

Prácticas Variacionales en el Aprendizaje de la Variación Constante a partir de Contextos
Financieros en grado Noveno

Lizeth Juliana Fajardo Durán y Thomas Corzo Giraldo

Trabajo de grado para optar al Título de Licenciatura en Matemáticas

Directora

Haided Lised Arciniegas Rueda
Magíster en Educación Matemática

Codirectora

Edith Johanna Mendoza Higuera
Doctora Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A Dios,

mi sustento y roca fuerte, quien me dio la sabiduría
y la disciplina para alcanzar este logro de formarme
como Licenciado en Matemáticas.

A mis padres, Luis Corzo y Vanessa Giraldo,

que me ofrecieron su consejo y amor incondicional.
Gracias por inculcar en mí los valores del esfuerzo y la dedicación.

A mi tía Erika,

por ser una bendición en mi vida. Gracias por
brindarme el respaldo necesario para alcanzar esta
meta. Siempre estaré profundamente agradecido.

A mi novia, Karla Martínez,

por creer en mí, por brindarme tu apoyo
en los momentos difíciles y por celebrar conmigo cada logro.
Gracias por estar siempre a mi lado.

Thomas Corzo Giraldo

A Dios,

Porque siempre ha estado ahí, incluso cuando yo no me daba cuenta.

Todo lo que soy y lo que he logrado también lleva tu nombre.

A mi madre, Deisy Yudith,

Mujer de admirar, luchadora y resiliente,

que tomó las riendas de nuestro hogar con amor y valentía.

Gracias por enseñarme que no hay obstáculo que no se pueda superar.

Este logro también es tuyo.

A la memoria de mi padre, Temis,

quien con su carisma y alegría contagió mi vida.

Siempre vivirás en mis recuerdos más felices.

A mi hermano, Cristian Daniel,

Por ser mi cómplice y mi mayor orgullo.

Gracias porque contigo di mis primeros pasos como maestra.

A mi querido compañero de vida, mi amor de infancia,

tu apoyo incondicional siempre estuvo presente.

Gracias por tu motivación y confianza

Hoy comparto contigo la alegría de este logro.

Lizeth Juliana Fajardo Durán

Agradecimientos

Agradecemos a Dios, en primer lugar, por darnos la fortaleza, la sabiduría y la perseverancia para culminar nuestra formación profesional y permitarnos alcanzar esta importante meta.

A nuestras familias, por su apoyo incondicional, su amor, sacrificio y esfuerzo constante durante este proceso. Gracias por su motivación y sus valiosos consejos que nos impulsaron a no rendirnos y siempre dar lo mejor de nosotros.

Agradecemos a nuestras directoras, Mg. Haided Arciniegas y Dra. Johanna Mendoza, por su tiempo, acompañamiento y por mostrar siempre su disposición para impulsar nuestro aprendizaje. Su conocimiento y experiencia nos brindaron las herramientas necesarias para el desarrollo de este trabajo.

A todos los docentes que nos acompañaron y compartieron generosamente sus conocimientos a lo largo de nuestra formación. En especial, al profesor Luis Ángel Pérez, quien con vocación nos orientó en diversos cursos y dejó en nosotros una huella de lo que significa ser Licenciados en Matemáticas.

A nuestros compañeros de carrera y amigos para toda la vida, por su compañía, apoyo y amistad durante estos años. Gracias por los momentos compartidos, las risas, los desvelos y el respaldo mutuo que hicieron este proceso más grato y enriquecedor.

A nosotros, como compañeros de tesis y amigos desde el inicio de la carrera, porque este logro no habría sido posible sin nuestro compromiso, dedicación y esfuerzo. Gracias por las largas horas de trabajo, las discusiones enriquecedoras y por construir juntos este gran proyecto, culminando una etapa que comenzó con nuestra amistad y hoy se consolida con la satisfacción de haber recorrido este camino juntos.

A los integrantes del semillero de Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática, por sus valiosos aportes y su disposición para este trabajo. Gracias por generar un espacio de reflexión y discusión de ideas que fortalece nuestra formación académica.

A la Universidad Industrial de Santander, por abrirnos las puertas y brindarnos la oportunidad de formarnos como personas críticas y cercanas a la realidad de un país a través de nuestra profesión. Llevaremos con orgullo el nombre de esta *alma mater*.

¡A todos nuestros lectores, muchas gracias!

Contenido

Introducción	1
1. Planteamiento del problema	4
2. Antecedentes	10
2.1. Aspectos legales y normativos sobre la educación financiera	10
2.2. Enseñanza de las matemáticas desde contextos financieros	14
2.3. El Pensamiento Variacional y la función lineal en educación básica y media.....	19
3. Aspectos teóricos y conceptuales	25
3.1. Elementos conceptuales del contexto financiero.....	25
3.2. Pensamiento y Lenguaje Variacional desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.....	27
3.3. Prácticas Variacionales.....	31
3.4. Variación constante desde las prácticas variacionales	34
4. Metodología	38
4.1. Fase 1: Revisión bibliográfica sobre el concepto de función lineal	39
4.2. Fase 2: Planteamiento de la conjetura	40
4.3. Fase 3: Rediseño de la secuencia didáctica	55
4.4. Fase 4: Aplicación y análisis intercalado de la secuencia	56
4.5. Fase 5: Análisis retrospectivos	57
4.5.1. Uso de notebookLM en el análisis de la información	58

5. Resultados.....	60
5.1. Diseño para el estudio de la variación constante en un contexto de presupuesto	60
5.1.1. Ajustes por desarrollo de las PV y significación del contexto	60
5.1.2. Ajuste de redacción y gramática.....	65
5.1.3. Ajustes de recursos	66
5.1.4. Pilotaje y ajustes finales al diseño	69
5.2. Desarrollo de las prácticas variacionales en el estudio de la variación constante.....	72
5.2.1. Práctica variacional de comparación	72
5.2.2. Práctica variacional de seriación	80
5.2.3. Práctica variacional de predicción	88
5.2.4. Práctica variacional de estimación	95
Síntesis sobre la significación de la variación constante desde las PV.	100
5.2.5. Apreciaciones desde la Educación Económica y Financiera.....	101
6. Conclusiones	104
Referencias Bibliográficas.....	106
Apéndice.....	113

Lista de figuras

Figura 1 Resultados por puntuación media prueba PISA 2012	4
Figura 2 Representación gráfica de funciones de costo.....	35
Figura 3 Esquema del experimento de enseñanza	39
Figura 4 Camino metodológico	39
Figura 5 Situación problematizadora en el diseño.....	44
Figura 6 Ofertas de hospedaje momento 2	45
Figura 7 Representación gráfica del costo de hospedajes.....	46
Figura 8 Variación constante desde las prácticas variacionales en un contexto financiero	47
Figura 9 Representación tabular del costo de hospedajes.....	48
Figura 10 Preguntas 7-10 momento 3.....	49
Figura 11 Preguntas 11-13 momento 3.....	50
Figura 12 Situación problematizadora momento 4.....	51
Figura 13 Representación gráfica de hospedajes momento 4.....	52
Figura 14 Preguntas finales del diseño	53
Figura 15 Variación constante desde las prácticas variacionales desde el contexto financiero. .	54
Figura 16 Pregunta 13 agregada en el rediseño.	61
Figura 17 Pregunta 14 agregada en el rediseño.	62
Figura 18 Pregunta 2 agregada en el rediseño.	63
Figura 19 Representación gráfica del momento 4: diseño original.	64
Figura 20 Representación gráfica del momento 4: diseño modificado.	65
Figura 21 Diseño original ajuste de redacción M4	66
Figura 22 Diseño modificado ajuste de redacción M4	66

Figura 23 Representación gráfica ajuste recursos M2	67
Figura 24 Instrucciones diseño original ajuste recursos M2.....	68
Figura 25 Representación gráfica ajuste recursos M3	69
Figura 26 Representación gráfica ajuste pilotaje M1	71
Figura 27 Representación gráfica ajuste pilotaje M2 – P2	71
Figura 28 Representación gráfica ajuste pilotaje M2 – P4	71
Figura 29 Respuesta del E1 – M1	72
Figura 30 Respuesta de E2 – M1	74
Figura 31 Respuesta E4 – M2.....	74
Figura 32 Respuesta E14-M2	75
Figura 33 Respuesta E2 – M2.....	75
Figura 34 Respuesta E3 – M2.....	76
Figura 35 Respuesta E9 – M3.....	77
Figura 36 Respuesta E4 – M4.....	78
Figura 37 Respuesta E11 - M2	80
Figura 38 Respuesta E3 – M2.....	82
Figura 39 Respuesta E10 – M3.....	84
Figura 40 Respuesta E8 – M3.....	85
Figura 41 Respuesta E3 – M3.....	87
Figura 42 Respuesta E20 – M4.....	87
Figura 43 Respuesta E1 – M2.....	90
Figura 44 Respuesta E18 – M4.....	91
Figura 45 Respuesta E15- M4	92

Figura 46 Respuesta E8 – M3.....	93
Figura 47 Respuesta E11 – M4.....	94
Figura 48 Respuesta E8 – M2.....	95
Figura 49 Respuesta E15 – M2.....	97
Figura 50 Respuesta E19 – M4.....	98
Figura 51 Respuesta E2– M4.....	98

Lista de Tablas

Tabla 1. <i>Sugerencias y ajustes realizados al diseño en el pilotaje</i>	70
--	----

Lista de apéndices

Apéndice A. <i>Diseño original</i>	113
Apéndice B. <i>Diseño modificado</i>	127

Resumen

Título: Prácticas Variacionales en el Aprendizaje de la Variación Constante a partir de Contextos Financieros en grado Noveno*

Autores: Lizeth Juliana Fajardo Durán y Thomas Corzo Giraldo**

Palabras Clave: Prácticas Variacionales, Función lineal, Variación constante, Educación financiera, Presupuesto.

Descripción:

En esta investigación se busca describir el desarrollo de las Prácticas Variacionales (PV) de estudiantes de noveno grado al abordar el concepto de función lineal como variación constante en una situación relacionada con el presupuesto y costo de un viaje, ya que, se han evidenciado dificultades en la comprensión del concepto de función lineal debido a su aproximación netamente algorítmica y estática (Grueso y Gonzales, 2016). Por lo cual, se presenta la función como herramienta modeladora de situaciones de variación y cambio, donde dichas situaciones son estudiadas a través de las PV (Caballero, 2018; Arciniegas, 2023), en el marco de un contexto financiero que propicia escenarios útiles para la comprensión del concepto matemático y potencia las habilidades financieras de los estudiantes (Dituri et al., 2019).

El sustento teórico es el desarrollo de las PV según Caballero (2018), en el marco de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) en conjunto con el ámbito conceptual del Presupuesto (MEN, 2022) y sus elementos (Ingresos, Gastos y costos). La metodología refiere a un experimento de enseñanza que incluye la revisión bibliográfica para la formulación de la conjetura de aprendizaje, rediseño de la secuencia de tareas, implementación y análisis de resultados.

Los resultados evidencian que las PV permiten comprender el carácter estable del cambio y el carácter futuro del cambio, y aportaron a la resignificación de la función lineal como variación constante, además de ser herramientas funcionales para describir la actividad matemática del estudiante. Asimismo, al articular el contexto financiero se propició un escenario donde el objeto matemático resultó funcional para la toma de decisiones financieras del estudiante.

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas.

Directora: Haided Lised Arciniegas Rueda. Magister en Educación Matemática.

Codirectora: Edith Johanna Mendoza Higuera. Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa.

Abstract

Title: Variational Practices in the Learning of Constant Variation from Financial Contexts in ninth grade*

Authors: Lizeth Juliana Fajardo Durán y Thomas Corzo Giraldo**

Keywords: Variational Practices, Linear Function, Constant variation, Financial Education, Budget.

Description:

This research aims to describe ninth-grade students' development of Variational Practices (VP) when addressing the concept of the linear function as constant variation within a context related to travel budgeting and costs. This is framed around the documented difficulties in understanding linear functions caused by purely algorithmic and static instructional approaches (Grueso & Gonzales, 2016). Therefore, the function is presented as a modeling tool for situations involving variation and change, which are examined through VP (Caballero, 2018; Arciniegas, 2023) within a financial framework that provides useful scenarios for comprehending mathematical concepts while enhancing students' financial skills (Dituri et al., 2019).

The theoretical foundation relies on the development of VP as proposed by Caballero (2018) within the Variational Thought and Language (*Pensamiento y Lenguaje Variacional* — PyLV) research line, combined with the conceptual domain of Budgeting (MEN, 2022) and its core elements (Income, Expenses, and Costs). The methodology follows a teaching experiment design that includes a literature review to formulate the learning conjecture, task sequence redesign, implementation, and analysis of results.

The findings indicate that VP enables students to understand both the stable and future nature of change, contributing to the resignification of the linear function as constant variation while serving as functional tools to describe students' mathematical activity. Furthermore, articulating the financial context created a scenario in which the mathematical object became functional for students' financial decision-making

*Bachelor

Thesis

** Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in Mathematics.

Director: Haided Lised Arciniegas Rueda. Master's degree in Mathematics Education.

Co-director: Edith Johanna Mendoza Higuera. Ph.D. in Science, specializing in Mathematics Education.

Introducción

Según Alfonso (2024), la Educación Financiera es una herramienta y/o estrategia que proporciona a los ciudadanos los conocimientos necesarios para tomar decisiones informadas a favor de su bienestar financiero y mejora de la calidad de vida. Sin embargo, Colombia es uno de los países con menores índices en este aspecto, según los resultados de la prueba Programa de Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés) en 2012 (INEE, 2014). Ante este panorama, promover acciones que incorporen este ámbito económico y financiero constituye una oportunidad para fomentar inclusión, desde una perspectiva de cerrar desigualdades y brechas formativas, así como promover el desarrollo social y el crecimiento sostenible al relacionarse satisfactoriamente con entidades financieras.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el conocimiento matemático es considerado como una tarea social que debe responder a las opciones e intereses que surgen en el mundo actual (MEN, 1998). En tal caso, el conocimiento matemático que se construye allí resulta funcional cuando le permite al estudiante desarrollar la percepción de la realidad, de tal forma que, identifica situaciones que emergen del estudio de la variación y el cambio. Por esto, cuando los referentes curriculares proponen el pensamiento variacional resaltan su importancia en la resolución de problemas, en particular, en situaciones de variación y cambio inmersas en el cotidiano (MEN, 2006).

Ahora bien, el cambio y la variación se relacionan de la siguiente manera: "El cambio alude a una cualidad que experimenta una transformación, en tanto que la variación consiste en una abstracción de las propiedades y características del cambio que se percibe" (Caballero, 2018, p. 16). En consecuencia, este punto de vista generalizado del cambio y la variación deja ver que la

construcción de conocimientos relacionados a estos conceptos puede ser aplicada a diversas disciplinas científicas. Específicamente, el pensamiento variacional está estrechamente vinculado con los demás pensamientos (numérico, espacial, métrico, y aleatorio) incluso, con pensamiento de otras ciencias (MEN, 2006). En ese sentido, Caballero (2018) plantea que las Prácticas Variacionales (comparación, la seriación, la predicción y la estimación) surgen como formas de operar y razonar frente a la cualificación y cuantificación del cambio. De hecho, desde la diversidad cognitiva es posible distinguir su desarrollo de diferentes formas (Arciniegas, 2023).

En este orden de ideas, este proyecto tomó como punto de partida el diseño didáctico relacionado con la variación constante en el contexto de “presupuesto para un viaje”, resultado del proyecto “*Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores*” código 70783. Este proyecto plantea unos diseños en cuatro niveles de profundidad, en referencia a los ritmos de aprendizaje, sin embargo, para efectos de esta investigación se tomará el nivel 3 de profundidad, correspondiente al ritmo de aprendizaje estándar. Dicho diseño se ajustó según las condiciones de implementación de un aula regular de noveno grado, y también con el propósito de promover el desarrollo de las prácticas variacionales a lo largo de las actividades. Así, se describió el desarrollo de las Prácticas Variacionales (PV) en el estudio de la variación constante en situaciones financieras, lo cual incluye cuestionar cómo el contexto financiero en la situación de “presupuesto para un viaje” favorece la construcción y significación de la variación constante, en la medida en que emergen las PV. De lo anterior, se establece el siguiente objetivo general: ***Describir el desarrollo de las prácticas variacionales en el estudio de la variación constante en situaciones financieras, con estudiantes de noveno grado.*** Cabe destacar que el desarrollo de este trabajo fue influenciado por la participación de los autores en el Semillero de Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática,

perteneciente al grupo de investigación EDUMAT-UIS. Dicho espacio académico fue de provecho a través de sus seminarios, reuniones y debates que ayudaron a enriquecer las ideas investigativas en el presente trabajo. Así las discusiones compartidas contribuyeron a consolidar el enfoque económico y matemático de la investigación.

La estructura de este documento comienza, primero, con el planteamiento del problema, donde se expuso la problemática existente en torno a la enseñanza de la función lineal y la importancia de promover las PV en contextos financieros. En segundo lugar, los antecedentes incluyeron aspectos legales relacionados con la evolución normativa que ha integrado a la Educación Económica y Financiera (EEF) a nivel nacional, así como algunos entes internacionales que han sido partícipes de este proceso. Asimismo, se revisaron investigaciones asociadas con el Objeto Matemático, su enseñanza en contextos financieros y cómo se ha abordado en los niveles de educación básica y media.

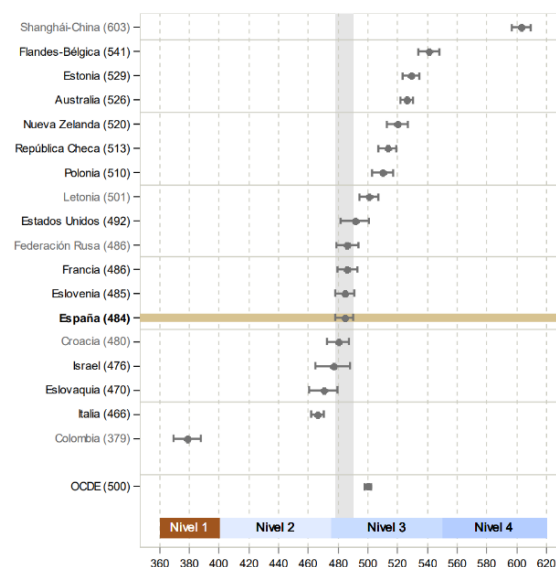
En tercer lugar, se presentaron los elementos teóricos relacionado con: el contexto financiero, el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las prácticas variacionales y la variación constante que guiaron la presente investigación. En cuarto lugar, la metodología presentó la estrategia investigativa, experimento de enseñanza, propuesta por Camargo (2021), la cual incluye la revisión bibliográfica para la formulación de la conjetura de aprendizaje, rediseño de la secuencia de tareas, implementación y análisis de resultados. Finalmente, en los resultados se detalló el rediseño a la secuencia de actividades y se describió el desarrollo de las Prácticas Variacionales en el estudio de la variación constante dentro del contexto de una situación financiera.

1. Planteamiento del problema

En el año 2014 la OCDE presentó los resultados de la prueba PISA, donde Colombia obtuvo desempeño deficiente en la competencia financiera; según el reporte más de la mitad de los estudiantes no revelan competencias en el área de la economía y las finanzas; pues el puntaje global de 379 lo ubica en el nivel 1 de 5 que establece la prueba (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2014), como se observa en la figura 1.

Figura 1

Resultados por puntuación media prueba PISA 2012



Nota. Tomado de *Competencia financiera*. Informe español (p.43).

Estas cifras muestran que no se estaba logrando formar ciudadanos financieramente competentes. Frente a esta situación, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), junto con la Asociación Bancaria y de Entidades Financieras de Colombia (Asobancaria), en el año 2014 presentó el proyecto pedagógico: *Mi plan, mi vida y mi futuro*, que ya cuenta con su cuarta versión (Edición 2022). Este proyecto pedagógico busca promover un desarrollo integral en los niños, niñas, adolescentes y jóvenes con una educación de calidad que incluye la EEF (MEN, 2022). Además,

añaden que: “deja a disposición de los establecimientos educativos del país, una serie de materiales para promover habilidades, actitudes y comportamientos que contribuyan con el desarrollo integral de los niños, niñas, adolescentes y jóvenes y el de la sociedad” (p.4).

En ese caso, es responsabilidad de los establecimientos educativos, incluyendo docentes, la implementación de este proyecto transversal. Sin embargo, se distingue que muchos docentes no tienen preparación sobre EEF; según Muñoz et al., a los docentes matemáticos no se les brindan los recursos necesarios para enseñar de manera significativa la EEF, y los materiales de apoyo son muy escasos (2018).

En este sentido, si se desea una exitosa implementación de proyectos transversales que involucren la educación económica y financiera, es necesario que las políticas educativas planteen estrategias de formación y actualización pedagógica (Muñoz et al., 2021). Es decir, que los docentes se equipen de estrategias didácticas pertinentes para abordar las temáticas de economía y finanzas, ya que, no se puede enseñar aquello que no se entiende (Muñoz et al., 2021).

A nivel local, Díaz y Rueda (2025) realizaron una encuesta a profesores de matemáticas, en la que el 75% no tiene conocimiento de los materiales sobre Educación Financiera provistos por el MEN y, además, el 68% nunca o casi nunca ha recibido formación en el campo de la EEF. Se destaca que la inclusión e implementación del proyecto de EEF en las aulas está quedando en manos de los docentes de matemáticas, quienes, en muchos casos, no cuentan con la formación adecuada ni con el conocimiento de la situación. Por ello, la necesidad de contribuir desde la investigación en educación matemática.

Luego, “(...) la mejora de las habilidades financieras podría lograrse mediante mejoras en los conocimientos matemáticos de la población” (Mancebón y Pérez, 2014, p. 158), esto quiere decir que, la adquisición de conocimientos matemáticos en el aula puede ayudar a la construcción de

competencias financieras en los estudiantes pues, la educación financiera es un campo de aplicación de ciertos conceptos matemáticos que puede ser útil para reducir la abstracción de los mismos (Jiménez y Vilaplana, 2014). No obstante, la relación es bidireccional pues para poder comprender conceptos financieros como crédito, deudas, entre otros es necesario involucrarse en procesos matemáticos como modelar, medir, estimar, predecir, etc. (Savard y Calvacante, 2021), lo que, a futuro podría mejorar el desempeño financiero de las personas (Dituri et al., 2019; Savard y Cavalcante, 2021)

Por otra parte, la sociedad está en constante transformación y evolución, una realidad cambiante donde se encuentran inmersas situaciones de variación y cambio. De hecho, en el contexto escolar no es la excepción, allí predominan situaciones donde el estudiante toma decisiones desde el estudio propio de su realidad, alcances y causa – consecuencia de lo que sucede; esto relacionado con el desarrollo del pensamiento matemático, y en particular, con el estudio de la variación y cambio, convirtiéndose en un campo de acción relevante para la educación matemática (MEN, 2004).

Al hablar del pensamiento variacional se hace énfasis en “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio” (MEN, 2006, p.66) donde se postula especial atención en el concepto de función, como concepto “umbral” del cálculo, al buscar construir acercamientos significativos para comprender conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, como conceptos posteriores. Es por esto que, la enseñanza de la función es un pilar fundamental para la comprensión de las matemáticas, y es necesario abordarla de forma que se fortalezca el pensamiento variacional más allá de lo algorítmico y la enseñanza mecánica. De lo contrario, una pobre comprensión del concepto de función puede tener malas consecuencias en la comprensión de conceptos más profundos, así como, en la aplicación

de la función en otras áreas o en un futuro profesional, y también en la motivación e interés del estudiante, ya que, siente que el concepto no es útil (Trujillo et al., 2023).

Una de las problemáticas más evidentes en la enseñanza de la función es la definición misma del concepto. Algunas de las acepciones más usadas en la educación matemática serían: la definición conjuntista, la de función como transformación, y la de función desde la covariación. En la actualidad, predomina la enseñanza de la función como una regla de correspondencia, también conocida como conjuntista, en la cual a cada elemento del dominio se le asigna un único elemento del recorrido, y esta definición obedece a ideas netamente algorítmicas o estáticas (Grueso y Gonzales, 2016). Un enfoque exclusivo en dichas ideas lleva a que los estudiantes perciban el álgebra como un problema difícil de abordar, más que como una herramienta que les permite representar situaciones complejas de la realidad (Kalchman y Koedinger, 2005). Además, estos autores consideran que la definición conjuntista es aceptable. Sin embargo, señalan que esta no orienta adecuadamente a los estudiantes que se inician en el aprendizaje de un nuevo tipo de problemas, donde el valor de una magnitud depende del de otra y existe una regla que establece cómo se relacionan entre sí.

Según Posada y Villa (2006), la función tiene una connotación de herramienta modeladora de fenómenos que implican variación y cambio. En contraste, Trujillo et al. (2023) afirman que la definición conjuntista es aquella que es más usada, pero no expresa la dinamización y la variación que es inherente al concepto de función. Sin embargo, Arciniegas (2023) es partidaria de introducir al estudiante en las situaciones de variación y cambio a medida que construye significados desde su propia realidad. Es decir, busca abarcar el concepto de función lineal desde la significación de la variación constante al enfrentar situaciones de variación y cambio que reflejen la realidad del estudiante, algo que no es posible lograr desde un concepto conjuntista.

En general, la problemática frente a la enseñanza de la función gira en torno al enfoque excesivo en procesos algorítmicos y algebraicos, propios de una definición conjuntista en donde prima la regla de correspondencia y asociación entre conjuntos. Luego, esta investigación concuerda con las ideas de Arciniegas (2023) para abordar la función a través de situaciones de variación y covariación. Esta definición según Trujillo et al. (2023) facilita la comprensión del concepto de variable, dominio y rango, pero más importante, hace intuitivo el uso de funciones como herramientas modeladoras de situaciones y procesos reales.

Desde los referentes curriculares se plantea para el grado noveno que el estudiante debe “modelar situaciones de variación con funciones polinómicas” (MEN, 2006, p. 87). Es decir, se propone abordar el concepto de función como una herramienta modeladora, que está vinculada con la definición de función como covariación de magnitudes; al priorizar la interpretación, asociación y relación entre magnitudes para así, comprender el comportamiento que modela la función.

Ahora bien, dentro del contexto de la función lineal, Caballero y Moreno (2017) reportan que, al momento de estudiar el concepto de pendiente desde situaciones de variación y cambio, enmarcadas en otras disciplinas como la física, existen dificultades para transitar del contexto matemático al disciplinar. Además, señalan que la causa de esta dificultad es debido a la falta de significación que se les da a los elementos matemáticos. Por lo cual, la matemática pasa a ser observada como una idea independiente y ajena a situaciones de variación, cuando en realidad la matemática surge de dichas situaciones. En ese sentido, el carácter variacional (formas de pensar, argumentar, organizar, tratar, y comunicar matemáticamente el cambio) de la matemática no se limitan a un manejo simbólico y analítico.

Al momento de pensar matemáticamente situaciones de variación y cambio, surgen algunos cuestionamientos clave: ¿Qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia?, ¿cuánto

cambia? y ¿por qué cambia de esa manera? Luego, para resolver estos cuestionamientos Caballero (2018) presenta una forma particular de razonar y actuar frente a situaciones de cambio llamadas Prácticas Variacionales (PV), a saber: la comparación, la seriación, la predicción y la estimación. Las PV actúan como herramientas para enfrentar la problemática de una concepción de función limitada a lo algebraico, algorítmico y conjuntista, ya que, facilitan la inmersión del estudiante al estudio de situaciones de cambio que derivan en el análisis y significación de la función lineal. Finalmente, en conjunto con previas investigaciones y con la intención de aportar en las problemáticas mencionadas, el presente trabajo aborda el concepto de función lineal desde el núcleo de la variación constante, es decir, desde un punto de vista de situaciones de variación y cambio, con el fin de enfrentar la problemática de la enseñanza de la función desde lo estático y algebraico. Además, se busca describir cómo se revela el estudio de la variación constante desde el desarrollo de las practicas variacionales. Finalmente, las situaciones presentadas al estudiante estarán dentro del contexto económico y financiero, con miras a fortalecer el desarrollo de habilidades financieras a través de la enseñanza de las matemáticas. Es por esto que, planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo estudiantes de noveno grado significan la función lineal como un modelo de variación constante a través del uso de prácticas variacionales en situaciones del contexto económico?*

2. Antecedentes

En este apartado se mencionan algunos referentes que permiten ubicar el problema de estudio y reflexionar acerca de cómo emerge y se desarrolla el pensamiento variacional inmerso en situaciones financieras reales. Cabe señalar que parte del proceso de revisión de antecedentes surgió de la trayectoria investigativa previa del Semillero de Educación Económica y Financiera, en donde los espacios de seminarios y discusiones académicas permitieron identificar referentes claves desarrollados por otros integrantes. Por ejemplo, Díaz y Rueda (2025), Alfonso (2024), y Guerrero y Jaimes (2026).

Así, a continuación, se distinguen aspectos legales y normativos sobre la educación financiera, investigaciones sobre su relación con la educación matemática, trabajos sobre el estudio de la función lineal en la educación básica y media; y finalmente, investigaciones que relacionen aspecto de la variación constante en contextos financieros.

2.1. Aspectos legales y normativos sobre la educación financiera

La educación financiera se ha consolidado a nivel internacional como un pilar fundamental para el desarrollo económico y social de los países; no obstante, la investigación realizada por García, et al. (2013) concluye que en América Latina y el Caribe “las necesidades en materia de educación financiera de la población no son iguales para todos los países de la región” (p.11), por tanto, organismos internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), a través de su Red Internacional de Educación Financiera (INFE) ha desarrollado marcos estratégicos para apoyar el diseño, inducción e implementación de programas de educación financiera en los colegios (García, et al., 2013) con el fin de propiciar la inclusión de este componente en los currículos escolares.

De hecho, tanto la OCDE como el Foro de Cooperación Económica Asia-Pacífico han propuesto herramientas de análisis y elaboración de normas para la medición de la alfabetización financiera en el desarrollo de programas formativos, con el objeto de mejorar el conocimiento y habilidades financieras de niños, adolescentes y jóvenes (APEC, 2012a; APEC, 2012b, citado por García, et al., 2013). Con esto se refleja la gran preocupación de proteger a la población más joven en un mundo económico cada vez más complejo; pues, la falta de desarrollo de estas habilidades desde temprana edad dejará a dicha población en una posición de desventaja y de exclusión, ya que estos autores ven el conocimiento financiero como un escudo contra los riesgos como el endeudamiento excesivo, la falta de ahorro y las precipitadas inversiones. También, plantean la necesidad de potenciar y promover estrategias para ilustrar cómo, los jóvenes, deben gestionar su dinero, planificar su futuro y formarse como ciudadanos económicamente competentes y autónomos. Es decir, la EEF no se trata de solo enseñar conceptos, sino de formar individuos capaces de construir su propia estabilidad económica.

A nivel nacional, distintos entes normativos (Ministerio de Hacienda y Crédito Público, Ministerio de Comercio, Industria y Turismo; Superintendencia financiera y Superintendencia de la economía solidaria; Banco de la República, entre otros) han destacado la importancia de formar y capacitar a las personas para responder a los retos de una sociedad que se encuentra en constante cambio y evolución, con especial énfasis en la creciente demanda de responsabilidad y alfabetización financiera.

En el artículo 5 de la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), se establece la directriz de formar y desarrollar capacidades críticas, reflexivas y analíticas en los ciudadanos para facilitar su participación en las decisiones que los afectan en su vida económica, política y cultural, para impulsar el progreso social, científico y económico del país mejorando a la vez su calidad de vida.

Esta visión se complementa con el artículo 13 de esta misma ley, en la que se promueve el desarrollo integral de los educandos mediante acciones concretas dentro de la Institución Educativa (IE) como el ejercicio de la autonomía y la responsabilidad. Lo anterior es clave para preparar a los aprendices en la toma de decisiones financieras desde la gestión de un presupuesto, el ahorro o invertir con autonomía en algún proyecto.

En el artículo 31 de la misma ley, se establecen las áreas fundamentales de la educación media, indicando que “serán obligatorias y fundamentales las mismas áreas de la educación básica en un nivel más avanzado, además de las ciencias económicas, políticas y la filosofía” (Ley 115 de 1994, p.10), de allí, la profundización en ciencias económicas para niveles superiores de bachillerato. Luego, en el decreto 1860 de 1994 (Art.36) se incluyen los proyectos pedagógicos dentro del plan de estudios, orientados a la elaboración de un producto sobre casos de la vida académica, social, política o concretamente económica. Sin embargo, solo hasta el año 2011, según la Ley 1450 (Art.145), se establece que el MEN debe incluir la Educación en Economía y Finanzas en el diseño en las competencias básicas de formación; en tanto, tuvo que pasar más de una década para que las políticas educativas la reconocieran como competencia básica y fundamental para la formación de los ciudadanos, más allá de un proyecto pedagógico ligado a las áreas obligatorias.

De forma similar, la Ley 1328 de 2009 indica a las entidades del sector financiero que deben brindar educación a sus consumidores respecto a los productos y servicios que ofrecen, así como los diferentes mecanismos establecidos para la defensa de sus derechos. Sin embargo, hasta el 2010 se impulsa este mandato con la creación de una Estrategia Nacional de EEF, con la cual se buscó mejorar el nivel de bienestar de los individuos y sus familias, mantener la estabilidad del sistema financiero, impulsar el desarrollo socioeconómico del país e inclinarse hacia la protección del consumidor financiero (Ministerio de Hacienda y Crédito Público et al., 2010). De tal modo

que, dicho documento describe los estándares internacionales de política pública de EEF, junto con un diagnóstico del marco jurídico e institucional aplicable en Colombia, el avance de las iniciativas o programas desarrollados en el país, así como las motivaciones para impulsar políticas de EEF e implementar una estrategia que las respalde.

Teniendo en cuenta lo anterior, surge la idea del gremio del sector financiero colombiano Asobancaria en crear el Programa de Educación Financiera de los Bancos en Colombia: Consejos prácticos para el manejo de su dinero, también conocido como Saber más, Ser más, en el año 2012 (Asobancaria, 2012); al resaltar que, estos programas y estrategias buscan contrarrestar los resultados obtenidos en las pruebas internacionales PISA 2012, pues específicamente en el componente financiero Colombia ocupó los últimos lugares frente a los demás países y regiones participantes. A partir de allí, se organiza el Sistema Administrativo Nacional para la EEF, se crea una Comisión Intersectorial CIEEF (órgano que coordina la participación del sector público y privado en la elaboración e implementación de programas sobre educación económica y financiera) se dictan otras disposiciones (Decreto 457, 2014). Luego, en ese mismo año, la Ley 1735 vuelve a recalcar al MEN la inclusión de la EEF en el diseño de programas para el desarrollo de competencias básicas (Art.9).

Más adelante en el 2020, dentro de la Política Nacional de Inclusión y EEF se genera el documento Consejo Nacional de Política Económica y Social (CONPES) 4005 con el fin de expandir y hacer más pertinentes los productos y servicios financieros, además de pretender generar mayores competencias, conocimiento, y confianza en este ámbito, y así, disuadir el uso del efectivo (Departamento Nacional de Planeación, 2020). Dos años después, el MEN (2022) crea el proyecto titulado: “Mi plan, mi vida y mi futuro” con el propósito de: promover en los niños, adolescentes y jóvenes los conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para la toma de decisiones

informadas; incentivar las actuaciones responsables para promover el uso y administración correcta de los recursos; y, fomentar la participación solidaria en la búsqueda del bienestar individual y social, con el que se pretende también, promover una perspectiva de Gestión del Riesgo y Recursos. Más aún, esta línea de trabajo en EEF se reanudó con el programa “Nueva Pangea: La Expedición”, una iniciativa conjunta del MEN, Asobancaria y Fasecolda (2025), que incorpora una plataforma digital para fortalecer los conocimientos, habilidades y actitudes de los colombianos para gestionar, planear y decidir el uso de sus recursos a través de historias y retos en un contexto de estudio, emprendimiento y vida laboral. Estos ajustes se realizan para fortalecer la formación de la ciudadanía en el ámbito financiero.

Aún con estas normativas que están vigentes y evidencian una trayectoria continua frente a esta problemática, persiste una brecha entre estos lineamientos teóricos y su aplicación en el aula, pues lo que realmente se puede observar es que pasó más de una década entre la Ley General de Educación y el primer programa concreto, y luego varios años más para desarrollar orientaciones específicas. Lo cual indica que ni siquiera desde la normativa existía una ruta clara para llevar estos conceptos al aula. El resultado es precisamente lo que se observa hoy en día, los lineamientos siguen existiendo en el papel, pero no hay una aplicación directa que los formalice en la práctica.

2.2. Enseñanza de las matemáticas desde contextos financieros

A nivel internacional, existen diversas investigaciones que muestran la relación que existe entre la educación económica y financiera, y la educación matemática. Domínguez (2013) quien concibe la educación financiera como una herramienta que permite a los ciudadanos participar de manera activa en la gestión de sus propias finanzas y tomar decisiones sin fracasar en el intento. En este sentido, el objetivo de su investigación fue integrar aspectos básicos del ámbito financiero en el marco del proyecto Edufinet, dirigido a una población de jóvenes que culminó su formación básica

secundaria (Domínguez, 2011a). Este proyecto, desarrollado y dirigido por el autor, consistió en el diseño de una guía didáctica, la realización de sesiones formativas y el desarrollo de actividades prácticas y simuladores accesibles en línea, todo aquello enfocado en promover una comprensión razonada y autónoma del sistema financiero para que las personas puedan tomar decisiones personales sobre sus finanzas.

De manera análoga, Argena y Munhoz (2024) proponen la evaluación de un libro pedagógico donde conectan la educación financiera con la educación matemática crítica. A lo largo de su trabajo, resaltan cómo las corrientes de la educación matemática pueden ser usadas para desarrollar material de enseñanza que favorezca la autonomía y participación efectiva del estudiante (Argena y Munhoz, 2024). En ese caso, cuando los autores hablan de educación matemática crítica, se refieren a una matemática conectada a un contexto social, que se problematiza y es influyente en la sociedad. En sus resultados, los autores expresan la necesidad que existe de presentar materiales con diversas metodologías y formas de abordar la educación financiera; teniendo en cuenta, la importancia de impulsar al estudiante a que aprenda, interactúe, sea creativo, crítico y autónomo, lo que lleva a realizar una educación financiera vivencial o experimental.

En adición, Dituri, et al. (2019) presentan los resultados de una implementación de un curso de matemática y finanzas. Este curso tiene 4 principios que hacen efectiva la mezcla de las matemáticas con la educación financiera: (1) los estudiantes aprenden mejor cuando entienden los conceptos, (2) una comprensión conceptual de las finanzas personales requiere una concepción de la matemática involucrada, (3) el aprendizaje de los estudiantes se activa cuando encuentran el material atractivo e importante para sus vidas, y (4) aquellos estudiantes que no les agrada las matemáticas encuentran las aplicaciones financieras relevantes e interesantes.

Tras analizar los resultados del curso, los autores concluyen que existe una relación causal entre el aprendizaje matemático y el financiero, así pues, mejorar en el conocimiento matemático está correlacionado con mejorar en el financiero (Dituri, et al. 2019); de tal modo que, recomiendan incluir la educación financiera dentro de cursos de matemáticas.

Vilca et al. (2025) reafirma la relación directa entre la educación financiera y el aprendizaje de las matemáticas pues, evidencia la importancia de integrar la educación financiera en el currículo escolar para fortalecer no solo habilidades matemáticas, sino también, habilidades prácticas que los estudiantes necesitarán en contextos reales. Además, al implementar una actividad relacionada con la creación de un presupuesto, se obtuvo que el 60% de los estudiantes lograron un nivel superior o muy superior en la capacidad de tomar decisiones con respecto a la compra de bienes o artículos que cubren necesidades básicas; de allí, dos recomendaciones para los docentes, la primera es que su formación debe ser continua y especializada para que pueda implementar enfoques didácticos activos; y la segunda, es que la capacitación en estrategias didácticas con herramientas tecnológicas para que el estudiante pueda fortalecer sus desempeños matemáticos, y que estos sean significativos y permanentes.

Así, las investigaciones previas reflejan el panorama actual de la conexión de la educación matemática y financiera en Latinoamérica, reforzando la idea de que la relación de estas dos produce buenos resultados en los aprendizajes de los estudiantes.

A nivel nacional existen investigaciones (Toro, 2024; Bajonero y Tous, 2023) que presentan proyectos interdisciplinarios entre el área de la educación financiera y las matemáticas, obteniendo resultados que favorecen la aplicación de este tipo de proyectos en las instituciones educativas. Por ejemplo, Toro (2024) comentó que dicha iniciativa pedagógica “promovió el desarrollo de cuestionamientos sobre la importancia de un buen presupuesto personal, preparando a los

estudiantes para tomar decisiones financieras informadas y responsables” (p.66), es decir, la actividad de transformar una clase tradicional de matemáticas en un espacio más interactivo permite a los estudiantes desarrollar habilidades financieras que los convierte en ciudadanos competentes.

Por otro lado, Bajonero y Tous (2023) concluyen que para el éxito de su investigación fue necesario promover el diálogo con los estudiantes y entre los estudiantes. De esta manera, se promovía el pensamiento crítico y también involucraban sus nociones matemáticas para hacer propuestas en pro de su beneficio y el de los demás. En otras palabras, los propios estudiantes utilizaron la matemática como una herramienta para la toma de decisiones en situaciones financieras en aras de su bienestar y el de los demás. Además, plantean que: “la EEF debe trabajarse desde la modelación matemática, ya que así se posibilita el acercamiento real de los estudiantes a los conceptos trabajados” (p. 86).

Dicho lo anterior, se evidencian pocos reportes de investigación sobre el pensamiento variacional en relación con la educación financiera. Sin embargo, se distinguen dos trabajos: el de Bocanegra (2017) y, de Muñoz y Santos (2020). El primer autor diseñó, implementó y evaluó una secuencia didáctica basada en problemas financieros para desarrollar el pensamiento numérico-variacional a través del concepto de porcentaje. En su trabajo, el autor incluye situaciones problema que involucran conceptos de educación financiera como impuestos y descuentos y según él se espera que de acuerdo con dichos conceptos los estudiantes identifiquen y usen correctamente el porcentaje como fracción, como proporción, como operador decimal, y que calculen porcentajes menores o mayores al 100% (Bocanegra, 2017). Dicho investigador invita a movilizarse en diferentes representaciones del objeto matemático, ya que, es beneficioso para la comprensión de los conceptos, la aplicación de procedimientos y algoritmos, y la resolución de problemas, lo cual,

en conjunto, potencian el desarrollo del pensamiento numérico-variacional (Bocanegra, 2017). Además, concluyen que: “el trabajo a través de situaciones problema que involucren conceptos financieros que son familiares al estudiante como ahorro, presupuesto, interés y descuento resultan fundamentales para la comprensión de dichos conceptos como los conceptos matemáticos relacionados” (Bocanegra, 2017, p.117). Es decir, de acuerdo con las situaciones que provee el contexto financiero, se abordó el porcentaje como fracción y proporción y los autores consideran exitosa la enseñanza del porcentaje desde dichas representaciones, y dentro del marco de la educación financiera.

Por otro lado, Muñoz y Santos (2020) se centraron en los procesos de matematización de los estudiantes cuando estudiaban relaciones entre magnitudes en un contexto financiero. Los resultados evidenciaron que las secuencias implementadas enriquecieron el pensamiento variacional de los estudiantes, pues dan cuenta de cómo los alumnos vinculaban dos variables a partir de esquemas o representaciones gráficas, además, afirmaciones como: “a mayor valor monetario menos cantidad de billetes y a menor valor monetario se requieren más billetes” (Muñoz y Santos, 2020, p. 90) revelan la relación que identifican los estudiantes entre las variables involucradas.

Adicionalmente, Muñoz y Santos (2020) evidenciaron a lo largo de las implementaciones cómo los estudiantes modifican su percepción sobre conceptos como el dinero, el ahorro, los ingresos, el presupuesto, y los gastos, y los adaptan a un contexto escolar de aprendizaje de las matemáticas, proponiendo soluciones con símbolos propios de la matemática. Cabe añadir que, en el proceso de identificar relaciones entre magnitudes variables, dentro del entorno de la educación financiera se observaron diferentes niveles de comprensión en el estudiante (Muñoz y Santos, 2020).

En conclusión, la investigación relacionada con el área de EEF en relación con la educación matemática apuntan a que es necesario incentivar proyectos y diseños interdisciplinarios que respondan a la necesidad identificada por Domínguez (2013) de entender la educación financiera como un proceso continuo a lo largo de toda la vida sin hacer distinción de edad, ya que no se trata de dogmas que puedan aprenderse en un número reducido de sesiones, y por lo cual será necesario superar la idea de que los conceptos económicos y financieros son hostiles y por eso deben quedar reservados a los especialistas. Lo anterior representa una oportunidad para que los estudiantes puedan ser protagonistas tanto de la actividad matemática como del uso de conceptos financieros. Así pues, cuando se integra un contexto financiero cercano al estudiante se evidencia una comprensión de los conceptos financieros y de las ideas matemáticas detrás de estos.

Asimismo, se destacan los registros de implementaciones con resultados positivos en los estudiantes tanto en la adquisición de ideas financieras como matemáticas. Sin embargo, se observan pocas referencias en cuanto al pensamiento variacional, o más específicamente, el objeto matemático de la función lineal, lo que ratifica la importancia de impulsar la investigación en dicho campo.

2.3. El Pensamiento Variacional y la función lineal en educación básica y media.

A nivel internacional se han realizado diversos estudios que buscan abordar diferentes problemáticas sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de función. Por ejemplo, Trujillo et al. (2023) en su trabajo discute los errores y dificultades de los estudiantes al hablar del concepto de función. Gran parte de esas ideas erróneas están asociadas a la interpretación y significado de la función, como: la función considerada como una “caja de transformaciones”, una regla algebraica o una asociación de un único elemento del dominio con otro en el rango y viceversa. Luego, entre las dificultades más recurrentes se encuentran: comprender qué representa la función,

cuál es el rol de la variable dentro de una función, y el uso de la función como herramienta modeladora de situaciones reales (Trujillo et al., 2023).

En ese sentido, se distinguen diferentes definiciones que se asocian al concepto de función desde la perspectiva conjuntista, covariacional, como una transformación, o como objeto matemático. Luego, “en las primeras etapas de aprendizaje los docentes usualmente explican la función como máquinas de objeto de entrada y objeto de salida, en donde un elemento es transformado en otro” (Trujillo et al., 2023, p. 6). A diferencia de lo anterior, la definición covariacional resulta ser una concepción de dos magnitudes que varían simultáneamente, con la propiedad de que cada valor de una magnitud determina exactamente un valor de la otra.

Ahora, más que determinar si una definición es mejor que otra, los autores resaltan que los libros de texto usan diferentes definiciones del concepto de función, lo que genera confusión en los estudiantes y lo que conlleva a las dificultades y errores comunes (Trujillo et al., 2023). Por lo tanto, en respuesta a la problemática anterior, se reconoce la importancia de acoger el concepto de función desde un enfoque covariacional, como herramienta fundamental para modelar fenómenos de variación y cambio inmersos en la vida diaria, por ello, resulta importante abordar el concepto como un modelo matemático determinado por la noción de variación (Posada y Villa, 2006).

En ese sentido, Posada y Villa (2006) proponen consolidar el concepto de función a través de “la noción de variación base para la construcción del concepto matemático de variable” (p.171). Por lo tanto, al enfrentar situaciones de variación constante, la función lineal es el modelo matemático ideal, en la medida en que se da la identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes, la identificación de la razón de cambio constante y la comprensión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes, entre otros. En tal caso, los autores proponen una secuencia didáctica de aproximación a la función lineal tomando como

referentes conceptuales la noción de variación, la modelación matemática y los registros de representación semiótica. Tras aplicarla, los autores concluyeron que el recorrido ideal para abordar el concepto de función lineal es identificación de regularidades, presencia de razones y proporciones, una descripción gráfica, la expresión analítica de la función, la función como proceso o aplicación y finalmente, la función como un objeto abstracto (Posada y Villa, 2006). Además, resaltaron que en el caso de fenómenos cuya variación es constante se puede reconocer la función lineal como el modelo ideal (Posada y Villa, 2006).

Luego, teniendo en cuenta que “(...) el concepto de función ha oscurecido su esencial significado desde su carácter variacional hacia una acción de correspondencia entre variables...” (Grueso y Gonzales, 2016, p.10) se sugiere proponer actividades de covariación, donde la base para construir el concepto de función es la asociación y estudio del cambio. Por ello, Grueso y Gonzales (2016) afirman que, si se da el estudio del concepto de covariación en diferentes niveles escolares, no será necesario una sintaxis algebraica. Asimismo, recomiendan a las instituciones educativas proponer tareas y actividades para el desarrollo de competencias, más allá de los contenidos pragmáticos. En particular, los autores proponen el diseño e implementación de una secuencia de enseñanza con tareas de covariación que intentan potenciar el desarrollo del pensamiento variacional, y al mismo tiempo, estudiar el concepto de función. Igualmente, los autores proponen ejemplos de cómo desarrollar el pensamiento variacional a través de la covariación, planteando situaciones donde los estudiantes deben identificar variables, reconocer dependencia entre variables, cuantificar los cambios e integrando representación gráfica, tabular y algebraica. Asimismo, como parte de sus resultados, concluyeron que, la construcción del concepto de función obedece al estudio de fenómenos de cambio (Grueso y Gonzales, 2016).

Así, tanto Posada y Villa (2006) como Grueso y Gonzales (2016) proponen un acercamiento al concepto de función, desde una perspectiva relacionada a situaciones de cambio, variación y covariación, ya que, según sus resultados esta propuesta tuvo un buen resultado en los estudiantes y los llevó a potenciar su desarrollo del pensamiento variacional. Grueso y Gonzales (2016) afirman que desde el punto de vista histórico prevalece una definición dinámica donde la dependencia entre variables predomina sobre una regla de asignación. De igual manera Posada y Villa (2006) afirman que el recorrido para abordar el concepto de función, nombrado previamente, incluye en todas sus etapas situaciones de variación y cambio, lo cual sugiere que la presencia de estas situaciones es necesaria para la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Por otra parte, para Caballero (2018) la variación es el punto de partida para la significación de objetos matemáticos y, al centrar la atención en el estudio de comportamientos lineales, Caballero y Moreno (2017) diseñan una situación de aprendizaje para estudiantes de bachillerato. Las tareas se sustentan en el desarrollo de las PV en una situación de llenado de recipientes cilíndricos; donde, el objetivo fue caracterizar el comportamiento lineal como un crecimiento constante, al asignar un significado práctico de la variación a través de diversas tareas que involucran la interpretación y relación de magnitudes en distintas representaciones. En su trabajo, los autores justifican pregunta a pregunta su diseño con base en un modelo de anidación de prácticas desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), y se deja abierto al lector la posibilidad de implementarlo y analizar sus resultados. Además, como resultado, presentan un diseño que propone abordar la variación desde el desarrollo de las PV atendiendo a preguntas como ¿Qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia? Y ¿cuánto cambia? (Caballero y Moreno, 2017)

En esa misma línea, Arciniegas (2023), propone una estrategia metodológica para el desarrollo de las PV en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado. En tal caso, el objetivo fue caracterizar el desarrollo del pensamiento variacional a partir de las PV cuando los estudiantes se enfrentan a una situación de consumo de datos de redes sociales. Como resultado, se distingue la contribución a la caracterización del pensamiento variacional desde el desarrollo de las prácticas de comparación, seriación, predicción y estimación, en los tres ritmos de aprendizaje (lento, moderado, y rápido) como descriptores que valoran la construcción del conocimiento matemático. La autora propone una secuencia de cuatro momentos orientados al estudio de la variación constante a través del desarrollo de las prácticas variacionales, teniendo en cuenta las etapas para una situación de aprendizaje. Los 4 momentos que se abordaron fueron: reconocimiento de la función lineal como variación constante, confrontar comportamientos lineales para significar la expresión $f(x) = mx + b$, uso del parámetro m para hacer predicciones, y confrontación con comportamientos no lineales. Cabe resaltar que, en su trabajo, Arciniegas (2023) tiene en cuenta la forma en que los estudiantes comunican sus respuestas, es decir, al momento de analizar los resultados resalta los argumentos cualitativos y cuantitativos de los estudiantes. De sus conclusiones, es importante señalar la articulación entre el contexto y el objeto matemático, favoreciendo a la interpretación y comprensión de la función lineal como variación constante. Ciertamente, la caracterización de los estudiantes, y la realización del diseño con base en dicha caracterización ayuda a que la actividad matemática sea más cercana y amena a los estudiantes. Además, la presencia de las prácticas variacionales como elemento mediador del conocimiento hizo que los estudiantes pudieran construir e interpretar, desde diferentes representaciones, el concepto de función lineal como variación constante.

En síntesis, se distingue que a pesar de las apreciaciones de Trujillo et al. (2023) acerca de las dificultades e ideas erróneas en cuanto a la definición, interpretación y significado del concepto de función; diversas investigaciones (Posada y Villa, 2006; Grueso y Gonzales, 2016; Arciniegas, 2023) han concluido que una manera eficiente de abordar el concepto de función es a través del desarrollo del pensamiento variacional, planteando situaciones de variación y cambio para que el estudiante plantee relaciones de dependencia. Además, otros autores (Caballero, 2018; Arciniegas, 2023) proponen las Prácticas Variacionales como un instrumento para enfrentar el estudio de situaciones y cambio, y muestran resultados favorables para la interpretación y comprensión del objeto matemático por parte de los estudiantes. Es así como, estos antecedentes invitan a plantear un enfoque covariacional que se aparta de las definiciones estáticas como la conjuntista, u otras definiciones limitadas como la transformadora.

3. Aspectos teóricos y conceptuales

A continuación, se presentan algunos referentes teóricos de la investigación, los cuales hemos dividido en 3 secciones. En primer lugar, los elementos conceptuales del contexto financiero, en segundo lugar, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), que da paso al Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), en tercer lugar, las prácticas variacionales y la variación constante.

3.1. Elementos conceptuales del contexto financiero

El MEN (2022) dentro de sus orientaciones pedagógicas para abordar la Educación Económica y Financiera propone enseñar un conjunto de saberes vinculados entre sí de manera lógica y coherente, estos saberes los denomina ámbitos conceptuales, entre ellos está el presupuesto. Este concepto tiene como propósito que el estudiante lo reconozca como la herramienta principal para manejar sus recursos monetarios a nivel personal y familiar (MEN, 2022). Además, se espera que los niños puedan identificar los diferentes recursos que ingresan a su familia (ingresos), reconozcan el presupuesto como una herramienta organizadora, y conozcan en qué emplean dichos recursos (gastos) para crear hábitos financieros saludables (Díaz y Rueda, 2025). Teniendo en cuenta lo anterior, se propone no solo la definición de presupuesto sino también las nociones de gastos e ingresos, que se complementan.

En primer lugar, como ya se indicó, el *presupuesto* es una herramienta que permite organizar los recursos que se tienen en posesión. Desde la matemática, se puede entender este como el cálculo anticipado de los ingresos y los gastos de una actividad económica en determinado tiempo y con ciertas condiciones. En un presupuesto se expresa claramente cuántos recursos se necesitan y cómo van a ser usados, además, el propósito del presupuesto es favorecer el bienestar ya sea personal o grupal a través de estrategias que favorezcan las finanzas individuales o grupales (MEN, 2022).

Por ejemplo, en una situación de planeación de un viaje, el presupuesto se refiere al cálculo, organización y comparación de ingresos disponibles y gastos que surgirán durante el viaje. Es necesario conocer con cuánto dinero se destinará para el viaje y cuánto se prevé gastar. Además, es conveniente ordenar y clasificar los gastos, distinguir en qué se va a gastar y cuánto se gastará en cada categoría. Finalmente, comparar si los ingresos son suficientes para cubrir los gastos y si no es el caso, planear estrategias para disminuir estos últimos.

En segundo lugar, los *ingresos* hacen referencia a la entrada de dinero de una persona, familia u organización, por motivos de remuneración de un servicio o venta de productos. En relación con el presupuesto, los ingresos son los recursos con los que se cuenta para solventar los gastos y realizar actividades económicas. Generalmente, en pro de un bienestar financiero, se necesita que los ingresos sean mayores a los recursos necesarios para solventar los gastos (MEN, 2022). Continuando con el ejemplo de la planificación de un viaje, los ingresos son la base para planear las actividades y los gastos, esto con el objetivo de poder realizar el viaje de acuerdo con los recursos disponibles.

Por último, los *gastos* son la salida de dinero de una persona, una familia o una organización que está destinado para un objetivo específico como una compra, un pago obligatorio o por un servicio adquirido. En relación con el presupuesto, los gastos son las actividades económicas en las cuales se van a utilizar los recursos adquiridos (ingresos). Al hablar de un presupuesto es vital comprender la relación entre los gastos e ingresos para tener un mayor bienestar financiero, es decir, los ingresos deben ser mayores que los gastos. De esta manera, habrá consecuencias económicas positivas para la persona, familia u organización (MEN, 2022). En particular, en la planeación de un viaje es importante identificar los gastos que se van a tener, como: el transporte, el hospedaje,

la alimentación, la visita de sitios turísticos, entre otros; además, el precio que tienen cada uno de estos gastos y, cómo se pueden solventar desde los ingresos.

Al momento de analizar gastos, surge el concepto financiero de *costo*. Cuando una empresa ofrece un servicio se utilizan insumos que monetariamente se ven reflejados como costos, los cuales deben ser solventados con el precio ofrecido por el servicio. Asimismo, el costo total de un producto o servicio se compone de los costos fijos y los costos variables. Los fijos son aquellos que permanecen constantes al ofrecer el bien y/o servicio; mientras, que los variables son aquellos que cambian dependiendo de la cantidad ofrecida (UNICLA, 2024).

Usualmente la función de costo tiene la forma $C(x) = mx + b$, donde mx es el costo variable, que cambia según la magnitud x (tiempo, cantidad de productos producidos, etc.) pues m representa el costo por unidad; el valor b , hace referencia a los costos fijos, ya que como argumenta Rey (2025) en la función de costos $C(x) = kx + f$ el intercepto f representa dichos costos, que permiten determinar si un negocio es viable o no.

En una situación de planeación de un viaje, es necesario analizar los costos tanto del hospedaje, de la alimentación, de la visita a sitios turísticos y del transporte. En ocasiones estos presentarán costos variables, es decir, valores que pueden cambiar de acuerdo con el número de personas, cantidad de días, etc., lo que lleva a analizar dichos costos a través de comportamientos de variación constante.

3.2. Pensamiento y Lenguaje Variacional desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

De acuerdo con Cantoral et al. (2018), el conocimiento ha sido reducido a temas aislados y secuenciados, que a menudo se llaman “contenidos” o “unidades temáticas” de una asignatura. Para contrastar esta problemática la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

(TSME) da un paso del conocimiento estático al conocimiento en uso, al estudiar el saber cómo producto de la matemática funcional (Cantoral, 2014). Desde este punto de vista, las matemáticas son consideradas parte de la cultura, un elemento vivo que es creado fuera del aula, pero es recreado en ella. En otras palabras, el conocimiento matemático se encuentra en el mundo que nos rodea, y la manera más eficiente de trasladarlo al aula es presentarlo de manera problematizada para los alumnos.

Usualmente en algunas corrientes de la educación matemática, se ignoran los escenarios históricos, culturales e institucionales de la actividad humana que incluyen conceptos matemáticos (Cantoral et al., 2006), esto lleva a que el conocimiento matemático se sienta despersonalizado y descontextualizado, además de perder su esencia y su significado original. Por ello, se propone rediseñar el discurso matemático escolar, para atender a problemáticas culturales y sociales que van de la mano con la enseñanza matemática.

Al cuestionar sobre lo que debe enseñarse, la TSME no se centra en el concepto matemático, sino en, observar las prácticas que producen o favorecen la necesidad de estos conceptos (Reyes, 2011). En este caso, la noción de práctica está ligada a la actividad humana, no a toda actividad humana sino a aquellas que son conscientes e intencionales. Un tipo de prácticas que son fundamentales para la TSME son las prácticas sociales, entendidas como la normativa de la actividad humana. Cantoral et al. (2014) señalan que “la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, aún sin adquirir conciencia de sus acciones” (p. 98).

Teniendo en cuenta la definición anterior, la Economía y las finanzas es la práctica de referencia de donde surgen situaciones como la elaboración de un presupuesto, la cual es una actividad humana consciente e intencionada, que potencia el bienestar de las personas. Al

momento de realizar un presupuesto la persona analiza ¿Cuánto puede gastar? ¿Cuántos ingresos tendrá? ¿Cuánto costará cierto producto o servicio? Lo cual, corresponde a las prácticas sociales de estimar y predecir. Estas se consideran prácticas sociales ya que, la estimación y la predicción es aquello que lleva a las personas a realizar procedimientos y construir argumentos que se verán reflejados en su presupuesto.

Así pues, los objetos matemáticos que emergen en estas situaciones adquieren un significado social que los potencializa como un conocimiento funcional. Así, al abordar la situación de elaboración de un presupuesto donde surjan costos variables y fijos, permitirán que la función lineal se signifique como un modelo de variación constante. Es decir, el estudiante ya no verá la función lineal solo desde sus representaciones sino como el comportamiento que modela dentro de la realización de un presupuesto de viaje.

Esta manera de construir el conocimiento encuentra sus inicios a lo largo de la historia en la necesidad del ser humano de predecir eventos futuros, lo cual lo ha llevado a desarrollar diversas herramientas basadas en estudiar el cambio y la variación, entre las cuales surge la línea de investigación llamada *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (PyLV) en el marco de la TSME.

El PyLV busca articular la investigación y las prácticas sociales que dan sentido a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 1998). Entonces, el PyLV propone el estudio de situaciones de variación y cambio, que surgen de la necesidad de predecir eventos o situaciones futuras. El estudio de estas situaciones propicia la significación de conceptos matemáticos más allá de lo simbólico, por medio de las ideas variacionales que dan vida y desarrollan dichos conceptos (Caballero y Cantoral, 2013). Es así como, estos autores señalan que, el PyLV se centra en estudiar cómo cambian los fenómenos de un estado a otro, identificando qué cambia, cuánto cambia y analizando la forma en que suceden dichos cambios.

Ahora bien, el PyLV se enfoca en comprender el cómo las personas reconocen el cambio y la variación, pero también, estudia la aplicación que se le da a estos conceptos para resolver situaciones problema y cómo estas ideas aportan en la construcción social del conocimiento matemático (Caballero, 2018). Sin embargo, se añade una faceta más, que es el lenguaje variacional. Arciniegas (2023) afirma que la forma en que el individuo piensa la variación y el cambio se refleja en el lenguaje que construye y perfecciona para lograr comunicar sus ideas, es decir, el PyLV no solo se enfoca en cómo se conciben las ideas de la variación, sino también en cómo se comunican dichas ideas. Es por esto que, Caballero (2018) también incluye en su descripción del PyLV la capacidad de comunicar matemáticamente el cambio y la variación en situaciones donde se requiere predecir.

Luego, para responder al cómo describir y argumentar sobre la variación, el PyLV distingue ciertos elementos que lo componen como: situación variacional, tareas variacionales, argumentos variacionales, códigos variacionales, y estrategias variacionales. Sin embargo, aquí se centra la atención en algunos de ellos necesarios para el análisis de resultados de esta investigación.

Los *argumentos variacionales*, aquellos razonamientos que recurren al análisis del cambio y a su cuantificación. Cantoral (2000, citado por Caballero y Cantoral, 2013) expresa que los argumentos variacionales se evidencian cuando el sujeto hace uso de maniobras, ideas técnicas o explicaciones que expresan el reconocimiento del cambio en el objeto de estudio. Es decir, son todas aquellas razones o ideas comunicadas por el estudiante, que dejan ver su comprensión de la situación variacional.

Ahora, las *estrategias variacionales*, que luego fueron llamadas *Prácticas Variacionales* (PV), se dirigen al desarrollo de acciones para operar el cambio y la variación, es decir, son formas de razonar y actuar ante una situación de cambio (Arciniegas, 2023; Caballero, 2018). Estas PV son

la comparación, la seriación, la estimación y la predicción. Además, Caballero y Cantoral (2023) señalan que gran parte de las actividades diseñadas bajo el PyLV se enfocan en el uso de las estrategias variacionales para promover el pensamiento variacional, acompañadas del uso del conocimiento matemático que se quiere resignificar. Lo anterior, permite que las estrategias variacionales siempre sean el punto de partida, independientemente del contexto en el que se desarrolle la situación de variación.

Cabe resaltar que, el desarrollo del pensamiento variacional se presenta bajo una situación de variación, donde a través de las prácticas variacionales se reflexiona acerca del cambio, es decir, se identifica qué cambia, cuánto cambian y cómo cambia. Entonces, a través de las estrategias el individuo genera argumentos variacionales que explican la situación, estos argumentos deben tener como núcleo el concepto de variación. Es de esta forma que, una situación es resuelta por medio de argumentos que se generaron por la aplicación de estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013).

En ese sentido, es posible notar cómo las estrategias variacionales son esenciales dentro de PyLV, por lo que, a continuación, se presentan aspectos teóricos referentes a las prácticas variacionales, desde investigaciones como las de Caballero (2018) y Arciniegas (2023).

3.3. Prácticas Variacionales

A continuación, se toma lo descrito por Caballero (2018) partiendo de su noción de variación hasta una breve descripción de las Prácticas Variacionales (PV). Según este autor la variación es un constructo del pensamiento humano donde la medición del cambio, el reconocimiento de su evolución y el análisis a posteriori del comportamiento de las variables permite sintetizar las propiedades y características de un fenómeno en situaciones de predicción. Asimismo, este proceso de abstracción es propiciado principalmente por el carácter estable del cambio, gracias al

reconocimiento de las órdenes de variación y el desarrollo de las PV, las cuales constituyen formas específicas de cuantificar y cualificar el cambio. De ahí, que las PV permiten desarrollar acciones para predecir frente a una situación de cambio y variación, a saber: la comparación, la seriación, la predicción y la estimación.

La Comparación se define como la acción de establecer diferencias entre dos estados o elementos de la misma naturaleza, uno anterior y uno posterior; o bien diferenciar dos estados equivalentes de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y cuantificar el cambio, y a su vez, resulta imprescindible para hablar sobre variación. Además, la comparación se puede evidenciar a través de una diferencia si se realizan preguntas del tipo cuál objeto es mayor o más largo, o a través de un cociente, si es necesario encontrar la razón entre longitudes, lo cual permite asociar al concepto de pendiente (Caballero, 2018). Asimismo, la comparación se puede expresar de manera cuantitativa o cualitativa. De manera cuantitativa hace referencia cuando el estudiante establece una relación numérica entre dos valores específicos de la variable. Mientras que, una estrategia cualitativa realiza la descripción con palabras como “mayor”, “menor” en un único caso o con varios casos (Arciniegas, 2023).

La Seriación consiste en analizar dos o más estados consecutivos de un fenómeno con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional en el conjunto total o parcial de esos estados. Se trata entonces de organizar y establecer una lógica finita de comparaciones que posibilite determinar el carácter estable del cambio. Es decir, se realiza seriación cuando se compara y analiza consecutivamente regularidades o patrones con el fin de determinar un comportamiento (Caballero, 2018). En caso de la seriación, se caracteriza de forma cuantitativa cuando se establecen relaciones numéricas entre estados del mismo fenómeno o fenómenos equivalentes, además de que el estudiante razona sobre procedimientos a partir de la

relación numérica, por ejemplo, cuando el estudiante determina patrones numéricos de crecimiento, mide longitudes, relaciona los comportamientos de las variables y realiza inferencias por medio de componentes aritméticos (suma, resta, multiplicación y división). Por otro lado, se puede evidenciar de manera cualitativa cuando se caracteriza por su forma, el crecimiento o la posición, con expresiones como “mayor que”, “menor que”, “rápido”, “lento”, entre otros.

La Predicción es la acción de anticipar un estado o valor específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen, generalmente de forma numérica. No obstante, Arciniegas (2023) afirma que esta práctica también se logra evidenciar en una representación a manera de predicción local de una formulación aritmética, algebraica o analítica. Al momento de observar la práctica de predicción Caballero (2018) y Arciniegas (2023) plantean que se puede presentar a través de una formulación aritmética, una formulación algebraica o bien, como apreciación del valor de una variable respecto a otra. Cabe precisar que, la formulación aritmética se demuestra cuando el estudiante utiliza estructuras de las operaciones básicas (suma, resta, producto y cociente) para poder predecir nuevos estados, mientras que, la apreciación del valor de una variable respecto a otra el estudiante predice comportamientos a partir de relaciones y comparaciones numéricas que nacen de una variación constante (Arciniegas, 2023). Además, la formulación algebraica se evidencia cuando el estudiante utiliza expresiones algebraicas o fórmulas analíticas para predecir valores, por ejemplo, en la sucesión 2^n el estudiante puede utilizar dicha expresión algebraica para predecir el resultado en cualquier valor.

La Estimación corresponde a la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo. Teniendo en cuenta la práctica anterior, sería una predicción más general que anticipa comportamientos en intervalos concretos, anteriores o posteriores (Caballero, 2018). Igualmente, esta práctica se distingue de manera cuantitativa y cualitativa. Desde el punto

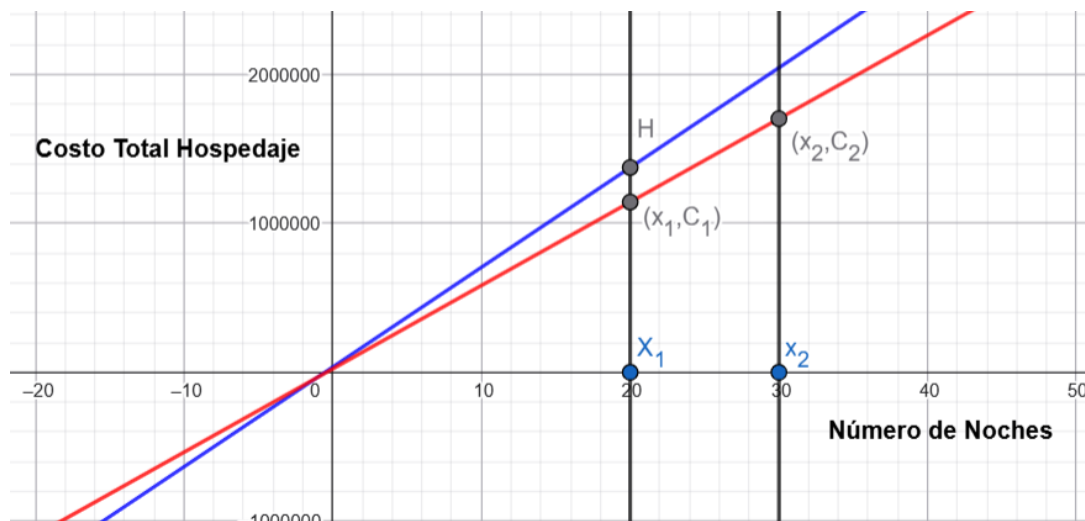
de vista cuantitativo se distingue cuando el estudiante realiza una generalización del comportamiento a partir de estructuras aritméticas. Por otro lado, se caracteriza de forma cualitativa cuando el estudiante predice comportamientos futuros como “mayores”, “más o menos rápidos”, “diferentes” a partir de los datos presentados.

Asimismo, según Caballero (2018), estas PV evolucionan entre ellas de forma pragmática, es decir, no necesariamente de forma secuencial, sino que hacen referencia a un proceso continuo y flexible que se adapta a las respuestas y a la utilidad práctica dentro una situación específica. Lo anterior es retomado por Arciniegas (2023), pues en las metas de aprendizaje que se plantean por cada momento, es claro ver que, en ocasiones, una práctica puede recurrir a otra, o bien, puede darse la ausencia de una práctica variacional en una situación específica.

3.4.Variación constante desde las prácticas variacionales

Al momento de realizar el estudio de la variación constante es recomendable abordar situaciones de variación y cambio que lleven a reconocer la función lineal como aquella que varía constantemente, y para lograr esto, Caballero y Moreno (2017) promueven desarrollar las PV.

A continuación, se presenta un ejemplo a través de la representación gráfica de dos funciones (línea recta roja y azul) que modelan el costo del hospedaje en dos hoteles (figura 2). Aquí se irá mostrando cómo se incentiva o emerge cada PV.

Figura 2*Representación gráfica de funciones de costo*

Inicialmente, la práctica de comparación se revela al identificar cambios constantes entre un estado y otro, en este caso son los puntos (x_1, C_1) y (x_2, C_2) que muestra la gráfica, al comparar se puede evidenciar que el costo de hospedaje varía, no es el mismo, en este caso aumenta. Cabe resaltar que los cambios pueden surgir entre diferentes estados del mismo fenómeno o en estados equivalentes de diferentes fenómenos (Caballero, 2018). Es decir, se pueden comparar costos para diferentes tiempos, puntos (x_2, C_2) y (x_1, C_1) de la figura 3, o se pueden comparar diferentes funciones de costo para el mismo tiempo, punto H y (x_1, C_1) de la figura 3. Luego, es posible comparar de dos formas, a través de una diferencia o de un cociente. Por ejemplo, se compara a través de una diferencia el cambio de x_2 a x_1 , al igual que el cambio entre C_2 y C_1 , que corresponden a cambios en la misma magnitud. La comparación por cociente se relaciona al concepto de pendiente de la recta, es decir, se realiza un cociente entre las diferencias que enfrenta el cambio en la variable dependiente con el cambio en la variable independiente, en otras palabras, se compara la diferencia $(C_2 - C_1)$ con la diferencia $(x_2 - x_1)$ a través de un cociente entre ellas.

Al hablar de seriación se da cuando el estudiante compara diversos puntos de la gráfica y da cuenta de que el valor de C_1 aumenta cierta cantidad, por medio de una diferencia, o que el cociente de las diferencias de valores en x y valores en C es una constante, y concluye que dicho comportamiento se da para todos los puntos. En palabras de Arciniegas (2023) la seriación se logra al comparar sucesivamente estados consecutivos en una representación del objeto matemático para caracterizar el patrón de variación. Entonces, cuando la descripción es cualitativa, y se hace por medio de diferencias sucesivas se obtienen expresiones como “siempre aumenta”, “el siguiente es mayor que el anterior”, mientras que, como cociente se obtienen expresiones como “siempre el resultado es el mismo” o “el cambio es constante”. Por otro lado, de forma cuantitativa, la explicación está acompañada de procedimientos y argumentos que mencionan datos numéricos de la comparación.

A través de la seriación se puede identificar el patrón de cambio en los estados consecutivos, y dicho patrón es conocido como la pendiente. Por lo cual, al definir la variación constante la predicción consiste en interpretar la pendiente como el cambio constante y usarlo para anticipar el valor del costo de una variable. Algo para tener en cuenta en la predicción es el parámetro b de la variable dependiente que relaciona el cambio entre esta última y la variable independiente. Un ejemplo de la predicción es descubrir el costo para un valor específico de más de 10 noches, lo cual se puede abordar desde una formulación aritmética ya sea por medio de una suma (sumar costos conocidos como: costo de 5 noches dos veces) o multiplicación (costos por noche por 10), o por medio de la apreciación del valor de una variable respecto a otra, donde el estudiante identifica que por cada aumento en la variable independiente, se aumenta el doble en la variable dependiente, por lo cual predice para otros valores hallando el doble de dicho valor. Siguiendo el ejemplo anterior, si el estudiante descubre la expresión algebraica $f(x) = 2x$ y predice valores

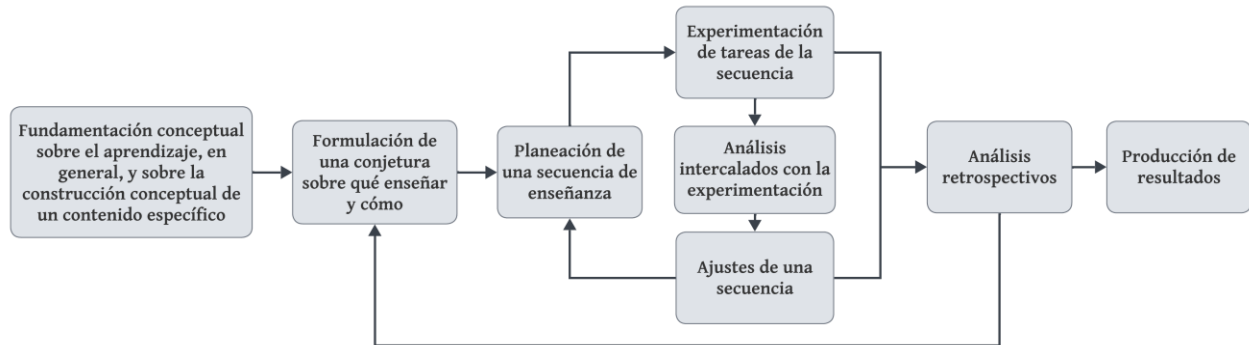
anteriores o posteriores evaluando en la expresión algebraica, estaría aplicando la predicción como formulación algebraica.

Por último, se procede a indagar y anticipar comportamientos y tendencias en la función del costo a través de la estimación. Al hablar de la variación constante, la descripción del comportamiento global se puede dar como un modelo creciente, decreciente o constante, con expresiones como “es mayor” o “es menor”. Generalmente la estimación se propicia al preguntar acerca de un intervalo futuro (en ocasiones no disponible visualmente al estudiante) y que pueda estimar el comportamiento futuro. En el caso de la figura 3, se puede cuestionar acerca de comportamientos en valores de la variable independiente mayores a 400. Un acercamiento cuantitativo consiste en tomar el valor conocido más cercano al 400 y a través de sumas o multiplicaciones estimar que para valores mayores a 400 la variable dependiente será mayor. Y, de forma cualitativa, es generalizar el comportamiento de la gráfica y estimar que los valores de la variable dependiente serán mayores, porque la recta está “subiendo”.

4. Metodología

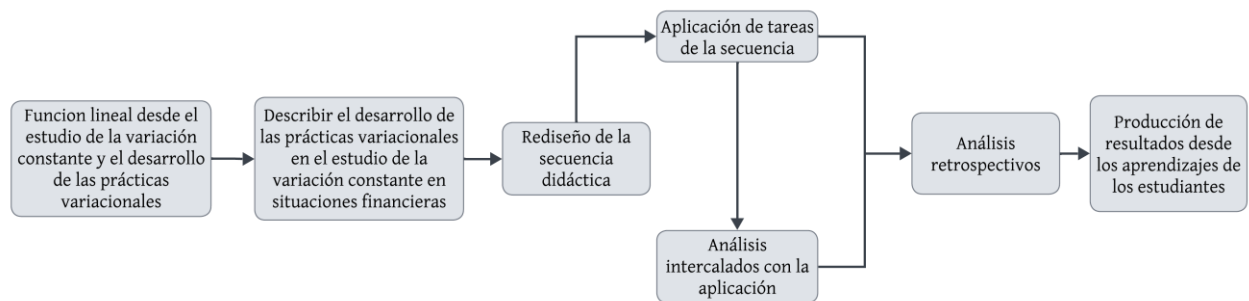
Como se ha mencionado anteriormente, esta investigación tiene como objetivo describir el desarrollo de las prácticas variacionales en el estudio de la variación constante en situaciones financieras. Por ende, se adoptó un estudio cualitativo para comprender las situaciones, hechos y acontecimientos dentro del contexto natural del aula con el fin de generar descripciones a partir de lo que los participantes escriban, digan o hagan directamente. Así, las fuentes principales de obtención de información serán observaciones, entrevistas, grabaciones y otros registros (Rodríguez et al., 1996).

En particular, esta investigación se sustentó en la estrategia investigativa: experimento de enseñanza, que permite observar el aprendizaje *in situ* y describir la evolución de las interpretaciones de los estudiantes sobre la variación constante, así como la dinámica propia del aula. En este sentido, esta metodología busca analizar aspectos relacionados al proceso de aprendizaje de los estudiantes según los significados que estos van construyendo (Camargo, 2021). Para llevar a cabo este propósito a la práctica Camargo (2021) propone un esquema general (ver figura 3) que articula un proceso de formulación, planeación, implementación y reflexión.

Figura 3*Esquema del experimento de enseñanza*

Nota. Adaptado de "Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática" (Camargo, 2021, p.75)

Teniendo como referencia el esquema anterior, para esta investigación se plantea el camino metodológico en la figura 4, en el cual se abordan cinco fases: (1) Revisión bibliográfica sobre el concepto de función lineal, (2) Planteamiento de la conjetura, (3) Rediseño de la secuencia didáctica, (4) Aplicación y análisis intercalado de la secuencia y (5) Análisis retrospectivos.

Figura 4*Camino metodológico*

4.1. Fase 1: Revisión bibliográfica sobre el concepto de función lineal

Como un primer inicio, se realizó una revisión bibliográfica, acerca de la enseñanza del concepto de función lineal y el aporte al aprendizaje de los estudiantes. Lo anterior, para identificar

dificultades, como, las ideas erróneas en la definición e interpretación del concepto de función que están descontextualizadas y alejadas de su carácter variacional. En respuesta, se propuso abordar la función desde la significación de la variación constante; por ello, la profundización en el PyLV propone la variación constante como eje articulador en la enseñanza de la función lineal. Además, se establecen las PV como una herramienta para estudiar la variación y el cambio, lo que favorece la interpretación y comprensión del objeto matemático.

4.2. Fase 2: Planteamiento de la conjetura

En esta fase se analizó el diseño original, junto a sus características y conjetura inicial respecto al estudio de la función lineal como modelo de variación constante; para así, describir la conjetura para esta investigación.

El diseño original se desarrolló en el marco del proyecto 70783 denominado *Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores*, que, en general, es una propuesta que buscó atender la diversidad en el aula de matemáticas teniendo en cuenta la flexibilización y adaptación de secuencias de actividades (Ariza y Fiallo, 2024). En tanto, cada diseño fruto del proyecto propuso 4 secuencias que respondían a los 4 niveles de profundidad planteados por Parada (2021); cada nivel refleja una flexibilización de los objetivos de aprendizaje según habilidades y características del estudiante. En este caso, se acogió el diseño sobre presupuesto de un viaje, nivel de profundidad 3 (Anexo A), ya que, este nivel es apto para un aula estándar de estudiantes de noveno grado. La estructura del diseño distribuida en 4 momentos, siguiendo la estructura de Jácome et al. (2024), ahonda en el desarrollo de la actividad matemática esperada (Parada, 2021), así:

- **Momento 1:** En este momento inicia el estudio del objeto matemático a través de una situación problema; donde se prioriza la comprensión del problema para identificar conocimientos previos.

En el caso del diseño, se propone una situación de un viaje familiar, donde Tomás y su familia desean ir de vacaciones, y deben realizar un presupuesto con el dinero disponible y el costo de los gastos que les ofrecieron. Luego, las preguntas apuntan a que el estudiante calcule los gastos totales, evalúe si es posible cubrirlos y plantee sugerencias acerca del manejo de los recursos.

- **Momento 2:** A lo largo de este momento se proponen actividades que inciten al alumno a dar respuesta sobre la problemática, pero que guíen a la construcción del objeto matemático. Aquí, se espera que el estudiante identifique propiedades, diferentes representaciones y conexiones para plantear estrategias de solución que aborden el objeto matemático.

En el diseño, las tareas se relacionan con el costo del hospedaje, donde a Tomás le ofrecen dos alojamientos con sus costos fijos y variables, él debe evaluar las opciones y decidir acerca del hotel y el número de noches a hospedarse. En medio de esta situación se abordan los costos fijos, costos variables, el carácter estable del cambio y la representación gráfica junto a sus elementos, para así decidir el hotel más conveniente para Tomás.

- **Momento 3:** Se enfoca en consolidar los aprendizajes, y poner en práctica lo aprendido. Se invita a formular actividades de ejercitación, y problematización que promuevan el uso razonado de los conocimientos adquiridos en las tareas previas.

En cuanto al diseño escogido, se inicia introduciendo la representación tabular para que el estudiante pueda observar el carácter estable del cambio al evaluar la diferencia entre los

valores de noches consecutivas en cada hotel. Además, se busca consolidar las conexiones entre las diferentes representaciones (gráfica, tabular y analítica) y que el estudiante pueda plantear la expresión en su forma analítica y comprender la variable dependiente e independiente. De esta manera, significar la expresión $y = mx + b$, al distinguir la pendiente como el costo por noche y el elemento que denota la inclinación de la recta, así como, el parámetro b es el costo fijo por las 4 personas de la familia de Tomás y que determina el corte con el eje y .

- **Momento 4:** En este momento, se evalúan los desempeños de los estudiantes. En tanto, las actividades se orientan a evaluar la profundidad con la que el estudiante se acercó al objeto matemático mediante actividades retadoras.

Aquí, el diseño plantea una nueva situación con una familia más numerosa y tres opciones de alojamiento con razones de costo diferentes a las anteriores; se habla de un costo de reserva y un costo por noche. En ese caso, se espera que el estudiante construya una expresión analítica, analice e identifique propiedades en las representaciones gráficas, y las signifique según el contexto y lo aprendido en los momentos anteriores. Finalmente, el estudiante debe decidir el mejor hotel para la nueva familia, teniendo en cuenta el comportamiento de la función en las diferentes representaciones.

Es así como el diseño busca que el estudiante aborde la función lineal como un modelo de variación constante; nótese que no se definió la función lineal como una ecuación analítica, sino a través de una situación problematizadora, enmarcada dentro del contexto de gastos y costos de un viaje.

Ahora bien, para el presente estudio se acogió el diseño con los 4 momentos, con sus características propias, pero se incluyó la discusión de la variación constante desde el desarrollo de las prácticas variacionales. Así, a continuación, se describe la conjetura del experimento de enseñanza desde la

discusión del objeto matemático a través de las prácticas variacionales en el contexto del presupuesto del viaje. Es de aclarar que, esta conjetura se presentará como una ruta cognitiva que se espera el estudiante transite, en ella se sintetiza en forma articulada la práctica que emergerá en cada momento a través de los cuestionamientos planteados dentro del contexto de presupuesto de un viaje.

Conjetura momentos 1 y 2. Dentro del marco planteado por Parada (2021), en el momento 1 se propone la situación problematizadora sobre el presupuesto del viaje de Tomás y su familia (*figura 5*); así, las preguntas ajustadas se enfocan en la exploración y comprensión de los gastos del pasadía, la identificación de las variables (número de personas y costo de pasadía) y la estimación acerca del comportamiento del costo del pasadía según el número de integrantes de la familia. De igual manera, este momento potencia las habilidades de la EEF al permitir que el estudiante analice las ofertas, las contraste con su dinero disponible e identifique condiciones variables dentro de los gastos.

Figura 5

Situación problematizadora en el diseño

Momento 1

Thomás

Un viaje familiar

Thomás desea obsequiar a su familia un pasadía a Panaca en las próximas vacaciones. La familia reside en la ciudad de Medellín y el dinero con el que cuenta Thomás para el viaje es de \$2.650.000.

La empresa Price-travel le facilita a Thomás la siguiente ficha de precios.

Transporte Ida y regreso	Alimentación (día)	Plan turístico Panaca
Adultos y niños: 110.000 c/u	Menú Adulto: \$65.000 Menú infantil: \$42.000	Adulto: \$165.000 Niños: \$85.000

A partir de la presente situación se plantean las preguntas:

1. *¿Le alcanza el dinero a Thomás? ¿le sobra/falta? Escriba los procedimientos y justifique su respuesta.*
2. *¿En qué condiciones podrían cambiar el valor de los gastos? Justifique su respuesta.*
3. *¿Qué recomendación le harías a Thomás para que los gastos sean menores?*

En la pregunta 1 se promueve la comparación de los costos del viaje con el dinero disponible. Por ejemplo, en una comparación cualitativa el alumno señala el número mayor o menor, y en una cuantitativa el estudiante realiza una diferencia entre los valores encontrados. Por otro lado, en la pregunta 2 se invita al estudiante a reflexionar sobre la variación de los gastos, se espera que estime el aumento de los costos al aumentar el número de personas en el pasadía. Finalmente, en la pregunta 3 aporta al contexto financiero y promueve la toma de decisiones.

A lo largo del momento 2 se busca que el estudiante reconozca el carácter estable del cambio de la función costo de los hoteles, además, que entienda que la función costo aumenta su valor la misma cantidad por cada noche. Por otro lado, desde la EEF se espera que el estudiante comprenda

las razones de costo de cada hospedaje, mejore la distribución y organización del dinero, y tome decisiones financieras acerca de su hospedaje con base en el análisis matemático.

Figura 6

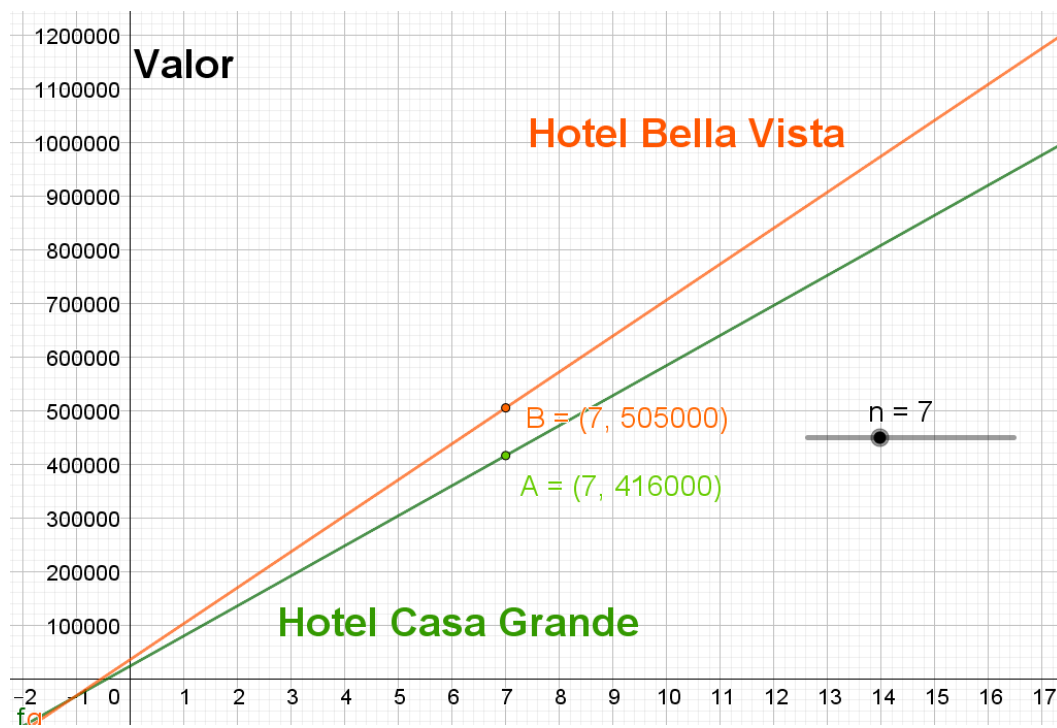
Ofertas de hospedaje momento 2

4. Analiza y responde. La empresa Price-travel le facilita a Tomás las siguientes opciones de hospedaje:



- a) ¿Qué valor debe pagar la familia de Tomás por una noche con cada opción de hotel?
- b) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 2 noches en el hotel Bella Vista?
- c) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 3 noches en el hotel Casa Grande?

Con respecto a las PV, en la pregunta *a* (Ver figura 6) se incentiva la comparación cuantitativa cuando el estudiante contrasta los costos de los hoteles Bella Vista y Casa Grande para el mismo número de noches, así, cuando esa comparación se realiza para 2 y 3 noches (pregunta b y c) se promueve la práctica de la seriación cuantitativa, donde el estudiante identifica el patrón numérico que representa el carácter estable del cambio, es decir, el precio aumenta con un patrón fijo noche a noche.

Figura 7*Representación gráfica del costo de hospedajes*

Luego, al introducir la representación gráfica, véase *figura 7*, se incentiva la comparación y seriación, mayormente de forma cualitativa. Esto se debe a que los gráficos propician otro tipo de argumentos usando gestos o expresiones verbales; por ejemplo, el estudiante puede elegir un hotel y argumentar que para varias noches consecutivas la recta del costo está “por debajo” de la otra recta, lo cual evidencia la práctica de seriación. Por otro lado, si el estudiante afirma escoger uno porque, para un número específico de noches, el punto de costo está “más abajo” que el otro, se evidencia una comparación cualitativa.

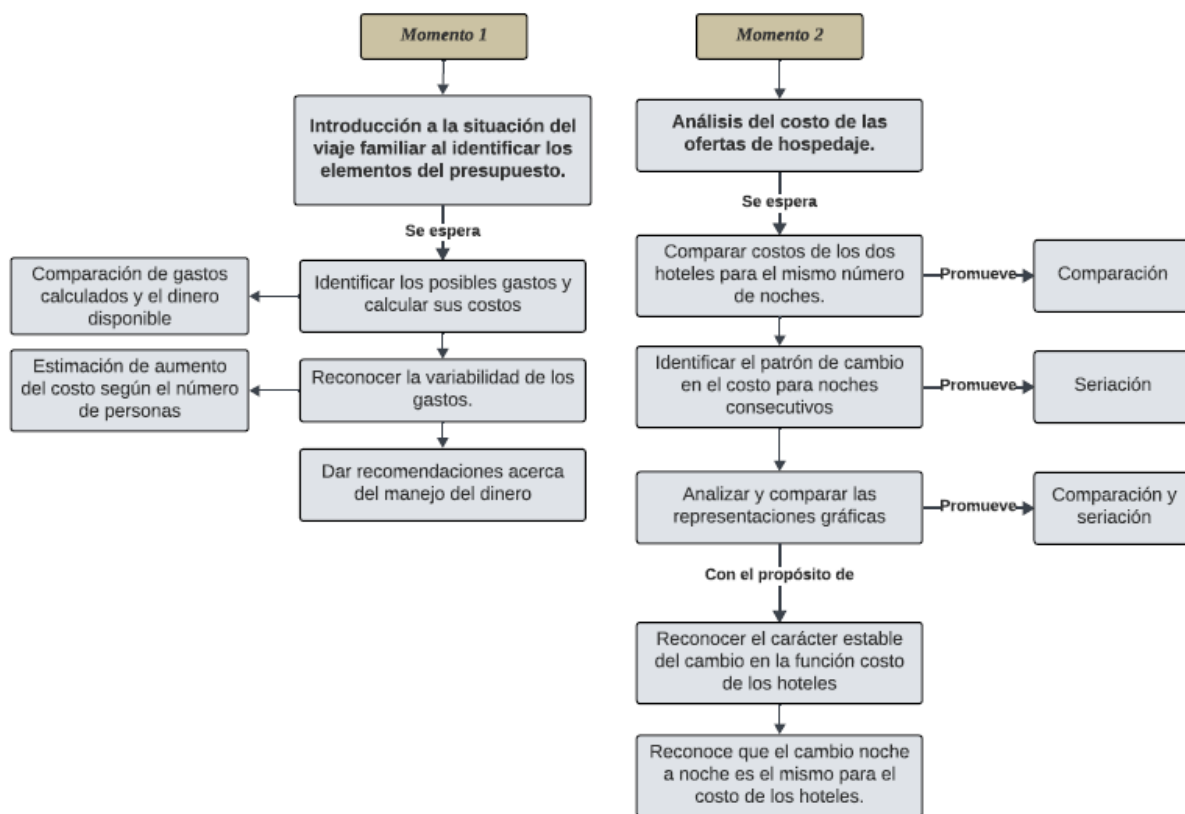
De la mano con la seriación y la comparación, se puede observar la estimación en que el estudiante prediga el comportamiento general para valores no conocidos y, por ende, el comportamiento general de la recta. Así entonces, en este momento se promueve la comparación, seriación y

estimación para distinguir el carácter estable del cambio, al comprender la función costo de ambos hoteles y tomar decisiones financieramente inteligentes dentro del presupuesto que se propone.

Así, a continuación, se presenta una síntesis de la conjetura sobre la función lineal como modelo de variación constante desde el desarrollo de las prácticas variacionales para los momentos 1 y 2, ver figura 8.

Figura 8

Variación constante desde las prácticas variacionales en un contexto financiero

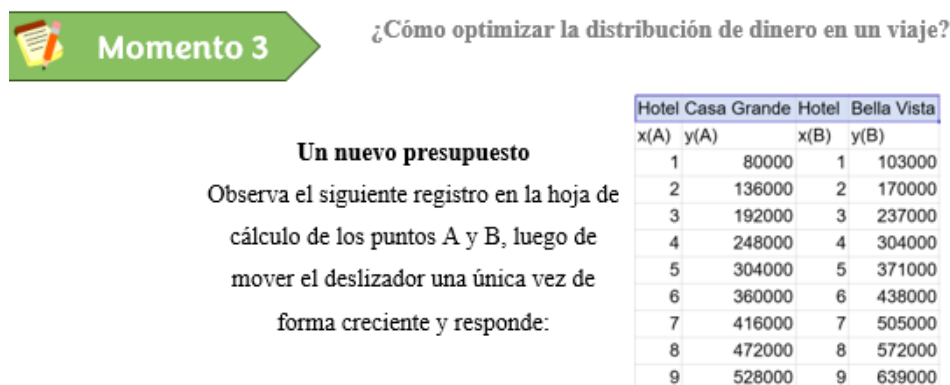


Conjetura momentos 3 y 4. En el momento 3 se busca significar el costo por noche como el parámetro m en la expresión $y = mx + b$, y también como la inclinación de las rectas. De igual manera, se busca dar significado al costo fijo como el parámetro b , y como el punto de corte con el eje y . Además, desde la EEF el propósito se centra en que el estudiante identifique y comprenda

los costos fijos y los costos variables dentro del costo total del hospedaje y así, dar sentido a las razones de costo de las ofertas de hospedaje.

Figura 9

Representación tabular del costo de hospedajes.



En este momento se introduce la representación tabular (ver figura 9), con el objetivo de que los estudiantes asocien los datos con la situación financiera del diseño. Se espera identificar la variable dependiente (costo de hospedaje) e independiente (número de noches) y, en general, transversalizar elementos de la representación gráfica y aritmética, como la pendiente o el patrón de cambio constante, a la representación tabular.

En cuanto a las PV se continúa promoviendo la comparación y seriación. La representación tabular permite que el estudiante compare diferentes estados del mismo fenómeno, es decir, diferentes números de noches para la función costo, y esta comparación se realiza por medio de una resta, dicha diferencia es el costo por noche de la estadía. Luego, si el estudiante identifica el patrón de cambio para noches consecutivas y lo señala como una característica de la situación de variación, revela la práctica de seriación. Asimismo, se espera realizar una conexión entre los patrones numéricos de ambos hoteles, revelados por una seriación cuantitativa, y la inclinación de las rectas de ambos hoteles, revelado por una seriación cualitativa.

Figura 10*Preguntas 7-10 momento 3*

7. Para las primeras 5 noches escriba la expresión (una a una) que le permite hallar el valor a pagar por el hospedaje en el hotel Casa Grande.
8. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Casa Grande para cualquier cantidad de noches?
9. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Bella Vista para cualquier cantidad de noches?
10. Sea “ x ” el número de noches. Reescriba las expresiones construidas en las dos preguntas anteriores.

Hotel Casa Grande: $V_1 =$

Hotel Bella Vista: $V_2 =$

“ V ” significa el valor total a pagar por el hospedaje en ese hotel.



En la misma línea, las preguntas de la figura 10 propician la formulación analítica de los costos de ambos hospedajes, es decir, se incentiva consolidar la práctica de predicción, ya sea a través de la formulación aritmética, la formulación analítica y/o la apreciación de una variable respecto a otra. Por ejemplo, cuando el estudiante expresa el costo del hospedaje en forma de párrafo textual explicando el proceso, se considera apreciación de una variable respecto a otra; si el estudiante expresa el costo del hospedaje desde la relación de sumas y restas, se considera expresión aritmética; y si expresa el costo del hospedaje con una expresión de la forma $y = mx + b$ se considera formulación analítica.

Luego, en las preguntas 11-13 (figura 11) teniendo en cuenta las expresiones analíticas se busca propiciar conexiones entre las 3 representaciones: la tabla de datos, la expresión analítica y la gráfica. Así, se espera significar el costo por noche como la diferencia entre dos costos consecutivos en la representación tabular, también como el parámetro m en la expresión analítica, y como la pendiente de las rectas en la expresión gráfica. Asimismo, significar el valor fijo en el

contexto financiero como el parámetro b en la expresión analítica, y como el corte con el eje y en la representación gráfica.

Figura 11

Preguntas 11-13 momento 3

- 11.** ¿Qué representa el valor fijo de cada expresión?

- 12.** ¿Qué relación encuentra entre la gráfica, la tabla de datos y la expresión hallada en la pregunta anterior (8 o 9) para cada uno de los hoteles?

- 13.** ¿Qué relación del costo por noche encuentra en la expresión hallada y las gráficas?

En el momento 4 se busca que el estudiante vaya más allá de significar el parámetro m como el costo por noche y aplique dicho parámetro para hacer predicciones y estimaciones acerca de los costos de 3 ofertas de hospedaje. En este sentido, el estudiante debe analizar y tomar una decisión financiera en donde la cantidad de opciones incrementa la dificultad del análisis, potenciando así su capacidad de toma de decisiones financieras dentro de un presupuesto.

Figura 12*Situación problematizadora momento 4*

Momento 4

Presupuesto para un viaje familiar

La familia Espinosa vive en Medellín y está organizando un viaje en celebración de los 60 años de casados del señor y señora Espinosa. La idea es viajar al cabo de la vela en la Guajira. En total son 23 menores de edad y 15 adultos.

Alicia propone analizar muy bien las ofertas de hospedaje para poder minimizar los gastos, para ello, consultó tres opciones:



Hotel Mar azul

Reserva ya por tan solo
\$45.000 y paga \$4.000
por persona, cada noche.

\$45.000



Cabañas San Valentín

Hermosa cabaña con
capacidad de 40 personas por
un costo de reserva de \$45.000
y \$97.500 por noche.

\$97.500 por
noche



**Casa campestre
Fuente Mágica**

Disfruta de la sencillez y
comodidad en casa cam-
pestre de capacidad de 40
personas por un valor
de \$120.000
por noche.

\$120.000 por
noche



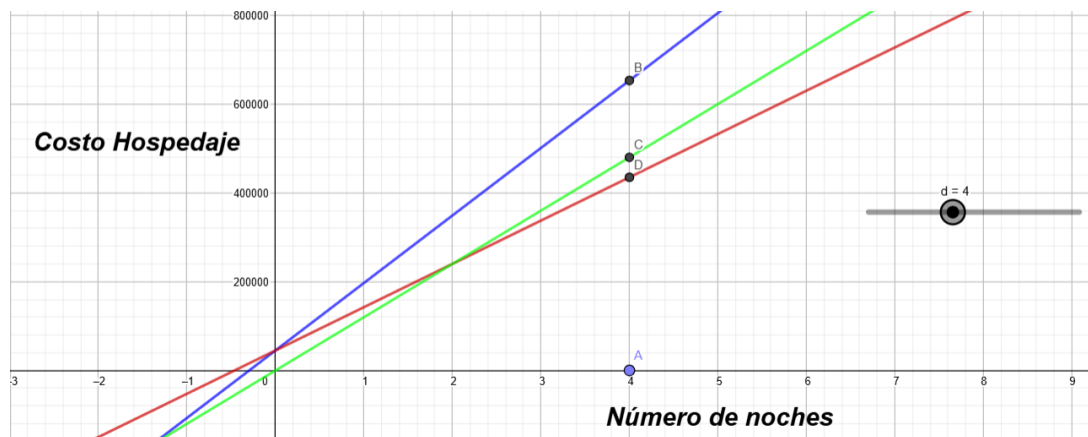
Con una nueva situación problematizadora, se proponen 3 opciones de hospedaje con un elemento diferente: el costo de reserva como costo fijo (ver figura 12). Luego, cuando se le pregunta al estudiante *¿Cuál es la opción más económica?* Se espera que el estudiante defina cuál es la mejor opción al predecir el costo de los 3 hoteles para el mismo número de noches, comparar los valores y determinar el más económico, o, por otro lado, predecir el comportamiento general a partir de la pendiente de cada opción y seleccionar la más económica. Luego, al momento de construir una expresión que permita hallar el costo, se promueve la predicción analítica o aritmética y en su defecto, las prácticas previas.

Nuevamente, se articula la expresión gráfica de los costos de los hoteles (figura 13), de acuerdo con las expresiones propuestas anteriormente y se busca identificar propiedades de la función costo por medio del análisis de todas sus representaciones. Seguido de esto, se propone un número de noches específico (4 noches) y, para poder elegir la mejor opción, el estudiante debe comparar la

función costo evaluada en $x=4$, ya sea usando la expresión analítica o comparando gráficamente los puntos en las rectas de costo de cada hotel. Otra opción es que el estudiante realice seriación al generalizar los datos según la inclinación y tomar la recta de menor pendiente.

Figura 13

Representación gráfica de hospedajes momento 4.



Luego, teniendo en cuenta la gráfica, se espera que el estudiante pueda responder a la pregunta: *¿Hay costos iguales para alguna noche?* Para lo cual, el estudiante debe comparar los costos de los hoteles en diferentes valores de la variable número de noches e identificar el punto de corte de las rectas como el valor en que tanto la Casa Campestre como Cabañas San Valentín tienen el mismo costo. Además, se espera que el estudiante previamente haya identificado que el hotel Mar Azul y la Cabaña San Valentín tienen el mismo costo de reserva y que esto se evidencia en los cortes con el eje y de las rectas de dichos hospedajes, que son el mismo punto.

Adicionalmente, se busca que el estudiante ordene las expresiones algebraicas de menor a mayor. Para esto, es necesario establecer unos intervalos, ya que, existe un punto de intersección en $x=2$ en donde cambia el orden de las expresiones. Un paso necesario para ordenar las expresiones es comprender la relación entre la pendiente y la inclinación de las rectas, lo cual se profundiza en el momento 3. Así, se evidencia la comprensión del estudiante acerca de esa relación y se espera

observar la práctica de estimación al predecir el comportamiento de los costos, concluyendo con el orden de las funciones. Además, la estimación se evidencia cuando se cambia el número de personas (figura 14) y el estudiante analiza los comportamientos de acuerdo con el cambio. Para así, decidir respecto al hospedaje más conveniente y al número de noches que se hospedará.

Figura 14

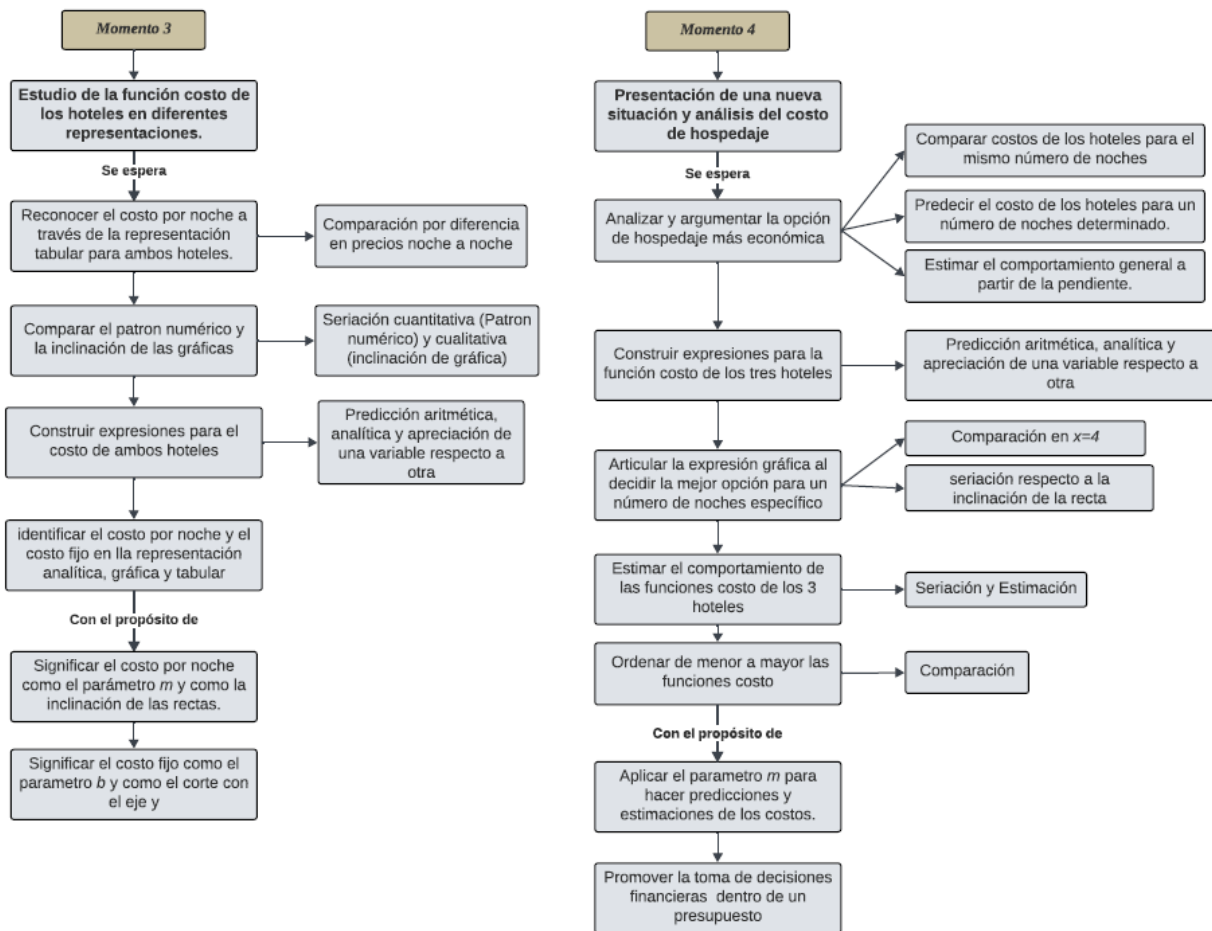
Preguntas finales del diseño

- | | |
|---|---|
| 12. ¿Cuál opción de hospedaje le recomienda a la familia Espinosa? | 13. Si 20 personas deciden no viajar, ¿cuál opción de hospedaje le recomienda a la familia Espinosa? |
| <hr/> <hr/> <hr/> | <hr/> <hr/> <hr/> |

En general, el diseño presenta como protagonista a Tomás que desea presupuestar el viaje que realizará con su familia, para esto se analizan los gastos y el costo de estos. La manera en que se aborda esta situación está estructurada en 4 momentos, que permiten abordar el concepto de la función lineal como variación constante a través del desarrollo de las Prácticas Variacionales. Así, en la figura 15 se presenta una síntesis de la conjetura en los momentos 3 y 4 restantes.

Figura 15

Variación constante desde las prácticas variacionales desde el contexto financiero.



En general, la secuencia de actividades diseñada en momentos, además de abordar el concepto de variación constante a través del desarrollo de las PV, articula las representaciones (numérica, gráfica y analítica) para establecer relaciones de variación constante que modelan la situación de presupuesto de un viaje. En el momento 1 se desarrollan las PV de comparación y seriación al hacer una introducción a la situación problematizadora, luego, en el momento 2, se realiza un análisis del costo de los hoteles en su representación gráfica a través de las PV para que el estudiante reconozca el carácter estable del cambio. En el momento 3, se articula la representación tabular para fortalecer la idea del cambio constante y se incluye la representación analítica con el

propósito de significar los parámetros de la expresión $y = mx + b$ según las propiedades de la función costo de los hoteles, todo esto desde el desarrollo de las cuatro PV. Finalmente, en el momento 4 se presenta una nueva situación problematizadora que se estudia desde sus representaciones gráficas y analíticas, potenciando las cuatro PV con el fin de aplicar el parámetro m para hacer predicciones y estimaciones de los costos y tomar decisiones financieras dentro del presupuesto.

4.3. Fase 3: Rediseño de la secuencia didáctica

A partir del diseño propuesto por Arciniegas et al. (2022), se realizó un primer análisis para identificar y anticipar las PV que pueden emerger de cada una de las tareas y preguntas de la secuencia, asegurando que estas se encaminen hacia el objetivo de promover la comprensión de la función lineal; a modo que surgieron modificaciones en algunas preguntas con el fin de orientar el desarrollo de las PV y significación de la variación constante en el contexto.

Ahora bien, teniendo en cuenta el grupo de estudiantes y el contexto en el que se esperaba implementarlo (Revisar Fase 4), se realizaron ajustes en el uso de los recursos y en la disposición metodológica.

Adicionalmente, se realizó un pilotaje con integrantes del Semillero de Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática, adscrito al Grupo de Investigación en Educación Matemática (Edumat-UIS), y se ejecutaron otros ajustes relacionados con la claridad al formular las preguntas, teniendo en cuenta los términos involucrados, como el dinero restante y disponible; además, se reorganizó la estructura de la respuesta, separando procedimientos y justificación; y, finalmente, se mejoró la visualización de los datos clave en la información dada.

Así, se realizaron ajustes al diseño en relación con el desarrollo de las PV, redacción y gramática y recursos. En detalle, ver capítulo de resultados.

4.4. Fase 4: Aplicación y análisis intercalado de la secuencia

Esta fase corresponde a la puesta en escena de la secuencia en el contexto natural del aula con estudiantes de noveno grado. Es preciso aclarar que la implementación y el análisis no fueron sucesivos, sino simultáneos, es decir, mientras se desarrollaron las clases, se observó y reflexionó en tiempo real sobre las interacciones, producciones y conclusiones de los estudiantes. Para ello, se tomó registro videográfico de la sesión. Asimismo, dada la naturaleza del aula, fue fundamental realizar ajustes sobre la marcha, debido a situaciones propias del contexto escolar, como fueron la motivación, la diversidad de ritmos de aprendizaje o dificultades conceptuales. Así, los instrumentos de recolección de datos fueron: videograbación de la implementación y hojas de trabajo de los estudiantes.

La implementación del diseño se realizó en una institución de carácter oficial de la ciudad de Bucaramanga. Cabe resaltar que, en el marco de identidad institucional, se proyecta una formación académica enfocada en procesos de pensamiento dinámico, analítico y crítico de los conocimientos, a lo que responde el diseño desde su intención analítica y dinámica.

El grupo de estudio fue de 35 estudiantes de 9.º grado cuyas edades están entre los 14 y 16 años. La implementación se realizó durante dos sesiones, para un total de 5 horas; durante la primera sesión se realizaron los momentos 1 y 2 y en la segunda sesión los momentos 3 y 4.

En cuanto a los instrumentos de recolección de datos, se manejaron las hojas de trabajo correspondientes al diseño, así como la videograbación y la grabación de audio sobre los argumentos y respuestas de los estudiantes. Es importante resaltar la observación y reflexión de los investigadores durante las interacciones con los estudiantes. Es decir, la aplicación del diseño fue mucho más que el desarrollo de una clase; incluyó la observación participante donde fue necesario acercarse al estudiante, cuestionar sus respuestas y promover la justificación con el

propósito de evidenciar las prácticas variacionales, no solo en su respuesta escrita, sino también, en su lenguaje y forma de comunicación. Pues, dicha comunicación podía ser de carácter verbal, gestual o escrito.

Ahora bien, el análisis de los resultados se realizó por categorías, donde cada categoría corresponde a una práctica variacional. Luego, se buscó identificar la evidencia de las prácticas variacionales a lo largo de todas las actividades y discutir cómo cada una de las prácticas variacionales ayudó a la significación de la función lineal como variación constante.

4.5. Fase 5: Análisis retrospectivos

Este análisis tiene el objetivo de enmarcar los eventos de la clase en un marco conceptual, para lo cual se revisan evidencias a priori y a posteriori, con el fin de evaluar la conjetura propuesta y desarrollar constructos teóricos o modelos de enseñanza (Camargo, 2021).

Este análisis consistió en tomar los episodios de las videgrabaciones y de las hojas de trabajo para identificar las respuestas y argumentos que dieran evidencia de las PV en sus diversas formas, describir cómo los estudiantes usaron y combinaron dichas prácticas para estudiar la variación constante en el diseño. Cabe resaltar que para las evidencias se seleccionaron aquellas respuestas que, por su riqueza, permitían evidenciar cada una de las PV, por lo cual el análisis de resultados se presenta con base en estas: comparación, seriación, estimación y predicción. En consecuencia, cada evidencia se presentará y describirá explícitamente, luego, se articulará con el análisis de la práctica variacional implicada y, finalmente, se brindará la significación de la función lineal desde los elementos involucrados.

Ahora bien, como primer paso del análisis se realizó una preclasificación de la información recogida en la implementación. En un primer acercamiento a las hojas de trabajo de los estudiantes, se evidenciaron casos en que no culminaron la totalidad del diseño, otros dejaron preguntas sin

responder, en otros se evidenció el uso de la inteligencia artificial para dar respuesta, ya que eran argumentos descontextualizados de la situación que se manejaba en el diseño, y otra parte de los estudiantes no ofrecían mayor justificación en sus respuestas. Debido a esto, se seleccionó una muestra de 20 estudiantes para continuar con el análisis.

4.5.1. Uso de notebookLM en el análisis de la información

En el análisis de datos se empleó la inteligencia artificial NotebookLM como herramienta de apoyo para facilitar la depuración de los datos. Dentro de su función estuvo identificar las PV evidenciadas en las respuestas de las hojas de trabajo y en tres de las videograbaciones seleccionadas. Es decir, fue un medio para detectar sus argumentos variacionales. Este uso estratégico se fundamenta en que, con instrucciones bien diseñadas la IA puede mejorar significativamente el análisis cualitativo (Etesse, 2025).

Las videograbaciones fueron procesadas en NotebookLM para extraer sus transcripciones textuales, las cuales fueron revisadas y corregidas por los investigadores, por ejemplo, se agregaban manualmente partes incompletas y se ajustaban algunos errores de reconocimiento de voces. Luego, se creó un cuaderno donde se subieron 4 documentos que la IA iba a usar como fuentes de análisis, en un primer documento se definieron las PV según los aspectos teóricos del presente trabajo, en el segundo documento se presentaron los posibles argumentos variacionales que podrían emerger por cada PV a lo largo del diseño, el tercer documento fue el diseño ajustado por los investigadores y en el cuarto documento se plasmaron las transcripciones de audio y las respuestas transcritas de la muestra de 20 estudiantes.

La IA realizó el análisis por momentos, es decir, los 3 primeros documentos eran las fuentes de la IA para todo el estudio, pero se le presentaban las respuestas y transcripciones para cada uno de

los 4 momentos del diseño. En otras palabras, se le brindaban las transcripciones y respuestas del momento 1 y se le pedía hacer el análisis, luego con los datos del momento 2 y así sucesivamente. Así pues, al momento de interactuar con NotebookLM fue necesaria la creación de dos *prompts*, un *prompt* inicial donde se le dio el contexto a la IA acerca de lo que debe hacer:

“Actúa como asistente de investigación en educación matemática con experiencia en análisis cualitativo. A lo largo de esta sesión debes analizar las transcripciones de audio y respuestas de las hojas de trabajo de los estudiantes, organizadas por momentos (M1, M2, M3, M4). Te compartiré los datos de un momento a la vez. Antes de iniciar, lee los documentos 1 y 2 referentes a los aspectos teóricos de la investigación, identifica las cuatro prácticas variacionales (PV), sus definiciones y los argumentos que podrían evidenciar cada una de las PV que proponen los autores. Ese será tu único criterio de análisis durante toda la sesión.”

Luego, se introdujo el *prompt* de análisis por cada momento; este *prompt* se repitió para M1, M2, M3 y M4:

“Ahora analiza los datos del momento [x]. Ten en cuenta los siguientes criterios: incluye solo respuestas que evidencien claramente o moderadamente una PV; si una respuesta es ambigua, inclúyela marcada como “posible” e indica qué falta para confirmar la PV; omite respuestas que no correspondan a ninguna PV. Finalmente, organiza el resultado en una tabla con las siguientes columnas: 1. Estudiante (código), 2. Fragmento literal (cita textual breve), 3. PV identificada (según documentos 1 y 2), 4. Justificación (1-2 líneas explicando cómo evidencia la PV), 5. Nivel de evidencia (fuerte / posible)”. Así, NotebookLM se usó como asistente de organización y codificación cualitativa.

5. Resultados

En el siguiente capítulo se busca dar respuesta a la pregunta de investigación *¿Cómo estudiantes de noveno grado significan la función lineal como un modelo de variación constante a través del uso de prácticas variacionales en situaciones del contexto económico?* Para esto, se presentan 3 secciones: Los ajustes hechos al diseño, el desarrollo de las PV en el estudio de la variación constante y algunas apreciaciones sobre la EEF.

5.1. Diseño para el estudio de la variación constante en un contexto de presupuesto

En este apartado se presentan las modificaciones realizadas al diseño original. En primer lugar, se describen los ajustes orientados a potenciar el desarrollo de las PV y la significación del contexto financiero; en segundo lugar, se abordan los ajustes relacionados a redacción y gramática, los cuales se precisaron para garantizar que las preguntas comunicaran con claridad sin obstaculizar el proceso de razonamiento del estudiante; y en tercer lugar, se muestran las adaptaciones y usos que se le dio a los recursos, específicamente a los applets y representaciones, para aplicar el diseño bajo las condiciones reales de un contexto escolar. Por último, se describen los ajustes fruto de la discusión y pilotaje con los integrantes del semillero, donde se obtuvieron observaciones, recomendaciones y ajustes específicos al diseño a aplicar.

5.1.1. Ajustes por desarrollo de las PV y significación del contexto

Al momento de estudiar las ofertas del Hotel Bella Vista y del Hotel Casa Grande a través de las representaciones gráficas, se evidenció que las preguntas no direccionaban al estudiante hacia una conclusión clara desde el contexto, por lo tanto, se decidió añadir la siguiente pregunta al finalizar el momento 2: *¿Con cuál hotel es recomendable quedarse y cuánto se gastará en el hospedaje?* Asimismo, se promueve la práctica de comparación entre los costos máximos de cada uno de los hoteles y el número de noches que les corresponden. Con el propósito de que el estudiante se

adentre en el contexto financiero y convierta el estudio de la variación constante en una herramienta que le permite decidir el hospedaje más conveniente teniendo en cuenta su presupuesto.

Luego, al analizar y articular las representaciones gráficas, tabular y analítica, y siguiendo la conjetura planteada en la fase 2, se observa que en el momento 3 se espera que el estudiante signifique el costo por noche como el parámetro m que dicta el cambio en la expresión y como el elemento que determina la inclinación de la recta. Teniendo en cuenta lo anterior, y para poder identificar el nivel de significación que da el estudiante al costo por noche se decidió incluir la siguiente pregunta (figura 16).

Figura 16

Pregunta 13 agregada en el rediseño.

13. ¿Qué relación del costo por noche encuentra en la expresión hallada y las gráficas?

De igual manera, durante el momento 3 es importante darle significado al parámetro b que surge en la representación analítica de los costos de los hoteles, por lo cual se incluyó la pregunta 11: *¿Qué representa el valor fijo de cada expresión?* Ya que las preguntas anteriores dirigían al estudiante a proponer una expresión analítica de la forma $y = mx + b$ y se consideró necesario significar dicho objeto matemático de acuerdo con el contexto económico del costo de hospedajes. En resumen, la pregunta 13 demanda que el estudiante, a través de la seriación, identifique el parámetro m como el cambio que hay en el costo noche a noche al comparar costos de noches consecutivas, así como también comprenda que el costo por noche es el patrón que determina la inclinación de la recta. Adicionalmente, para articular la expresión es necesaria la práctica de

predicción de manera analítica. Por lo cual, estas preguntas también contribuyen al desarrollo de las PV.

Luego, bajo la necesidad de abarcar el contexto financiero y dar una conclusión acerca del hospedaje que Tomás debería elegir con su familia, se agrega la pregunta presentada en la Figura 17.

Figura 17

Pregunta 14 agregada en el rediseño.

14. Teniendo en cuenta todo lo anterior y según el máximo precio que se puede gastar en el hospedaje ¿Con cuál opción de hotel te quedas? ¿Cuántos días y cuál será el gasto de esto?



De esta manera, el objeto matemático toma sentido y se convierte en un conocimiento funcional, como lo plantea el PyLV, que permite al estudiante, en el marco de una decisión en un contexto financiero, apropiarse del conocimiento y aplicarlo para su bienestar económico.

Ahora bien, al introducir una nueva situación problematizadora en el momento 4, el diseño original presentaba 3 ofertas de hospedaje (figura 18) con diferentes razones de costo entre las cuales los estudiantes debían identificar diferencias y similitudes. Teniendo en cuenta, que es el último momento del diseño y ya el estudiante ha comparado y estudiado diversas ofertas de hospedaje, se incluyó como segunda pregunta la siguiente: *¿Cuál crees que es la opción más económica?* Esta pregunta condicionaba al estudiante a hacer una estimación en cuanto al costo de los hoteles aplicando el parámetro m , ya entendido como el costo por noche.

Figura 18

Pregunta 2 agregada en el rediseño.



1. ¿Qué diferencias observas entre las razones de costo de cada una de las opciones?

Hotel Mar Azul

Cabañas San Valentín

Casa Campestre Fuente Mágica

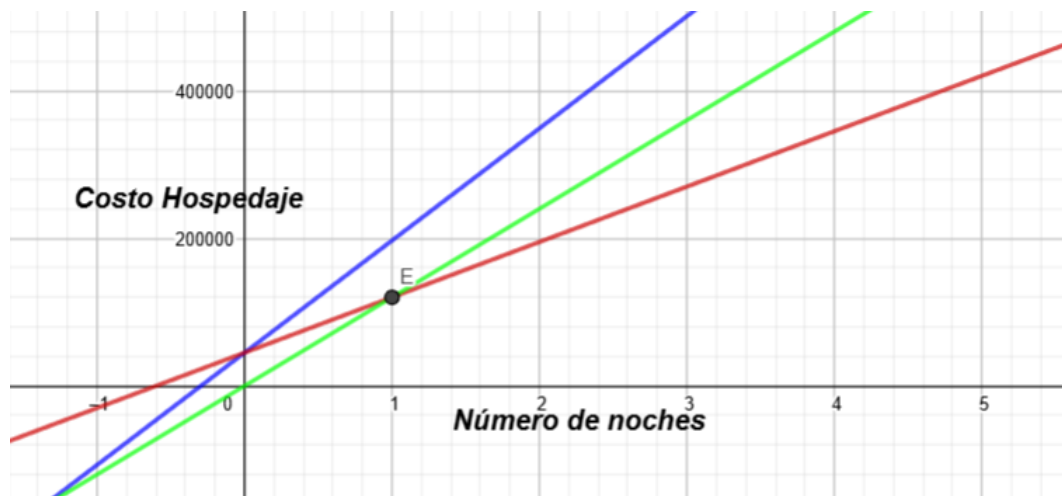
2. ¿Cuál crees que es la opción más económica?

Sin embargo, la estimación no era la única PV promovida al agregar la pregunta, ya que, el estudiante podía predecir los precios para un número de noches específico y comparar dichos costos y seleccionar el más económico. Asimismo, podría realizar el mismo proceso para 2 y 3 noches para, a través de la seriación, identificar un patrón y concluir que existía un hotel más económico para cualquier número de noches.

Ahora, al detallar la gráfica de la función costo de las ofertas de hospedaje, las razones de cambio del diseño original llevaban a que Casa Campestre (recta verde) y Cabañas San Valentín (recta roja), véase la figura 19, presentarían un costo igual para una noche, lo cual hacía que una primera comparación entre los costos no permitiera identificar un hotel más económico.

Figura 19

Representación gráfica del momento 4: diseño original.

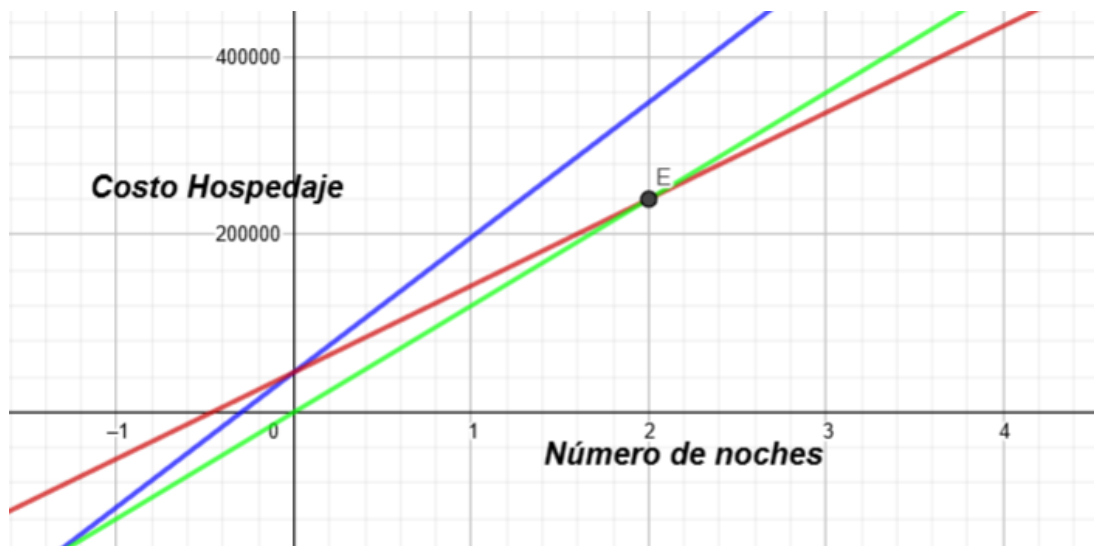


Nota. Tomado de Anexo A. Diseño original

Luego, se quería que para un primer número de noches hubiese un orden de las funciones, con el propósito de que en preguntas posteriores se pudiera introducir un orden de las expresiones manejando la noción de intervalos y así añadir una variable más al momento de tomar la decisión del hospedaje, es decir, que el estudiante pueda pensar “Para ... número de noches me conviene más ..., pero para ... número de noches es mejor...”. Entonces, se cambió el costo por noche de Cabañas San Valentín de \$75.000 a \$97.500, como se observa en la figura 20. De esta manera, el punto de intersección entre las rectas es en $x=2$, lo cual genera un escenario de discusión con los estudiantes sobre lo más conveniente para Tomás.

Figura 20

Representación gráfica del momento 4: diseño modificado.



En general, durante el rediseño, las modificaciones apuntan a que los estudiantes signifiquen la variación constante dentro del contexto financiero del presupuesto y del costo, además de que se promueve el desarrollo de las PV para la toma de decisiones financieras responsables en cuanto a los hospedajes.

5.1.2. Ajuste de redacción y gramática

En cuanto a los ajustes de redacción, teniendo en cuenta la pregunta planteada en el diseño original (ver figura 21), se consideró modificarla con el propósito de que el estudiante tuviese más claridad al momento de responder, esto debido a que el trasfondo de la pregunta apunta a qué tanto la expresión algebraica como la gráfica representan la misma situación y existe una relación entre sus elementos. Teniendo en cuenta este significado de la pregunta, se modificó de la siguiente manera (ver figura 22). Así pues, la pregunta se enfocaría más en la relación que hay entre representaciones y cómo se observan los elementos de la expresión en la gráfica y viceversa.

Figura 21

Diseño original ajuste de redacción M4

¿Qué representa la expresión que se muestra en la vista algebraica y la representación que se muestra en la vista gráfica para el hotel Mar azul?
¿Sucedec lo mismo para la opción de cabaña y casa campestre?

Nota. Tomado de Anexo A. Diseño original

Figura 22

Diseño modificado ajuste de redacción M4

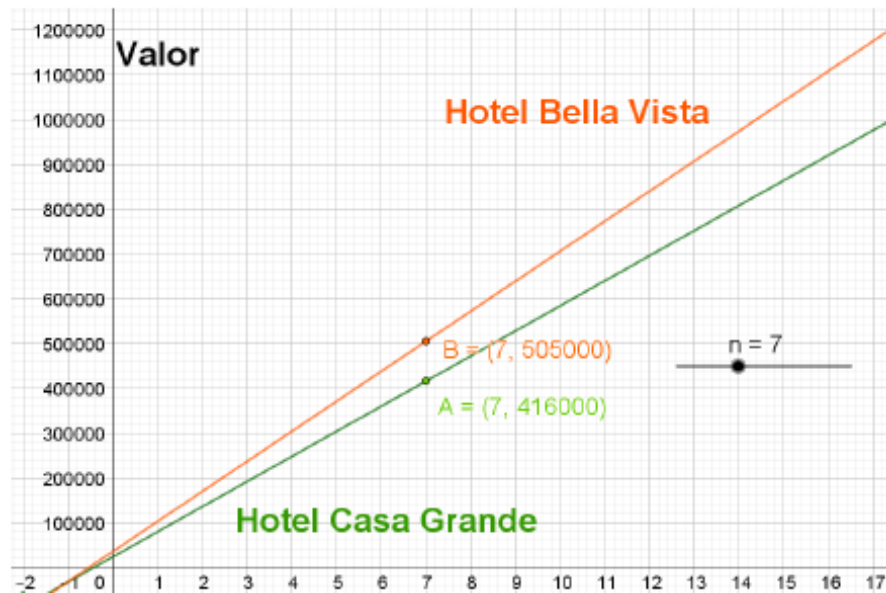
7. ¿Qué relación identifica entre los elementos de cada expresión con su respectiva gráfica?

5.1.3. Ajustes de recursos

En el diseño original (ver Anexo A), específicamente en el momento 2, pregunta 5, se introducía al estudiante a realizar una exploración directa con el aplicativo GeoGebra, para luego de su interacción responder determinadas preguntas. Sin embargo, debido a las condiciones de la investigación y de la implementación, se modificó este acercamiento con el applet. Así pues, en una primera instancia, el estudiante debía responder las preguntas correspondientes al observar la imagen (ver figura 23).

Figura 23

Representación gráfica ajuste recursos M2



Luego, dentro del diseño original, pregunta *g* (ver figura 24), se brindaban a los estudiantes instrucciones para ejecutar dentro del applet; sin embargo, debido a las condiciones del contexto, se realizaría la proyección con las instrucciones ya ejecutadas por los investigadores, en tanto, el propósito principal era que a través de la visualización del recurso pudiesen analizar y responder las siguientes preguntas.

Figura 24

Instrucciones diseño original ajuste recursos M2

1. Sea "a" el valor máximo para invertir en el hospedaje. (Valor que encuentre en la pregunta 2)
2. Ubíquese en la barra de entrada y escriba (0, a) y presione la tecla "Enter"
3. Seleccione el botón  y elija la opción "perpendicular" seguidamente, seleccione el eje "Y" y el punto realizado en la instrucción anterior. Aparecerá una recta perpendicular al eje "Y" que pasa por el punto.
4. Elija el botón  y seleccione la opción "intersección" luego, elija la recta realizada en la instrucción 3) y la recta del Hotel Casa Grande.
5. Repita la instrucción anterior para la recta del Hotel Bella Vista.
6. Después de las dos instrucciones anteriores aparecerán dos puntos de intersección uno para cada recta.

Nota. Tomado de Anexo A. Diseño original

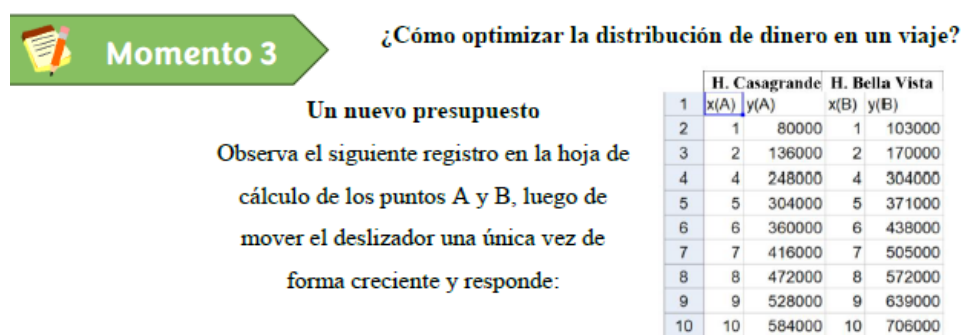
Ahora bien, otra de las modificaciones que se realizaron dentro del diseño con respecto a los elementos del applet fue suprimir la pregunta "*¿Qué representa el deslizador n?*", pues ya se estaba designando el eje X como el número de noches.

En el momento 3 se da paso a la representación tabular; en el diseño original se usaba la herramienta de hoja de cálculo de GeoGebra. En ese caso, por las condiciones para la implementación,

se decidió presentarlo a través de una tabla con los valores de los precios de los hoteles y el número de noches de la siguiente manera (ver figura 25).

Figura 25

Representación gráfica ajuste recursos M3



5.1.4. Pilotaje y ajustes finales al diseño

El diseño se implementó con doce integrantes del Semillero de Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática. En este participan estudiantes de licenciatura no graduados, graduados y de maestría en Educación Matemática. Específicamente, este pilotaje tuvo como propósito refinar y consolidar la versión definitiva del instrumento. Dicho suceso se realizó de forma presencial y durante una sesión continua de 2 horas.

Los participantes desempeñaron una doble función: en primera instancia, actuaron como estudiantes resolviendo el material propuesto; posteriormente, asumieron la perspectiva de docentes, maestros en formación o investigadores, para examinar el contenido desde sus competencias matemáticas, financieras, pedagógicas y didácticas, con lo cual, dentro de la discusión, se aportaron observaciones, recomendaciones y ajustes específicos que se expondrán a continuación:

Tabla 1*Sugerencias y ajustes realizados al diseño en el pilotaje*

Momento	Pregunta	Sugerencias	Ajustes
1	1	Se evidenciaron dificultades para comprender cuántos y quiénes eran los integrantes de la familia	Se agregó una flecha con el nombre de Tomás en la imagen para evitar suposiciones y confirmar que esa era la familia que se estaba considerando (ver figura 26)
		Se sugirió especificar cuánto le sobra o le falta para evitar obtener una respuesta de “sí le sobra o no le sobra”, pero sin justificación numérica	Se precisa el cuánto en la pregunta así: <i>¿Le alcanza el dinero a Tomás? ¿Cuánto le sobra/falta? Escriba los procedimientos y justifique su respuesta.</i>
		Se sugiere organizar mejor la estructura de la respuesta, es decir, primero, procedimientos, luego, justificación	La casilla de los procedimientos quedó al lado izquierdo y la justificación al lado derecho para esa y todas las preguntas de ese tipo.
2	2	Se presentaron repetidas dificultades para entender la pregunta	Se mejora la redacción evitando usar dinero restante y disponible en el mismo párrafo, así como también se especifica que Quimbaya era el lugar donde se estaban considerando los gastos (ver figura 27)
	4	Se evidencian dificultades para comprender que el precio que aparece por persona corresponde a un único pago sin importar la cantidad de noches que se hospede la familia	Se precisa que el pago por persona es por única vez y se brinda una mayor visualización de los precios (ver figura 28)
3	3	Se sugiere precisar la forma de preguntar, pues esto puede determinar si se realiza una operación o una descripción.	Se reemplaza la pregunta “¿Cuál es la diferencia entre cada valor, día a día con respecto al hotel Bella Vista?” así: <i>¿De cuánto es la diferencia entre cada valor, noche a noche, con respecto al hotel Bella Vista?</i>

Figura 26*Representación gráfica ajuste pilotaje M1*

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

Momento 1

Un viaje familiar

Thomás desea obsequiar a su familia un pasadía a Panaca en las próximas vacaciones. La familia reside en la ciudad de Medellín y el dinero con el que cuenta Thomás para el viaje es de \$2.650.000.

La empresa Price-travel le facilita a Thomás la siguiente ficha de precios.

Thomás



Figura 27*Representación gráfica ajuste pilotaje M2 – P2*

2. Ante la posibilidad anterior, un asesor de viajes le recomienda a Thomás que para que el dinero restante le alcance para pagar los gastos en Quimbaya: hospedaje, alimentación y plan turístico, el costo del hospedaje no puede exceder el 15% de ese dinero. ¿Cuánto dinero, a lo máximo, puede utilizar para el hospedaje?

Figura 28*Representación gráfica ajuste pilotaje M2 – P4*

4. Analiza y responde. La empresa Price-travel le facilita a Thomás las siguientes opciones de hospedaje



Habitación Familiar
\$9.000 por persona por única vez
\$67.000 por noche

Comodidad & Excelencia

Reserva ahora al mejor precio en: HTBellavista.com.co



Habitación Familiar
\$6.000 por persona por única vez
\$56.000 por noche

Para los mejores viajeros las experiencias se disfrutan en familia.

Viaja en familia

Reserva con confianza en: HTCasagrande.com.co

5.2. Desarrollo de las prácticas variacionales en el estudio de la variación constante

En este apartado se presenta el análisis sobre cómo los estudiantes de noveno grado desarrollaron PV en el estudio de la variación constante en un contexto financiero. Dado que las PV son la herramienta principal para abordar la variación y el cambio en la presente investigación y, además, son un instrumento que permite cuantificar y cualificar el cambio, se decidió realizar el análisis de los resultados a través de las cuatro PV, con el propósito de observar la comprensión de la función lineal como variación constante mediante el desarrollo de las PV. Asimismo, resulta necesario tener en cuenta la secuencia de la actividad matemática del estudiante según los distintos momentos que brinda el diseño.

5.2.1. Práctica variacional de comparación

Sobre el desarrollo de la práctica de comparación, inicialmente se esperaba que los estudiantes identificaran relaciones entre los gastos calculados para el pasadía de Tomás y el dinero disponible. Un ejemplo de esto es la pregunta 1, donde se cuestionaba si a Tomás le alcanzaba o no el dinero; allí, algunos de los estudiantes realizaron procedimientos similares a los que se muestran en la figura 29.

Figura 29

Respuesta del E1 – M1

1. ¿Le alcanza el dinero a Tomás? ¿cuánto le sobra/falta? Escriba los procedimientos y justifique su respuesta.

Procedimientos	Justificación
$ \begin{array}{r} 440.000 \\ + 214.000 \\ 500.000 \\ \hline 1.154.000 \end{array} $	Si, le alcanza ya que el costo es menor a el presupuesto y le sobran 1,496.000
$ \begin{array}{r} \text{Presupuesto:} \\ 2.650.000 \\ - 1.154.000 \\ \hline 1.496.000 \end{array} $	

En la figura es posible observar los cálculos que el estudiante realizó para determinar los gastos del Pasadía de toda la familia por un valor de \$1.154.000. Teniendo en cuenta el precio de adultos y niños, se observa que el estudiante primero calcula los gastos uno a uno, según la información dada (ver el recuadro rojo), aunque no lo evidencia por escrito. Primero, determina el costo del transporte ($110.000(4) = 440.000$), la alimentación ($65.000(2) + 42.000(2) = 214.000$) y el plan turístico ($165.000(2) + 85.000(2) = 500.000$); luego, realiza la resta con el dinero inicial (\$2.650.000) y el costo total (ver recuadro azul), obteniendo \$1.496.000; así, finalmente, justifica que le sobra dinero, como se observa en la respuesta de la derecha.

En este caso, se distingue la práctica de comparación en su forma cuantitativa, cuando el estudiante identifica el presupuesto como un referente inicial y plantea una serie de operaciones para definir un segundo estado (el costo total de los gastos), el cual usa para realizar la resta y determinar cuánto sobra.

Así pues, el estudiante identifica el estado inicial, en el contexto financiero, el presupuesto y el estado posterior, los gastos, como aquellos que pueden variar según sean las condiciones de la situación, para que más adelante distinga entre valores fijos y valores variables, teniendo en cuenta que, de hecho, el estudiante hace de forma implícita algunas relaciones cuantitativas que son constantes. De igual manera, se observa una comparación cualitativa en la expresión *“ya que el costo es menor al presupuesto”*, como fruto de la lectura de los procedimientos, al establecer una relación de orden de un número respecto al otro.

Ahora bien, en el caso del estudiante E2 (figura 30), este ofrece un argumento cualitativo diferente al del estudiante E1, ya que afirma que el dinero sobrante de la resta es *“más de la mitad”* del dinero total, lo que da a entender la concepción métrica que tiene el estudiante, pues realiza estimaciones aproximadas (la mitad) de la cantidad como parte del todo (presupuesto).

Figura 30*Respuesta de E2 – M1*

Justificación

En total son 1159.000
 0500 que se reparten
 más de 10 unidades.

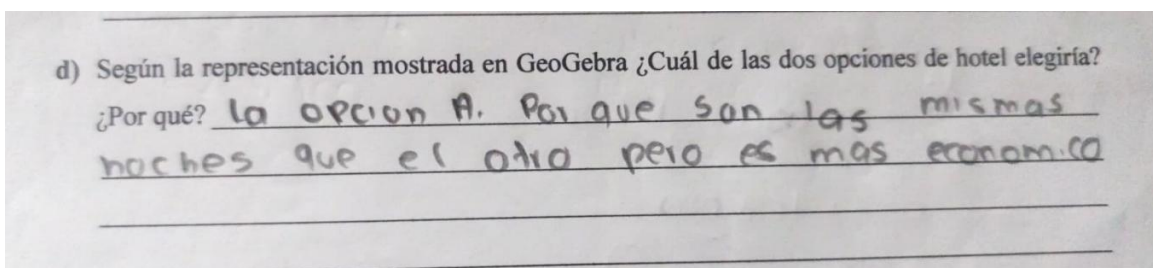
Por otro lado, la comparación también se observa cuando el estudiante contrasta costos de hoteles para un mismo número de noches según la representación gráfica. En este sentido, se analizó la pregunta del inciso c), la cual solicitaba información sobre los puntos “A” y “B”. Con esta pregunta se estimula al estudiante a razonar sobre el valor de y (costo por noche) desde lo que este está significando para x (número de noches). Sin embargo, con esta evidencia (ver figura 31), el estudiante no solo extrajo los datos de la imagen, también estableció una relación entre el costo de dos hoteles diferentes para un mismo número de noches, logrando así la práctica de comparación.

Figura 31*Respuesta E4 – M2*

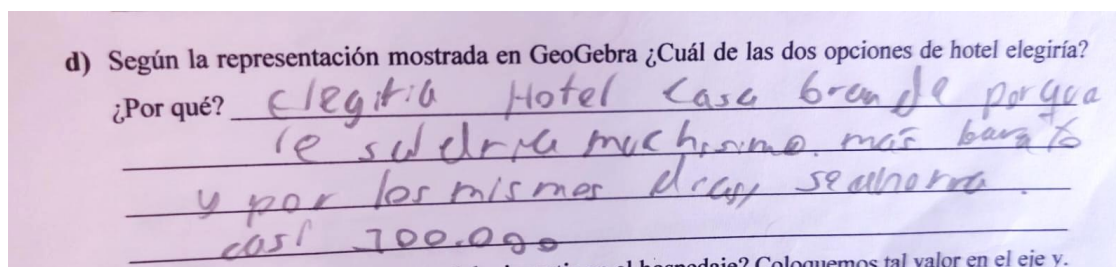
c) ¿Qué información aportan los puntos “A” y “B”?

Muestran el costo total de hospedarse
 para una misma cantidad de noches

Más adelante, en el inciso d) se esperaba que el estudiante eligiera uno de los hoteles tras tener en cuenta la pregunta anterior, ya que con esta interpretaría información gráfica sobre el costo de cada hotel para un mismo número de noches (7) tal como se aprecia en la siguiente imagen:

Figura 32*Respuesta E14-M2*

En la figura 32, el estudiante comprende que los puntos A y B muestran el costo para el mismo número de noches y plantea una relación de orden en la que, según él, la opción A es más económica. De esta manera, se evidencia una comparación cualitativa entre dos costos distintos para el mismo número de noches. Sin embargo, hay otro estudiante que presentó una respuesta más justificada en la siguiente figura, ver figura 33.

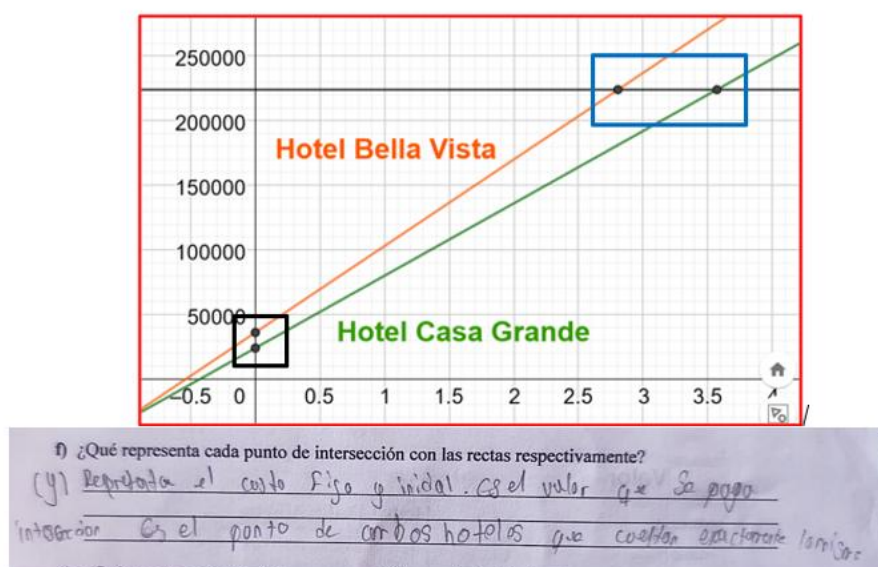
Figura 33*Respuesta E2 – M2*

Tras un análisis gráfico, el estudiante E2 elige el Hotel Casa Grande (CG) luego de compararlo con la otra opción porque “saldría muchísimo más barato” y valora un ahorro de casi “\$100.000” por los mismos días. Por consiguiente, el estudiante realizó una comparación de estados iguales (noches) en dos fenómenos diferentes (hoteles); así, se analiza que identificó y estimó la diferencia entre el valor de los hoteles ($505.000 - 416.000$) para el mismo número de noches (7) y, desde allí, justificó su decisión financiera.

Continuando con este tipo de argumento comparativo, hubo otros casos de estudiantes que plantearon conjeturas según el análisis del mismo estado (costo) entre dos fenómenos diferentes (hoteles). Por ejemplo, en la figura 34, en una primera instancia se le pide al estudiante que observe la pantalla del docente (recuadro rojo) e interprete lo que está sucediendo para poder dar respuesta al inciso f). En esta representación en GeoGebra se puede apreciar una recta horizontal que representa cuánto se debe invertir como máximo en el hospedaje y las dos rectas alusivas a cada hotel, la naranja correspondiente al hotel Bella Vista (BV) y la verde al Hotel CG. Con esto en mente, se le cuestiona al estudiante: ¿qué representa cada punto de intersección con las rectas, respectivamente? Para lo cual él definió la intersección con las rectas (ver recuadro azul) como “*el punto en el que ambos hoteles cuestan exactamente lo mismo*” y los puntos de intersección con el eje “y” (ver recuadro negro) como “*el costo fijo*”, siendo esta una evidencia de la significación de los puntos de corte en el eje y cómo una representación gráfica del costo fijo correspondiente al valor por persona por única vez dentro del costo del hospedaje.

Figura 34

Respuesta E3 – M2



En un tercer momento se esperaba que los estudiantes pudieran identificar la variable dependiente (costo de hospedaje) e independiente (número de noches) a través de la representación tabular, reconociendo en una primera instancia la relación que hay entre las variables, y luego la diferencia entre un estado posterior y uno anterior (precios noche a noche) respecto a un mismo fenómeno (cada hotel) el cual, según cada uno, se mantendría constante. En cuanto a la relación que había entre el número de noches y el valor a pagar en cada hotel, al hacer una revisión minuciosa de las respuestas en las hojas de trabajo de cada estudiante, la mayoría concordaron en que el valor a pagar aumentaba según las noches que se hospedaban y que este valor dependía de la cantidad de noches, así como también compararon cuantitativamente la diferencia entre los estados (noche a noche) en cada uno de los hoteles. Sin embargo, estas respuestas y procedimientos resultaron limitados, pues resulta escasa la atribución de un comportamiento constante al valor hallado (diferencia) entre los estados, como se evidencia en la figura 35

Figura 35

Respuesta E9 – M3

3. ¿De cuánto es la diferencia entre cada valor, noche a noche, con respecto al hotel Bella Vista?
¿Qué características tienen los datos hallados?

170000
103000
67000

La diferencia entre cada noche es de 67.000

4. ¿Qué representa el valor hallado en el punto anterior?
el precio por cada noche adicional

5. ¿Sucede lo mismo con respecto al hotel Casa Grande? Justifique su respuesta.

136.000
80.000
56.000

La diferencia entre cada noche es de 56.000

6. ¿Qué relación observa entre los valores hallados en los puntos anteriores y la inclinación de cada recta?
Mayor aumento

Material elaborado por: Edith Johanna Mendoza Higuera – Haidee Lised Arciniegas Rueda – Andrea Liliana Becerra.
Adaptado por: Lizeth Juliana Fajardo Durán – Thomas Corzo Giraldo

No obstante, se revela la práctica de comparación, de forma cuantitativa, en cuanto el estudiante plantea diferencias numéricas (recuadros negros) entre estados consecutivos del mismo fenómeno, es decir, entre costos para 2 noches y 1 noche del mismo hotel, sin embargo, su justificación se reduce únicamente a la comparación entre dos estados. A pesar de esto, el estudiante establece la diferencia que hay en el costo de los hoteles noche a noche; además de notar que dicha diferencia era distinta para el hotel BV y el hotel CG; y así, identifica que el precio cambia por cada noche que pasa, lo que constituye un primer paso en la comprensión del carácter estable del cambio.

Finalmente, en el momento 4, se esperaba que los estudiantes lograran comparar costos de los hoteles para un mismo número de noches. Ese es el caso del estudiante E4 (ver figura 36), el cual identificó costos iguales en la segunda noche entre la Cabaña San Valentín y Casa Campestre, debido a los siguientes cálculos que son evidenciados más a detalle en la respuesta de la pregunta 3: Primero, calcula el costo de dos noches para la Cabaña ($97.500 (2) = 195.000$) y a este valor le agrega su costo de reserva (45.000); luego, para Casa Campestre solo toma el precio por noche y lo multiplica por dos ($120.000 (2) = 240.000$), pues esta opción no contemplaba un costo de reserva, solo un limitante de 40 personas. Así pues, la comparación que realiza es de tipo cuantitativo al diferenciar dos hoteles distintos en un mismo estado (dos noches) y no encontrar diferencias entre los datos numéricos finales.

Figura 36

Respuesta E4 – M4

9. ¿Hay costos iguales en las opciones para alguna noche? Justifique su respuesta.
Si, entre cabaña san valentin y casa campestre en la segunda noche

cabaña	casa grande
195.000	240.000
45.000+	
240.000	

Según el análisis anterior, la práctica de comparación se presenta a lo largo del diseño, y le permite al estudiante determinar si su dinero disponible es suficiente para los gastos del pasadía, le da la oportunidad de relacionar los costos de dos hoteles y tomar decisiones financieras, le permite diferenciar los costos de ambos hoteles para el mismo número de noches o sobre el mismo hotel para diferente número de noches con el propósito de conocer qué cambia y cuánto cambia. Además, se presentan argumentos cuantitativos mediante restas entre el dinero disponible y los costos, de forma análoga con costos de diferentes fenómenos para valores consecutivos. También se presentan argumentos cualitativos con expresiones como: *“cuestan lo mismo”*, *“es más barato”*, *“más de la mitad”*, *“sobraría casi 100.000”*, *“es menor que”*, entre otras: lo que permite valorar el uso de la práctica de comparación para significar las variables involucradas y el comportamiento lineal de una variación constante.

Cabe destacar que la modificación del diseño con respecto a mostrar el comportamiento de la función en su representación tabular conllevó a que hubiese mayor presencia de la práctica de seriación que de comparación debido a la forma de implementación del diseño, donde en una primera jornada se trabajaron los momentos 1 y 2, y luego en otra ocasión, los momentos 3 y 4. En ese sentido, para futuras investigaciones, sería beneficioso, en el momento 3, solicitar al estudiante realizar la tabla según el comportamiento que caracterizó en los momentos previos; es posible que, de esta manera se logre identificar con mayor claridad los estudiantes que desarrollan la práctica de comparación y seriación en sus argumentos variacionales para caracterizar el comportamiento lineal.

5.2.2. Práctica variacional de seriación

Acerca del desarrollo de la práctica de seriación se esperaba que el estudiante identificara el patrón de cambio en el costo de los hoteles para noches consecutivas, lo cual se puede observar en la pregunta 4 los numerales b y c en donde el estudiante debía calcular el costo de hospedaje del hotel Bella Vista para 2 noches y el costo del hotel Casa grande para 3 noches; Allí, las respuestas fueron similares a la siguiente.

Figura 37

Respuesta E11 - M2

b) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 2 noches en el hotel Bella Vista?

$$\begin{array}{r}
 9.000 \times 4 \\
 \hline
 36.000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 67.000 \times 2 \\
 \hline
 134.000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 134.000 \\
 36.000 \\
 \hline
 170.000
 \end{array}$$

c) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 3 noches en el hotel Casa Grande?

Pago unico 24.000

$$\begin{array}{r}
 \text{costo 3 noches} \\
 56.000 \times 3 = 168.000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 168.000 \\
 24.000 \\
 \hline
 192.000
 \end{array}$$

En la figura 37 se observan los cálculos realizados por el estudiante para determinar los costos de las noches específicas de ambos hoteles para la familia de Tomás. Para la pregunta b se evidencia que el estudiante primero calcula el costo fijo (recuadro rojo) correspondiente a la tarifa por persona ($9.000(4)$) que se paga una única vez, y obtiene un resultado de \$36.000. Luego el estudiante, en el recuadro verde, halla el costo por las 2 noches haciendo una multiplicación ($67.000(2) = 134.000$) y finalmente suma los dos resultados para hallar el costo total (\$170.000) del hotel Bella Vista para dos noches. De la misma manera en la pregunta c el estudiante denomina

el costo por persona por única vez como “pago único” y escribe 24.000 que corresponden a $(6.000 \cdot 4) = 24.000$ y determina el costo por 3 noches a través de la multiplicación $(56.000 \cdot 3) = 168.000$ nótese el recuadro azul, para así, realizar la suma y hallar el costo total por las 3 noches en el hotel Casa Grande (\$192.000).

En este caso, en la respuesta a la pregunta *b* se evidencia una seriación cuantitativa, ya que, el estudiante está caracterizando el patrón de cambio en el costo por noche a través de una multiplicación, es decir, para hallar el costo de 2 noches del hotel BV multiplica el costo por noche por 2 (recuadro verde) y para hallar el costo de 3 noches para el hotel CG multiplica el costo por noche por 3 (recuadro azul). Así, el estudiante comparó el costo de 1 noche, 2 noches y 3 noches y, como resultado, encontró una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional del costo de hospedaje de los hoteles BV y CG. Siendo esta relación una variación constante, donde cada noche el costo aumenta en el mismo valor, por lo cual el estudiante realiza la multiplicación señalada. Así, según la imagen, el estudiante interpreta los datos de cobro de cada hotel, en tanto reconoce el cambio constante tanto por persona como por noche para determinar el costo para 2 y 3 noches, respectivamente.

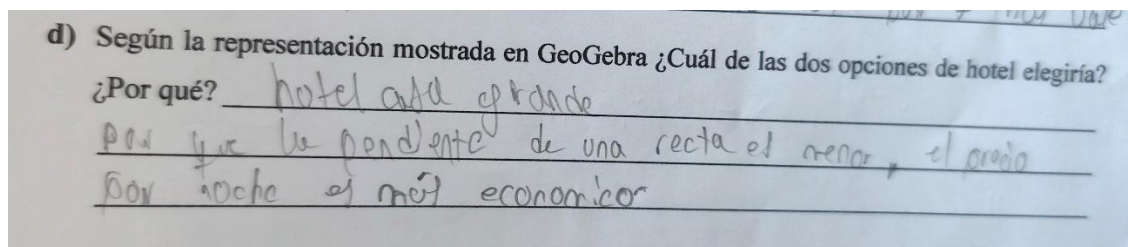
Además, se puede observar en el recuadro rojo que el estudiante comprende el comportamiento variacional del costo por persona como una variación constante que tiene un patrón de variación de \$9.000 y por medio de la seriación cuantitativa expresa cuánto cambia el costo por persona al ser 4 personas en la familia de Tomás. Igualmente, se puede inferir que el estudiante realizó el mismo razonamiento en el recuadro naranja al identificar el patrón de variación de \$6.000.

Luego, se propuso abarcar las representaciones gráficas del costo de ambos hoteles; para esto se proyectó en el tablero un applet de GeoGebra y al mismo tiempo en el diseño hay una imagen del aplicativo. El primer paso fue identificar y significar los elementos de dicha representación, para

finalmente, en la pregunta *d* elegir uno de los dos hoteles. A continuación, se presenta la respuesta de un estudiante a dicha pregunta

Figura 38

Respuesta E3 – M2



Cabe resaltar que, para tomar una decisión es necesario que el estudiante comprenda el comportamiento de las rectas y pueda determinar cuál representa la opción más económica. En el caso del E3 se afirma que “*la pendiente de una recta es menor, el precio por noche es más económico*”. Luego, se puede evidenciar la seriación cualitativa, ya que, el estudiante está caracterizando el comportamiento del costo a través de la pendiente o inclinación de la recta y lo significa para el costo. Es decir, el estudiante relaciona la inclinación de la recta como consecuente de la pendiente y por ello, el costo menor comparado con la otra recta evidenciando una buena significación del costo por noche como el parámetro m que también representa la inclinación de la recta.

Siguiendo con la secuencia de actividades del diseño, los estudiantes debían recordar el precio máximo que podían gastar en hospedaje y los investigadores añadirían dicho valor al aplicativo en forma de una recta horizontal ($y = 224.400$). Así, el estudiante debía determinar el hotel que más le favorecía teniendo en cuenta dicho valor máximo destinado al hospedaje. En medio de la discusión, surge el siguiente episodio junto a la E18:

E18: *Lo que quiero decir es que, si se inclina más para arriba la recta, menos días pasan.*

Docente: *Muy bien, entre más inclinada la recta, menos días pasan.*

E18: *y entre más [hace un movimiento señalando hacia abajo con su mano] baja la recta, pues más días pasan*

Docente: *A ver, ¿y si es más baja, cómo es el costo?*

E18: *Hmm, menor*

Docente: *¿Y si es más alta?*

E18: *Mayor.*

Episodio 1-M2

En este episodio la estudiante plantea relaciones entre las variables costo y número de noches teniendo en cuenta el valor máximo, y se puede identificar la práctica de seriación cualitativa ya que la estudiante generaliza el carácter estable del cambio del costo y lo relaciona con la inclinación de las rectas, determinando que una mayor inclinación significa un costo mayor para el número de noches que pasan comparado con la otra recta donde la inclinación es menor pues, esta última tendrá menor costo para cada número de noche que se compare entre ambas rectas. Además, la estudiante conjetura acerca de si “*la recta se inclina más para arriba*” aplicando cambios al patrón de seriación que comprendió anteriormente y estimando las consecuencias de dicha alteración en el número de noches que pueden hospedarse. En general, se ha revelado la seriación cuando la estudiante comprende que el aumento constante en el precio se muestra en una recta con una inclinación determinada y manipula mentalmente dicha inclinación para sacar conclusiones acerca del contexto del presupuesto y los costos de hospedaje.

Además, cuando la estudiante afirma que “*Lo que quiero decir es que, si se inclina más para arriba la recta, menos días pasan*”, lo cual permite observar un manejo del parámetro m dictaminando la inclinación de la recta para plantear conjeturas respecto al tiempo que pasa para alcanzar un costo determinado. Es decir, la estudiante estima que, al comparar la recta de los costos respecto a una recta horizontal que representa un precio máximo, el hotel con un costo por noche más bajo ofrece más noches de estadía por el mismo precio. Esto muestra que algunos estudiantes

interpretan el costo por noche para estimar comportamientos en relación con la variable de número de noches, logrando así un mayor nivel de significación de la variación constante.

Ahora bien, durante el momento 3 se presentaba al estudiante la representación tabular para los costos de ambos hoteles, donde una columna corresponde al número de noches y la otra el costo de hospedaje correspondiente. Luego, el estudiante debía realizar la diferencia entre valores consecutivos e identificar que dicha diferencia es siempre la misma. A continuación, una respuesta que evidencia la práctica de seriación:

Figura 39

Respuesta E10 – M3

2. ¿Cuál es la relación entre el número de noches y el valor a pagar en cada hotel?
El Precio aumenta según el número de
noches

3. ¿De cuánto es la diferencia entre cada valor, noche a noche, con respecto al hotel Bella Vista?
 ¿Qué características tienen los datos hallados?
 $103.000 - 140.000 = 67.000$
 $239.000 - 192.000 = 67.000$
 $304.000 - 237.000 = 67.000$
 $\dots$
La Diferencia es de 67.000

4. ¿Qué representa el valor hallado en el punto anterior?
El costo por cada noche en el hotel Bella Vista

5. ¿Sucede lo mismo con respecto al hotel Casa Grande? Justifique su respuesta.
 $136.000 - 80.000 = 56.000$
 $192.000 - 136.000 = 56.000$
 $248.000 - 192.000 = 56.000$
 $304.000 - 248.000 = 56.000$
 $360.000 - 304.000 = 56.000$
 $416.000 - 360.000 = 56.000$
 $472.000 - 416.000 = 56.000$
El Pago es Constante
Aumenta el mismo valor
cada noche
Es más barato que el otro

Cabe resaltar que, al iniciar el momento 3 se le presenta al estudiante la tabla con los costos para los dos hoteles, dando así una representación numérica a un comportamiento que ya se observó en el análisis de la gráfica en el momento 2. Gracias a esto, el estudiante ya tiene conjeturas acerca del comportamiento constante de la función para cada hotel. Por ende, el razonamiento se puede entender de izquierda a derecha (figura 39), es decir, el estudiante menciona que el costo aumenta lo mismo cada noche y que es constante (recuadros rojo y azul). Luego en los recuadros negros, el estudiante toma pares de datos para noches consecutivas y hace las diferencias para así justificar

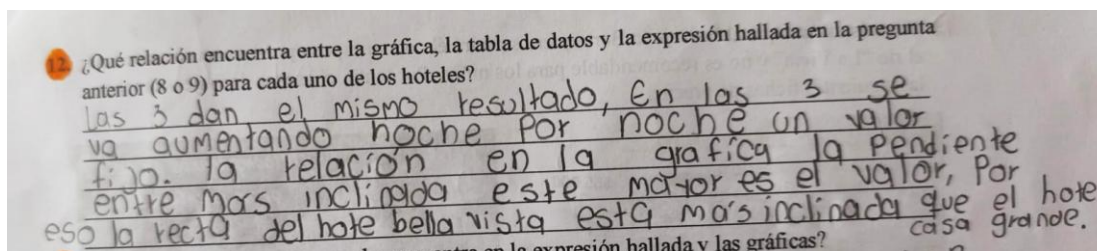
cuantitativamente su respuesta. Como resultado de dichas diferencias, halló los valores de \$67.000 (pregunta 3) y \$56.000 (pregunta 5). Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante evidencia la práctica de seriación al caracterizar el patrón de variación del costo de ambos hoteles como un cambio que “*aumenta lo mismo cada noche*”, siendo el patrón de cambio de \$67.000 para BV y de \$56.000 para CG. Esto deja ver la práctica de seriación cuantitativamente, ya que justifica el comportamiento constante a través de las diferencias numéricas con los datos de la tabla.

De la evidencia anterior se puede concluir que la práctica de seriación brindó información acerca de cómo los estudiantes articulaban las relaciones encontradas entre los costos de noches consecutivas para un hotel, lo que da cuenta de la seriación como una práctica que favorece el planteamiento de conjeturas acerca del patrón de cambio del costo

Durante el momento 2 se promovió la seriación en relación con la inclinación de las rectas, mientras que en el momento 3 se hizo respecto al patrón numérico que hay en la variación noche a noche, que es el costo por noche. Ahora, se busca que el estudiante relacione esas dos formas de seriación como se evidencia en la figura 40.

Figura 40

Respuesta E8 – M3



Esta fue una respuesta a la pregunta 12 que buscaba plantear relaciones entre las diversas representaciones del objeto matemático que han sido abordadas a lo largo del diseño. Nótese que en primer lugar el estudiante resalta el carácter estable del cambio al afirmar que “*se va aumentando noche por noche un valor fijo*” lo cual deja ver una seriación cualitativa que califica

el cambio como constante. Luego, el estudiante afirma que *“en la gráfica la pendiente entre más inclinada esté mayor es el valor”* esto nos permite inferir que el estudiante por medio de la seriación identificó el patrón de cambio y lo relacionó con la pendiente de la recta, de esa manera entre más inclinada la recta mayor es el valor de la pendiente y viceversa. Finalmente, teniendo en cuenta que el costo por noche del hotel BV es de \$67.000 y el del hotel CG es de \$56.000, el estudiante afirma que debido a estos valores de la pendiente *“la recta del hotel bella vista está más inclinada que el hotel casa grande”* y logra aplicar los conceptos matemáticos en el contexto de los costos de hospedaje.

Ahora bien, es posible afirmar que a través de la práctica de seriación se evalúa la caracterización que el estudiante le da a la variación que hay en el costo del hospedaje, y se halla que los estudiantes muestran el reconocimiento de un comportamiento donde *“Aumenta lo mismo cada noche”* (figura 39) o en palabras de otra estudiante *“se va aumentando noche por noche un valor fijo”* (figura 40).

Por otro lado, la seriación permitió evidenciar que algunos estudiantes caracterizaban el comportamiento como creciente, haciendo énfasis en que el precio aumentaba entre más noches pasarán. Por ejemplo, en la figura 41 se observa que el estudiante caracteriza la relación como creciente afirmando que *“más noches más aumenta el costo”* y luego halla la diferencia, mostrando una seriación limitada que no evidencia argumentos de variación constante por parte del estudiante.

Figura 41

Respuesta E3 – M3

2. ¿Cuál es la relación entre el número de noches y el valor a pagar en cada hotel?

*más noches, más paga, más noche,
más aumenta el costo*

3. ¿De cuánto es la diferencia entre cada valor, noche a noche, con respecto al hotel Bella Vista?

¿Qué características tienen los datos hallados?

*1 = 103.000 Aumenta
2 = 170.000*

*La diferencia es
de 67.000 pesos*

En el momento 4, la seriación se evidenció cuando el estudiante debía articular la expresión gráfica al decidir la mejor opción para un número de noches específico. (ver figura 42). En primer lugar, se espera que el estudiante planteará una expresión para hallar el costo del hospedaje en cualquier número de noches, luego, dichas expresiones se presentaban en un aplicativo de GeoGebra y se solicitaba identificar relaciones entre los elementos de la expresión con su respectiva gráfica.

Figura 42

Respuesta E20 – M4

7. ¿Qué relación identifica entre los elementos de cada expresión con su respectiva gráfica?

Aumenta el precio por las noches pasadas

A partir de la respuesta del estudiante, se revela la seriación cualitativa en la que, al hacer comparaciones sucesivas, el estudiante concluyó que tanto en la gráfica como en la expresión siempre aumentaba el precio conforme el número de noches era mayor, lo cual permite denotar el comportamiento del costo como una variación que siempre aumenta. Sin embargo, se observa la misma situación que en la figura 41; existe un argumento limitado a la comprensión del costo del hospedaje como una relación que aumenta y crece con el transcurso de las noches, sin resaltar el

elemento del carácter estable del cambio. En tal sentido, para una futura implementación de este diseño resultaría conveniente incorporar una solicitud más específica, como “explique su respuesta”, con el fin de que el estudiante no solo señale que existe un aumento, sino que aprecie más a detalle el valor que se debe pagar por noche y lo caracterice como constante.

Así pues, la práctica de seriación se evidenció a lo largo del diseño como una herramienta para que los estudiantes tengan la capacidad de caracterizar y generalizar comportamientos con base en análisis cuantitativos o cualitativos. Se identificaron análisis cuantitativos al realizar la resta de costos consecutivos y al realizar la multiplicación del costo por noche por la cantidad de noches. También, se evidenciaron análisis cualitativos con expresiones como *“aumenta el precio”*, *“aumentan un valor fijo”*, *“la inclinación es mayor”*, *“el precio es más económico”*.

Finalmente, en los resultados de la PV de seriación es clara la significación de algunos estudiantes de la función costo como un modelo de variación constante en donde por cada noche aumenta el mismo valor fijo de \$67.000 y de \$56.000, mientras que en otros se limita a la comprensión del costo de hospedaje como una relación que aumenta y crece con el transcurso de las noches. Además, se significaron dichos valores como elementos que determinan la inclinación de una recta

5.2.3. Práctica variacional de predicción

En cuanto a la práctica de predicción, se esperaba encontrar evidencias a través de una formulación aritmética, una formulación algebraica o analítica, o como apreciación del valor de una variable respecto a otra, según lo planteado por Caballero (2018) y Arciniegas (2023). El análisis bajo estos lentes permitió constituir globalmente la predicción como la acción de anticipar un estado o valor específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen.

A partir de los elementos previos, la predicción como formulación aritmética se atribuye al uso de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) para poder predecir nuevos estados. Así pues, en la figura 43 se observan los procedimientos realizados por el estudiante E1 para calcular el costo total de 2 noches en el Hotel BV, quien primero identifica la constante (costo por noche) que debe ser operada repetidamente según la cantidad de noches a hospedarse ($67.000(2) = 134.000$) y luego determina el costo fijo multiplicando la tarifa única por el número de personas ($9.000(4) = 36.000$). Finalmente, realiza la suma de ambos resultados para obtener un total de 170.000, y este valor corresponde a un nuevo estado.

Figura 43

Respuesta E1 – M2

b) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 2 noches en el hotel Bella Vista?

$$\begin{array}{r}
 67.000 \times 2 \\
 \hline
 134.000 \\
 \text{Suma} \\
 36.000 \\
 \hline
 170.000
 \end{array}$$

Handwritten notes: "paga con 2 noches y son 4 personas." and "170.000" circled.

En general, la mayoría de los estudiantes usaron estrategias aditivas y multiplicativas con los valores conocidos para hallar nuevos estados. Estos valores conocidos los identificaron como costos variables y costos fijos, con los cuales calcularon un nuevo estado. En adición a lo anterior, se observa cómo los estudiantes comienzan a asociar el valor del costo por noche con la variable independiente del número de noches, al plantear multiplicaciones que permiten hallar el costo total del hospedaje.

Otra manifestación de lo anterior ocurrió dentro de una discusión con una estudiante en el momento 4, en el cual se solicitaba construir una expresión para hallar el costo de hospedaje para cualquier cantidad de días según cada opción, tal como se evidencia en el siguiente episodio:

E18: Estoy viendo cuál de todas (las opciones de hospedaje) me sale más económica para que se quede... Pues acá mira (muestra la calculadora con las operaciones hechas) estaba haciendo eso

Docente: Listo, ¿cuál te salió más económico? ... Digamos acá (señala la hoja de trabajo del estudiante), ¿cómo sacaste las expresiones que construiste?

E18: A los \$45.000 que vendrían a ser el valor de la reserva se le tienen que sumar los 4.000 por las 38 personas que daba 152.000, y esos 152.000 se multiplican por las noches que se iban a quedar.

Docente: Muy bien, y con la última (Casa Campestre), ¿qué pasa con esa?

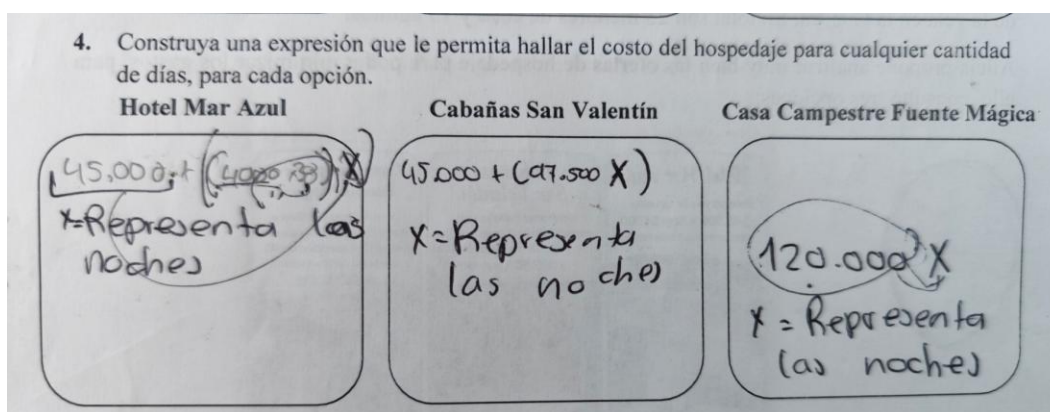
E18: pues como no cobran ninguna reserva, pues simplemente el precio de la cabaña por noche (señala el valor de \$120.000) se multiplica por las noches que se van a hospedar (señala la incógnita x)

Episodio 2 M4

Con este episodio, la estudiante usa las operaciones básicas para establecer una regla que le permite calcular el costo total. Explica que, para una opción de hospedaje, al costo de la reserva se le adiciona un valor, obtenido luego de multiplicar el precio de cada persona por la cantidad de personas que se hospedarán. Esta acción, además de usar estructuras aritméticas, también usa expresiones algebraicas para predecir un resultado para cualquier cantidad de noches, para lo cual usa específicamente la variable “x”, en consecuencia, también se evidencia la predicción como formulación algebraica o analítica (véase figura 44)

Figura 44

Respuesta E18 – M4



Del mismo modo, en un nuevo episodio con otro estudiante, este construyó y verbalizó la expresión que le permitía representar el costo total para cada hotel. Establece que “x” es la incógnita que le permite representar cualquier cantidad de noches, con lo cual, se aleja del proceso anterior con el que calculaba casos particulares. Así como también identifica el valor que acompaña a la “x” como el costo por noche y el valor de la reserva como un costo fijo que poseen dos opciones de hospedaje. Con esto en mente y con la generalización que logró, el estudiante anticipa o predice el costo total de cada hotel para cualquier estado futuro. Veamos Episodio 3 y figura 45:

E15: Bueno profe, acá (señala hoja de trabajo en el Hotel Mar Azul) puse $152.000x + 45.000$, porque 152.000 es el valor de la noche, x es la incógnita, o sea la cantidad de

noches, y 45.000 es el valor de la reserva. Aquí (señala hoja de trabajo en las Cabañas San Valentín) $97.500x + 45.000$, porque 97.500 es valor de la noche, x es la incógnita, y pues acá (señala hoja de trabajo en Casa Campestre) $120.000x$, donde x vale la cantidad de noches que se va a quedar

Episodio 3 M4

Figura 45

Respuesta E15- M4

4. Construya una expresión que le permita hallar el costo del hospedaje para cualquier cantidad de días, para cada opción.

Hotel Mar Azul	Cabañas San Valentín	Casa Campestre Fuente Mágica
$4000x + 45.000$ $152.000x + 45.000$	$97.500x + 45000$	$120.000x$

Teniendo en cuenta que, durante el momento 4 el costo fijo de los hospedajes se caracterizaba como “valor de reserva”, se puede observar, en la figura 44 y en los episodios 2 y 3 que los estudiantes tenían en cuenta la reserva de \$45.000 y lo sumaban al resto de la expresión analítica. Así pues, se puede concluir que algunos estudiantes lograron comprender el costo de reserva por persona como ese elemento b que es fijo y debe ser sumado al costo por noche para determinar el costo total.

En otro caso (ver figura 46) se evidencia un proceso en el que el estudiante primero desarrolla una serie de cálculos repetitivos para las primeras 5 noches del hotel CG (ver recuadro rojo), en el cual multiplica el costo por noche (56.000) por el número de la noche correspondiente y le suma el costo fijo identificado (24.000), logrando así una predicción de tipo aritmética. Con esta, más adelante en los puntos 8, 9 y 10 las generaliza en expresiones analíticas como las siguientes: $56.000(x) + 24.000 = y$; $67.000(x) + 36.000 = y$, identificando a “ y ” como el “valor total” y a

“ x ” como el “*número de noches*”, de esta forma, es posible observar nuevamente la predicción como formulación algebraica.

Figura 46

Respuesta E8 – M3

7. Para las primeras 5 noches escriba la expresión (una a una) que le permite hallar el valor a pagar por el hospedaje en el hotel Casa Grande.

$1 \rightarrow 56.000 + 24.000 = 80.000$
 $2 \rightarrow 56.000(2) + 24.000 = 136.000$
 $3 \rightarrow 56.000(3) + 24.000 = 192.000$
 $4 \rightarrow 56.000(4) + 24.000 = 248.000$
 $5 \rightarrow 56.000(5) + 24.000 = 304.000$

8. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Casa Grande para cualquier cantidad de noches?

$56.000(x) + 24.000 = (y) \rightarrow \text{valor total}$

9. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Bella Vista para cualquier cantidad de noches?

$67.000(x) + 36.000 = (y) \rightarrow \text{valor total}$

10. Sea “ x ” el número de noches. Reescriba las expresiones construidas en las dos preguntas anteriores.

Hotel Casa Grande: $V_1 = 56.000(x) + 24.000 = (y)$

Hotel Bella Vista: $V_2 = 67.000(x) + 36.000 = (y)$

11. ¿Qué representa el valor fijo de cada expresión?

en el caso de $V_1 = 24.000$ de cualquier noche
 en el caso de $V_2 = 36.000$ representa el valor
 por persona en la habitación, según el número de personas disminuye o aumenta

“ y ” significa el valor total a pagar por el hospedaje en ese hotel.

valor total a pagar

Teniendo en cuenta que, el objetivo del momento 3 era que el estudiante significara el costo por noche como el parámetro m , en la figura 46, se puede observar cómo en las 5 expresiones (ver recuadro rojo) el estudiante mantenía constante el costo por noche de \$56.000 como un parámetro que operaba al número de noches para hallar así el costo por la cantidad de noches y sumarle el costo fijo. De esta manera, en las preguntas 8 y 9 se observa cómo el estudiante hace una generalización y ubica el costo por noche, determinado previamente en el momento 3, como el

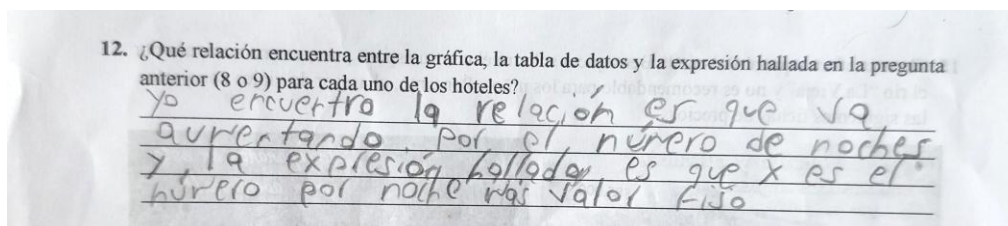
parámetro m que se opera junto al número de noches para dar sentido al costo del hospedaje, y así lograr el objetivo planteado para el momento.

Ahora bien, otro objetivo importante era la significación del parámetro b como el costo fijo por persona por única vez. En la figura 46 se muestra cómo el estudiante identifica el valor fijo dentro de la expresión analítica y lo comprende como “*el valor por persona en la habitación*” y además designa un comportamiento variacional a dicho valor fijo, es decir, el estudiante comprende que el valor por persona por única vez aumenta o disminuye según sea el número de personas. Aunque en el diseño se planteó la situación con 4 personas.

Ahora bien, la predicción como apreciación del valor de una variable respecto a otra se presenta desde el momento en que se ha identificado previamente una regularidad desde la mirada de alguna representación y se han predicho comportamientos a partir del cambio específico de una variable respecto a otra (Arciniegas, 2023). La figura 47 que se muestra a continuación presenta una respuesta en la que el estudiante E11 describe la relación entre la gráfica, la tabla y la expresión indicando que “*va aumentando por el número de noches*” es decir, que las tres simbolizarían lo que es una función creciente, y que en la expresión hallada “ *x es el número por noche más el valor fijo*”. Así pues, el estudiante identifica propiedades comunes entre las distintas representaciones y realiza una descripción cualitativa y general de estas.

Figura 47

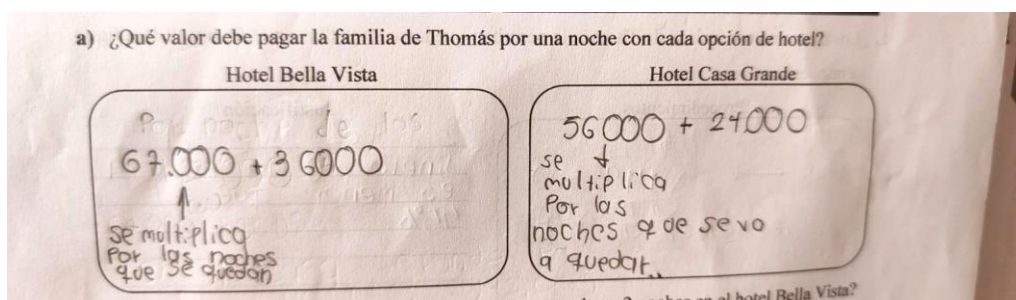
Respuesta E11 – M4



En cuanto a la siguiente evidencia (ver figura 48), el estudiante responde a la pregunta sobre el valor que debe pagar la familia de Tomás por una noche en cada opción de hotel. A partir de la información que observa en cada folleto predice un comportamiento teniendo en cuenta las relaciones numéricas que se presentan y las expresa de manera textual, identificando en un principio que el valor por noche (el cual es señalado con una flecha respectivamente) es el que “se multiplica por las noches que se queden”; pues, a pesar de que no establece una relación de dependencia con una representación variante para la pendiente, la comunicación escrita revela que el estudiante si reconoce la relación de dependencia de la pendiente respecto al número de noches.

Figura 48

Respuesta E8 – M2



De esta manera, se evidenció el desarrollo de la práctica de predicción a lo largo del diseño en donde los estudiantes anticipaban estados del costo de los hospedajes en sus 3 formas: expresión aritmética, analítica y apreciación de una variable respecto a otra. Además, la práctica aportó al significado de los parámetros de la ecuación $y = mx + b$ en el contexto de los costos fijos y variables de un servicio de hospedaje.

5.2.4. Práctica variacional de estimación

Con relación a la práctica de estimación, esta se concibe como una predicción más general, puesto que anticipa comportamientos o tendencias en la variación de un fenómeno en intervalos

concretos, anteriores o posteriores (Caballero, 2018). Del mismo modo, se puede evidenciar tanto de forma cuantitativa cuando generaliza un comportamiento a partir de estructuras aritméticas; o de forma cualitativa cuando predice comportamientos futuros desde una cualidad teniendo en cuenta los datos y conocimientos construidos previamente.

Con esto, en la evidencia (ver figura 49) se muestra una serie de sumas con las que el estudiante intenta determinar el límite de días que es recomendable para que la familia de Tomás se quede en las opciones de hospedaje, teniendo en cuenta el dinero presupuestado para este fin. Para el Hotel BV realiza la suma con los datos conocidos ($103.000 + 67.000 = 170.000$) y clarifica que hace referencia a dos noches, del mismo modo realiza el cálculo para 3 noches sumándolo al anterior (valor de 2 noches) $103.000 + 67.000 + 67.000 = 237.000$, este valor lo califica como no posible y para esto coloca una “X” y concluye que es recomendable quedarse en este hotel solo dos noches o gastaría más de su presupuesto. Asimismo, realiza los procesos y la justificación para el Hotel CG. De acuerdo con esto se evidencia una estimación cuantitativa, ya que a partir de las sumas realizadas y el presupuesto con el que contaba Thomas para el hospedaje (el cual se halló en un punto anterior y fue de \$224.400) el estudiante anticipa el comportamiento que van a tener los costos si siguen aumentando la cantidad de días y detenerse frente a un tope en el presupuesto para tomar una decisión

Figura 49

Respuesta E15 – M2

g) ¿Cuántos días a lo máximo es recomendable que la familia de Tomás se quede en el Quindío según el hotel Bella vista/ Casa grande? Justifique su respuesta.

Hotel Bella Vista	Hotel Casa Grande
$103.000 +$ 67.000 170.000 2 noches $103.000 +$ 67.000 67.000 X 237.000 3 noches	$80.000 +$ 56.000 136.000 2 noches 80.000 56.000 56.000 192.000 3 noches

Es recomendable quedarse dos noches o gastaría más de su presupuesto

Es recomendable quedarse 3 noches ya que es la cantidad de noches pero las que alcanza el presupuesto

h) ¿Con cuál hotel es recomendable quedarse y cuánto se gastará en el hospedaje?

es recomendable quedarse con el hotel casa grande y se gastaría 80.000 si se queda 1 noche o 160.000 si se queda 2 noches

Ahora bien, en la siguiente imagen (ver figura 50) el estudiante organiza las opciones de hospedaje en dos grupos: “Antes de 2” y “después de 2”, así, la opción más económica en un primer momento resulta ser Casa Campestre y luego la más económica, entre más días se quede la familia Espinosa (consta de 38 integrantes), serían las Cabañas San Valentín. Esto lo realiza debido a que identifica dentro de la representación gráfica un cambio en el comportamiento de las funciones antes de un punto de intersección, luego transcribe las expresiones analíticas halladas en la pregunta 4 de acuerdo con el orden determinado previamente. Por lo tanto, el estudiante anticipa el comportamiento de tres funciones lineales luego de analizar gráficamente su comportamiento antes de un punto de intersección y concluye una tendencia basándose en intervalos y la posición de cada recta cada vez que aumentan los días.

Figura 50

Respuesta E19 – M4

11. Ordene las expresiones algebraicas de menor a mayor si es necesario por intervalos. Justifique sus procedimientos.

Antes 2. [Casa camp, cabaña, Hotel] Después 4. 152.000x Cabaña, Casa, hotel	Ante 2. 120.000x 45 + 97x 45 + 152x	Después 45 + 97x 120x 45 + 152x
--	--	--

Luego, en la pregunta 8 se propone un número específico de noches (4) que la familia se va a hospedar y el estudiante debe determinar la mejor opción de hospedaje, véase una de las respuestas en la figura 51.

Figura 51

Respuesta E2– M4

Justificación
Cabaña San Valentín.
porque es mas barato
porque es mas barata la
noche y por eso va
solo se cobra una vez
pero depende el numero
de noches que se va a
usar
mas barato

Para comprender la respuesta del estudiante se debe tener en cuenta que la expresión para el hotel MA ($152.000x + 45.000$) para el hotel CS ($97.500x + 45.000$) y para el hotel CC ($120.000x$). Entonces, cuando el estudiante argumenta que es mejor la cabaña San Valentín porque “la noche es más barata”, el estudiante está estimando de manera cualitativa el comportamiento del costo y comparándolo con la estimación del costo de las demás según la pendiente (costo por noche) y el cambio en la variable independiente (número de noches).

En adición a lo anterior, la estimación cualitativa cobró sentido en las respuestas de algunos estudiantes luego de que se preguntó acerca de las condiciones que cambiarían los gastos (momento 1). Afirmaron que *“podría cambiar si hay más integrantes de la familia, el total aumentaría”* o *“si Thomas va solo, el valor podría cambiar disminuyendo el gasto”* o que *“podría cambiar si él lleva más familia al viaje o si se va solo, ahí habría una variación”*. Con lo cual se aprecia que los estudiantes anticipan que una modificación a las condiciones iniciales (más o menos personas) provocará a futuro un cambio en el comportamiento del gasto (aumento o disminución).

Otras evidencias relacionadas con la estimación cualitativa salieron a relucir en el momento 2 cuando se preguntó sobre cuántos días a lo máximo es recomendable que la familia de Tomás se quede en el Quindío según cada opción de hotel. Algunos de los estudiantes justificaron el número de noches argumentando lo siguiente: *“es la que se acopla a su presupuesto”* o *“porque todavía está en el rango del presupuesto”* o *“porque después el costo superaría lo de Tomás”*. En consecuencia, al utilizar estos términos *“se acopla”*, *“superaría”* y *“todavía está en el rango”* para justificar su recomendación desde el presupuesto destinado para el hospedaje, es posible percibir que el estudiante está entendiendo y anticipando un comportamiento creciente que, de seguir así, saldrá de los parámetros permitidos.

Así pues, la práctica de estimación se presenta como un mecanismo de razonamiento que se genera a partir de sucesos anteriores o posteriores, en los que se usen algunas relaciones numéricas o cualidades en las tendencias, con las cuales el estudiante logra determinar cómo será el comportamiento del fenómeno. Y, aporta a la significación de la variación constante, ya que permite que el estudiante anticipe comportamientos del costo con base en el parámetro m también entendido como el costo por noche.

Síntesis sobre la significación de la variación constante desde las PV.

Las PV se entienden como una herramienta para abordar el estudio de la variación y el cambio, por ende, al promover el desarrollo de las PV es posible describir el aprendizaje de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos relacionados con el pensamiento variacional, en este caso, la función lineal como variación constante.

Desde la conjetura del experimento de enseñanza, se plantearon 3 etapas para abordar el concepto de variación constante a lo largo del diseño y en relación con el desarrollo de las PV, con el propósito de que a través de las PV los estudiantes reconocieran el carácter estable del cambio en la función costo de los hoteles, significaran el costo por noche como el parámetro m y la inclinación de las rectas, significaran el costo fijo como el parámetro b y el corte con el eje y , y para finalizar con la aplicación del parámetro m para hacer predicciones y estimaciones de los costos.

Luego, se concluye que las prácticas de comparación y seriación fueron el camino para que los estudiantes comprendieran el carácter estable del cambio, ya que posibilitaron que los estudiantes identificaran y comprendieran que el costo de un hotel es variable y cambia respecto al número de noches. Asimismo, fue crucial para comprender cómo es dicha variación e identificar el patrón de cambio constante y, con esto, generalizar y reconocer que el cambio noche a noche es el mismo para el costo de los hoteles. Aunque, vale la pena resaltar que la seriación en ocasiones no fue asociada a un comportamiento constante, sino fue caracterizada como una relación creciente y directa.

Ahora, las prácticas de predicción y estimación fueron fundamentales para la significación de los parámetros propios de la función lineal. Ya que una vez se ha generalizado el costo por noche como patrón de cambio, es necesario que este sea funcional para anticipar comportamientos futuros. La predicción permite que el costo por noche sea entendido como el parámetro m en la

representación analítica de un modelo de variación constante, en tanto, el costo por noche es ubicado como aquel valor que se relaciona con la variable independiente para determinar los costos variables. Por otro lado, el parámetro b fue entendido como “valor de reserva” o “costo por persona por única vez” que debe ser sumado a los costos variables para hallar el costo total, y en algunos casos, fue significado como el punto de corte con el eje y. Por su parte, la estimación de comportamientos futuros dio cabida a que el estudiante aplicara el costo por noche, para anticipar tendencias de los costos y tomar decisiones financieras convenientes.

En síntesis, el desarrollo de las PV junto a la secuencia de tareas que fue ajustada y rediseñada permitió que a lo largo de la implementación del diseño los estudiantes construyeran un concepto de variación constante desde el contexto de un presupuesto y la función costo de los hospedajes. Sin embargo, también se identificaron algunas respuestas limitadas relacionadas con una variación creciente, donde aumentaban los precios al aumentar el número de noches, pero no se lograba ese concepto de cambio constante que caracteriza al objeto matemático de la investigación.

5.2.5. *Apreciaciones desde la Educación Económica y Financiera*

En este apartado se describen los alcances acerca del desarrollo de ideas y habilidades financieras a lo largo de la implementación del diseño; el cual se centraba en el ámbito conceptual del presupuesto como una herramienta organizadora que permite identificar los recursos disponibles y evaluar en qué actividades se usarán dichos recursos e incluía el concepto de costo dentro de ofertas de hospedaje.

Desde el momento 1 los resultados revelaron cómo los estudiantes calcularon los gastos correspondientes al pasadía en Panaca e identificaron que los gastos eran menores que el dinero disponible, por lo que “*si le alcanza para viajar y le queda de sobra*”. Esto muestra que evidenció la relación entre los ingresos y gastos que conlleva a un bienestar financiero.

Asimismo, al solicitar hacer recomendaciones a Tomás y su familia para que los gastos fueran menores, se observó una tendencia a buscar lo más económico, al distinguir expresiones como: *“ahorrar y buscar un menú más económico”*, *“no malgastar la plata”*, aludiendo a alternativas como traer comida de casa y revisar con otras agencias con mejores precios. Lo cual revela una conciencia de ahorro y administración de los recursos económicos con sentido común.

Ahora bien, un tema importante en la EEF, abordado durante los momentos 2 y 4 del diseño, es la toma de decisiones financieras que sean beneficiosas para el individuo, y que sean decisiones informadas en donde el estudiante pueda tener argumentos sólidos que justifiquen su decisión. En el caso del presente estudio, fue el objeto matemático de variación constante que permitió que el estudiante pudiera estudiar los costos de los hospedajes, comprender el comportamiento variacional y tomar la decisión más conveniente para la ocasión. Esto refuerza la idea de que la educación matemática complementa el campo de la EEF al aportar herramientas que potencian el razonamiento financiero de los individuos.

Por otro lado, un avance importante logrado en los estudiantes fue la comprensión de los conceptos de costos variables y costos fijos. A lo largo de los momentos 2 y 3 se observó cómo los estudiantes calcularon el costo por persona y lo categorizaron como costo fijo que se paga una única vez y también identificaron el costo por noche como aquel precio que depende del número de noches y que varía respecto a dicha variable. Incluso, en el momento 4, cuando se denomina “valor de reserva”, también lo categorizaron como costo fijo que es dado por la compañía de hospedaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, es válido afirmar que el contexto de ofertas de hospedaje con distintas razones de costo que llevan a identificar los costos variables y fijos aportó significativamente a la construcción del concepto de variación constante. Ya que ambos tipos de costo tienen propiedades que les permiten ser representados con los parámetros m y b de una

expresión analítica de la función lineal. En otras palabras, la EEF propone un escenario en donde el conocimiento matemático adquiere sentido y funcionalidad, lo cual hace que sea más significativo para el estudiante y pueda mejorar su proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos.

6. Conclusiones

Trayendo a colación la pregunta y objetivo de investigación planteados al inicio de este trabajo se puede concluir que se fortaleció el concepto de función lineal como modelo de variación constante mediante el desarrollo de las PV en situaciones del contexto económico. En tanto que, se incentiva abordar el estudio de la variación constante desde el manejo de las Prácticas Variacionales en situaciones financieras, lo que responde a la conjetura del experimento de enseñanza.

Se destaca la funcionalidad de las PV para describir la actividad matemática del estudiante, pues constituyen una herramienta fundamental para identificar cómo el estudiante acciona y razona ante situaciones de variación y cambio. En detalle, las PV ayudan al estudiante a generar argumentos; no se limitan a la respuesta escrita del individuo, sino al razonamiento detrás de la misma, lo cual permite que el estudiante tenga una mejor resignificación del objeto matemático. En el caso del presente estudio, se resalta cómo las PV facilitaron el estudio de la variación constante, por ejemplo, la comparación y la seriación eran intrínsecas para comprender el carácter estable del cambio, mientras que a través de la predicción el estudiante significó los parámetros de la función lineal, y finalmente desde la estimación pudo aplicar dichos parámetros para anticipar comportamientos futuros. En definitiva, fue a través de las PV que el estudiante pudo identificar una variación constante y darle significado desde un contexto específico.

El uso de un contexto financiero acerca de un presupuesto de un viaje ciertamente propició un escenario donde el contexto matemático resultó funcional para tomar decisiones financieras, lo cual hacía que el concepto de variación constante tomara sentido para el estudiante. Por esto, es crucial seguir realizando investigaciones en educación económica y financiera, en donde se implementen distintas estrategias para fortalecer y evidenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje, involucrando situaciones o eventos de la vida diaria, en los cuales el niño se vea

inmerso y familiarizado, no solo para aprender un objeto matemático del currículo, sino también para que desarrolle habilidades financieras que le permitan tomar decisiones acertadas dentro y fuera del aula.

Respecto al diseño implementado, se logró evidenciar que los ajustes realizados con el propósito de promover el desarrollo de las PV y la significación del concepto fueron pertinentes y los estudiantes lograron desarrollar la idea de variación constante y darle un significado dentro del contexto financiero de presupuesto y costo. Sin embargo, existen aspectos por analizar en cuanto al desarrollo de las PV y el orden de preguntas en la secuencia de actividades.

Finalmente, se invita a continuar la línea de investigación relacionada con el pensamiento variacional y el contexto financiero y económico; asimismo, se insta a abarcar la función lineal como variación constante en contextos financieros diferentes al presupuesto. Además, se propone implementar el diseño planteado en este trabajo de investigación en distintas aulas con recursos tecnológicos y ajustes personalizados para así ahondar en diferentes aristas de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

- Alfonso Pinilla, J. (2024). *Actividad Matemática posibilitada mediante el estudio de situaciones económicas y/o financieras en una población vulnerable* (Tesis Maestría Universidad Industrial de Santander). Recuperado de [Actividad matemática posibilitada mediante el estudio de situaciones económicas y/o financieras en una población vulnerable](#)
- Arciniegas Rueda, H. (2023). *Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio* (Tesis Maestría Universidad Industrial de Santander). Recuperado de [Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio](#)
- Argena, S. y Munhoz, R. (2024). Proposals for Financial Education activities based on Critical Mathematics Education. *Educação Matemática Debate*, 8(14), 1-14. DOI: 10.46551/emd.v8n15a16
- Asobancaria. (2012). *Saber más, ser más*. Recuperado de <https://www.sabermassermas.com/>.
- Bocanegra, E.R. (2017). *Desarrollo del pensamiento numérico-variacional en el aprendizaje de porcentajes aplicado a la educación financiera en estudiantes de grado séptimo de básica secundaria del IETI comuna 17 de la ciudad de Cali* (Tesis de pregrado, Universidad ICESI). Recuperado de [Desarrollo del pensamiento numérico variacional en el aprendizaje de porcentajes aplicado a la educación financiera en estudiantes de grado séptimo de básica secundaria del IETI comuna](#)
- Caballero Pérez, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* (Tesis Doctoral Cinvestav). Recuperado de [\(PDF\)](#)

[Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional](#)

- Caballero Pérez, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1007-1015. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Caballero-Pérez, M. y Moreno-Durazo, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1066-1074.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y análisis*. Editorial Universidad de Antioquia y Universidad Pedagógica Nacional.
- Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.
- Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, 50 (1), 77-89.
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* 7(3), 91-116.
- Comisión Intersectorial para la Educación Económica y Financiera. (2010). *Estrategia Nacional de Educación Económica y Financiera*.
- Comisión Intersectorial para la Educación Económica y Financiera. (2017). *Estrategia Nacional de Educación Económica y Financiera*.

Consejo Nacional de Política Económica y Social (CONPES) (2020). *Política nacional de inclusión y educación económica y financiera*. Departamento Nacional de Planeación.

Decreto 1860 de 1994. *Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales*. 3 de agosto de 1994. Ministerio de Educación Nacional. Diario Oficial No. 41473.

Decreto 457 de 2014. *Por el cual se organiza el Sistema Administrativo Nacional para la Educación Económica y Financiera, se crea una Comisión Intersectorial y se dictan otras disposiciones*. 5 de marzo de 2014. Ministerio Hacienda y Crédito Público. Diario Oficial No. 49083.

Díaz Carreño, J. y Rueda Herrera, C. (2025). *Educación Financiera: Aproximaciones prácticas de profesores de matemáticas en servicio*. [Tesis pregrado Universidad Industrial de Santander]. Repositorio Universidad Industrial de Santander

Dituri, P., Davidson, A. & Marley-Payne, J. (2019). Combining financial education with mathematics coursework: findings from a pilot study. *Journal of financial counseling and planning*. 30(2). DOI: 10.1891/1052-3073.30.2.313

Etesse, M. (2025). AI and Qualitative Data Analysis in Education Research: Familiarization and Exploration of Interview Transcripts Enhanced with ChatGPT. En Barredo et al. (Eds.) *Smart Innovation and Technologies*, 285-295. Springer. SSRN: <https://ssrn.com/abstract=5314116>

García, N., Grifoni, A., López, J. C. y Mejía, D. (2013). N° 12. La educación financiera en América Latina y el Caribe. Situación actual y perspectivas. *Serie Políticas Públicas y Transformación Productiva*, 12, Caracas: CAF. Recuperado de <https://scioteca.caf.com/handle/123456789/379>

- Guerrero Suarez, B. y Jaimes Espinoza, L. (2026). *Prácticas Variacionales en el estudio de la derivada como razón de cambio. Diseño de una situación de aprendizaje*. (Tesis pregrado Universidad Industrial de Santander). Recuperado de [Prácticas Variacionales en el Estudio de la Derivada como Razón de Cambio. Diseño de una Situación de Aprendizaje.](#)
- Grueso, R. y González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (Tesis maestría, Universidad del Valle). Recuperado de <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9921/1/7412-0525566.pdf>
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). (2014). *Informe Español PISA 2012 Competencia financiera*. Volumen I, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Jácome Anaya, I. J., Parada Rico, S. E., & Fiallo Leal, J. E. (2024). Curricular proposal to address diversity in mathematics class: A design on sequences and patterns. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), em2458. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14630>
- Jiménez-Martín, S. y Vilaplana, C. (2014). Análisis de la relación entre educación financiera y matemáticas a partir del programa Escuela 2.0. En Instituto Nacional de Evaluación Educativa (Ed.), *PISA 2012: competencia financiera. Análisis secundario. Informe español* (137-164). INEE.
- Kalchman, M. y Koedinger, K. (2005). Teaching and learning functions. En S. Donovan y J. Bransford (Eds.), *How students learn mathematics in the classroom* (pp. 163-206). National Research Council.
- Ley 115 de 1994. *Por la cual se expide la ley general de educación*. 8 de febrero de 1994. Congreso de la República de Colombia. Diario oficial No. 41214.

Ley 1328 de 2009. *Por la cual se dictan normas en materia financiera, de seguros, del mercado de valores y otras disposiciones*. Congreso de la República de Colombia. Diario oficial No. 47411.

Ley 1450 de 2011. *Por la cual se expide el Plan Nacional de Desarrollo, 2010-2014*. Congreso de la República de Colombia. Diario oficial No. 48102.

Ley 1735 de 2014. *Por la cual se dictan medidas tendientes a promover el acceso a los servicios financieros transaccionales y se dictan otras disposiciones*. Congreso de la República de Colombia. Diario oficial No. 49311.

Mancebón, M.J y Pérez D. (2014). Alfabetización financiera, competencias matemáticas y tipo de centro. En Instituto Nacional de Evaluación Educativa (Ed.), *PISA 2012: competencia financiera. Análisis secundario. Informe español* (p.p 137-164). INEE.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional, et al. (2025). *Nueva Pangea la Expedición*
<https://www.nuevapangealaexpedicion.com/>

Ministerio de Educación Nacional. (2022). *Mi plan, mi vida y mi futuro. Orientaciones pedagógicas para la educación Económica y Financiera*. MEN. Recuperado en
https://www.mineduccion.gov.co/1780/articles-340033_Orientaciones_Edu_economica_financiera_vfinal.pdf

- Muñoz, A., Barros, J. y Valbuena, S. (2018). Análisis de la educación económica y financiera en la educación básica y media: Una mirada a la formación de docentes de matemáticas. *Cuarto encuentro internacional de investigación en Educación Matemática*.
- Muñoz, C. y Santos, A. (2020). *Procesos de matematización vinculados con el estudio de magnitudes a partir del contexto financiero, una propuesta para estudiantes de grado quinto de educación primaria del colegio Cristóbal Colón* [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. [Procesos de matematización vinculados con el estudio de magnitudes a partir del contexto financiero, una propuesta para estudiantes de grado quinto de educación primaria del colegio Cristóbal Colón](#)
- Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de una aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. [Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional](#)
- Reyes, D. (2011). Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. *México: Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). Tradición y enfoques en la investigación cualitativa. *Metodología de la investigación cualitativa*, 14, 1-35.
- Savard, A. y Cavalcante, A. (2021). Financial Numeracy as Part of Mathematics Education. En A. Savard y A. Cavalcante (Eds.), *Financial Numeracy in Mathematics Education. Research and Practice* (pp. 9-18). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-73588-3>

- Toro, D. (2024). *Educación matemática financiera en un enfoque interdisciplinar: una alfabetización financiera en el grado décimo de la institución educativa INEM José Félix de Restrepo* [Tesis de Pregrado, Universidad de Antioquia] Biblioteca digital udea.
- Tous, R. y Bajonero, N. (2023). *Caracterización de los significados de las matemáticas en estudiantes de grado séptimo, bajo el contexto de la educación económica y financiera* [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. [Caracterización de los significados de las matemáticas en estudiantes de grado séptimo, bajo el contexto de la educación económica y financiera](#)
- Vilca, E., Villamares, E., Canchari, U., Vilca, F., Rojas, S. y Napán, J. (2025). Innovaciones en educación financiera y matemática: impulsando el aprendizaje en estudiantes de primaria. *Revista INVECOM*. 6(1), 1-9. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15271750>

Apéndice

Apéndice A. Diseño original

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

¡Vámonos de viaje!



Material elaborado por: Edith Johanna Mendoza Higuera – ~~Haidel Lina~~ Arciniegas Rueda – Andrea Liliana Becerra

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



Actividad matemática inicial

Un viaje familiar

Felipe desea obsequiar a su familia un pasadía a Panaca en las próximas vacaciones de mitad de año. La familia reside en la ciudad de Bogotá y el dinero con el que cuenta Felipe para el viaje es de \$2.650.000.



La empresa Price-travel le facilita a Felipe la siguiente ficha de precios de cotización.

Transporte Ida y regreso Adultos y niños: 110.000 c/u	Alimentación Menú Adulto: \$65.000 Menú infantil: \$42.000	Plan turístico Panaca Adulto: \$165.000 Niños: \$85.000
--	---	--

Teniendo en cuenta la información.

1. ¿Le alcanza el dinero a Felipe? ¿le sobra/falta?

2. En qué condiciones podrían cambiar el valor de los gastos?

3. ¿Qué recomendación le harías a Felipe para que los gastos sean menores?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



Actividad matemática central



¡Un cambio de planes!

Felipe le comenta a su esposa sobre la posibilidad de quedarse algunos días en Quimbaya, Quindío, pues su esposa desea conocer el Parque de "Los arrieros" y disfrutar de un paseo en el Balsaje "La Berraquera".

Para ello, Felipe necesita verificar si el costo del pasadía en Panaca no excede el 45% de su presupuesto.

1. ¿Los recursos económicos de Felipe le permiten quedarse unos días en Quimbaya? Justifique su respuesta.

2. Ante la posibilidad anterior, un asesor de viajes le recomienda a Felipe que para que el dinero restante le alcance para pagar hospedaje, alimentación y plan turístico, el costo del hospedaje no puede exceder el 15% del dinero disponible. ¿Cuánto es el dinero disponible, a lo máximo, para costear el hospedaje?

3. ¿Cuánto dinero queda disponible para costear alimentación y plan turístico?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

4. La empresa Price-travel le facilita a Felipe las siguientes opciones de hospedaje



Habitación familiar
\$9.000 por persona
\$67.000 por noche.

Convidado
Y Excalmista

Reserva ahora al mejor precio
en: HtBellaVista.com.co/



Habitación familiar
\$6.000 por persona
\$56.000 por noche.

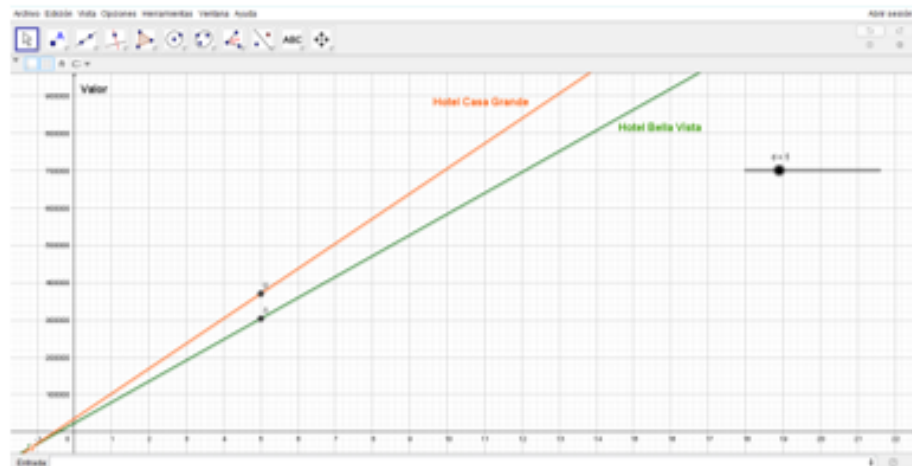
Para los mejores viajeros las experiencias se disfrutan en familia.

Reserva con confianza en: HtCasaGrande.com.co/

- a. ¿Qué valor se debe pagar por familia con cada opción de hotel?
- _____
- _____
- _____
- b. ¿Cuánto se debe pagar si la familia desea quedarse 2 noches en el hotel Bella Vista?
- _____
- _____
- _____
- c. ¿Cuánto se debe pagar si la familia desea quedarse 3 noches en el hotel Casa Grande?
- _____
- _____
- _____

5. Abra el archivo **EB.AMCP.ggb** y sigue las instrucciones.

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



a. ¿Qué representa el eje "Y"?

b. ¿Qué representa el eje "X"?

c. ¿Qué representa el deslizador d?

d. ¿Qué representa el punto A?

e. ¿Qué representa el punto B?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

- f. Según la representación mostrada en GeoGebra ¿Cuál de las dos opciones de hotel elegiría? ¿Por qué?

- g. Recuerdas, ¿cuán máximo se debe invertir en el hospedaje? Coloquemos tal valor en el eje Y.

1. Sea "a" el valor máximo para invertir en el hospedaje. (Valor que encontraste en la pregunta 2)
2. Ubíquese en la barra de entrada y escriba (0,a) y presione la tecla "Enter"
3. Seleccione el botón  y elija la opción "perpendicular" seguidamente, seleccione el eje "Y" y el punto realizado en la instrucción anterior. Aparecerá una recta perpendicular al eje "Y" que pasa por el punto.
4. Elija el botón  y seleccione la opción "intersección" luego, elija la recta realizada en la instrucción 3) y la recta del Hotel Casa Grande.
5. Repita la instrucción anterior para la recta del Hotel Bella Vista.
6. Después de las dos instrucciones anteriores aparecerán dos puntos de intersección uno para cada recta.

- h. ¿Qué representa cada punto de intersección con las rectas respectivamente?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

- i. ¿Cuántos días a lo máximo es recomendable que la familia de Felipe se quede en el Quindío según el hotel Bella vista/ Casa grande? Justifique su respuesta.



Actividad matemática práctica

Un nuevo presupuesto

- Al continuar trabajando con el archivo de la actividad anterior. Siga las siguientes instrucciones:
 - Diríjase a la pestaña "vista" y seleccione la opción "Hoja de cálculo".
 - Ubique el deslizador en $d=0$
 - Seleccione el punto A y haga clic derecho sobre el mismo, luego, elija la opción "registro en hoja de cálculo".
 - Repita la instrucción anterior para el punto B.
 - Ahora, mueva el deslizador d (una única vez de forma creciente).

2. ¿Qué representan los datos que aparecen en la hoja de datos?

3. ¿Cuál es la relación entre el número de días y el valor a pagar en cada hotel?

4. ¿Cuál es la diferencia entre cada valor, día a día con respecto al hotel Bella Vista? ¿Qué características tienen los datos hallados?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

5. ¿Qué representa el valor hallado en el punto anterior?

6. ¿Sucedec lo mismo con respecto al hotel Casa Grande? Justifique su respuesta.

7. ¿Qué relación observa entre los valores hallados en los puntos anteriores y la inclinación de cada recta?

8. Para las primeras 5 noches escriba la expresión (una a una) que le permite hallar el valor a pagar por el hospedaje en el hotel Casa Grande.

9. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Casa Grande para cualquier cantidad de días?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

10. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Bella Vista para cualquier cantidad de días?

11. Sea "x" el número de días. Reescriba las expresiones construidas en las dos preguntas anteriores.

Hotel Casa grande: $V_1 =$

Hotel Bella vista: $V_2 =$

"V" significa el valor total a pagar por el hospedaje en ese hotel.



12. ¿Qué relación encuentra entre la gráfica, la tabla de datos y la expresión hallada en la pregunta anterior (9 o 10) para cada uno de los hoteles?

13. Felipe afirma que al Balsaje la Berraquera solo irá él con su esposa pues, es una aventura por el río La Vieja y no es recomendable para los niños. Por tanto, el asesor de viajes comparte las siguientes fichas de precios.

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



¿Cuánto dinero se necesita para cubrir los gastos del plan turístico en el parque "Los Arrieros" y el Balsaje "La Berraquera"?

14. ¿Qué gasto le faltaría cubrir para el día del plan del Balsaje "La Berraquera"?

15. ¿Le alcanza el dinero a Felipe? ¿Le sobró dinero para cubrir los gastos faltantes del día del plan en el Balsaje "La Berraquera"?

16. Con creatividad e imaginación, elabore una ficha donde detalle el presupuesto del viaje a Quimbaya, Quindío. Detalle el valor de los gastos y las recomendaciones para optimizar el dinero.

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



Actividad matemática evaluativa

Presupuesto para un viaje familiar

La familia Espinoza vive en Medellín y está organizando un viaje en celebración de los 60 años de casados del señor y



señora Espinoza. La idea es viajar al cabo de la vela en la Guajira. En total son 23 menores de edad y 15 adultos.

Alicia propone analizar muy bien las ofertas de hospedaje para poder minimizar los gastos, para ello, consultó tres opciones:

Hotel Mar azul Reserva por tan solo \$45.000 y paga \$4000 por persona, cada noche. 	Hermosa cabaña con capacidad de 40 personas por un costo de reserva de \$45.000 y \$76.000 por noche.  <i>Cabañas San Valentín</i>	 Casa campestre Fuente nueva Disfruta de la sencillez y comodidad en casa campestre de capacidad de 40 personas por un valor de \$120.000 por noche.
--	--	--

- a. ¿Qué diferencias observas entre las razones de costo de cada una de las opciones?

- b. Si la familia decide quedarse de 2 días, ¿cuánto cuesta el hospedaje según cada opción?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

- c. Construya una expresión que le permita hallar el costo del hospedaje para cualquier cantidad de días, para cada opción.

- d. ¿Qué similitudes encuentra entre las expresiones halladas?

- e. Abra el archivo **EB-AME.ggb** y siga las siguientes instrucciones:

1. Diríjase a la barra de entrada y escriba la expresión hallada para el hotel "Mar azul" y presione la tecla "enter".
2. Repita la instrucción para expresión hallada con respecto a cabañas "San Valentín" y Casa campestre "Fuente mágica".
3. Aparecerán tres trazos sobre la representación gráfica y las expresiones para cada una de ellas en la vista algebraica.

- f. ¿Qué representa el eje "x"?

- g. ¿Qué representa el eje "y"?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

- h. ¿Qué representa la expresión que se muestra en la vista algebraica y la representación que se muestra en la vista gráfica para el hotel Mar azul? ¿Sucede lo mismo para la opción de cabaña y casa campestre?

- i. Si la familia decide quedarse 4 días ¿cuál es la mejor opción de hospedaje? Justifique su respuesta.

- j. ¿Hay costos iguales en las opciones para algún día? Justifique su respuesta.

- k. Teniendo en cuenta la respuesta del inciso d), ¿cómo evidencia esas similitudes en la gráfica?

- l. Ordene las expresiones algebraicas de menor a mayor. Justifique sus procedimientos.

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

m. ¿Cuál opción de hospedaje le recomienda a la familia Espinoza?

n. Si 20 personas deciden no viajar. ¿Cuál opción de hospedaje le recomienda a la familia Espinoza?

MATERIAL EN CONSTRUCCIÓN - PROYECTO 70783 MEN - UIS

Apéndice B. Diseño modificado

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

 	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS Dane 168001001025 Nit 804.003.902-9	
---	--	---

Nombre _____ Fecha _____

¡Vámonos de viaje!



¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



Momento 1

Un viaje familiar

Thomás desea obsequiar a su familia un pasadía a Panaca en las próximas vacaciones. La familia reside en la ciudad de Medellín y el dinero con el que cuenta Thomás para el viaje es de \$2.650.000.

La empresa Price-travel le facilita a Thomás la siguiente ficha de precios.



Transporte Ida y regreso Adultos y niños: 110.000 c/u	Alimentación (día) Menú Adulto: \$65.000 Menú infantil: \$42.000	Plan turístico Panaca Adulto: \$165.000 Niños: \$85.000
--	---	--

Teniendo en cuenta la información.

- ¿Le alcanza el dinero a Thomás? ¿cuánto le sobra/falta? Escriba los procedimientos y justifique su respuesta.

Procedimientos

Justificación

- ¿En qué condiciones podrían cambiar el valor de los gastos? Justifique su respuesta.

- ¿Qué recomendación le harías a Thomás para que los gastos sean menores?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

Momento 2



¡Un cambio de planes!

Thomás le comenta a su esposa sobre la posibilidad de quedarse algunos días en Quimbaya, Quindío, pues su esposa desea conocer el Parque de “Los arrieros” y disfrutar de un paseo en el Balsaje “La Berraquera”.

Para ello, Thomás necesita verificar si el costo del pasadía en Panaca no excede el 45% de su presupuesto.

1. ¿Los recursos económicos de Thomás le permiten quedarse unos días en Quimbaya? Justifique su respuesta.

Procedimientos

Justificación

2. Ante la posibilidad anterior, un asesor de viajes le recomienda a Thomás que para que el dinero restante le alcance para pagar los gastos en Quimbaya: hospedaje, alimentación y plan turístico, el costo del hospedaje no puede exceder el 15% de ese dinero. ¿Cuánto dinero, a lo máximo, puede utilizar para el hospedaje?

3. ¿Cuánto dinero del restante queda para costear alimentación y plan turístico en Quimbaya?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

4. Analiza y responde. La empresa Price-travel le facilita a Tomás las siguientes opciones de hospedaje



Habitación Familiar
\$9.000 por persona
 por única vez
\$67.000 por noche

Comodidad & Excelencia

Reserva ahora al mejor precio en: HTBellaVista.com.co



Habitación Familiar
\$6.000 por persona
 por única vez
\$56.000 por noche

Para los mejores viajeros las experiencias se disfrutan en familia.

Viaja en familia

Reserva con confianza en: HTCasaGrande.com.co

a) ¿Qué valor debe pagar la familia de Tomás por una noche con cada opción de hotel?

Hotel Bella Vista

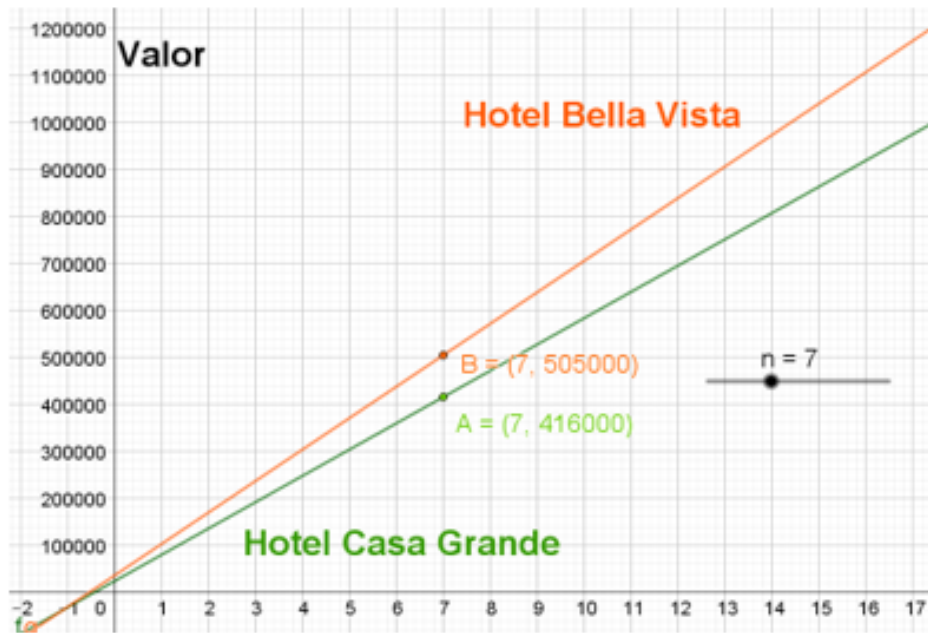
Hotel Casa Grande

b) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 2 noches en el hotel Bella Vista?

c) ¿Cuánto se debe pagar si la familia de Tomás desea quedarse 3 noches en el hotel Casa Grande?

5. A continuación, observe la imagen

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



- ¿Qué representa el eje “Y”?
- ¿Qué representa el eje “X”?
- ¿Qué información aportan los puntos “A” y “B”?
- Según la representación mostrada en GeoGebra ¿Cuál de las dos opciones de hotel elegiría?
¿Por qué?
- Recuerdas, ¿cuán máximo se debe invertir en el hospedaje? Coloquemos tal valor en el eje y. Observa la pantalla del docente y analiza.

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

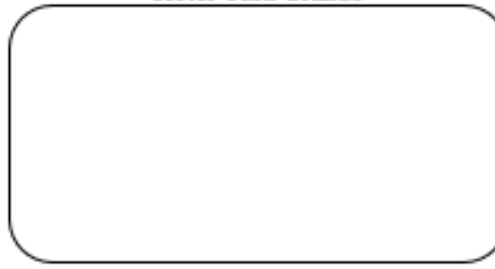
f) ¿Qué representa cada punto de intersección con las rectas respectivamente?

g) ¿Cuántos días a lo máximo es recomendable que la familia de Tomás se quede en el Quindío según el hotel Bella vista/ Casa grande? Justifique su respuesta.

Hotel Bella Vista



Hotel Casa Grande



h) ¿Con cuál hotel es recomendable quedarse y cuánto se gastará en el hospedaje?

**Momento 3****¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?****Un nuevo presupuesto**

Observa el siguiente registro en la hoja de cálculo de los puntos A y B, luego de mover el deslizador una única vez de forma creciente y responde:

Hotel Casa Grande		Hotel Bella Vista	
x(A)	y(A)	x(B)	y(B)
1	80000	1	103000
2	136000	2	170000
3	192000	3	237000
4	248000	4	304000
5	304000	5	371000
6	360000	6	438000
7	416000	7	505000
8	472000	8	572000
9	528000	9	639000

- ¿Qué representan los datos que aparecen en la hoja de cálculo?

- ¿Cuál es la relación entre el número de noches y el valor a pagar en cada hotel?

- ¿De cuánto es la diferencia entre cada valor, noche a noche, con respecto al hotel Bella Vista?
 ¿Qué características tienen los datos hallados?

- ¿Qué representa el valor hallado en el punto anterior?

- ¿Sucede lo mismo con respecto al hotel Casa Grande? Justifique su respuesta.

- ¿Qué relación observa entre los valores hallados en los puntos anteriores y la inclinación de cada recta?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

7. Para las primeras 5 noches escriba la expresión (una a una) que le permite hallar el valor a pagar por el hospedaje en el hotel Casa Grande.

8. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Casa Grande para cualquier cantidad de noches?

9. ¿Qué expresión le permitiría hallar el valor del hospedaje para el hotel Bella Vista para cualquier cantidad de noches?

10. Sea “ x ” el número de noches. Reescriba las expresiones construidas en las dos preguntas anteriores.

Hotel Casa Grande: $V_1 =$

Hotel Bella Vista: $V_2 =$

“ V ” significa el valor total a pagar por el hospedaje en ese hotel.



11. ¿Qué representa el valor fijo de cada expresión?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

12. ¿Qué relación encuentra entre la gráfica, la tabla de datos y la expresión hallada en la pregunta anterior (8 o 9) para cada uno de los hoteles?

13. ¿Qué relación del costo por noche encuentra en la expresión hallada y las gráficas?

14. Teniendo en cuenta todo lo anterior y según el máximo precio que se puede gastar en el hospedaje ¿Con cuál opción de hotel te quedas? ¿Cuántos días y cuál será el gasto de esto?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

15. Tomás afirma que al Balsaje la Berraquera solo irá él con su esposa pues, es una aventura por el río “La Vieja” y no es recomendable para los niños. Por tanto, el asesor de viajes comparte las siguientes fichas de precios.



¿Cuánto dinero se necesita para cubrir los gastos del plan turístico en el parque “Los Arrieros” y el Balsaje “La Berraquera”?

Parque “Los Arrieros”

Balsaje “La Berraquera”

- ¿Qué gasto le faltará cubrir para el día del plan del Balsaje “La Berraquera”?

Con creatividad e imaginación, elabore el presupuesto final del viaje a Quimbaya en el folleto que le entregará el docente, en este detalle todos los gastos y las recomendaciones para optimizar el dinero, teniendo en cuenta las actividades a realizar.

- ¿Le alcanza el dinero a Tomás para todo el viaje? ¿Cuánto le sobra o le falta para los gastos extra del día de plan en el Balsaje “La Berraquera”?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?



Momento 4

Presupuesto para un viaje familiar

La familia Espinosa vive en Medellín y está organizando un viaje en celebración de los 60 años de casados del señor y señora Espinosa. La idea es viajar al cabo de la vela en la Guajira. En total son 23 menores de edad y 15 adultos.



Alicia propone analizar muy bien las ofertas de hospedaje para poder minimizar los gastos, para ello, consultó tres opciones:



1. ¿Qué diferencias observas entre las razones de costo de cada una de las opciones?

Hotel Mar Azul

Cabañas San Valentín

Casa Campestre Fuente Mágica

2. ¿Cuál crees que es la opción más económica?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

3. Si la familia decide quedarse 2 noches, ¿cuánto cuesta el hospedaje según cada opción?

Hotel Mar Azul

Cabañas San Valentín

Casa Campestre Fuente Mágica

4. Construya una expresión que le permita hallar el costo del hospedaje para cualquier cantidad de días, para cada opción.

Hotel Mar Azul

Cabañas San Valentín

Casa Campestre Fuente Mágica

5. ¿Qué similitudes encuentra entre las expresiones halladas?

6. Junto con el docente socialice en Geogebra las expresiones encontradas para cada una de las opciones de hospedaje y responda:

➤ ¿Qué información aportan los puntos “B”, “C” y “D”?

7. ¿Qué relación identifica entre los elementos de cada expresión con su respectiva gráfica?

¿Cómo optimizar la distribución de dinero en un viaje?

8. Si la familia decide quedarse 4 noches, ¿cuál es la mejor opción de hospedaje? Justifique su respuesta.

Procedimientos

Justificación

9. ¿Hay costos iguales en las opciones para alguna noche? Justifique su respuesta.

10. Teniendo en cuenta la respuesta del inciso 5, ¿cómo se evidencian esas similitudes en la gráfica?

11. Ordene las expresiones algebraicas de menor a mayor si es necesario por intervalos. Justifique sus procedimientos.

12. ¿Cuál opción de hospedaje le recomienda a la familia Espinosa?

13. Si 20 personas deciden no viajar, ¿cuál opción de hospedaje le recomienda a la familia Espinosa?