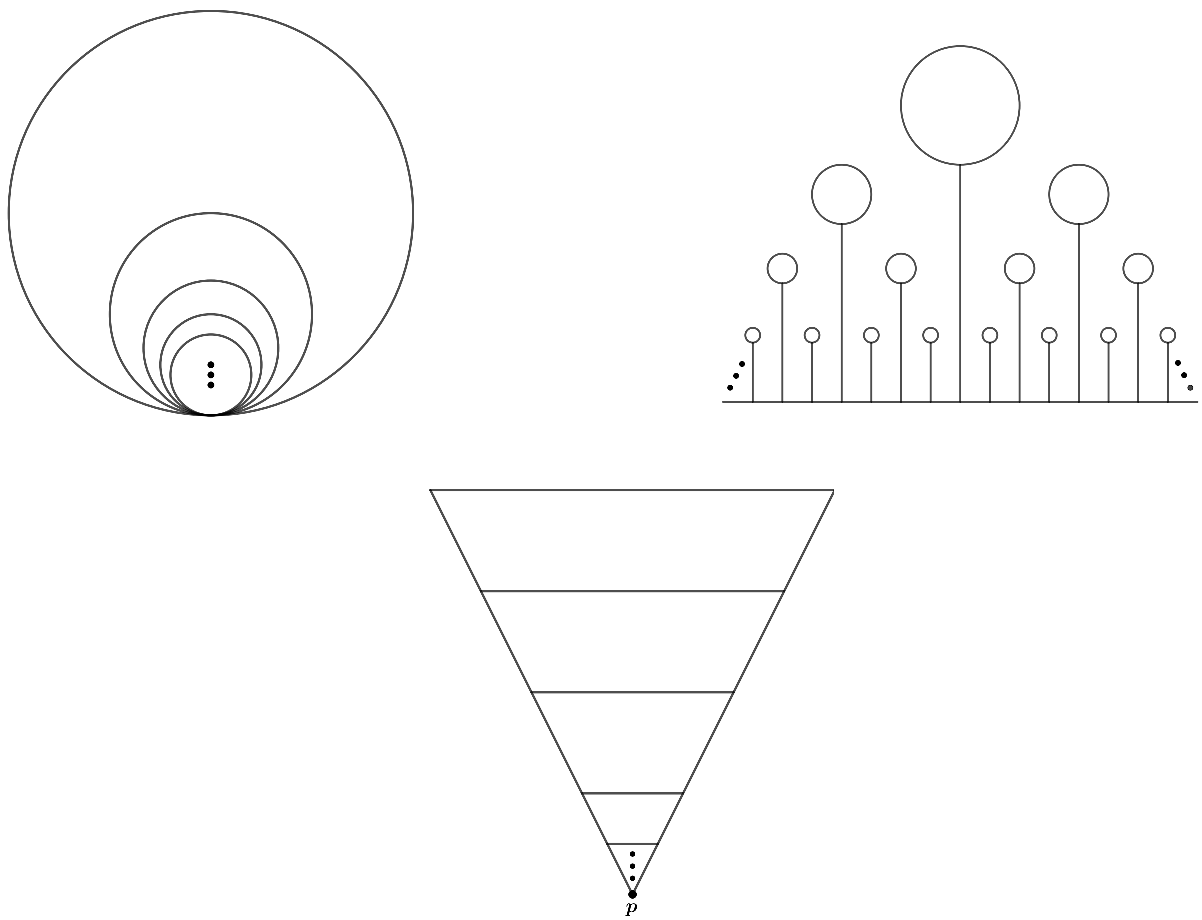
$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diám}(\alpha_k) = 0. \tag{4.0.1}$$

Note que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(\alpha_k) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ y $f^{n_k}(\alpha_k) \cap B(y,\varepsilon) \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$. Luego, por el Lema 4.9, existen un arco α en X y una subsucesión $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\alpha \subseteq f^{n_{k_j}}(\alpha_{k_j})$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Ahora, dado $p \in \alpha$, existe $z_j \in \alpha_{k_j}$ tal que $f^{n_{k_j}}(z_j) = p$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Por (4.0.1) se sigue que $\lim_{j\to\infty} z_j = a$, y en consecuencia, $p \in \Omega(a,f)$. De esto,

$\alpha \subseteq \Omega(a, f)$, lo cual contradice que $\Omega(a, f)$ sea totalmente disconexo. Así, concluimos que f es equicontinua en a. □

Figura 9.

Continuos regulares



5. Continuos atriódicos

En este capítulo consideraremos algunos continuos atriódicos. Para esto, daremos la definición de dicho concepto y presentaremos algunos ejemplos bastante conocidos de estos continuos. Nos interesará un caso particular de continuos atriódicos y hereditariamente descomponibles, en los cuales veremos que un punto es recurrente si, y solo si, es un punto fijo de la función bajo consideración. Posteriormente, usaremos este hecho junto con otros resultados vistos antes para ver equivalencias entre ciertas propiedades dinámicas en esta clase de continuos.

A continuación enunciamos la definición de n-odo, la cual generaliza el concepto de n-odo simple (unión de n arcos con un único punto en común para todos).

Definición 5.1. Sea $n \geq 2$. Un continuo X es un n-odo si existe un subcontinuo Y de X tal que $X \setminus Y = \cup_{i=1}^{n} E_i$, donde $E_1, \ldots, E_n$ son subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos de X.

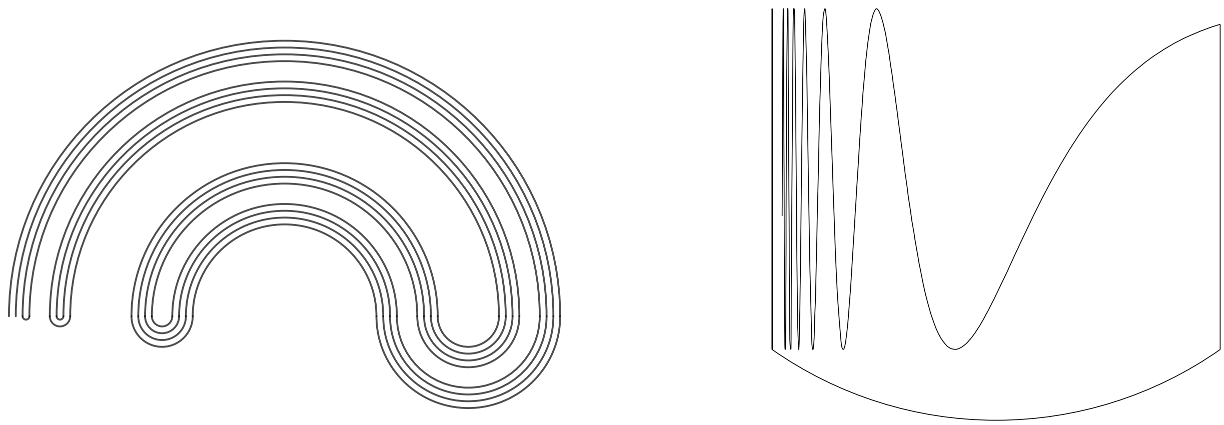
Basados en la definición anterior, enunciamos ahora lo que se entiende por continuo atriódico.

Definición 5.2. Un continuo X es llamado atriódico si no contiene triodos.

Como ejemplos de continuos atriódicos podemos considerar la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 2.3 o el intervalo $[0,1]$. También el continuo de Knaster, el cual además es un continuo indescomponible, y el círculo de Varsovia, obtenido al añadir un arco a la curva senoidal del topólogo, son ejemplos en esta clase de continuos. En la Figura 10 ilustramos estos últimos dos continuos. Para más detalles sobre los mismos vea (Kuratowski, §48, V, p. 204) y (Nadler, Ejemplo 1.6, p. 5).

Figura 10.

Continuo de Knaster y Círculo de Varsovia



En el siguiente lema mostraremos que si todo punto es recurrente, entonces los únicos puntos cuya imagen bajo una función f pertenece al conjunto $\omega(x,f)$ son exactamente los que pertenecen a este conjunto omega límite.

Lema 5.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces $f^{-1}(\omega(x,f)) = \omega(x,f)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.3, si $y \in \omega(x,f)$, entonces $f(y) \in f(\omega(x,f)) = \omega(x,f)$; esto es, $y \in f^{-1}(\omega(x,f))$. Ahora, si $z \in f^{-1}(\omega(x,f))$, entonces $f(z) \in \omega(x,f)$ y por tanto, dado que $\omega(x,f)$ es un conjunto cerrado e invariante, $\omega(f(z),f) \subseteq \omega(x,f)$. Así, por la Proposición 1.2.3 y el hecho de que $z \in \mathrm{Rec}(f)$, concluimos que $z \in \omega(z,f) = \omega(f(z),f) \subseteq \omega(x,f)$. □

Observe que la hipótesis en el Lema 5.3 de que el punto x sea recurrente no se puede eliminar, pues si consideramos la función tienda $T\colon [0,1]\to[0,1]$ y el punto $x=\frac{1}{3}$, tenemos que $x\notin \mathrm{Rec}(T)$ y $\omega(x,T)=\{\frac{2}{3}\}\subsetneq\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}=T^{-1}(\omega(x,T))$. También, la función $f\colon [0,1]\to[0,1]$, dada por $f(x)=x^2$, muestra que el recíproco del Lema 5.3 no es cierto.

La demostración del siguiente lema puede verse en (Erdős and Stone, Teorema I). En este veremos que el conjunto de puntos recurrentes de una función f es igual al conjunto de puntos recurrentes de cualquiera de sus iteradas f^n, con $n\in\mathbb{N}$.

Lema 5.4. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $f\colon X\to X$ una función continua. Entonces, $x\in\mathrm{Rec}(f)$ si, y solo si, $x\in\mathrm{Rec}(f^n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Claramente, si $x\in\mathrm{Rec}(f^n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $x\in\mathrm{Rec}(f)$. Ahora, supongamos que $x\in\mathrm{Rec}(f)$ y sea $n\in\mathbb{N}$. Entonces, existe una sucesión de números naturales estrictamente creciente $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x)=x$. Considerando una subsucesión de ser necesario, podemos suponer, usando el algoritmo de la división, que existe $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que para cada $k\in\mathbb{N}$ existe $q_k\in\mathbb{N}$ de modo que $m_k=nq_k+r$. Supongamos que $r\neq 0$, pues si $r=0$ entonces inmediatamente se sigue que $x\in\mathrm{Rec}(f^n)$. Sea $\varepsilon>0$ y hallemos $M\in\mathbb{N}$ tal que $d(f^{Mn}(x),x)<\varepsilon$. Como $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x)=x$, existe $k_1\in\mathbb{N}$ tal que $f^{m_{k_1}}(x)\in V_0=B(x,\varepsilon)$. Ahora, por la continuidad de $f^{m_{k_1}}$, podemos escoger una vecindad V_1 de x de forma que $V_1\subseteq V_0$ y $f^{m_{k_1}}(V_1)\subseteq V_0$. Nuevamente, por el hecho de que $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x)=x$, podemos hallar $k_2\in\mathbb{N}$ tal que $m_{k_2}>m_{k_1}$ y $f^{m_{k_2}}(x)\in V_1$. Por la continuidad de $f^{m_{k_2}}$, existe una vecindad V_2 de x tal que $V_2\subseteq V_1$ y $f^{m_{k_2}}(V_2)\subseteq V_1$. Continuando de esta forma, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, obtenemos $m_{k_i}>m_{k_{i-1}}$ y una vecindad V_i de x tal que $V_i\subseteq V_{i-1}$ y $f^{m_{k_i}}(V_i)\subseteq V_{i-1}$. Así, tenemos que $f^{m_{k_1}+m_{k_2}+\cdots+m_{k_n}}(x)=f^{n\left(q_{k_1}+\cdots+q_{k_n}+r\right)}(x)\in V_0=B(x,\varepsilon)$ y por tanto, tomando $M = q_{k_1} + \cdots + q_{k_n} + r$, se cumple que $d(f^{Mn}(x), x) < \varepsilon$. Como ε fue arbitrario, concluimos que $x \in \mathrm{Rec}(f^n)$. $\square$

Usando el teorema del valor intermedio, o nociones de conexidad, se puede probar de forma sencilla el siguiente lema.

Lema 5.5. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $a < f(a)$ y $f(b) < b$, o, $a > f(a)$ y $b < f(b)$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.*

El siguiente lema relacionado con continuos hereditariamente descomponibles nos será útil en la demostración de la Proposición 5.7.

Lema 5.6. *Sea X un continuo hereditariamente descomponible. Si $X \setminus Z$ es conexo para todo subcontinuo Z de X, entonces existen A_1, A_2 y A_3 subcontinuos de X tales que:*

- *$X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$;*
- *$A_i \cup A_j \neq X$ para cualesquiera $i, j \in \{1,2,3\}$.*

Demostración. Como X es descomponible, existe un subcontinuo propio A_1 tal que $\mathrm{Int}_X(A_1) \neq \emptyset$. Por hipótesis, $X \setminus A_1$ es conexo y en consecuencia, $B = \overline{X \setminus A_1}$ es un continuo. Dado que X es hereditariamente descomponible, sabemos que existen subcontinuos propios, A_2 y A_3, de B tales que $B = A_2 \cup A_3$. Es claro que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. También, puesto que $X \setminus B \neq \emptyset$, $A_2 \cup A_3 \neq X$. Verifiquemos que $A_1 \cup A_2 \neq X$. En efecto, si $X = A_1 \cup A_2$, entonces $X \setminus A_1 = A_2 \setminus A_1 \subseteq A_2$ y por tanto $B = \overline{X \setminus A_1} \subseteq A_2$. Esto implica que $B = A_2$, lo cual contradice el hecho de que $A_2 \subsetneq B$. De forma análoga se comprueba que $A_1 \cup A_3 \neq X$. $\square$

En el siguiente resultado vemos que las condiciones de ser punto recurrente y ser punto fijo son equivalentes al considerar una clase particular de continuos hereditariamente descomponibles y atriódicos.

Proposición 5.7. *Sean X un continuo hereditariamente descomponible y atriódico y $f\colon X \to X$ una función continua tales que existe una función continua e inyectiva $l\colon [0,\infty) \to X$ de modo que $l[0,\infty)$ es una arcocomponente de X y $\overline{l[0,\infty)} = X$. Si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces $X = \mathrm{Fix}(f)$.*

Demostración. Durante la demostración, $[a,b]$ denotará el arco contenido en $l[0,\infty)$ y con puntos extremos a y b. Además, consideraremos el orden $\leq$ sobre $l[0,\infty)$ dado por $x \leq y$ si, y solo si, $[l(0),x] \subseteq [l(0),y]$. Iniciaremos mostrando que $l[0,\infty)$ es un conjunto invariante y además, $\mathrm{Fix}(f) \cap l[0,\infty) \neq \emptyset$.

Afirmación 5.8. $f(l[0,\infty)) \subseteq l[0,\infty)$.

Probemos la afirmación. Supongamos por contradicción que $f(l[0,\infty)) \nsubseteq l[0,\infty)$. Entonces, siendo $l[0,\infty)$ una arcocomponente y $f(l[0,\infty))$ un subconjunto arcoconexo de X, se sigue que $l[0,\infty) \cap f(l[0,\infty)) = \emptyset$. Por la continuidad de f, tenemos que $X = f(X) \subseteq f(\overline{l[0,\infty)}) \subseteq \overline{f(l[0,\infty))}$ y en consecuencia, $M = f(l[0,\infty))$ es un subconjunto arcoconexo y denso de X. Además, para cada subcontinuo C de X se tiene que $X \setminus C$ es conexo. En efecto, si existiesen un subcontinuo C de X y abiertos disjuntos no vacíos U y V de X tales que $X \setminus C = U \cup V$, entonces, por la densidad de los conjuntos M y $l[0,\infty)$, existen $a \in U \cap l[0,\infty)$, $b \in V \cap l[0,\infty)$, $c \in U \cap M$ y $d \in V \cap M$. Así, tomando arcos $\alpha \subseteq l[0,\infty)$ y $\beta \subseteq M$ tales que $\{a,b\} \subseteq \alpha$ y $\{c,d\} \subseteq \beta$, se tiene que $C \cup \alpha \cup \beta$ es un triodo, llegando a una contradicción pues X es atriódico.

Por lo anterior, podemos hallar subcontinuos propios A_1, A_2 y A_3 de X que satisfacen las propiedades en el Lema 5.6. Por la densidad de $l[0,\infty)$, existen $a_1 \in A_1 \setminus (A_2 \cup A_3)$, $a_2 \in A_2 \setminus (A_1 \cup A_3)$, $a_3 \in A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ y un arco $\alpha \subseteq l[0,\infty)$ que contenga a_1, a_2 y a_3 y cuyos puntos extremos son dos de estos tres puntos. Supongamos por ejemplo que a_1 y a_2 son los puntos extremos de dicho arco α. Similarmente, usando la densidad de M, podemos escoger $b_1 \in A_1 \setminus (A_2 \cup A_3 \cup \{a_1\})$, $b_3 \in A_3 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \{a_3\})$ y un arco $\beta \subseteq M$ con puntos extremos b_1 y b_3. Note que $A_3 \cup \alpha \cup \beta$ es un triodo, lo cual contradice que X sea atriódico. Con esto finalizamos la prueba de la Afirmación 5.8.

Afirmación 5.9. $\mathrm{Fix}(f) \cap l[0,\infty) \neq \emptyset$.

Supongamos que $\mathrm{Fix}(f) \cap l[0,\infty) = \emptyset$. Con lo que probaremos en los siguientes 4 incisos llegaremos a una contradicción.

i) $f(z) > z$ para cada $z \in l[0,\infty)$.

Claramente, $f(l(0)) > l(0)$. Si existiese $s > 0$ tal que $f(l(s)) < l(s)$, entonces el Lema 5.5 implicaría que $\mathrm{Fix}(f) \cap [l(0), l(s)] \neq \emptyset$, lo cual no es posible pues $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.

ii) Para cada $p, q \in l[0,\infty)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(p) > q$.

Suponga lo contrario. Entonces, existen $p, q \in l[0,\infty)$ tales que $f^m(p) \in [l(0), q]$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Así, el inciso **i)** implica que la sucesión $(f^m(p))_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada. Luego,

$\lim_{m\to\infty} f^m(p) = y$, para algún $y \in [l(0),q]$ y de esto, $f(y) = \lim_{m\to\infty} f^{m+1}(y) = y$, y se contradice que $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.

iii) Para cada $s > 0$, $l[0,\infty) \subseteq \overline{f(l[s,\infty))}$ y por tanto, $f(l[s,\infty))$ es denso en X.

Sean $s,t > 0$ y probemos que $l(t) \in \overline{f(l[s,\infty))}$. Por **i)**, tenemos que $f^n(l[s,\infty)) \subseteq f(l[s,\infty))$ para cada $n \geq 2$ y además, por **ii)**, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(l(t)) > l(s)$. Dado que $X = \mathrm{Rec}(f)$, $l(t) \in \omega(l(t), f) = \omega(f^k(l(t)), f)$ y por tanto, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(f^k(l(t))) = l(t)$. Note que $f^{n_j}(f^k(l(t))) \in f(l[s,\infty))$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y así, $l(t) \in \overline{f(l[s,\infty))}$.

iv) Por último, veamos que X contiene un triodo.

Como X es descomponible, existe C subcontinuo propio de X tal que $\mathrm{Int}_X(C) \neq \emptyset$. Sean $a \in \mathrm{Int}_X(C)$ y $b \in X \setminus C$. Escojamos abierto U y V de X tales que $a \in U \subseteq C$, $b \in V$ y $\overline{V} \cap C = \emptyset$. Como $X = \overline{l[0,\infty)}$, existe $t_1 \in [0,\infty)$ tal que $l(t_1) \in U$. Por **ii)** y **iii)**, podemos hallar $t_2 > t_1$ tal que $f(l(t_2)) \in V$. Por **i)**, **ii)** y el hecho de que $l(t_1) \in \mathrm{Rec}(f)$, podemos escoger un $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_1}(l(t_1)) > f(l(t_2))$ y $f^{m_1}(l(t_1)) \in U$. De la misma forma, los ítems **i)** y **ii)** y el hecho de que $X = \mathrm{Rec}(f)$ implican que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_2+1}(l(t_2)) > f^{m_1}(l(t_1))$ y $f^{m_2+1}(l(t_2)) \in V$. Con el mismo argumento hallamos $m_3 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_3+m_1}(l(t_1)) > f^{m_2+1}(l(t_2))$ y $f^{m_3+m_1}(l(t_1)) \in U$. Finalmente, tomamos $m_4 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_4+m_2+1}(l(t_2)) > f^{m_3+m_1}(l(t_1))$ y $f^{m_4+m_2+1}(l(t_2)) \in V$.

Note que $C \cup [l(t_1), f(l(t_2))] \cup \left[f^{m_1}(l(t_1)), f^{m_2+1}(l(t_2))\right] \cup \left[f^{m_3+m_1}(l(t_1)), f^{m_4+m_2+1}(l(t_2))\right]$ es un triodo, lo cual contradice que X sea atriódico. Esto completa la demostración de la Afirmación 5.9.

Ahora, supongamos que $l[0,\infty) \setminus \mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$. Veremos que en esta situación, X contiene un subcontinuo indescomponible, llegando así a algo absurdo.

Afirmación 5.10. $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty)$.

Por la Afirmación 5.8, es claro que $\mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty) \subseteq \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$. Ahora, si suponemos que existe $t \in [0,\infty)$ tal que $z = l(t) \in \mathrm{Per}_k(f)$ para algún $k \geq 3$, entonces el hecho de que $f(l[0,\infty)) \subseteq l[0,\infty)$ y de que X sea atriódico, implica que podemos formar un arco en $l[0,\infty)$ de la forma $[f^l(z), f^m(z)]$ con $l,m \in \{0,1,\dots,k-1\}$ y tal que $\mathscr{O}(z,f) \subseteq [f^l(z), f^m(z)]$. Nótese que $f([f^l(z), f^m(z)]) \subseteq [f^l(z), f^m(z)]$; en efecto, sean $\tilde{l}, \tilde{m} \in \{0,1,\dots,k-1\}$ tales que $f(f^{\tilde{l}}(z)) = f^l(z)$ y $f(f^{\tilde{m}}(z)) = f^m(z)$, y suponga que existe $p \in [f^l(z), f^m(z)]$ tal que $f(p) \notin [f^l(z), f^m(z)]$. Entonces, $[f^l(z), f^m(z)] \subseteq [f(p), f^m(z)]$ ó $[f^l(z), f^m(z)] \subseteq [f^l(z), f(p)]$. Supongamos que $[f^l(z), f^m(z)] \subseteq [f(p), f^m(z)]$. En este caso, se tiene que $\mathscr{O}(z,f) \subseteq [f^l(z), f^m(z)] \subseteq f([p, f^{\tilde{m}}(z)])$ y además, $|[p, f^{\tilde{m}}(z)] \cap \mathscr{O}(z,f)| \leq k-1$, lo cual implica que existe $q \in [p, f^{\tilde{m}}(z)] \setminus \mathscr{O}(z,f)$ tal que $f(q) \in \mathscr{O}(z,f) = \omega(z,f)$, contradiciendo el Lema 5.3. Similarmente, para el caso en que $[f^l(z), f^m(z)] \subseteq [f^l(z), f(p)]$ se llega a una contradicción. Así, $f([f^l(z), f^m(z)]) \subseteq [f^l(z), f^m(z)]$. De esto, la función $g = f|_{[f^l(z), f^m(z)]} \colon [f^l(z), f^m(z)] \to [f^l(z), f^m(z)]$ satisface que $\mathrm{Rec}(g) = [f^l(z), f^m(z)]$ y, por el Lema 2.33, se concluye que $[f^l(z), f^m(z)] = \mathrm{Fix}(g^2) = \mathrm{Fix}(f^2) \cap [f^l(z), f^m(z)]$, llegando a una contradicción, pues $z \in \mathrm{Per}_k(f)$ y $k \geq 3$. Esto completa la prueba que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty)$.

Afirmación 5.11. $|\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})| = 1$ *ó* $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$ *es arcoconexo y además, para cada* $p,q \in \mathrm{Per}_2(f|_{l[0,\infty)})$ *y* $r \in \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$*,* $r \in [p,f(p)]$ *y* $[p,f(p)] \subseteq [q,f(q)]$ *ó* $[q,f(q)] \subseteq [p,f(p)]$.

Supongamos que $|\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})| > 1$ y veamos que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$ es arcoconexo. Por la Afirmación 5.8 sabemos que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty)$. Sean $z_1, z_2 \in \mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty)$. Observe que $f^2([z_1,z_2]) \subseteq [z_1,z_2]$. En efecto, si existiese $x \in (z_1,z_2)$ tal que $f^2(x) \notin [z_1,z_2]$, entonces $[z_1,z_2] \subseteq [f^2(x),z_2]$ ó $[z_1,z_2] \subseteq [z_1,f^2(x)]$. En el primer caso tendríamos que $[z_1,z_2] \subseteq f^2([x,z_2])$ y por tanto existe $z_3 \in [x,z_2]$ con $z_3 \neq z_1$ tal que $f^2(z_3) = z_1$, lo cual contradice el hecho de que $f^{-1}(\omega(z_1,f)) = \omega(z_1,f)$ (ver Lema 5.3). De la misma forma se llega a una contradicción en el caso en que $[z_1,z_2] \subseteq [z_1,f^2(x)]$. Así, concluimos que $f^2([z_1,z_2]) \subseteq [z_1,z_2]$. Por tanto, por el Lema 5.4, $[z_1,z_2] = \mathrm{Rec}(f^2|_{[z_1,z_2]})$, y por el Lema 2.33, la Proposición 4.1 y el hecho de que $z_1,z_2 \in \mathrm{Fix}(f^2|_{[z_1,z_2]})$, se sigue que $[z_1,z_2] \subseteq \mathrm{Fix}(f^2)$. Así, $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty)$ es arcoconexo.

Ahora, sean $p,q \in \mathrm{Per}_2(f|_{l[0,\infty)})$. Supongamos que $[p,f(p)] \nsubseteq [q,f(q)]$ y $[q,f(q)] \nsubseteq [p,f(p)]$, y consideremos por ejemplo el caso en que $p < f(q) < f(p) < q$. Entonces, $\{f(p),f(q)\} \subseteq [p,q] \subseteq f([f(p),f(q)])$, lo cual implica que existen $z_1 \neq p$ y $z_2 \neq q$ tales que $f(z_1) = f(p)$ y $f(z_2) = f(q)$, contradiciendo el hecho de que $f^{-1}(\{p,f(p)\}) = \{p,f(p)\}$ y $f^{-1}(\{q,f(q)\}) = \{q,f(q)\}$ (ver Lema 5.3). De forma análoga se llega a una contradicción en los otros casos en que $[p,f(p)] \nsubseteq [q,f(q)]$ y $[q,f(q)] \nsubseteq [p,f(p)]$. Así, $[p,f(p)] \subseteq [q,f(q)]$ ó $[q,f(q)] \subseteq [p,f(p)]$ para cada $p,q \in \mathrm{Per}_2(f|_{l[0,\infty)})$.

Sean $p \in \mathrm{Per}_2(f|_{l[0,\infty)})$ y $r \in \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$. Suponga que $r \notin [p, f(p)]$ y, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso en que $[p, f(p)] \subsetneq [r, f(p)]$. Entonces, $p \in [r, f(p)] \subseteq f([r, p])$, y esto implicaría que existe $z \in [r, p]$ tal que $f(z) = p$, lo cual no es posible pues $z \neq f(p)$ y $f^{-1}(\{p, f(p)\}) = \{p, f(p)\}$. Así queda demostrada la Afirmación 5.11.

Afirmación 5.12. *Si* $|\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})| > 1$, *entonces* $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$ *es un arco y además,* $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$.

Veamos primero que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$. Por la Afirmación 5.11 sabemos que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2) \cap l[0,\infty)$. Supongamos que $\mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) \setminus \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) \neq \emptyset$. Por la hipótesis inicial, existe $\lambda_0 \in [0,\infty)$ tal que $w_0 = l(\lambda_0) \in l[0,\infty) \setminus \mathrm{Per}(f)$. Sea $z \in \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)})$ tal que $[w_0, z] \cap \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \{z\}$. Note que, por la Afirmación 5.11 y el hecho de que $\mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) \setminus \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) \neq \emptyset$, $z \in \mathrm{Per}_2(f|_{l[0,\infty)})$. En esta situación, se tiene que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) = [z, f(z)]$. Ya sabemos que $[z, f(z)] \subseteq \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)})$ (Afirmación 5.11), y si existiese $q \in \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) \setminus [z, f(z)]$, entonces la Afirmación 5.11 implica que $[z, f(z)] \subseteq [q, f(q)]$, y por tanto $q \in [w_0, z]$ ó $q \in [w_0, f(z)]$, lo cual contradice la forma en que fue escogido z. De esto, $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) = [z, f(z)]$.

Supongamos que $z \leq f(z)$ (sino, se pueden cambiar los papeles de z y $f(z)$); esto es, $[l(0), z] \subseteq [l(0), f(z)]$. Probemos que $z = l(0)$. Si $z > l(0)$, esto implica que $f^2([l(0), z]) \subseteq [l(0), z]$. En efecto, note que $f^2(p) \notin [z, f(z)]$ para cada $p \in [l(0), z)$, ya que de lo contrario se contradeciría la recurrencia de p, pues $p \notin \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)})$ y $[z, f(z)] = \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)})$. También, si existiese $q \in [l(0), z]$ tal que $f^2(q) > f(z)$, entonces $[z, f(z)] \subseteq f^2([l(0), q])$ y por tanto, si tomamos $a \in (z, f(z))$, existe $b \in [l(0), q]$ tal que $f^2(b) = a$ y esto implica que $f^2(f^2(b)) = f^2(b)$, lo cual contradice el hecho de que $b \in \omega(b, f) = \omega(f^2(b), f)$, ya que $b \notin \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$. Con lo anterior concluimos que $f^2([l(0), z]) \subseteq [l(0), z]$. Luego, por el Lema 5.4, $[l(0), z] = \mathrm{Rec}(f^2|_{[l(0),z]})$, y por el Lema 2.33 se sigue que $[l(0), z] \subseteq \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$, lo cual es absurdo pues $[l(0), z] \cap \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) = \{z\}$. Por tanto $l(0) = z$ y $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)}) = [l(0), f(l(0))]$. Note que si $y > f(l(0))$, entonces $f(y) \notin [l(0), f(l(0))]$, pues sino se contradice la recurrencia de y. En consecuencia, $[l(0), f(l(0))] \subseteq f([f(l(0)), y])$, y esto implica que existe $x \in (f(l(0)), y]$ tal que $f(x) \in [l(0), f(l(0))] = \mathrm{Fix}(f^2|_{l[0,\infty)})$, contradiciendo la recurrencia de x. Por tanto, debe cumplirse que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$.

Probemos ahora que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$ es un arco. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $w_0 > l(0)$ (sino, basta tomar $w' > l(0)$ con $w' \notin \mathrm{Fix}(f)$, lo cual es posible, pues de lo contrario se tendría que $l((0,\infty)) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$ y, siendo $\mathrm{Fix}(f)$ compacto, esto implica que $l([0.\infty)) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$. Absurdo). Como $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$ es arcoconexo y $w_0 \notin \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$, se tiene que $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) \subseteq \{p \in l[0,\infty) : p < w_0\}$ ó $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) \subseteq \{p \in l[0,\infty) : p > w_0\}$. Probemos que debe cumplirse el primer caso. Supongamos que $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) \subseteq \{p \in l[0,\infty) : p > w_0\}$. Sean $p_0 = \mathrm{mín}\{p \in l[0,\infty) : p > w_0\}$ y $q_0 > p_0$ con $q_0 \in \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$. Entonces, $f^2([l(0), p_0]) \subseteq [l(0), p_0]$, pues si $z \in [l(0), p_0)$, tenemos que $f^2(z) \notin [p_0, q_0]$ ya que $[p_0, q_0] \subseteq \mathrm{Fix}(|_{l[0,\infty)})$ y $z \in \omega(z, f) = \omega(f^2(z), f)$. También, si existiese $z \in [l(0), p_0]$ tal que $f^2(z) > q_0$, entonces $[p_0, q_0] \subseteq$

$f^2([l(0),z])$, lo cual implica que existe $y \in [l(0),z)$ tal que $f^2(y) \in [p_0,q_0] \subseteq \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$, lo cual no es posible pues $y \in \omega(y,f) = \omega(f^2(y),f)$. Así, $f^2([l(0),p_0]) \subseteq [l(0),p_0]$ y usando los lemas 2.33 y 5.4 se sigue que $[l(0),p_0] \subseteq \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$, lo cual es absurdo. Por tanto, $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) \subseteq \{p \in l[0,\infty) : p < w_0\}$ y en consecuencia, existen $s_1,t_1 \in [0,\infty)$ tales que $s_1 < t_1$ y $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) = [l(s_1),l(t_1)]$. El mismo argumento usado en la primera parte de la demostración muestra que $l(s_1) = l(0)$ y por tanto $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) = l([0,t_1])$. Esto demuestra la Afirmación 5.12.

Afirmación 5.13. *Para cada $z \in l[0,\infty) \setminus \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})$ se tiene que $f(z) > z$; esto es, $[l(0),z] \subsetneq [l(0),f(z)]$.*

Para esto, consideremos el caso en que $|\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})| = 1$ y el caso en que $|\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})| > 1$. Supongamos primero que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \{x_0\} = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$. Note que $f([l(0),x_0]) \nsubseteq [l(0),x_0]$, pues de lo contrario el Lema 2.33 implicaría que $[l(0),x_0] \subseteq \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) = \{x_0\}$, lo cual no puede ocurrir. Así, existe $p_0 \in [l(0),x_0)$ tal que $f(p_0) > x_0$. Ahora, dado $z \in [l(0),x_0] \setminus \{p_0,x_0\}$, se tiene que $f(z) \notin [l(0),x_0]$, pues en caso contrario se cumple que $x_0 \in f([z,p_0])$, y de esto existe $q \in [z,p_0]$ tal que $f(q) = x_0$, y esto contradice que $f^{-1}(\{x_0\}) = \{x_0\}$ (ver Lema 5.3) pues $q \neq x_0$. De lo anterior concluimos que, para cada $z \in [l(0),x_0)$, $f(z) \notin [l(0),x_0)$ y por ende, $z < f(z)$. Sea $b_0 \in [l(0),x_0)$ tal que $f([l(0),x_0]) = [x_0,f(b_0)]$. Observe que $f([l(0),f(b_0)]) \nsubseteq [l(0),f(b_0)]$, pues de lo contrario, el Lema 2.33 implicaría que $[l(0),f(b_0)] \subseteq \mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$, lo cual no es posible. Así, existe $b_1 \in [l(0),f(b_0)]$ tal que $f(b_1) > f(b_0)$. Note que $b_1 \notin [l(0),x_0]$ pues $f([l(0),x_0]) \subseteq [l(0),f(b_0)]$; esto es, $b_1 \in (x_0,f(b_0)]$. De esto se deduce que si $z > x_0$, entonces $f(z) > x_0$. En efecto, si se cumple que $f(z) \leq x_0$ para algún $z > x_0$, entonces $x_0 \in f([z, b_1])$, lo cual contradice que $f^{-1}(\{x_0\}) = \{x_0\}$ (ver Lema 5.3), pues $[z, b_1] \cap \{x_0\} = \emptyset$. Probemos ahora que no puede ocurrir que $f(z) \leq z$. Por el Lema 2.33 sabemos que no puede darse que $f([x_0, z]) \subseteq [x_0, z]$. Así, la conclusión dada antes ($f(p) > x_0$ para cada $p > x_0$) implica que $[x_0, z] \subseteq f([x_0, z]) = [x_0, f(q_3)]$ para algún $q_3 \in [x_0, z]$. Suponga que $f(z) \leq z$. Claramente, $f(z) \neq z$ pues $z \notin \mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$. Ahora, si consideramos la función $g = f|_{[z,q_3]}$ y los conjuntos $A_1 = \{y \in [z, q_3] : g(y) \geq y]\}$ y $A_2 = \{y \in [z, q_3] : g(y) \leq y]\}$, se tiene que A_1 y A_2 son conjuntos cerrados, $[z, q_3] = A_1 \cup A_2$, $q_3 \in A_1$ y $z \in A_2$. Luego, por la conexidad de $[z, q_3]$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ y por tanto existe $y \in [z, q_3]$ tal que $g(y) = y$; es decir, $f(y) = y$, pero esto es una contradicción pues $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)}) = \{x_0\} \nsubseteq [z, q_3]$. Con lo anterior, concluimos que $f(z) > z$ para cada $z \neq x_0$.

Consideremos ahora el caso en que $|\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)})| > 1$. Por lo concluido en la Afirmación 5.12 sabemos que existe $t_1 \in [0, \infty)$ tal que $\mathrm{Per}(f|_{l[0,\infty)}) = \mathrm{Fix}(|_{l[0,\infty)}) = [l(0), l(t_1)]$. Sea $z \notin [l(0), l(t_1)]$. Entonces $z > l(t_1)$ y además note que $f(q) \notin [l(0), l(t_1)]$ para cada $q > l(t_1)$, pues sino se contradice la recurrencia de q. También, $f([l(t_1), z]) \nsubseteq [l(t_1), z]$ y por tanto existe $q_4 \in [l(t_1), z]$ tal que $[l(t_1), z] \subseteq f([l(t_1), z]) = [l(t_1), f(q_4)]$. Suponga que $f(z) < z$. Entonces, considerando la función $h = f|_{[z,q_4]}$ y los conjuntos $B_1 = \{y \in [z, q_4] : h(y) \geq y\}$ y $B_2 = \{y \in [z, q_4] : h(y) \leq y\}$ se tiene que B_1 y B_2 son cerrados, $[z, q_4] = B_1 \cup B_2$, $q_4 \in B_1$ y $z \in B_2$. De esto, por ser $[z, q_4]$ conexo, $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ y por ende existe $y \in [z, q_4]$ tal que $h(y) = f(y) = y$; sin embargo, esto es absurdo pues $\mathrm{Fix}(f|_{l[0,\infty)})] \cap [z, q_4] = \emptyset$. Así, $f(z) > z$ para cada $z \notin [l(0), l(t_1)]$. Así finalizamos la demostración de la Afirmación 5.13.

Afirmación 5.14. *Sea $\lambda_1 \in [0,\infty)$ tal que $l(\lambda_1) = \text{máx}\{p \in l[0,\infty) : p \in \text{Fix}(f)\}$. Entonces, para cada $z > l(\lambda_1)$ se tiene que la sucesión $(f^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada; esto es, para cada $\alpha \in [0,\infty)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(z) > l(\alpha)$.*

Por la Afirmación 5.12 sabemos que dicho $\lambda_1 \in [0,\infty)$ existe. Sea $z > l(\lambda_1)$. Entonces, por la Afirmación 5.13, se tiene que $f^{n+1}(z) > f^n(z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si existiese $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f^n(z) \leq l(\alpha)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $l(\alpha) > l(\lambda_1)$ y la sucesión $(f^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en $(l(\lambda_1), l(\alpha)]$, de donde, por la monotonicidad de $(f^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$, existe $p \in (l(\lambda_1), l(\alpha)]$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} f^n(z) = p$ y por tanto, $f(p) = f(\text{lím}_{n\to\infty} f^n(z)) = \text{lím}_{n\to\infty} f^{n+1}(z) = p$. Es decir, $p \in \text{Fix}(f|_{l[0,\infty)})$, lo cual es absurdo.

Afirmación 5.15. *Para cada $t > \lambda_1$, $f(l[t,\infty))$ es denso en $l[\lambda_1,\infty)$.*

Por la Afirmación 5.13 se sigue que $f(l[\lambda_1,\infty)) \subseteq l[\lambda_1,\infty)$ y por tanto $f(l[t,\infty)) \subseteq l[\lambda_1,\infty)$. Veamos ahora que $l(\lambda_1,\infty) \subseteq \overline{f(l[t,\infty))}$. Por la Afirmación 5.13, $f(l[t,\infty)) \subseteq l[t,\infty)$ y de esto, $f^n(l[t,\infty)) \subseteq f(l[t,\infty))$ para cada $n \geq 2$. Sea $s > \lambda_1$. Por la Afirmación 5.14 podemos hallar $m \geq 2$ tal que $f^m(l(s)) > l(t)$; es decir, $f^m(l(s)) \in l[t,\infty)$. Además, puesto que $X = \text{Rec}(f)$, $l(s) \in \omega(l(s), f) = \omega(f^m(l(s)), f)$ y por tanto existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ con $n_k \geq 2$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de modo que $\text{lím}_{k\to\infty} f^{n_k}(f^m(l(s))) = l(s)$. Dado que $f^{n_k}(f^m(l(s))) \in f(l[t,\infty))$ para cada $k \in \mathbb{N}$, concluimos que $l(s) \in \overline{f([t,\infty))}$. Así, $f(l[t,\infty))$ es denso en $l[\lambda_1,\infty)$. Esto demuestra la Afirmación 5.15.

Finalmente, veamos que $C = \overline{l[\lambda_1,\infty)}$ es un subcontinuo indescomponible de X. Por la continuidad de l, es claro que C es un subcontinuo de X. Suponga que existe un subcontinuo propio, L, de C tal que $\mathrm{Int}_C(L) \neq \emptyset$. Sea $s_0 > \lambda_1$ tal que $l(s_0) \in C \setminus L$. Por la Afirmación 5.15 existe $s_1 \geq s_0$ tal que $f(l(s_1)) \in \mathrm{Int}_C(L)$. Usando la Afirmación 5.14 junto con el hecho de que X es normal y $l(s_0) \in \omega(l(s_0), f)$, se sigue que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_1}(l(s_0)) > f(l(s_1))$ y $f^{m_1}(l(s_0)) \notin L$. Nuevamente por la Afirmación 5.15, existe $p_2 > f^{m_1}(l(s_0))$ tal que $p_2 \in \mathrm{Int}_C(L)$, y por la Afirmación 5.14 y el hecho de que $f^{m_1}(l(s_0)) \in \omega(f^{m_1}(l(s_0)), f)$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_2+m_1}(l(s_0)) > p_2$ y $f^{m_2+m_1}(l(s_0)) \notin L$. Sean $a_1 = \mathrm{mín}\{x \in [l(s_0), f(l(s_1))] : x \in L\}$, $a_2 = \mathrm{máx}\{x \in [f(l(s_1)), f^{m_1}(l(s_0))] : x \in L\}$ y $a_3 = \mathrm{máx}\{x \in [p_2, f^{m_2+m_1}(l(s_0))] : x \in L\}$. Note que $T = L \cup [l(s_0), a_1] \cup [a_2, f^{m_1}(l(s_0))] \cup [a_3, f^{m_2+m_1}(l(s_0))]$ es un triodo, lo cual contradice que X sea atriódico. Por tanto, $C = \overline{l[\lambda_1, \infty)}$ es indescomponible.

Así, llegamos a una contradicción, pues X es hereditariamente descomponible. En consecuencia, $l[0,\infty) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$ y por tanto, $X = \overline{l[0,\infty)} \subseteq \mathrm{Fix}(f)$. $\square$

Como corolario de la Proposición 5.7 se deduce el siguiente corolario, con respecto al cual tenemos una pregunta que se presenta después del mismo.

Corolario 5.16. *Sea X un continuo atriódico tal que existe una función continua e inyectiva $l\colon [0,\infty) \to X$ de modo que $l[0,\infty)$ es una arcocomponente de X y $\overline{l[0,\infty)} = X$, y sea $f\colon X \to X$ una función continua. Si $X = \mathrm{Rec}(f)$, entonces:*

a) $X = \mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f)$, *o*

b) *X contiene un subcontinuo indescomponible.*

Por ejemplo, la curva senoidal del topólogo (Ejemplo 2.3), el Círculo de Varsovia, el Continuo de Knaster (Figura 10), o cualquier compactación con residuo atriódico de $(0.1]$ son continuos atriódicos para los cuales existe una función continua e inyectiva $l\colon [0,\infty) \to X$ tal que $l[0,\infty)$ es una arcocomponente densa.

Pregunta 5.17. *Sea X un continuo indescomponible y atriódico tal que existe una función continua e inyectiva $l\colon [0,\infty) \to X$ de forma que $l[0,\infty)$ es denso en X, y sea $f\colon X \to X$ una función continua con $X = \mathrm{Rec}(f)$. ¿Si $l[0,\infty) \cap \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, entonces $X = \mathrm{Fix}(f)$?*

Con lo demostrado en la Proposición 5.7 y usando otras propiedades presentadas en capítulos anteriores, obtenemos las siguientes equivalencias para la clase de continuos hereditariamente descomponibles que hemos estado considerando.

Teorema 5.18. *Sea X un continuo hereditariamente descomponible y atriódico tal que existe una función continua e inyectiva $l\colon [0,\infty) \to X$ de modo que $l[0,\infty)$ es una arcocomponente densa de X, y sea $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Entonces, son equivalentes:*

1) $\omega(x,f) = \Omega(x,f)$ *para cada* $x \in X$*;*

2) ω_f *es continua y* $X = \mathrm{Rec}(f)$*;*

3) $X = \mathrm{Rec}(f)$*;*

4) $X = \mathrm{Fix}(f)$*;*

5) f *es equicontinua.*

Demostración. Por la Proposición 2.30, *1)* implica *2)*. Claramente, *2)* implica *3)*. La Proposición 5.7 nos garantiza que *3)* implica *4)*, y evidentemente *4)* implica *5)*. Finalmente, *5)* implica *1)*, por la Proposición 1.2.10. □

Referencias Bibliográficas

Abdelli, H., Askri, G., and Kedim, I. (2021). Equicontinuity of maps on local dendrites. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 20(3):1–12.

Barwell, A. D. (2010). *ω-Limit Sets of Discrte Dynamical Systems*. PhD thesis, University of Birmingham, UK.

Block, L. S. and Coppel, W. A. (1992). *Dynamics in One Dimension*. Springer-Verlag.

Bruckner, A. and Ceder, J. (1992). Chaos in terms of the map $x \to \omega(x, f)$. *Pac. J. Math.*, 156(1):63–96.

Camargo, J. and Cancino, J. (2020). The ω-limit function on dendrites. *Topology Appl.*, 282:1–11.

Camargo, J., Rincón, M., and Uzcátegui, C. (2019). Equicontinuity of maps on dendrites. *Chaos Solitons Fractals*, 126:1–6.

Camargo, J. and Villamizar-Roa, E. (2020). *Topología General*. Ediciones UIS.

Cancino, J. (2019). Equicontinuidad en dendritas. Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia.

Charatonik, J. J. (1970). On decompositions of λ-dendroids. *Fundam. Math.*, 67:15–30.

Dugundji, J. (1966). *Topology*. Allyn and Bacon.

Erdős, P. and Stone, A. H. (1945). Some remarks on almost periodic transformations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 51:126–130.

Hagopian, C. L. and Manka, R. (2005). Rational irreducible plane continua without the fixed-point property. *Proc. Am. Math. Soc.*, 133(2):617–625.

Illanes, A. and Nadler, S. (1999). *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis.

King, J. and Méndez, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*. UNAM, Facultad de Ciencias.

Kuratowski, K. (1968). *Topology*, volume 2. Academic Press and PWN.

Nadler, S. (2017). *Continuum Theory: An Introduction*. CRC Press.

Thomas, E. S. (1966). *Monotone Decompositions of Irreducible Continua*. Panstwowe Wydawnictwo naukowe.

Whyburn, G. (1942). *Analytic Topology*. American Mathematical Society.