

**VARIEDADES BANDERA ASOCIADAS A ÁLGEBRAS DE  
LIE DE TIPO CI**

**ELIZABETH PÉREZ MARTÍNEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2012**

**VARIEDADES BANDERA ASOCIADAS A ÁLGEBRAS DE  
LIE DE TIPO CI**

**ELIZABETH PÉREZ MARTÍNEZ**

Trabajo de grado presentado para optar al  
título de Magister en Matemáticas

Director

**DRA. SOFÍA PINZÓN DURÁN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2012**

---

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, por ser mi principio y fundamento.

A mis hijos Manuel Alberto y Jorge Eduardo por ser la razón de mi vida y la motivación para ser su ejemplo.

A mi madre por su amor y dedicación y a mi padre quien lamentablemente ya no está conmigo.

A mi directora de Tesis por su orientación, paciencia y apoyo.

A los profesores de la maestría, por sus enseñanzas.

A mis compañeros Olga Rocío, Arturo, Alex y William, por su apoyo y amistad.

A la Hna Aliria Pedraza, por su colaboración para poder llevar a feliz término esta maestría.

A mi familia y amigos que siempre creyeron en mi.

Muchas gracias.

---

# TABLA DE CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>12</b>
1.1. Grupo de Lie . . . . .	12
1.2. Álgebra de Lie . . . . .	12
1.3. Subálgebra de Lie . . . . .	13
1.4. Representación Adjunta . . . . .	13
1.5. Forma de Cartan Killing . . . . .	14
1.6. Subálgebras de Cartan . . . . .	14
1.7. Sistema de Raíces . . . . .	14
1.8. Clasificación de las Álgebras de Lie . . . . .	17
1.9. Álgebras de Lie clásicas . . . . .	17
1.10. Álgebras de Lie excepcionales . . . . .	18
1.11. Variedades Bandera . . . . .	19
1.12. Métricas Invariantes . . . . .	20
1.13. $f$ -Estructuras invariantes . . . . .	20
1.14. Estructura Casi Compleja Invariante . . . . .	20
1.15. Forma de Kähler . . . . .	22
1.16. Variedad Bandera $(1, 2)$ -Simpléctica . . . . .	24
1.17. Aplicaciones Armónicas . . . . .	26
1.18. Conexión Riemanniana $(\mathbb{F}, \Lambda)$ . . . . .	27
<b>2. DIGRAFOS Y ESTRUCTURAS INVARIANTES</b>	<b>29</b>
2.1. Torneos . . . . .	29
2.2. $f$ - Estructuras $(1,2)$ -Admisibles . . . . .	33
2.3. Los casos $\mathbb{F}(2), \mathbb{F}(3), \mathbb{F}(4)$ . . . . .	34
2.4. $f$ -Estructuras Localmente Transitivas . . . . .	39

2.5. Digrafos Completamente No Transitivos . . . . .	40
<b>3. <math>f</math>-VARIEDAD BANDERA MAXIMAL ASOCIADA A ÁLGEBRAS DE LIE DE TIPO <math>C_3</math></b>	<b>43</b>
3.1. Álgebra del tipo $C_l, l \geq 3$ . . . . .	43
3.2. Transitividad Local General . . . . .	46
3.3. El caso de la $f$ -variedad bandera maximal $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ asociada al álgebra de Lie $C_3$ . . . .	47
3.4. $f$ -estructuras $(1, 2)$ -admisibles en $\mathbb{F}$ asociada a $C_3$ . . . . .	51
3.5. Métricas $(1, 2)$ -simpléticas en $\mathbb{F}$ asociada a $C_3$ . . . . .	54
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>61</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>62</b>

---

## RESUMEN

**TÍTULO:** VARIEDADES BANDERA ASOCIADAS A ÁLGEBRAS DE LIE DE TIPO  $Cl^*$

**AUTOR:** ELIZABETH PÉREZ MARTÍNEZ\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Algebra de Lie, Variedad Bandera,  $f$ -estructuras  $(1, 2)$  – *admisibles*, Métricas  $(1, 2)$  – *simplecticas*

**DESCRIPCIÓN:**

Sea una variedad bandera dotada de una métrica  $\Lambda$  y una  $f$ -estructura  $\mathcal{F}$ . Se dice que la  $f$ -estructura  $\mathcal{F}$  es  $(1, 2)$ -admisibles, si existe una métrica  $\Lambda$  tal que la  $f$ -variedad  $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$  sea  $(1, 2)$ -simplectica. Una variedad bandera es un espacio homogéneo  $G/C(S)$ , en el que  $G$  es un grupo de Lie complejo y  $C(S)$  es el centralizador de un toro no necesariamente maximal. Cuando  $S$  es maximal se dice que la variedad bandera  $\mathbb{F}$  es maximal. En el caso de la variedad bandera maximal clásica  $\mathbb{F}(n)$  se especifican los resultados hallados por Sofía Pinzón en los que se estudiaron las condiciones necesarias y suficientes para que la variedad bandera maximal, dotada de una  $f$ -estructura y una métrica invariante  $ds_{\Lambda}^2$ , sea  $(1, 2)$ -simplectica, teniendo en cuenta que estas variedades bandera corresponden a las asociadas a álgebras de Lie semisimples de rango menor ó igual a tres. Estudiamos los teoremas y definiciones que caracterizan una variedad bandera maximal, caracterizamos los sistemas de raíces, la base de weyl, las  $f$ -estructuras, la métrica invariante, la conexión riemanniana y la forma de Kähler. Analizamos el álgebra de Lie semisimple finita de tipo  $Cl$ , la representación de una subálgebra de Cartan, y finalmente hallamos las  $f$ -estructuras y las métricas invariantes que es posible definir en las variedades bandera maximales asociadas al álgebra de Lie  $C_3$ , de forma tal que una variedad  $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$  sea  $(1, 2)$ -simplectica.

---

\*Dr. Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Director del Trabajo de Grado.

\*\*Programa de Maestría en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

---

## ABSTRACT

**TITLE:** FLAGS MANYFOLDS ASOCIATED WITH ALGEBRAS LIE  $Cl^*$

**AUTHOR:** ELIZABETH PÉREZ MARTÍNEZ\*\*

**KEYWORDS:** Lie algebra, Flag manifolds,  $f$ -structures  $(1,2)$ -admissibles, Metrics  $(1,2)$ -symplectics

**DESCRIPTION:**

Let  $\mathbb{F}$  a flag manifold endowed with a metric  $\Lambda$  and a  $f$ -structure  $\mathbb{F}$  it is said that  $f$ -structure  $\mathcal{F}$  is  $(1,2)$ -admissible, if there is a metric  $\Lambda$  such that  $f$ -manifold  $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$  is  $(1,2)$ -symplectic. A flag manifold is a homogeneous space  $G/C(S)$ , where  $G$  is a complex Lie group and  $C(S)$  is the centralizer of a torus not necessarily maximal. When  $S$  is maximal we say that the flag manifold  $\mathbb{F}$  is maximal. In the case of classical maximal flag manifold  $\mathcal{F}(\lambda)$  specifies the results found by Sofia Pinzon in which we studied the necessary and sufficient conditions for the maximal flag manifold, endowed with an invariant almost-complex structure  $J$  and an invariant metrics, is  $(1,2)$ -symplectic, taking into account that these correspond to the flag manifolds associated with semisimple Lie algebras of rank less than or equal to three. The theorems and definitions were studied characterizing a maximal flag manifold, we characterize the root systems, Weyl basis, the  $f$ -structures, the metric invariant, Riemannian connection and the Kahler form. The finite semi-simple Lie algebra of type  $Cl$  was analyzed, the representation of a Cartan subalgebra, and finally we find the  $f$ -structures and invariant metrics that can be defined on maximal flag manifolds associated with Lie algebra  $C^3$ , so that  $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$  is an  $(1,2)$ -symplectic.

---

\*Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Graduate Dissertation Director.

\*\*Graduate Program of Master in Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

---

# INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se especifican los resultados hallados en la Tesis Doctoral de Sofia Pinzón, en los cuales se estudian las condiciones necesarias y suficientes enunciadas por Cohen, Negreiros, San Martín y Paredes, para que una variedad bandera maximal  $\mathbb{F}(n)$  dotada de una estructura casi-compleja invariante  $J$  y una métrica invariante  $ds_{\Lambda}^2$ , sea  $(1, 2)$ -simpléctica, teniendo en cuenta que estas variedades bandera corresponden a las asociadas a álgebras de Lie semisimples de rango menor o igual a tres.

Una variedad bandera geométrica es un espacio homogéneo  $G/C(S)$ , en el que  $G$  es un grupo de Lie complejo semisimple y  $C(S)$  es el centralizador de un toro no necesariamente maximal. En el caso en el que  $S$  es maximal, se dice que la variedad bandera  $\mathbb{F}$  es maximal.

Por otro lado una  $f$ -estructura  $\mathcal{F}$ , es un endomorfismo del espacio tangente en un punto de la variedad, que a su vez, cumple la condición  $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ . Una  $J$  estructura corresponde al caso particular en el que únicamente se satisface la condición  $J^2 + 1 = 0$ .

Este trabajo busca en el sentido definido por Black estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que la variedad bandera maximal  $\mathbb{F}$  asociada a las álgebras de Lie  $A_3$  y  $C_3$ , sea una  $f$ -variedad  $(1, 2)$ -simpléctica. Está distribuido en tres capítulos de la siguiente forma.

En el primer capítulo se presentan los conceptos preliminares que determinan el objeto de estudio, es decir, las definiciones y teoremas que caracterizan una variedad bandera maximal y los referentes a sistemas de raíces, base de Weyl,  $f$ -estructuras, métrica invariante, la conexión riemanniana y la forma de Kahler. Finalizando se muestra el teorema enunciado por Black, el cual permite relacionar las aplicaciones  $f$ -holomorfas y las aplicaciones armónicas, mediante las  $f$ -estructuras y cuyo enunciado se presenta a continuación.

**Teorema 1.** *Sea  $\phi : (M, g, \mathcal{F}) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$  una aplicación tal que:*

1.  $\phi$  es  $f$ -holomorfa, es decir, cumple la condición  $d\phi.J = \mathcal{F}.d\phi$
2.  $M$  es co-simpléctica, es decir,  $d^*(\omega) = 0$
3.  $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$

*Entonces  $\phi$  es armónica.*

En el segundo capítulo se presenta la relación entre estructuras casi-complejas y los torneos así como el concepto de  $(1, 2)$ -admisibles y las condiciones que lo determinan.

En el tercer capítulo se estudia el álgebra de Lie semisimple finita de tipo  $C_l$ , una representación de una subálgebra de Cartan, el sistema simple de raíces y finalmente a partir de lo enunciado en [3] se muestran las  $f$ -estructuras y las métricas invariantes que es posible definir en las variedades bandera maximales asociadas al álgebra de Lie  $C_3$  de forma que  $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$  sea una variedad  $(1, 2)$ -simpléctica.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

---

### 1.1. Grupo de Lie

---

Un grupo de Lie,  $G$ , es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo que es compatible, es decir, la operación del grupo  $p : G \times G \rightarrow G$ ,  $p(x, y) = xy$  y la aplicación,  $x \in G \rightarrow x^{-1} \in G$  son aplicaciones diferenciables. Una variedad diferenciable es una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable de clase  $C^\infty$ . Como todo grupo de Lie es una variedad diferenciable es posible considerar el espacio tangente a la identidad  $e$ ,  $T_e G$ .  $T_e G$  tiene estructura de álgebra de Lie y corresponde al álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , esto es,  $T_e G = \mathfrak{g}$ .

### 1.2. Álgebra de Lie

---

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo  $\mathbb{K}$  dotado de una operación binaria  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , llamada corchete de Lie, que satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad, es decir, que para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  y  $a, b \in \mathbb{K}$  se cumple que
$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$
2. Antisimétrica:  $[X, Y] = -[Y, X]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .
3. Identidad de Jacobi:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

Los ejemplos más importantes son grupos y álgebras de Lie de matrices; todo grupo de Lie tiene un representante en su clase de isomorfismo que es una álgebra de Lie de matrices.

- Ejemplo 1. Al grupo general lineal real  $Gl(l, \mathbb{R})$ ; corresponde el álgebra de matrices reales  $l \times l$  invertibles  $M(l, \mathbb{R})$ .

- Ejemplo 2. Al grupo lineal complejo  $Gl(l, \mathbb{C})$ : corresponde el álgebra de matrices complejas  $l \times l$  invertibles  $M(l, \mathbb{C})$ .
- Ejemplo 3. Al grupo simpléctico real  $S_p(2l, \mathbb{R})$  de matrices le corresponde el álgebra de matrices  $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{R}) : XJ + JX^t = 0\}$  de matrices simplécticas reales, donde  $J$  es la matriz por bloques, anti-simétrica estándar.
- Ejemplo 4. Al grupo simpléctico complejo  $S_p(2l, \mathbb{C})$  de matrices simplécticas complejas, corresponde el álgebra de matrices complejas,  $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$ , que satisfacen  $AJ + JA^T = 0$  donde  $J$  es la matriz por bloques, anti-simétrica estándar.

### 1.3. Subálgebra de Lie

Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  es un subespacio vectorial  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  que es cerrado por el corchete; esto es  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ , si  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

Una subálgebra de Lie es una álgebra de Lie con una estructura heredada por la estructura de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 1.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie,  $V$  un espacio vectorial y  $\mathfrak{gl}(V)$  el álgebra de Lie de transformaciones lineales de  $V$ . Una representación de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  es un homomorfismo  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  que satisface que  $\rho([X, Y]) = [\rho X, \rho Y]$ .

### 1.4. Representación Adjunta

Para un elemento  $X$  en una álgebra de Lie considere la transformación lineal

$$ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

definida por  $ad(X)(Y) = [X, Y]$ . La aplicación

$$ad : X \in \mathfrak{g} \rightarrow ad(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define una representación de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{g}$ , llamada representación adjunta.

Existe la representación adjunta de un grupo  $G$  en su respectiva álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y se representa por  $Ad(h)$ . Tal representación se construye de la siguiente forma:

Un elemento  $g \in G$  define el automorfismo interno  $C_g(x) = gxg^{-1}$ . Es claro que  $C_g(1) = 1$ , por lo tanto  $Ad(C_g)_1$  es una aplicación lineal de  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Ahora sean  $g, h \in G$ .

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$$

lo que implica que  $d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1 = d(C_{gh})_1$  y puede concluirse que la aplicación  $g \rightarrow d(C_g)_1$  es una representación de  $G$  en  $\mathfrak{g}$ , la cual corresponde a la representación adjunta  $Ad$ .

---

## 1.5. Forma de Cartan Killing

---

Dada una representación  $\rho$  de dimensión finita del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , definimos en  $\mathfrak{g}$  una forma bilineal simétrica llamada la forma traza. La forma traza está dada por

$$\beta_\rho(X, Y) = \text{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

Cuando  $\rho$  es la representación adjunta, recibe el nombre de forma de Cartan Killing y se denota por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ó por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ .

**Definición 2.** Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se definen, por inducción, los sub-espacios

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

Entonces  $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \dots, \mathfrak{g}^k, \dots$  es la serie central descendente de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 3.** Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}$  es llamada nilpotente, si existe  $k_0 \geq 1$ , tal que  $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$ .

---

## 1.6. Subálgebras de Cartan

---

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  que satisface:

1.  $\mathfrak{h}$  es nilpotente y
2. si  $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ , entonces  $X \in \mathfrak{h}$ .

Un tipo especial de subálgebra de Lie es el que corresponde a las álgebras de Lie semi-simples, cuya estructura se muestra mediante los sistemas de raíces, a partir de los cuales tales álgebras pueden clasificarse.

**Definición 4.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es semisimple si y sólo si la forma de Cartan Killing de  $\mathfrak{g}$  es no degenerada, es decir:  $\langle X, Y \rangle = 0$  para todo  $Y \in \mathfrak{g}$ , implica  $X = 0$ .

---

## 1.7. Sistema de Raíces

---

Sea  $\alpha$  un funcional lineal sobre el espacio vectorial complejo  $\mathfrak{h}$  (subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ), la notación  $\mathfrak{g}_\alpha$  corresponde al subespacio lineal de  $\mathfrak{g}$  dado por

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

puede verse que para  $\alpha = 0$ ,  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$ . Si  $\alpha \neq 0$  y  $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ , el funcional lineal  $\alpha$  es llamado una raíz (de  $\mathfrak{g}$  con respecto a  $\mathfrak{h}$ ) y en tal caso  $\mathfrak{g}_\alpha$  es llamado un *subespacio raíz*. Denotamos por  $\Pi$  el conjunto de raíces no nulas del par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . El conjunto  $\Pi$  de raíces con respecto a una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$

genera el espacio dual  $\mathfrak{h}^*$ , cuyos elementos  $H_\alpha, \alpha \in \Pi$ , duales de las raíces con relación a la forma de Cartan-Killing, generan  $\mathfrak{h}$ . Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una forma bilinear, ella define una aplicación  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  dada por

$$H \mapsto \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle.$$

Como la restricción de la forma Cartan-Killing a  $\mathfrak{h}$  es no degenerada, esta aplicación es un isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$ . Para  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , su imagen por la inversa de este isomorfismo será denotada por  $H_\alpha$ , esto es,  $H_\alpha$  es definido por la igualdad

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H), \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Las raíces  $\alpha \in \Pi$  definen un número finito de elementos especiales  $H_\alpha$  en  $\mathfrak{h}$ . Como el conjunto de las raíces genera  $\mathfrak{h}^*$ , el conjunto  $\{H_\alpha | \alpha \text{ es raíz}\}$  genera a  $\mathfrak{h}$ . Consideremos la siguiente sucesión de elementos de  $\mathfrak{h}^*$ :

$$\dots \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha \dots$$

que será denominada una  $\alpha$ -sucesión iniciada en  $\beta$ . Se desea saber cuántos de los elementos de la sucesión son raíces. La respuesta está dada por la fórmula de Killing dada a continuación. Los elementos de la  $\alpha$ -sucesión iniciada en  $\beta$  que son raíces forman un intervalo que contiene a  $\beta$ , es decir, existen enteros  $p, q \geq 0$  tal que

$$\beta - p\alpha, \dots \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha \dots, \beta + q\alpha$$

Son las únicas raíces de la forma  $\beta + k\alpha$  con  $k$  entero, además, es válida la siguiente fórmula, llamada fórmula de Killing:

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

De lo anterior podemos recalcar que:

- En la fórmula Cartan-Killing  $\alpha$  y  $\beta$  no son simétricos, para la  $\beta$ -sucesión iniciada en  $\alpha$  son diferentes valores los de  $p$  y  $q$  los que definen el intervalo de raíces.
- El entero  $p - q$  recibe el nombre de número de Killing asociado a las raíces  $\alpha$  y  $\beta$ .

Se seleccionan ahora dentro del conjunto de las raíces, bases especiales de  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$  (sistema simple de raíces), las cuales se escogen de tal manera que, los elementos de  $\Pi$  serán escritos con coordenadas enteras. Por esta razón, es conveniente trabajar sobre subespacios racionales de  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$ , generados por las raíces y sus duales, en vez de considerar todo  $\mathfrak{h}$ . Dado que tomamos un  $\mathbb{K}$  de característica cero, este contiene el cuerpo  $\mathbb{Q}$  de los racionales, recordemos que un campo es de característica cero si no existe un entero positivo  $n$  en  $\mathbb{K}$  tal que  $n \cdot 1 = 0$ . Por esto,  $\mathfrak{h}$  puede ser considerado como un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ . En lo que sigue, el subespacio racional generado por  $H_\alpha, \alpha \in \Pi$ , se denota por  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ :

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + a_2 H_{\alpha_2} + \dots + a_k H_{\alpha_k} : a_k \in \mathbb{Q}, \alpha_k \in \Pi\},$$

donde  $1 \leq k \leq n$ , con  $n = \dim \mathfrak{h}$ . Para construir un sistema simple de raíces se puede establecer un orden lexicográfico en los espacios vectoriales, recordemos aquí en qué consiste esto.

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  una base ordenada de  $V$ , sean  $v, w \in V$  escritos en coordenadas como

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + \cdots + a_lv_l \\ w &= b_1v_1 + \cdots + b_lv_l. \end{aligned}$$

El orden lexicográfico en  $V$  con relación a la base escogida es definido por  $v \leq w$  si  $v = w$  o si  $a_i < b_i$ , donde  $i$  es el primer índice en que las coordenada de  $v$  y  $w$  son diferentes. Esa relación define de hecho un orden que es compatible con una estructura de espacio vectorial. Cuando  $V$  posee un producto interno, el orden lexicográfico en  $V$  satisface el siguiente lema, que se utiliza para construir sistemas simples de raíces.

**Lema 1.** *Tomando un orden lexicográfico dado por la base ordenada  $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ , sea  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  un subconjunto de  $V$  que satisface*

1.  $w_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ ,
2.  $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$  para  $i \neq j$ .

Entonces,  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  es un conjunto linealmente independiente.

**Definición 5.** *Una raíz  $\alpha \in \Pi$  es simple, con relación al orden fijado, si:*

- I).  $\alpha > 0$
- II). No existe  $\beta, \gamma \in \Pi$  tal que  $\beta$  y  $\gamma$  son positivas y  $\alpha = \beta + \gamma$ .

**Definición 6.** *Un conjunto  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  que satisface:*

- I).  $\Sigma$  es una base de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$  y
- II). toda raíz  $\beta$  puede ser escrita como  $\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$ , con  $n_1, \dots, n_l$  coeficientes enteros del mismo signo,

es denominado un sistema simple de raíces.

Además, una raíz es positiva si al escribirse como una combinación lineal, todos los coeficientes son enteros mayores o iguales a cero. La *altura* de  $\beta$  es el entero positivo  $n_1 + \dots + n_l$ . El siguiente teorema permite caracterizar en términos de un sistema de raíces y la suálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  una base para el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 2.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ; se denota por  $\Pi$  al conjunto de raíces del par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .*

1.  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición en espacios de raíces:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}$ .
2. Los espacios raíz  $\mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Pi$ , son de dimensión compleja uno.
3. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos raíces cualesquiera incluyendo 0 y  $\beta \neq \alpha$ , entonces  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  y  $\mathfrak{g}_{\beta}$  son ortogonales con relación a la forma Cartan Killing.

4. Si  $\alpha$  es una raíz no nula,  $\Pi \cap \mathbb{Z}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$ .
5. Para cada  $\alpha \in \Pi$ , existe un vector  $X_\alpha \in \mathfrak{g}$  de forma tal que para todo  $\alpha, \beta \in \Pi$  tenemos:
  - a)  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ ,  $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha$ , para todo  $H \in \mathfrak{g}$ .
  - b)  $[X_\alpha, X_\beta] = 0$  si  $\alpha + \beta \neq 0$  ó  $\alpha + \beta \notin \Pi$ ;
  - c)  $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$  si  $\alpha + \beta = 0$  y  $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ , en los otros casos.
  - d)  $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$ , si  $\alpha + \beta \in \Pi$  con  $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ , y
 
$$m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$$

$$m_{-\alpha,\alpha+\beta} = m_{\alpha+\beta,-\beta} = m_{-\beta,-\alpha}.$$

Los elementos  $\{X_\alpha : \alpha \in \Pi\}$  que satisfacen el numeral 5 del teorema anterior serán llamados una base de Weyl o Cartan-Weyl de  $\mathfrak{g}$  módulo  $\mathfrak{h}$ .

## 1.8. Clasificación de las Álgebras de Lie

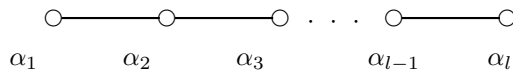
A continuación se presenta la clasificación de las álgebras de Lie semi-simples de dimensión finita. Primero tomamos una subálgebra de Cartan, la cuál determina via representación adjunta, un sistema de raíces  $\Pi$  y un sistema simple de raíces  $\Sigma$ . A partir de la fórmula de Killing se establecen los números de Killing que forman la matriz de Cartan del álgebra  $\mathfrak{g}$ , con estos números y  $\Sigma$  se encuentra el diagrama de Dynkin. Para garantizar que un diagrama es determinado a partir de un álgebra semi-simple, es necesario verificar que todos los sistemas simples en todas las subálgebras de Cartan de un álgebra dada tiene el mismo diagrama de Dynkin, el cuál es un diagrama que contiene la misma información que la matriz de Cartan.

Dado un sistema simple de raíces  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ , un diagrama de Dynkin es un digrafo que contiene  $l$  vértices representando cada una de las raíces. Dos vértices son ligados por una, dos o tres segmentos de acuerdo al número de Killing asociado y según el ángulo que se forma entre las dos raíces. De acuerdo con los diagramas, las álgebras de Lie se clasifican en clásicas y excepcionales.

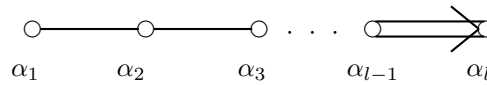
## 1.9. Álgebras de Lie clásicas

Las álgebras de Lie clásicas son

1.  $A_l, l \geq 1$ , corresponde a  $\mathfrak{sl}(l+1)$ . El diagrama de Dynkin que la representa es:



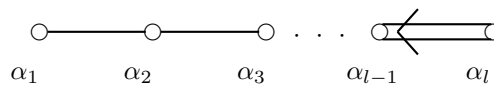
2.  $B_l, l \geq 2$ , corresponde al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar  $\mathfrak{so}(2l+1) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l+1) : A^t + A = 0\}$ . Su diagrama de Dynkin es:



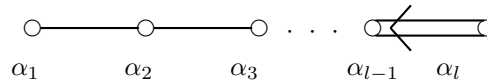
3.  $C_l, l \geq 3$ , corresponde al álgebra simpléctica  $\mathfrak{sp}(l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l) : AJ + JA^t\}$  donde  $J$  es la matriz  $2l \times 2l$  dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{l \times l} \\ 1_{l \times l} & 0 \end{pmatrix}$$

y su correspondiente diagrama de Dynkin es:



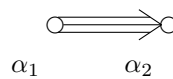
4.  $D_l, l \geq 4$ , corresponde al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión par  $\mathfrak{so}(l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l) : A + A^t = 0\}$ . El diagrama de Dynkin que la representa es:



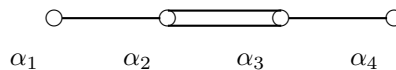
## 1.10. Álgebras de Lie excepcionales

Las álgebras de Lie excepcionales son:

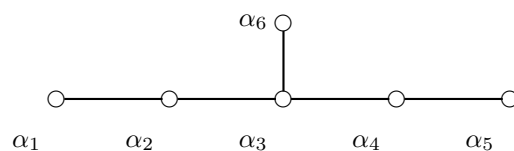
1.  $G_2$



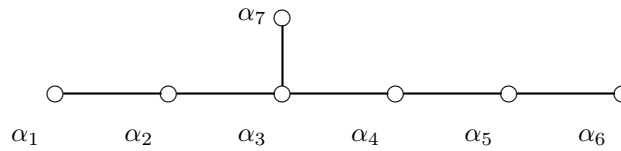
2.  $F_4$



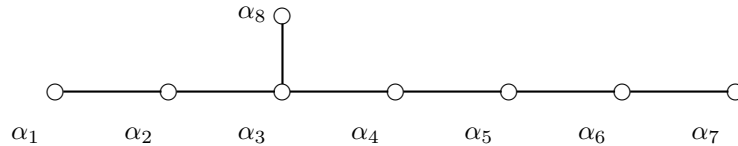
3.  $E_6$



4.  $E_7$



5.  $E_8$




---

## 1.11. Variedades Bandera

---

Una variedad bandera es una sucesión creciente de subespacios; creciente en el sentido que cada subespacio es un subespacio del siguiente. De esta forma una variedad bandera geométrica está definida por

$$F(n) = \{(L_1, \dots, L_n) : L_i \text{ es subespacio de } \mathbb{C}^n, \dim_{\mathbb{C}} L_i = i, L_i \perp L_j\}.$$

Por otra parte, una variedad bandera general  $\mathbb{F}$  se puede ver como un espacio homogéneo reductivo  $\mathbb{F} = G/C(S)$ , donde  $G$  es un grupo de Lie complejo semisimple y  $C(S)$  es el centralizador de un toro (no necesariamente maximal). En un grupo de Lie  $G$ , un toro es un subgrupo de  $G$  isomorfo al producto  $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ , un toro  $T$  es un toro maximal en  $G$  si para cualquier toro  $S$  en  $G$ ,  $T \subset S \subset G$ , entonces  $T = S$ . Cuando  $S$  es un toro maximal decimos que la variedad bandera  $\mathbb{F}$  es maximal.

Las variedades bandera poseen una descripción más general en términos de los sistemas de raíces de álgebras de Lie, de la siguiente forma:

Dados  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\Pi$  es el conjunto de raíces del par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Tomamos una base de Weyl de  $\mathfrak{g}$  fija. Sea  $\Pi^+ \subset \Pi$  una escogencia de raíces positivas. Se denota por  $\Sigma$  el sistema simple de raíces correspondiente. Llamamos  $\Theta$ , a un subconjunto de raíces de  $\Sigma$ , sea  $\langle \Theta \rangle$  el conjunto de raíces generado por  $\Theta$  y  $P_\Theta$  el normalizador de la subálgebra parabólica de  $\mathfrak{g}$  determinada por  $\Theta$ .

La variedad bandera general  $\mathbb{F}_\Theta$  asociada al par  $\{\mathfrak{g}, \Theta\}$  corresponde al espacio homogéneo  $\mathbb{F}_\Theta$ ,  $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ , donde  $G$  es el grupo de Lie complejo cuya álgebra de Lie es  $\mathfrak{g}$ .

Se denota por  $\mathfrak{u}$  la forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ , es decir, la forma de Cartan-Killing restringida a  $\mathfrak{u}$  es definida negativa. Sea  $U \subset G$  el subgrupo conexo asociado a  $\mathfrak{u}$ . Sea  $K_\Theta = P_\Theta \cap U$ , el cual por construcción es el centralizador de un toro.  $U$  actúa transitivamente sobre  $\mathbb{F}_\Theta$ , así es posible escribir  $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ . Si  $\Theta = \emptyset$ ,  $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}$  corresponde a la variedad bandera maximal, y en el caso contrario corresponde a una variedad bandera parcial. En este trabajo se hará referencia únicamente a las variedades bandera maximales.

## 1.12. Métricas Invariantes

Denotemos por  $b_0$  el origen de  $\mathbb{F} = U/T$ , con  $\mathbb{F}$  la variedad bandera maximal, vista como un espacio homogéneo de  $U \subset G$  y  $U$  es una forma compacta de  $G$ . El espacio tangente de  $\mathbb{F}$  en  $b_0$  se identifica naturalmente con el subespacio  $\mathfrak{q} = \mathfrak{u} \ominus \mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ , con  $\mathfrak{t} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta$  generado por  $A_\alpha$  y  $iS_\alpha$ , donde  $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$  y  $S_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}$  dado que  $\alpha \in \Pi$ . Una métrica riemanniana  $U$ -invariante  $ds_\Lambda^2$  en  $\mathbb{F}$  es completamente determinada por sus valores en el origen, esto es, por un producto interno en  $\mathfrak{q}$ , que es invariante bajo la acción adjunta de  $T$ , es decir,  $\mathfrak{q} = T_{b_0}(\mathbb{F})$ , tal identificación está dada por  $X \in \mathfrak{q} \rightarrow X_{b_0} \in T_{b_0}(\mathbb{F})$ , es decir, por evaluación de  $X \in \mathfrak{q}$  en  $b_0$  como un campo vectorial sobre  $T_{b_0}(\mathbb{F})$ , tal producto interno en  $\mathfrak{q}$  tiene la forma  $(X, Y)_\Lambda = -\langle \Lambda X, Y \rangle$  con

$$\Lambda : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$$

$$Y \mapsto \Lambda(Y) = \Lambda \circ Y,$$

donde  $\Lambda$  es la matriz de representación de la transformación y  $\circ$  es el producto de Hadamard o producto de matrices entrada por entrada.  $(X, Y)_\Lambda$  es definida positiva con relación a la forma Cartan-Killing, esto es  $-\langle \Lambda X, Y \rangle > 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{q}$ . Se puede extender el producto interno  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  a una forma bilineal simétrica sobre la complejificación  $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$  de  $\mathfrak{q}$  así  $(X + iY, Z + iW)_\Lambda = (X, Z)_\Lambda + i(X, W)_\Lambda + i(Y, Z)_\Lambda - (Y, W)_\Lambda$ . Usaremos la misma notación  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  para esta forma bilineal simétrica, como para la correspondiente aplicación complejificada  $\Lambda$  que es dada por  $\Lambda(X + iY) = \Lambda(X) + i\Lambda(Y)$ .

La invarianza de  $(X, Y)_\Lambda$  equivale a afirmar que para  $X_\alpha$  elemento de una base de Weyl,  $\Lambda(X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha$ . La explicación de esto se debe a que la invarianza de  $(X, Y)_\Lambda$  es equivalente a que los elementos de la base canónica  $A_\alpha, iS_\alpha, \alpha \in \Pi$  sean autovectores de  $\Lambda$  para un mismo autovalor  $\lambda_\alpha$ , pues en el espacio complejo tenemos:

$$\Lambda(X_\alpha) = \Lambda\left(\frac{A_\alpha + S_\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha A_\alpha + \lambda_\alpha S_\alpha) = \frac{1}{2}\lambda_\alpha(2X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha.$$

## 1.13. $f$ -Estructuras invariantes

Sea  $M$  una variedad riemanniana  $n$ -dimensional y  $TM$  el fibrado tangente. Un campo tensorial  $\mathcal{F}$  en  $TM$  de tipo  $(1,1)$  tal que  $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ , es llamado una  $f$  estructura sobre  $TM$ .

Una  $f$ -estructura  $\mathcal{F}$  es llamada  $U$ -invariante si para cada  $x \in \mathbb{F}$  el endomorfismo,

$$\mathcal{F}_x : T_x\mathbb{F} \rightarrow T_x\mathbb{F}$$

satisface  $du_x \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x \circ du_x$ , para todo  $u \in U$ .

## 1.14. Estructura Casi Compleja Invariante

Una estructura casi compleja  $U$ -invariante sobre  $\mathbb{F}$  esta completamente determinada por

$J_x : T_x(\mathbb{F}) \rightarrow T_x(\mathbb{F})$ , con  $x \in \mathbb{F}$  tal que la aplicación  $J_x$  satisface  $J_x^2 = -1$  y  $dg_x \circ J_x = J_{g_x} \circ dg_x$ , para

todo  $g \in U$ , donde 1 denota la aplicación identidad. Cuando nos refiramos a este tipo de estructuras lo abreviaremos mediante *eccí*. Una variedad diferenciable  $\mathbb{F}$  equipada en cada espacio tangente  $T_p\mathbb{F}$ ,  $p \in \mathbb{F}$  con una estructura compleja  $J_p$  que varía de forma diferenciable de punto a punto es llamada una variedad casi-compleja. Esta estructura compleja convierte a cada espacio tangente en un espacio vectorial complejo.

**Proposición 1.14.1.** *Una eccí está completamente determinada por un endomorfismo  $J : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ , definido en el espacio tangente al origen el cual satisface la igualdad  $J^2 = -1$  y conmuta con la acción adjunta de  $T$  (toro) sobre  $\mathfrak{g}$ , esto es,  $[JX, JY] = -[X, Y]$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{q}$ .*

*Demostración.* Sean  $b_0$  el origen de  $\mathbb{F}$  y  $x \in \mathbb{F}$ . Como la acción adjunta de  $U$  sobre  $\mathbb{F}$  es transitiva, existe un  $g \in U$ , tal que  $x = gb_0$ , entonces definimos a  $J_x$  de la siguiente forma:

$$J_x : T_x\mathbb{F} \rightarrow T_x\mathbb{F}.$$

con  $J_x = dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}$ . Se debe demostrar

- i). La definición de  $J_x$  no depende de la escogencia de  $g \in U$ .
- ii).  $J_x^2 = -1$ .
- iii).  $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$ .

*Demostración:*

- i). Tomemos  $g, \tilde{g} \in U$  tal que  $gb_0 = \tilde{g}b_0 = x$ , tenemos  $g^{-1}\tilde{g}b_0 = b_0$  y  $h = g^{-1}\tilde{g} \in T$ , debido a la acción transitiva de  $U$  sobre  $\mathbb{F}$ . Ahora

$$\begin{aligned} dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1} = d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} &\Leftrightarrow J \circ dg_x^{-1} = (dg_{b_0})^{-1}d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} \\ &\Leftrightarrow J \circ dg_x^{-1} = dg_x^{-1}d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} \\ &\Leftrightarrow J \circ dg_x^{-1} \circ d\tilde{g}_{b_0} = (dg_{b_0})^{-1}d\tilde{g}_{b_0} \circ J \\ &\Leftrightarrow J \circ d(g^{-1}\tilde{g})_{b_0} = d(g^{-1}\tilde{g})_{b_0} \circ J \\ &\Leftrightarrow J \circ dh_{b_0} = dh_{b_0} \circ J \\ &\Leftrightarrow J \circ Ad(h) = Ad(h) \circ J \end{aligned}$$

y esto implica i).

- ii).  $J_x^2 = (dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}) \circ (dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}) = dg_{b_0} \circ J^2 \circ (dg_{b_0})^{-1} = -1$ .
- iii). Mostrar que  $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$  es equivalente a mostrar que  $dg_x \circ d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} = d\hat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\hat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$ , con  $\hat{g} \in U$ , donde  $\hat{g}b_0 = gx$  y  $\tilde{g}b_0 = x$ . De i) se llega a que

$$\begin{aligned} \hat{g}_{b_0} &= g\tilde{g}_{b_0} \\ \hat{g} &= g\tilde{g} \\ g^{-1}\hat{g} &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

basta entonces demostrar que  $dg_x \circ d(g^{-1}\widehat{g})_{b_0} \circ J \circ (d(g^{-1}\widehat{g})_{b_0})^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$ , de donde,  $dg_x \circ dg_{g_x}^{-1} \circ d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ (dg_{g_x}^{-1})^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$ .

Utilizando que  $dg_x \circ dg_{g_x}^{-1} = d(gg^{-1})_{g_x}$ , se llega a

$$\begin{aligned} dg_x \circ dg_{g_x}^{-1} \circ d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ (dg_{g_x}^{-1})^{-1} &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ d(g_{g_x}^{-1})^{-1} \\ &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ d(g^{-1})_x^{-1} \\ &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x. \end{aligned}$$

■

Vamos también a denotar por  $J$  la complejificación sobre  $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ . La invarianza de  $J$  garantiza que  $J(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in \Pi$ . Los autovalores de  $J$  son  $\pm i$ , pues el polinomio característico de  $J$  es  $x^2 + 1$ . Consecuentemente,  $J(X_{\alpha}) = i\varepsilon_{\alpha}X_{\alpha}$ , con  $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$ . Veamos que  $A_{\alpha} - i(iS_{\alpha}) = X_{\alpha} - X_{-\alpha} - i(i(X_{\alpha} + X_{-\alpha})) = 2X_{\alpha}$ . De ahí que  $X_{\alpha} = \frac{1}{2}(A_{\alpha} - i(iS_{\alpha}))$  y

$$\begin{aligned} JX_{\alpha} &= \frac{1}{2}J(A_{\alpha} - i(iS_{\alpha})) = \frac{1}{2}(JA_{\alpha} - iJ(iS_{\alpha})) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha}i(A_{\alpha} - i(iS_{\alpha})) = \frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha}A_{\alpha} + \frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha}S_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(i\varepsilon_{\alpha}A_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha}iS_{\alpha}). \end{aligned}$$

Igualando las partes real e imaginaria tenemos que  $JA_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}(iS_{\alpha})$  y  $J(iS_{\alpha}) = -\varepsilon_{\alpha}iA_{\alpha}$ . Como  $A_{\alpha} = -A_{-\alpha}$ , entonces  $JA_{\alpha} = J(-A_{-\alpha})$  y por lo tanto,  $\varepsilon_{\alpha}(iS_{\alpha}) = -JA_{-\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}(iS_{-\alpha})$ . Ahora  $S_{\alpha} = S_{-\alpha}$  y por lo tanto  $\varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}$ . Usualmente los autovectores asociados a  $+i$  son llamados de tipo (1,0) y los vectores asociados a  $-i$  son llamados de tipo (0,1). Entonces para  $X_{\alpha}$  de tipo (1,0) tendremos  $\varepsilon_{\alpha} = +1$  y para  $X_{\beta}$  de tipo (0,1),  $\varepsilon_{\beta} = -1$ . Una *ecci* sobre  $\mathbb{F}$  es completamente determinada por un conjunto de signos  $\{\varepsilon_{\alpha}\}_{\alpha \in \Pi}$ , con  $\varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}$ . De ahora en adelante diremos que una *ecci* sobre  $\mathbb{F}$  esta definida por un  $J = \{\varepsilon_{\alpha}\}$ .

## 1.15. Forma de Kähler

Una métrica invariante  $ds_{\Lambda}^2$  se dice hermitica si verifica la siguiente condición de compatibilidad con la estructura casi compleja  $J$ :  $ds_{\Lambda}^2(JX, JY) = ds^2(X, Y)$ . Sea  $\Omega = \Omega_{J, \Lambda}$  la función de la correspondiente forma Kähler  $\Omega(X, Y) = ds^2(X, JY) = -\langle \Lambda X, JY \rangle$ , esta 2-forma se extiende naturalmente a una 2-forma  $U$ -invariante en la complejificación de  $\mathfrak{q}$ , la cual es denotada igualmente por  $\Omega$ . Esta 2-forma evaluada en vectores de la base de Weyl resulta:  $\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}) = -\langle \Lambda X_{\alpha}, JX_{\beta} \rangle = -\langle \lambda_{\alpha}X_{\alpha}, i\varepsilon_{\beta}X_{\beta} \rangle = -i\lambda_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\langle X_{\alpha}, X_{\beta} \rangle$  de donde  $\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}) = 0$  si  $\alpha + \beta \neq 0$  o  $\Omega(X_{\alpha}, X_{\beta}) = \Omega(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = -i\lambda_{\alpha}\varepsilon_{-\alpha} = i\lambda_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}$  si  $\alpha + \beta = 0$ . La siguiente fórmula sirve para determinar propiedades de formas diferenciables.

**Lema 2.** *Sea  $\omega$  una forma invariante  $k$ -diferenciable sobre un espacio homogéneo  $G/T$ . Entonces*

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = (k+1) \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}),$$

para  $X_1, \dots, X_{k+1}$  en el álgebra de lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

Es preciso aclarar que  $\widehat{X}_i$  significa que ésta coordenada no existe.

Aplicado el anterior lema para una 2-forma diferencial, entonces:

$$d\omega(X, Y, Z) = 3\{X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z\omega(X, Y) - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)\},$$

para  $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$ .

Como la derivada direccional de  $X(\Omega(Y, Z))$  es dada por  $\frac{d}{dt}(Ad(e^{tX})Y, Ad(e^{tX})Z)_{t=0}$  y esta derivada es  $\Omega([X, Y], Z) + \Omega(Y, [X, Z])$  entonces tenemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= 3\{\omega([X, Y], Z) + \omega(Y, [X, Z]) + \omega([Y, Z], X) + \omega(Z, [Y, X]) + \omega([Z, X], Y) + \\ &\quad \omega(X, [Z, Y]) - \omega([X, Y], Z) - \omega(Z, [Y, X]) - \omega([Z, X], Y)\} \\ &= 3\{\omega(Y, [X, Z]) + \omega(Z, [Y, X]) + \omega(X, [Z, Y])\} \\ &= 3\{-\omega([X, Z], Y) + \omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X)\}. \end{aligned}$$

Contextualizando lo anterior al caso de la forma de Kähler en una variedad bandera tenemos:

**Proposición 1.15.1.** Sea  $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$  y  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , entonces  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ . En caso contrario,

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= 3\{\Omega([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) - \Omega([X_\alpha, X_\gamma], X_\beta) + \Omega([X_\beta, X_\gamma], X_\alpha)\} \\ &= 3\{\Omega(m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) - \Omega(m_{\alpha, \gamma} X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) + \Omega(m_{\beta, \gamma} X_{\beta+\gamma}, X_\alpha)\} \\ &= 3\{-m_{\alpha, \beta} i \lambda_{\alpha+\beta} \varepsilon_\gamma \langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma \rangle + m_{\alpha, \gamma} i \lambda_{\alpha+\gamma} \varepsilon_\beta \langle X_{\alpha+\gamma}, X_\beta \rangle - \\ &\quad m_{\beta, \gamma} i \lambda_{\beta+\gamma} \varepsilon_\alpha \langle X_{\beta+\gamma}, X_\alpha \rangle\}. \end{aligned}$$

Como  $\langle X_\eta, X_\theta \rangle = 0$  si  $\eta + \theta \neq 0$  se tiene que  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$  si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ . Cuando  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  se cumple que  $m_{\alpha, \beta} = m_{\gamma, \alpha}$ , también  $m_{-\alpha, -\gamma} = -m_{\alpha, \gamma}$  entonces

$$\begin{aligned} d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= 3\{-im_{\alpha, \beta} \lambda_{-\gamma} \varepsilon_\gamma \langle X_{-\gamma}, X_\gamma \rangle - im_{\alpha, \beta} \lambda_{-\beta} \varepsilon_\beta \langle X_{-\beta}, X_\beta \rangle - im_{\alpha, \beta} \lambda_{-\alpha} \varepsilon_\alpha \langle X_{-\alpha}, X_\alpha \rangle\} \\ &= -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma). \end{aligned}$$

Llegando a la igualdad deseada. ■

**Definición 7.** Sea  $J = \{\varepsilon_\alpha\}$  una ecci. Una tripla de raíces  $\alpha, \beta, \gamma$  tal que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  es llamada

1. Una  $\{0, 3\}$ -tripla si  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$  y
2. Una  $\{1, 2\}$ -tripla en los otros casos.

## 1.16. Variedad Bandera $(1, 2)$ -Simpléctica

Una variedad bandera casi compleja  $(\mathbb{F}, J, \Lambda, \Omega)$  es llamada  $(1, 2)$ -simpléctica o casi Kähler si,

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0, \quad X, Y, Z \in T_p\mathbb{F}, \quad p \in \mathbb{F},$$

cuando uno de los tres vectores es del tipo  $(1, 0)$  y los otros dos son del tipo  $(0, 1)$  o viceversa. Un vector es llamado de tipo  $(1, 0)$  (recíprocamente  $(0, 1)$ ) si el autovalor asociado a la estructura  $J$  es 1 (respectivamente  $-1$ ). Cada vez que nos referiramos a  $(\mathbb{F}, J, \Lambda)$  con  $J$  una estructura casi-compleja invariante y  $\Lambda$  una métrica invariante utilizaremos, por abuso de notación, el par invariante  $(J, \Lambda)$ .

**Proposición 1.16.1.** *El par invariante  $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$  es  $(1, 2)$ -simpléctico si y solamente si*

$$\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0,$$

para toda tripla  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Supongamos que el par invariante es  $(1, 2)$ -simpléctico. Dada una  $\{1, 2\}$ -tripla  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , utilizando la fórmula para la derivada de la forma de Kähler, por hipótesis tendríamos

$$0 = d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma),$$

de donde

$$\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0.$$

$\Leftarrow$  Sabemos que si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  entonces  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ . Ahora si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  y  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  es en particular una  $\{1, 2\}$ -tripla, es claro que utilizando la hipótesis tenemos que

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma) = 0.$$

Por lo tanto será un par invariante  $(1, 2)$ -simpléctico. ■

En  $\mathbb{F}$  si una *eccí* es casi Kähler entonces no pueden existir  $\{0, 3\}$ -triplas, esto es debido a que por ser casi Kähler

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma) = 0,$$

de donde

$$\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0,$$

y si  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  fuera una  $\{0, 3\}$ -tripla los signos de  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma$  serían iguales, lo cual imposibilitaría que  $\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma$ , fuera igual a cero.

**Definición 8.** *Se dice que una estructura  $J$  sobre  $\mathbb{F}$  es integrable si la variedad  $(\mathbb{F}, J)$  es una variedad compleja, esto es, admite un sistema de coordenadas locales complejas.*

Una condición equivalente a la anterior definición es la famosa ecuación de Newlander - Nirenberg

$$[JX, JY] = J[X, JY] + J[JX, Y] + [X, Y],$$

para cualquier  $X, Y$  campos vectoriales sobre  $\mathbb{F}$ .

Por lo anterior y considerando la variedad diferenciable  $(\mathbb{F}, J, \Lambda, \Omega)$ , donde  $J$  es una estructura casi-compleja y  $\Omega$  es la forma Kähler asociada a la métrica invariante  $\Lambda$ ,  $\mathbb{F}$  es casi Kähler si la forma de Kähler  $\Omega$  es cerrada, es decir  $d\Omega = 0$ . Si además  $J$  es integrable, se dice que  $\mathbb{F}$  es una variedad Kähler.

**Proposición 1.16.2.** *Si un par invariante  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler entonces  $P = \{\alpha / \varepsilon_\alpha = +1\}$  es una escogencia de raíces positivas con relación a algún orden lexicográfico en  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .*

*Demostración.* Se debe demostrar que si  $\alpha, \beta \in P$  y  $\alpha + \beta$  es una raíz entonces  $\alpha + \beta \in P$ . Supongamos que  $\alpha + \beta$  es una raíz. Si  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$  entonces como  $\alpha + \beta - (\alpha + \beta) = 0$ , dado que  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$  y  $\varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = -\varepsilon_{\alpha+\beta} = +1$ , tenemos que  $\{\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)\}$  es una  $\{0, 3\}$ -tripla lo que contradice la hipótesis de ser casi Kähler. Además  $\Pi = P \cup (-P)$  donde  $-P = \{\alpha / \varepsilon_\alpha = -1\}$  lo cual hace que  $P$  sea una escogencia de raíces positivas. ■

**Proposición 1.16.3.** *Si el par invariante  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler entonces  $J$  es integrable.*

*Demostración.* Sea  $P = \{\alpha / \varepsilon_\alpha = +1\}$  una escogencia de raíces positivas. Además  $J = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$  donde  $\varepsilon_\alpha = +1$ , si  $\alpha > 0$ . Dados  $\alpha, \beta \in \Pi$  tenemos que:

$$\begin{aligned} [JX_\alpha, JX_\beta] &= [i\varepsilon_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta] \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta [X_\alpha, X_\beta] \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Además, utilizando la proposición de Newlander-Nirenberg

$$\begin{aligned} J[X_\alpha, JX_\beta] + J[JX_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] &= J[X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta] + J[i\varepsilon_\alpha X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] \\ &= i\varepsilon_\beta J[X_\alpha, X_\beta] + i\varepsilon_\alpha J[X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] \\ &= i\varepsilon_\beta Jm_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + i\varepsilon_\alpha Jm_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} \\ &= i\varepsilon_\beta Jm_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta} - i\varepsilon_\alpha Jm_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta} + m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} \\ &= m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} (-\varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta} + 1). \end{aligned}$$

Debemos mostrar que

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} (1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta}).$$

lo cual es lo mismo que demostrar que

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta}.$$

De hecho si  $\alpha + \beta$  es una raíz, como no existen  $\{0, 3\}$ -triplas para  $J$  pues el par  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler, entonces las posibilidades de signos para  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{-(\alpha+\beta)})$  son:

$$(+,+, -) \quad (-, -, +) \quad (+, -, +) \quad (-, +, +) \quad (+, -, -) \quad (-, +, -).$$

De los dos primeros casos  $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1$  y  $1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$ , de donde

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta}.$$

De los otros casos  $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -1$  y  $1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta} = 1$  y la igualdad se verifica una vez más. Por lo tanto  $J$  es integrable. ■

Es conocido que en toda variedad ser casi Kähler no implica ser Kähler, sin embargo esto si se cumple en variedades bandera, como se puede ver en la siguiente proposición.

**Proposición 1.16.4.**  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler si y solo si  $(J, \Lambda)$  es Kähler.

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Si  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler entonces es integrable y por lo tanto  $(J, \Lambda)$  es Kähler.  
 $\Leftarrow$  Es directa de la definición. ■

**Definición 9.** Se dice que  $\Lambda$  es  $(1, 2)$ -simpléctica con respecto a  $J$  si el par invariante  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético. También,  $J$  se dice  $(1, 2)$ -admisibile si existe  $\Lambda$  tal que el par invariante  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético.

A continuación damos una mirada a las aplicaciones armónicas y su relación con las aplicaciones holomorfas y las variedades  $(1, 2)$ -simpléticas.

## 1.17. Aplicaciones Armónicas

Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  variedades Riemannianas. Se dice que la aplicación  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  es armónica si ella es un punto crítico del funcional de energía,

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi(x)|^2 v_g,$$

donde  $d(\phi) : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} M$ ,  $x \in M$  y la norma de  $d\phi(x)$  está dada por:

$$|d\phi(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \langle d\phi(x)(X_i), d\phi(x)(X_i) \rangle_h$$

donde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una base ortonormal de  $T_x M$ . Es decir  $\phi$  es una aplicación armónica si y solo si satisface la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\delta E(\phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) \text{ para toda variación } \phi(t), t \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ de } \phi.$$

## 1.18. Conexión Riemanniana $(\mathbb{F}, \Lambda)$

Dado que  $\mathbb{F}$  es un espacio homogéneo reductivo es posible definir una aplicación bilineal simétrica dada por:  $U : \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$  como:  $2\Lambda(U(X, Y), Z) = \Lambda(X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}})$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$ ; es decir,  $2\langle \Lambda \circ (U(X; Y), Z) \rangle = \langle \Lambda \circ X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{q}}, \Lambda \circ Y \rangle$  y dado que la aplicación bilineal es invariante se tiene que:  $\langle [Z, X]_{\mathfrak{q}}, Z \rangle = \langle X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}} \rangle$ . De lo anterior deducimos que,

$$2\langle \Lambda \circ (U(X, Y), Z) \rangle = -\langle [\Lambda \circ X, Y]_{\mathfrak{q}}, Z \rangle + \langle [X, \Lambda \circ Y]_{\mathfrak{q}}, Z \rangle \text{ de donde se puede concluir:}$$

$$2\Lambda \circ U(X, Y) = [X, \Lambda \circ Y]_{\mathfrak{q}} - [\Lambda \circ X, Y]_{\mathfrak{q}}.$$

Como la conexión Riemanniana  $\nabla$  en  $(\mathbb{F}, \Lambda)$  está dada por

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{q}} + 2U(X, Y)$$

se tiene entonces

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{q}} + \Lambda^{-1} \circ ([X, \Lambda Y]_{\mathfrak{q}} - [\Lambda X, Y]_{\mathfrak{q}})$$

Donde  $X, Y \in \mathfrak{q}$  y  $\Lambda^{-1}$  es la inversa de  $\Lambda$  con respecto al producto de Hadamard y  $\Lambda^{-1} = ((\lambda_{\alpha})^{-1})_{\alpha \in \Pi}$ , es decir los autovalores de  $\Lambda^{-1}$  corresponden a los inversos multiplicativos de los autovalores de  $\Lambda$ . En concreto la conexión Riemanniana calculada en los elementos de la base de Weyl queda descrita en la siguiente proposición.

**Proposición 1.18.1.** Para  $(\mathbb{F}, \Lambda)$  sean  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi$ , y  $X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}$ , elementos de la base de Weyl. Entonces

$$\nabla_{X_{\alpha}} X_{\beta} = m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} \lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}}{2\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta} .$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} 2\nabla_{X_{\alpha}} X_{\beta} &= [X_{\alpha}, X_{\beta}]_{\mathfrak{q}} + \Lambda^{-1} \circ ([X_{\alpha}, \Lambda \circ X_{\beta}]_{\mathfrak{q}} - [\Lambda \circ X_{\alpha}, X_{\beta}]_{\mathfrak{q}}) \\ &= m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + \Lambda \circ (m_{\alpha, \beta} \lambda_{\beta} X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha} X_{\alpha+\beta}) \\ &= m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} \lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}}{2\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

■

Recordamos que para una variedad Riemanniana  $(N, h, \mathcal{F})$  con un tensor de tipo  $(1, 1)$ , la derivada covariante de una  $f$ -estructura  $\mathcal{F}$  en  $X, Y \in TN$  está dada por:

$$(\nabla \mathcal{F})(X, Y) = \nabla_X \mathcal{F}(Y) - \nabla_Y \mathcal{F}(X) - \mathcal{F}([X, Y]).$$

**Definición 10.** (I) Definimos  $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)}(X, Y)$  como  $\nabla \mathcal{F}(X, Y)$  si  $X \in TN^+$  y  $Y \in TN^-$

(II)  $(N, h, \mathcal{F})$  se dice una  $f$ -variedad  $(1, 2)$ -simplética si  $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$ .

Es de notar que cuando  $\mathcal{F}$  es una ecci, la forma de Kähler  $\sigma(X, Y) = h(X, \mathcal{F}(Y))$  es antisimétrica. A continuación se enuncia el teorema que motiva el estudio de las aplicaciones armónicas en las variedades bandera mediante el análisis de las propiedades de las  $f$ -estructuras que admiten métricas  $(1, 2)$ -simplécticas.

**Teorema 3.** *Sea  $\phi : (M, g, \mathcal{F}) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$  una aplicación tal que:*

1.  $\phi$  es  $f$ -holomorfa, es decir, cumple la condición  $d\phi \cdot J = \mathcal{F} \cdot d\phi$
2.  $M$  es co-simpléctica, es decir,  $d^*(\sigma) = 0$
3.  $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$

*Entonces  $\phi$  es armónica.*

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## DIGRAFOS Y ESTRUCTURAS INVARIANTES

Existe una relación directa entre los digrafos con  $n$  vértices y las ecci sobre la variedad bandera  $F(n)$  como se verá a continuación.

---

### 2.1. Torneos

---

**Definición 11.** Un grafo  $\mathcal{G} = (V, A)$  consta de un conjunto no vacío  $V$  de elementos llamados vértices y  $A$  una familia finita de pares no necesariamente ordenados de elementos de  $V$  llamados aristas.

**Definición 12.** Un digrafo es un grafo orientado finito, es decir, un digrafo es un par  $\mathcal{G} = (V, A)$ . Si  $x, y \in V$ , entonces  $x \rightarrow y$  indica que  $xy \in A$ , mientras que  $x \leftrightarrow y$  muestra que  $yx \in A$  ó  $xy \in A$ .

**Definición 13.** Un torneo  $\mathcal{T}$  es un grafo dirigido completo con  $n$  vértices o  $n$  jugadores tales que para cada par de vértices  $x \neq y$  hay una única flecha ya sea  $x \rightarrow y$  ó  $y \rightarrow x$ . Si  $x \rightarrow y$ , se dice que  $x$  le gana a  $y$ .

**Definición 14.** Sean  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  dos torneos con  $n$  y  $m$  jugadores respectivamente, un homomorfismo entre  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$ , es una función  $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{T}_1} t \Rightarrow \varphi(s) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \varphi(t) \text{ ó } \varphi(s) = \varphi(t).$$

Cuando  $\varphi$  es biyectiva, decimos que  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  son isomorfos.

**Definición 15.** Un Torneo  $\mathcal{T}$  es transitivo si para cualesquier tres vértices  $x, y, z$ , tales que  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z$  entonces se tiene  $x \rightarrow z$ .

Se definen a continuación dos subtorneos importantes para el análisis posterior así:

$$\mathcal{T}^-(v) = \{x \in \mathcal{T} : x \rightarrow v\}$$

es el subtorneo de  $\mathcal{T}$  restricto a  $v^{-1}$  donde  $v^{-1} = \{x \in \mathcal{T}/x \rightarrow v\}$  y

$$\mathcal{T}^+(v) = \{x \in \mathcal{T} : v \rightarrow x\}$$

es el subtorneo de  $\mathcal{T}$  restricto a  $v^{+1}$  donde  $v^{+1} = \{x \in \mathcal{T}/x \leftarrow v\}$ .

Se dice que  $\mathcal{T}$  es localmente transitivo si, y solo si los subtorneos  $\mathcal{T}^-(v)$  y  $\mathcal{T}^+(v)$  son transitivos para cada vértice  $v$ .

**Definición 16.** Dada una familia de conjuntos  $S_i$ , se define su grafo de intersección como el grafo obtenido al representar cada conjunto  $S_i$  por un vértice de modo que dos vértices sean adyacentes si y solo si los conjuntos que representan tienen intersección no vacía, es decir, para una colección dada de conjuntos  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , se define  $G_S$  con  $G_S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ , como el grafo que tiene por conjunto de vértices a los elementos de  $S$ , luego dos vértices están en relación, si y solo si los correspondientes conjuntos tienen intersección no vacía, esto es,  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ .

**Definición 17.** Dado un torneo  $\mathcal{T}$ , se afirma que contiene un 3-ciclo formado por los vértices  $i, j, k$  si se cumple que  $i \rightarrow j$  y  $j \rightarrow k$ , entonces  $k \rightarrow i$ .

**Definición 18.** Dado un torneo  $\mathcal{T}$ , se dice que un 3-ciclo formado por los vértices  $i, j, k$  de  $\mathcal{T}$  es conado si existe otro vértice  $x$  tal que ( $x \rightarrow i, x \rightarrow j$  y  $x \rightarrow k$ ), es decir  $x$  es el vértice ganador ó perdedor si ( $i \rightarrow x, j \rightarrow x$  y  $k \rightarrow x$ ). Se dice que el torneo  $\mathcal{T}$  es libre de cono si, y solo si no contiene 3-ciclos conados.

**Proposición 2.1.1.** Un torneo  $\mathcal{T}$  es localmente transitivo si, y solo si es libre de cono.

*Demostración.* Suponga que  $\mathcal{T}$  no es libre de cono. Entonces contiene uno de los 4-subtorneos (37) o (39) de la figura 2.6. Si  $\mathcal{T}$  contiene (37) entonces el vértice que gana a los otros tres es tal que  $\mathcal{T}^+(v)$  no es transitivo. De la misma forma si  $\mathcal{T}$  contiene (39), entonces el vértice que pierde con respecto a los otros tres vértices es tal que  $\mathcal{T}^-(v)$  tampoco sería transitivo. Por lo tanto  $\mathcal{T}$  no es localmente transitivo. Ahora, suponga que no es localmente transitivo. Entonces existe un vértice  $x$  tales que  $\mathcal{T}^-(x)$  no es transitivo ó  $\mathcal{T}^+(x)$  no es transitivo. Si  $\mathcal{T}^-(x)$  no es transitivo, es decir contiene un 3-ciclo  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$  y  $i \rightarrow x, j \rightarrow x$  y  $k \rightarrow x$ . Por lo tanto el torneo formado por los vértices  $i, j, k, x$  con  $x$  vértice perdedor, es el mismo (39) de la figura 2.6, es decir  $\mathcal{T}$ , no es libre de cono. ■

**Proposición 2.1.2.** Un torneo  $\mathcal{T}$  es localmente transitivo si, y solo si todo 4-subtorneo de  $\mathcal{T}$  es localmente transitivo.

Ahora veamos algunas definiciones y resultados ya obtenidos, que son básicos en la demostración de teoremas posteriores..

**Proposición 2.1.3.** Sea  $\mathcal{T}$  un torneo localmente transitivo y  $a, x$  vértices de  $\mathcal{T}$ .

Si  $a \in \mathcal{T}^+(x)$ , entonces  $\mathcal{T}^+(a)$  es la unión de un intervalo que termina en  $\mathcal{T}^+(x)$  y un intervalo que inicia en  $\mathcal{T}^-(x)$ .

Cada  $n$ -torneo  $\mathcal{T}$  está asociado a una matriz  $n \times n$ , es decir  $m(\mathcal{T}) = (a_{ij})$ , llamada matriz de incidencia y definida de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \rightarrow j, \\ 0 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } j \rightarrow i. \end{cases}$$

**Definición 19.** Un  $n$ -torneo  $\mathcal{T}$  se dice escalonado si existen enteros  $s, t$  con  $1 \leq s \leq t \leq n$ , tal que satisface los siguientes axiomas:

1. El subtorneo de  $\mathcal{T}$  formado por los vértices  $1, \dots, t$  es un torneo transitivo maximal.
2. El subtorneo de  $\mathcal{T}$  formado por los vértices  $s, \dots, n$  es un torneo transitivo maximal.
3. Si  $z \rightarrow x$  y  $z > x$ , entonces  $x < s$  y  $t < z$ .
4. Si  $x' \leq x$  y  $z \leq z'$ , entonces  $z \rightarrow x$  y  $z > x$  implica que  $z' \rightarrow x'$  y  $z' > x'$ .

Es decir, un torneo es escalonado si la matriz de incidencia tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 4.** Un torneo es libre de cono si, y solo si es isomorfo a un torneo escalonado.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  un torneo localmente transitivo y sea  $v$  un vértice arbitrario de  $\mathcal{T}$ . Dado cualquier otro vértice  $x$  de  $\mathcal{T}$ , se dice que  $x$  tiene tipo 1 si  $v \rightarrow x$  y tipo 2, si  $x \rightarrow v$ . Se llama el peso de  $x$  a  $w(x)$  y equivale al número de vértices  $y$  tales que  $y \rightarrow x$  siempre que  $y$  tenga el mismo tipo que  $x$ . Luego reordenando los vértices en la siguiente forma: vértice  $v$ , vértices de tipo 1 en orden creciente según el peso y vértices de tipo 2 en orden creciente de peso. ■

Este método produce la matriz de incidencia de  $\mathcal{T}$  en forma escalonada, también llamada matriz maximal escalonada.

La relación entre torneos y las ecci sobre la variedad bandera  $F(n)$  es usada en el estudio de las propiedades geométricas de  $F(n)$ , ya que a una ecci es posible hacerle corresponder un torneo  $\mathcal{T}(J)$  así:

Dada una ecci  $J$ , podemos hacerle corresponder un torneo  $\mathcal{T}(J)$  con  $n$  jugadores  $\{1, \dots, n\}$  de tal forma que si  $J(a_{ij}) = a'_{ij}$ , entonces  $\mathcal{T}(J)$  es tal que para  $i < j$

$$(i \rightarrow j \Leftrightarrow a'_{ij} = \sqrt{-1}a_{ij}) \text{ ó } (i \leftarrow j \Leftrightarrow a'_{ij} = -\sqrt{-1}a_{ij}).$$

La siguiente proposición fue probada por Cohen y estudiada en [8].

**Proposición 2.1.4.**  $(F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  es  $(1, 2)$ -simpléctica si, y solo si para todo 3-subtorneo transitivo  $\{i, j, k\}$  de  $\mathcal{T}(J)$  se tiene que:  $\lambda_{ik} = \lambda_{ij} + \lambda_{jk}$ , donde  $i \rightarrow j \rightarrow k$  y  $i \rightarrow k$ .

**Teorema 5.** Sea  $(F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  una variedad bandera geométrica maximal. La métrica  $ds_{\Lambda}^2$  es  $(1, 2)$ -simpléctica si y solo si el torneo asociado  $\mathcal{T}(J)$  es localmente transitivo.

*Demostración.* La necesidad de la condición para  $\mathcal{T}(J)$  de ser localmente transitivo o libre de cono ya fue probada en [2], ahora para probar la suficiencia se supone que  $\mathcal{T}(J)$  es localmente transitivo. Dado un vértice  $s$  en  $\mathcal{T}(J)$ , los subtorneos  $\{\mathcal{T}^-(s)$  y  $\{\mathcal{T}^+(s)$  son transitivos. Sean pues  $E_{ij}$  la matriz de base canónica y  $V_{i,j} = \text{generado}_{\mathbb{C}}\{E_{ij}\}$  con  $V^{10} = \oplus\{V_{ij} : \varepsilon_{ij} = 1\}$  y  $V^{01} = \oplus\{V_{ij} : \varepsilon_{ij} = -1\}$ , para determinar  $(d\Omega_{j,k})^{(1,2)}$  es necesario calcular  $d\Omega(X, Y, Z)$  con  $X, Y \in V^{10}$  y  $Z \in V^{01}$ . Si se supone que  $X = E_{ij}$ ,  $Y = E_{jk}$  y  $Z = E_{ki}$  con  $i < j < k$ . Se tienen dos casos:

1. El subtorneo determinado por  $i, j, k$  está contenido en  $\mathcal{T}^+(s)$  o en  $\mathcal{T}^-(s)$ . En este caso se tiene que  $i < j < k \leq s$  ó  $s \leq i < j < k$  se puede ver que existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tales que para  $i < j$ ,  $\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k$ , si  $\varepsilon_{ij} = 1$ , utilizando la matriz de incidencia en la forma maximal escalonada, ya que en este caso el 3-subtorneo determinado por  $i, j, k$  es transitivo por lo cual se eligen los  $\lambda_k = \lambda_{k(k-1)}$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ .
2. El subtorneo determinado por  $i, j, k$  no está contenido en  $\mathcal{T}^+(s)$  o en  $\mathcal{T}^-(s)$ . En este caso se tiene que  $i < j < s < k$  y puede verse que existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tales que para  $i < j$ ,  $\lambda_{ij} = \lambda_n + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k + \sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k$  utilizando inducción sobre el número  $t$  de  $-1$ s en el extremo superior derecho de la matriz de incidencia de  $\mathcal{T}(J)$  y siguiendo en forma de zig zag, se cuentan los  $-1$ s, empezando con el primer  $-1$  superior derecho. Si la matriz de incidencia tiene un único  $-1$  entonces este está en la posición  $1n$  y eligiendo  $\lambda_n = \lambda_{1n}$  tenemos que  $\lambda_{1n} = q - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k$ . Por la forma de la matriz de incidencia es posible suponer que la  $m$ -ésima entrada  $-1$  está en la posición  $j_n$ , para algún  $s < j < n$ , esto es,  $\varepsilon_{jn} = -1$ , entonces  $\varepsilon_{(j-1)n} = -1$ , lo cual implica que el 3-subtorneo formado por los vértices  $j-1, j$  y  $n$  es transitivo. Así  $\varepsilon_{(j-1)j} = 1$  y  $\lambda_{jn} = \lambda_{(j-1)n} + \lambda_{(j-1)j}$ . Ahora, aplicamos la hipótesis de inducción, es decir, suponemos que el teorema es cierto para todo  $t < m$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_{jn} &= \lambda_{(j-1)n} + \lambda_{(j-1)j} \\ &= q - \sum_{k=j-1}^{n-1} \lambda_k + \lambda_{j-1} \\ &= q - \lambda_{j-1} - \lambda_k - \dots - \lambda_{n-1} + \lambda_{j-1} \\ &= q - \lambda_j - \dots - \lambda_{n-1} \\ &= q - \sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k. \end{aligned}$$

■

## 2.2. $f$ -Estructuras (1,2)-Admisibles

Aquí se tratan las  $f$ -estructuras (1,2)-admisibles en la variedad bandera maximal  $\mathbb{F}(n)$  asociada al álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , es decir la variedad bandera maximal asociada a álgebras de tipo  $A_n$ , donde  $E_{jk}$ ,  $j \neq k$  y  $E_{jj} - E_{kk}$ ,  $j < k$  es una base para  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  y  $\mathfrak{h}$  es la subálgebra de matrices diagonales,  $\mathfrak{q}$  es generada por las matrices  $A_{jk} = E_{jk} - E_{kj}$  y  $S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj})$ . Las  $f$ -estructuras invariantes  $\mathcal{F}$  sobre  $\mathbb{F}(n)$ , están en correspondencia 1 : 1 con los digrafos (torneos no necesariamente completos) de  $n$ -vértices mediante la matriz de incidencia del digrafo.

Para  $\mathbb{F}(n)$  el sistema de raíces  $\Pi = \{(j, k) : 1 \leq j, k \leq n, j \neq k\}$  donde las raíces opuestas  $\{\alpha, -\alpha\}$  corresponden a pares  $\{(j, k), (k, j)\}$ . Una  $f$ -estructura invariante está determinada por sus valores en  $\Pi^+$ , los cuales ordenados dan lugar a la matriz  $\varepsilon = (\varepsilon_{jk})_{n \times n}$ , tal matriz puede identificarse con la matriz de incidencia de algún digrafo  $\mathcal{G} = (V, E)$  con  $V = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de vértices y  $E$  el conjunto de flechas de tal forma que:  $\mathcal{F}(E_{jk}) = i\varepsilon_{jk}E_{jk}$ , entonces  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  es tal que para  $j < k$

$$\begin{aligned} j \rightarrow k &\Leftrightarrow \varepsilon_{jk} = 1 \\ j \leftarrow k &\Leftrightarrow \varepsilon_{jk} = -1 \\ j \leftrightarrow k &\Leftrightarrow \varepsilon_{jk} = 0. \end{aligned}$$

Puede entonces verse que existe una correspondencia biunívoca entre  $f$ -estructuras invariantes sobre  $\mathbb{F}(n)$  y los digrafos de  $n$  vértices.

Para métricas invariantes  $\Lambda = \{\lambda_{jk}\}$  en  $(\mathbb{F}(n), \mathcal{F})$  se identifica cada  $\lambda_{jk}$  con un peso po-sitivo definido sobre la flecha  $jk$ , del digrafo  $\mathcal{G}$ .

*Ejemplo.* Consideremos

$$\mathbb{F}(3) = U(3)/(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1)) = U(3)/T$$

En este caso,

$$\mathfrak{q} = T(\mathbb{F}(3))_{(b_0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

Tomemos la siguiente  $f$ -estructura sobre  $\mathbb{F}(3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & ia & ib \\ i\bar{a} & 0 & 0 \\ -i\bar{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el elemento (1, 2) de la matriz fue multiplicado por  $\sqrt{-1}$ , el digrafo correspondiente tiene una flecha que va de 1 para 2; el digrafo tiene una flecha que va de 1 hacia 3 ya que el elemento (1, 3) fue multiplicado por  $\sqrt{-1}$ . Como el elemento (2, 3) fue multiplicado por 0, entonces el digrafo no contiene flecha ligando a 2 y 3. A continuación se muestra el digrafo asociado a esta  $f$ -estructura.

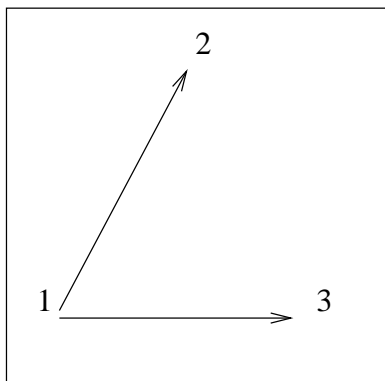


Figura 2.1: Digrafo del Ejemplo

Según Black, las condiciones para que  $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$  sea  $(1, 2)$ -simpléctica están determinadas por las condiciones:

$$\text{Si } k \rightarrow j, k \rightarrow l, j \leftrightarrow l \text{ entonces } \lambda_{jk} = \lambda_{kl}, \tag{2.1}$$

$$\text{Si } j \rightarrow k, l \rightarrow k, j \leftrightarrow l \text{ entonces } \lambda_{jk} = \lambda_{kl}, \tag{2.2}$$

$$\text{Si } k \rightarrow j, j \rightarrow l, k \leftrightarrow l \text{ entonces } \lambda_{kl} = \lambda_{jk} + \lambda_{jl}. \tag{2.3}$$

Como se ilustra a continuación. Es preciso caracterizar los digrafos  $\mathcal{G} = (V, E)$  que admiten pesos

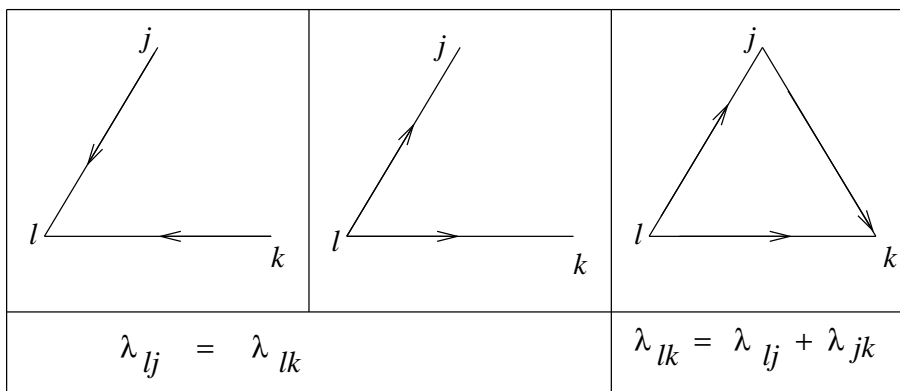


Figura 2.2: Condiciones de la Métrica

positivos  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  los cuales satisfagan las condiciones de Black, para caracterizar las  $f$ -estructuras invariantes en  $\mathbb{F}(n)$  que admiten métricas  $(1, 2)$ -simplécticas, es decir, cuando  $f$  es  $(1, 2)$ -admisibles.

### 2.3. Los casos $\mathbb{F}(2)$ , $\mathbb{F}(3)$ , $\mathbb{F}(4)$

A continuación se muestran las clases de isomorfismos de  $f$ -estructuras invariantes en  $\mathbb{F}(n)$ . Para  $n = 2, 3$  todas las clases son  $(1, 2)$ -admisibles.

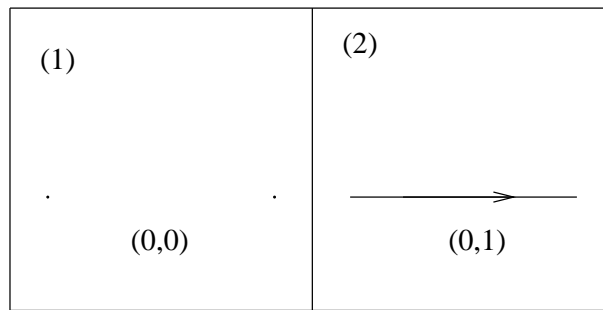


Figura 2.3: Clases de Isomorfismos para  $n = 2$

En el caso de  $\mathbb{F}(3)$  existen 7 clases de isomorfismos de  $f$ -estructuras invariantes (ver la Figura 2.4). La métrica Cartan-Killing,  $\lambda_{ij} = 1$  es  $(1, 2)$ -simpléctica para todas las  $f$ -estructuras de la Figura 2.4 y las primeras 6 de la Figura 2.5, la clase 7 corresponde a ecci integrables, es decir Kähler, y por lo tanto es  $(1, 2)$ -admisibles. En  $\mathbb{F}(4)$  existen 42 clases de isomorfismos de  $f$ -estructuras invariantes (ver las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6), solo las 36 que aparecen en 2.5 y 2.6 son  $(1, 2)$ -admisibles, donde las (1), (2), (3), (6), (7), (15) y (25) son trivialmente  $(1, 2)$ -admisibles ya que se cumplen las condiciones de Black. Las 29 clases (8)–(14), (16)–(24) y (26)–(36) junto con las métricas que admiten serán posteriormente estudiadas.

Las clases de la figura(37)-(42) no son  $(1, 2)$ -admisibles. Las dos primeras fueron analizadas por Cohen y Paredes. En la clase 39, se tiene que  $\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}$ ,  $\lambda_{23} = \lambda_{24} + \lambda_{34}$  y  $\lambda_{13} = \lambda_{34}$  de donde  $\lambda_{12} + \lambda_{24} = 0$  y que de acuerdo con las condiciones de la métrica  $\Lambda$  es absurdo.

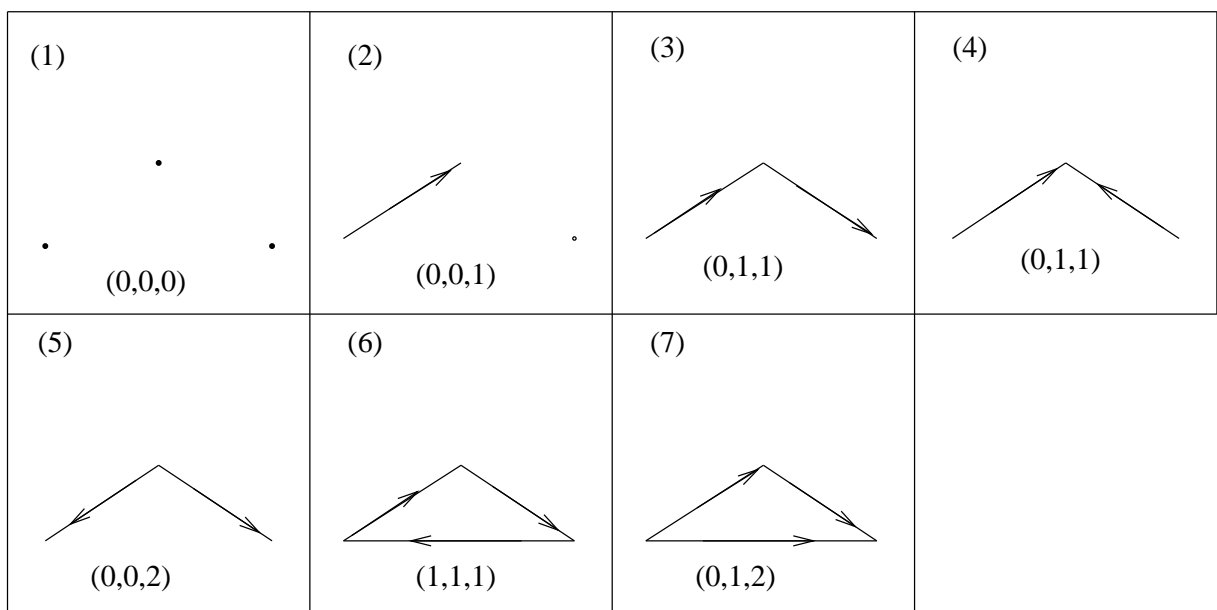


Figura 2.4: Clases de Isomorfismos para  $n = 3$

En la clase 40,  $\lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}$ ,  $\lambda_{34} = \lambda_{23} + \lambda_{24}$  y  $\lambda_{13} = \lambda_{34}$  de donde  $\lambda_{12} + \lambda_{24} = 0$ , absurdo de acuerdo con las condiciones de  $\Lambda$ . En el caso 41,  $\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}$ ,  $\lambda_{34} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$  de donde  $\lambda_{12} = 0$  lo cual es absurdo. Para el caso 42  $\lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}$ ,  $\lambda_{34} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$  de donde  $\lambda_{12} = 0$  y es absurdo.

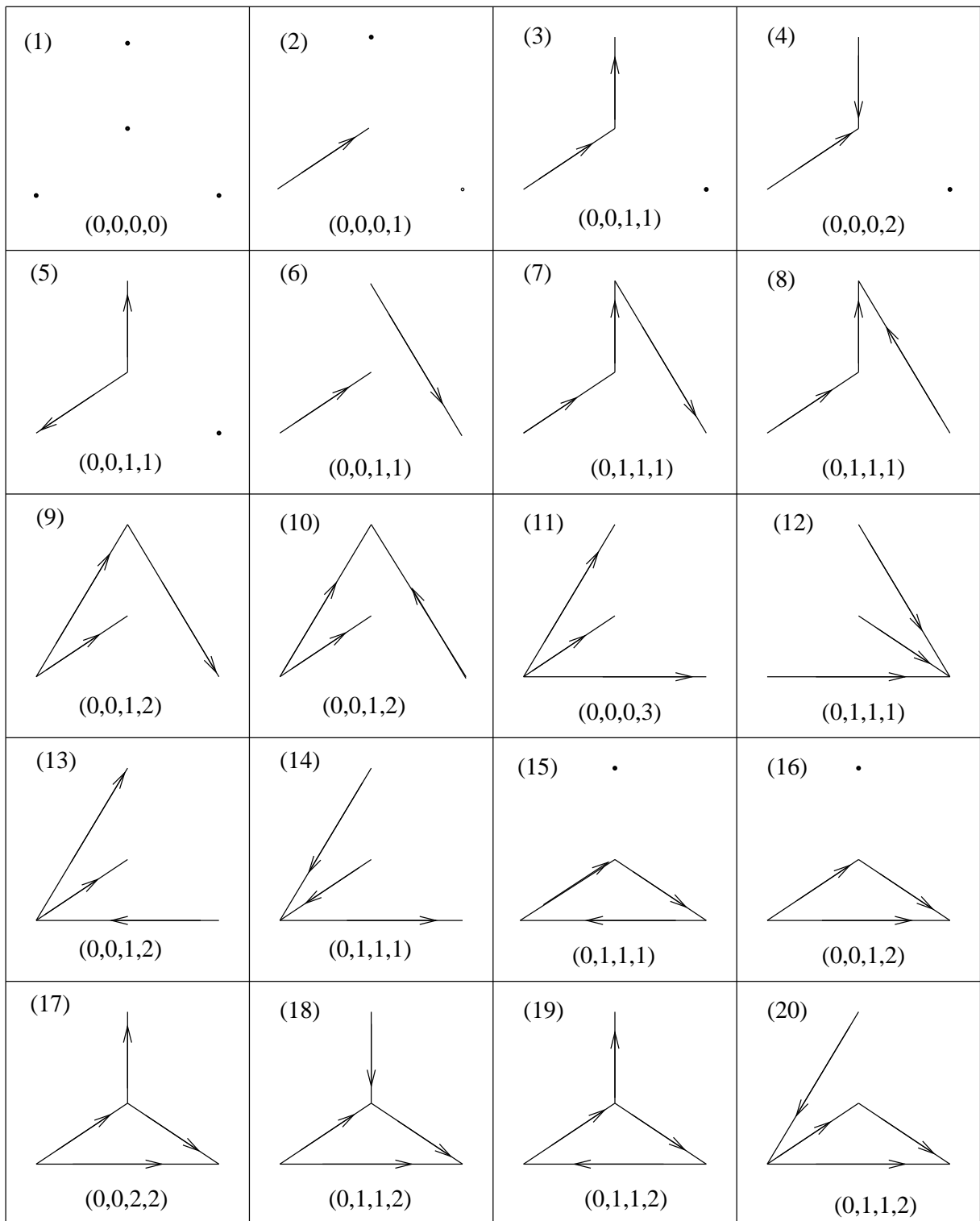


Figura 2.5: Clases de Isomorfismos para  $n = 4$

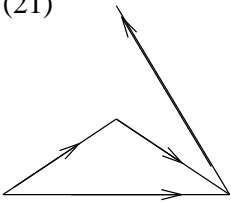
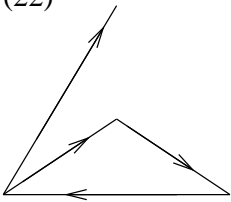
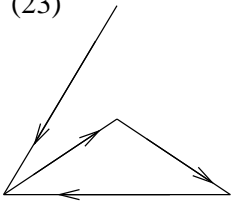
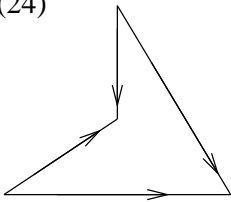
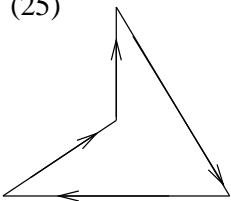
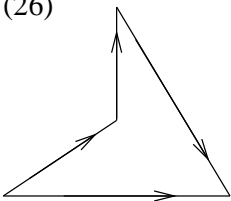
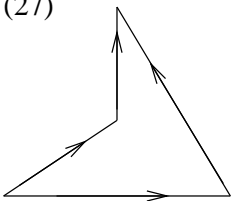
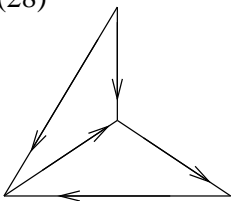
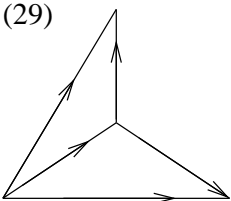
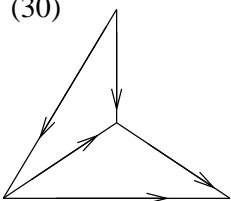
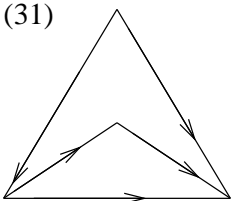
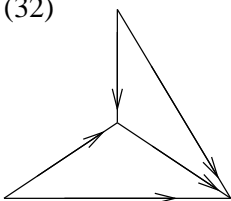
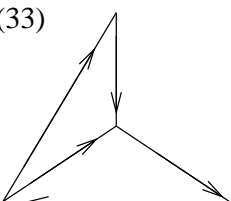
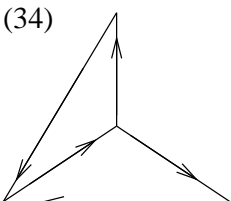
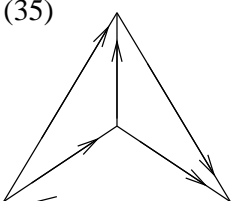
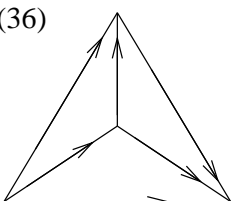
<p>(21)</p>  <p>(0,1,1,2)</p>	<p>(22)</p>  <p>(0,1,1,2)</p>	<p>(23)</p>  <p>(1,1,1,1)</p>	<p>(24)</p>  <p>(0,0,2,2)</p>
<p>(25)</p>  <p>(1,1,1,1)</p>	<p>(26)</p>  <p>(0,1,1,2)</p>	<p>(27)</p>  <p>(0,1,1,2)</p>	<p>(28)</p>  <p>(1,1,1,2)</p>
<p>(29)</p>  <p>(0,0,2,3)</p>	<p>(30)</p>  <p>(0,1,2,2)</p>	<p>(31)</p>  <p>(0,1,2,2)</p>	<p>(32)</p>  <p>(0,1,2,2)</p>
<p>(33)</p>  <p>(1,1,1,2)</p>	<p>(34)</p>  <p>(1,1,1,2)</p>	<p>(35)</p>  <p>(1,1,2,2)</p>	<p>(36)</p>  <p>(0,1,2,3)</p>

Figura 2.6: Clases de Isomorfismos para  $n = 4$

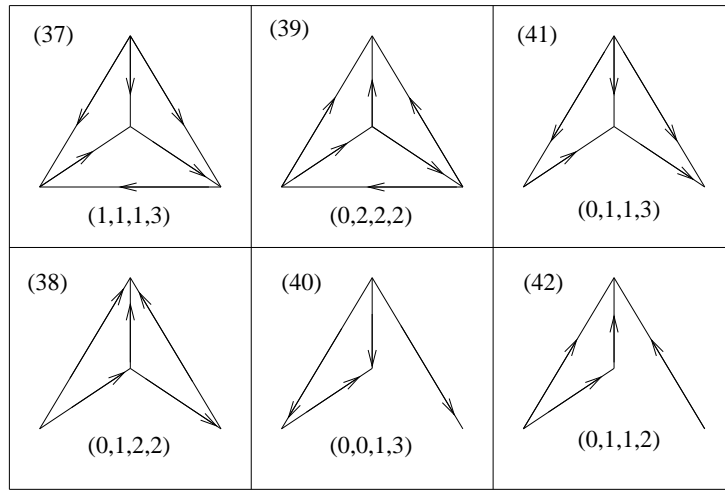


Figura 2.7: Clases de Isomorfismos para  $n = 4$

## 2.4. $f$ -Estructuras Localmente Transitivas

**Definición 20.** Un digrafo  $\mathcal{G} := (V, E)$  se dice:

1. *trivial*, si la cardinalidad del conjunto  $E$  es cero.
2. *transitivo*, si para todo  $i, j, k \in V$ , tal que  $i \rightarrow j$  y  $j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k$ , es decir, la relación " $\rightarrow$ " es transitiva,
3. *relativamente conexo* si para todo  $i, j, k \in V$ , tal que  $i \rightarrow j$  implica  $i \leftrightarrow k$  ó  $j \leftrightarrow k$

**Definición 21.** Un digrafo  $\mathcal{G} = (V, E)$  es localmente transitivo si para cualquier  $v \in V$  cada uno de los conjuntos  $\mathcal{G}_p(v)$  y  $\mathcal{G}_g(v)$ , ( $\mathcal{G}_p(v) = \{w \in V : vw \in E\}$  y  $\mathcal{G}_g(v) = \{w \in V : vw \in E\}$ ) es transitivo y relativamente conexo.

Si se identifica la  $f$ -estructura  $\mathcal{F}$  con su digrafo asociado  $\mathcal{G}$ , se dice que  $\mathcal{F}$  es localmente transitiva si su digrafo asociado es localmente transitivo. De esta definición se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Transitividad local significa que el digrafo  $\mathcal{G}_p(v)$ ,  $\mathcal{G}_g(v)$  omite los 4-subdigrafos que tienen un 3-ciclo conado.
2. En el caso no completo, la Definición 21 permite que algunos de estos subdigrafos, por ejemplo  $\mathcal{G}_p(v)$ , pueda ser trivial y relativamente conexo.
3. Si  $\max \{|\mathcal{G}_p(v)|, |\mathcal{G}_g(v)|\} \leq 2 \forall v \in V$ , entonces  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo.

En  $\mathbb{F}(3)$ , las siete clases de isomorfismos de  $f$ -estructuras invariantes son todas localmente transitivas y sus digrafos asociados a ellas también lo son.

Para  $\mathbb{F}(4)$ , de las 42 clases de isomorfismos de  $f$ -estructuras invariantes, solo las 36 de la Figura 2.5 y 2.6 ya mencionadas son localmente transitivas. Un digrafo no localmente transitivo, tiene un ganador ó un perdedor pero no ambos. Si se omite el ganador o perdedor, el subdigrafo corresponde a un 3-ciclo.

**Lema 3.** *Un digrafo  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo, si y solo si, cada 4-subdigrafo de  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo.*

*Demostración.* Ya se tiene que si  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo entonces cualquier subdigrafo de  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo, solo falta demostrar el teorema en la otra dirección. Supongamos que  $\mathcal{G}$  no lo es, entonces se tienen los dos casos:

1. Supongamos que existe  $v \in V$  tal que uno de los dos conjuntos  $\mathcal{G}_g(v)$ ,  $\mathcal{G}_p(v)$  no es transitivo, entonces existen  $j, k, l \in V$  tal que  $jk, kl \in V$  pero  $jl \notin E$  y por lo tanto sea que  $lj$  pertenezca o no a  $E$ , el 4-subdigrafo de  $\mathcal{G}$  con vértices  $\{v, j, k, l\}$  corresponde a uno de los tres primeros digrafos de la Figura 2.7 y por lo tanto no es localmente transitivo.
2. Ahora partamos de suponer la existencia de  $v \in V$  tal que uno de los dos conjuntos  $\mathcal{G}_g(v)$ ,  $\mathcal{G}_p(v)$  no es relativamente conexo es decir cada uno de los conjuntos contienen  $j, l, k \in V$  tales que  $jk \in E$  mas  $jl, kl, lj, lk \notin E$ . En este caso el 4-subdigrafo con vértices  $\{v, j, k, l\}$  corresponde a uno de los tres últimos digrafos de la Figura 2.7. Por lo tanto no es localmente transitivo. ■

Para digrafos completos, la  $f$ -estructura invariante asociada es una estructura casi compleja invariante. De los seis 4-digrafos no localmente transitivos de la Figura 2.7 exactamente dos son completos, los que contienen un 3-ciclo y un ganador ó perdedor, llamados conados. El lema anterior garantiza por tanto que  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo si y solamente si es libre de cono.

---

## 2.5. Digrafos Completamente No Transitivos

---

A continuación caracterizaremos la forma de las métricas  $(1, 2)$ -simplécticas sobre una clase especial de grafos que en este caso se llamarán completamente no transitivos.

**Definición 22.** (i) *Un triángulo transitivo es un digrafo completo transitivo  $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$  con  $|V_t| = 3$ . Dados  $V_t = \{u, v, w\}$  y  $E = \{uv, vw, uw\}$  se llamará a cada uno de los  $uv, vw$  lados y a  $uw$  base del digrafo  $\mathcal{G}_t$*

(ii) *Un digrafo  $\mathcal{G}' = (V, E')$  se dice completamente no transitivo (CNT) si  $\mathcal{G}'$  no contiene triángulos transitivos*

De hecho un digrafo CNT es localmente transitivo y los conjuntos  $\mathcal{G}'_g(v)$ ,  $\mathcal{G}'_p(v)$  son triviales en el sentido de la Definición 20 y el digrafo es libre de cono, ya que, cada 4-subdigrafo conado contiene un triángulo transitivo. Por otra parte la métrica Cartan Killing  $\lambda \equiv 1$  satisface las dos primeras condiciones dadas por Black y dado que la tercera se cumple vaciamente debido a la ausencia de triángulos transitivos, puede afirmarse que tal métrica es  $(1, 2)$ -simpléctica. Un digrafo CNT admite métricas  $(1, 2)$ -simplecticas no constantes además de la métrica de Cartan y en un digrafo  $\mathcal{G}'$  la métrica de

Cartan Killing es  $(1, 2)$ –simpléctica si y solo si el digrafo es CNT.

Para finalizar se verá a continuación el lema de remoción de flechas el cual permite reducir un digrafo  $\mathcal{G}$  a un digrafo asociado  $\mathcal{G}'$  CNT.

**Lema 4.** *Sea  $\mathcal{G} = (V, E)$  un digrafo localmente transitivo que no es CNT, entonces  $E$  contiene por lo menos una flecha  $e$ , la cual es una base mas no es un lado. Consecuentemente, cada 4–subdigrafo  $\mathcal{G}^\sim = (V, E \setminus \{e\})$  es localmente transitivo.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{G}_* = (V_*, E_*)$  un subdigrafo de  $\mathcal{G}$  completo maximal transitivo y  $|V_*| \geq 3$ . La hipótesis garantiza la existencia de por lo menos uno de esos digrafos. Entonces  $\mathcal{G}_*$  posee una única base  $e \in E_*$  que no es un lado. Se ve que  $\mathcal{G}_*$  es isomorfo al torneo canónico. El vector placar de  $\mathcal{G}_*$  es  $(0, 1, 2, \dots, r-1)$  con  $V_* = \{1, 2, \dots, r\}$ .  $\mathcal{G}_*$  tiene una flecha que conecta ganador y perdedor, por ejemplo  $e_{1r}$  que es la única flecha que es base en cualquier triángulo de  $\mathcal{G}_*$  en la que ella aparezca. Por tanto la flecha  $e_{1r}$  es una base en  $\mathcal{G}$ . Se afirma que  $e_{1r}$  no puede ser lado de algún triángulo transitivo de  $\mathcal{G}$ . Si se supone lo contrario, es decir, que tal triángulo  $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$  existe, puede verse que  $V_t \not\subseteq V_*$  ya que no es un lado de  $\mathcal{G}_*$ . Luego el subdigrafo  $\mathcal{G}^*$  de  $\mathcal{G}$  soportado sobre  $V_* \cup V^t$  contiene estrictamente  $\mathcal{G}_*$ . Transitividad local de  $\mathcal{G}$  implica que  $\mathcal{G}^*$  es nuevamente completo y transitivo. De hecho en  $\mathcal{G}_t$ ,  $V_t = \{1, r, t\}$ ,  $t \geq r$ . Para cada  $v \in V_*$  se considera el 4-subdigrafo de  $\mathcal{G}^*$  soportado sobre los vértices  $1, t, r, v$  como  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo, necesariamente debe existir la flecha  $vt$ , caso contrario sería un 4-subdigrafo de los seis de la Figura 2.7. Luego el placar en cada vértice de  $V_*$  aumenta en 1. Por lo anterior el vector placar de  $\mathcal{G}^*$  es  $(0, 1, \dots, r)$  lo que implica que  $\mathcal{G}^*$  es completo y transitivo lo cual contradice la maximalidad de  $\mathcal{G}_*$ . Para demostrar que  $\widehat{\mathcal{G}}$  es localmente transitivo utilizando el lema anterior es suficiente mostrar que cada 4-subdigrafo  $\widetilde{\mathcal{G}}$  de  $\widehat{\mathcal{G}}$  es localmente transitivo. Si  $e$  no es un lado de  $\widetilde{\mathcal{G}}$  es evidente la demostración dado que  $\widehat{\mathcal{G}}$  es subdigrafo de  $\mathcal{G}$ . En el caso contrario, asumiendo que  $e = uv$  con  $u, w$  vértices de  $\widetilde{\mathcal{G}}$ . Al suponer que  $\mathcal{G}$  no es localmente transitivo y de acuerdo con la Figura 2.7,  $\widetilde{\mathcal{G}}$  contiene un ganador ó un perdedor,  $v$ . Dado que  $e$  no está en  $\widetilde{\mathcal{G}}$ ,  $u \neq v, w$ . En cualquiera de los dos casos,  $v$  sea ganador ó perdedor, es un lado del triángulo no transitivo  $\{v, u, w\}$  lo cual es imposible por la primera parte del lema. Se concluye a partir del lema anterior que cualquier  $f$ –estructura invariante sobre  $\mathbb{F}(n)$  es localmente transitiva si y solo si es  $(1, 2)$ –admisibles. ■

**Teorema 6.** *El digrafo  $\mathcal{G} = (V, E)$  admite métricas  $(1, 2)$ –simplécticas si y solamente si es localmente transitivo.*

*Demostración.* De acuerdo con la definición de estructuras localmente transitivas puede afirmarse que para  $n < 4$ ,  $\mathcal{G}$  es siempre localmente transitivo. Para  $n = 4$ , se verifica teniendo en cuenta los digrafos de las figuras y las  $f$ –estructuras  $(1, 2)$ –admisibles en  $A_3$ . Supongamos que  $n > 4$ .

Si  $\mathcal{G}$  admite métricas  $(1, 2)$ –simplécticas, entonces por restricción, cada 4–subdigrafo de  $\mathcal{G}$  es  $(1, 2)$ –admisibles y por lo tanto localmente transitivo. Así por el lema anterior  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo. Ahora se supone que  $\mathcal{G}$  es localmente transitivo. Por inducción: Si  $\mathcal{G}$  es CNT y según la anterior sección existen métricas  $(1, 2)$ –simplécticas, de lo contrario se siguen removiendo secuencialmente bases  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, r$  de  $\mathcal{G} = (V, E)$  y así se obtiene una secuencia de digrafos  $\widehat{\mathcal{G}}_k = (V, \widehat{E})$  localmente transitivos. El proceso termina cuando no quedan más triángulos transitivos, es decir, cuando  $\widehat{\mathcal{G}}_k = (V, \widehat{E})$  es CNT, para algún

$k$ . Por la hipótesis de inducción, cada  $\widehat{\mathcal{G}}_k$  admite métricas  $(1, 2)$ -simplécticas. Ahora se extiende en forma inversa la remoción de bases a la métrica sobre  $\mathcal{G}_{\parallel-\infty}$  definiendo  $\lambda_{e_k} = \lambda_{\widehat{e}} + \lambda_{\widehat{e}}$ , donde  $\widehat{e}$  y  $\widehat{e}$  son los lados correspondientes a la base  $e_k$ . Esta es la única extensión para la cual  $\Lambda$  es  $(1, 2)$ -simpléctica sobre el triángulo tratado, por lo tanto esta es la única extensión que debe ser  $(1, 2)$ -simpléctica para todo  $\mathcal{G}$ . Ahora se muestra en dos pasos que de hecho es  $(1, 2)$ -simpléctica.

- Paso 1. La extensión está bien definida, esto es, asuma que  $e = uv$  es simultáneamente base para dos triángulos transitivos,  $\{uv, vw, uw\}$  y  $\{uz, zw, uw\}$ , teniendo en cuenta que  $\{u, v, w, z\} \subset V$ . Lo que se debe mostrar a priori es

$$\lambda_{uz} + \lambda_{zw} = \lambda_{uv} + \lambda_{vw} \tag{2.4}$$

Se consideran dos casos; si  $v \leftrightarrow z$ , y se asume que  $v \rightarrow z$ . En este caso por la tercera condición de Black, es decir (2.3), se tiene que  $\lambda_{vz} = \lambda_{uz} - \lambda_{uv}$  y  $\lambda_{vz} = \lambda_{vw} - \lambda_{zw}$  implicando (2.4). En el caso contrario por (2.1) y (2.2) se tiene que  $\lambda_{uv} = \lambda_{uz}$ ,  $\lambda_{vw} = \lambda_{zw}$  lo cual implica nuevamente (2.4).

- Paso 2. Veamos ahora que la métrica extendida es  $(1, 2)$ -simpléctica. Cada conflicto con ((2.1) - (2.3)) podría relacionarse con una flecha removida  $e$ , ya que  $\mathcal{G}^\sim$  por hipótesis satisface estas restricciones. Por el lema 4,  $e$  no es un lado de  $\mathcal{G}$  por lo tanto cualquier conflicto con (2.3) es del tipo ya discutido en el paso 1.

Un conflicto con (2.1) implica que  $\lambda_e \neq \lambda'_e$  donde se dice que  $e = uv$  y  $e' = tw$ . Esto puede ocurrir solo si  $t \leftrightarrow u$ . De la relación entre  $v$  y  $t$  puede verse en forma independiente que  $\mathcal{G}$  y  $\widehat{\mathcal{G}}$  no pueden ser ambos localmente transitivos dado que uno de los dos contiene uno de los digrafos no localmente transitivos que aparecen en la Figura 2.7, lo cual contradice nuestras hipótesis. Un conflicto con (2.2) produce una contradicción semejante y de esta manera se completa la demostración. ■

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# $F$ –VARIEDAD BANDERA MAXIMAL ASOCIADA A ÁLGEBRAS DE LIE DE TIPO $C_3$

En este capítulo se verá la equivalencia entre  $(1, 2)$ –admisibles y localmente transitivos para una variedad bandera maximal asociada a álgebras de Lie de rango 3 dotada de una  $f$ -estructura invariante y su métrica. Se precisa en álgebras de Lie de dimensión finita del tipo  $C_l$ .

---

### 3.1. Álgebra del tipo $C_l, l \geq 3$

---

Un representante de este tipo es el álgebra  $\mathfrak{sp}(l)$  que se construye de la siguiente forma. Sea  $J$  una matriz antisimétrica de tamaño  $2l \times 2l$  escrita en bloques de tamaño  $l \times l$ , con

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{l \times l} \\ 1_{l \times l} & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $1$  representa la identidad de tamaño  $l \times l$  y  $0$  la matriz nula. Esta matriz define una forma bilineal antisimétrica no degenerada, es decir simpléctica,  $\omega \in \mathbb{K}^{2l}$  dada por

$$\omega(x, y) = y^t J x, x, y \in \mathbb{K}^{2l}.$$

El álgebra  $\mathfrak{sp}(l)$  es el álgebra de matrices de tamaño  $2l \times 2l$  que son antisimétricas en relación a  $\omega$ :

$$\mathfrak{sp}(l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l) : AJ + JA^t = 0\}.$$

Esta álgebra es semisimple. Escribiendo una matriz de tamaño  $2l \times 2l$  en bloques de tamaño  $l \times l$ ,  $A \in \mathfrak{sp}(l)$  si y solo si  $A$  es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

con  $\beta$  y  $\gamma$  matrices de tamaño  $l \times l$  simétricas. La subálgebra  $\mathfrak{h}$  de las matrices diagonales en  $\mathfrak{sp}(l)$  es de Cartan. Los elementos de la subálgebra de Cartan  $H \in \mathfrak{sp}(l)$  son de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}.$$

Es decir de acuerdo con la definición del primer capítulo satisface la condición  $[A, H] \in \mathfrak{h}$ , veámoslo:

$$AH = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\Lambda & -\beta\Lambda \\ \gamma\Lambda & \alpha^t\Lambda \end{pmatrix}$$

$$HA = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda\alpha & \Lambda\beta \\ -\Lambda\gamma & \Lambda\alpha^t \end{pmatrix}$$

entonces,

$$[A, H] = AH - HA = \begin{pmatrix} \alpha\Lambda - \Lambda\alpha & -\beta\Lambda - \Lambda\beta \\ \gamma\Lambda + \Lambda\gamma & \alpha^t\Lambda - \Lambda\alpha^t \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

$\Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\}$ , es una matriz diagonal  $l \times l$  arbitraria. Si  $\alpha$  es una raíz  $\alpha(H)$  es una diferencia de autovalores de  $H$  y por lo tanto es de la forma  $\pm a_i \pm a_j$ . Ahora,  $\pm 2a_i$  es autovalor de  $\text{ad}(H)$  ya que  $\alpha$  y  $\beta$  son matrices simétricas y por lo tanto pueden tener entradas no nulas a lo largo de sus diagonales. De esta forma los espacios de raíces están dados así:

1.  $\lambda_i - \lambda_j$ ,  $i \neq j$ , el espacio de raíces dado por las matrices  $\alpha, \beta, \gamma$  tal que  $\beta = \gamma = 0$  y  $\alpha$  es una matriz  $l \times l$  cuya única entrada no nula está en  $i, j$ .
2.  $\lambda_i + \lambda_j$ , el espacio de raíces dado por  $\alpha = \gamma = 0$  y  $\beta$  con entradas no nulas en  $(i, j)$  y  $(j, i)$ .
3.  $-(\lambda_i + \lambda_j)$  el espacio de raíces dado por  $\alpha = \beta = 0$  y  $\gamma$  con entradas no nulas en  $i, j$  y  $j, i$ .

Un sistema simple de raíces está dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$$

cuyo número de elementos es la dimensión de  $\mathfrak{h}$  y

1.  $\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$  si  $i < j$  y
2.  $\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{l-1}) + 2\lambda_{l-1}$  si  $i < j$ .

Las raíces positivas son  $\lambda_i - \lambda_j$ ,  $i < j$  y  $\lambda_i + \lambda_j$ ,  $i \neq j$ . La forma de Cartan-Killing está dada por

$$\langle H, H \rangle = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2,$$

es decir

$$\langle H, H \rangle = 2 \sum_{i \neq j} (a_i^2 + a_j^2) + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2$$

$$\langle H, H \rangle = 4 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2$$

Y dado que

$$\sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) = (l-1) \sum_i a_i^2$$

entonces,

$$\langle H, H \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2$$

Por polarización,

$$\langle H, H' \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i.$$

Los espacios  $H_\alpha$  de las raíces están dados por  $\Lambda_\alpha$  con

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{4(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{4(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\} \quad i \neq j$$

y

$$\Lambda_{2\lambda_i} = \langle \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 0\} \rangle$$

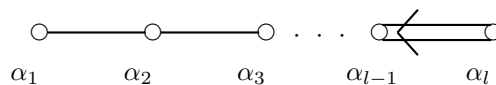
Esas expresiones muestran que el diagrama de Dynkin de  $\Sigma$  es  $C_l$  (y por tanto conexo y el álgebra es simple) con  $2\lambda_l$  la raíz del complemento mayor, pues

$$\langle 2\lambda_l, 2\lambda_l \rangle = 4(l+1) \frac{4}{4^2(l+1)^2} = \frac{1}{(l+1)}$$

y

$$\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle = 4(l+1) \frac{2}{4^2(l+1)^2} = \frac{1}{2(l+1)}$$

Para  $l \leq 2$ ,  $\mathfrak{sp}(l)$  es isomorfa a  $\mathfrak{so}(2l+1)$  ya que los diagramas coinciden como podemos apreciar y  $\mathfrak{sp}(l)$  es una representante de las álgebras  $C_l$ .



## 3.2. Transitividad Local General

Vamos a generalizar las propiedades libre de cono y transitividad local en las variedades bandera generales dotadas con una  $f$ -estructura invariante, conservando la expresión "localmente transitivo", en una definición de esta propiedad:

**Definición 23.** Sea  $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$  una  $f$ -estructura invariante. Sea la cuadrupla

$Q := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \Pi$ , con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$  un conjunto sin pares de raíces opuestas o iguales.

(i) Decimos que una tripla de raíces  $\{(u+v), \omega_1, \omega_2\}$  es extraída de  $Q$  por  $u, v$  si

$$\{u, v, \omega_1, \omega_2\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}.$$

(ii) Decimos que  $\mathcal{F}$  es localmente transitiva si el conjunto formado por las  $\{0, 3, 0\}$ -triplas y  $\{1, 2, 0\}$ -triplas y  $\{2, 1, 0\}$ -triplas extraídas de  $Q$  tienen cardinalidad distinta de 1.

Esta definición coincide con la definición libre de cono dada en [3] para una variedad bandera maximal y se tiene en cuenta igualmente la condición que las cuadruplas no contengan raíces opuestas ó iguales.

De esta manera , si

(i)  $\beta = -\alpha$ . Entonces  $\delta = -\gamma$ , y las triplas extraídas de  $Q$  son,  $\{\alpha + \gamma - \alpha, -\gamma\}$ ,  $\{\alpha - \gamma, -\alpha, \gamma\}$ ,  $\{-\alpha + \gamma, \alpha, -\gamma\}$ ,  $\{-\alpha - \gamma, \alpha, \gamma\}$ . Se supone por ejemplo que  $\{\alpha + \gamma, -\alpha, -\gamma\}$  es una  $\{0, 3, 0\}$ -tripla ó  $\{1, 2, 0\}$ -tripla ó  $\{2, 1, 0\}$ -tripla entonces  $\{-\alpha - \gamma, \alpha, \gamma\}$  sería una  $\{0, 3, 0\}$ -tripla ó  $\{2, 1, 0\}$ -tripla ó  $\{1, 2, 0\}$ -tripla respectivamente. Es fácil ver que en este caso, este tipo de triplas aparece en pares.

(ii) Si  $\alpha = \beta$ , como  $2\alpha$  y  $\delta + \gamma = -2\alpha$  no pueden ser raíces, las posibles triplas extraídas de  $Q$  son  $\{\alpha, \alpha + \delta, \gamma\}$ ,  $\{\alpha, \delta, \gamma + \gamma\}$ ,  $\{\alpha, \alpha + \delta, \gamma\}$  y  $\{\alpha, \delta, \alpha + \gamma\}$  y una vez más se satisface la condición localmente transitivo.

La definición general de localmente transitivo se basa en lo que sucede para el caso  $A_n$  veamós como refuerza este hecho la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.1.** En la variedad bandera maximal asociada a  $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , una  $f$ -estructura invariante es localmente transitiva en el sentido de la definición 23 si, y solamente si, cada 4-subdigrafo del digrafo asociado no es uno de los seis digrafos de la figura 2,7.

*Demostración.* Sean  $\mathcal{F}$  una  $f$ -estructura invariante y  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  su digrafo correspondiente, suponga que  $\mathcal{F}$  es localmente transitiva en el sentido de la definición 23.

Sea  $\{i, j, k, l\}$ , un 4-subdigrafo de  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  y considere el conjunto de las raíces

$p = \{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\} \subset \Pi$  con  $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} + \alpha_{li} = 0$ . Si  $\mathcal{F}|_p$  es una estructura casicompleja invariante y sabiendo que  $\{i, j, k, l\}$  no es un cono entonces  $\{i, j, k, l\}$  no es uno de los seis digrafos de la figura 2,7. Caso contrario de que  $q = \{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$  extraimos cuatro triplas  $\{\alpha_{ik}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ ,  $\{\alpha_{jl}, \alpha_{li}, \alpha_{ij}\}$ ,  $\{\alpha_{ki}, \alpha_{ij}, \alpha_{jk}\}$  y  $\{\alpha_{lj}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}\}$ . Cada una de estas triplas corresponde a un 3-subdigrafo, esto es,  $\{\alpha_{ik}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$  el asociado a  $\{i, k, l\}$ . Dado que el número de triplas del tipo  $\{1, 2, 0\}$  y  $\{2, 1, 0\}$  extraídas de  $q$  debe ser diferente de 1,  $\{i, j, k, l\}$  es distinto de los últimos cuatro digrafos en 2,7.

Para demostrar el recíproco, un conjunto de cuatro raíces  $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  con  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$  que no contiene pares de raíces opuestas o iguales, tiene la forma  $\{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$  para  $1 \leq i, j, k, l \leq n$  y

como el subdigrafo asociado es diferente de los seis 4–digrafos de la figura 2,7 entonces la cardinalidad del conjunto de triplas extraidas de  $p$  del tipo  $\{0, 3, 0\}$ ,  $\{1, 2, 0\}$  y  $\{2, 1, 0\}$  es diferente de 1. Repitiendo el argumento anterior tenemos generalizada la condición localmente transitivo. ■

**Teorema 7.** *Una condición necesaria para  $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$  sea  $(1, 2)$ –simpléctica es que  $\mathcal{F}^\Theta$  sea localmente transitiva en el sentido de la definición 23.*

*Demostración.* Recordemos que  $d^2 = 0$  y haciendo los respectivos cálculos en  $d^2\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)$  tenemos las únicas cuadruplas  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$  a tener en cuenta son las que satisfacen la condición  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ , con  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \not\subseteq \mathfrak{q}_\Theta^0$ . Así como en el caso de las estructuras casicomplejas, tenemos los siguientes 6 términos:

1.  $+im_{\alpha, \beta} m_{\gamma, \delta} (\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta + \varepsilon_\delta^\Theta \lambda_\delta^\Theta),$
2.  $-im_{\beta, \gamma} m_{\delta, \alpha} (\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_{\beta+\gamma}^\Theta \lambda_{\beta+\gamma}^\Theta + \varepsilon_\delta^\Theta \lambda_\delta^\Theta),$
3.  $+im_{\gamma, \delta} m_{\alpha, \beta} (\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_{\gamma+\delta}^\Theta \lambda_{\gamma+\delta}^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta),$
4.  $-im_{\beta, \delta} m_{\alpha, \gamma} (\varepsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \varepsilon_{\beta+\delta}^\Theta \lambda_{\beta+\delta}^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta),$
5.  $-im_{\alpha, \gamma} m_{\beta, \delta} (\varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_{\alpha+\gamma}^\Theta \lambda_{\alpha+\gamma}^\Theta + \varepsilon_\delta^\Theta \lambda_\delta^\Theta),$
6.  $-im_{\alpha, \delta} m_{\beta, \gamma} (\varepsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta + \varepsilon_{\alpha+\delta}^\Theta \lambda_{\alpha+\delta}^\Theta + \varepsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta),$

Sea  $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \not\subseteq \mathfrak{q}_\Theta^0$  una cuadrupla de raíces tal que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ . De los anteriores seis términos, los que corresponden a  $\{1, 2\}$ –triplas, es decir, los términos correspondientes a las  $\{0, 1, 2\}$ –triplas y  $\{1, 1, 1\}$ –triplas extraidas de  $Q$ , son cero si  $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$  es  $(1, 2)$ –simpléctica. De la misma forma para que  $d^2\Omega^\Theta$  sea cero no existe una métrica  $\Lambda^\Theta$  tal que al extraer exactamente una tripla ya sea,  $\{1, 2, 0\}$  ó  $\{2, 1, 0\}$  ó  $\{0, 3, 0\}$ , los términos definidos arriba son cero. Si  $R$  es el conjunto de las raíces que aparecen en las triplas extraidas de  $Q$  y  $\mathcal{F}|_R$  es una estructura casi compleja invariante, de acuerdo con lo estudiado en [3] es imposible extraer exactamente una  $\{0, 3, 0\}$ –tripla. ■

### 3.3. El caso de la $f$ –variedad bandera maximal $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ asociada al álgebra de Lie $C_3$

El sistema positivo de raíces de  $C_3$  es  $\Pi^+ = L \cup S$ , donde  $L = \{\pm 2e_i, 1 \leq i \leq 3\}$  y  $S = \{e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 3\}$  con  $e_i, 1 \leq i \leq 3$ , elementos de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  son los conjuntos de raíces largas y cortas respectivamente. El conjunto  $S$  es isomorfo al sistema de raíces de  $A_3$  de la siguiente forma:

Sean  $\Sigma_{A_3} = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$  el sistema simple de raíces para  $A_3$  con  $e_i, 1 \leq i \leq 4$  elementos en la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ , y  $\Sigma_S = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_2 + e_3\}$  el sistema simple de raíces del generado por  $S$ , aquí los  $e_i$  con  $1 \leq i < j \leq 3$  son elementos en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

Establecemos el isomorfismo entre las raíces positivas de  $A_3$  y el conjunto  $S$  así:  $\alpha_{12} \rightarrow e_2 - e_3$ ;  $\alpha_{13} \rightarrow e_1 - e_3$ ;  $\alpha_{23} \rightarrow e_1 - e_2$ ;  $\alpha_{14} \rightarrow e_1 + e_2$ ;  $\alpha_{24} \rightarrow e_1 + e_3$ ;  $\alpha_{34} \rightarrow e_2 + e_3$ , con  $\alpha_{i,j}$  en  $\Pi_{A_3}^+$  y  $e_i \pm e_j$  en  $S$ .

Tal isomorfismo se demuestra verificando la igualdad de las matrices de Cartan para  $A_3$  y el generado por las raíces cortas en  $C_3$ , digamos  $C_{3c}$ .

Sabemos que  $C_{ij} = 2 \frac{\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle}{\langle \lambda_j, \lambda_j \rangle}$  y

$$\langle \alpha_{12}, \alpha_{23} \rangle = \langle e_2 - e_3, e_1 - e_2 \rangle = -1$$

$$\langle \alpha_{12}, \alpha_{34} \rangle = \langle e_2 - e_3, e_2 + e_3 \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_{23}, \alpha_{34} \rangle = \langle e_1 - e_2, e_2 + e_3 \rangle = -1$$

Como consecuencia la matriz de Cartan  $C_{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = C_{C_{e3}}$

Y de esta manera se verifica el isomorfismo.

Se concluye que  $C_3$  tiene inmerso un  $A_3$  y por tanto para encontrar las  $f$ -estructuras localmente transitivas en las variedades bandera asociadas a  $C_3$ , solo falta establecer cuando esta propiedad se cumple para las cuádruplas que incluyan raíces largas, es decir de la forma  $\pm 2e_i$ .

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $\mathbb{F}$  una variedad bandera maximal asociada a  $C_3$  con una  $f$ -estructura invariante  $\mathcal{F}$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es  $(1, 2)$ -admisibile si y solo si  $\mathcal{F}$  es localmente transitiva.*

*Demostración.* Podemos asumir que la restricción a las raíces cortas  $\mathcal{F}^S$  de una  $f$ -estructura invariante  $\mathcal{F}$  localmente transitiva corresponde a uno de los digrafos de las figuras 2,5 y 2,6. Faltaría hallar para qué valores de las raíces largas  $\mathcal{F}$  es localmente transitiva. Veamos ahora las cuádruplas que aparecen en  $C_3$  que no son cuádruplas de raíces cortas. A menos de cambio de signo son las siguientes 18 cuádruplas.

$$\begin{array}{ll} Q_1 = \{-2e_1, e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_2 - e_3\} & Q_2 = \{e_2 - e_3, e_1 - e_3, -(e_1 + e_2), 2e_3\} \\ Q_3 = \{-2e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2, e_3 - e_1\} & Q_4 = \{e_2 - e_3, -(e_1 + e_3), e_1 - e_2, 2e_3\} \\ Q_5 = \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} & Q_6 = \{-(e_2 + e_3), e_1 - e_3, -(e_1 - e_2), 2e_3\} \\ Q_7 = \{e_2 + e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2), -2e_3\} & Q_8 = \{e_2 + e_3, e_1 + e_2, -(e_1 + e_3), -2e_1\} \\ Q_9 = \{e_1 - e_3, e_1 + e_2, e_3 - e_2, -2e_1\} & Q_{10} = \{e_1 + e_3, -(e_2 + e_3), e_1 + e_2, -2e_1\} \\ Q_{11} = \{-(e_1 - e_2), e_1 + e_3, e_2 - e_3, -2e_2\} & Q_{12} = \{e_1 - e_2, -(e_2 + e_3), -(e_1 - e_3), -2e_2\} \\ Q_{13} = \{e_2 - e_3, e_2 - e_3, -2e_2, 2e_3\} & Q_{14} = \{e_1 - e_2, e_1 - e_2, -2e_1, -2e_2\} \\ Q_{15} = \{e_2 + e_3, e_2 + e_3, -2e_2, -2e_3\} & Q_{16} = \{e_1 - e_3, e_1 - e_3, -2e_1, 2e_2\} \\ Q_{17} = \{e_1 + e_3, e_1 + e_3, -2e_1, -2e_3\} & Q_{18} = \{e_1 + e_2, e_1 + e_2, -2e_2, -2e_1\} \end{array}$$

Al analizar las triplas extraidas de cada cuádrupla notamos que las cuádruplas  $Q_{13}$ ,  $Q_{14}$ ,  $Q_{15}$ ,  $Q_{16}$ ,  $Q_{17}$ ,  $Q_{18}$  son excluidas por la definición 23. Las triplas extraidas de las cuádruplas restantes son:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_3, e_1 + e_3, -2e_1\} \\ \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 - e_3, e_1 + e_3\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_2 - e_3, e_1 - e_2\} \end{pmatrix} & Q_2 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_3, 2e_3\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\} \\ \{e_1 + e_3, e_2 - e_3, -(e_1 + e_2)\} \\ \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_2), e_2 + e_3\} \end{pmatrix} \\
 Q_3 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -(e_1 - e_2), -2e_2\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_1 + e_2, -(e_1 - e_3)\} \\ \{e_2 + e_3, e_2 - e_3, -2e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix} & Q_4 &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_3), 2e_3\} \\ \{e_2 + e_3, -(e_1 + e_3), e_1 - e_2\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_1 - e_2, e_2 - e_3\} \end{pmatrix} \\
 Q_5 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 + e_3, e_1 - e_3\} \\ \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_2, e_2 + e_3\} \end{pmatrix} & Q_6 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_3, 2e_3\} \\ \{-(e_2 - e_3), e_1 - e_3, -(e_1 - e_2)\} \\ \{e_2 - e_3, -(e_2 + e_3), 2e_3\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_1 + e_3, -(e_1 - e_2)\} \end{pmatrix} \\
 Q_7 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_3), e_1 + e_3, -2e_3\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \\ \{-(e_2 - e_3), e_2 + e_3, -2e_3\} \\ \{e_1 - e_3, e_2 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_8 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_2), e_1 + e_2, -2e_2\} \\ \{-(e_2 + e_3), e_1 - e_2, -(e_1 + e_3)\} \\ \{e_2 - e_3, e_2 + e_3, -2e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -(e_1 + e_3)\} \end{pmatrix} \\
 Q_9 &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 + e_3), e_1 + e_2, -(e_2 - e_3)\} \\ \{e_1 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} \\ \{e_1 - e_3, -(e_2 - e_3), -(e_1 - e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{10} &= \begin{pmatrix} \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, -2e_1\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_1 + e_2, -(e_2 + e_3)\} \\ \{e_1 + e_3, e_1 - e_3, -2e_1\} \\ \{-(e_1 - e_2), e_1 + e_3, -(e_2 + e_3)\} \end{pmatrix} \\
 Q_{11} &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -(e_1 - e_2), -2e_2\} \\ \{-(e_2 + e_3), -(e_1 - e_2), e_1 + e_3\} \\ \{e_2 + e_3, e_2 - e_3, -2e_2\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{12} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 - e_3), -(e_2 + e_3), -(e_1 - e_3)\} \\ \{e_1 + e_2, -(e_2 + e_3), -(e_1 - e_3)\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_1 - e_2, 2e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Retomando el concepto de grafo intersección y teniendo en cuenta que dado un sistema de raíces, se define el grafo intersección asociado como  $G = \mathcal{G}(S)$  donde  $S$  es el conjunto de todas las triplas de raíces de suma cero, y tenemos en cuenta que cada tripla corresponde a un vértice del cubo, ya que cada cuadrupla contiene exactamente cuatro triplas, entonces cada cuadrupla representa una cara del cubo. Para el caso de  $C_3$  la representación de las cuadruplas que no corresponden a raíces cortas se lustra en las figuras 3.1 y 3.2:

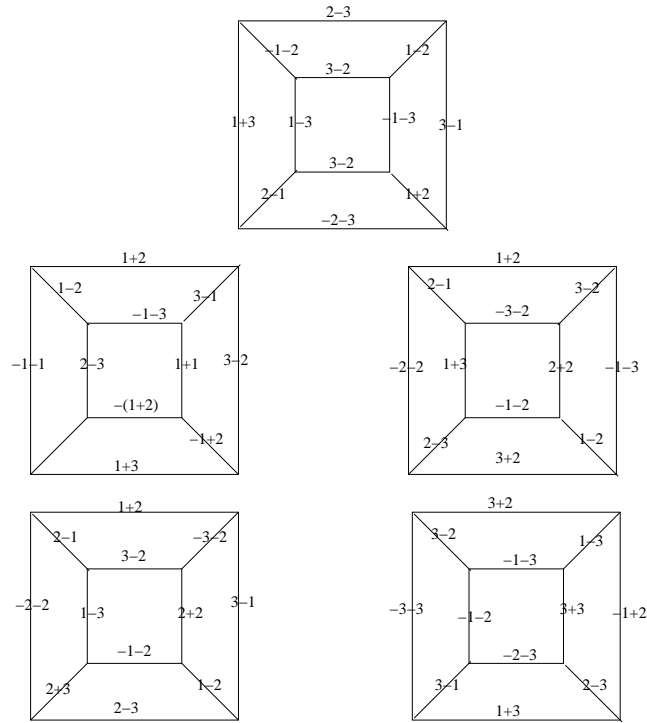


Figura 3.1: Grafos Intersección en  $C_3$

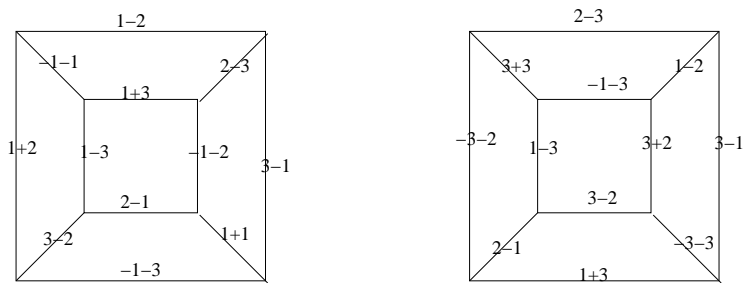


Figura 3.2: Grafos Intersección en  $C_3$

A menos de signos las tripla que aparecen en  $C_3$  son:

$$\begin{array}{ll} \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} & \{e_2 - e_3, e_1 - e_2, -(e_1 - e_3)\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -(e_1 + e_3)\} & \{e_1 - e_3, e_2 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \\ \{e_2 - e_3, e_2 + e_3, -2e_2\} & \{e_1 e_2, e_1 + e_2, -2e_1\} \\ \{e_1 - e_3, e_1 + e_3, -2e_1\} & \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -2e_1\} \\ \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_3), 2e_3\} & \{-(e_2 + e_3), e_2 - e_3, 2e_3\} \end{array}$$

Al hacer los cálculos observamos que cualquier  $f$ -estructura que no es localmente transitiva tampoco es  $(1, 2)$ -admisibles. ■

### 3.4. $f$ -estructuras $(1, 2)$ -admisibles en $\mathbb{F}$ asociada a $C_3$

A continuación veremos como lemas las  $f$ -estructuras invariantes localmente transitivas definidas en la variedad bandera maximal asociada a  $C_3$  cuyas demostraciones se desa-rrollan para las cuádruplas donde no se cumple la condición localmente transitiva, ya que para los demás basta con verificar que todas las cuádruplas la cumplen. En el caso  $C_3$  el valor de la  $f$ -estructura invariante  $\mathcal{F}$  en las raíces largas es independientes de las demás. Se verifican los valores admitidos por  $\varepsilon_{2e_1}$  viendo que se cumpla la condición (ii) de la definición 23 en las cuádruplas  $Q_1, Q_5, Q_9$  y  $Q_{10}$ ; para  $\varepsilon_{2e_2}$ , en las cuádruplas  $Q_3, Q_8, Q_{11}$  y  $Q_{12}$ ; así mismo para  $\varepsilon_{2e_3}$ , en las cuádruplas  $Q_2, Q_4, Q_6$ , y  $Q_7$ . Decimos que  $\mathcal{F}^C$  corresponde a la restricción de  $\mathcal{F}$  a las raíces cortas de  $C_3$ .

**Lema 5.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (1) - (7), (15), (23) y (25) en la Figura 2.5 y 2.6  $\mathcal{F}$  es localmente transitiva para cualquier valor de  $2e_1, 2e_2, 2e_3$ .

**Lema 6.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (8) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_3} = -1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_3} = -1$ , en  $Q_2$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 7.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (9) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = -1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = -1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_3$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y si  $\varepsilon_{2e_3} = -1$  en  $Q_{12}$  no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 8.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (10) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_3} = 0, \pm 1$  en  $Q_4$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 9.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (11) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = 1$ , cuando  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  y cuando  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$ , en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, de la misma forma para  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  en  $Q_3$  y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_4$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 10.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (12) en la Figura 2.5  $\mathcal{F}^C$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 1$

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_1$  no se cumple la condición (ii) de la definición 23, si  $\varepsilon_{2e_2} = 1$  en  $Q_3$  no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_7$  no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 11.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (13) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}^C$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_2} = -1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  en  $Q_3$  no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 12.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (14) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}^C$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_2} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_2} = 1$  en  $Q_3$  no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 13.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (16) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}^C$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_2$ , tampoco se cumple tal condición. ■

**Lema 14.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (17) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_3} = 0, \pm 1$  en  $Q_7$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 15.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (18) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_3} = 0, \pm 1$  en  $Q_2$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 16.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (19) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}^C$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, si  $\varepsilon_{2e_3} = \pm 1$  en  $Q_7$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 17.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (20) en la Figura 2.5,  $\mathcal{F}^C$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = 1$ , y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_2$ , tampoco se cumple tal condición. ■

**Lema 18.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (21) en la Figura 2.6  $\mathcal{F}^C$ , no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = 1$ ,  $\varepsilon_{2e_2} = 1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, si  $\varepsilon_{2e_2} = 1$  en  $Q_3$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_2$ , tampoco se cumple tal condición. ■

**Lema 19.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (22) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}^C$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = \pm 1$ ,  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = \pm 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, si  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  en  $Q_3$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_2$ , tampoco se cumple tal condición. ■

**Lema 20.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (23) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = -1$ , y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1$  en  $Q_5$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_2$ , tampoco se cumple tal condición. ■

**Lema 21.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (24) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_3} = 0, \pm 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 22.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (26) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_2} = 0, \pm 1$  en  $Q_{11}$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 23.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (27) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_3} = 0, \pm 1$  en  $Q_7$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 24.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (28) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 25.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (29) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}^C$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  en  $Q_3$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23 y Si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_4$ , no se cumple tal condición. ■

**Lema 26.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (30) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 27.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (31) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1$  en  $Q_5$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 28.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (32) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}$  no acepta ninguna  $f$ -estructura invariante localmente transitiva.

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23. ■

**Lema 29.** Si  $\mathcal{F}^C$  corresponde a (33) en la Figura 2.6,  $\mathcal{F}^C$  no es localmente transitiva en los casos donde  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1$  y  $\varepsilon_{2e_3} = 1$ .

*Demostración.* Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1$  en  $Q_1$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, Si  $\varepsilon_{2e_2} = -1$  en  $Q_3$ , no se cumple la condición (ii) de la definición 23, y si  $\varepsilon_{2e_3} = 1$  en  $Q_4$ , tampoco se cumple tal condición. ■

### 3.5. Métricas $(1, 2)$ -simplécticas en $\mathbb{F}$ asociada a $C_3$

A partir de las  $f$ -estructuras invariantes  $(1, 2)$ -admisibles en la variedad bandera ma-asociada a  $C_3$  se presentan las métricas asociadas de la siguiente forma:

1.  $\mathcal{F}^C = (1), (2), (4)$  y (5) en la Figura 2.5 la métrica puede tomar cualquier valor excepto cuando los autovalores  $\varepsilon_{2e_1}, \varepsilon_{2e_2}, \varepsilon_{2e_3}$  no son nulos. En este caso el valor de la métrica en esas raíces debe ser el mismo.

2.  $\mathcal{F}^C = (3)$  en la Figura 2.5

$$\varepsilon_{2e_1} = 0$$

- a)  $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ , no hay restricción para la métrica.
- b)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{2e_3}$ , las demás no tienen restricción.
- c)  $\varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_3}$ , las demás no tienen restricción.

$$\varepsilon_{2e_1} = 1$$

- a)  $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{2e_1}$
- b)  $\varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_3}$  y  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{2e_1}$  las demás no tienen restricción.
- c)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_3}$ , las demás no tienen restricción.
- d)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{2e_3} = \lambda_{2e_1}$  y  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_2}$ , las demás no tienen restricción.

$$\varepsilon_{2e_1} = -1$$

- a)  $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica
- b)  $\varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_3}$ .
- c)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ , no hay restricción para la métrica.

d)  $\varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_1} = -1$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_3} = \lambda_{2e_2}$ , las demás no tienen restricción.

3.  $\mathcal{F}^C = (6)$  en la Figura 2.5

a)  $\varepsilon_{2e_1} = 0$

- 1)  $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.
- 2)  $\varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1, \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{2e_2} = 0$ , las demás no tienen restricción.
- 3)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1, \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{2e_2} = \lambda_{2e_3} = 0$ , las demás no tienen restricción.

b)  $\varepsilon_{2e_1} = -1$

- 1)  $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.
- 2)  $\varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1, \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{2e_1} = 0$ , las demás no tienen restricción.
- 3)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1, \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3} = \lambda_{2e_2}$ .

4.  $\mathcal{F}^C = (7)$  en la Figura 2.5

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_2+e_3}$ .
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3} + \lambda_{e_2+e_3}$ .
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{2e_3}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .
- e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .
- f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\varepsilon_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .
- g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\varepsilon_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .
- h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .
- i) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_1-e_3}$ .
- j) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{e_2+e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- k) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} + \lambda_{e_2-e_3}$ .
- l) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .
- m) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} + \lambda_{e_2-e_3}$ .
- n) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .
- $\tilde{n}$ ) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .
- o) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_2+e_3}$ .
- p) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} + \lambda_{2e_2} = 2\lambda_{e_2-e_3}$ .
- q) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{2e_3}$ .

5.  $\mathcal{F}^C = (8)$  en la Figura 2.5  $\varepsilon_{2e_1} = 1$

a)  $\varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{2e_1}$

b)  $\varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$

6.  $\mathcal{F}^C = (9)$  en la Figura 2.5

a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_2+e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$ .

b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_2-e_3} + \lambda_{e_2+e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$

c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .

d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} + \lambda_{e_2-e_3}$ .

e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_2+e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} + \lambda_{e_2-e_3}$ .

f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{2e_3}$ .

g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$ .

h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} + \lambda_{e_2-e_3}$ .

i) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .

j) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\varepsilon_{2e_3} + \lambda_{e_2+e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .

k) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_2}$ .

l) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3}$ .

7.  $\mathcal{F}^C = (11)$  en la Figura 2.5 En cualquier caso se tiene que  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$

8.  $\mathcal{F}^C = (12)$  en la Figura 2.5 En cualquier caso se tiene que  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_2+e_3}$

9.  $\mathcal{F}^C = (13)$  en la Figura 2.5

a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.

b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$

c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .

d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.

e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} + \lambda_{e_2-e_3}$ .

f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \pm 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, 1, \varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .

g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$ .

h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$ .

i) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .

j) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .

k) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$ .

l) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$ .

m) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .

10.  $\mathcal{F}^C = (14)$  en la Figura 2.5

Para todos los casos se tiene que  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, -1, \varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ , no hay restricción para la métrica.
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .
- f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .
- h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- i) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .
- j) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$ .
- k) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- l) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .

11.  $\mathcal{F}^C = (15)$  en la Figura 2.5

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{2e_2}$ .
- h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- i) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- j) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- k) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- l) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_2}$ .
- m) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_2}$ .
- n) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- ñ) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- o) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{2e_3}$ .

- p) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}, \lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- q) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- r) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- s) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$ .
- t) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- u) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}, \lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- v) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- w) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- x) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{2e_3}$ .
- y) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , se tiene que  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{2e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$ .

12.  $\mathcal{F}^C = (16)$  en la Figura 2.5

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1-e_3}$ . Sin embargo

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ , no hay ninguna otra restricción para la métrica.
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$ .
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$ .

13.  $\mathcal{F}^C = (19)$  en la Figura 2.5

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$ .
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_3}$ .
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_3}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$ .
- e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_3}$ .
- f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$ .

14.  $\mathcal{F}^C = (20)$  en la Figura 2.5

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_2-e_3} + \lambda_{e_1+e_2}$ , Ahora bien

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0, 1$ , tenemos  $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1-e_3}$ .
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0, -1$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_2} - \lambda_{e_1+e_2}$ .

15.  $\mathcal{F}^C = (21)$  en la Figura 2.6

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_2-e_3} + \lambda_{e_1+e_2}$ , Ahora bien

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_2+e_3}$ .
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0 = \varepsilon_{2e_2}, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .

c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2-e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .

d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.

16.  $\mathcal{F}^C = (22)$  en la Figura 2.6

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_2-e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$ , Ahora bien

a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay ninguna otra restricción para la métrica.

b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0 = \varepsilon_{2e_2}, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3}$ .

c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_1-e_2}$ .

d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2+e_3}$

17.  $\mathcal{F}^C = (23)$  en la Figura 2.6

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$ , Ahora bien

a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$

b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0 = \varepsilon_{2e_2}, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_2}$ .

c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_1-e_2}$ .

d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} + \lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$

18.  $\mathcal{F}^C = (25)$  en la Figura 2.6

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{e_2+e_3}$ , Ahora bien

a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{e_2+e_3} = \lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$

b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = \pm 1$ , tenemos  $\varepsilon_{2e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$

c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .

d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} + \lambda_{2e_2} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .

e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} + \lambda_{e_1-e_3}$ .

f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} + \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_2+e_3}$ .

g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} + \lambda_{2e_2} = 2\lambda_{e_2-e_3}$ .

h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_2+e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1-e_3}$ .

i) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1-e_3} = 2\lambda_{e_2-e_3}$ .

j) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\varepsilon_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .

k) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1+e_3}$ .

l) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1-e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .

m) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3} = 2\lambda_{e_1-e_3}$ .

n) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1-e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .

- ñ) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_2+e_3}$ .
- o) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$ ,  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_2+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2-e_3}$ .
- p) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1+e_3}$ .
- q) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3} - \lambda_{e_1+e_3}$ .
- r) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_2-e_3}$ .
- s) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1+e_3}$ .
- t) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3} - \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_2+e_3} - \lambda_{e_2-e_3}$ .
- u) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2+e_3}$ .
- v) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1+e_3}$ .
- w) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , no hay restricción para la métrica.
- x) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = 1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1-e_3} - \lambda_{e_1+e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_2-e_3}$ .
- y) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = -1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1-e_3}$ .

 19.  $\mathcal{F}^C = (29)$  en la Figura 2.6

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_2-e_3} - \lambda_{e_1-e_3} \lambda_{e_1-e_2}$ , Ahora bien

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1-e_2}$
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0 = \varepsilon_{2e_2}, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1-e_2}$ .
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1-e_2} - \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{e_1+e_3} = \lambda_{e_1-e_3}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1-e_2} - \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$

 20.  $\mathcal{F}^C = (33)$  en la Figura 2.6

Para todos los casos se cumple  $\lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{e_2-e_3} + \lambda_{e_1-e_3}$ , Ahora bien

- a) Si  $\varepsilon_{2e_1} = \varepsilon_{2e_2} = \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{e_1-e_3} = \lambda_{e_1+e_2}$  y  $\lambda_{e_1-e_2} = \lambda_{e_1+e_2}$
- b) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0 = \varepsilon_{2e_2}, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$ .
- c) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_1-e_2}$ .
- d) Si  $\varepsilon_{2e_1} = 0, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$ , tenemos  $\lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1+e_3}$ ,  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_1-e_2}$  y  $\lambda_{2e_3} = \lambda_{e_1+e_3} + \lambda_{e_1-e_3}$
- e) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3} + \lambda_{e_1-e_3}$
- f) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 0, \varepsilon_{2e_3} = -1$  tenemos  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1+e_3}$ .
- g) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = 0$ , tenemos  $\lambda_{2e_1} = \lambda_{e_1+e_3} - \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1+e_2} + \lambda_{e_1-e_2}$ .
- h) Si  $\varepsilon_{2e_1} = -1, \varepsilon_{2e_2} = 1, \varepsilon_{2e_3} = -1$  tenemos  $\lambda_{2e_2} = \lambda_{e_1-e_3} + \lambda_{e_1-e_3}$  y  $\lambda_{2e_1} + \lambda_{2e_3} = 2\lambda_{e_1-e_3}$ .

---

# CONCLUSIONES

Entre los resultados que obtuvimos en este trabajo, destacamos los siguientes:

1. Probamos que la variedad bandera maximal  $\mathbb{F}$  asociada al álgebra de Lie de tipo  $C_3$  es una  $f$ -variedad  $(1, 2)$ -admisibles, es decir, admite métricas  $(1, 2)$ -simpléticas a partir del estudio de las condiciones necesarias y suficientes analizadas.
2. Hallamos las  $\mathcal{F}$  estructuras para  $C_3$  y encontramos para cada caso las métricas  $(1, 2)$ -simpléticas.

Se espera que este trabajo contribuya al estudio de las variedades bandera asociadas a álgebras de Lie de rango menor o igual a tres y sirva como base de futuros estudios referentes al tema.

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. BLACK, *Harmonic Maps into Homogeneous Spaces*, Pitman Research Notes, Math series 255. Longman, Harlow, 1991.
- [2] N. COHEN, C. J. C. NEGREIROS AND L. A. B. SAN MARTÍN , *Characterization of (1,2)- symplectic metrics on flag manifolds*, Contemporary Math. 288:300-303, 2002.
- [3] N. COHEN, C. J. C. NEGREIROS AND L. A. B. SAN MARTÍN , *A rank-three condition for invariant (1,2)- symplectic almost Hermitian structures on flag manifolds*, Bull. Braz. Math soc. New Series 33:49-73, 2002.
- [4] S. ISHIHARA AND K. YANO, *On Integrability conditions of a structure  $f$  satisfying  $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$* , Quart. J. Math. Oxford (2), **15**:222, 1964.
- [5] S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, *Foundations of differential Geometry*, Vol. 1, Interscience Publishers, 1963. 178
- [6] A. N. KOLMOGOROV AND A. P. YUSHKEVICH, *Mathematics of the 19<sup>th</sup> Century*, 1996.
- [7] M. PAREDES, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*, Tesis doctoral, Universidade Estadual de Campien las, Brasil, 2000.
- [8] S. PINZÓN, Y M. PAREDES, *Geometría de variedades bandera*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias, Vol. 28 (106) (2004), 123-134 .
- [9] S. PINZÓN, *Variedades Bandeira,  $f$ - Estructuras e Métricas (1,2)-Simpléticas*, Tesis Doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003
- [10] L. A . B. SAN MARTÍN, *Algebras de Lie*, Campinas - S.P., Editora da Unicamp, 1999.
- [11] L. A . B. SAN MARTÍN AND C. J. C. NEGREIROS, *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, Adv. Math., **178**: 277-310, 2003.