

Diseño de aprendizaje de la función lineal en grado noveno: un enfoque de modelación y prácticas variacionales

Rafael Hernando Sierra Jaimes

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciado en Matemáticas

Director

Dra. Edith Johanna Mendoza Higuera

Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A Dios, quien me acompañó día a día en este proceso. Él es mi mejor amigo, mi fuerza y mi guía; me ilumina y colma de sabiduría para alcanzar cada uno de mis sueños.

A mis nonos y a mis tías, quienes han sido mis mejores ejemplos a seguir. Sus consejos me dieron fortaleza, me animaron en los momentos difíciles y me guiaron para alcanzar este logro.

A mis padres, Hernando Sierra Rueda y Lina Fernanda Jaimes Cote, porque con su sacrificio, amor e incondicionalidad me brindaron el mejor regalo del mundo: la oportunidad de prepararme para servir y enseñar con amor a la sociedad.

A mi hermana, Daniela Fernanda Sierra Jaimes, quien con su compañía siempre tuvo palabras de amor y consejo para apoyarme cuando más la necesité. Gracias por ser una hermana ejemplar y por cada sonrisa que me regalaste, llenando mi corazón de tranquilidad y alegría.

A mi compañera de vida, Andrea Katherine Mejía Flórez, por acompañarme, aconsejarme, por apoyarme, por creer en mí, por confiar en mis palabras y en este proceso, por ser una mujer excepcional y por todo tu amor.

A mis profesores, quienes con su entrega, dedicación y exigencia forjaron en mí una personalidad curiosa, creativa e investigadora, y contribuyeron a que hoy sea una mejor persona y profesional.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a la Universidad Industrial de Santander por abrirme sus puertas y permitirme crecer no solo como profesional, sino también como persona. Gracias por convertirse en mi segundo hogar, por cada aprendizaje, experiencia y oportunidad vivida. Hoy me gradúo con orgullo y con el deseo de verla siempre grande, fuerte y pública, formando generaciones que transformen el país.

A mi directora de tesis, Dra. Edith Johanna Mendoza Higuera, una mentora excepcional. Gracias por tus consejos, por estar siempre dispuesta a orientarme, por enseñarme a ser un mejor docente y por todo el tiempo y compromiso que dedicaste para hacer posible este sueño.

Expreso mi más sincero agradecimiento a los docentes evaluadores Dr. Luis Ángel Pérez Fernández, Dra. Haided Lised Arciniegas Rueda y Dr. Mario Adrián Caballero Pérez, por su valioso apoyo, disposición y acompañamiento durante el desarrollo de esta investigación. Sus comentarios, correcciones y aportes fueron fundamentales para el mejoramiento y enriquecimiento de este trabajo, así como para mi crecimiento y enriquecimiento personal y profesional, contribuyendo significativamente a mi formación académica y humana.

A todos ustedes, ¡MUCHAS GRACIAS!

Tabla de Contenido

Introducción	11
1. Planteamiento del Problema.....	16
2. Justificación.....	23
3. Antecedentes	26
3.1 Enseñanza de la Función Lineal	26
3.2 Enseñanza del Proceso de Modelación	31
3.3 Enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación.....	38
3.3.1 Internacional.....	38
3.3.2 Nacional.....	41
3.3.3 Local	44
4. Marco Teórico	50
4.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa	50
4.2 Situaciones de variación y cambio.....	54
4.3 Proceso de Modelación	61
4.4 Situación de Aprendizaje	71
5. Metodología	74
5.1 Fase I. Revisión Bibliográfica.....	78
5.1.1 Cómo se aborda la función lineal	78
5.1.2 Caracterización de la función lineal desde las PV.....	82
5.1.3 Definición del tipo de tareas de modelación	93
5.2 Fase II. Diseño inicial de la situación de aprendizaje.....	101
5.2.1 Definición del contexto	101

5.2.2	Estructuración de los momentos y etapas del diseño de aprendizaje	103
5.2.3	Planteamiento de las actividades	108
5.2.4	Primer bosquejo del diseño de situación de aprendizaje	116
5.3	Fase III. Refinamiento del diseño	132
5.3.1	Evaluación del diseño de aprendizaje por docente experto	133
5.3.2	Análisis de las observaciones del docente evaluador	148
5.3.3	Modificación del primer bosquejo de aprendizaje	152
5.4	Fase IV. Reporte del diseño definitivo	164
5.4.1	Construcción del diseño definitivo de aprendizaje.....	165
5.4.2	Elaboración del informe para dar respuesta al objetivo de investigación ..	169
5.4.3	Entrega del diseño de aprendizaje final.....	172
6.	Conclusiones	200
7.	Recomendaciones.....	204
	Referencias Bibliográficas	206
	Apéndices	214

Lista de Tablas

Tabla 1. Niveles de desempeño prueba saber 11.....	19
Tabla 2. Tabla síntesis de la articulación entre los momentos de la situación de aprendizaje y las prácticas variacionales.....	83
Tabla 3. Tipos de tareas de modelación articuladas en los momentos del diseño	98
Tabla 4. Caracterización de las practicas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento I.....	110
Tabla 5. Caracterización de las prácticas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento II	112
Tabla 6. Caracterización de las prácticas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento III	113
Tabla 7. Caracterización de las prácticas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento IV	114
Tabla 8. Ejemplo momento I en el primer bosquejo de situación de aprendizaje.....	119
Tabla 9. <i>Representación gráfica momento II en el primer bosquejo de situación de aprendizaje</i>	124
Tabla 10. Representación gráfica situación momento IV en el primer bosquejo de situación de aprendizaje	130
Tabla 11. Rubrica de valoración por docente experto 1.....	135
Tabla 12. Rubrica de valoración por docente experto 2.....	141
Tabla 13. Caracterización del tipo de correcciones y ajustes sobre las valoraciones recibidas por docentes expertos	149
Tabla 14. Caracterización de los ajustes realizados al diseño de aprendizaje definitivo.	152
Tabla 15. <i>Ejemplo momento I en el diseño definitivo de situación de aprendizaje</i>	176
Tabla 16. Representación gráfica momento II en el diseño definitivo.....	184
Tabla 17. Tabla de gastos para Daniel y Laura	192
Tabla 18. Representación gráfica situación momento IV diseño definitivo	196

Lista de Figuras

Figura 1. Elementos del sistema referencial variacional.....	58
Figura 2. Ciclo de la Modelación	64
Figura 3. Categorías y subcategorías de una clasificación alternativa de tareas de modelación. .	65
Figura 4. Formas de implementación de la modelación en el aula	70
Figura 5. Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.	75
Figura 6. Etapas Metodológicas	77
Figura 7. Partes de una función lineal.....	80
Figura 8. Momentos para el estudio de la variación constante.	103
Figura 9. Relación entre razón de cambio y pendiente de la recta	123
Figura 10. Ilustración momento III	126
Figura 11. Ilustración gráfica servicio transporte domingos y festivos	126
Figura 12. Ilustración gráfica cobro recargo de taxi por tráfico.....	129
Figura 13. Relación entre razón de cambio y pendiente de la recta diseño definitivo.....	182
Figura 14. Ilustración gráfica precios sugeridos por horarios diseño definitivo.....	186
Figura 15. Ilustración gráfica servicio transporte domingos y festivos diseño definitivo	190
Figura 16. Ilustración gráfica cobro recargo de taxi por tráfico diseño definitivo	195

Lista de Apéndices

Apéndice A. Rubrica para valoración de SA.....	214
---	-----

Resumen

Título: Diseño de aprendizaje de la función lineal en grado noveno: un enfoque de modelación y prácticas variacionales

Autor: Rafael Hernando Sierra Jaimes

Palabras Claves: Función lineal, prácticas variacionales, pensamiento variacional y modelación matemática

Descripción:

La presente investigación propone el diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza de la función lineal en estudiantes de noveno grado, basada en la modelación matemática y las prácticas variacionales. La propuesta articula las etapas factual, procedimental y simbólica con las prácticas de comparación, seriación, predicción y estimación descritas por Caballero (2018). El estudio, de enfoque cualitativo, siguió una estrategia de diseño guiada por Camargo (2021), adaptada a los alcances de la investigación, con el propósito de plantear y valorar una propuesta que favoreciera la enseñanza de la función lineal mediante la modelación y las prácticas variacionales.

La investigación se fundamenta en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la situación de variación y cambio, la modelación matemática y las situaciones de aprendizaje. Metodológicamente, el trabajo comprendió la revisión bibliográfica, el diseño inicial de la propuesta, su refinamiento y la consolidación del diseño definitivo.

Los resultados muestran que la situación de aprendizaje integra contextos reales, herramientas tecnológicas, procesos de modelación y prácticas variacionales para abordar conceptos de la función lineal, como razón de cambio, pendiente e intercepto, mediante representaciones gráficas, tabulares y algebraicas. El análisis permitió reconocer su potencial didáctico para promover procesos de comparación, seriación, predicción y estimación, así como la problematización de situaciones contextualizadas. En este sentido, la propuesta aporta elementos para el diseño de experiencias de enseñanza orientadas a la participación activa, la construcción de significados y la articulación de la modelación matemática con las prácticas variacionales.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Edith Johanna Higuera Mendoza. Doctora en ciencias con especialidad en Matemáticas Educativa.

Abstract

Title: Designing Instruction on Linear Functions in Ninth Grade: An Approach Based on Modeling and Variational Practices.

Author: Rafael Hernando Sierra Jaimes

Key Words: Linear functions, variational problems, variational thinking, and mathematical modeling.

Description:

This study proposes the design of a learning situation for teaching linear functions to ninth-grade students, based on variational practices and mathematical modeling. The proposal integrates the factual, procedural, and symbolic stages with the variational practices described by Caballero (2018): comparison, seriation, prediction, and estimation. The study was conducted using a qualitative approach, employing a design strategy guided by Camargo (2021) and modified to suit the scope of the research. Its objective was to propose and evaluate a learning design that would facilitate the teaching of linear functions through modeling processes and variational practices.

The research is grounded in the Socio-Epistemological Theory of Mathematics Education, situations of variation and change, mathematical modeling, and learning situations. Methodologically, the study involved a literature review, the initial design of the proposal, its refinement, and the consolidation of the final design.

The results show that the learning situation integrates real-world contexts, technological tools, modeling processes, and variational practices to address concepts of linear functions—such as rate of change, slope, and y-intercept—through graphical, tabular, and algebraic representations. The analysis revealed its educational potential for promoting processes of comparison, ordering, prediction, and estimation, as well as the analysis of contextualized problems. In this regard, the proposal provides elements for designing teaching experiences focused on active participation, the construction of meaning, and the integration of mathematical modeling with variational practices.

* Degree Work

¹ Science faculty, Department of Mathematics. Advisor: Edith Johanna Higuera Mendoza, Ph.D. in Science with a specialization in Mathematics Education.

Introducción

En los últimos años, la educación matemática ha venido enfrentando el reto de transformar las prácticas tradicionales de enseñanza para responder a las necesidades y realidades de los estudiantes. Actualmente, no basta con aprender procedimientos o memorizar fórmulas; se requiere que los estudiantes desarrollen competencias que les permitan interpretar situaciones, analizar información y tomar decisiones frente a problemas de su entorno. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006) señala que las competencias comprenden un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que favorecen la resolución de situaciones de la vida cotidiana. Del mismo modo, Díaz-Pinzón (2021) y Solarte (2018) resaltan la importancia de promover aprendizajes comprensivos que fortalezcan el pensamiento crítico y la capacidad de actuar frente a situaciones retadoras. Por ello, la enseñanza de las matemáticas debe orientarse hacia la formación de ciudadanos capaces de comprender y transformar su realidad mediante el uso consciente y funcional del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, las competencias matemáticas adquieren un papel fundamental en la formación integral de los estudiantes, pues favorecen el desarrollo de habilidades relacionadas con el razonamiento, la interpretación, la argumentación y la resolución de problemas. Sin embargo, como plantea Arciniegas (2023), la enseñanza de las matemáticas no puede centrarse únicamente en el dominio de procedimientos, ya que el aprendizaje pierde sentido cuando los estudiantes no logran comprender el significado de lo que hacen. Por esta razón, resulta necesario equilibrar el saber conceptual y el saber procedimental, de manera que los estudiantes comprendan el porqué de los conceptos y, al mismo tiempo, puedan aplicarlos en diferentes contextos. En particular, el concepto de función constituye uno de los ejes fundamentales del pensamiento matemático, debido a que permite analizar fenómenos de variación y cambio presentes en situaciones físicas, sociales y naturales (Yara, 2010; Tiburcio, 2017; Polo, 2021).

En este contexto, la modelación matemática se presenta como una herramienta pedagógica que posibilita acercar las matemáticas a la experiencia cotidiana de los estudiantes. A través de situaciones contextualizadas, los estudiantes pueden reconocer la utilidad de los conceptos matemáticos y construir aprendizajes con mayor sentido. Villa et al. (2008) señalan que la

modelación favorece la articulación entre la teoría y la práctica, permitiendo que las matemáticas se conviertan en una herramienta para comprender y explicar situaciones reales. Asimismo, Caballero (2018) destaca la importancia de las prácticas variacionales —comparación, seriación, predicción y estimación— en la construcción de la noción de variación y en el estudio de las funciones. En consecuencia, trabajar desde situaciones cercanas e interesantes para los estudiantes favorece el desarrollo de estrategias variacionales y promueve una participación más activa en el aula.

A partir de estas consideraciones, la presente investigación se orienta al diseño y valoración de una propuesta de aprendizaje para la enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación y las prácticas variacionales con estudiantes de noveno grado. La intención es generar espacios de aprendizaje donde los estudiantes puedan construir significados alrededor de la variación y el cambio mediante el análisis de situaciones cercanas a su contexto. De esta manera, se busca favorecer el desarrollo de estrategias variacionales, fortalecer competencias matemáticas y promover una comprensión más reflexiva, funcional y significativa de la función lineal. Asimismo, la propuesta pretende aportar a la reflexión sobre prácticas de enseñanza que vinculen las matemáticas escolares con situaciones reales, permitiendo que los estudiantes reconozcan el sentido y la utilidad del conocimiento matemático en su vida cotidiana.

Finalmente, se describe a continuación, la secuencia de capítulos que componen esta investigación.

En el capítulo I se presenta el planteamiento del problema, al exponer la importancia de la matemática como pilar fundamental en la formación de los estudiantes, debido a su aplicabilidad en la vida cotidiana y a su contribución en el desarrollo de habilidades cognitivas, críticas y reflexivas necesarias para la participación activa en la sociedad. Además, se analiza el panorama educativo colombiano frente al desarrollo de competencias matemáticas, especialmente en el pensamiento variacional y el aprendizaje de la función lineal, evidenciando las dificultades que presentan los estudiantes en la interpretación, representación, modelación y resolución de situaciones relacionadas con este objeto matemático. Por último, se destacan diversos factores asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la necesidad de

promover estrategias pedagógicas que favorezcan la comprensión, la modelación y el desarrollo de competencias matemáticas vinculadas con contextos reales.

En el capítulo II se desarrolla la justificación de la investigación, al destacar la importancia de fortalecer las competencias matemáticas como eje fundamental en la formación integral de los estudiantes, permitiéndoles enfrentar situaciones problemáticas de manera crítica, reflexiva y autónoma. Además, se resalta la relevancia del concepto de función lineal y del pensamiento variacional en la comprensión, modelación y análisis de fenómenos presentes en diferentes contextos de la vida cotidiana y académica. Por último, se enfatiza en la necesidad de promover estrategias de enseñanza basadas en procesos de modelación matemática y prácticas contextualizadas, orientadas a favorecer el aprendizaje significativo y el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de noveno grado.

En el capítulo III se presenta la revisión de antecedentes de la investigación, mediante el análisis de diferentes estudios y aportes teóricos relacionados con la enseñanza de la función lineal, el pensamiento variacional y el proceso de modelación matemática como estrategia para fortalecer el aprendizaje y el desarrollo de competencias matemáticas. Además, este capítulo se estructura en tres subcapítulos: enseñanza de la función lineal, orientado al análisis de investigaciones sobre las formas de representación, comprensión y enseñanza de este objeto matemático; enseñanza del proceso de modelación, enfocado en las concepciones, características y aplicaciones de la modelación matemática en los contextos educativos; y enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación, donde se recopilan estudios que integran ambos elementos dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por último, este último subcapítulo se organiza en tres categorías de análisis: internacional, nacional y local, con el propósito de reconocer tendencias investigativas, enfoques metodológicos y experiencias pedagógicas que sustentan y orientan el desarrollo de la presente investigación.

En el capítulo IV se presentan los fundamentos teóricos que orientan la investigación y sustentan la construcción del diseño didáctico alrededor de la función lineal desde la modelación matemática y las prácticas variacionales. En primer lugar, se aborda la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual permite comprender la construcción social del conocimiento matemático y la importancia de las prácticas sociales en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Posteriormente, se desarrollan los aspectos relacionados con las situaciones de variación y cambio, destacando el pensamiento variacional y las prácticas asociadas al estudio de fenómenos cambiantes. Seguidamente, se presenta la modelación matemática como un proceso que favorece la interpretación, representación y análisis de situaciones del contexto mediante herramientas matemáticas. Finalmente, se estudian las situaciones de aprendizaje como escenarios que posibilitan la construcción, resignificación y uso del conocimiento matemático desde contextos significativos para los estudiantes.

En el capítulo V se expone la metodología utilizada para desarrollar la investigación, la cual se encuentra orientada por la propuesta metodológica de Camargo (2021) y estructurada en cuatro fases fundamentales que permitieron dar respuesta al objetivo general del estudio. La primera fase corresponde a la revisión bibliográfica, organizada en tres subcategorías: cómo se aborda la función lineal, caracterización de la función lineal desde las prácticas variacionales y definición del tipo de tareas de modelación matemática, permitiendo consolidar los fundamentos teóricos y didácticos de la investigación. La segunda fase se denominó diseño inicial de la situación de aprendizaje y se estructuró a partir de la definición del contexto, la organización de los momentos y etapas del diseño de aprendizaje, el planteamiento de actividades y la construcción del primer bosquejo de la situación de aprendizaje. Posteriormente, la tercera fase correspondió al refinamiento del diseño, donde se desarrolló la evaluación del diseño de aprendizaje por docentes expertos, el análisis de las observaciones realizadas y la modificación del primer bosquejo de aprendizaje con el propósito de fortalecer la coherencia didáctica y matemática de la propuesta. Finalmente, la cuarta fase denominada reporte del diseño definitivo comprendió la construcción del diseño definitivo de aprendizaje, la elaboración del informe para dar respuesta al objetivo de investigación y la entrega de la versión final de la situación de aprendizaje, consolidando así una propuesta orientada a la enseñanza de la función lineal desde las prácticas variacionales y la modelación matemática.

En el capítulo VI sobre las conclusiones se destacan los principales aportes de la investigación en torno a la enseñanza de la función lineal desde una perspectiva contextualizada, variacional y de modelación matemática. Asimismo, se resalta la importancia de promover procesos de aprendizaje que permitan al estudiante comprender el cambio y la variación a partir de situaciones cercanas a su realidad, favoreciendo la construcción de significados matemáticos más

comprensivos y funcionales. De igual manera, se reconoce el valor de las prácticas variacionales, la integración de herramientas tecnológicas y el papel mediador del docente como elementos que fortalecen la participación, la reflexión y el razonamiento matemático en el aula. Finalmente, se subraya que el diseño de aprendizaje construido constituye una propuesta pedagógica coherente y significativa, orientada a consolidar una enseñanza de las matemáticas más humana, contextualizada y centrada en la comprensión de fenómenos reales desde la función lineal.

En el último, correspondiente al capítulo VII sobre las recomendaciones se destacan orientaciones dirigidas al fortalecimiento de futuras investigaciones y propuestas pedagógicas en la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, se resalta la importancia de promover estrategias de aprendizaje contextualizadas, participativas e innovadoras que favorezcan una comprensión más significativa del conocimiento matemático y respondan a las necesidades reales de los estudiantes.

1. Planteamiento del Problema

La matemática es pilar de la educación; debido a su estrecha aplicabilidad en la vida del ser humano y a sus aportes en el desarrollo de habilidades cognitivas.

Numerosas investigaciones en el ámbito matemático destacan estas ideas, por ejemplo, Solorzano (2013) afirma que la matemática se encuentra relacionada en todas las líneas del conocimiento en que se desenvuelve el ser humano. Por otro lado, Sorando (2017) señala algunas áreas de interés donde los docentes de matemáticas en las aulas de clase pueden sensibilizar a los estudiantes en aspectos cotidianos que influyen en sus vidas y que pasan inadvertidos como los sistemas de transporte, la pensión de sus loncheras escolares, las noticias de fraude y corrupción, los datos de desigualdad social, el recibo de la luz, las ofertas comerciales, la dieta alimentaria y los concursos de TV. También habla de aquellos elementos de la cotidianidad que no afectan directamente la vida de los estudiantes pero que serían de interés como el caso del reciclaje de residuos, la geometría de los envases y de logotipos, etiquetado de productos de consumo, la regulación del tráfico, los eventos mundiales de fútbol, los juegos de realidad virtual (Pokemon Go y los Spinner), los deportes, los anuncios comerciales, la fotografía y la lotería. Finalmente se hacen mención de otros investigadores que ligán las diferentes áreas con una actividad específica de la matemática; cómo en la medicina Mejía y Pino (2021), en la música Martínez (2020), en la economía Vargas y Velázquez (2013), en la literatura y el cine Benelli (2012), en el análisis deportivo Seoane y Quesada (2018), la modelización de epidemias Ortigoza et al. (2020), entre muchas otras.

De lo anterior acabamos de ver una de las razones de la importancia de estudiar matemáticas la cual corresponde a su aplicabilidad con los quehaceres de la vida, sin embargo, esta no es la única razón; en los niños y adolescentes, aprender matemáticas fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas, como la atención, la memoria, el razonamiento lógico y el pensamiento crítico (Antolín, 2024) habilidades necesarias para enfrentar la vida adulta y sobre todo para generar ciudadanos felices, autónomos, democráticos y competentes frente a los retos y dificultades que se van generando en el diario vivir. Solórzano (2013) afirma que por medio de la matemática podemos

comprender el mundo que nos rodea y tomar decisiones conscientes. Por último, otros aportes de la matemática al desarrollo cognitivo tienen que ver con que fortalece la capacidad de analizar, discutir, decidir, argumentar, demostrar y resolver problemas Defaz et al. (2016), a su vez (Cabanes, 2017 como se citó en Gonzales, 2005) reporta que desde la matemática se contribuye a la expresión oral, escrita y al desarrollo de operaciones mentales tales como: analizar, sintetizar, generalizar, abstraer, desarrollo del pensamiento heurístico, flexible y creativo.

Por lo tanto, no debe caber duda del aporte de la matemática a la vida del ser humano y los beneficios que a través de su aprendizaje se proporcionan a la sociedad; pues el desarrollo de habilidades mentales genera nuevas formas de democratizar la sociedad. Tal como lo menciona el MEN (2003), uno de sus tantos propósitos es posibilitar la toma de decisiones informada, para proporcionar razones justificadas, para debatir o refutar ideas, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y finalmente para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad en sus diferentes realidades (p.48).

En Colombia se mide el nivel de aprehensión de los conocimientos matemáticos por medio de la aplicación de pruebas nacionales e internacionales tales como son las pruebas saber implementadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES] y Program for International Student Assessment [PISA, por sus siglas en ingles]. El objetivo de estas pruebas es conocer la capacidad de los estudiantes para participar en la generación, evaluación y mejora de ideas asociadas a situaciones y retos para la vida Vanegas (2023). Es decir, en los factores que van a ayudar a los jóvenes a prepararse y adaptarse a un mundo cambiante y exigente en trabajadores flexibles, propositivos e innovadores Casas (2024). Lo anterior se resume en comprobar el grado de desarrollo de competencias en los estudiantes. Pero qué significa que un estudiante sea competente, sí toma la acepción en relación con el manejo adecuado de conocimiento que va adquiriendo un estudiante por medio de los planes de educación nacional para enfrentar situaciones problemáticas en su realidad Díaz-Pinzón (2021). Ahora bien, vale la pena cuestionarnos sobre las competencias en matemáticas y su desarrollo desde las aulas. Solarte (2018) hace claridad sobre ser matemáticamente competente y lo define cómo todo concepto, procedimiento y actitud distinga y permita desarrollar en los estudiantes el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo, por qué y para qué hacerlo (p.8), en cada una de las actividades planeadas en un curso escolar y

fuera de ella. Sin embargo, los resultados de dichas pruebas muestran un panorama crítico para Colombia, por ejemplo en las pruebas PISA del 2022, Colombia se ubicó en el puesto 51 de 81 naciones que presentaron dichas pruebas, y su puntaje en las pruebas de matemáticas quedó por debajo del promedio de la OCDE, solo el 29% de los estudiantes logró al menos el nivel 2 de competencia y solo un 1% de la población logró llegar a los niveles 5 y 6 en las pruebas de matemáticas MÁS COLOMBIA (2024). Es decir, los estudiantes responden adecuadamente a preguntas en relación con los algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o conversiones, además pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren de inferencias directas, pero se ven reducidos en la capacidad de interpretar, formular, proponer, argumentar y emitir razonamientos lógicos en soluciones prácticas y/o novedosas. También se ven limitados en aplicar su entendimiento y comprensión para desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas y finalmente, reflejan escasa habilidad para formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y sus adecuaciones a las situaciones originales.

Por otro lado, el examen saber 11 en cuanto a la prueba en matemáticas se compone de tres categorías las cuales son estadística, geometría y álgebra y cálculo. En lo que concierne a esta investigación, se analizan los conceptos matemáticos correspondientes al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. En Colombia, un estudiante que este finalizando su bachillerato deberá manejar una serie de conceptos propios del pensamiento variacional los cuales a grandes rasgos son: la fracción, la razón y proporción, las igualdades y desigualdades, las funciones en todas sus categorías, las sucesiones, los límites, la razón de cambio y otras relaciones lineales y afines. Estos conceptos matemáticos se evalúan por medio de situaciones y contextos familiares o personales, laboral o ocupacional, social y matemático o de las ciencias. Estos conocimientos se evalúan por medio de la aplicación de la prueba saber 11 donde el estudiante deberá interpretar y representar, formular y ejecución, argumentar ICFES (2024), demostrando así comprensión de los conceptos, interés y actitud matemática, capacidad para aplicar conocimientos, formas de comunicar, interpretar, plantear y resolver problemas. Además, la prueba saber 11 tiene cuatro niveles de desempeño para matemáticas donde se medirá el nivel de actitudes de los estudiantes al enfrentarse a diferentes conceptos, situaciones y contextos como los anteriormente

descritos. A continuación, se cita lo que un estudiante en el nivel de desempeño más alto (el cuarto) deberá evidenciar.

Tabla 1. *Niveles de desempeño prueba saber 11*

Nivel 1	● Lee información puntual relacionada con situaciones cotidianas y presentada en tablas o gráficas con escala explícita, cuadrícula o, por lo menos, líneas horizontales.
Nivel 2	● Compara datos de dos variables presentes en una misma gráfica. ● Identifica valores o puntos representativos en diferentes tipos de registro a partir del significado que tienen en la situación. ● Toma decisiones sobre la veracidad o falsedad de una afirmación cuando esta se puede explicar verbalizando la lectura directa que se hace de la información.
Nivel 3	● Selecciona la gráfica correspondiente a la información de una tabla, o a partir de verbalizaciones teniendo en cuenta para la selección la escala, el tipo de variable y el tipo de gráfica. ● Compara información gráfica que requiere algunas manipulaciones aritméticas. ● Justifica afirmaciones utilizando planteamientos y operaciones aritméticas o haciendo uso directo de un concepto, es decir, a partir de un único argumento. ● Identifica información relevante cuando el tipo de registro contienen información de más de tres categorías. ● Hace manipulaciones algebraicas sencillas.
Nivel 4	● Resuelve problemas que requieren interpretar información de eventos dependientes. ● Resuelve problemas que requieren construir una representación auxiliar (gráfica y fórmulas) como paso intermedio para su solución. ● Modela usando lenguaje algebraico información dada en lenguaje natural, tablas o representaciones geométricas. ● Manipula expresiones algebraicas o aritméticas haciendo uso de las propiedades de las operaciones. ● Modela fenómenos variacionales no explícitos haciendo uso de lenguaje simbólico o gráficas. ● Justifica si hay falta de información en una situación problema para tomar una decisión. ● Toma decisiones sobre la veracidad o falsedad de una afirmación cuando requiere el uso de varias propiedades o conceptualizaciones formales.

Nota: tomado de la página principal del ICFES. Niveles de desempeño de la prueba en matemáticas saber 11 .(Icfes, 2022, p.1-4).

Teniendo claro el anterior panorama descrito sobre el aprendizaje de las matemáticas en Colombia y los retos que se deben trazar se hace necesario indagar sobre las posibles dificultades que presentan los estudiantes para comprender los objetos de estudio asociados al pensamiento variacional y específicamente en el concepto de función lineal, su representación, propiedades y características.

El aprendizaje de las matemáticas desde una mirada constructivista es un proceso de constante reflexión y modificación de presaberes, que en la medida que se suman nuevas experiencias y se formalizan conocimientos se va ampliando las estructuras mentales llegando así al nuevo conocimiento (Algar, 2020). Por lo tanto, a continuación, analizaremos algunos factores que están contribuyendo con la problemática del aprendizaje de las matemáticas y posteriormente se mencionará algunos investigadores que destacan dificultades existentes entre el pensamiento variacional y la función lineal.

El pensamiento variacional corresponde a una forma de razonar matemáticamente asociado al estudio del cambio y la variación Gómez (2013), a su vez Vasco (2006) describe este pensamiento como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad. Por último, el MEN (2006) identifica algunas tareas relacionadas con el pensamiento variacional las cuales están relacionadas con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. También tiene que ver con analizar la tendencia de variables, pronosticar resultados a partir de patrones, medir variables y modelar matemáticamente a partir de la covariación.

Algunos autores identifican determinadas dificultades que se tienen sobre el concepto de función lineal como señala Ospina (2012) quien afirma que trabaja de una manera estática, donde el estudiante lo que hace es memorizar una fórmula (cita a Vasco, 1999); aspecto que, según la autora, le está quitando importancia como herramienta que permite analizar fenómenos de la vida

real. Otros autores como Guzmán y Vega (2016) analizaron las dificultades de los estudiantes a la hora de utilizar diferentes representaciones y concluyeron que los estudiantes muestran dificultades tanto en la interpretación como en la interacción entre los registros algebraico, gráfico y tabular. De igual forma, López y Moguel (2008) destacan que los estudiantes conciben la función lineal como una ecuación e identifican variables dependientes como independientes y viceversa, a su vez Alpizar (2018) señala errores de cálculos y asociaciones incorrectas, Salazar (2018) identifica problemas en la interpretación en los estudiantes, también señala que hay dificultad para ubicar en el plano cartesiano respecto al origen del sistema y dudas para identificar la abscisa y la ordenada, afirmando que no se tiene claridad en estos conceptos por parte de los estudiantes, de igual forma Yara (2010) menciona problemas en los presaberes relacionados con la función lineal ya que aunque estos se van construyendo desde quinto primaria muchos estudiantes llegan a noveno bachillerato con grandes falencias. Por último, Solarte (2018) señala que el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal queda reducido al tratamiento de la función $y = f(x) = kx + b$ donde la importancia radica en calcular los valores de la pendiente y el corte en el eje de las ordenadas, también en encontrar puntos $P(x, y)$ para representarlos en el plano cartesiano quedando el proceso incompleto puesto que no se desarrollan habilidades de razonamiento acerca de la variación entre magnitudes sino se centra la enseñanza en la mecanización de procedimientos y en su representación gráfica.

Por otro lado, otros autores resaltan la importancia de estudiar la función lineal, como es el caso de Giraldo (2012) quien destaca que se puede usar en situaciones diversas de variación que involucren crecimientos lineales, también Muñoz, Piedrahita y Jessie (2012) concluyen que las funciones lineales son de vital importancia y con una adecuada interpretación se pueden resolver problemas del contexto real, por ello hay que motivar al alumno para que aprenda a identificar situaciones que representen fenómenos lineales aplicando métodos matemáticos en la construcción de soluciones, Acosta y Joya (2013) destacan la necesidad del diseño de actividades que lleven a un manejo de la función lineal como un objeto, y que se tenga una mirada más estructural y menos operativa, a su vez Ibarra y Moreno (2010) proponen una manera de aproximarse al objeto matemático función lineal por medio del desarrollo de regularidades, quienes consideran que identificando los criterios que rigen las reglas de formación se puede llegar al patrón que se está repitiendo, permitiendo, de esta manera, un acercamiento a un caso particular de la función lineal

como lo es la proporcionalidad directa simple. Los autores concluyen qué sin involucrar un lenguaje simbólico, permite entender con mayor claridad las relaciones entre variables dependientes e independientes.

Finalmente, con respecto al proceso de modelación autores como Villa et al. (2008) señalan que a pesar de que se estableció la necesidad de trabajar los procesos de modelación para el desarrollo de las competencias matemáticas, estos procesos cumplieron más de 25 años de estar incluidos en los documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional y se evidencia que casi nunca se realizan en las aulas de clase por factores relacionados con el tiempo, conocimiento de los docentes, diseño curricular, materiales disponibles, metodologías establecidas, entre otras.

Añade que predomina una mirada de la matemática como un área formal y abstracta constituida por definiciones, axiomas e ideas comprimidas y “exactas” cuya aplicación se encuentra en un conjunto reducido de situaciones artificiales que, en algunos casos, poco o nada tiene que ver con la realidad (Villa et al., 2008, p.1).

En consecuencia, este panorama contribuye a la formación de bachilleres con un desarrollo insuficiente de las competencias matemáticas necesarias para desenvolverse de manera crítica y reflexiva en los diferentes contextos de su vida cotidiana. A su vez, refuerza la percepción de las matemáticas como un conocimiento abstracto, descontextualizado y de escasa utilidad, lo que incide negativamente en el interés y la motivación de los estudiantes hacia su aprendizaje. A estas dificultades se suman las limitaciones para interpretar situaciones del entorno, establecer relaciones entre los fenómenos y los conceptos matemáticos, traducir información de contextos reales al lenguaje matemático, seleccionar herramientas que permitan modelar y analizar dichas situaciones, así como argumentar y participar activamente en la construcción de soluciones. Frente a este escenario, resulta pertinente replantear las estrategias de enseñanza del pensamiento variacional y, en particular, del concepto de función lineal, favoreciendo propuestas que articulen las matemáticas con situaciones significativas de la realidad y promuevan el desarrollo de competencias que trasciendan el ámbito escolar.

2. Justificación

En la actualidad, hablar de competencias en educación es un campo amplio y bien estudiado por varios autores frente al propósito de ir actualizando las dinámicas y herramientas para mejorar la educación en la enseñanza y/o el aprendizaje. Empezando por el MEN (2006) quien nos dice que las competencias se deben entender como el conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes que permiten a una persona resolver situaciones problemáticas para la vida. Otros autores como Díaz-Pinzón (2021) y Solarte (2018) nos hablan sobre desarrollar un aprendizaje comprensivo para generar en los estudiantes habilidades críticas para la toma de decisiones y acciones frente a situaciones retadoras modeladas dentro y fuera del aula. Por otro lado, (DGómez, 2019) aporta la noción de que las competencias son un conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes que están relacionadas entre sí y que permite a una persona comprender qué pasa, saber hacer y saber proceder en la solución a la situación, también se le vincula con el cuándo, cómo y por qué utilizar determinado conocimiento. Por ende, podemos ver cómo las tres dimensiones saber ser, saber conocer y saber hacer consolidan el núcleo más importante para construir un aprendizaje significativo y dotan de herramientas al ser humano para enfrentarse a situaciones problematizadoras.

Desde esta perspectiva, las competencias matemáticas constituyen un componente esencial de la formación integral, pues brindan a los estudiantes herramientas para comprender su entorno, analizar situaciones, tomar decisiones fundamentadas y responder a los desafíos de la vida cotidiana, así como a las exigencias de los ámbitos académico y profesional. Alcanzar este propósito requiere que la enseñanza de las matemáticas promueva un equilibrio entre la comprensión de los conceptos y su aplicación en contextos reales. En este sentido, Arciniegas (2023) señala que no debe existir un desequilibrio entre el saber conceptual y el saber procedimental, ya que ambos se complementan y resultan indispensables en la construcción del conocimiento. Mientras el saber conceptual permite comprender qué se aprende, por qué se aprende y cuál es su sentido, el saber procedimental posibilita poner ese conocimiento en acción mediante el desarrollo de habilidades para describir, analizar, comparar, modelar, realizar predicciones,

argumentar y proponer soluciones pertinentes frente a las diversas situaciones que plantea la realidad.

Como auxiliar docente en matemáticas, observé que no se puede limitar el quehacer matemático a un aprendizaje teórico, por el contrario, se debe proponer una serie de actividades que permitan abordar una matemática activa, comprensiva y funcional, que impacte positivamente en el saber de los estudiantes y les permita desarrollar competencias matemáticas para tomar decisiones en las situaciones modeladas desde la variación y el cambio.

Autores como Yara (2010), Tiburcio (2017), Arciniegas (2023) y Polo (2021) mencionan aspectos relevantes sobre la importancia del concepto de función, puesto que es considerado como uno de los temas más importantes dentro y fuera de la matemática. Esto se debe en primer lugar a que a través de ella se puede explicar o modelar diferentes fenómenos de la naturaleza (físicos, biológicos y sociales) para llegar a comprenderlos y predecirlos a través de la modelación matemática; segundo porque fomenta el desarrollo de estrategias variacionales y permite analizar su comportamiento en relación con el cambio y la variación predictiva, también permite comparar según el tipo de modelo al que se adapte la situación, se categorizan en modelos linealmente y no lineal. Por último, Caballero (2018) señala que es importante comprender cómo los estudiantes se apropian de la noción de variación, pues este aprendizaje trasciende en el tiempo y en la medida que se va profundizando en su estudio, siendo este concepto matemático la base para llegar a comprender conceptos superiores como, por ejemplo, la geometría analítica, la estadística, las funciones trigonométricas y el cálculo.

Sabemos cómo profesores que la enseñanza en las aulas de clase no se puede reducir netamente en dar contenidos, sino que deben responder al desarrollo de competencias matemáticas, dicho de otra forma deben responder al desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes frente a nuevas situaciones que se adapten a las realidades de los estudiantes, tal y como cita Arciniegas, 2023 a Cordero et al. (2015) “lo que se aprende en la escuela debe tener relación con la vida cotidiana del ciudadano”. Así como la epistemología de la matemática nos enseñó que la matemática nació de la necesidad de dar solución a problemas cotidianos es por este mismo camino que se propone aprovechar el proceso de modelación matemática como una herramienta

fundamental para conectar, motivar y relacionar el aprendizaje de los conceptos teóricos con los prácticos bajo situaciones cotidianas.

Villa et al. (2008) señala que el proceso de modelación matemática se ha venido consolidando como una herramienta que posibilita la reflexión y el diseño de situaciones que permiten materializar todas estas relaciones (teórica práctica) en el aula de clase.

Por lo tanto, el presente trabajo busca generar una estrategia de enseñanza y aprendizaje que lleve a los estudiantes a comprender, construir, trascender y significar el concepto de función lineal ligado a la variación y el cambio abordados desde el proceso de modelación de situaciones innovadoras y contextualizadas para fortalecer las competencias matemáticas mencionadas en los documentos curriculares a nivel nacional.

Por ello este estudio busca dar respuesta a la pregunta:

¿Cómo promover la enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación para fomentar el desarrollo de estrategias variacionales en estudiantes de noveno grado?

Y para ello se propone como objetivo general:

Plantear y valorar un diseño de aprendizaje que apoye la enseñanza de la función lineal a través del proceso de modelación y las prácticas variacionales con estudiantes de noveno grado.

3. Antecedentes

En este apartado se reportan algunas investigaciones que aportan significativamente al desarrollo de la presente investigación. A lo largo de este capítulo se referencian trabajos académicos categorizados en tres subcapítulos, que sirven como sustento teórico para validar el objetivo del presente informe. El primer subcapítulo, se relaciona con documentos enfocados en la enseñanza de la función lineal, específicamente se pretende hacer un seguimiento a la manera cómo se enseña este objeto matemático. El segundo, tiene como objetivo comprender en qué consiste el proceso de modelación y cómo se está aplicando en los procesos de enseñanza. Finalmente, el tercer subcapítulo da cuenta de cómo se enseña la función lineal enfocado en el proceso de modelación.

3.1 Enseñanza de la Función Lineal

Dentro de las investigaciones revisadas, se encontró un alto número centradas en el uso de tecnologías para favorecer la enseñanza de la función lineal, otras vinculadas con la modelación y otras con el análisis de textos escolares.

Las vinculadas con el uso de tecnología, privilegian a herramientas como winplot (Caballero et al, 2021).

Caballero et al. (2021) proponen enseñar la función lineal a partir de la estrategia didáctica desarrollada mediante herramientas TICS. Los investigadores implementaron el uso del software WINPLOT para llevar a cabo el aprendizaje de la función lineal con estudiantes de primer semestre de la facultad de Ciencias Empresariales y Económicas de la Universidad de Magdalena. Dentro de sus conclusiones indican que esta dinámica de trabajo permitió observar sus procedimientos y apreciar cómo razonan, además que esta estrategia favoreció su desempeño académico evidenciado en la observación de lo alcanzado por el grupo experimental con respecto al grupo de control.

Polo (2021) implementa actividades didácticas con el uso de tecnologías para propiciar una conceptualización más amplia sobre la función lineal, que no se limite únicamente al dominio procedimental.

El autor diseña e implementa actividades didácticas dirigidas para analizar el desarrollo de la relación entre variables y función lineal; para ello da prioridad al trabajo físico de los estudiantes, a la identificación intuitiva de variables, al análisis de la relación entre variables, al bosquejo de gráficas, así como un específico trabajo de confrontación entre ideas iniciales y los resultados obtenidos a través del apoyo del software Tracker y tabletas electrónicas. Polo (2021) concluye que los estudiantes lograron dar sentido a las variables involucradas y pasó de ser una simple etiqueta a expresar un cierto tipo de relación entre variables abstraída de representaciones como las expresiones algebraicas, tablas o gráficas. También lograron establecer una percepción de movimientos y establecer una conexión muy estrecha entre la conciencia de estos movimientos, las variables y la función lineal. Finalmente se observó que los estudiantes superaron algunas dificultades en el tránsito de representaciones, debido a dos factores, primero una consistente formulación de la idea de relación de variables en las primeras fases del trabajo (tiempo y distancia), y el segundo, la actividad de predicción de gráficas permitió fortalecer la conexión con la experiencia física, con las tablas y gráficas en el software.

Riveros (2011) afirma que el uso de las tecnologías puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas, posibilita el acceso a modelos visuales, así como la capacidad para ampliar el rango de los problemas a los que puede acceder, y fomenta el nivel de compromiso y apropiación de ideas matemáticas abstractas, pues las tecnologías de la información y la comunicación brindan tal versatilidad que otros medios no pueden ofrecer.

Tiburcio (2017) realiza un estudio donde describe y analiza la organización matemática de los objetos función lineal y función afín en un libro de texto del segundo año de educación secundaria en Perú que son dados a docente y estudiantes de colegios públicos a nivel nacional. Para realizar este estudio se consideraron investigaciones relacionadas a los objetos matemáticos función lineal y función afín, según las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan al desarrollo de problemas de dichos objetos.

El autor de la investigación analizó los elementos que proporcionaron las tareas, los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría (elementos que componen una organización matemática desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard). Además, tomó como referencia el Diseño Curricular Nacional del Perú (2009) y tesis doctorales para analizar el contenido de cada uno de los problemas presentados en el libro de texto que tratan la función lineal y la función afín. Finalmente, presentó un análisis sobre el grado de completitud de las organizaciones matemáticas locales en estudio en el libro de texto Matemática 2 secundaria.

Entre las conclusiones, se destacan: el libro de texto presenta tareas que hacen referencia a la interpretación y justificación de la función afín, pero no se observa la comparación entre las técnicas presentes; también identificamos tareas aisladas debido a que el libro de texto no presenta técnica alguna para las tareas en particular. También el texto presenta tareas en las que se puede observar cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y tabular; sin embargo, el texto no hace referencia a la representación de la función afín más adecuada según la técnica usada. En el texto se identificó que presenta cinco ejercicios propuestos con tareas inversas. Asimismo, se detallaron tareas que llevan a la modelización, es decir, tareas dadas en lenguaje natural para las que se solicita su representación algebraica.

De manera general, se puede concluir que el libro de texto Matemática 2 secundaria, no presenta diversidad de técnicas para una misma tarea, solo muestra una técnica para una tarea; y con respecto a la tarea de graficar una función afín, solo presenta la técnica de tabulación, lo cual indica una ausencia importante de variedad de técnicas para una misma tarea.

Delgado y Cují (2023) investigan sobre el Impacto del Aula Invertida como estrategia de aprendizaje de la función lineal, en estudiantes de bachillerato. Tomaron un grupo control, al que se le aplicó una metodología de tipo tradicional y un grupo experimental quién fue partícipe del aula invertida con base a secuencias didácticas, y quienes trabajaron con actividades síncronas y asíncronas.

La técnica utilizada durante la realización de las actividades de los estudiantes fue la observación y, dentro de los instrumentos empleados se puede mencionar dos cuestionarios de base estructurada, el diagnóstico antes de la intervención pedagógica y la evaluación final luego de la intervención, estos instrumentos constan de 10 preguntas de conocimiento de tipo: seleccionar,

completar, unir con líneas, resolver ejercicios y problemas; asimismo se incluyeron 2 preguntas de metacognición.

En cambio, para evaluar el progreso del alumnado durante el desarrollo de la secuencia didáctica se realizaron actividades individuales y colaborativas de carácter formativo, como: relacionar registros algebraicos y gráficos, completar tablas, graficar funciones, resolver crucigramas.

Por otro lado, para el trabajo fuera del aula (asincrónico) donde los estudiantes deben adquirir los conocimientos sobre función lineal, se recurrió a la plataforma Edpuzzle, en la cual se creó una clase y se asignó actividades de visualización y comprensión de videos seleccionados de YouTube; volviéndolos interactivos por medio de la asignación de preguntas de opción simple, con la finalidad de verificar el cumplimiento del trabajo autónomo por parte del alumnado

Finalmente, Delgado y Cují (2023) por medio del trabajo realizado concluyeron que los estudiantes del grupo experimental mejoraron su rendimiento académico, incrementó su compromiso en la construcción de su propio conocimiento, además cumplieron con las actividades propuestas de manera satisfactoria, alcanzando y dominando los aprendizajes requeridos.

También concluyeron que el aula invertida permitió mejorar el desempeño académico, impulsó la motivación en el estudiante por aprender, volviéndolo protagonista de la construcción de su propio conocimiento y desarrolló el pensamiento crítico y lógico-matemático.

A su vez añaden que la implementación de nuevas estrategias metodológicas y una apropiada secuencia didáctica en conjunto con el uso de las TIC, ayudaron a contrarrestar las deficiencias conceptuales que presentan los estudiantes.

Otro documento tiene que ver con el Estudio de Caso y Modelado Matemático en la Formación de Ingenieros, de la Caracterización de habilidades STEM, de la investigación desarrollada por Aravena et al. (2022) cuyo objetivo principal fue caracterizar las habilidades STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemática) de los estudiantes de primer año de ingeniería, cuando integran conocimientos en la resolución de casos reales, usando el modelado matemático como base del proceso de aprendizaje en espacios de trabajo colaborativo, mostró dentro de los hallazgos más relevantes que, en promedio, los estudiantes superan el nivel competente en las

habilidades STEM, aunque todavía evidenciaban debilidades en áreas como la interpretación de soluciones matemáticas, la proyección de modelos y el diseño de soluciones para ingeniería. Esta investigación se guio bajo una metodología cuantitativa y se basó en el análisis de contenido de las producciones. La investigación optó por el diseño de una secuencia didáctica, en temas de álgebra y cálculo, usando como estrategia de enseñanza el método de casos.

Para los fines de la presente investigación, los hallazgos encontrados por parte de Aravena et al. (2022) resultan pertinentes, dado que, tanto la implementación del modelo STEM como el proceso de modelación, se unifican en el objetivo principal del proceso adelantado en esta investigación, en donde se pretende a través de la modelación de situaciones acortar la brecha entre teoría y práctica; y generar un verdadero aprendizaje en las áreas de álgebra y cálculo.

En conjunto, las investigaciones revisadas permiten reconocer que la enseñanza de la función lineal ha evolucionado hacia propuestas didácticas que trascienden la explicación tradicional de fórmulas y procedimientos, orientándose al diseño de experiencias de aprendizaje donde el estudiante participa activamente en la construcción del conocimiento. Estos estudios evidencian la importancia de estructurar secuencias o diseños de aprendizaje organizados de manera progresiva, en los que las actividades respondan a propósitos claramente definidos y favorezcan la comprensión de las relaciones entre variables a partir de situaciones contextualizadas. Asimismo, ponen de manifiesto que la modelación de situaciones cercanas a la realidad constituye una estrategia pertinente para despertar el interés de los estudiantes, al invitarlos a recolectar, organizar, analizar e interpretar información proveniente de contextos cotidianos, transformando datos expresados inicialmente en lenguaje natural en representaciones matemáticas con significado. En este proceso, el uso de herramientas tecnológicas como Microsoft Excel, Google Maps, Tracker, Winplot y otras TIC adquiere un papel relevante, no solo porque facilitan la obtención y organización de datos reales, sino también porque permiten clasificarlos, representarlos mediante tablas y gráficas, establecer relaciones entre variables y favorecer procesos de análisis que enriquecen la comprensión de la función lineal. De igual manera, los antecedentes resaltan la necesidad de integrar diversas formas de representación (verbal, tabular, gráfica, visual y algebraica) dentro de un mismo diseño de aprendizaje, reconociendo que el tránsito entre ellas fortalece la interpretación de las situaciones y la construcción de significado matemático. En

consecuencia, estas investigaciones aportan fundamentos teóricos y metodológicos para concebir un diseño de aprendizaje innovador que articule la modelación matemática, las tecnologías digitales y el trabajo con múltiples representaciones, ofreciendo una alternativa para presentar la función lineal desde situaciones auténticas que resulten cercanas, significativas y motivadoras para los estudiantes, en coherencia con los planteamientos de Caballero et al. (2021), Polo (2021), Delgado y Cují (2023), Aravena et al. (2022), Riveros (2011) y Tiburcio (2017).

3.2 Enseñanza del Proceso de Modelación

Teniendo presente que el tema central de este subcapítulo está enfocado en la enseñanza del proceso de modelación en Colombia, se hace necesario revisar aquellos documentos que proporcionen nociones sobre qué es la modelación, qué aspectos son relevantes dentro del proceso y cómo se enseña a partir de este. Para ello se parte de estudiar los documentos nacionales.

En los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas (2006), se mencionan cinco procesos generales de la actividad matemática, de los cuales uno de ellos es la modelación y lo definen como “la forma de describir la interrelación entre el mundo real y la matemática se constituye en un elemento básico para resolver problemas de la realidad, construyendo modelos matemáticos que reflejen fielmente las condiciones propuestas y las predicciones de una situación” (p.6).

Sin embargo, su desarrollo en el proceso de enseñanza y aprendizaje implica reconocer las diferencias básicas que surgen dentro de este núcleo de competencias, puesto que:

Todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo. Análogamente, todo modelo es un sistema, pero no todo sistema es un modelo, aunque cualquier sistema podría utilizarse como modelo, pues esa es la mera de producir nuevas metáforas, analogías, símiles o alegorías (MEN, 2004, p. 52).

Finalmente, el EBC (2006) resalta la importancia y la pertinencia del proceso de la modelación, el cual precisa que un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.

En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), se justifica el proceso de Modelación debido a los avances científicos y tecnológicos que se han venido dando y que exigen un cambio en la manera cómo se enseña la matemática. Añade que una forma de hacer matemáticas y conectar con problemas de la vida diaria es a partir de pensar y construir modelos matemáticos, sin embargo, estos modelos deben abordarse desde contextos centrados en el interés de los estudiantes, por lo tanto, se aconseja la integración al currículo escolar con situaciones problemas cercanas a los educandos y de esta forma se prepararán ciudadanos realizados y competentes en cuanto a las exigencias de los tiempos que vienen.

Hans Freudenthal (1991) citado en MEN (1998) considera que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización, que se diferencia de la modelación porque corresponde al paso desde el problema enunciado matemáticamente hasta su abordaje y resolución matemática, mientras que la modelación corresponde a un proceso completo que conduce desde la situación problemática real hasta un modelo matemático (su solución).

El punto de partida de la modelación es una situación problema real, esa situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones y debe precisarse más de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema (que se pueda manejar en el aula), que por una parte aun contiene las características esenciales de la situación original, y por otra parte está ya tan esquematizada que permite una aproximación con medios matemáticos.

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta esencialmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los “elementos básicos” de la situación

problema planteada y de ciertas relaciones entre esos objetos, que corresponden también a relaciones entre esos “elementos básicos”.

El proceso de resolución de problemas continua mediante el trabajo de sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplicar métodos y resultados matemáticos conocidos, como también desarrollando otros nuevos. Estos resultados deberán ser validados, es decir, se tiene que volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original. De esta manera, el que resuelve el problema también valida el modelo, si se justifica usarlo para el propósito que fue construido. Cuando se valida el modelo puede ocurrir discrepancias pues puede que los resultados sean poco razonables y útiles desde la situación problemática que se plantea o por el contrario se puede conseguir un modelo satisfactorio, del cual se podrá utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problema real u objeto modelo, para tomar decisiones y para emprender acciones.

Villa, J. Bustamante C. Berrio, M. Osorio, A. Ocampo, D. (2008) consideran que, primero, la relación de la matemática con las aplicaciones a la solución de problemas del mundo real han sido un tema central en investigaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los últimos años; segundo, que el proceso de modelación se ha venido consolidando como una herramienta que posibilita la reflexión y el diseño de situaciones que permiten materializar todas estas relaciones en el aula de clase; tercero, que aunque ya los lineamientos curriculares llevan tiempo de haberse publicado, divulgado y extendido por las entidades educativas aún no se logra interiorizar sus nociones para reducir la brecha existente entre las disposiciones educativas y las prácticas del aula puesto que se sigue viendo la matemática como un área formal y abstracta constituidas por definiciones, axiomas e ideas comprimidas y “exactas” cuya aplicación se encuentra en un conjunto reducido de situaciones artificiales que poco a casi nada tienen que ver con la realidad de los estudiantes. Por último el documento lista algunos autores destacados como Bassanezi (2002), Biembengut, M (2004), Crouch y Haines (2004), Hein (2006), Giordano, Weir y Fox (1997) los cuales han abordado con gran éxito al proceso de modelación como una estrategia didáctica que permite construir conceptos matemáticos de una forma más comprensiva, que reduce la brecha existente en la

práctica del aula y que al tiempo ofrecen elementos para aumentar la motivación de los estudiantes.

El documento propone ver el proceso de modelación matemática como una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micro mundo” (contexto dotado de relaciones y significado) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real. Entre los elementos comunes que guardan los procesos de modelación son: la experimentación, la abstracción y simplificación (se trabaja con un fragmento de la realidad) el uso de representaciones, y en las diferentes fases que incluyen el reconocimiento desde el planteamiento del fenómeno hasta la construcción, evaluación, validación y modificación del modelo. Por eso no se puede ver la Modelización como una elementalización del proceso sino como una resignificación de este proceso con fines educativos.

Silva (2017) realizó un estudio de maestría el cual tuvo como objetivo general implementar estrategias didácticas para fortalecer las competencias matemáticas de comunicación, representación y modelación en los educandos del grado noveno, de la Institución Educativa Pablo Correa León, por medio de resolución de problemas.

Esta investigación toma las ideas de la modelación de Freudenthal (1991); Primero, esta es una forma para conseguir generar valor y significado en los estudiantes respecto a su relación con las matemáticas, ya que ellos deben sentir que pueden convertir los problemas sociales en expresiones destinadas a encontrar una o varias soluciones. Segundo, las características esenciales de esta competencia son tener un problema o contexto que tenga sentido para los estudiantes, no apostar por una alternativa única de resolución sino incentivar el desarrollo de diversos procesos de razonamiento, hasta identificar la que mejor responde a las circunstancias, además de fortalecer sus sistemas conceptuales. Finalmente, desde la didáctica de las matemáticas se aborda con frecuencia la modelación, para destacar que permite “detectar fácilmente qué esquema aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a la situación, hasta una forma muy avanzada, como creación de nuevos modelos que permitan simular la evolución de una situación.

Olarte (2019) afirma desde su investigación que el educador debe fomentar la elaboración e interpretación de modelos con el propósito de edificar un concepto matemático dotado de un significado y además debe despertar motivación e interés por las matemáticas debido a la relación que tiene con los problemas del contexto real del alumnado; enlista pasos en cómo implementar procesos de la modelación en el aula.

1. Identificación de la situación, fenómeno o problema de la cotidianidad del estudiante.
2. Establecimiento de los supuestos e hipótesis en que se desarrolla el modelo.
3. Formulación matemática del problema
4. Resolución del problema matemático
5. Traducción de las soluciones a la luz del fenómeno
6. Validación del modelo matemático contrastando los resultados con los datos de la situación contextualizada

Los pasos 2) y 5) dan cuenta del vínculo entre la vida real y las matemáticas.

Finalmente, el autor cita a Barbosa (2001) para explicitar los niveles o casos asociados con el contexto escolar al implementar el proceso de modelación en el aula, allí se habla sobre la experiencia del docente, las formas en que puede intervenir y los niveles del grupo de estudiantes, su participación, entre otros factores.

En Villa-Ochoa, Sánchez y Parra (2022) se enlistan una serie de aspectos relevantes a nivel teórico, sobre la modelación como son; primero, la modelación como un proceso que transcurre por fases las cuales son: el reconocimiento de un fenómeno de interés, la observación, la selección de variables, la formulación de hipótesis, la formulación del modelo cuyo propósito es formular una descripción de un mecanismo en términos cuantitativos, la reducción, análisis, calculo y validación del modelo (Fowler, 1998).

El segundo aspecto, explicitan diferencias entre el proceso de modelación y las aplicaciones matemáticas. Afirman que; aunque los dos involucran un problema del mundo real en las aplicaciones solo se queda en encontrar la solución y no se piensa en el problema inicial, excepto para verificar si la respuesta tiene sentido, en la modelación por el contrario se analiza la respuesta desde diversas posturas y con propósitos diferentes, Stillman (2019) indica que la modelación se

valora a partir de un punto de vista matemático y para el ejercicio de la ciudadanía. Villa-Ochoa et al. (2022) señala que sobre un punto de vista matemático la modelación sirve para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos, además se promueve la matemática como una forma de solucionar problemas de diferente naturaleza que da lugar a nueva matemática (conceptos, nociones y procedimientos), y desde un punto de vista de la ciudadanía Stillman (2019) encontró que esta componente se centra en enseñar para la vida, como analizar problemas sociales, promover la educación en valores, cuestionar el papel de los modelos matemáticos en la sociedad, el medio ambiente, entre otros.

El tercer aspecto tiene que ver con el tipo de tareas de la modelación matemática los cuales son los enunciados verbales, construcción de representaciones, modelación a través de proyectos y uso y análisis de modelo. También se nombran cuatro grandes propósitos que se encuentran en la investigación en modelación y son:

- Metas pedagógicas: Promover habilidades que les permitan a los estudiantes comprender mejor los aspectos centrales de su mundo.
- Objetivos Psicológicos: Fomentar y mejorar la motivación y la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas.
- Objetivos relacionados con la asignatura: Estructuración de procesos de aprendizaje, introducción de nuevos conceptos y métodos matemáticos, incluida su ejemplificación.
- Objetivos relacionados con la ciencia: Impartir una imagen realista de las matemáticas como una ciencia, dando una idea de la superposición de las consideraciones matemáticas y extra matemáticas en el desarrollo histórico de las matemáticas.

Estos cuatro propósitos muestran que resolver problemas reales no es la única ni la principal meta de la modelación en la matemática escolar. También se resalta el uso y la comprensión de las ideas matemáticas y de otros contextos y áreas del conocimiento, además de la formación de ciudadanos críticos. Con esta clasificación, los autores proporcionan insumos para tomar decisiones en la implementación de la modelación tanto en el ámbito escolar como en la investigación.

Como último aspecto tiene que ver que esta investigación describe tres ejemplos de modelación realizados por el grupo de investigación MATHEMA con el propósito de configurar

escenarios de clase aplicados a los propósitos y alcances de la modelación matemática y son: el primero fue con niños entre las edades de 10 a 11 años sobre el índice de masa corporal, el segundo modelo se trabajó con el crecimiento fetal y el peso, se trabajó con un grupo de futuros profesores, el último fue una salida de campo con estudiantes donde el eje se centró en responder la pregunta ¿Qué depende de qué?, los estudiantes describieron un amplio conjunto de cantidades que covarían. En estos ejemplos se evidencia que cuando se estudian problemáticas cercanas a las experiencias de los estudiantes, no solo se requiere de conocimientos matemáticos, sino también de otros conocimientos propios de la cultura y que, en el proceso de modelación, todos estos conocimientos se conjugan para resolver los asuntos relevantes. También que en la modelación se puede incluir ambientes de trabajo en equipo, el planteamiento de preguntas relativas al fenómeno de estudio, la exploración de posibles solicitudes, la confrontación y la discusión de sus soluciones con otros estudiantes y con el profesor, la reformulación de sus afirmaciones, la reflexión de sus aprendizajes y la manera en que se aprendieron.

En conjunto, las investigaciones revisadas permiten reconocer que la modelación matemática se ha consolidado como una perspectiva didáctica que transforma la manera de enseñar las matemáticas, al situar el aprendizaje en torno a situaciones auténticas y cercanas al contexto de los estudiantes. Los antecedentes coinciden en que el proceso de modelación debe iniciar con problemas provenientes de la realidad, capaces de despertar el interés y la curiosidad de los educandos, para posteriormente conducirlos a identificar las variables involucradas, formular hipótesis, construir modelos matemáticos, resolverlos, interpretar los resultados obtenidos y valorar su pertinencia frente a la situación inicial (MEN, 1998; Olarte, 2019; Villa-Ochoa et al., 2022). Desde esta perspectiva, el estudiante deja de ser un ejecutor de procedimientos para asumir un papel activo en el análisis, la validación y el refinamiento de los modelos construidos, comprendiendo que una solución matemática no culmina con la obtención de un resultado, sino que exige contrastarlo con el contexto, evaluar su utilidad y sustentar decisiones a partir de él. De igual manera, los estudios analizados evidencian que la modelación favorece el desarrollo de competencias matemáticas y fortalece habilidades como el razonamiento, la argumentación, la interpretación, la comunicación matemática y el trabajo colaborativo, promoviendo una actitud crítica frente a las situaciones del entorno (Silva, 2017; Villa et al., 2008; Villa-Ochoa et al., 2022). En consecuencia, estos aportes permiten comprender que el diseño de situaciones de aprendizaje

sustentadas en la modelación debe organizarse de manera progresiva mediante momentos o etapas que acompañen al estudiante desde la comprensión de la situación contextualizada hasta la construcción, análisis y validación del modelo matemático. Esta organización no solo enriquece la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también fortalece la relación entre las matemáticas y la realidad, genera mayor motivación hacia el aprendizaje y ofrece una visión renovada de la enseñanza, en la que el conocimiento adquiere sentido a partir de su uso para comprender, explicar y tomar decisiones frente a situaciones propias de la vida cotidiana.

3.3 Enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación

El siguiente subcapítulo tiene como propósito caracterizar cómo se desarrolla el proceso de modelación para enseñar la función lineal. Se hace necesario enfocar la revisión bibliográfica en aquellos documentos que proporcionen respuesta a este objetivo y para ello se registran investigaciones de corte internacional, nacional y local.

3.3.1 Internacional

El primer documento referenciado en el apartado internacional corresponde a un artículo científico de Caballero et al. (2012) quienes realizaron un diseño de situación con el objetivo de resignificar lo lineal, al caracterizar el movimiento a razón constante, sustentarlo por la categoría modelación-graficación (M-G) a partir de una epistemología de lo lineal. La investigación afirma que en los participantes no hay indicios de haber comprendido las características de movimiento a razón constante, debido a que al realizar un análisis de sus producciones encontraron que utilizan los trazos rectos para representar la trayectoria, y no en sí para modelar el movimiento de una persona. Además, los autores propusieron resignificar lo lineal a partir de una situación de modelación de movimiento con variación constante, desarrollaron el SMM a partir de cuatro momentos.

El primer momento se centra en caracterizar lo lineal, el segundo momento en identificar los parámetros del modelo dado, el tercero en hacer predicciones con el modelo lineal y el cuarto en el establecimiento de esquema de lo lineal, a partir de una misma gráfica se dan variaciones del

movimiento cambiando la pendiente y la razón de cambio de la velocidad del automóvil en un intervalo específico.

Los participantes pudieron, a partir de las gráficas, relacionar características propias de la situación de movimiento con las gráficas obtenidas a partir de múltiples realizaciones frente al sensor, identificar los intervalos de cambios de velocidad, identificar en la gráfica que una recta con menor inclinación implica que la velocidad del móvil es menor que aquella con mayor inclinación.

Concluyen que, a partir de la comparación de gráficas, se pudo argumentar el por qué es más adecuado utilizar trazos curvos para modelación de movimiento, además se afirma que a partir de las gráficas se puede resignificar la variación en situaciones de cambio. También se pudo diferenciar cuando se trata de un modelo lineal y cuando no, se llegó a una mayor comprensión de cuando se habla de un movimiento lineal puesto que los participantes dieron respuestas sobre el momento en que inicia el sensor, se mueve rápido, lento, se mueve a la misma velocidad en cierto intervalo, en tal segundo cambia su velocidad, entre otros. También se evidenció que pudieron describir el movimiento realizado en cada gráfica, estableciendo características globales sobre los movimientos que no son lineales, y profundizando en los que sí lo son.

Vargas, Cabañas y Meza (2013) dan cuenta de los avances de una investigación que se interesó por describir cómo, estudiantes de décimo grado, construyen e interpretan modelos matemáticos al representar y resolver situaciones o problemas matemáticos relacionados con su realidad inmediata.

La secuencia didáctica se desarrolló a partir de seis actividades, está planeada para desarrollarse en un ambiente de lápiz y papel y se pretende que el estudiante desarrolle competencias tanto genéricas como disciplinares mientras resuelve situaciones y/o problemas algebraicos concernientes a fenómenos de su entorno inmediato o de su comunidad, también que sean capaces de explicar y hacer descripciones de las situaciones modeladas.

Las competencias genéricas son dos fundamentales, que piensen crítica y reflexivamente y que se expresen y comuniquen, por parte de las competencias disciplinares son tres fundamentales, que construya e interprete modelos matemáticos, mediante la aplicación de procedimientos

algebraicos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales; que propongan explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contraste con modelos establecidos o situaciones reales; y, que interpreten tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos.

En cuanto al proceso de modelación se enmarca en dos tipos de actividades, las cuales son *piensa y actúa*, y *de ajuste de curvas*. Para las primeras se plantea una situación problema al estudiante y se obtiene un modelo matemático el cual reproduce de la mejor forma la situación planteada, y la segunda son actividades donde el estudiante se le presenta una serie de datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipule y obtenga un modelo matemático que represente de la mejor manera la gráfica de la situación planteada.

En cuanto a los procedimientos que se llevaran a cabo en la secuencia didáctica son la traducción al lenguaje algebraico fenómenos de su entorno inmediato descritos en lenguaje común, interpretación de las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes, clasificación de las cantidades de un problema de acuerdo a la relación que existe entre ellas, construcción de las expresiones algebraicas que representan la relación entre los datos de un problema, representación gráfica de las expresiones algebraicas y/o sus soluciones, reconocimiento de las situaciones que se modelan con una ecuación, una inecuación, una función lineal o un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Finalmente, definen la modelación matemática como estrategia de enseñanza que cobra importancia cuando se busca que los estudiantes interpreten modelos matemáticos al representar y resolver situaciones o problemas relacionados con su realidad inmediata o de su comunidad. Con respecto a los conocimientos matemáticos, se reflexiona que, aunque forman parte del proceso de resolución de las situaciones no es el eje más importante dentro de la modelación puesto que no solo se ve el componente matemático sino por el contrario se reflexiona desde el componente cotidiano permitiendo comunicar resultados matemáticos por medio de palabras contextualizadas con la situación.

En Chile, Guzmán y Vega (2016) describen en una secuencia didáctica llevada al aula, para dar cuenta sobre si es posible mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función lineal utilizando la modelación como metodología de enseñanza y sus distintas representaciones para su

aprehensión. La secuencia se planteó a través de dos partes, una primera situación modelada a través de un enunciado verbal con relación al peso de las manzanas y el precio que se debe pagar, se evocan conocimientos como la proporción directa con el propósito de que puedan relacionar las variables que están en juego, posteriormente se utiliza la representación pictórica con el objetivo de crear pares entre estas variables, además se hacen preguntas relacionadas a la situación para que puedan llevar al estudiante a la matematización del problema, la generalización para hallar el costo de cuando se habla de una cantidad como “m kilos de manzana” y el descubrimiento de por ejemplo la representación gráfica y algebraica. La segunda situación se invita a los alumnos a crear ellos mismos una situación cotidiana libre teniendo presente una serie de pares que se les da a partir de una representación tabular, se busca al igual que el anterior ítem que ellos establezcan preguntas, diseño de gráficos y la forma algebraica que modela la situación planteada.

Dentro de sus conclusiones afirman que la metodología de la modelación matemática unida con el registro de representaciones semióticas pueden mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje con el contenido de función lineal, se indica que sí es posible mejorar el proceso puesto que en el segundo ítem de la secuencia se encontraron respuestas interesantes en relación a las que el equipo de trabajo esperaba de los estudiantes, además sugiere que hay que seguir trabajando el concepto de función lineal con la misma metodología ya que los estudiantes descubren el conocimiento en vez de solo recibirlo, se incentiva y motivan al trabajar y al participar, se aprende de una manera nueva, y el aprendizaje se vuelve propio y autónomo. También se desarrollaron habilidades necesarias para aprender matemáticas como fueron la visualización, el cambio de registro, la aplicación, la resolución de problemas y la modelación.

3.3.2 Nacional

En Vergel et al. (2020), se documenta una investigación donde realizaron una transposición didáctica a través de actividades mediadas con las TIC, con el objetivo de apoyar y promover la enseñanza de la función lineal y afín, siendo necesario enmarcar las actividades dentro del modelo didáctico y metodológico Cuvima, para la modelización matemática de situaciones reales.

Los autores afirman que la metodología rompe con la enseñanza tradicional y sirve como un recurso didáctico para motivar el aprendizaje del concepto de función lineal y afín, sirve como guía metodológica para orientar procesos de modelación de fenómenos físicos (caso energía calorífica) haciendo uso de las matemáticas. Además, permitió alcanzar una interpretación deductiva e inductiva del fenómeno físicos dado y llegar a una modelización de mismo. También se concluye que la estrategia mejora la interpretación y articulación entre diversos registros de representación de la función lineal y afín. Se evidencia dificultad en hacer despejes de ecuaciones de la forma $Ax + By = C$ para reescribirla de la forma $y = mx + b$, se alcanzó comprensión en cuanto a conceptos relacionados al objeto matemático como son: variable dependiente e independiente, interpretación de variables, comprensión y manejo de representaciones, punto de corte en el eje y, interpretación de la pendiente.

Muñoz (2012) diseñó e implementó con un grupo experimental de grado noveno una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema, a través de una serie de actividades en el entorno de aprendizaje Moodle. También se pretendió superar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático a través de la estrategia didáctica basada en TIC la cual despertó interés y motivación por usar los recursos, generando aprendizaje significativo comparado con el grupo control el cual trabajó el mismo concepto desde una enseñanza tradicional.

La estrategia didáctica planteada por Muñoz (2012) fue pensada, diseñada y aplicada siguiendo una secuencia de actividades que evaluaron las nociones de función lineal, manejo de variables involucradas, interpretación y manejo de una representación (algebraica, gráfica y tabular) para poder construir otra, se les presentó situaciones problemas con el objetivo de que se sirviera como elemento unificador, generalizador y modelador de funciones lineales para la solución de situaciones cotidianas, se identificó la pendiente y el corte en el eje y de una recta para posteriormente darle significado según el contexto de la situación presentada.

Dentro de las conclusiones a mencionar son que la utilización de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, propician sin lugar a duda un ambiente de descubrimiento y reflexión, una nueva manera de aprender, de innovar, de crear nuevos conocimientos. La metodología abordada mostró una actitud de confianza y motivación por parte de los estudiantes para afrontar situaciones

nuevas y retadoras con base en decisiones propias, también se evidenció un alto grado de autonomía, ya que manejaron algunas situaciones sobre el aprendizaje sin la dependencia del control externo por parte del docente, sus decisiones fueron claras y firmes en situaciones imprevistas.

Finalmente, la aplicación de la función lineal en el contexto de la economía permitió ver su importancia en el desarrollo de las matemáticas, pues se le considero como elemento unificador, generalizador y de naturaleza modelizadora. Además, la utilización de las TIC, propicio sin lugar a dudas un ambiente de descubrimiento y reflexión, una nueva manera de aprender, de innovar, de crear nuevos conocimientos.

Barón Martínez (2020) desde una perspectiva cualitativa de tipo descriptivo interpretativo describe y analiza el desarrollo de los procesos de modelación matemática que logran los estudiantes de grado noveno, cuando resuelven un problema de optimización, y emplean el software GeoGebra.

La importancia de esta tesis radica en que sirve como un referente teórico, metodológico e instructivo de apoyo para la planeación, implementación y resultados encontrados a partir de la implementación de la secuencia didáctica aplicada a estudiantes del grado noveno.

Primero como referente teórico, porque describe y guía el proceso de modelación en las matemáticas escolares y caracteriza dificultades en cuanto al aprendizaje de la matemática de la función lineal. Segundo como referente metodológico, porque se guía del diseño teórico de Diaz Barriga (2013) para el diseño de la secuencia didáctica, con el propósito de modelar mediante el uso de GeoGebra: el caso de la optimización de las rutas de recolección de residuos sólidos en el municipio de Valledupar, además se precisan los objetivos de aprendizaje en los estudiantes los cuales están centrados en identificar variables, comprender e interpretar información cualitativa mediante el uso de los sistemas de representación: algebraico, gráfico y tabular mediante el uso de GeoGebra, plantea un modelo matemático mediante la aplicación de funciones lineales y valida el modelo matemático mediante información documental, acorde con el contexto del manejo ambiental. Por último, como instrumento de apoyo porque desarrolla actividades de apertura o inicio, actividades de desarrollo y de cierre.

De los resultados más importantes de la investigación son: primero, los resultados dan muestra de la utilidad de las secuencias didácticas y los OVAs en las aulas de matemáticas, así como del potencial del software GeoGebra en la representación, análisis y construcción de modelos matemáticos asociados al pensamiento variacional. Segundo, el uso de Software como GeoGebra facilita el reconocimiento de fenómenos de variación de la función lineal presentes en diversos ejercicios y aplicaciones, ósea se constituye como un mediador en el proceso de aprendizaje asociado con la modelación matemática propuesta en la implementación. Tercero, para facilitar el proceso de modelación se hace necesario desde grados anteriores en matemáticas orientar proceso asociados de manera gradual en identificación de variables y el análisis de información requeridos para solucionar problemas matemáticos.

3.3.3 Local

En la Universidad Industrial de Santander se reporta a Plata (2023) quién realizó un trabajo de investigación a nivel de pregrado, el cual se tituló “Diseño para el estudio de funciones lineales con estudiantes de undécimo grado: Atendiendo la diversidad del aula”, cuyo objetivo fue plantear un diseño didáctico alrededor de las funciones lineales que favorezca la inclusión en la clase de matemáticas con estudiantes de undécimo grado. La construcción del diseño se fundamentó en las categorías expuestas por Ruiz (1998), y en el consumo del agua como un recurso didáctico. Así mismo este trabajo se acoge a los principios y pautas del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) para favorecer la inclusión en el aula.

La importancia y pertinencia de este trabajo con los intereses trazados en la presente investigación corresponde a que se comparte el mismo objetivo por desarrollar estrategias novedosas para la enseñanza de la función lineal por medio de una secuencia didáctica aplicada a una población de estudiantes. Como segunda razón es por sus aspectos teóricos y conceptuales, los cuales se presentan y describen en el apartado 3.2, se destaca la epistemología de la función lineal, la construcción de representaciones, el uso de material visual, audiovisual, material concreto, el diseño textual de las situaciones planteadas en respuesta al método (DUA), el rol del docente para facilitar conexiones durante la secuencia, el trabajo colaborativo entre pares, el desarrollo de otras habilidades como el razonamiento, la capacidad de comunicar y justificar ideas, el identificar análisis para la variación constante entre diferentes puntos, la forma como se aterrizó el concepto

de pendiente relacionándola con las variables en juego (metros cúbicos vs valor a pagar) y no desde un concepto netamente teórico y finalmente el cómo se pretendió desarrollar el concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa, él identificar similitudes y la variedad de representaciones. Como último aspecto a resaltar es que Plata (2023) a lo largo de la secuencia didáctica aborda la modelación y matematización del problema incentivando el cuidado del agua y aprendiendo otros conocimientos implícitos a partir de la situación presentada, cómo es el pago del recibo de agua que llega a sus hogares, teniendo en cuenta aspectos como el estrato socioeconómico y el piso térmico en que se ubica un hogar. El modelo finaliza con la argumentación de los estudiantes del porque es importante el ahorro del agua independientemente del estrato al que se pertenezca.

Dentro de las conclusiones se destacan que las diferentes formas de representar un objeto matemático ayuda al estudiante a analizarlo y visualizarlo mejor, resalta la importancia de usar como herramientas didácticas los softwares de geometría dinámica (SGD) para enriquecer las acciones y expresiones de los estudiantes para comprender la función lineal y el contexto en que se le presentan las situaciones para hacer propio el problema e incentivar a la solución de las mismas, también en el desarrollo de procesos matemáticos y el pensamiento variacional. Con respecto a atender los principios y pautas del DUA se refleja las distintas formas de representación y expresiones propuestas a lo largo de las tareas y el abordar el objeto matemático en tres niveles de profundidad distintos permitió flexibilidad y adaptabilidad de este teniendo en cuenta las características y capacidades particulares de los estudiantes. Por último, se deja el interrogante ¿qué aprendizajes logran los estudiantes que hacen uso de estos diseños, según sus características particulares de aprendizaje? Y es aquí donde queda la secuencia como herramienta para utilizar, rediseñar y adaptar según las capacidades y particularidades de la nueva población de estudiantes a la cual se dirigirá este trabajo.

Arciniegas (2023) realizó un trabajo de corte cualitativo. Para su investigación planteó una estrategia de diseño con elementos fenomenológicos relacionados con algunas aplicaciones móviles que tuvo por objetivo describir una estrategia metodológica para el desarrollo de prácticas variacionales en un grupo diverso de estudiantes de grado noveno. La investigación se enmarca en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y elementos de la Educación Inclusiva.

La importancia y pertinencia de este trabajo con los intereses trazados en la presente investigación corresponde a dos razones, la primera es porque se tuvo la intención de enseñar la función lineal a una población de estudiantes de grado noveno por medio de una estrategia de diseño ligada a situaciones cotidianas. Aunque este trabajo se hace con una población diversa, no le resta validez en cuanto a los objetivos trazados aquí. La segunda razón es porque es un referente a nivel teórico y metodológico en cuanto a que precisa los conceptos de variación y cambio según Caballero (2018) y las prácticas variacionales aspectos importantes para el diseño, alcance y reflexión de los objetivos trasados. Por último, se destaca el diseño de la situación de aprendizaje para caracterizar el pensamiento variacional por medio de las prácticas variacionales ya que se propuso una situación innovadora para los intereses de los estudiantes ya que se relacionó con el uso de algunas aplicaciones móviles. Además, a través de esta situación contextualizada se pudo modelar la enseñanza de la función lineal como un modelo de variación constante.

Los resultados dan cuenta de la caracterización del pensamiento variacional a partir del desarrollo de prácticas variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación) en los tres ritmos de aprendizaje que reconocen y valoran la construcción de conocimiento matemático desde quien aprende.

También Arciniegas (2023) concluye con respecto a las prácticas variacionales de comparación que los estudiantes en general lograron comparar e identificar regularidades en los estados de un comportamiento lineal, dos equivalentes y uno no lineal en las distintas representaciones del objeto matemático, añade que el ritmo de aprendizaje es moderado y rápido cuando las tareas variacionales se apoyan en las representaciones pictóricas y tabulares que en la gráfica. Con respecto a las prácticas variacionales de seriación se afirma que no fue tan sencillo pasar de las comparaciones entre estados a la identificación de una regularidad que describiera el comportamiento lineal. Esto implicó mayor orientación y razonamiento en los estudiantes ya que implicó un ritmo de aprendizaje moderado y lento, con respecto a las prácticas variacionales de predicción. Referente al carácter del futuro del cambio fue recurrente el uso de estrategias aditivas para realizar predicciones locales, también se evidenció que los estudiantes usaron la interdependencia entre las variables, la interpretación de variables fijas y la relación entre los dos fenómenos para establecer estimaciones para el comportamiento lineal. Persistió la necesidad de

articular datos numéricos para construir procedimientos que justificaran los argumentos variacionales. Por último, con relación a las prácticas variacionales de estimación el ritmo de aprendizaje fue moderado a lento.

Con respecto a la situación de aprendizaje respondió a los objetivos de motivación e interés de los estudiantes pues emergió de forma natural la discusión de la variación constante, la significación de las regularidades y características de la interdependencia entre las variables en el comportamiento lineal.

En relación con las funciones neurocognitivas se evidencio que las tareas repetitivas desde el trabajo a lápiz y papel y, el trabajo en GeoGebra favoreció la interpretación de la interdependencia entre las variables, la comparación, validación y la formalización del conocimiento. Se hace necesario detallar el diseño de las instrucciones para que sean precisas, concretas y mayormente comprensibles para que los estudiantes puedan trabajar autónomamente.

Se evidenció que generalmente los estudiantes se sintieron participes en el aprendizaje, dieron significados a ideas matemáticas a partir de la cercanía con el contexto, lo que responde a la significación de la matemática desde la realidad, habilidades, contexto y condición del estudiante para encaminar a una matemática funcional.

Finalmente se resaltó la importancia de construir situaciones de aprendizaje cercanas y funcionales para los estudiantes puesto que permite resignificar el cómo aprender y enseñar las matemáticas, despierta mayor interés por participar e involucrarse de manera natural en el aprendizaje, proporciona razones del porque y para que aprender los conceptos matemáticos, a diferencia de la matemática conceptual y contextual a la cual venían normalmente habituados el grupo de trabajo desconociendo los ritmos de aprendizaje y las características individuales.

Por último, se reporta a Yara (2010) quién realizó un trabajo de investigación con el objetivo de diseñar y aplicar situaciones concretas a estudiantes de noveno grado, que permitiera mejorar la conceptualización de la función lineal. Se aplicaron siete actividades, dos preliminares, cuatro talleres centrales y una evaluación como actividad final. La metodología usada fue el estudio cualitativo de casos, específicamente de cuatro estudiantes seleccionados, para el análisis de los datos se abordó una investigación cualitativa de tipo fenomenológico-hermenéutico, los elementos

más importantes son centrar el aprendizaje en el estudiante, se consideran las interpretaciones de los estudiantes y las de la investigadora y su contexto.

Los aspectos a resaltar en esta investigación tiene que ver en el marco teórico porque proporciona un barrido sobre aspectos relevantes a la hora de enseñar y aprender el concepto de función, se hablan de investigadores importantes que han aportado en esta área como Sierpinski (1992), Ruiz (1998), Bell y Javier (1981) y Dubinsky y Harel (1992), y se precisan temas como, la noción de función, los obstáculos identificados en la construcción del concepto de función y las concepciones y habilidades de los estudiantes al trabajar con el concepto de función. Además, por medio de una secuencia de actividades llevó a cabo la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función lineal, cada actividad tuvo diferentes contextos e intereses, por ejemplo, en las actividades preliminar se incluye la historia del concepto de función a razón de despertar curiosidad en ellos y de poder medir los presaberes. Se trabajaron contextos variados como la construcción, trabajo con varillas, aprendiendo con resortes y midiendo el agua 1 y 2, se trabajaron varias representaciones como la tabular, la pictórica, la gráfica y la algebraica, además se utilizaron expresiones verbales y simbólicas, todo esto gira en torno a que cada actividad fuese interesante y representativa. Todo lo anterior señalado serán fundamentales como guía metodológica para el desarrollo de la secuencia que se pretende diseñar en la presente investigación. Otro aspecto a resaltar es que cada actividad propuesta utilizó un diálogo preciso y claro para que los estudiantes pudieran comprender lo que se iba planeando en cada situación, además se captó la atención de los estudiantes a la hora de trabajar con actividades contextualizadas, finalmente los estudiantes bajo esta metodología utilizada comprendieron qué se estaba trabajando y facilitó la participación de los estudiantes al momento de reflexionar sobre las actividades.

Una de las conclusiones es que se pudo evidenciar que al trabajar con situaciones concretas se mostró a los estudiantes las aplicaciones de la función lineal en diversas situaciones cotidianas. Por ejemplo, en la aplicación del taller “trabajando con varillas” se observó que identificar e interpretar la proporcionalidad directa, permitió que los estudiantes entendieran el concepto de función como una forma de representar el cambio que ocurre entre las variables involucradas en la situación, entendiendo que el modelo $y = mx$ indica proporcionalidad directa entre dos magnitudes.

Otra conclusión tiene que ver con que en un primer momento para facilitar el aprendizaje del concepto la función lineal en todas sus formas y representaciones tiene que ver con poder identificar en la situación la presencia de la relación de cambio entre dos variables.

En términos generales, los resultados de esta investigación mostraron que:

..., si el uso de las situaciones concretas se llevara con más frecuencia a las aulas de clase para el aprendizaje de las matemáticas, los conceptos matemáticos serian contruidos con mayor sentido, consiguiendo con ello que los estudiantes relacionen los conceptos aprendidos con sus campos de aplicación. (Yara, 2010, pp 101).

En conjunto, las investigaciones internacionales, nacionales y locales evidencian que la enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación matemática constituye una alternativa sólida para favorecer la comprensión de este objeto matemático. Aunque los estudios revisados difieren en los contextos de aplicación, las herramientas tecnológicas empleadas y las metodologías de trabajo, coinciden en que el aprendizaje adquiere mayor significado cuando se parte de situaciones auténticas que permiten al estudiante identificar variables, establecer relaciones entre magnitudes, transitar entre diferentes representaciones y construir modelos matemáticos para interpretar la realidad. Asimismo, se observa una tendencia común a estructurar la enseñanza mediante secuencias o situaciones de aprendizaje organizadas progresivamente, en las que la modelación deja de ser un recurso complementario para convertirse en el eje que orienta la construcción del conocimiento matemático. No obstante, el análisis de la literatura también permite identificar que son escasas las propuestas que integran, de manera articulada, el proceso de modelación, el pensamiento variacional, el uso de tecnologías digitales y situaciones contextualizadas cercanas a los intereses de los estudiantes. En este sentido, la presente investigación encuentra su pertinencia al proponer un diseño de aprendizaje que busca articular estos elementos en una situación de aprendizaje, con el propósito de ofrecer una alternativa didáctica que favorezca una comprensión más significativa de la función lineal desde el análisis de situaciones propias del contexto cotidiano.

4. Marco Teórico

En este apartado se describen algunos aspectos teóricos que sustentan la construcción del diseño didáctico alrededor de la función lineal desde la modelación matemática y las prácticas variacionales para estudiantes de noveno.

Inicialmente se hablará sobre la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) desarrollada por Cantoral et al. (2014) el cual dirige su atención a la construcción social del conocimiento matemático que se desarrolla dentro y fuera del aula a partir de las prácticas sociales y en las relaciones humanas por comprender, significar y explicar situaciones problema, en particular, el cambio y la variación constante a partir de situaciones predictivas. Posteriormente hablaremos sobre la concepción del cambio y la variación a partir de los documentos nacionales e internacionales que precisan estos conceptos y brindan una mirada precisa de cómo enseñar a partir de situaciones de aprendizaje, además se menciona las prácticas variacionales como una forma de estudiar el objeto matemático a partir de cuatro etapas tal como describe Caballero (2018). Así mismo se estudia el proceso de modelación a partir de documentos nacionales e investigaciones relevantes como la de Villa-Ochoa et al. 2022 quien menciona aspectos teóricos y conceptuales de suma importancia para construir un diseño aprendizaje a partir de la modelación matemática, por último, se define y analiza la situación de aprendizaje desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa como el medio clave para articular el conocimiento matemático, el interés del aprendiz y el medio social.

4.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

Al precisar la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) como fundamento teórico para la presente investigación, se tomaron como principales referentes los aportes de Cantoral et al. (2014), Cordero et al. (2015), Caballero (2018) y Arciniegas (2023). Desde esta perspectiva, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se comprenden como procesos de construcción social del conocimiento, en los que el saber matemático adquiere sentido a partir de las prácticas desarrolladas por los estudiantes en contextos culturales e históricos

específicos. En consecuencia, la TSME tiene como propósito democratizar el aprendizaje de las matemáticas, lo que implica, según Caballero (2018, como se citó en Cantoral, 2016), explorar las diversas formas del pensamiento matemático tanto dentro como fuera de la escuela y modelar las dinámicas mediante las cuales dicho conocimiento se construye, se comparte y se legitima socialmente a través de prácticas aceptadas por una comunidad.

Bajo esta concepción, el aprendizaje matemático deja de entenderse como la simple apropiación de conceptos formales para reconocerse como una actividad humana que emerge de la necesidad de interpretar, comprender y resolver situaciones propias de la realidad. Así, la matemática no constituye un conocimiento aislado de la experiencia cotidiana, sino una herramienta que se resignifica continuamente en función de los problemas, necesidades e interacciones que experimentan las personas en diferentes escenarios sociales. Esta visión resulta especialmente relevante para la presente investigación, puesto que orienta la construcción de un diseño de aprendizaje en el que los estudiantes atribuyen significado a la función lineal a partir del análisis de una situación contextualizada vinculada con la movilidad urbana y la negociación del costo de un servicio de transporte.

Desde la TSME, el problema central de la educación matemática no radica en la constitución de objetos abstractos ni en la transmisión de definiciones formales, sino en la construcción de significados compartidos mediante el uso culturalmente situado del conocimiento. Esta postura surge como respuesta crítica a una visión tradicional que concebía el saber matemático exclusivamente como el dominio de conceptos, relaciones y procedimientos descontextualizados. Frente a ello, la socioepistemología amplía la comprensión del conocimiento matemático al incorporar, además de las dimensiones cognitiva y procedimental, una perspectiva epistemológica, didáctica y sociocultural que reconoce el papel de las prácticas sociales en la producción y resignificación del saber.

En este sentido, aprender matemáticas implica participar en actividades donde el conocimiento cobra sentido a partir de su uso, de las interacciones entre los estudiantes y de las necesidades que emergen en un contexto determinado. La escuela, por tanto, deja de ser el único escenario donde se produce el conocimiento matemático y pasa a constituirse en un espacio que articula las experiencias cotidianas de los estudiantes con los procesos de institucionalización del

saber. Esta concepción representa un cambio de enfoque que desplaza el interés desde la matemática concebida como un conjunto de objetos acabados hacia la matemática entendida como una práctica social en permanente construcción y transformación.

De acuerdo con Cantoral et al. (2014), la TSME se sustenta en cuatro principios fundamentales que orientan la comprensión de los procesos de construcción del conocimiento matemático. El primero corresponde a la *racionalidad contextualizada*, la cual reconoce que las formas de razonamiento dependen de las condiciones culturales, sociales e históricas en las que actúan los individuos. En segundo lugar, el *relativismo epistemológico* plantea que los significados contruidos por quien aprende deben comprenderse desde su propio contexto y experiencia, aceptando que estos pueden diferir de aquellos legitimados por una comunidad científica o escolar. El tercer principio, la *resignificación progresiva*, explica que los conocimientos se transforman continuamente conforme las personas enfrentan nuevas experiencias y establecen nuevas relaciones con su entorno. Finalmente, los *argumentos y la orientación de la actividad humana* resaltan que las acciones de los sujetos responden a propósitos concretos y que es precisamente en el desarrollo de dichas actividades donde el conocimiento matemático adquiere sentido.

Estos principios ofrecen una base conceptual para comprender por qué las situaciones de aprendizaje deben partir de contextos cercanos a la realidad de los estudiantes. Cuando las tareas escolares recuperan problemáticas presentes en la vida cotidiana, los estudiantes encuentran razones para movilizar conocimientos, construir estrategias, establecer relaciones entre magnitudes y justificar sus decisiones matemáticas. En consecuencia, el contexto deja de cumplir una función meramente ilustrativa para convertirse en el escenario donde el conocimiento se produce, se valida y se resignifica mediante la interacción entre los sujetos y las prácticas que desarrollan.

Desde esta perspectiva, la vivencia cotidiana constituye un referente esencial para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Lo que el estudiante aprende debe mantener una estrecha relación con las experiencias que vive como ciudadano, permitiéndole reconocer la utilidad social del conocimiento matemático y comprender que este surge para dar respuesta a necesidades concretas. Por ello, la TSME propone modelar la construcción social del conocimiento matemático, entendiendo que dicho conocimiento no es estático ni definitivo, sino que se

transforma constantemente a través de su uso. Como señalan Cantoral et al. (2014), el saber matemático.

"se construye, reconstruye, significa y resignifica, se le ubica en el tiempo y el espacio, se le explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona la opción constructiva desde la perspectiva histórica, cultural e institucional, para que, en definitiva, se le rediseñe con fines didácticos. Esto es, en definitiva, que el saber se problematiza" (p. 97).

Esta concepción del conocimiento matemático tiene implicaciones directas en el diseño de la presente investigación. En lugar de organizar la enseñanza alrededor de la exposición de conceptos y procedimientos, se plantea una situación de aprendizaje que sitúa a los estudiantes frente a un problema auténtico, favoreciendo la movilización de conocimientos mediante la interpretación, comparación, predicción, estimación y validación de relaciones de variación y cambio. De esta manera, el estudiante construye significados sobre la función lineal a partir de la necesidad de comprender un fenómeno de su entorno, lo que favorece procesos de resignificación coherentes con los principios de la TSME.

En consecuencia, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa constituye el eje articulador que orienta la construcción del diseño de aprendizaje desarrollado en esta investigación. Desde sus postulados, la modelación matemática deja de entenderse únicamente como una estrategia metodológica y se configura como una práctica social que posibilita la problematización de situaciones reales, la movilización del conocimiento en uso y la construcción compartida de significados matemáticos. Así, la TSME proporciona el fundamento epistemológico y didáctico que justifica la incorporación de procesos de modelación en el aula, mientras que la modelación matemática materializa dichos principios mediante actividades contextualizadas que permiten a los estudiantes comprender la función lineal desde experiencias significativas. La integración de ambos referentes sustenta la construcción del diseño de aprendizaje, al promover escenarios donde el conocimiento matemático emerge de las prácticas sociales, se resignifica en la interacción con el contexto y adquiere sentido a partir de la resolución de problemas propios de la realidad de los estudiantes.

4.2 Situaciones de variación y cambio

En este apartado se presentan los principales referentes teóricos relacionados con el pensamiento variacional, tomando como ejes conceptuales las nociones de variación y cambio. Su estudio resulta fundamental para la presente investigación, debido a que la comprensión de la función lineal trasciende la manipulación de expresiones algebraicas y exige que los estudiantes reconozcan, interpreten y expliquen relaciones de dependencia entre cantidades que cambian de manera simultánea en contextos significativos. Desde esta perspectiva, el pensamiento variacional constituye el marco conceptual que orienta la comprensión de los fenómenos de cambio, mientras que las prácticas variacionales proporcionan las acciones mediante las cuales dichos fenómenos pueden analizarse, representarse y comunicarse en el aula.

En primer lugar, para hablar sobre pensamiento variacional se debe recurrir a los documentos nacionales e internacionales que son referentes en cuanto a qué enseñar y cómo enseñar el pensamiento variacional.

Desde los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas en Colombia se identifica el pensamiento variacional con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sea verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. De lo anterior se afirma que el objetivo de este pensamiento consiste en la solución de problemas basados en el estudio de la variación y el cambio y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales, sociales y la matemática.

Por otro lado, para desarrollar el pensamiento variacional el MEN (2006) recomienda trabajar las siguientes actividades con el propósito de preparar a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. Las actividades son:

Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término o mejor los dos o tres

siguientes, oralmente o escrito o pictóricamente y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizar (pg. 67)

Las nociones y los conceptos propios del pensamiento variacional son: la constante, las variables (dependiente e independiente), la función, la razón o tasa de cambio, los diferentes modelos de funciones (lineal y no lineal), las relaciones de desigualdades, el manejo de ecuaciones e inecuaciones.

Como todo nuevo concepto a aprender requiere de un proceso que normalmente es lento y complejo, de igual forma el aprender los conceptos y nociones propias del pensamiento variacional, sin embargo, es indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables. Además, las situaciones de aprendizaje deben dar múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, su puesta a prueba, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta generalizada.

El segundo documento referencial son los NCTM (2000) el cual aborda el pensamiento variacional a través del estándar del “Álgebra”. A través de este estándar se pretende profundizar en el estudio del cambio y la abstracción de patrones y estructuras matemáticas para llegar a comprender conceptos matemáticos superiores con mayor sentido, significativos para los estudiantes y bajo la mirada del aprendizaje para la comprensión.

De los conceptos a resaltar están: la familia de función, las ecuaciones e inecuaciones, las relaciones y propiedades del álgebra simbólica, las diferentes representaciones gráfica, tabular, simbólica y verbal, finalmente que todo lo anterior no se quede desde el plano conceptual sino que se hagan ajustes razonables para abordarlo desde el proceso de la modelación, a través del estudio de fenómenos del mundo real para desarrollar comprensión y aprendizaje significativo en los estudiantes.

Una mirada desde la TSME

El estudio y la variación en situaciones de predicción posibilita el análisis de acciones como: pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente, que evidencian el desenvolvimiento de la persona en la construcción de conocimiento. Por tanto, contribuye notablemente en el desarrollo del pensamiento variacional en la medida en que se centra su atención en estudiar la diversidad de formas como los estudiantes reconocen el cambio y la variación de un fenómeno, además, cómo estas nociones se ponen en juego y contribuyen en la construcción social del conocimiento matemático. De tal forma que en este apartado se presenta el estudio de situaciones de variación y cambio a partir de Caballero (2018) y Arciniegas (2023).

El pensamiento variacional del individuo se ve reflejado en el lenguaje que construye y va perfeccionando para lograr explicar y comunicar sus ideas, es por ello por lo que, la TSME distingue *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (PyLV) como una línea de investigación que “se encarga de estudiar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social” (Caballero, 2018, p.18).

Las nociones protagonistas son *el cambio y la variación*, que no sólo hacen parte del entorno escolar, sino que se encuentran inmersos en todos los ámbitos de la vida diaria. Al igual que muchas otras nociones fundamentales de la matemática, la noción de variación y cambio surgió de la actividad y necesidad inherente al ser humano, la penuria de saber qué pasaría después, o qué pasa sí, *la predicción*, ya que diversas situaciones dependientes del tiempo no permitían pensar en cuáles eran los resultados venideros por tanto, a partir de allí empezaron a surgir diversos mecanismos para tratar de representar, modelar comportamientos basados en el estudio del cambio y orientados por la práctica social que daba sentido a la variación.

El fortalecimiento de dichas nociones se orienta a que es el punto inicial para la construcción de significados de objetos matemáticos más compuestos como derivada y pendiente, así que, juega un papel primordial en el aprendizaje del cálculo diferencial y consecutivos. Sin embargo, en ocasiones se confunde el estudio de la variación desde la creación y operatividad de modelos reducidos a expresiones algebraicas, pero, se debe reconocer que la atención en la operatividad de los conceptos no es suficiente para la construcción de la noción de variación debido a que no permite la transversalidad del saber matemático, para referir a la transferencia de

definiciones y procedimientos de un contexto a otro. Allí juega un papel importante la modelación como un proceso que permite movilizar la matemática en el estudio del fenómeno al precisar que, la modelación no se define como un proceso cíclico que usa expresiones matemáticas para resolver problemas sino en la creación de un modelo matemático para resolver e interpretar el problema y sus resultados a la luz del contexto.

Por tal razón, se distingue la matemática escolar y la matemática funcional en otras palabras, una matemática del mundo real al conjugar momentos donde se trasciende y resignifica el objeto matemático en cuestión al tomar como punto de partida la práctica social como fuente de reorganización de la matemática y el rediseño de la matemática escolar (Cordero 2006 citado por Arciniegas, 2023).

La noción de variación y cambio

La variación y el cambio son nociones que se relacionan desde la cualificación y cuantificación del cambio al explicar las razones del fenómeno, lo observable, lo que se puede calcular, cómo medirlo y por tanto cómo construir una interpretación variacional de la situación.

De tal forma que, para llegar a precisar la noción de variación primero se debe tener claridad de cómo se construye y es definido el cambio. precisan que, cambio se refiere a toda modificación que tiene el valor de una variable, por tanto, alude a una cualidad que es cuantificada a razón de una transformación que se dio en el comportamiento. Entonces, dicha cualidad al ser medible es percibida por los sentidos, sin embargo, percibir el cambio y proveer de situaciones que incentiven el estudio del cambio no son suficientes para que se dé la construcción de la noción de variación.

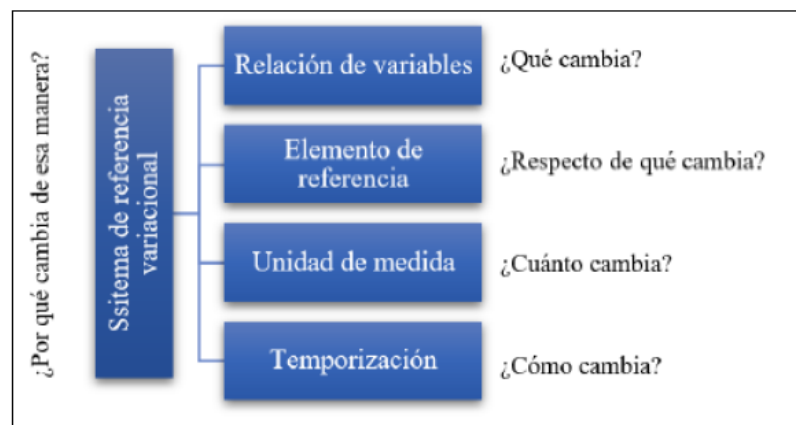
Más allá de los elementos observables y medibles, *la variación* no está presente de forma explícita, no se percibe por los sentidos sino con el pensamiento pues, responde a la abstracción de propiedades y características del cambio. Por lo tanto, al analizar la evolución del cambio en un intervalo y el reconocimiento de porqué las variables cambian y cómo lo hacen, da un acercamiento más preciso hacia situaciones de cambio con fines predictivos.

La noción de variación permite articular significados y la interpretación del proceso que se inició con la cuantificación del cambio que se puede dar entre dos o más variables en tanto, el término de variación también amplía su visión al incluir la covariación, al aceptar que dos variables

pueden cambiar juntas, en palabras de Caballero (2018) “partimos de la premisa de que las cantidades no cambian de manera independiente, se requiere de otra cantidad para determinar que la primera ha cambiado” (p.17).

Así, la construcción de la noción de variación desde el propósito de interpretar cómo se disponen las características, se da en torno a cinco interrogantes específicos correspondientes a los elementos del sistema referencial variacional: **¿qué cambia?**, **¿respecto de qué cambia?**, **¿cómo cambia?**, **¿cuánto cambia?**, y **¿por qué cambia de esa manera?**, observe la figura 1.

Figura 1. Elementos del sistema referencial variacional



Nota: tomado de causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Caballero, 2018, p.99).

Al considerar que, al estudiar la evolución del cambio en un intervalo, se deberá tener en cuenta el carácter estable del cambio, la identificación de regularidades en dicha evolución y lo más importante, la toma de conciencia a luz del fenómeno estudiado.

Caracterización del pensamiento variacional a partir de Prácticas Variacionales

Este apartado toma lo descrito por Caballero (2018) al cuestionarse sobre ¿cómo promover el desarrollo del PyLV? desde su hipótesis de que la temporización y causalidad como elementos trascendentales en la construcción de la noción de variación se articulan con el sistema de referencia variacional, pues indica que la temporización discretiza los fenómenos de cambio en estados intermedios, lo cual implica el desarrollo de prácticas predictivas de las cuales emergerá la

variación sucesiva y el carácter estable del cambio, al responder ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia? al explorar y construir conocimiento sobre la medición del cambio, el análisis de su evolución y el reconocimiento de porqué las variables cambian de la forma en que lo hacen. Por tanto, estos procesos se reflejarán a través de formas específicas de cuantificar el cambio lo que corresponde a las *Prácticas Variacionales*.

Las **Prácticas Variacionales** se orientan al desarrollo de acciones para operar el cambio y la variación con fines predictivos lo cual implica, formas particulares de razonar y actuar ante una situación de cambio, prácticas como la *comparación*, la *seriación*, *predicción* y *estimación* que evidenciaran un carácter evolutivo desde una evaluación pragmática en el paso por cada una de ellas.

Comparación: acción de establecer diferencias entre dos estados, uno anterior y uno posterior, o bien dos estados equivalentes de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y cuantificar el cambio. Se puede evidenciar de dos formas: por medio de una diferencia y otra, a través de un cociente. Es importante aclarar que, la comparación se debe dar entre elementos de la misma naturaleza o que estén relacionados de algún modo.

Esta práctica variacional es el primer pilar que abre la puerta para pensar en variación, no se puede hablar de variación si no se hacen comparaciones entre diferentes estados del mismo fenómeno o bien entre estados equivalentes de diferentes fenómenos. Su objetivo es identificar qué elementos se están comparando, respecto de qué se está comparando y cómo se realiza esa comparación (cociente o diferencia). Algunos indicadores verbales o de ejecución, de esta práctica variacional son:

- Más o menos grande que....
- Más o menos rápido que...
- Dibujos, esquemas, símbolos que expresen una diferencia de valor en dos cantidades.

Seriación: se trata en analizar estados consecutivos de un fenómeno y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional en el conjunto total o parcial de esos estados. Consiste en organizar e identificar una

lógica a un conjunto finito de comparaciones que posibilite determinar el carácter estable del cambio.

Esta práctica se logra evidenciar cuando el estudiante articula varios estados consecutivos con el objetivo de encontrar una regularidad o patrón en el conjunto total o parcial entre ellos. Por lo tanto, se manifiesta como una organización de comparaciones de estados sucesivos.

Predicción: acción de anticipar un estado o valor específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen. Esta práctica se orienta a proveer el estado o valor futuro en una representación, por ejemplo, identificar el carácter estable del cambio en una sucesión numérica. También es posible caracterizar esta práctica como una predicción local.

Se logra evidenciar la predicción a manera de formulación aritmética, algebraica o analítica que tiene su origen en las prácticas anteriores o en la apreciación del valor de una variable respecto a otra.

Estimación: consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo. O bien, la estimación se refiere a una predicción global.

Se manifiesta como la descripción cualitativa o cuantitativa del comportamiento de una variable en un intervalo a través de descripciones verbales, dibujos, gráficas o indicaciones numéricas.

La diferencia entre la estimación y predicción se centra en que, por ejemplo, la estimación se usa para saber si habrá un crecimiento o disminución en un periodo determinado, la predicción, se encarga de determinar el valor específico en un instante.

En síntesis, el estudio de la variación y el cambio constituye uno de los pilares conceptuales que orientan la presente investigación, al proporcionar los elementos necesarios para comprender la función lineal como una relación entre cantidades que cambian de manera conjunta. Desde la perspectiva socioepistemológica, las prácticas variacionales representan la forma en que los estudiantes movilizan el conocimiento matemático para interpretar fenómenos, identificar regularidades, formular predicciones y construir explicaciones fundamentadas. Por esta razón, las prácticas de comparación, seriación, predicción y estimación no solo orientan el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, sino que también sustentan las decisiones didácticas

adoptadas en el diseño de aprendizaje. Cada una de las actividades propuestas busca favorecer el tránsito progresivo desde la observación del cambio hasta la construcción de modelos que permitan comprender la razón de cambio, la covariación entre variables y el comportamiento de la función lineal en situaciones contextualizadas, consolidando así una articulación coherente entre los fundamentos de la TSME, el estudio de la variación y el diseño de aprendizaje desarrollado en esta investigación.

4.3 Proceso de Modelación

En Colombia, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas imprimen a la enseñanza de esta disciplina un sentido más amplio, orientado a que los estudiantes movilicen sus conocimientos más allá del contexto escolar, enfrentándose a situaciones en las que puedan formular hipótesis, analizar información, tomar decisiones y adaptarse a nuevas circunstancias. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) establece que “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista” (p. 35). Desde esta perspectiva, el desarrollo del pensamiento matemático no puede reducirse a la adquisición de procedimientos formales, sino que requiere propiciar experiencias donde los estudiantes otorguen significado a los conceptos mediante su uso en contextos cercanos. Es precisamente en este escenario donde la modelación matemática adquiere un papel central como una vía para favorecer la comprensión de fenómenos reales y construir conocimiento matemático con sentido.

El proceso de modelación matemática, desde la perspectiva educativa, constituye un campo de investigación en el que convergen diversas intenciones, propósitos y enfoques teóricos. Cada uno de estos enfoques determina distintas maneras de comprender la modelación, así como diferentes tipos de tareas y formas de implementarla en el aula (Villa-Ochoa et al., 2022, como se citó en Niss et al., 2007). No obstante, pese a esta diversidad, existe un elemento común: la modelación reconoce que las matemáticas adquieren significado cuando se utilizan para interpretar, representar, explicar y transformar situaciones provenientes de la realidad.

Esta concepción resulta coherente con los fundamentos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, puesto que ambas perspectivas desplazan la atención desde la enseñanza de objetos matemáticos descontextualizados hacia el estudio de prácticas donde el conocimiento emerge como respuesta a necesidades concretas. Mientras la TSME plantea que el saber matemático se construye y resignifica mediante prácticas sociales, la modelación ofrece un escenario metodológico para que dichas prácticas ocurran en el aula a través del análisis de fenómenos reales. De esta manera, la modelación no constituye únicamente una estrategia didáctica, sino un medio para materializar los principios socioepistemológicos relacionados con el conocimiento en uso, la contextualización y la construcción compartida de significados.

En concordancia con esta postura, el MEN (2006) señala que el desarrollo del pensamiento variacional mantiene una estrecha relación con las formas de pensamiento propias de las ciencias, debido a que los fenómenos de variación y cambio difícilmente pueden comprenderse únicamente desde expresiones algebraicas. Por el contrario, requieren situaciones contextualizadas que permitan observar el comportamiento de las variables, establecer relaciones entre magnitudes, realizar mediciones, formular predicciones, representar los fenómenos mediante diferentes registros gráfico, tabular, algebraico y pictórico e interpretar el comportamiento del cambio. Esta visión coincide con el propósito de la presente investigación, en la medida en que la comprensión de la función lineal se favorece cuando los estudiantes analizan situaciones reales que les exigen interpretar relaciones de dependencia entre variables y justificar matemáticamente sus decisiones.

Desde esta perspectiva, la modelación representa para el profesor una oportunidad para equilibrar la teoría y la práctica de las matemáticas escolares. Como señalan Villa-Ochoa et al. (2022), constituye una alternativa que permite evidenciar la utilidad de las matemáticas y superar enfoques centrados exclusivamente en la transmisión de conceptos. En consecuencia, los estudiantes participan en procesos de observación, exploración, discusión, argumentación, predicción y validación que favorecen la construcción significativa de conceptos matemáticos y fortalecen su capacidad para utilizar las matemáticas como herramienta de análisis de la realidad.

En la misma dirección, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) plantea que todos los estudiantes deben acceder a una formación matemática común, sin que ello implique uniformidad en las formas de aprender. Cada estudiante interpreta, representa y comunica

las situaciones de acuerdo con sus conocimientos previos, intereses y experiencias. Esta diversidad de aproximaciones resulta coherente con la modelación matemática, ya que los problemas contextualizados admiten múltiples estrategias de resolución, diferentes representaciones y variadas formas de argumentación. Así, el aprendizaje deja de orientarse hacia la obtención de respuestas únicas para privilegiar la construcción de explicaciones fundamentadas y la validación colectiva de los procedimientos empleados.

En consecuencia, la modelación también favorece una educación matemática orientada a la formación de ciudadanos capaces de interpretar críticamente los fenómenos de su entorno y tomar decisiones fundamentadas. Stillman (2019) señala que uno de los principales aportes de la modelación consiste en preparar a los estudiantes para afrontar situaciones propias de la vida después de la escuela. En este sentido, enseñar matemáticas implica promover escenarios donde los estudiantes cuestionen, exploren, argumenten y comprendan las razones que sustentan los conocimientos que construyen. Más que formar ejecutores de algoritmos, se busca formar ciudadanos matemáticamente competentes que utilicen las matemáticas para comprender y actuar sobre la realidad.

Estas consideraciones permiten comprender por qué, en la presente investigación, la modelación se adopta como eje metodológico para el diseño de aprendizaje. La selección de esta perspectiva no responde únicamente al interés de contextualizar las actividades, sino a la necesidad de generar escenarios donde los estudiantes construyan significados alrededor de la función lineal mediante el estudio de una situación auténtica relacionada con la movilidad urbana. En consecuencia, las tareas propuestas no se limitan a la aplicación mecánica de procedimientos, sino que buscan favorecer procesos de interpretación, análisis, representación, argumentación y validación que permitan comprender el comportamiento de la variación y el cambio desde una problemática cercana a la experiencia de los estudiantes.

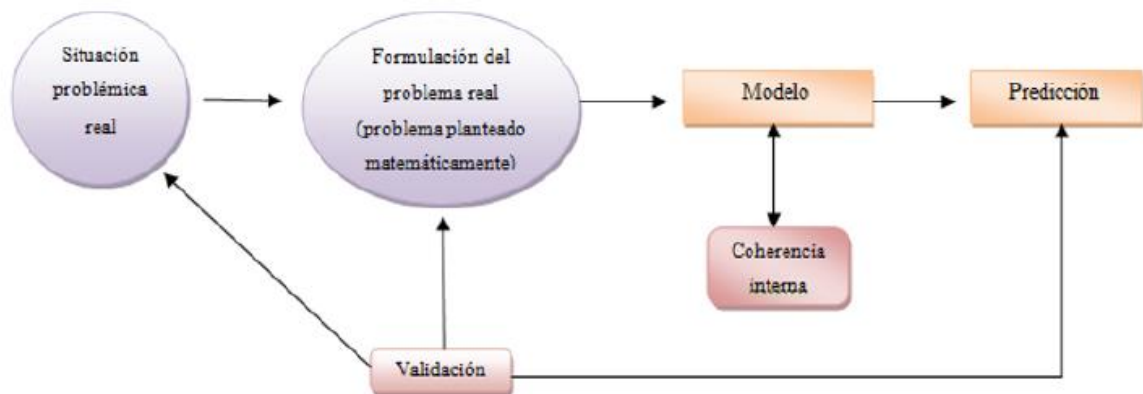
Bajo esta perspectiva se retoman las ideas de Freudenthal (1905-1990), citado en Gravemeijer y Terwel (2000), quien pensaba las matemáticas como una actividad humana y sostenía que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de estrategias de modelación (o matematización), mediante una serie de acciones o fases de la construcción de modelos.

La modelación como proceso se sigue de la siguiente manera:

- I. Identificación de la situación, fenómeno o problema de la cotidianidad del estudiante.
- II. Establecimiento de los supuestos e hipótesis en que se desarrollará el modelo.
- III. Formulación matemática del problema.
- IV. Resolución del problema matemático.
- V. Traducción de las soluciones a la luz del fenómeno.
- VI. Validación del modelo matemático contrastando los resultados con los datos de la situación contextualizada.

Los pasos 2) y 5) dan cuenta del vínculo entre la vida real y las matemáticas.

Figura 2. Ciclo de la Modelación

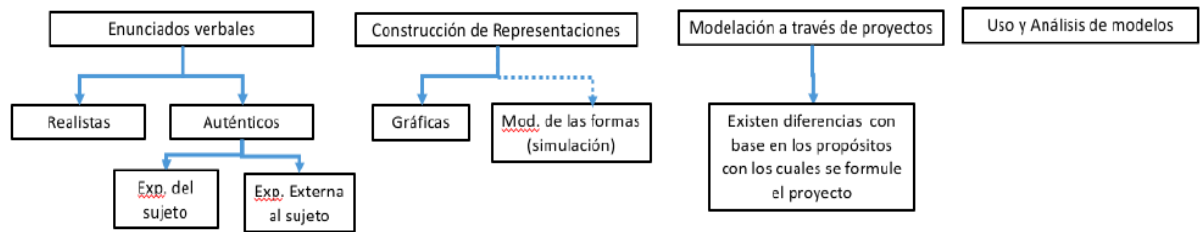


Nota: tomado de Homogeneizar la práctica de la modelación: un reto del sistema educativo colombiano (Olarte, 2019, p.5)

A su vez el tipo de tareas de modelación que se consideraran en esta investigación responde a los caracterizados y mencionados por Villa et al (2017). La clasificación está compuesta por cuatro categorías amplias, a saber: (i) enunciados verbales, (ii) construcción de representaciones, (iii) modelación a través de proyectos, y (iv) uso y análisis de modelos. De algunas de ellas se derivan subcategorías como se observa en la siguiente figura 3. Esta clasificación ofrece criterios didácticos

para seleccionar actividades acordes con los propósitos de aprendizaje y permite establecer una progresión que favorece el tránsito desde la comprensión de situaciones contextualizadas hasta la construcción e interpretación de modelos matemáticos. Por esta razón, dichas categorías constituyen un referente para el diseño de las actividades propuestas en esta investigación.

Figura 3. Categorías y subcategorías de una clasificación alternativa de tareas de modelación.



Nota: tomado de tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas (villa-choa et al. 2017, p.11)

A. Problemas en enunciados verbales: Son textos en los que se describe una situación más o menos familiar y se plantea una pregunta cuantitativa; permiten la comprensión de los elementos clave en el enunciado/problema, la construcción de un modelo matemático de los elementos relevantes y las relaciones implicadas en el enunciado, evaluación si el resultado matemático es interpretado de manera adecuada y razonable, y comunicar la solución obtenida del problema original en el mundo real.

A.1. Enunciados verbales realistas:

Son planteamientos de problemas que utilizan una historia o situación con apariencia de realidad (ya sea cotidiana o incluso imaginada) para presentar un contenido matemático. Aunque incluyen elementos que parecen reales, su objetivo principal no es analizar profundamente esa realidad, sino identificar y trabajar una estructura matemática que está “escondida” dentro del enunciado.

En este tipo de tareas, la situación descrita funciona más como un escenario que como un contexto complejo. Es decir, la “realidad” que se presenta está simplificada y construida de tal

manera que permita resolver el problema con los datos dados, sin necesidad de considerar todos los factores que existirían en una situación real. Por eso, muchas veces el estudiante no necesita cuestionar el contexto, sino traducir la información del lenguaje verbal al lenguaje matemático, realizar los cálculos y obtener una respuesta.

Desde una perspectiva desde la modelación, estos enunciados conectan dos sistemas: uno es el de la situación planteada (que puede ser real o imaginada) y el otro es el matemático. El estudiante construye un modelo matemático a partir de los datos del enunciado, lo utiliza para resolver el problema y luego interpreta el resultado en función de la situación inicial. Sin embargo, esta conexión suele ser limitada, ya que el contexto no se explora en toda su complejidad, sino que se adapta para facilitar la aplicación de un contenido específico. A pesar de sus limitaciones, estos enunciados cumplen un papel importante en el aula. Ayudan a los estudiantes a comprender la información de un problema, a identificar relaciones, a representar situaciones mediante modelos matemáticos y a comunicar resultados.

A.2. Enunciados verbales auténticos:

Son planteamientos de problemas que se construyen a partir de situaciones reales, cercanas y significativas para los estudiantes, donde el contexto no es un simple “adorno”, sino una parte fundamental del problema. En este tipo de enunciados, la situación planteada mantiene su complejidad y no está completamente simplificada, lo que obliga a quien la resuelve a analizar, interpretar y tomar decisiones más allá de aplicar una operación matemática directa.

A diferencia de otros enunciados más tradicionales, aquí no siempre se presenta toda la información lista para usar ni existe un único camino de solución. El estudiante debe comprender la situación, identificar qué datos son relevantes, hacer suposiciones si es necesario y construir un modelo que le permita dar respuesta al problema. Esto implica pensar en la realidad que se está representando y no solo en los números.

En este sentido, los enunciados verbales auténticos están muy relacionados con procesos de modelación matemática más completos. No se trata únicamente de traducir palabras a símbolos, sino de entender un fenómeno, representarlo matemáticamente, obtener resultados y luego

interpretarlos y evaluarlos en el mismo contexto real del que surgieron. Incluso, es posible cuestionar si la respuesta tiene sentido o si sería necesario ajustar el modelo.

Su valor en el aula es grande porque promueven una participación más activa del estudiante. En lugar de limitarse a resolver, el estudiante explora, argumenta, propone ideas y conecta lo aprendido con situaciones de su vida cotidiana o de su entorno. Además, ayudan a desarrollar habilidades como el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la capacidad de justificar respuestas.

B. Construcción de representación:

Si bien la construcción de representaciones es una actividad inherente a la mayoría de las visiones sobre modelación, también es cierto que esta actividad se puede presentar con mayor o menor énfasis dependiendo de los propósitos de la clase y de las visiones que el profesor tenga sobre las matemáticas y su enseñanza. En la literatura pueden reconocerse al menos dos tipos de tareas que se enfocan en la modelación, principalmente, como producción de representaciones.

B.1. Representaciones gráficas

Son una forma de expresar y estudiar un fenómeno mediante gráficos, como planos cartesianos, diagramas o curvas, que permiten visualizar relaciones entre variables. En este tipo de tareas, los estudiantes construyen y analizan gráficos para entender cómo cambian ciertas cantidades y cómo se relacionan entre sí.

Desde la perspectiva de la modelación, estas actividades consisten en traducir una situación matemática a otra forma de representación también matemática. Por ejemplo, pasar de una expresión algebraica a una gráfica, o de una descripción verbal a un esquema visual. Aquí, el énfasis no está en un contexto del mundo real, sino en explorar un fenómeno dentro de las propias matemáticas, identificando variables, estableciendo relaciones y representándolas de diferentes maneras.

Este proceso es valioso porque ayuda a los estudiantes a comprender mejor los conceptos. Al construir una gráfica, no solo trabajan con números o fórmulas, sino que pueden observar

patrones, cambios y comportamientos. Esto favorece la formulación de conjeturas, el razonamiento y la interpretación de resultados.

B.2. Modelación/Simulación de formas

Corresponde a un tipo de trabajo en el que se utilizan herramientas matemáticas, especialmente geométricas y tecnológicas, para representar, reproducir o imitar la forma, el movimiento o el comportamiento de objetos. Esto puede hacerse construyendo modelos desde cero o analizando modelos ya existentes, muchas veces con apoyo de programas de geometría dinámica o simulación.

Existen, principalmente, dos maneras de abordar este tipo de modelación. Por un lado, está la construcción de modelos geométricos para representar objetos reales, como una ventana, una silla o incluso partes del cuerpo. En este caso, se busca reproducir su forma mediante figuras, medidas y relaciones matemáticas. Por otro lado, está el uso de modelos ya construidos para analizar o simular otros fenómenos similares, como el movimiento de un ventilador o el funcionamiento de algún mecanismo.

Desde la perspectiva de la modelación, estas tareas establecen una relación entre dos sistemas: el objeto o fenómeno que se quiere representar y el modelo matemático o digital que se utiliza para hacerlo. Sin embargo, en algunos casos esta relación puede quedarse en un nivel más superficial, ya que se logra la apariencia o la simulación del fenómeno sin necesariamente profundizar en las leyes o variables que lo explican. En otros casos, especialmente cuando se utilizan herramientas más avanzadas, sí se puede llegar a comprender mejor el comportamiento del fenómeno, acercándose a lo que se conoce como modelación computacional.

C. Modelación a través de proyectos:

Es una forma de trabajo en la que las matemáticas se aprenden y se aplican a partir de la exploración de situaciones reales mediante proyectos abiertos. A diferencia de los problemas tradicionales, aquí no se parte de una pregunta cerrada con un único camino de solución, sino de un problema amplio que requiere investigar, analizar información, tomar decisiones y construir respuestas propias.

En este tipo de modelación, los estudiantes trabajan con situaciones que pueden venir de su entorno, de otras disciplinas o incluso de problemáticas sociales. A partir de allí, identifican qué necesitan saber, qué datos deben recoger y qué herramientas matemáticas pueden utilizar. Las matemáticas no aparecen como un contenido previamente dado, sino que van surgiendo en la medida en que se necesitan para comprender y resolver el problema.

Una característica importante de estos proyectos es que implican una relación constante entre dos mundos: el contexto real que se quiere estudiar y las herramientas matemáticas que permiten analizarlo. Este proceso no siempre sigue pasos rígidos, ya que puede cambiar según las decisiones de los estudiantes, las preguntas que surjan y la orientación del profesor. En algunos casos, el proyecto se enfoca en aprender un contenido específico; en otros, busca desarrollar pensamiento crítico, reflexionar sobre situaciones sociales o integrar conocimientos de diferentes áreas.

D. Uso y análisis de modelos

El **uso y análisis de modelos** en matemáticas hace referencia a trabajar con modelos que ya han sido contruidos para representar una situación real o posible, con el fin de comprenderlos, interpretarlos y evaluarlos. Un modelo puede entenderse como una representación, una estructura o una forma de simplificar un fenómeno del mundo para poder estudiarlo con herramientas matemáticas.

En este tipo de trabajo, los estudiantes no empiezan desde cero creando un modelo, sino que parten de uno ya dado. A partir de allí, lo analizan para entender qué información ofrece, qué tipo de relaciones matemáticas utiliza y qué dice sobre el fenómeno que representa. Por ejemplo, pueden estudiar una fórmula, una gráfica o una función y preguntarse qué significa en el contexto del problema.

El proceso no se queda solo en lo matemático. También implica ir más allá del modelo, investigando el fenómeno que se está representando, revisando cómo fue construido el modelo y cuestionando sus supuestos. Esto permite que los estudiantes comprendan que los modelos no son perfectos, sino aproximaciones que tienen límites y que dependen de ciertas decisiones o condiciones.

Desde la perspectiva de la modelación, este tipo de tareas incluye varias acciones importantes: interpretar el modelo, usarlo para obtener resultados, compararlo con la realidad, analizar sus aciertos y reconocer sus limitaciones. Incluso, en algunos casos, los estudiantes pueden proponer mejoras o nuevas formas de representar el fenómeno.

Figura 4. *Formas de implementación de la modelación en el aula*

Nivel	Descripción
I	La/el docente selecciona una situación problémica, la simplifica si fuera necesario, proporciona los datos necesarios para resolverla, construye el modelo matemático y permite que el grupo estudiantil discuta las soluciones del problema bajo su orientación; en este caso, hay mayor participación profesoral en la conducción y orientación de las actividades de modelación.
II	La/el docente propone una situación problémica que debe ser resuelta por las y los estudiantes con su orientación, cediéndoles la responsabilidad de simplificar, recolectar los datos necesarios y proporcionar la solución a la situación problema; en este caso, existe una menor conducción de las actividades de modelación por parte del profesorado.
III	El estudiantado elige un tema matematizable, simplifican y elaboran una situación problema, recolectan los datos necesarios para su resolución y proporcionan la solución; en este caso, todas las etapas son conducidas por el grupo estudiantil guiado por la/el docente, y se evidencia una mayor autonomía de las y los estudiantes en la conducción de las actividades de modelación.

Nota: tomado de (Barbosa, 2001 y citado por Olarte, 2019)

Finalmente, Barbosa (2001) propone tres niveles de implementación de la modelación en el contexto escolar. Para el diseño de aprendizaje desarrollado en esta investigación se consideran únicamente los dos primeros niveles, debido a que corresponden a estudiantes de noveno grado que inician procesos de trabajo desde la modelación matemática. Esta decisión metodológica responde tanto a las características del grupo como a la necesidad de construir progresivamente experiencias de modelación que favorezcan la comprensión de la función lineal sin exigir niveles de autonomía propios de estudiantes con mayor experiencia en este tipo de actividades.

En síntesis, el proceso de modelación constituye el referente metodológico que hace posible materializar los principios planteados por la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Mientras la TSME proporciona el fundamento epistemológico que concibe el conocimiento matemático como una construcción social que adquiere significado mediante su uso,

la modelación ofrece el escenario didáctico donde dichos principios se concretan a través del análisis de situaciones auténticas, la construcción de modelos, la interpretación de resultados y la validación de las soluciones en función del contexto. En consecuencia, la modelación no solo orienta la selección de las tareas y la organización de las actividades propuestas en esta investigación, sino que constituye el medio mediante el cual los estudiantes construyen significados sobre la función lineal desde prácticas contextualizadas de variación y cambio. De esta forma, la articulación entre la TSME y la modelación matemática proporciona la coherencia teórica que sustenta la construcción del diseño de aprendizaje y orienta cada una de las decisiones didácticas adoptadas en la presente investigación.

4.4 Situación de Aprendizaje

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), una situación de aprendizaje se entiende como una tarea o un conjunto de tareas que propician la actividad del sujeto que construye conocimiento, considerando el contexto de significación y el propósito de problematizar el saber a partir del análisis de las interacciones que establecen los individuos, de manera individual y colectiva, con el conocimiento puesto en uso (Arciniegas, 2023, como se citó en Reyes-Gasparini, 2016). En esta perspectiva, el aprendizaje se concibe como un proceso de construcción social en el que los estudiantes atribuyen significado a los objetos matemáticos mediante prácticas contextualizadas, de modo que el conocimiento deja de ser un conjunto de definiciones acabadas para convertirse en una herramienta que permite interpretar y actuar sobre la realidad.

Los planteamientos de Brousseau constituyen un antecedente importante de esta concepción al reconocer que el conocimiento matemático se construye a partir de la resolución de problemas surgidos de necesidades culturales. Desde esta mirada, producir conocimiento implica establecer nuevas relaciones, reorganizar saberes previos y validar las estrategias empleadas de acuerdo con criterios compartidos por una comunidad matemática. Asimismo, el autor plantea la existencia de situaciones fundamentales de aprendizaje, entendidas como aquellas en las que un determinado conocimiento se convierte en la estrategia más pertinente para resolver un problema. No obstante, aunque esta perspectiva destaca el papel del problema en la construcción del

conocimiento, la TSME amplía esta visión al centrar su atención en las prácticas sociales que permiten resignificar el saber y comprender cómo este adquiere funcionalidad en contextos específicos.

En esta misma línea, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019a) propone que las situaciones de aprendizaje deben diseñarse como una secuencia de actividades orientadas al desarrollo progresivo de prácticas matemáticas, tales como medir, ordenar, comparar, establecer relaciones entre magnitudes, formular inferencias y construir predicciones. Desde esta perspectiva, el objetivo no consiste únicamente en resolver una situación problemática, sino en promover una ruta de aprendizaje que conduzca al estudiante desde acciones concretas sobre un fenómeno hasta la construcción de argumentos que le permitan interpretar y modelar su comportamiento. Esta propuesta fortalece los postulados de la TSME, pues sitúa el conocimiento matemático en un contexto de uso donde las acciones de los estudiantes adquieren significado mediante la interacción con el fenómeno estudiado.

En consecuencia, el diseño de una situación de aprendizaje responde a una *ruta pragmática* que inicia con la medición y organización de magnitudes, continúa con la comparación de valores para identificar regularidades y culmina con la formulación de predicciones sobre el comportamiento del fenómeno. El Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019a) señala que esta progresión otorga sentido a la construcción e interpretación de representaciones gráficas, ya que estas dejan de constituir un fin en sí mismas para convertirse en herramientas que permiten reconocer relaciones funcionales y comprender procesos de variación. Esta concepción resulta especialmente pertinente para la presente investigación, dado que la comprensión de la función lineal se fundamenta precisamente en el análisis de la covariación entre magnitudes y en la interpretación de la razón de cambio dentro de un contexto auténtico.

Desde esta perspectiva, la situación de aprendizaje no corresponde a una simple contextualización de contenidos matemáticos ni a la traducción literal de un problema cotidiano. Su propósito consiste en generar condiciones para que los estudiantes movilicen conocimientos previos, establezcan relaciones entre variables, construyan argumentos, validen procedimientos y resignifiquen progresivamente los conceptos matemáticos involucrados. En este sentido, el contexto cumple una función epistemológica, puesto que proporciona las condiciones necesarias

para que el conocimiento emerja de las prácticas desarrolladas por los estudiantes y no únicamente de la explicación del profesor. De esta manera, principios como la racionalidad contextualizada, la resignificación progresiva, el relativismo epistemológico y la funcionalidad del conocimiento, propios de la TSME, orientan el diseño de las actividades propuestas.

En coherencia con estos fundamentos, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019a), retomado por Arciniegas (2023), organiza las situaciones de aprendizaje en tres etapas: factual, procedimental y simbólica. Estas etapas representan una progresión en la construcción del conocimiento y no una secuencia rígida de actividades, ya que cada una prepara las condiciones para que el estudiante avance desde la comprensión concreta de un fenómeno hacia formas cada vez más elaboradas de razonamiento matemático.

La **etapa factual** busca que el estudiante se familiarice con la situación mediante acciones como medir, identificar magnitudes, ordenar datos, comparar valores y reconocer relaciones iniciales entre las variables. Las preguntas formuladas en este momento privilegian expresiones vinculadas con la experiencia cotidiana, como "mayor que", "menor que", "más cerca de" o "más lejos de", favoreciendo que el estudiante construya significados a partir de la observación y comparación de los datos. El propósito no consiste únicamente en obtener información, sino en desarrollar las primeras formas de razonamiento que posteriormente servirán de base para interpretar representaciones más complejas.

La **etapa procedimental** promueve la reorganización de esas primeras ideas mediante la construcción de procedimientos, criterios de comparación y argumentos que permitan interpretar el comportamiento de las variables. En esta etapa, muchas de las preguntas formuladas durante la fase factual se replantean utilizando nuevas representaciones, especialmente gráficas, con el propósito de que los estudiantes establezcan relaciones entre los datos obtenidos y las representaciones construidas. De esta forma, el énfasis se desplaza desde la simple comparación de valores hacia la comprensión de regularidades y tendencias presentes en el fenómeno.

Finalmente, la **etapa simbólica** orienta la actividad del estudiante hacia la interpretación de las representaciones construidas, el análisis del comportamiento de las variables y la formulación de inferencias y predicciones. El tratamiento gráfico adquiere sentido porque se apoya en las acciones desarrolladas en las etapas anteriores, permitiendo que los estudiantes expliquen el

comportamiento del fenómeno, identifiquen relaciones funcionales y construyan modelos que representen la covariación entre las magnitudes involucradas. Así, la representación simbólica deja de entenderse como un procedimiento aislado para convertirse en una herramienta de interpretación y explicación del fenómeno estudiado.

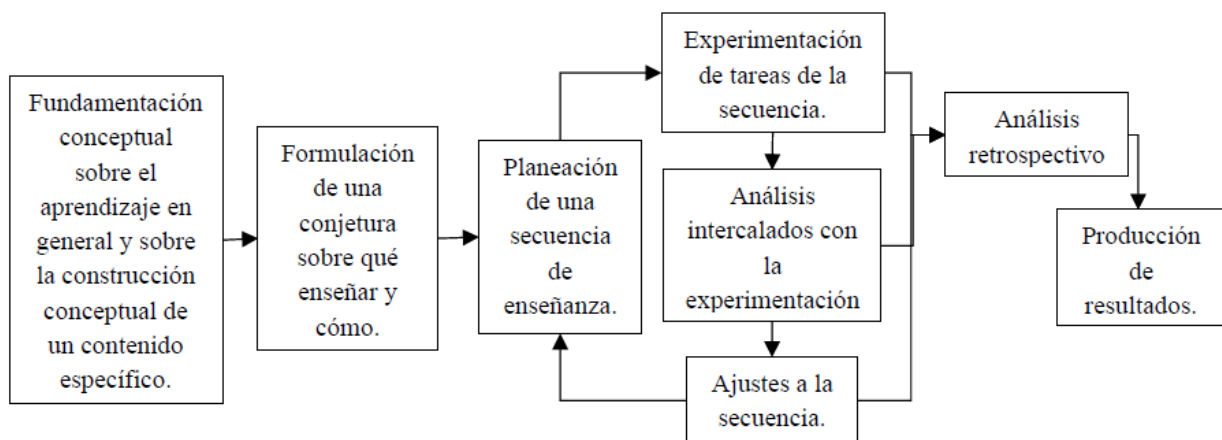
En consecuencia, la estructura factual, procedimental y simbólica constituye mucho más que una organización metodológica de actividades; representa una forma de comprender cómo se construye el conocimiento matemático desde una perspectiva socioepistemológica. En la presente investigación, esta progresión orienta el diseño de aprendizaje al articular las prácticas variacionales, el proceso de modelación y el estudio de la función lineal dentro de una situación auténtica relacionada con el contexto de los estudiantes. De esta manera, las actividades propuestas se organizan siguiendo una ruta que parte de la observación, medición y comparación de magnitudes, avanza hacia la identificación de regularidades y culmina con la construcción de representaciones, modelos y predicciones que permiten comprender la razón de cambio y las relaciones funcionales. Así, la situación de aprendizaje se convierte en el escenario donde convergen los principios de la TSME, la modelación matemática y las prácticas variacionales, proporcionando la coherencia teórica que sustenta la construcción del diseño de aprendizaje desarrollado en esta investigación.

5. Metodología

En este apartado se describe el proceso metodológico de la presente investigación, el cual está orientado bajo la metodología Estrategias Investigativa Basada en el diseño (Camargo (2021). Esta estrategia corresponde a un conjunto de procedimientos cualitativos que son usados en la educación matemática como plan de ejecución para responder a un problema en la enseñanza o para producir resultados útiles y relevantes en el aprendizaje de los objetos matemáticos. Esta estrategia se define como aquella en la que los investigadores se preguntan ¿qué pasaría si ...?, sobre algún fenómeno en particular. También se resalta el enfoque social que adopta la metodología, ya que busca generar a través del diseño una contribución a la naturaleza social y cultural de la matemática, la enseñanza y/o el aprendizaje.

De lo anterior se plantea una hipótesis de trabajo sobre la cual se indaga sobre sí se garantizan ciertas condiciones, cómo beneficiaría la enseñanza de la función lineal a través del diseño de una situación de aprendizaje que apoye la enseñanza del objeto matemático a través del proceso de modelación y las prácticas variacionales en estudiantes de grado noveno. La investigación pretende desarrollar conocimiento estructurado en los estudiantes por medio de la continua reflexión de acciones concretas que operen el cambio y la variación con fines predictivos y a su vez conlleven al estudiante a una forma diferente de razonar, argumentar y dar explicación del cambio en fenómenos presentados a través de la modelación. De esta forma se cree que se romperá con la mecanización y ejecución de acciones sin ningún fundamento lógico dotando a los estudiantes de un conocimiento más profundo, útil y comprensivo.

Figura 5. Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.

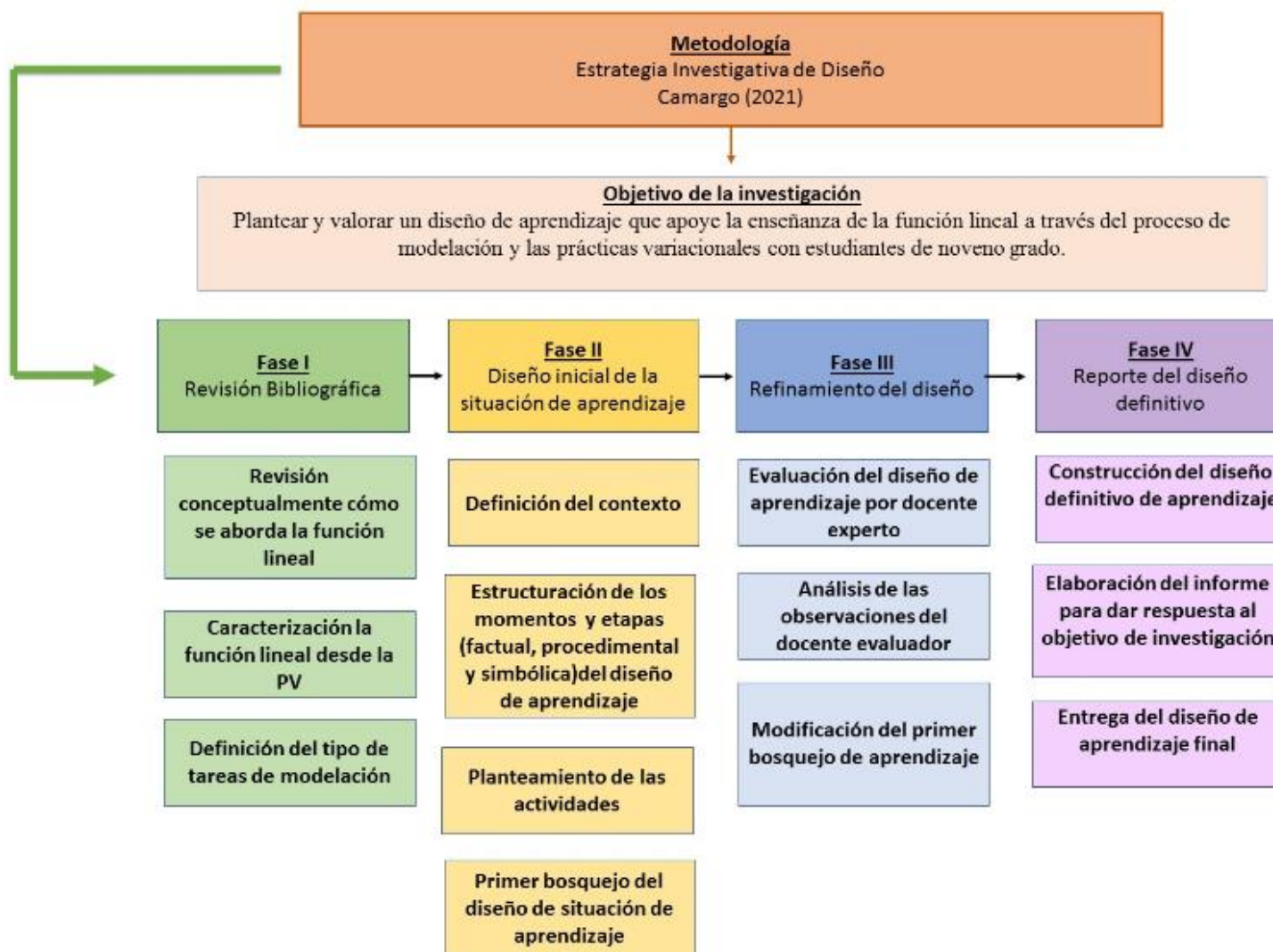


Nota. Tomado de "Estrategias cualitativa de investigación en educación matemática" (Camargo, 2021, p.75).

Esto se desarrollará a través de las cuatro fases correspondientes al diseño metodológico de la investigación. La primera fase corresponde a la revisión bibliográfica, la segunda fase corresponde al diseño inicial de la situación de aprendizaje, la tercera fase corresponde al refinamiento del diseño, por último, la cuarta fase responde al reporte del diseño definitivo.

A continuación, en la Figura 6 se presenta el proceso metodológico que orientará el desarrollo de esta investigación. Asimismo, se realiza una descripción puntual de los aspectos más relevantes que se deben considerar en cada una de las fases de trabajo.

Figura 6. Etapas Metodológicas



5.1 Fase I. Revisión Bibliográfica

Constituye al primer momento clave para la investigación, se hace necesario documentar sobre qué se enseña y cómo es definido el concepto de función lineal desde la variabilidad de tesis, revistas y repositorios institucionales que reposan en las bases de datos. Una vez analizada esta información, se caracterizará la función lineal desde las prácticas variacionales y la modelación, siendo estos ejes conceptuales los núcleos principales de esta investigación, se debe seleccionar las investigaciones más acordes a los propósitos deseados y sobre ellos proponer una forma de diseño que pueda abordar la enseñanza de función lineal desde estas perspectivas. El diseño debe responder a qué enseñar de la función lineal a través de la caracterización de las prácticas variacionales y cómo enseñar la función lineal por medio de la definición del tipo de tareas que se proponen sobre la modelación.

Se debe tener presente que el diseño es elaborado para un grupo de estudiantes de grado noveno con el propósito de que reflexionen sobre la variación constante bajo la situación de toma de decisiones para proponer el precio de un servicio de transporte por plataforma de InDriver, por medio de esta situación se pretende llevar al estudiante a que reflexione sobre como a través de un modelo va indagando, cuestionando y llevando a cabo acciones puntuales para responder una serie de preguntas orientadas a la enseñanza de la función lineal.

Dentro de las acciones que propone el modelo, se proponen la caracterización de la función lineal desde las prácticas variacionales,

5.1.1 *Cómo se aborda la función lineal*

En este apartado definimos el concepto de función lineal, la variación y el cambio, el concepto de pendiente de la recta y la razón de cambio a partir de la situación de aprendizaje.

Tomando como referencia los aportes de Muñoz (2012), Martínez (2020), Gonzales Polo (2021), Solarte (2018), y Arciniegas (2022) se describirán los conceptos enlistados anteriormente desde las ideas del Pensamiento Variacional, las prácticas variacionales y las fases del diseño de situación de aprendizaje.

En el contexto de la situación de aprendizaje propuesta, la variable independiente x representa la distancia recorrida, medida en kilómetros (Km), desde el momento en que un conductor de la plataforma de InDriver recoge a un usuario hasta su destino final. Por su parte, la variable dependiente y corresponde al valor monetario, expresado en pesos colombianos (COP), que el usuario ofrece y paga por el servicio. En consecuencia, la regla de correspondencia que modela dicha situación se interpreta como la relación existente entre el costo del servicio y la distancia recorrida, la cual puede representarse mediante la expresión $f(x) = y$, donde el valor de la función depende directamente de la cantidad de kilómetros transitados.

A partir de la relación funcional previamente establecida, es posible avanzar hacia la formalización del concepto de función lineal mediante la incorporación de la noción de pendiente y su interpretación como razón de cambio. En este sentido, la pendiente de una función describe la variación que experimenta la variable dependiente y frente a cambios en la variable independiente x , lo cual resulta fundamental para analizar situaciones de carácter variacional como la planteada.

Desde una perspectiva matemática, la pendiente se define como la razón de cambio constante entre dos variables y puede expresarse como el cociente entre la variación de y y la variación de x . Esta relación se representa mediante la expresión:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En el contexto de la situación de aprendizaje, esta razón de cambio adquiere un significado concreto: indica cuánto varía el costo del servicio (en pesos colombianos) por cada kilómetro adicional recorrido. Es decir, la pendiente representa el valor monetario que el usuario paga por unidad de distancia, constituyéndose así en un elemento clave para comprender la estructura del modelo.

De este modo, cuando dicha razón de cambio se mantiene constante, se configura una función lineal, la cual puede expresarse en su forma general como:

$$f(x) = mx + b$$

Donde m corresponde a la pendiente o razón de cambio, y b representa el valor inicial o costo base del servicio, es decir, el monto a pagar cuando la distancia recorrida es igual a cero. En

el caso particular de la plataforma InDriver, esta constante puede interpretarse como una tarifa mínima o un valor inicial acordado entre el conductor y el pasajero antes de iniciar el recorrido.

Figura 7. Partes de una función lineal

$$y = mx + b$$

Pendiente

Intercepto con el eje Y

Nota: tomada de MatesFaciles. (https://lasmatesfaciles.com/2019/03/17/como-graficar-funciones-lineales/#google_vignette)

En consecuencia, la articulación entre función, pendiente y razón de cambio permite no solo formalizar matemáticamente la situación planteada, sino también dotarla de significado en un contexto real, facilitando la comprensión de cómo las variaciones en la distancia influyen directamente en el costo del servicio. Esta conexión favorece el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, al permitirles interpretar, modelar y analizar fenómenos cotidianos a partir del lenguaje algebraico y funcional.

Finalmente, el estudio del cambio y la variación constituye un eje central en la construcción del pensamiento matemático, en la medida en que permite analizar, comprender y predecir fenómenos a partir de la identificación de transformaciones entre variables. En este sentido, de acuerdo con Caballero (2018), el pensamiento variacional se manifiesta en el lenguaje que el individuo construye para explicar, argumentar y comunicar sus ideas en torno a situaciones de cambio, lo cual se articula con la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), orientada al estudio de los procesos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos asociados a la variación. Así, las nociones de cambio y variación no solo emergen del ámbito escolar, sino que tienen su origen en la necesidad humana de anticipar

comportamientos y predecir resultados ante situaciones dependientes del tiempo. En términos conceptuales, el cambio se entiende como toda modificación en el valor de una variable, es decir, una cualidad observable y cuantificable; mientras que la variación implica un nivel de abstracción mayor, al centrarse en el análisis de cómo y por qué dichas variables cambian, así como en la relación de covariación que puede establecerse entre ellas. De este modo, la variación permite interpretar y dar sentido a los procesos de transformación, constituyéndose en un fundamento para la comprensión de nociones matemáticas más complejas.

En correspondencia con lo anterior, la situación de aprendizaje propuesta se orienta a que el estudiante construya progresivamente la noción de variación y cambio a partir de un contexto significativo, como lo es la relación entre la distancia recorrida y el costo de un servicio de transporte. A través de este escenario, se busca que el estudiante no solo identifique qué cambia (el costo), respecto de qué cambia (la distancia), sino también cómo cambia, cuánto cambia y por qué lo hace de esa manera. Esta aproximación permite trascender la visión reduccionista de la matemática centrada únicamente en la manipulación algebraica, para dar paso a una comprensión más amplia en la que el fenómeno es interpretado desde su comportamiento y significado en el contexto. En este sentido, la modelación juega un papel fundamental, al posibilitar la construcción de un modelo matemático que no solo represente la situación, sino que también permita analizarla, interpretarla y resignificarla en función de las condiciones reales del fenómeno.

Por último, el desarrollo de la situación de aprendizaje se organiza en tres etapas secuenciales factual, procedimental y simbólica en coherencia con los planteamientos del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019), e integra de manera explícita las prácticas variacionales como eje para la comprensión del cambio. En la *etapa factual*, el estudiante se familiariza con la situación modelada (relación entre distancia y costo del servicio), identificando magnitudes y estableciendo primeras **comparaciones** entre valores ,por ejemplo, cuánto aumenta el costo cuando la distancia pasa de 2 km a 4 km, ya sea mediante diferencias o cocientes, lo que le permite reconocer que existe un cambio. En la *etapa procedimental*, el estudiante avanza hacia la **seriación**, organizando datos consecutivos en tablas, listas o representaciones gráficas, con el propósito de identificar regularidades en el comportamiento de las variables; aquí construye argumentos al analizar patrones, como el incremento constante del

costo por cada kilómetro adicional, y justifica sus observaciones apoyándose en distintas representaciones (numéricas, gráficas o verbales). Finalmente, en la *etapa simbólica*, el estudiante consolida estas comprensiones mediante procesos de **predicción** y **estimación**: por un lado, predice valores específicos (por ejemplo, el costo para una distancia no registrada) a partir de la regularidad identificada; por otro, estima tendencias globales del fenómeno (como el crecimiento del costo en un intervalo de distancias), interpretando el comportamiento más allá de datos puntuales. De esta manera, el estudiante no se limita a la manipulación algebraica, sino que desarrolla acciones de razonamiento variacional que le permiten explicar, argumentar y justificar sus respuestas, construyendo un conocimiento matemático más profundo y funcional en el contexto de la situación planteada.

5.1.2 Caracterización de la función lineal desde las PV

La caracterización de la función lineal en el presente diseño de aprendizaje se fundamenta en el desarrollo progresivo de las **prácticas variacionales**, particularmente la **comparación** y la **seriación**, como acciones iniciales que permiten al estudiante reconocer el cambio en un fenómeno contextualizado. A partir de situaciones cercanas, como la relación entre distancia y costo en el uso de InDriver, el estudiante establece comparaciones entre distintos estados del fenómeno, identificando cuánto varía una magnitud respecto a otra, ya sea mediante diferencias o cocientes. Estas acciones se complementan con la seriación, al organizar datos en tablas y gráficos que permiten analizar comportamientos consecutivos y reconocer regularidades. Desde la perspectiva de la modelación, estas prácticas corresponden a un primer nivel en el que el estudiante traduce un **enunciado verbal** a representaciones como tablas y gráficos, construyendo significados a partir de la experiencia y dando los primeros indicios de un comportamiento lineal, caracterizado por una variación constante entre las variables.

En un segundo nivel, la función lineal se caracteriza a partir del fortalecimiento de las prácticas de **predicción** y **estimación**, las cuales emergen cuando el estudiante, apoyado en las regularidades identificadas previamente, es capaz de anticipar valores no explícitos y describir tendencias del fenómeno. En este punto, la modelación adquiere un papel central, ya que el estudiante no solo interpreta datos, sino que construye un modelo que le permite generalizar la

relación entre variables mediante expresiones algebraicas del tipo $f(x) = mx + b$. La pendiente m se comprende como la razón de cambio constante, mientras que el término independiente b se interpreta desde el contexto como un valor inicial o condición de partida. Las tareas de **estimación de valores, lectura de gráficos y completar las tablas** favorecen la transición entre representaciones y consolidan la comprensión de la linealidad como un comportamiento predecible, donde los cambios siguen un patrón constante.

Finalmente, la caracterización de la función lineal se consolida cuando el estudiante logra articular todas las prácticas variacionales en procesos de análisis, validación y toma de decisiones dentro de la modelación. En este nivel, las acciones de comparar, organizar, predecir y estimar se integran para interpretar el fenómeno, contrastar modelos y justificar conclusiones, incluso frente a situaciones donde el comportamiento deja de ser lineal. Así, el estudiante no solo construye la expresión algebraica, sino que comprende su significado, sus alcances y sus limitaciones en contextos reales. Desde la modelación, esto implica un proceso completo que va desde la comprensión del problema hasta la interpretación de los resultados, donde la función lineal se reconoce como un modelo que describe relaciones de variación constante. De este modo, el aprendizaje trasciende lo procedimental y se orienta hacia una comprensión profunda y funcional del concepto, en la que el estudiante desarrolla la capacidad de explicar, argumentar y aplicar la matemática en la interpretación de fenómenos de su entorno.

A continuación, se presenta una tabla síntesis que articula los momentos de la situación de aprendizaje con las prácticas variacionales y su respectiva justificación, se toma como referente las ideas expuestas por Caballero (2018) y Arciniegas (2023).

Tabla 2. *Tabla síntesis de la articulación entre los momentos de la situación de aprendizaje y las prácticas variacionales*

Momento	Actividad	Práctica variacional	Justificación
I	Recolección de datos (lugares, distancias y precios en InDriver)	Comparación	El estudiante contrasta precios y distancias entre distintos trayectos, identificando diferencias y relaciones iniciales entre variables.

I	Construcción de tablas en Microsoft Excel	Seriación	Organiza datos en una estructura que permite analizar estados consecutivos del fenómeno.
I	Gráfico de dispersión distancia vs precio	Seriación	Permite observar el comportamiento global de los datos y reconocer patrones en la variación.
I	1. ¿Has utilizado el servicio de plataforma de InDriver?	Comparación	El estudiante contrasta su experiencia previa con la situación planteada, identificando contextos conocidos.
I	2. ¿Explica con tus palabras cómo pedir un servicio de InDriver?	Comparación	Relaciona acciones conocidas con el contexto, diferenciando pasos y condiciones del servicio.
I	3. ¿Para qué sirve conocer el lugar de recogida y el destino final a la hora de pedir un servicio por InDriver?	Comparación	Identifica cómo cambian las condiciones del servicio según los puntos del recorrido.
I	4. ¿Qué magnitudes consideras que intervienen a la hora de solicitar un servicio por InDriver? Explica con tus palabras.	Comparación	Reconoce variables y establece relaciones entre ellas (distancia, precio, tiempo).
I	5. Si se transportarán más de dos personas en un mismo viaje, ¿Cambiarían las magnitudes anteriores? Explica tu respuesta.	Comparación	Analiza posibles variaciones en las condiciones del servicio frente a un cambio en el contexto.
I	6. Según el gráfico de dispersión ¿qué tendencia presentan los datos en la gráfica? Justifica tu respuesta.	Seriación	Observa el comportamiento de los datos en conjunto, identificando patrones de crecimiento.
I	7. ¿A qué razón cambia el precio sugerido de un servicio de InDriver en carro según la cantidad de kilómetros que se recorren? Explica con tus palabras.	Comparación	Relaciona el cambio en el precio respecto al cambio en la distancia (cociente).

I	8. Si una persona necesita ir del centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, ¿Cuánto debe pagar por el servicio?, ¿Qué distancia hay hasta allá? Explica con tus palabras el proceso de estimación.	Estimación	Anticipa valores aproximados a partir de la gráfica o datos conocidos.
I	9. Si una persona necesita ir del centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, suponga que la aplicación de InDriver tiene una falla y no es posible conocer el precio a pagar sino al final del servicio, ¿cómo puedo calcular el precio a pagar de esta carrera si no dispongo de la aplicación para conocer el valor antes del servicio? Justifica tu respuesta.	Predicción	Generaliza la relación entre variables para determinar un valor desconocido.
I	10. Sí la carrera mínima en la plataforma de InDriver en carro es de \$5250. ¿Cómo puedo determinar la expresión algebraica que modela la razón de cambio del costo total del servicio por kilómetro?	Predicción	Construye un modelo general $f(x) = mx + b$ para anticipar cualquier valor.
I	11. ¿Cuál línea de tendencia se ajustó mejor a la situación modelada?	Comparación	Contrasta distintos modelos para identificar cuál se ajusta mejor.
I	12. ¿Explica con tus palabras porque la línea de tendencia exponencial no se adapta al modelo?	Comparación	Diferencia comportamientos entre modelos lineales y no lineales.
I	13. ¿Por qué es importante conocer el	Comparación	Evalúa la precisión del modelo comparando ajustes posibles.

	valor de R cuadrado del gráfico?		
I	14. ¿Cuál es el mejor modelo que se ajusta a la situación sobre distancia (Km) vs precio sugerido (COP) a pagar por un servicio de InDriver?	Comparación	Selecciona el modelo más adecuado según el comportamiento observado.
I	15. ¿Cuántos kilómetros recorrió una persona que tuvo que pagar alrededor de 12.000, 25.000 y 37.000?	Predicción	Determina valores de entrada a partir del modelo construido.
I	16. ¿Si una persona recorre 810 metros y 5600 metros, ¿cuánto deberá pagar?	Predicción	Usa el modelo para encontrar valores específicos de la variable dependiente.
I	17. Explica con tus palabras como una persona que utilice la plataforma de InDriver puede estimar el costo de su carrera conociendo la distancia a recorrer.	Estimación	Describe el comportamiento global del fenómeno para anticipar valores.
I	18. Si la mamá de Carlos dispone de \$80.000 COP para transportarse a su trabajo y sabe que hay una distancia promedio de 4 km de su casa al trabajo, ¿crees que al finalizar la semana le alcanzará su dinero para transportarse? (1 semana = 7 días). Justifica tu respuesta.	Estimación	Evalúa un comportamiento acumulado en un intervalo de tiempo.
I	19. Si la razón de cambio en cuanto al precio sugerido por distancia aumenta a 1000 COP, ¿cuántos viajes podría hacer la mamá de Carlos?	Predicción	Analiza cómo una modificación afecta resultados futuros.

I	20. Cómo afectaría el aumento en la razón de cambio de los precios sugeridos por distancia en los servicios en InDriver realizados en carro?	Comparación	Contrasta el comportamiento antes y después de la variación.
I	21. Si la razón de cambio de los servicios de InDriver en carro aumenta, ¿Dejaría de tener un comportamiento lineal? por qué.	Comparación	Analiza si se mantiene o no la estructura del modelo lineal.
I	22. Si la razón de cambio de los servicios de InDriver en carro disminuye, ¿Dejaría de tener un comportamiento lineal? por qué.	Comparación	Evalúa el efecto de cambios en la pendiente sobre el modelo.
II	1. Completar la tabla de valores faltantes.	Predicción	El estudiante infiere valores desconocidos a partir de patrones identificados en los datos.
II	2. ¿Qué magnitudes están relacionadas en el problema?	Comparación	Reconoce y relaciona variables como distancia, precio y tiempo.
II	3. ¿Cuáles son las razones de cambio de los precios correspondientes a hora ordinaria y hora pico?	Comparación	Analiza el cambio del precio respecto a la distancia mediante el cociente.
II	4. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora ordinaria? Suponga que la carrera mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.	Predicción	Determina un valor específico a partir del modelo de comportamiento.

II	5. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora pico? Suponga que la mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.	Predicción	Anticipa el valor inicial considerando la relación entre variables.
II	6. ¿Qué puedes analizar del comportamiento de los datos en la tabla sobre los precios sugeridos a pagar por un servicio en hora ordinaria y hora pico?	Seriación	Examina el comportamiento global de los datos organizados en la tabla.
II	7. Bosqueja un gráfico de dispersión en Excel para hora ordinaria y hora pico, relacionando con las distancias dadas en la tabla.	Seriación	Permite observar patrones y tendencias en los datos de manera secuencial.
II	8. Construya una columna que precise la diferencia del precio sugerido para los lugares que visita en la semana el joven en las horas ordinaria y pico.	Comparación	Cuantifica el cambio entre dos condiciones del mismo fenómeno.
II	9. Genere un gráfico de dispersión en Excel relacionando la diferencia de precio con la distancia recorrida.	Seriación	Analiza cómo evoluciona la diferencia a lo largo de varios valores consecutivos.
II	10. ¿Qué diferencia hay entre el precio sugerido en hora ordinaria y el precio sugerido en hora pico por kilómetro recorrido?	Comparación	Relaciona cambios en precios respecto a la distancia recorrida.
II	11. ¿Es lineal el comportamiento entre la diferencia del precio a pagar por un servicio de InDriver por distancia	Comparación	Contrasta el comportamiento observado con las características de una función lineal.

	recorrida? sí, no y por qué. Justifica tu respuesta.		
II	12. Proporcione las expresiones algebraicas de los precios sugeridos a pagar por un servicio de InDriver en horas ordinaria y pico por unidad de distancia.	Predicción	Generaliza el comportamiento para cualquier valor de la variable.
II	13. Sí el joven debe hacer el siguiente recorrido: Primero, ira de su casa al trabajo, posteriormente ira del trabajo al centro comercial, luego ira del centro comercial a la casa de su novia y finalmente irá de la casa de la novia a su casa. ¿Cuánto dinero deberá disponer para los transportes de ese día si solo utiliza InDriver?	Predicción	Determina valores futuros a partir del modelo construido.
II	14. Si el joven trabaja de lunes a sábado y sabe que tiene que tomar 2 transportes diarios para ir a su trabajo, ¿Cuánto dinero deberá apartar para una semana? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al finalizar la semana? Explica tus respuestas.	Estimación	Evalúa valores acumulados en un intervalo de tiempo.
II	15. Si el joven visita a su novia 3 veces a la semana, ¿En cuál horario (ordinario/pico) gastará más dinero? Justifica tu respuesta apoyándote de las expresiones algebraicas encontradas en la pregunta 12.	Comparación	Contrasta dos modelos para tomar decisiones fundamentadas.
II	16. Si el joven ha decidido separar	Estimación	Anticipa cantidades posibles dentro de un límite dado.

	\$530.000 para visitar a su novia e ir al centro comercial, ¿Para cuantos viajes le alcanzará en ambos horarios (ordinario/pico)?		
II	17. Si una persona hace una carrera de 5.7 km, en ¿qué horario pagará más por un servicio en carro? Argumenta tu respuesta.	Predicción	Usa el modelo para determinar cuál valor será mayor.
III	1. Completar la tabla a partir del gráfico (estimar precios según distancia)	Estimación	El estudiante infiere valores aproximados a partir de una representación gráfica, describiendo el comportamiento global de la relación entre variables.
III	2. ¿Cuánto dinero gasta Daniel en transportes para ir al trabajo? Escribe tus cálculos y explica tu respuesta.	Predicción	Se calcula un valor específico futuro (gasto total) a partir de la relación entre distancia y precio identificada previamente.
III	3. ¿Cuánto dinero gasta Laura en transportes para ir al trabajo? Escribe tus cálculos y explica tu respuesta.	Predicción	Se anticipa un valor exacto aplicando el modelo del taxi para una cantidad determinada de días.
III	4. Construcción de tabla de gasto para 10 días	Seriación	Se organizan estados consecutivos del fenómeno (días vs gasto) para identificar regularidades en el crecimiento del costo.
III	5. Si ambos jóvenes tienen \$350.000 destinados para el pago de los transportes en esos días festivos, ¿les alcanzará ese presupuesto a cada uno? ¿Exactamente para cuantos días les alcanza a cada uno? Escriba tus cálculos y explica tu respuesta.	Estimación	Analiza el comportamiento global para tomar decisiones en un intervalo.
III	6. Camila no sabe cómo calcular el precio	Predicción	Usa la relación entre variables para determinar un valor no explícito.

	sugerido a pagar para un servicio en taxi. Si la distancia que debe recorrer es de 4.5 km, ¿cómo le explicarías el procedimiento para determinar cuánto debería pagar en total durante los 18 días festivos?		
III	7. Generalizar el cálculo para una distancia P	Predicción	Se construye una regla general que permite calcular valores específicos para cualquier caso particular.
III	8. Si la tarifa de taxi es subsidiada en un tercio por kilómetro recorrido, ¿Cómo calcular el precio sugerido a pagar con este subsidio? Escriba sus cálculos y la respectiva justificación.	Comparación	Contrasta el modelo original con uno modificado por una nueva condición.
III	9. Con el subsidio para taxis, ¿Cuánto deberá pagar Laura para los mismos 18 días festivos? Justifica tu respuesta.	Predicción	Calcula nuevos valores a partir del modelo ajustado.
III	10. Con el subsidio para taxis, ¿Cuánto deberá pagar Daniel para los mismos 18 días festivo? Justifica tu respuesta.	Comparación	Permite contrastar el efecto del subsidio entre ambos servicios.
III	11. Con el subsidio de taxi, explica ¿qué es mejor, utilizar el servicio se taxi o utilizar el servicio de InDriver? Justifica tu respuesta	Estimación	Evalúa tendencias globales y costos acumulados para tomar una decisión fundamentada.
IV	Lectura del gráfico de recargo por tiempo	Seriación	Analiza el comportamiento del fenómeno a lo largo del tiempo.

IV	1. Describe cómo es el cobro del recargo por tiempo	Comparación	El estudiante contrasta distintos valores del recargo para identificar cómo cambia el fenómeno.
IV	2. ¿Qué sucede con el costo a medida que avanza el tiempo?	Seriación	Analiza el comportamiento del recargo en función de valores consecutivos de tiempo.
IV	3. ¿Cómo ubicaría el costo del recargo de taxi a los 50 min? Ubíquelo en la gráfica presentada anteriormente.	Estimación	Anticipa un valor no explícito en la gráfica.
IV	4. ¿Cómo es el comportamiento del recargo por unidad de tiempo?	Seriación	Reconoce el patrón de crecimiento del fenómeno a lo largo del tiempo.
IV	5. ¿El cobro de un servicio de InDriver analizado en el primer momento comparado con el cobro del recargo de taxi presentado en el cuarto momento son iguales? Justifique detalladamente su respuesta.	Comparación	Contrasta dos tipos de variación (lineal vs no lineal) para identificar diferencias.
IV	6. Hallar diferencias consecutivas en la tabla	Seriación	Analiza cambios entre estados consecutivos para identificar regularidades o variaciones.
IV	7. ¿Qué puede observar respecto a los valores de la columna diferencia la cual relaciona la variación del cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo?	Seriación	Permite evidenciar si el cambio es constante o variable (creciente).
IV	8. Comparar diferencias con el momento 2	Comparación	Contrasta dos comportamientos: uno lineal (constante) y otro no lineal (variable).
IV	8. Gráficos de dispersión de diferencias	Seriación	Permite visualizar el comportamiento del cambio en el fenómeno a lo largo del tiempo.

IV	8. Análisis de los gráficos	Predicción	A partir de la tendencia, el estudiante puede anticipar cómo seguirá comportándose el recargo.
----	-----------------------------	------------	--

Nota: Elaboración propia

En síntesis, el tránsito por los cuatro momentos favorece en el estudiante el desarrollo progresivo de las **prácticas variacionales**, iniciando con la **comparación**, que le permite reconocer el cambio e identificar relaciones entre variables en contextos cercanos; avanzando hacia la **seriación**, mediante la cual organiza, analiza y comprende patrones en el comportamiento de los datos; consolidando la **predicción**, al anticipar valores y generalizar relaciones a través de modelos matemáticos; y fortaleciendo la **estimación**, que le posibilita interpretar tendencias y tomar decisiones en situaciones reales. De este modo, estas prácticas no solo promueven la comprensión del concepto de función lineal, sino que también potencian habilidades como el análisis, la argumentación, la modelación y la toma de decisiones fundamentadas, contribuyendo a la construcción de un pensamiento variacional cada vez más estructurado, crítico y funcional.

5.1.3 Definición del tipo de tareas de modelación

Al revisar y tomar como documentos referentes a los siguientes autores Villa-Ochoa, Sánchez y Parra (2022), Olarte (2019), Hans Freudenthal (1991) citado en MEN (1998) y en Silva (2017), Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), Villa, J. Bustamante C. Berrio, M. Osorio, A. Ocampo, D. (2008) sobre el proceso de modelación descritas en el apartado de “enseñanza del proceso de modelación” en los antecedentes, se adopta para el siguiente trabajo de grado las siguientes nociones y tareas.

Primero, se conciben la definición de modelación matemática en el ámbito escolar tal como se cita en Villa (2009) citado en Martínez, G. B. (2020):

- La modelación como una actividad involucrada en la “solución de problemas reales” que implica procesos de simplificación, idealización y estructuración de las “situaciones reales”, que luego de ser matematizadas arrojan como resultado la construcción de un

modelo matemático. El análisis del modelo arroja ciertas conclusiones que se validan cuando son interpretadas a la luz de la situación original y cuando se justifica su uso en coherencia con el propósito con el que fue construido (p.11).

Segundo, se conciben las ideas de modelo matemático en el ámbito escolar como se cita en Villa (2009) citado en Martínez, G. B. (2020):

- Modelo Matemático es un sistema axiomático constituido por términos indefinidos que son obtenidos por la abstracción y cualificación de ideas del mundo real. (Makie Thompsom, 1973, p. 14, Gazzetta citado por Leal, 1999).
- Se define un modelo Matemático como una construcción matemática dirigida estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo real”. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales (Giordano F., Weir M., Fox W., 1997, p.34).

Por tanto, el modelo matemático brinda dos posibilidades, primero, permite usarse como herramienta pedagógica para la enseñanza de la función lineal por medio de la comprensión de una situación extra-matemática y segundo, posibilita a los estudiantes en comprender de forma crítica situaciones del mundo real por medio de las matemáticas a través de acciones concretas como representar, analizar, modelar y tomar decisiones respecto a la situación modelada.

Tercero, se considera el ciclo de modelación propuesto por Freudenthal (1905-1990) tal como se cita en Gravemeijer y Terwel (2000) quien pensaba las matemáticas como una actividad humana y sostenía que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de estrategias de modelación (o matematización), mediante una serie de acciones o fases de la construcción de modelos.

La modelación como proceso se sigue de la siguiente manera:

- Identificación de la situación, fenómeno o problema de la cotidianidad del estudiante.
- Establecimiento de los supuestos e hipótesis en que se desarrollará el modelo.
- Formulación matemática del problema.
- Resolución del problema matemático.

- Traducción de las soluciones a la luz del fenómeno.
- Validación del modelo matemático contrastando los resultados con los datos de la situación contextualizada.

Los pasos 2) y 5) dan cuenta del vínculo entre la vida real y las matemáticas.

Cuarto, se selecciona un tema de referencia, el reconocimiento de la situación problema, la familiarización con el tema a ser modelado y la formulación del problema. A su vez cada paso a pensar, seleccionar, diseñar y crear, se realizan guardando relación con las PV y la modelación matemática.

El contexto se desarrolla sobre una situación de variación relacionada con el costo del servicio de transporte que debe pagar un pasajero al momento de tomar un servicio por plataforma de InDriver, a su vez se definen las tareas que dentro de la secuencia didáctica los estudiantes abordan y encontrarán en casa fase:

- **Entender el problema:** De acuerdo con la información presentada por el diseño de aprendizaje, los estudiantes llevaran a cabo acciones específicas según se va indicando en cada fase del diseño. Se debe leer y comprender muy bien el contexto, ya que en cada fase se agregan nuevas variables que modifican brevemente el objetivo de aprendizaje al finalizar cada fase dentro del diseño, toda fase pretende llevar al estudiante a la toma de decisiones consciente para negociar un servicio de transporte por la plataforma de InDriver o por servicio de Taxi.
- **Formulación del modelo matemático:** Los estudiantes definen variables, constantes y sus relaciones, a partir de diferentes representaciones como tabular, grafica, textual o algebraica, también se apoyará de herramientas como Microsoft Word y Excel tales como crear una tabla, insertar un gráfico de dispersión, agregar líneas de tendencia, encontrar la expresión algebraica del gráfico y encontrar el valor de los R cuadrado del gráfico para comprender mejor el problema y abstraer la información necesaria para su formulación. El estudiante a partir del análisis de los datos cuantitativos propone un expresión matemática (modelo) que permita generalizar la solución al problema.
- **Interpretación de la solución:** Una vez planteado el modelo a través de una función lineal, se somete al estudiante a una serie de preguntas construidas y pensadas en

llevarlos al análisis de la información, en cuestionar si el modelo es efectivo, si tienen sentido, en ver si a partir de la función construida se puede estimar información relevante dentro de la situación (estimar distancias o predecir el costo de la carrera), en cuestionar si el modelo es lineal o por el contrario hay que replantearlo a otra función no lineal, todo esto se orientará a través de las PV en cada fase del diseño de aprendizaje.

- **Traducción de las soluciones a la luz del fenómeno:** Una vez analizado el problema matemáticamente y aceptado de que representa adecuadamente la situación, se debe hacer una traducción a un lenguaje cotidiano, para esto, aunque en el paso anterior se halla encontrado una función tal que permita matemáticamente manipularla, se debe traducir esos valores numéricos a frases concretas que responden a preguntas relacionadas con el fenómeno tales como: ¿cuánto debería costar mi viaje? ¿estoy ofreciendo un precio razonable?, ¿estoy pagando lo justo?
- **Validación del modelo:** A partir del modelo planteado por fases, los estudiantes validan el modelo con el propósito de hacerlo crítico al momento de negociar adecuadamente una tarifa en el servicio de InDriver, llegar a justificar si se está pagando justamente o si se está ofreciendo un precio razonable por el servicio.

La situación de aprendizaje es considerada principalmente como tipo de tarea de modelación “enunciado verbal auténtico” porque se construye a partir de un contexto cercano, significativo y reconocible para los estudiantes, como lo es el uso de una plataforma de transporte tipo InDriver. En este caso, la pregunta orientadora ¿cuánto es lo justo que debo pagar por mi servicio? no solo plantea un problema matemático, sino que remite a una situación real en la que los estudiantes podrían verse involucrados, lo que le da sentido y relevancia al aprendizaje. No se trata de un contexto simulado únicamente para aplicar un procedimiento, sino de una situación que puede influir en la toma de decisiones y que conecta directamente con experiencias cotidianas, lo cual es una característica fundamental de los enunciados auténticos.

Además, esta situación no presenta toda la información de manera cerrada ni conduce a una única respuesta inmediata. Por el contrario, invita a los estudiantes a interpretar el contexto, identificar variables como la distancia, el costo y las condiciones del servicio, y establecer relaciones entre ellas. Este proceso implica una participación activa, donde el estudiante no solo

resuelve, sino que analiza, cuestiona y construye significado, fortaleciendo su vínculo con el problema planteado.

Un aspecto clave que refuerza su carácter auténtico es que la situación de aprendizaje está organizada en cuatro momentos que se encuentran directamente relacionados entre sí. Estos momentos no son actividades aisladas, sino que conducen progresivamente al estudiante a comprender cómo se comporta el cambio en el precio del servicio en función de la distancia recorrida. A lo largo de este recorrido, los estudiantes reconocen que existe una variación constante, propia de la función lineal. Además, en diferentes momentos, se incorporan nuevas condiciones del contexto como el tráfico, el uso de taxímetro, los horarios pico y ordinario que permiten analizar cómo estas variables pueden afectar la pendiente de la recta, es decir, el valor que determina cómo cambia el precio respecto a la distancia. Esto enriquece la comprensión, ya que el estudiante no solo identifica una relación lineal, sino que también analiza cómo esta puede modificarse según el contexto.

En cada una de las etapas de la situación de aprendizaje se evidencian acciones propias del trabajo matemático que hacen parte de este tipo de tareas. En la etapa factual, los estudiantes reconocen magnitudes, identifican relaciones y comprenden el contexto, lo que implica una primera interpretación de la situación. En la etapa procedimental, desarrollan estrategias como la organización de datos, la construcción de tablas, la elaboración de representaciones gráficas y el establecimiento de relaciones entre variables, lo cual les permite avanzar en la comprensión del fenómeno y estructurar su razonamiento. Finalmente, en la etapa simbólica, construyen expresiones algebraicas que generalizan la situación, consolidando así el concepto de función lineal.

Todas estas acciones interpretar la situación, representar la información, establecer relaciones, argumentar y generalizar hacen parte de la actividad matemática necesaria para dar respuesta a las preguntas planteadas. En este sentido, la situación de aprendizaje no se limita a la aplicación de procedimientos, sino que promueve un proceso completo de comprensión y modelación, donde las matemáticas se convierten en una herramienta para analizar y tomar decisiones en un contexto real.

Por lo tanto, esta propuesta se reconoce como un enunciado verbal auténtico porque integra un contexto significativo, presenta una estructura coherente a través de sus momentos y guía al

estudiante en un proceso progresivo de construcción y análisis del concepto de variación constante, propio de la función lineal, favoreciendo así un aprendizaje con sentido.

A continuación, se precisan los tipos de tarea de modelación que se van desarrollando en cada momento durante el diseño, se toma como referente las ideas expuestas por Villa-Ochoa et al. (2017).

Tabla 3. *Tipos de tareas de modelación articuladas en los momentos del diseño*

Momento	Pregunta o tipo de actividad	Tipo de tarea de modelación		Justificación
I	Construcción de una tabla de Excel con lugares, distancias y precios sugeridos de InDriver	Enunciado auténtico	verbal	La actividad parte de una situación cercana y significativa para los estudiantes relacionada con el uso de plataformas de transporte. El estudiante debe identificar información relevante, buscar datos reales en Google Maps y en la aplicación de InDriver, interpretar el contexto y organizar la información para comprender la situación planteada.
I	Elaboración del gráfico de dispersión relacionando distancia y precio sugerido.	Construcción representaciones gráficas	de	Los estudiantes representan visualmente la relación entre dos variables cuantitativas mediante gráficos de dispersión, permitiendo analizar patrones de variación y reconocer el comportamiento lineal de los datos.
I	Preguntas sobre magnitudes, tendencia del gráfico y razón de cambio del precio por kilómetro.	Enunciado auténtico	verbal	Las preguntas exigen interpretar la situación real, reconocer relaciones entre variables y analizar cómo cambia el costo del servicio según la distancia recorrida, promoviendo comprensión del contexto y toma de decisiones.
I	Estimación de precios y distancias a partir del modelo construido.	Enunciado auténtico	verbal	El estudiante utiliza el modelo matemático para resolver situaciones reales relacionadas con el pago del servicio de transporte, interpretando resultados y

				justificando decisiones dentro del contexto planteado.
I	Uso de líneas de tendencia y valor de R^2 en Excel para seleccionar el mejor modelo matemático.	Construcción de representaciones gráficas	de	La actividad implica analizar diferentes representaciones gráficas y algebraicas para determinar cuál se ajusta mejor al comportamiento de los datos, favoreciendo la interpretación y validación del modelo lineal.
II	Completar tablas de precios en hora ordinaria y hora pico.	Enunciado auténtico	verbal	El problema se desarrolla en un contexto cercano relacionado con los gastos cotidianos de transporte. Los estudiantes deben analizar información, identificar relaciones y comprender cómo las condiciones del contexto modifican el comportamiento de los precios.
II	Construcción de gráficos de dispersión para hora ordinaria, hora pico y diferencia de precios.	Construcción de representaciones gráficas	de	Los estudiantes construyen representaciones visuales para comparar el comportamiento de distintas variables y analizar cómo cambia el precio según el horario y la distancia recorrida.
II	Construcción de expresiones algebraicas para modelar precios en diferentes horarios.	Construcción de representaciones gráficas	de	La actividad consiste en representar algebraicamente el comportamiento observado en tablas y gráficas, permitiendo generalizar matemáticamente la relación entre distancia y costo.
II	Preguntas sobre presupuesto semanal, cantidad de viajes y comparación entre horarios.	Enunciado auténtico	verbal	Los estudiantes utilizan el modelo construido para analizar situaciones reales de gasto y transporte, interpretar resultados y justificar decisiones relacionadas con costos y desplazamientos cotidianos.
III	Interpretación del gráfico del periódico sobre precios de InDriver y taxi.	Enunciado auténtico	verbal	La actividad parte de una situación contextualizada y significativa donde los estudiantes deben interpretar información presentada en un medio real, analizar variables y tomar decisiones frente al costo del transporte.

III	Construcción de tablas y análisis de gastos acumulados en días festivos.	Construcción de representaciones gráficas	de	Los estudiantes organizan información cuantitativa y construyen representaciones numéricas que les permiten observar regularidades y analizar comportamientos de variación.
III	Formulación de expresiones algebraicas para servicios de taxi e InDriver.	Construcción de representaciones gráficas	de	La actividad busca representar algebraicamente el comportamiento de los costos de transporte y generalizar la relación funcional entre distancia y precio.
III	Análisis del subsidio al taxi y comparación entre servicios.	Enunciado verbal	auténtico	Los estudiantes analizan críticamente una situación contextualizada, interpretan el efecto de nuevas variables en el modelo y toman decisiones argumentadas sobre qué servicio conviene utilizar.
IV	Interpretación del gráfico sobre recargos de taxi por tráfico.	Construcción de representaciones gráficas	de	Los estudiantes analizan gráficamente el comportamiento del recargo en función del tiempo, identificando patrones de cambio y diferencias respecto al comportamiento lineal trabajado anteriormente.
IV	Análisis de las diferencias consecutivas en la tabla de recargos.	Construcción de representaciones gráficas	de	La actividad permite estudiar cómo varían los datos y reconocer que el comportamiento del recargo no mantiene una variación constante, favoreciendo la interpretación matemática de fenómenos no lineales.
IV	Comparación entre el comportamiento del servicio de InDriver y el recargo de taxi.	Enunciado verbal	auténtico	Los estudiantes comparan dos situaciones reales de transporte, interpretan modelos matemáticos y argumentan diferencias en el comportamiento de las variables según el contexto planteado.

Nota: Elaboración propia

5.2 Fase II. Diseño inicial de la situación de aprendizaje

Como se mencionó anteriormente en la primera fase “Revisión bibliográfica”, una vez caracterizada la función lineal desde las prácticas variacionales y definidas las tareas de modelación, se pasa a la construcción de la situación de aprendizaje desde un contexto específico (servicios de transporte alternativos) que promuevan un aprendizaje profundo, reflexivo y comprensivo en cuanto a la caracterización del cambio y la variación constante.

En este apartado encontrara la definición del contexto, la estructuración de los momentos y etapas (factual, procedimental y simbólica) del diseño de aprendizaje, el planteamiento de las actividades y el primer bosquejo del diseño de situación de aprendizaje.

5.2.1 *Definición del contexto*

La situación de aprendizaje propuesta se desarrolla en un contexto cercano, significativo y reconocible para los estudiantes, relacionado con las dinámicas actuales de movilidad urbana en la ciudad de Bucaramanga y el uso cotidiano de plataformas digitales de transporte como InDriver. La elección de este contexto responde a una problemática real presente en la vida diaria de muchas personas, especialmente frente a las dificultades del sistema de transporte público, los altos costos del servicio de taxi y la necesidad constante de tomar decisiones relacionadas con el dinero destinado al transporte. En este escenario, la plataforma InDriver adquiere especial relevancia porque introduce un elemento novedoso dentro de la experiencia de movilización: la posibilidad de negociar el valor de la carrera y decidir cuánto se está dispuesto a pagar por un servicio. Esto convierte el acto cotidiano de transportarse en una situación que involucra análisis, comparación, estimación y toma de decisiones.

Desde la perspectiva de la modelación matemática, este contexto resulta pertinente para la enseñanza de la función lineal debido a que permite reconocer relaciones de variación entre magnitudes como la distancia recorrida y el costo del servicio. A través de esta situación, los estudiantes pueden identificar cómo cambia el precio de una carrera en función de los kilómetros recorridos, analizar comportamientos de variación constante y construir modelos matemáticos que representen dichas relaciones. De esta manera, la función lineal deja de presentarse como una

expresión algebraica abstracta y pasa a comprenderse como una herramienta útil para interpretar fenómenos reales y tomar decisiones dentro de contextos cotidianos.

Asimismo, la propuesta permite resignificar acciones que los estudiantes y sus familias realizan frecuentemente, pero que generalmente llevan a cabo de manera intuitiva y sin reconocer el papel de las matemáticas en dichas decisiones. Situaciones como estimar cuánto dinero se necesita para transportarse durante la semana, comparar si una tarifa es justa, decidir entre tomar taxi o utilizar una plataforma digital, o analizar cómo el tráfico y los horarios afectan el costo del servicio, forman parte de experiencias habituales en la vida cotidiana. Sin embargo, pocas veces estas acciones son comprendidas desde una perspectiva matemática. En este sentido, la situación de aprendizaje hace visible que detrás de cada decisión económica relacionada con el transporte existen procesos de razonamiento variacional, estimación, comparación y análisis funcional que pueden ser modelados matemáticamente.

El carácter novedoso de la propuesta radica precisamente en acercar un concepto matemático tradicional como la función lineal a una experiencia cotidiana y contemporánea vinculada al uso de aplicaciones digitales de transporte. Los estudiantes no solo trabajan con números o fórmulas descontextualizadas, sino que construyen significado matemático a partir de una problemática real que puede afectar directamente su vida y la de sus familias. Esto favorece una participación más activa, ya que las preguntas planteadas dentro de la situación de aprendizaje no buscan únicamente obtener resultados numéricos, sino promover la argumentación, la justificación y la reflexión crítica frente a lo que significa pagar un precio justo por un servicio.

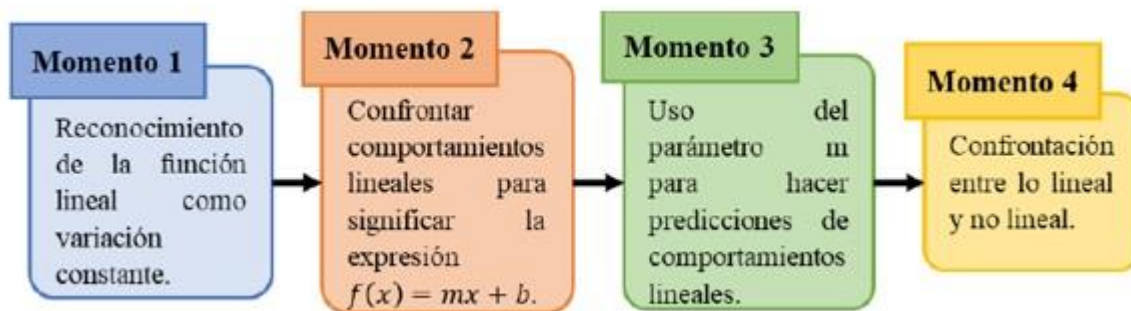
Además, desde la modelación matemática, la situación permite que los estudiantes transiten continuamente entre el contexto real y el lenguaje matemático. Inicialmente, observan y comprenden el fenómeno dentro de una situación auténtica; posteriormente identifican variables, organizan datos, construyen tablas, gráficos y expresiones algebraicas; y finalmente interpretan nuevamente los resultados dentro del contexto original para justificar decisiones y validar sus respuestas. Este proceso fortalece la comprensión de la función lineal, la pendiente y la razón de cambio, al tiempo que demuestra que las matemáticas constituyen una herramienta útil para comprender y analizar fenómenos presentes en la vida diaria.

Por tanto, el contexto seleccionado no solo aporta significado y pertinencia al aprendizaje de la función lineal, sino que también favorece el desarrollo de habilidades relacionadas con el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la capacidad de argumentar matemáticamente frente a situaciones reales. De esta manera, la modelación matemática se convierte en un medio para conectar las matemáticas escolares con experiencias auténticas del entorno de los estudiantes, promoviendo un aprendizaje más reflexivo, contextualizado y con sentido.

5.2.2 Estructuración de los momentos y etapas del diseño de aprendizaje

La situación de aprendizaje diseñada se estructura en cuatro momentos articulados entre sí, los cuales orientan progresivamente al estudiante hacia la construcción y comprensión del concepto de función lineal a partir de procesos de modelación matemática y prácticas variacionales. Cada momento responde a una intención pedagógica específica y permite que el estudiante avance desde el reconocimiento inicial de relaciones de variación constante hasta la confrontación entre comportamientos lineales y no lineales. De esta manera, el diseño no presenta actividades aisladas, sino una secuencia coherente que conduce gradualmente a la construcción de modelos matemáticos, la interpretación de resultados y la toma de decisiones en contextos reales.

Figura 8. Momentos para el estudio de la variación constante.



Nota: Tomado de (Arciniegas 2022, p. 140).

El diseño de aprendizaje se organiza además en tres etapas fundamentales de construcción del conocimiento: factual, procedimental y simbólica. Estas etapas atraviesan transversalmente los cuatro momentos de la situación y permiten comprender cómo el estudiante evoluciona desde la identificación concreta de magnitudes hasta la formalización algebraica de modelos funcionales. La etapa factual se orienta al reconocimiento de elementos y relaciones presentes en la situación; la procedimental favorece la construcción de estrategias, comparaciones y argumentos; mientras que la etapa simbólica conduce a la generalización, representación algebraica y formulación de modelos predictivos. En consecuencia, el tránsito entre estas etapas no es rígido ni lineal, sino dinámico y progresivo, puesto que el estudiante constantemente vuelve sobre sus interpretaciones para reorganizar y resignificar el conocimiento construido.

En el primer momento, denominado “Reconocimiento de la función lineal como variación constante”, el estudiante inicia un acercamiento factual al fenómeno de variación mediante situaciones reales asociadas al servicio de transporte en InDriver. El diseño propone que los estudiantes seleccionen recorridos frecuentes dentro de la ciudad, calculen distancias mediante Google Maps y consulten precios sugeridos en la plataforma digital. Esta fase factual permite reconocer magnitudes relevantes como distancia y costo, identificar relaciones de dependencia entre ellas y establecer primeras comparaciones respecto al comportamiento de los valores. El estudiante comienza a responder preguntas fundamentales del pensamiento variacional como: ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia? y ¿cómo cambia?, reconociendo que el precio de una carrera depende de la distancia recorrida.

Posteriormente, el estudiante transita hacia una etapa procedimental mediante la construcción de tablas y gráficos de dispersión en Excel, donde debe analizar tendencias, comparar comportamientos y justificar verbalmente sus observaciones. Aquí las representaciones gráficas adquieren un papel fundamental, pues permiten visualizar el comportamiento de las variables y reconocer regularidades asociadas a una variación aproximadamente constante. El uso del lenguaje verbal auténtico cobra especial relevancia porque las preguntas formuladas no buscan únicamente una respuesta numérica, sino la construcción de argumentos contextualizados. Cuando el estudiante explica “cómo cambia” el precio respecto a la distancia o justifica por qué ciertos puntos siguen una tendencia lineal, comienza a desarrollar formas de razonamiento propias del pensamiento

variacional. Además, las preguntas orientadas a la estimación y predicción favorecen prácticas variacionales como la comparación y la seriación, puesto que el estudiante debe analizar estados consecutivos del fenómeno para identificar patrones de cambio.

La etapa simbólica del primer momento se evidencia cuando el estudiante utiliza las herramientas gráficas de Excel para explorar líneas de tendencia, interpretar el valor de R^2 y construir la expresión algebraica que modela la situación. En este punto, la expresión $f(x) = mx + b$ deja de ser una fórmula abstracta para convertirse en una representación funcional del fenómeno estudiado. El parámetro m adquiere significado como razón de cambio entre el costo y la distancia, mientras que el término independiente se interpreta desde la realidad contextual como la carrera mínima del servicio. Así, el estudiante no memoriza procedimientos, sino que construye sentido alrededor de los elementos de la función lineal mediante la articulación entre lenguaje verbal, representación gráfica y simbolización algebraica.

El segundo momento, “Confrontar comportamientos lineales para significar la expresión $f(x) = mx + b$ ”, profundiza el estudio de la función lineal mediante la comparación entre horarios ordinarios y horarios pico del servicio de transporte. En la etapa factual, el estudiante reconoce nuevas variables y magnitudes relacionadas con el fenómeno, especialmente la influencia del horario sobre el costo de una carrera. Este reconocimiento amplía la comprensión inicial del cambio, pues el estudiante identifica que un mismo recorrido puede presentar diferentes precios dependiendo de condiciones externas.

En la etapa procedimental, las actividades propuestas exigen comparar tablas, calcular diferencias, construir gráficos de dispersión y analizar la relación entre distancia y variación del costo. Aquí las prácticas variacionales de comparación y seriación se fortalecen significativamente, ya que el estudiante debe organizar conjuntos de valores, establecer relaciones entre ellos y reconocer patrones de crecimiento constante. El uso de preguntas abiertas y contextualizadas favorece la argumentación matemática, puesto que el estudiante debe justificar por qué determinados comportamientos continúan siendo lineales aun cuando cambie la razón de variación. La representación gráfica permite visualizar paralelismos, diferencias de pendiente y comportamientos estables del cambio, fortaleciendo así la comprensión del concepto de covariación entre variables.

La etapa simbólica se consolida cuando el estudiante construye expresiones algebraicas diferenciadas para modelar los precios en hora ordinaria y hora pico. La expresión algebraica se resignifica como una herramienta para analizar y predecir comportamientos, permitiendo al estudiante calcular presupuestos, estimar gastos semanales y justificar decisiones económicas. En consecuencia, el lenguaje algebraico deja de percibirse como un conjunto de símbolos aislados y adquiere funcionalidad dentro del contexto social del problema.

El tercer momento, “Uso del parámetro m para hacer predicciones de comportamientos lineales”, representa un nivel de mayor formalización y generalización del concepto de función lineal. En la etapa factual, el estudiante interpreta gráficas relacionadas con los precios de InDriver y taxi durante domingos y festivos, identificando nuevamente magnitudes relevantes y comportamientos de variación. Sin embargo, en esta ocasión el énfasis no está únicamente en reconocer el cambio, sino en utilizarlo para anticipar situaciones futuras.

En la etapa procedimental, el estudiante desarrolla prácticas variacionales asociadas principalmente a la predicción y estimación. Las actividades exigen proyectar gastos futuros, comparar servicios de transporte, analizar presupuestos y determinar tendencias de comportamiento. El trabajo con tablas y gráficas permite construir relaciones funcionales cada vez más complejas, mientras que las preguntas orientadas a la toma de decisiones fortalecen la racionalidad contextualizada del conocimiento matemático. Así, el estudiante comprende que las matemáticas no solo sirven para calcular, sino también para argumentar, decidir y justificar acciones dentro de situaciones reales.

La etapa simbólica de este momento se materializa en la construcción de modelos algebraicos generales para representar el comportamiento de ambos servicios de transporte. El uso de expresiones como $I(x) = mx + b$ y $T(x) = mx + b$ permite abstraer el fenómeno y utilizar el parámetro de pendiente para comparar razones de cambio, establecer predicciones y analizar escenarios hipotéticos como subsidios en tarifas. El estudiante comprende entonces que modificar el valor de la pendiente altera la rapidez con la que cambian las variables, fortaleciendo así la comprensión de la función lineal como modelo de variación constante.

Finalmente, el cuarto momento, “Confrontación entre lo lineal y no lineal”, conduce al estudiante hacia una comprensión más profunda del comportamiento variacional al contrastar

modelos lineales con situaciones no lineales asociadas al recargo de taxi por tráfico. En la etapa factual, el estudiante reconoce nuevas condiciones del fenómeno y observa cómo el tiempo influye en el incremento del costo del recargo. Las gráficas permiten percibir visualmente que el crecimiento ya no mantiene una razón constante.

Durante la etapa procedimental, el estudiante analiza diferencias consecutivas y compara el comportamiento de los datos con los modelos estudiados en momentos anteriores. Aquí las prácticas variacionales adquieren gran relevancia, pues el estudiante debe identificar cuándo una variación conserva estabilidad y cuándo el cambio deja de ser constante. La comparación entre columnas de diferencias, tablas y representaciones gráficas favorece la construcción de argumentos sólidos para distinguir entre modelos lineales y no lineales. Además, las preguntas abiertas promueven la reflexión crítica y la reinterpretación de conocimientos previos, permitiendo que incluso los errores o contradicciones se conviertan en oportunidades para reconstruir el pensamiento matemático.

En la etapa simbólica, el estudiante comprende que no todo fenómeno puede representarse mediante una función lineal y que la validez de un modelo depende de las características del comportamiento estudiado. De esta manera, la función lineal se resignifica no solo por sus propiedades algebraicas, sino también por sus límites de aplicación dentro de contextos reales. El estudiante logra reconocer que la constancia en la razón de cambio constituye el criterio fundamental para identificar un modelo lineal, mientras que la variación irregular conduce a comportamientos no lineales.

En síntesis, los cuatro momentos de la situación de aprendizaje configuran una trayectoria didáctica coherente que articula experiencias contextualizadas, representaciones gráficas, lenguaje verbal auténtico, prácticas variacionales y modelación matemática para favorecer la construcción significativa del concepto de función lineal. El tránsito entre las etapas factual, procedimental y simbólica permite que el estudiante evolucione desde la percepción concreta del cambio hasta la formalización algebraica y el análisis crítico de modelos matemáticos. Así, la propuesta didáctica no se limita a enseñar procedimientos operativos, sino que promueve formas de razonamiento variacional donde comparar, estimar, predecir, justificar y argumentar se convierten en acciones

fundamentales para comprender el comportamiento de las variables y construir conocimiento matemático con sentido y funcionalidad dentro de la realidad cotidiana del estudiante.

5.2.3 Planteamiento de las actividades

En este apartado se realiza una reflexión en torno al planteamiento y la intencionalidad didáctica de las actividades propuestas en el diseño de aprendizaje. Para ello, se consideran las prácticas variacionales y el proceso de modelación matemática como ejes fundamentales que posibilitan la construcción del conocimiento sobre la función lineal desde situaciones contextualizadas y significativas, priorizando la comprensión, la interpretación y el análisis del cambio antes que la formalización teórica del concepto. Desde esta perspectiva, la modelación matemática se constituye en un medio que acerca al estudiante a fenómenos reales, permitiéndole construir relaciones, argumentar y otorgar sentido a las expresiones algebraicas a partir de experiencias cercanas a su realidad.

A continuación, se presenta una explicación detallada de las preguntas y actividades desarrolladas en cada uno de los momentos del diseño de aprendizaje, destacando la intención formativa de cada tarea y las acciones matemáticas que se espera movilizar en el estudiante.

La situación de aprendizaje diseñada para la enseñanza de la función lineal se estructura en cuatro momentos progresivos que permiten al estudiante construir la noción de variación y cambio a partir de contextos auténticos relacionados con los servicios de transporte de la ciudad. Cada momento responde a una intención didáctica específica y se articula con las etapas factual, procedimental y simbólica propuestas desde la perspectiva socioepistemológica. De igual manera, el diseño incorpora las prácticas variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación como acciones fundamentales para comprender cómo cambian las variables, cuánto cambian y por qué lo hacen de determinada manera.

- **Primer Momento**

El primer momento introduce al estudiante en el análisis de situaciones reales relacionadas con el costo de un servicio de transporte en InDriver según la distancia recorrida. La intención principal consiste en que el estudiante identifique magnitudes variables, establezca relaciones de dependencia y reconozca comportamientos de variación constante a partir de experiencias cercanas a su realidad.

En la etapa factual, el estudiante recolecta información auténtica utilizando Google Maps y la aplicación de InDriver. Este proceso favorece la identificación de magnitudes como distancia y precio sugerido, permitiendo reconocer que ambas variables están relacionadas. La construcción de tablas y el registro de datos no representan una simple actividad organizativa, sino un primer acercamiento a la comprensión de la covariación entre variables.

Las preguntas iniciales permiten que el estudiante describa con sus propias palabras cómo funciona el servicio de transporte y qué elementos intervienen en el cálculo del costo. Esto favorece la construcción de significados desde el lenguaje cotidiano antes de introducir formalizaciones matemáticas. Desde las prácticas variacionales, predominan la comparación y la seriación, pues el estudiante comienza a identificar diferencias entre precios y distancias, así como regularidades en el comportamiento de los datos.

En la etapa procedimental, el estudiante construye gráficos de dispersión en Excel para visualizar el comportamiento de los datos. Aquí las representaciones gráficas adquieren un papel central, ya que permiten observar tendencias, reconocer alineaciones de puntos y analizar el crecimiento de las variables. El estudiante no solamente “ve” una gráfica, sino que interpreta cómo cambia el precio cuando aumenta la distancia y cómo se mantiene un patrón de crecimiento relativamente estable.

Las preguntas relacionadas con estimaciones y cálculos de precios sin utilizar la aplicación promueven prácticas de predicción y estimación. El estudiante debe anticipar comportamientos futuros y utilizar la razón de cambio observada en la gráfica para justificar respuestas. En este punto comienza a emerger la idea de pendiente como cantidad que expresa cuánto aumenta el costo por cada kilómetro recorrido.

Finalmente, en la etapa simbólica, el estudiante explora líneas de tendencia y construye la expresión algebraica que modela la situación. La ecuación lineal deja de presentarse como un objeto abstracto y adquiere significado contextual. La pendiente se resignifica como la razón de cambio entre el costo y la distancia, mientras que el término independiente representa el valor mínimo de la carrera. Así, el estudiante logra conectar la representación verbal, tabular, gráfica y algebraica del fenómeno.

Tabla 4. Caracterización de las practicas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento I

Pregunta o actividad	¿Qué se espera del estudiante?	Etapas	Practica Variacional
Pensar en 10 lugares y construir la tabla	Identificar recorridos reales y reconocer magnitudes relacionadas	Factual	Comparación
Completar distancias con Google Maps	Relacionar distancia y recorrido	Factual	Comparación
Registrar precios sugeridos	Asociar el costo con la distancia	Factual	Comparación
Construir gráfico de dispersión	Visualizar relaciones entre variables	Procedimental	Seriación
Preguntas 1 y 2	Explicar el funcionamiento del servicio	Factual	Comparación
Preguntas 3 y 4	Identificar magnitudes y relaciones entre variables	Factual	Comparación
Pregunta 5	Analizar cómo cambian las variables en nuevas condiciones	Procedimental	Comparación
Pregunta 6	Interpretar tendencias gráficas	Procedimental	Seriación
Pregunta 7	Reconocer la razón de cambio entre variables	Procedimental	Seriación
Preguntas 8 y 9	Estimar y predecir costos usando información previa	Procedimental	Predicción y estimación

Pregunta 10	Construir el modelo algebraico lineal	Simbólica	Predicción
Preguntas 11 y 12	Comparar modelos y justificar cuál representa mejor la situación	Simbólica	Comparación
Pregunta 13	Interpretar el significado de R^2	Simbólica	Seriación
Pregunta 14	Identificar el modelo lineal adecuado	Simbólica	Predicción
Preguntas 15 y 16	Estimar distancias o costos usando el modelo	Simbólica	Estimación
Preguntas 17 a 22	Analizar cambios en la pendiente y efectos sobre la linealidad	Simbólica	Predicción y comparación

Nota: Elaboración propia

- **Segundo momento**

El segundo momento profundiza la comprensión de la función lineal mediante la comparación entre horarios ordinarios y horarios pico. La intención didáctica consiste en que el estudiante interprete cómo diferentes pendientes modifican el comportamiento de una función sin alterar necesariamente su carácter lineal.

En la etapa factual, el estudiante identifica nuevas variables relacionadas con el problema, especialmente el efecto del horario sobre el costo del servicio. Las tablas permiten reconocer que una misma distancia puede presentar diferentes costos dependiendo del contexto. En la etapa procedimental, las actividades exigen completar tablas, calcular diferencias y construir gráficos comparativos. Estas acciones favorecen la seriación y la comparación, ya que el estudiante debe analizar cómo cambian los precios entre diferentes horarios y determinar si el crecimiento conserva estabilidad. En la etapa simbólica, el estudiante formula expresiones algebraicas para los horarios ordinarios y pico. El objetivo no es únicamente escribir ecuaciones, sino comprender cómo la pendiente modifica el comportamiento del modelo y cómo el término independiente representa un costo inicial fijo.

Las preguntas orientadas a construir columnas de diferencias permiten reconocer el carácter constante de la variación en modelos lineales. Aquí la pendiente comienza a interpretarse como una medida de rapidez del cambio, posibilitando comparaciones entre dos funciones lineales distintas.

Tabla 5. Caracterización de las prácticas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento II

<i>Pregunta o actividad</i>	<i>¿Qué se espera del estudiante?</i>	<i>Etapas</i>	<i>Practica Variacional</i>
Completar la tabla	Determinar valores faltantes usando regularidades	Procedimental	Seriación
Pregunta 2	Identificar magnitudes relacionadas	Factual	Comparación
Pregunta 3, 4 y 5	Reconocer razones de cambio y costos mínimos	Procedimental	Comparación
Pregunta 6	Analizar diferencias entre horarios	Procedimental	Seriación
Preguntas 7 y 9	Construir e interpretar gráficos	Procedimental	Seriación
Pregunta 8	Calcular diferencias consecutivas	Procedimental	Comparación
Preguntas 10 y 11	Analizar si el comportamiento sigue siendo lineal	Simbólica	Comparación
Pregunta 12	Construir expresiones algebraicas	Simbólica	Predicción
Preguntas 13 y 14	Utilizar modelos para calcular gastos y recorridos	Simbólica	Comparación y estimación
Preguntas 15 a 17	Comparar funciones y justificar comportamientos	Simbólica	Comparación y estimación

Nota: Elaboración propia

• **Tercer momento**

En el tercer momento, el estudiante utiliza la pendiente como herramienta predictiva para comparar servicios de transporte en días festivos. La intención es consolidar la comprensión de la función lineal como modelo matemático capaz de anticipar comportamientos futuros.

En la etapa factual, el estudiante interpreta una representación gráfica tomada de un periódico. Esta situación fortalece la lectura de gráficos y la identificación de relaciones funcionales en contextos auténticos. En la etapa procedimental, las actividades exigen completar tablas, calcular gastos acumulados y comparar presupuestos. Las prácticas variacionales predominantes son la seriación, la predicción y la estimación, pues el estudiante debe anticipar valores futuros y analizar tendencias de crecimiento. La etapa simbólica se consolida cuando el estudiante construye modelos algebraicos generales para representar los costos del servicio de taxi e InDriver. Aquí la pendiente adquiere sentido como criterio para comparar qué servicio aumenta más rápido y cuál resulta más conveniente económicamente.

Tabla 6. Caracterización de las prácticas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento III

<i>Pregunta o actividad</i>	<i>¿Qué se espera del estudiante?</i>	<i>Etapas</i>	<i>Practica Variacional</i>
Completar tabla desde la gráfica	Interpretar información gráfica	Procedimental	Seriación
Preguntas 2 y 3	Calcular gastos utilizando el modelo	Procedimental	Predicción
Pregunta 4	Organizar información acumulada	Procedimental	Seriación
Pregunta 5	Analizar presupuesto y alcance económico	Simbólica	Estimación
Pregunta 6	Explicar procedimientos de cálculo	Procedimental	Predicción
Pregunta 7	Generalizar mediante expresiones algebraicas	Simbólica	Predicción

Preguntas 8 a 11	Analizar efectos de subsidios y comparar modelos	Simbólica	Comparación y estimación
Pregunta de la 12 a 14	Comparar el costo, estimar el gasto total y justificar la respuesta	Simbólica y procedimental	Predicción y estimación

Nota: Elaboración propia

• **Cuarto momento**

El cuarto momento tiene como propósito confrontar modelos lineales y no lineales para que el estudiante logre distinguir cuándo una razón de cambio es constante y cuándo deja de serlo.

En la etapa factual, el estudiante analiza un gráfico relacionado con recargos de taxi por tráfico. La representación gráfica permite reconocer visualmente que el crecimiento no mantiene una misma razón de cambio. En la etapa procedimental, las actividades de cálculo de diferencias consecutivas conducen al estudiante a comparar comportamientos y reconocer irregularidades en la variación. Las prácticas variacionales de comparación y seriación permiten identificar que las diferencias dejan de ser constantes. En la etapa simbólica, el estudiante argumenta por qué el comportamiento deja de ser lineal y compara esta situación con los modelos estudiados anteriormente. Así, comprende que la linealidad depende de la constancia de la pendiente y de la estabilidad en el crecimiento de las variables.

Tabla 7. Caracterización de las prácticas variacionales y las etapas con la situación de aprendizaje en el momento IV

Pregunta o actividad	¿Qué se espera del estudiante?	Etapas	Práctica Variacional
Preguntas 1 y 2	Describir verbalmente el comportamiento del recargo	Factual	Comparación
Pregunta 3	Interpretar gráficamente un valor específico	Procedimental	Predicción
Pregunta 4	Analizar el comportamiento global de la gráfica	Procedimental	Estimación

Pregunta 5	Comparar modelos lineales y no lineales	Simbólica	Comparación
Pregunta 6	Calcular diferencias consecutivas	Procedimental	Seriación
Pregunta 7	Reconocer variación no constante	Simbólica	Comparación
Pregunta 8	Contrastar comportamientos lineales y no lineales mediante gráficas	Simbólica	Comparación y estimación

Nota: Elaboración propia

En síntesis, el diseño de aprendizaje propuesto configura una trayectoria didáctica orientada a la construcción progresiva del concepto de función lineal desde contextos auténticos y significativos para el estudiante. Los cuatro momentos permiten un tránsito coherente entre el reconocimiento del cambio, la identificación de regularidades, la construcción de modelos algebraicos y la confrontación entre comportamientos lineales y no lineales. De esta manera, el estudiante no aprende la función lineal como una fórmula aislada, sino como una herramienta para interpretar fenómenos reales relacionados con la variación y el cambio.

La articulación entre las etapas factual, procedimental y simbólica favorece una resignificación constante del conocimiento matemático. En la etapa factual, el estudiante reconoce magnitudes y relaciones presentes en situaciones cotidianas; en la procedimental, organiza información, construye representaciones y desarrolla argumentos; mientras que en la simbólica logra formalizar modelos y utilizar expresiones algebraicas para explicar y predecir comportamientos.

Asimismo, las prácticas variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación constituyen el eje central del diseño, pues permiten al estudiante desarrollar formas de razonamiento orientadas al análisis del cambio. La comparación y la seriación favorecen el reconocimiento del carácter estable de la variación, mientras que la predicción y la estimación posibilitan anticipar comportamientos futuros y construir modelos funcionales. Así, la pendiente deja de interpretarse únicamente como un valor numérico y adquiere significado como expresión de la razón de cambio entre variables.

Finalmente, el uso de representaciones tabulares, gráficas, verbales y algebraicas fortalece la comprensión integral del concepto de función lineal, permitiendo que el estudiante articule diferentes formas de representar y explicar un mismo fenómeno. En consecuencia, la situación de aprendizaje promueve un pensamiento matemático más crítico, contextualizado y funcional, donde las matemáticas se convierten en una herramienta para interpretar, argumentar y tomar decisiones dentro de la realidad cotidiana.

5.2.4 Primer bosquejo del diseño de situación de aprendizaje

En este apartado se presenta el primer diseño de la situación de aprendizaje elaborado para la enseñanza de la función lineal, construido a partir de la articulación entre las prácticas variacionales, las tareas de modelación matemática y el enfoque de función lineal propuesto en la investigación. El diseño integra los cuatro momentos previamente descritos, los cuales orientan progresivamente al estudiante en la comprensión de la variación constante, la interpretación de la pendiente de la recta, la construcción de modelos matemáticos y el análisis de comportamientos lineales y no lineales dentro de contextos cercanos y significativos.

Asimismo, la propuesta se fundamenta en la noción de situación de aprendizaje entendida como un conjunto organizado de actividades contextualizadas que promueven la participación activa del estudiante en procesos de interpretación, representación, argumentación y toma de decisiones. Desde esta perspectiva, el diseño busca que los estudiantes construyan significado alrededor de la función lineal mediante situaciones auténticas relacionadas con el uso de servicios de transporte y la negociación de tarifas, favoreciendo la conexión entre las matemáticas escolares y fenómenos presentes en su vida cotidiana.

De igual manera, el diseño incorpora tareas de modelación matemática centradas principalmente en enunciados verbales auténticos y construcción de representaciones, permitiendo que los estudiantes transiten entre diferentes formas de representación tabular, gráfica, verbal y algebraica para comprender las relaciones de variación entre las magnitudes involucradas. Todo ello se desarrolla bajo un enfoque que concibe la función lineal no solo como una expresión

algebraica, sino como un modelo matemático útil para interpretar, analizar y explicar situaciones reales asociadas al cambio y la variación.

A continuación, se presenta el primer bosquejo de diseño de situación de aprendizaje, este diseño se enviará a los evaluadores para ser sometido a observaciones y correcciones desde la óptica de los docentes expertos en educación matemática, las practicas variacionales y la modelación matemática.

Diseño de aprendizaje para la enseñanza de la función lineal a través del proceso de modelación y las practicas variacionales.

Universidad
Industrial de
Santander



Nombre:	
Fecha:	

CONTEXTUALIZACIÓN

En la ciudad de Bucaramanga, cada día transportarse se ha convertido en un verdadero reto debido a las deficiencias del transporte masivo metrolínea, el limitado servicio de bus que solo pasa por determinadas rutas y los altos costos del servicio de taxi de la ciudad. Las plataformas de transporte alternativo han revolucionado por completo la manera de movilizarnos y son una opción alternativa para subsanar estas dificultades. InDriver, en particular, se ha convertido en una herramienta indispensable, ya que permite negociar la tarifa del viaje, permite conocer datos importantes del conductor, brinda mayor seguridad y confort y, sobre todo, permite decidir cuanto estamos dispuestos a pagar por una carrera.

Pero detrás de cada carrera hay preguntas que parecen sencillas, aunque en realidad exigen criterio, análisis y sentido de justicia: ¿cuánto debería costar mi viaje? ¿estoy ofreciendo un precio razonable?, ¿estoy pagando lo justo? En una plataforma donde tu decides el precio, necesitas aprender a valorar el servicio, a reconocer cuando una tarifa es adecuada y a negociar con seguridad para tomar decisiones inteligentemente.

Este tema no solo te resulta familiar, sino que hace parte de tu vida diaria. Entender cómo funciona la negociación en InDriver te ayudará a tomar mejores decisiones, ser más crítico y reconocer el verdadero valor de lo que pagas. Aquí comienza el reto: Aprender a estimar, argumentar y a decidir el precio justo que deberías pagar por un servicio.

¡Descubramos cuánto vale realmente tu viaje!

PRIMER MOMENTO



Para comenzar, piensa en 10 lugares que normalmente visitas o en lugares emblemáticos de la ciudad o del área metropolitana de Bucaramanga.

A continuación, abre una pestaña de Microsoft Excel y crea tu propia tabla. En la segunda coloca el lugar donde inicias el viaje y en la tercera a donde llegas.

<i>No.</i>	<i>Inicio</i>	<i>Llegada</i>
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

10

Tabla 8. Ejemplo momento I en el primer bosquejo de situación de aprendizaje

No.	Lugar		Distancia
#	Inicio	Llegada	Km
1	Centro comercial Megamall	Centro comercial Acrópolis	4.6
2	Clínica Comuneros	Hospital Internacional de Colombia	13.2
3	Parroquia Sagrada Familia	Aeropuerto de Palonegro	20.5
4	Acrópolis Centro Comercial	San Andresito la Isla	1.7

Nota: Elaboración propia

A continuación, vuelve al documento Excel, añade una nueva columna llamada “distancia” y completa la tabla con la información obtenida con Google Map.

No.	Lugar		Distancia
#	Inicio	Llegada	Km
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Una vez completada la tabla, deberás ingresar desde tu celular a la plataforma de transporte de InDriver en la modalidad de viaje en automóvil y deberás hallar el precio sugerido por la plataforma para los 10 lugares anteriormente listados.

Añade una nueva columna a tu tabla de Excel, agrégale el nombre de precio sugerido y completa la tabla con los valores sugeridos para los 10 lugares.

No.	Lugar		Distancia	Precio sugerido
#	Inicio	Llegada	Km	COP
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Una vez completa la tabla, los estudiantes por medio de la aplicación Microsoft Excel deberán generar un gráfico de dispersión teniendo en cuenta las variables cuantitativas de distancia (Km) y precio sugerido (COP) donde podrán observar el comportamiento de los datos.

A continuación, responde las siguientes preguntas teniendo presente las acciones concretas realizadas anteriormente y con tus saberes sobre función lineal.

1. ¿Has utilizado el servicio de plataforma de InDriver?
2. ¿Explica con tus palabras cómo pedir un servicio de InDriver?
3. ¿Para qué sirve conocer el lugar de recogida y el destino final a la hora de pedir un servicio por InDriver?
4. ¿Qué magnitudes consideras que intervienen a la hora de solicitar un servicio por InDriver?
Explica con tus palabras.

5. Si se transportarán más de dos personas en un mismo viaje, ¿Cambiarían las magnitudes anteriores? Explica tu respuesta.
6. Según el grafico de dispersión ¿qué tendencia presentan los datos en la gráfica? Justifica tu respuesta.
7. ¿A qué razón cambia el precio sugerido de un servicio de InDriver en carro según la cantidad de kilómetros que se recorren? Explica con tus palabras.
8. Si una persona necesita ir del centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, ¿Cuánto debe pagar por el servicio?, ¿Qué distancia hay hasta allá? Explica con tus palabras el proceso de estimación.
9. Si una persona necesita ir del centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, suponga que la aplicación de InDriver tiene una falla y no es posible conocer el precio a pagar sino al final del servicio, ¿cómo puedo calcular el precio a pagar de esta carrera si no dispongo de la aplicación para conocer el valor antes del servicio? Justifica tu respuesta.
10. Sí la carrera mínima en la plataforma de InDriver en carro es de \$5250. ¿Cómo puedo determinar la expresión algebraica que modela la razón de cambio del costo total del servicio por kilómetro?

Indicación:

A continuación observe en Microsoft Excel la gráfica de dispersión, selecciona un punto de la gráfica y luego dale clic derecho sobre el punto para poder visualizar las líneas de tendencia que hay (lineal, exponencial, logarítmica, polinómica), revisa cuál de estas líneas de dispersión se ajusta mejor a la situación modelada, tenga en cuenta la opción “presentar el valor de R cuadrado”, esta opción permite conocer el margen de error de la línea de dispersión para la gráfica de tendencia seleccionada. Dale a la opción de presentar ecuación en el gráfico para conocer la expresión algebraica seleccionada.

11. ¿Cuál línea de tendencia se ajustó mejor a la situación modelada?
12. ¿Explica con tus palabras porque la línea de tendencia exponencial no se adapta al modelo?
13. ¿Por qué es importante conocer el valor de R cuadrado del gráfico?

14. ¿Cuál es el mejor modelo que se ajusta a la situación sobre distancia (Km) vs precio sugerido (COP) a pagar por un servicio de InDriver?
15. ¿Cuántos kilómetros recorrió una persona que tuvo que pagar alrededor de 12.000, 25.000 y 37.000?

Costo (COP)	Distancia (Km)
\$12000	
\$25000	
\$37000	

16. ¿Si una persona recorre 810 metros y 5600 metros, cuánto deberá pagar?

Distancia (m)	Costo (COP)
810	
5600	

17. Explica con tus palabras como una persona que utilice la plataforma de InDriver puede estimar el costo de su carrera conociendo la distancia a recorrer.
18. Si la mamá de Carlos dispone de \$80.000 COP para transportarse a su trabajo y sabe que hay una distancia promedio de 4 km de su casa al trabajo, ¿crees que al finalizar la semana le alcanzará su dinero para transportarse? (1 semana = 7 días). Justifica tu respuesta.
19. Si la razón de cambio en cuanto al precio sugerido por distancia aumenta a 1000 COP, ¿cuántos viajes podría hacer la mamá de Carlos?.
20. Cómo afectaría el aumento en la razón de cambio de los precios sugeridos por distancia en los servicios en InDriver realizados en carro?
21. Si la razón de cambio de los servicios de InDriver en carro aumenta, ¿Dejaría de tener un comportamiento lineal? por qué.
22. Si la razón de cambio de los servicios de InDriver en carro disminuye, ¿Dejaría de tener un comportamiento lineal? por qué.



Figura 9. Relación entre razón de cambio y pendiente de la recta

Nota: Elaboración propia.

SEGUNDO MOMENTO



Un joven trabajador no cuenta con vehículo propio para transportarse; él pide todos los días un servicio de transporte por la plataforma de InDriver. Al empezar el mes, el muchacho necesita apartar el dinero que normalmente gasta para sus transportes, por ende, él necesita saber cuánto dinero debe separar para ello. También se sabe que él toma carro cada vez que pide un servicio por InDriver.

El joven a calculado las distancias que normalmente hace en la semana y las registró en la siguiente tabla.

Tabla 9. Representación gráfica momento II en el primer bosquejo de situación de aprendizaje

No.	Lugar		Distancia	Precio Sugerido	
	Inicio	Llegada		Hora Ordinal	Hora Pico
1	Casa	Trabajo	9.5	\$10200	\$13075
2	Casa	Casa novia	1.7	\$5520	\$6445
3	Casa	Centro Comercial	4.3		
4	Trabajo	Casa novia	3.4		
5	Trabajo	Centro comercial		\$6000	
6	Centro comercial	Casa Novia			\$10270

Nota: Elaboración propia

Conteste las siguientes preguntas tomando como referencia la información anterior.

1. Complete la tabla anterior con relación a la distancia y los precios en hora pico y hora ordinal faltantes.
2. ¿Qué magnitudes están relacionadas en el problema?
3. ¿Cuáles son las razones de cambio de los precios correspondientes a hora ordinaria y hora pico?
4. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora ordinaria? Suponga que la carrera mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.
5. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora pico? Suponga que la mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.
6. ¿Qué puedes analizar del comportamiento de los datos en la tabla sobre los precios sugeridos a pagar por un servicio en hora ordinaria y hora pico?
7. Bosqueja un gráfico de dispersión en Excel para hora ordinaria y hora pico, relacionando con las distancias dadas en la tabla.
8. Construya una columna que precise la diferencia del precio sugerido para los lugares que visita en la semana el joven en las horas ordinaria y pico.
9. Genere un gráfico de dispersión en Excel relacionando la diferencia de precio con la distancia recorrida.

10. ¿Qué diferencia hay entre el precio sugerido en hora ordinaria y el precio sugerido en hora pico por kilómetro recorrido?
11. ¿Es lineal el comportamiento entre la diferencia del precio a pagar por un servicio de InDriver por distancia recorrida? sí, no y por qué. Justifica tu respuesta.
12. Proporcione las expresiones algebraicas de los precios sugeridos a pagar por un servicio de InDriver en horas ordinaria y pico por unidad de distancia.

Hora ordinaria: $f(x) = \underline{\hspace{2cm}} * x + \underline{\hspace{2cm}}$

Hora pico: $P(x) = \underline{\hspace{2cm}} * x + \underline{\hspace{2cm}}$

13. Sí el joven debe hacer el siguiente recorrido: Primero, ira de su casa al trabajo, posteriormente ira del trabajo al centro comercial, luego ira del centro comercial a la casa de su novia y finalmente irá de la casa de la novia a su casa. ¿Cuánto dinero deberá disponer para los transportes de ese día si solo utiliza InDriver?
14. Si el joven trabaja de lunes a sábado y sabe que tiene que tomar 2 transportes diarios para ir a su trabajo, ¿Cuánto dinero deberá apartar para una semana? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al finalizar la semana? Explica tus respuestas.
15. Si el joven visita a su novia 3 veces a la semana, **¿En cuál horario (ordinario/pico) gastará más dinero?** Justifica tu respuesta apoyándote de las expresiones algebraicas encontradas en la pregunta 12.
16. Si el joven ha decidido separar \$530.000 para visitar a su novia e ir al centro comercial, **¿Para cuantos viajes le alcanzará en ambos horarios (ordinario/pico)?**
17. Si una persona hace una carrera de 5.7 km, en **¿qué horario pagará más por un servicio en carro?** Argumenta tu respuesta.

TERCER MOMENTO



El domingo, Camila está leyendo el periódico “EL INFORMANTE”, en el encuentra el siguiente gráfico donde se muestran los precios sugeridos entre la plataforma de InDriver y el servicio de taxi para los días domingos y festivos.

Al ver la información, recuerda a dos compañeros de trabajo: Daniel y Laura, quienes viven juntos, pero utilizan diferentes servicios de transporte para llegar a la empresa, ya que tienen horarios de entrada y salida distintos. Daniel siempre utiliza InDriver, mientras que Laura utiliza el servicio de taxi.

Se sabe que, durante el año, ambos deberán asistir a su trabajo en aproximadamente 18 días festivos, y que la distancia desde su casa hasta la empresa es de 3 km.



Figura 10. Ilustración momento III

A partir de la información del gráfico del periódico, responde las siguientes preguntas.

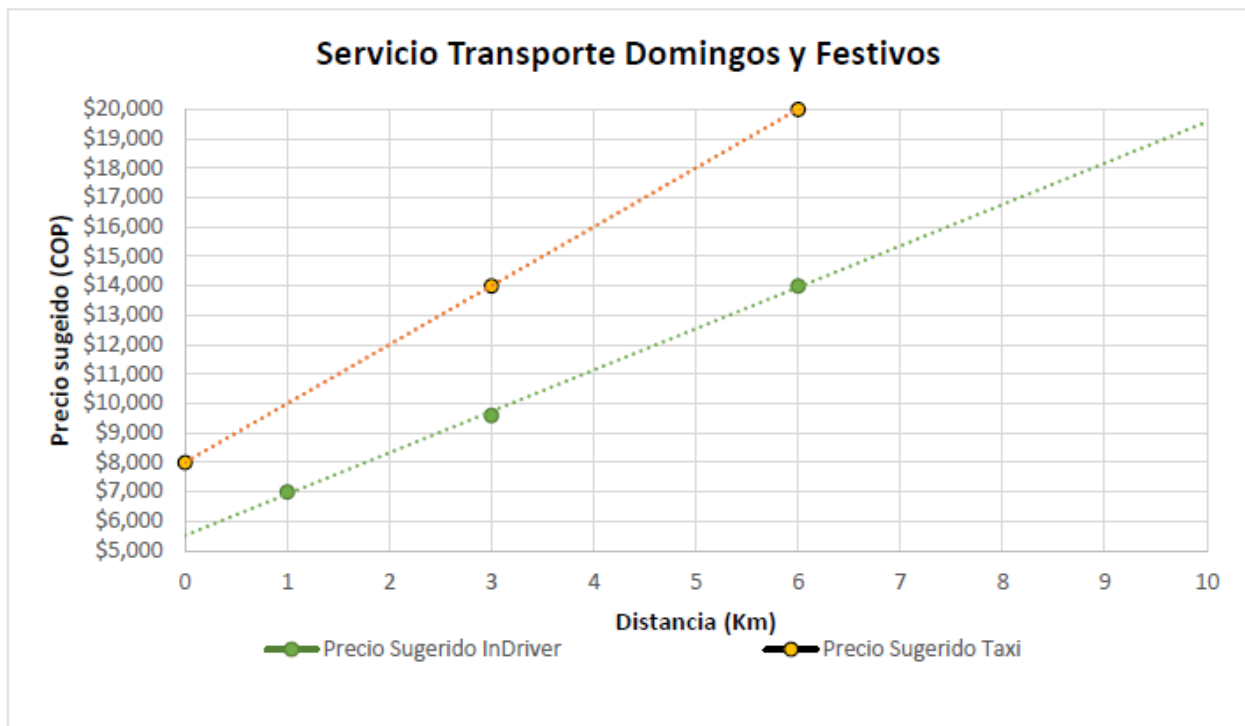


Figura 11. Ilustración gráfica servicio transporte domingos y festivos

Nota: Elaboración Propia

1. Según la información suministrada en el gráfico, completa la siguiente tabla, para ello cree un documento en Excel, realice la tabla y estime los valores del precio sugerido para InDriver y Taxi según las distancias dadas.

	<i>Indriver</i>	<i>Taxi</i>
Distancia	Precio Sugerido	Precio Sugerido
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2. ¿Cuánto dinero gasta Daniel en transportes para ir al trabajo? Escribe tus cálculos y explica tu respuesta.
3. ¿Cuánto dinero gasta Laura en transportes para ir al trabajo? Escribe tus cálculos y explica tu respuesta.
4. Realiza una tabla para ver reflejado los primeros 10 días de gasto para ir al trabajo un día festivo de los jóvenes.

Día festivo	Gasto Daniel	Gasto Laura
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

5. Si ambos jóvenes tienen \$350.000 destinados para el pago de los transportes en esos días festivos, ¿le alcanzará ese presupuesto a cada uno? ¿Exactamente para cuantos días les alcanza a cada uno? Escriba tus cálculos y explica tu respuesta.
6. Camila no sabe cómo calcular el precio sugerido a pagar para un servicio en taxi. Si la distancia que debe recorrer es de 4.5 km, ¿cómo le explicarías el procedimiento para determinar cuánto debería pagar en total durante los 18 días festivos?
7. Ahora imagina que se recorrerá una distancia cualquiera denotada por la letra P km, donde P es un número entero positivo arbitrario, ¿cómo calcular el precio sugerido a pagar para esa distancia P si se toma el servicio de taxi e InDriver?

Proporcione las expresiones algebraicas que permitan calcular el precio sugerido para el servicio de InDriver y Taxi para los días domingos y festivos.

Servicio Domingos y festivos $I(x) = \underline{\hspace{2cm}} * P + \underline{\hspace{2cm}}$

Servicio Domingos y festivos $T(x) = \underline{\hspace{2cm}} * P + \underline{\hspace{2cm}}$

8. Si la tarifa de taxi es subsidiada en un tercio por kilómetro recorrido, ¿Cómo calcular el precio sugerido a pagar con este subsidio? Escriba sus cálculos y la respectiva justificación.
9. Con el subsidio para taxis, ¿Cuánto deberá pagar Laura para los mismos 18 días festivos? Justifica tu respuesta.
10. Con el subsidio para taxis, ¿Cuánto deberá pagar Daniel para los mismos 18 días festivo? Justifica tu respuesta.
11. Con el subsidio de taxi, explica ¿qué es mejor, utilizar el servicio se taxi o utilizar el servicio de InDriver? Justifica tu respuesta



CUARTO MOMENTO

El Área metropolitana, a través de la empresa de monitoreo de transporte “Metertaxi”, está realizando un estudio sobre el cobro de recargos por unidad de tiempo en los servicios de taxi. Este recargo aparece únicamente cuando, durante una carrera, se presentan situaciones de alta densidad de tráfico o trancones, y su función es compensar el tiempo perdido del conductor. Dichos recargos quedan registrados automáticamente en los taxímetros.

Con el fin de analizar el comportamiento de estas tarifas, Metertaxi publicó un gráfico que resume los valores de recargo registrados por más de 300 conductores de taxi en la ciudad, mostrando la variación de cobros según diferentes condiciones de movilidad. A partir de este análisis, surge la pregunta de cómo estos recargos pueden afectar el costo total de un viaje en situaciones reales. Para estudiar este caso, se plantean las siguientes preguntas:

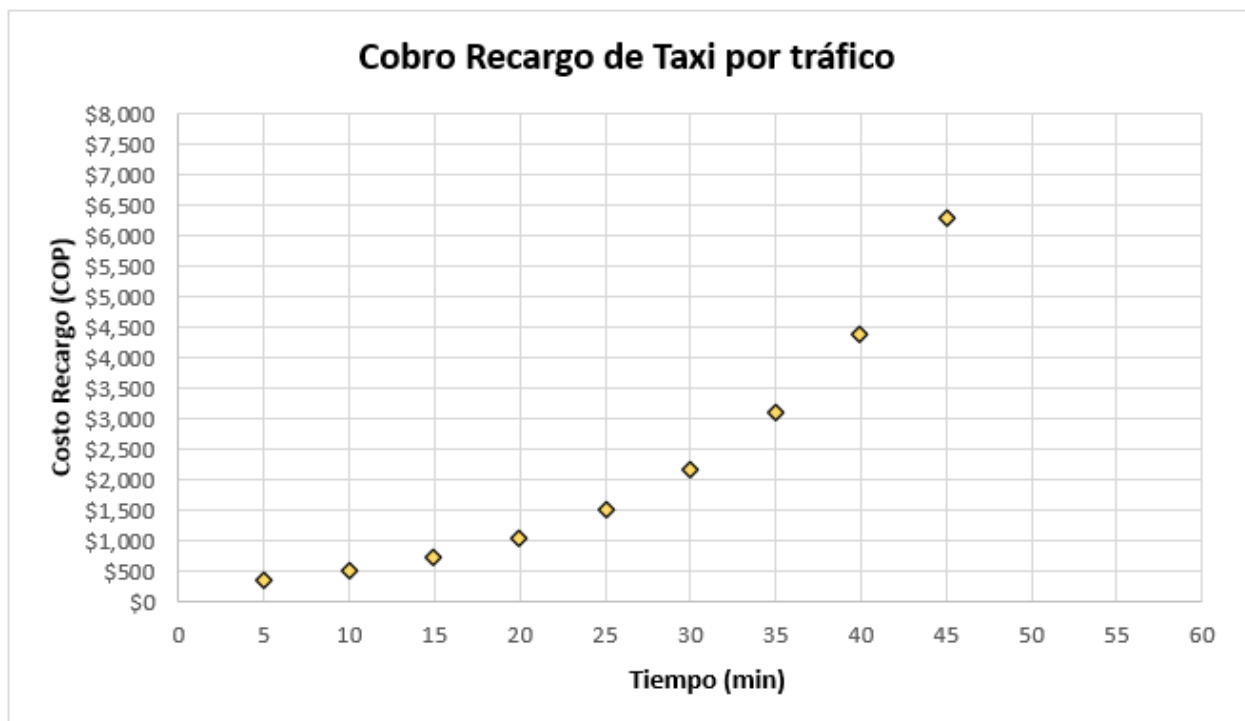


Figura 12. Ilustración gráfica cobro recargo de taxi por tráfico

Nota: Elaboración propia

1. Describe con tus palabras cómo es el cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo.
2. ¿Qué sucede con el costo del recargo en la medida que el tiempo avanza?
3. ¿Cómo ubicaría el costo del recargo de taxi a los 50 min? Ubíquelo en la gráfica presentada anteriormente.
4. ¿Cómo es el comportamiento del recargo por unidad de tiempo?
5. ¿El cobro de un servicio de InDriver analizado en el primer momento comparado con el cobro del recargo de taxi presentado en el cuarto momento son iguales? Justifique detalladamente su respuesta.
6. En la siguiente tabla, se muestran los valores del costo del recargo por unidad de tiempo para el servicio de taxi. Halle las diferencias consecutivas de los valores del costo del recargo.

Tabla 10. Representación gráfica situación momento IV en el primer bosquejo de situación de aprendizaje

Tiempo (min)	Cobro Recargo (COP)	Diferencia
5	\$350	
10	\$512	
15	\$732	
20	\$1,050	
25	\$1,500	
30	\$2,150	
35	\$3,100	
40	\$4,400	
45	\$6,300	

Nota: Elaboración propia

7. ¿Qué puede observar respecto a los valores de la columna diferencia la cual relaciona la variación del cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo?
8. En el momento dos, se hizo una columna sobre la diferencia de costo del servicio de InDriver en horas ordinaria y pico por distancia, ¿en qué se diferencia el comportamiento de los datos de esa columna con el comportamiento de los datos de la columna diferencia del cuarto momento? la cual relaciona el cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo.

Proporcione los respectivos gráficos de dispersión de las diferencias mencionadas y analice la pregunta.

5.3 Fase III. Refinamiento del diseño

En este capítulo ya se cuenta con un primer bosquejo del diseño de la situación de aprendizaje, construido y precisado a partir de los elementos desarrollados en el apartado anterior. Dicho borrador surge del proceso de reflexión, análisis y construcción realizado por el investigador, sustentado tanto en sus conocimientos y experiencias previas como en los aportes obtenidos durante la primera fase de la investigación correspondiente a la revisión bibliográfica. Asimismo, este diseño inicial fue revisado y orientado por la docente directora de tesis, permitiendo consolidar una propuesta coherente con los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el estudio.

Si bien este primer diseño constituye una propuesta sólida e interesante, se considera necesario someterlo a un proceso de validación académica que permita fortalecer su estructura y enriquecer sus aportes didácticos. En consecuencia, y con el propósito de garantizar la excelencia académica en la investigación, el diseño será evaluado por dos docentes expertos en prácticas variacionales, modelación matemática y enseñanza de la función lineal, quienes además cuentan con amplia experiencia en el trabajo de aula.

Para llevar a cabo este proceso de evaluación, el investigador elaboró una rúbrica en la que se especifican los criterios y aspectos generales que cada evaluador deberá considerar en sus valoraciones. Entre estos aspectos se encuentran la estructura general del diseño, la organización de las etapas de la situación de aprendizaje, la pertinencia del objeto matemático abordado (la función lineal) y el desarrollo de las prácticas variacionales presentes en las actividades propuestas. A partir de estas valoraciones, se espera recibir observaciones, sugerencias y recomendaciones orientadas al fortalecimiento del diseño inicial, contribuyendo así a la consolidación de una propuesta más sólida, coherente y pertinente para el logro de los objetivos de investigación.

Esta fase se desarrolla en tres momentos fundamentales. El primero corresponde al envío del primer bosquejo de la situación de aprendizaje junto con la rúbrica de evaluación a los dos docentes evaluadores. El segundo momento consiste en la recepción y análisis detallado de las valoraciones realizadas por cada experto, proceso en el cual se examinan cuidadosamente las observaciones y aportes recibidos, con el fin de identificar posibles ajustes y oportunidades de mejora sin perder de vista los propósitos centrales de la investigación. Finalmente, el tercer

momento se orienta a la reformulación y modificación del primer bosquejo, permitiendo consolidar el diseño definitivo de la situación de aprendizaje.

5.3.1 Evaluación del diseño de aprendizaje por docente experto

En este apartado se presenta una breve descripción de los docentes encargados de evaluar el primer bosquejo del diseño de aprendizaje. Por motivos de privacidad y confidencialidad, sus nombres no serán publicados en el presente documento; sin embargo, se dará a conocer su trayectoria académica y experiencia profesional, resaltando aquellos aspectos más relevantes que evidencian su formación, experiencia e idoneidad para participar como evaluadores del diseño propuesto. Asimismo, se incluirán las respectivas rúbricas de evaluación elaboradas por cada docente (**ver apéndice**), las cuales constituyen un aporte fundamental para el proceso de revisión, análisis y fortalecimiento de la situación de aprendizaje.

Los procesos de valoración y validación del primer bosquejo de la situación de aprendizaje fueron realizados por dos docentes con amplia formación y trayectoria en el campo de la Educación Matemática: **docente masculino # 1** y **docente femenino # 2**. La participación de ambos expertos representó un aporte significativo para el fortalecimiento teórico, metodológico y didáctico de la propuesta investigativa, debido a su experiencia en procesos de enseñanza, investigación y formación matemática.

El profesor docente # 1 es licenciado en matemáticas, magíster en ciencias matemáticas y doctor en calidad educativa. Sus líneas de investigación se centran en el campo de la educación, así como en la geometría y la topología. Cuenta con más de veinte años de experiencia universitaria, desempeñándose como docente de tiempo completo en la universidad Pontificia Bolivariana, seccional Bucaramanga, entre los años 2010 y 2024. Actualmente, se desempeña como docente de cátedra en la universidad Industrial de Santander y como docente del magisterio colombiano en propiedad. Además, ha participado como director y evaluador de trabajos de grado en programas de maestría relacionados con pedagogía y gestión educativa, lo cual evidencia su amplia experiencia en procesos académicos e investigativos.

Por su parte, la profesora docente # 2 es licenciada en matemáticas y magíster en educación matemática. Sus líneas de investigación están orientadas al pensamiento y lenguaje variacional, así como a la educación inclusiva y la atención a la diversidad. Ha desarrollado una importante trayectoria en educación superior y educación básica y media, desempeñándose como docente cátedra en instituciones como la universidad Nacional Abierta y a Distancia, las unidades Tecnológicas de Santander y la universidad Industrial de Santander. Asimismo, cuenta con experiencia como docente de matemáticas en instituciones educativas públicas y privadas, lo que le ha permitido consolidar una mirada amplia sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en distintos contextos educativos. Actualmente se desempeña como docente cátedra de la escuela de matemáticas de la universidad Industrial de Santander y docente en propiedad en educación básica y media.

La elección de estos expertos respondió a la necesidad de contar con evaluadores que, además de poseer formación académica sólida, tuvieran experiencia en investigación y en el trabajo directo de aula relacionado con el pensamiento variacional, la modelación matemática y la enseñanza de la función lineal. Desde esta perspectiva, sus observaciones y recomendaciones permitieron analizar el diseño desde diferentes dimensiones: la coherencia de las actividades propuestas, la pertinencia del contexto seleccionado, el desarrollo de las prácticas variacionales y la manera en que el concepto de función lineal se articula con situaciones contextualizadas y significativas para los estudiantes.

Las valoraciones realizadas por ambos docentes no solo permitieron identificar fortalezas importantes del diseño, sino también reconocer aspectos susceptibles de mejora relacionados con la claridad de algunas instrucciones, la organización de ciertas actividades y la necesidad de fortalecer algunos elementos de formalización matemática. En consecuencia, sus aportes constituyeron un insumo fundamental para el proceso de revisión y ajuste del diseño de la situación de aprendizaje, contribuyendo a consolidar una propuesta más sólida, coherente y didácticamente pertinente para el desarrollo de la investigación.

A continuación, se presentan las rúbricas de evaluación realizadas por los docentes expertos, las cuales recogen las valoraciones, observaciones y sugerencias efectuadas sobre el primer bosquejo del diseño de la situación de aprendizaje.

Es importante señalar que en este apartado únicamente se presentarán las tablas de valoración elaboradas por cada docente evaluador, las cuales contienen los criterios, puntajes y observaciones realizados a partir de sus conocimientos, experiencia y apreciaciones sobre el diseño de la situación de aprendizaje. Para consultar las rúbricas completas en el formato original entregado a los expertos, el lector podrá dirigirse al apartado de anexos ubicado al final del documento, donde se encuentran incorporados los instrumentos de evaluación en su totalidad.

Docente # 1

Tabla 11. Rubrica de valoración por docente experto 1

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Aspectos generales	El lenguaje es apropiado para el nivel escolar.				X		El lenguaje es adecuado para la población objetivo. El contexto utilizado es muy pertinente. Se sugiere revisar la redacción en algunas instrucciones de Excel. Revisar el documento compartido
	Existe claridad entre la instrucción y la actividad matemática esperada.				X		El lenguaje es adecuado para la población objetivo. El contexto utilizado es muy pertinente. Se sugiere revisar la redacción en algunas instrucciones de Excel. Revisar el documento compartido
	Existe una organización lógica y secuencial de las tareas en pro de la construcción progresiva del conocimiento.					X	La secuencia tiene una estructura progresiva clara y coherente (exploración, modelación, comparación y extensión de modelos) de acuerdo con la intencionalidad formativa. No

						obstante, se realizan algunas recomendaciones que podrían mejorar la interpretación de las actividades por parte de los estudiantes. Revisar documento.
	Las tareas y actividades son suficientes, en cantidad y calidad para responder al objetivo del diseño.				X	Las tareas son suficientes tanto en calidad como en cantidad. Se sugiere revisar algunas preguntas que podrían considerarse repetitivas.
Etapas de la SA	La SA parte de un escenario cercano (servicio de transporte InDriver) que resulta significativo y comprensible para el estudiante.				X	Excelente elección del contexto. Considero que esta es una de las fortalezas de la SA
	Factual Las preguntas iniciales permiten reconocer magnitudes involucradas (distancia, precio sugerido horario pico y ordinario) y establecer relaciones básicas, logrando que el estudiante se familiarice y se sitúe en la problemática.				X	Las preguntas logran su objetivo: Identificación de variables, relación entre estas e introducción de nuevas variables. Adicionalmente, están muy bien alineadas con el pensamiento variacional.
	Procedimental Las actividades propuestas conducen a que el			X		Las actividades cumplen su objetivo. Sin embargo, considero que se debe ser más explícito en la explicación de estrategias

	estudiante formule estrategias de cálculo y comparaciones, para identificar regularidades entre cantidades y con ello construir argumentos que expliquen los resultados obtenidos a lo largo del proceso.					a fin de minimizar el riesgo de mecanización de parte de los estudiantes. Podrían incluirse cuestionamientos como ¿Qué estrategia utilizó...? ¿Por qué este procedimiento funciona...?
	Simbólica Las actividades propuestas promueven el cambio de representaciones, que ayudan a consolidar el concepto de lo lineal (variación constante), permitiendo comparar comportamientos y generalizar conclusiones sobre el fenómeno.				X	La construcción de esta etapa es excelente. El tránsito entre representación gráfica, tabla y expresión algebraica está muy bien estructurado permitiendo alcanzar el objetivo.
Sobre el objeto matemático	Las tareas llevan a reconocer la existencia de una razón de cambio o variación constante entre magnitudes, permitiendo trascender el cálculo algorítmico hacia una					X Aquí se observa una fortaleza desde la didáctica. Las tareas abordan de una manera sólida la razón de cambio desde lo contextual hacia lo conceptual.

	perspectiva variacional del concepto función lineal.					
	El estudiante puede modelar, interpretar y predecir la relación entre variables , justificando cómo la variación de una de ellas incide en el comportamiento de la otra.				X	El aporte cognitivo es alto. Permite que el estudiante modele situaciones, realice predicciones y justifique su toma de decisiones.
	Pendiente El concepto de pendiente de la recta se significa como representación de la razón de cambio constante en una función lineal, a partir de la interpretación y análisis de diversas situaciones contextualizadas.				X	El concepto de pendiente de la recta implícitamente está bien abordado. No obstante, falta la institucionalización explícita del concepto. Se sugiere incluir un momento de cierre para formalizar el concepto y relacionarlo con la razón de cambio. Aquí también se podría profundizar un poco más sobre el significado del punto de corte con el eje y.
	Lineal vs no lineal Se proponen actividades y tipos de tareas adecuados que permitan evidenciar y validar que los estudiantes reconocen y explican la diferencia entre variación constante y					X Este apartado hace un aporte importante al diseño. Considero que está muy bien trabajado. Las actividades llevan al cumplimiento del objetivo

	comportamientos no lineales.						
Desarrollo de las PV	<u>Comparación</u> Las actividades propuestas en la SA son pertinentes para que los estudiantes comparen distintos estados de una o dos magnitudes (por ejemplo, costo del servicio y distancia recorrida), identificando con claridad qué cambia, qué permanece constante y cómo se expresa ese cambio (diferencia o razón) en el contexto de una relación lineal.					X	Las actividades ayudan claramente a cumplir con este objetivo.
	<u>Seriación</u> El diseño de aprendizaje promueve de manera coherente la organización y análisis de secuencias de datos (por ejemplo, variación del costo del servicio en función de la distancia), permitiendo a los estudiantes reconocer regularidades y el carácter					X	Aquí se encuentra otra fortaleza. El uso de software para creación de tablas y gráficos ayuda a organizar datos y a reconocer patrones de crecimiento y regularidades.

	constante del cambio propio de una función lineal					
	<u>Predicción</u> Las actividades permiten de forma eficiente que los estudiantes anticipen valores específicos de una variable (como el costo de un servicio para una distancia determinada), utilizando estrategias aritméticas, tabulares o algebraicas que evidencien la comprensión de la variación constante				X	La SA promueva constantemente la predicción cumpliendo con su objetivo
	<u>Estimación</u> El diseño favorece objetivamente que los estudiantes estimen tendencias globales del fenómeno (por ejemplo, la organización del dinero para transportarse a un lugar mensualmente conociendo la distancia a recorrer o si el costo del servicio aumenta de qué				X	Cumple. A manera de sugerencia, se podría pedir al estudiante que infieran el costo de un trayecto antes de utilizar las representaciones dadas para estimarlo a fin de comparar su intuición con la modelación, haciendo énfasis en la importancia del uso de la matemática en situaciones cotidianas.

	manera ese aumento afectará el gasto de dinero que requerirá para transportarse en el mes), describiendo el comportamiento general de la función lineal mediante representaciones verbales, gráficas o aproximadas						
--	--	--	--	--	--	--	--

Nota: Elaboración propia

Docente # 2

Tabla 12. *Rubrica de valoración por docente experto 2*

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Aspectos generales	El lenguaje es apropiado para el nivel escolar.				X		Se identifican algunos errores de redacción y ortografía en el diseño. Algunos se dejaron resaltados o comentarios en el documento.
	Existe claridad entre la instrucción y la actividad matemática esperada.				X		No se especifica si los datos de distancia se deben tomar en m o km. Si las orientaciones serán escritas, conviene ser más detallado, seleccione "Agregar línea de tendencia". Además,

						aclarar cómo se interpreta el margen de error en relación con la tendencia pues, luego se pregunta sobre su importancia de saberlo. Se solicita registrar datos de distancia usando Google y luego, datos sobre el precio usando InDriver. ¿Por qué no hacer ambos con InDriver?
	Existe una organización lógica y secuencial de las tareas en pro de la construcción progresiva del conocimiento.				X	Sugiero revisar el orden de las preguntas para que estén en sintonía con lo que se espera desde la etapa y desarrollo de las PV. Por ejemplo: En el momento 1, las preguntas 1 al 5 deberían ir antes de la instrucción de realizar la tabla pues, buscan conectar con conocimientos previos y contextualizar para luego, relacionar con las magnitudes. La pregunta 1 y 4 del momento 4, son la misma.
	Las tareas y actividades son suficientes, en cantidad y calidad para responder al objetivo del diseño.				X	
Etapas de la SA	La SA parte de un escenario cercano (servicio de transporte InDriver) que				X	

	resulta significativo y comprensible para el estudiante.					
	Factual Las preguntas iniciales permiten reconocer magnitudes involucradas (distancia, precio sugerido horario pico y ordinario) y establecer relaciones básicas, logrando que el estudiante se familiarice y se sitúe en la problemática.				X	
	Procedimental Las actividades propuestas conducen a que el estudiante formule estrategias de cálculo y comparaciones, para identificar regularidades entre cantidades y con ello construir argumentos que expliquen los resultados obtenidos a lo largo del proceso.				X	Se incentivan estrategias de cálculo y construcción de argumentos variacionales desde la interpretación o creación de representaciones tabulares, algebraicas o gráficas.
	Simbólica Las actividades propuestas promueven el cambio de				X	Se transita entre representaciones tabulares, gráficas, verbales y algebraicas.

	representaciones, que ayudan a consolidar el concepto de lo lineal (variación constante), permitiendo comparar comportamientos y generalizar conclusiones sobre el fenómeno.					
Sobre el objeto matemático	Las tareas llevan a reconocer la existencia de una razón de cambio o variación constante entre magnitudes, permitiendo trascender el cálculo algorítmico hacia una perspectiva variacional del concepto función lineal.				X	
	El estudiante puede modelar, interpretar y predecir la relación entre variables , justificando cómo la variación de una de ellas incide en el comportamiento de la otra.				X	
	Pendiente El concepto de pendiente de la recta se significa como representación de la				X	Conviene revisar o mejorar sobre cómo se interpreta R^2 con respecto a la tendencia con la regresión lineal pues,

	razón de cambio constante en una función lineal, a partir de la interpretación y análisis de diversas situaciones contextualizadas.					esto aporta significado adicional desde la estimación y modelación del fenómeno.
	Lineal vs no lineal Se proponen actividades y tipos de tareas adecuados que permitan evidenciar y validar que los estudiantes reconocen y explican la diferencia entre variación constante y comportamientos no lineales.				X	
Desarrollo de las PV	<u>Comparación</u> Las actividades propuestas en la SA son pertinentes para que los estudiantes comparen distintos estados de una o dos magnitudes (por ejemplo, costo del servicio y distancia recorrida), identificando con claridad qué cambia, qué permanece constante y cómo se expresa ese				X	

	cambio (diferencia o razón) en el contexto de una relación lineal.					
	<u>Seriación</u> El diseño de aprendizaje promueve de manera coherente la organización y análisis de secuencias de datos (por ejemplo, variación del costo del servicio en función de la distancia), permitiendo a los estudiantes reconocer regularidades y el carácter constante del cambio propio de una función lineal				X	
	<u>Predicción</u> Las actividades permiten de forma eficiente que los estudiantes anticipen valores específicos de una variable (como el costo de un servicio para una distancia determinada), utilizando estrategias aritméticas, tabulares o algebraicas que evidencien				X	

	la comprensión de la variación constante					
	<u>Estimación</u> El diseño favorece objetivamente que los estudiantes estimen tendencias globales del fenómeno (por ejemplo, la organización del dinero para transportarse a un lugar mensualmente conociendo la distancia a recorrer o si el costo del servicio aumenta de qué manera ese aumento afectará el gasto de dinero que requerirá para transportarse en el mes), describiendo el comportamiento general de la función lineal mediante representaciones verbales, gráficas o aproximadas				X	

Nota: Elaboración propia

OBSERVACIONES ADICIONALES

No fue claro si el documento enviado como diseño era la SA que se entregaría al estudiante o la explicación de cómo se desarrollaría la SA en el aula pues, en algunos apartados se encuentran aclaraciones sobre cómo se hará con los estudiantes o cómo se espera que se desarrolle la actividad.

En relación con lo anterior, si es una SA donde se espera que el estudiante transite con el uso de la herramienta de Excel e instrucciones moderadas por el docente; conviene revisar algunas representaciones del diseño (tablas) que podrían sobrar pues, basta con la instrucción para realizarlo en Excel e incluso mostrar un ejemplo con pocas filas. Otras, mejorar su redacción para la autonomía en el desarrollo de la actividad.

5.3.2 Análisis de las observaciones del docente evaluador

De acuerdo con las observaciones, recomendaciones y comentarios realizados por los docentes evaluadores, y tras el análisis de las rúbricas de valoración junto con los diseños devueltos, se identificaron diversas sugerencias de mejora que, para efectos de esta investigación, fueron clasificadas en dos grupos. El primer grupo corresponde a observaciones de carácter estructural, relacionadas principalmente con aspectos de redacción, organización y presentación del diseño. Dentro de estas se encuentran recomendaciones orientadas a mejorar la claridad de las ideas, reorganizar el orden de algunas preguntas, ajustar la cantidad de tablas presentes en ciertas actividades, incorporar ejemplos guía que facilitaran la comprensión de las tareas propuestas y corregir aspectos ortográficos y de puntuación.

El segundo grupo corresponde a observaciones de carácter didáctico-matemático. En este apartado se agrupan sugerencias enfocadas en la precisión conceptual y en la coherencia pedagógica del diseño de aprendizaje. Entre ellas se destacan ajustes relacionados con la corrección de expresiones algebraicas y variables, la clarificación de algunas tareas matemáticas, el fortalecimiento de la secuencialidad necesaria para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos en cada momento y la eliminación de preguntas repetitivas. Asimismo, se sugirió incorporar nuevas preguntas que permitieran consolidar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje en cada momento de la situación y realizar ajustes en la imagen correspondiente al

segundo momento, particularmente en lo relacionado con la contextualización de la situación y la significación de la pendiente como razón de cambio.

A continuación, se presenta el análisis y la justificación de las observaciones realizadas por los docentes evaluadores al primer bosquejo de la situación de aprendizaje, tomando como referencia tanto las rúbricas de valoración como los documentos devueltos por los expertos. Para favorecer la claridad expositiva y evitar reiteraciones con apartados anteriores, este análisis se organiza mediante una tabla compuesta por cuatro columnas: en la primera se presenta la observación realizada por el evaluador; en la segunda, el tipo de corrección identificada (estructural o didáctico-matemática); en la tercera, la modificación implementada en el diseño; y finalmente, en la cuarta columna, la justificación del ajuste realizado.

Se espera que las correcciones efectuadas contribuyan al fortalecimiento del diseño de aprendizaje, permitiendo una mayor claridad en la construcción del concepto de función lineal y favoreciendo que el estudiante cuente con herramientas más sólidas para transitar progresivamente por los cuatro momentos propuestos. Del mismo modo, se busca potenciar la caracterización de la variación a través de las prácticas variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación, así como consolidar el papel de las etapas factual, procedimental y simbólica como apoyo fundamental en la comprensión de conceptos como función lineal, pendiente de la recta y razón de cambio.

Tabla 13. Caracterización del tipo de correcciones y ajustes sobre las valoraciones recibidas por docentes expertos

Observación del evaluador	Tipo de corrección	Modificación realizada en el diseño	Justificación del ajuste
Revisar la redacción de algunas preguntas e instrucciones del diseño.	Estructural	Se reformularon instrucciones y preguntas utilizando un lenguaje más claro, coherente y preciso.	Favorece la comprensión de las actividades y evita interpretaciones ambiguas por parte de los estudiantes.
Existen errores ortográficos y de puntuación en algunos apartados del documento.	Estructural	Se realizó una revisión general de ortografía, puntuación, concordancia gramatical y uso de mayúsculas.	Mejora la calidad formal del documento y la claridad comunicativa del diseño de aprendizaje.

Algunas preguntas del diseño son repetitivas.	Didáctico-matemático	Se eliminaron o fusionaron preguntas que abordaban la misma intención matemática, especialmente en el cuarto momento.	Evita redundancias y mejora la secuencialidad del razonamiento variacional dentro de las actividades.
Debe explicitarse mejor el uso de Excel para construir gráficos y líneas de tendencia.	Estructural	Se añadieron instrucciones paso a paso para construir gráficos de dispersión, insertar líneas de tendencia y visualizar ecuaciones y valores de R^2 .	Facilita la autonomía del estudiante y fortalece el proceso de modelación matemática.
No es claro cómo interpretar el valor de R^2	Didáctico-matemático	Se incorporó una explicación contextualizada sobre el significado del valor de R^2 como medida de ajuste del modelo lineal.	Permite relacionar el análisis estadístico con la interpretación funcional de los datos.
Revisar la utilización de Google Maps e InDriver dentro de la actividad.	Estructural	Se reorganizó la actividad aclarando que la información principal será tomada desde InDriver y Google Maps funcionará como apoyo complementario.	Mejora la coherencia metodológica y evita procedimientos innecesarios o repetitivos.
Precisar las unidades de medida utilizadas en las distancias.	Estructural	Se especificó que las distancias serán registradas en kilómetros y para la pregunta donde se dan metros, el estudiante deberá convertir a kilómetros.	Garantiza mayor precisión conceptual y evita confusiones en el manejo de magnitudes.
Hace falta institucionalizar explícitamente el concepto de pendiente.	Didáctico-matemático	Se añadió un cierre conceptual en el segundo y tercer momento donde se formaliza la pendiente como razón de cambio constante.	Fortalece la construcción conceptual de la función lineal desde el contexto de la modelación matemática.
Profundizar sobre el significado del punto de corte con el eje y.	Didáctico-matemático	Se incorporaron preguntas donde el término independiente se interpreta como costo inicial o carrera mínima del servicio.	Favorece la resignificación contextual de la expresión algebraica $f(x) = mx + b$.
Ser más explícito en las estrategias utilizadas por los estudiantes.	Didáctico-matemático	Se añadieron preguntas orientadas a la argumentación como: “¿Qué estrategia utilizaste?” y “¿Por qué consideras que funciona?”.	Promueve procesos de razonamiento matemático y evita respuestas mecanizadas.
Pedir al estudiante realizar estimaciones	Didáctico-matemático	Se añadieron actividades de predicción y estimación intuitiva	Fortalece las prácticas variacionales de estimación y predicción

antes de formalizar procedimientos.		antes de construir tablas y expresiones algebraicas.	desde el pensamiento intuitivo.
Algunas tablas del diseño pueden simplificarse.	Estructural	Se redujo la cantidad de tablas repetitivas y se dejaron únicamente tablas guía para completar en Excel.	Evita saturación visual y favorece la autonomía del estudiante.
No es claro si el documento corresponde a una guía docente o estudiantil.	Estructural	Se corrigió el lenguaje con el que se escribieron algunas orientaciones, el diseño de aprendizaje corresponde a una secuencia de actividades para el estudiante.	Permite mayor claridad sobre las indicaciones al estudiante en cada momento del documento.
Revisar la secuencialidad de las actividades respecto a los objetivos de aprendizaje	Didáctico-matemático	Se reorganizaron las preguntas siguiendo las etapas factual, procedimental y simbólica en cada momento.	Garantiza coherencia didáctica y favorece el tránsito progresivo hacia la formalización matemática.
Fortalecer la relación entre pendiente y razón de cambio.	Didáctico-matemático	Se añadieron preguntas comparativas sobre el crecimiento de los costos respecto a la distancia recorrida.	Permite comprender la pendiente como medida de variación entre magnitudes.
Revisar la coherencia de algunas expresiones algebraicas y variables utilizadas.	Didáctico-matemático	Se corrigieron expresiones algebraicas, notación y uso de variables dentro de las actividades.	Garantiza rigurosidad matemática y coherencia conceptual.
La imagen del segundo momento debe representar mejor la situación contextualizada.	Didáctico-matemático	Se modificó la imagen y contextualización del segundo momento, se añade una pregunta dentro de la imagen con el propósito de fortalecer la noción de pendiente y razón de cambio.	Favorece la interpretación visual de la pendiente y la razón de cambio en contextos reales.
Se debe fortalecer la comparación entre comportamientos lineales y no lineales.	Didáctico-matemático	Se reorganizaron las actividades del cuarto momento incorporando análisis de diferencias consecutivas y comparación de comportamientos.	Facilita la comprensión de la variación constante y no constante como criterio diferenciador.

Nota: Elaboración propia

5.3.3 *Modificación del primer bosquejo de aprendizaje*

Para este apartado se tendrán en cuenta las observaciones, sugerencias y comentarios realizados por los docentes evaluadores, los cuales fueron consignados en las rúbricas de valoración del diseño de aprendizaje. A partir de dichas apreciaciones, y considerando la importancia de fortalecer la calidad del diseño para favorecer la comprensión de la función lineal mediante las prácticas variacionales, la situación de modelación y las etapas de aprendizaje propuestas, se presentarán las modificaciones realizadas al primer bosquejo de la situación de aprendizaje.

A continuación, se presenta la siguiente tabla, en la cual se especifican las preguntas correspondientes a cada momento del primer bosquejo de la situación de aprendizaje antigua, la acción concreta que se mejoró a partir de las observaciones de los docentes evaluadores y, finalmente, las nuevas preguntas incorporadas en el diseño de aprendizaje definitivo con el propósito de fortalecer la comprensión de la función lineal, la coherencia de las actividades y el desarrollo de las prácticas variacionales dentro de cada momento.

Es importante tener en cuenta que aquellas preguntas, tablas, imágenes o comentarios que no aparecen registrados en la siguiente tabla corresponden a elementos del primer bosquejo de la situación de aprendizaje que, después de ser comparados con las observaciones realizadas por los docentes evaluadores, no requirieron modificaciones o ajustes. Por esta razón, dichos elementos no serán incluidos dentro del análisis presentado a continuación.

Tabla 14. *Caracterización de los ajustes realizados al diseño de aprendizaje definitivo.*

Momento	Elemento del primer bosquejo de situación de aprendizaje	Modificación realizada	Ajuste realizado en el diseño de aprendizaje definitivo.
----------------	---	-------------------------------	---

Contextualización	Pero detrás de cada carrera hay preguntas que parecen sencillas, aunque en realidad exigen criterio, análisis y sentido de justicia: ¿cuánto debería costar mi viaje? ¿estoy ofreciendo un precio razonable?, ¿estoy pagando lo justo? En una plataforma donde tu decides el precio, necesitas aprender a valorar el servicio, a reconocer cuando una tarifa es adecuada y a negociar con seguridad para tomar decisiones inteligentemente. Este tema no solo te resulta familiar, sino que hace parte de tu vida diaria. Entender cómo funciona la negociación en InDriver te ayudará a tomar mejores decisiones, ser más crítico y reconocer el verdadero valor de lo que pagas. Aquí comienza el reto: Aprender a estimar, argumentar y a decidir el precio justo que deberías pagar por un servicio.	Se mejoró la redacción del segundo y tercer párrafo.	Pero detrás de cada carrera hay preguntas que parecen sencillas, aunque en realidad exigen criterio, análisis y sentido de justicia: ¿cuánto debería costar mi viaje? ¿estoy ofreciendo un precio razonable?, ¿estoy pagando lo justo? En una plataforma donde usted decide el precio, necesitas aprender a valorar el servicio, a reconocer cuando una tarifa es adecuada y a negociar de manera consciente para tomar decisiones acertadas. Este contexto no solo es cercano y familiar para los estudiantes, sino que hace parte de situaciones presentes en la vida cotidiana de muchas personas. Comprender cómo funciona la negociación de tarifas en InDriver permite desarrollar una mirada más crítica frente a las decisiones económicas relacionadas con el transporte y reconocer el valor de aquello que se paga. A partir de esta situación surge el reto de aprender a estimar, argumentar y decidir de manera fundamentada cuál podría ser un precio justo para un servicio de transporte.
I	A continuación, abre una pestaña de Microsoft Excel y crea tu propia tabla. En la segunda coloca el lugar donde inicias el viaje y en la tercera a donde llegas.	Se mejoró la redacción de las instrucciones para la tabla de Microsoft Excel	A continuación, abre una ventana en Microsoft Excel, crea una tabla con tres columnas, en la primera indica el número (1-10), en la segunda coloca el lugar en donde inicias el viaje y en la

			tercera el lugar a donde te diriges o el destino final.
I	A continuación, vuelve al documento Excel, añade una nueva columna llamada “distancia” y completa la tabla con la información obtenida con Google Map.	Corrección ortografía “Google Maps” y se añade la indicación del ejemplo.	A continuación, vuelve al documento Excel, añade una cuarta columna llamada “distancia” y con ayuda de Google Maps estima la distancia que hay en automóvil desde el lugar de inicio hasta el lugar de llegada final. Mira el ejemplo .
I	Una vez completada la tabla, deberás ingresar desde tu celular a la plataforma de transporte de InDriver en la modalidad de viaje en automóvil y deberás hallar el precio sugerido por la plataforma para los 10 lugares anteriormente listados. Añade una nueva columna a tu tabla de Excel, agrégale el nombre de precio sugerido y completa la tabla con los valores sugeridos para los 10 lugares.	Se mejoró la redacción del texto y el instructivo para la quinta columna de la tabla de Microsoft Excel.	Una vez completada la tabla, utiliza tu celular para ingresar a la plataforma de transporte InDriver, en la modalidad de viaje en automóvil, y consulta el precio sugerido por la aplicación para cada uno de los 10 lugares que aparecen en la tabla. Añade una quinta columna a tu tabla de Microsoft Excel, agrégale el nombre de precio sugerido y completa la tabla con los valores sugeridos arrojados para los 10 lugares. Toma el valor sugerido que da la plataforma.
I	Una vez completa la tabla, los estudiantes por medio de la aplicación Microsoft Excel deberán generar un gráfico de dispersión teniendo en cuenta las variables cuantitativas de distancia (Km) y precio sugerido (COP) donde podrán observar el comportamiento de los datos.	Se mejora la redacción del texto, la claridad de la instrucción y se corrigieron errores ortográficos. Se añade el ejemplo del gráfico de dispersión que sirve como guía para los estudiantes.	Una vez completa la tabla, genera por medio de la aplicación Microsoft Excel un gráfico de dispersión teniendo en cuenta las variables cuantitativas de distancia (Km) y precio sugerido (COP) y observar cuidadosamente el comportamiento de los datos representados en la gráfica. Mira el ejemplo

I	A continuación, responde las siguientes preguntas teniendo presente las acciones concretas realizadas anteriormente y con tus saberes sobre función lineal.	Se mejoro la redacción del texto y la claridad de la instrucción.	A continuación, responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información recolectada previamente en la tabla y en el gráfico de dispersión. Además, apoye sus respuestas en sus conocimientos sobre el uso de la plataforma InDriver y en los saberes previos relacionados con la función lineal.
I	1. ¿Has utilizado el servicio de plataforma de InDriver?	Se mejora la redacción del planteamiento de la pregunta y se pide una pequeña descripción con el propósito de evitar respuestas monosílabas.	1.¿Has utilizado anteriormente la plataforma de InDriver? Describe brevemente tu experiencia.
I	3.¿Para qué sirve conocer el lugar de recogida y el destino final a la hora de pedir un servicio por InDriver?	Se mejora la redacción.	3.¿Por qué crees que es importante conocer el lugar de recogida y el destino final antes de solicitar un servicio por InDriver?
I	4.¿Qué magnitudes consideras que intervienen a la hora de solicitar un servicio por InDriver? Explica con tus palabras.	Se precisa más la pregunta.	4.¿Qué aspectos o magnitudes consideras que influyen en el valor de una carrera en InDriver? Explica tu respuesta.
I	5.Si se transportarán más de dos personas en un mismo viaje, ¿Cambiarían las magnitudes anteriores? Explica tu respuesta.	Se mejora la redacción de la pregunta.	5. Si se transportaran más de dos personas en un mismo viaje, ¿Consideras que cambiarían alguna de las magnitudes anteriores? Explica tu respuesta.

I	6. Según el grafico de dispersión ¿qué tendencia presentan los datos en la gráfica? Justifica tu respuesta.	Se amplió la pregunta para favorecer procesos de argumentación e interpretación gráfica.	6. Al observar el gráfico de dispersión ¿qué comportamiento o tendencia identificas entre la distancia recorrida y el precio sugerido? Explica cómo llegaste a esa conclusión.
I	7. ¿A qué razón cambia el precio sugerido de un servicio de InDriver en carro según la cantidad de kilómetros que se recorren? Explica con tus palabras.	Se ajustó la redacción para hacer la pregunta más comprensible y cercana al contexto. Se simplificó el lenguaje y se favoreció una interpretación más intuitiva de la razón de cambio.	7. A partir de los datos obtenidos, ¿cómo cambia el precio del servicio cuando varía la distancia recorrida? Describe con tus palabras el comportamiento observado.
I	8. Si una persona necesita ir del centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, ¿Cuánto debe pagar por el servicio?, ¿Qué distancia hay hasta allá? Explica con tus palabras el proceso de estimación.	Se mejoró la redacción y se fortaleció el enfoque de estimación matemática.	8. Si una persona necesita desplazarse desde el centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, ¿qué distancia aproximada recorrería y cuál crees que sería el valor del servicio? Explica con tus palabras el procedimiento que utilizaste para realizar la estimación.
I	9. Si una persona necesita ir del centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, suponga que la aplicación de InDriver tiene una falla y no es posible conocer el precio a pagar sino al final del servicio, ¿cómo puedo calcular el precio a pagar de esta carrera si no dispongo de la	Se formalizó la pregunta y se fortaleció el razonamiento predictivo.	9. Supón que la aplicación de InDriver presenta una falla y no muestra el precio sugerido antes del viaje. ¿cómo podría una persona estimar el valor aproximado de la carrera utilizando únicamente la

	aplicación para conocer el valor antes del servicio? Justifica tu respuesta.		distancia recorrida? Justifica tu respuesta.
I	Indicaciones sobre líneas de tendencia en Microsoft Excel	Se reorganizó la instrucción, se mejoró la claridad de los pasos, se corrigió ortografía y se añadió explicación sobre el valor de R^2 y la ecuación de la gráfica.	Indicaciones sobre líneas de tendencia en Microsoft Excel
I	12. ¿Explica con tus palabras porque la línea de tendencia exponencial no se adapta al modelo?	Se corrigió la estructura gramatical y se formalizó el lenguaje.	12. ¿Por qué consideras que el modelo exponencial no describe adecuadamente el comportamiento de los datos obtenidos?
I	13.¿Por qué es importante conocer el valor de R cuadrado del gráfico?	Se reestructuro el planteamiento de la pregunta favoreciendo el análisis del valor de R^2	13.¿Qué información importante proporciona conocer el valor de R^2 del gráfico a la hora de analizar un modelo matemático? Justifica tu respuesta
I	14.¿Cuál es el mejor modelo que se ajusta a la situación sobre distancia (Km) vs precio sugerido (COP) a pagar por un servicio de InDriver?	Se mejoró la precisión conceptual y contextual de la pregunta.	14.¿Cuál consideras que es el mejor modelo matemático más adecuado para representar la relación entre la distancia recorrida y el precio sugerido del servicio? Justifica tu respuesta
I	15. ¿Cuántos kilómetros recorrió una persona que tuvo que pagar alrededor de 12.000, 25.000 y 37.000? (Estimación)	Se organizó mejor la presentación de los valores, se clarifico la instrucción y se formalizó la redacción.	15.A partir del modelo obtenido, estima ¿Cuántos kilómetros aproximadamente recorrió una persona que pago cerca

			de \$12.000, \$25.000 y \$37.000?
I	16. Si una persona recorre 810 metros y 5600 metros, ¿cuánto deberá pagar?	Se mejoró la claridad de la instrucción, el signo de pregunta y se fortaleció el carácter predictivo.	16.Utilizando el modelo encontrado, estima ¿Cuánto debería pagar una persona si recorre 810 metros y 5600 metros?
I	18. Si la mamá de Carlos dispone de \$80.000 COP para transportarse a su trabajo y sabe que hay una distancia promedio de 4 km de su casa al trabajo, ¿crees que al finalizar la semana le alcanzará su dinero para transportarse? (1 semana = 7 días). Justifica tu respuesta.	Se reorganizó la situación problema y se fortaleció la toma de decisiones basada en modelación matemática.	18.La mamá de Carlos dispone de \$80.000 COP para transportarse durante una semana y recorre aproximadamente 4 km diarios para ir a su trabajo. Según el modelo obtenido, ¿consideras que el dinero será suficiente para cubrir los gastos de transporte de la semana? (1 semana = 7 días). Justifica tu respuesta.
I	20. Cómo afectaría el aumento en la razón de cambio de los precios sugeridos por distancia en los servicios en InDriver realizados en carro?	Se fortaleció la relación entre representación gráfica y algebraica.	20. Si aumenta el valor que se cobra por cada kilómetro recorrido, ¿cómo se vería afectado el comportamiento de la gráfica y de la expresión algebraica? Explica tu respuesta.
I	Imagen final del momento I sobre la razón de cambio	Se adapto para indagar sobre lo aprendido sobre pendiente y razón de cambio	Imagen final del momento I sobre la razón de cambio
II	Enunciado del momento II	Se mejoró la redacción, la coherencia narrativa y la formalidad del contexto inicial.	Enunciado del momento II
II	1. Complete la tabla anterior con relación a la distancia y los precios en hora pico y hora ordinal faltantes.	Se corrigió el nombre del horario “ordinal”,	1.Complete los valores faltantes de la tabla teniendo en cuenta el

		se mejoró la precisión de la instrucción y se formalizó el lenguaje.	comportamiento de los precios en horario ordinario y horario pico.
II	2. ¿Qué magnitudes están relacionadas en el problema?	Se fortaleció la intención explicativa y el reconocimiento de variables.	2.¿Qué magnitudes o variables intervienen en esta situación? Explica tu respuesta.
II	3. ¿Cuáles son las razones de cambio de los precios correspondientes a hora ordinaria y hora pico?	Se arreglo la redacción de la pregunta.	3. ¿Cuáles son las razones de cambio de los precios correspondientes a hora ordinaria y hora pico?
II		Se incorporó pregunta para llevar al estudiante a reflexionar sobre los comportamientos encontrados de las funciones lineales.	4.¿Qué diferencias observas entre los precios sugeridos en horario ordinario y en horario pico?
II	4. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora ordinaria? Suponga que la carrera mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.	Cambio el numeral de la pregunta, pasa a ser la # 5	5.¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora ordinaria? Suponga que la carrera mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.
II	5. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora pico? Suponga que la mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.	Cambio el numeral de la pregunta, pasa a ser la # 6	6.¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora pico? Suponga que la mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.
II	6. ¿Qué puedes analizar del comportamiento de los datos en la tabla sobre los precios sugeridos a pagar por un servicio en hora ordinaria y hora pico?	Se fortaleció la interpretación del crecimiento de las variables y el	7.¿Qué puedes concluir sobre el comportamiento de los precios en ambos horarios a medida que aumenta la

		análisis comparativo.	distancia recorrida? Apoyase de la tabla para justificar tus respuestas.
II	7. Bosqueja un gráfico de dispersión en Excel para hora ordinaria y hora pico, relacionando con las distancias dadas en la tabla.	Se reorganizó la instrucción y se añadieron pasos más claros para la construcción gráfica.	Indicaciones para construir el gráfico de dispersión
II		Pregunta nueva, favorece el proceso de comparación de las gráficas y contribuye con comprender el comportamiento de los precios en ambos horarios.	8. Al comparar ambas gráficas, ¿qué diferencias observas en el crecimiento de los precios? Explica tu respuesta.
II		Pregunta nueva, busca significar el concepto de pendiente.	13. ¿Qué significado tiene la pendiente en cada uno de los horarios analizados? Explica tu respuesta.
II		Se añadió una nueva pregunta por sugerencia del docente evaluador para fortalecer la interpretación de los parámetros de la función lineal.	15. Explica con tus palabras que representa la variable “x”, la pendiente “m” y el intercepto “b” en las funciones F y P.
II	13. Sí el joven debe hacer el siguiente recorrido: Primero, ira de su casa al trabajo, posteriormente ira del trabajo al centro comercial, luego ira del centro comercial a la casa de su novia y finalmente irá de la casa de la novia a su casa. ¿Cuánto dinero deberá disponer para los transportes de ese día si solo utiliza InDriver?	Se mejoró la redacción y la organización secuencial de la situación planteada. Cambia el numeral pasará a ser la # 16	16. Sí el joven debe hacer el siguiente recorrido: Primero, ira de su casa al trabajo, posteriormente ira del trabajo al centro comercial, luego ira del centro comercial a la casa de su novia y finalmente irá de la casa de la novia a su casa. ¿Cuánto dinero deberá disponer para

			los transportes de ese día si solo utiliza InDriver?
II	14. Si el joven trabaja de lunes a sábado y sabe que tiene que tomar 2 transportes diarios para ir a su trabajo, ¿Cuánto dinero deberá apartar para una semana? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al finalizar la semana? Explica tus respuestas.	Se reorganizó la pregunta y se fortaleció el análisis acumulativo y predictivo.	17. Si el joven trabaja de lunes a sábado y sabe que tiene que tomar 2 transportes diarios para ir a su trabajo, ¿Cuánto dinero deberá apartar para una semana? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al finalizar la semana? Explica tus respuestas.
II	15. Si el joven visita a su novia 3 veces a la semana, ¿En cuál horario (ordinario/pico) gastará más dinero? Justifica tu respuesta apoyándote de las expresiones algebraicas encontradas en la pregunta 12.	Se mejoró la claridad de la pregunta y se añadió apoyo en las expresiones algebraicas.	18. Si el joven visita a su novia 3 veces a la semana, ¿En cuál horario (ordinario/pico) gastaría más dinero? Justifica tu respuesta apoyándote de las expresiones algebraicas anteriores.
II	16. Si el joven ha decidido separar \$530.000 para visitar a su novia e ir al centro comercial, ¿Para cuantos viajes le alcanzará en ambos horarios (ordinario/pico)?	Se mejoró la redacción de la pregunta.	19. Si el joven ha decidido separar \$530.000 para visitar a su novia e ir al centro comercial, ¿Para cuantos viajes le alcanzaría si lo hace en ambos horarios (ordinario/pico)?
III	Enunciado momento III	Se mejoró la redacción, la coherencia narrativa, la ortografía y la formalidad del contexto inicial.	Enunciado momento III
III		Pregunta nueva, busca que el estudiante interprete la información	2. ¿Qué relación observa entre la distancia recorrida y el precio sugerido en cada

		tabulada para uno de los servicios de luego hacer transporte? inferencias y comparaciones.
	Pregunta nueva, esta pregunta está orientada a la interpretación gráfica y algebraica de la variación.	3. ¿Qué diferencias encuentra entre el comportamiento de los precios del servicio de taxi y los precios sugeridos de InDriver?
	Pregunta nueva, se busca fortalecer el análisis comparativo entre modelos lineales.	4. ¿Cuál de los dos servicios presenta un mayor aumento en el precio por cada kilómetro recorrido? Justifique su respuesta utilizando la información del gráfico.
	2. ¿Cuánto dinero gasta Daniel en transportes para ir al trabajo? Escribe tus cálculos y explica tu respuesta.	Se precisa la pregunta por sugerencia de los docentes evaluadores
	3. ¿Cuánto dinero gasta Laura en transportes para ir al trabajo? Escribe tus cálculos y explica tu respuesta.	5. ¿Cuánto dinero gastará Daniel en transportes los 18 días festivos para ir al trabajo? Escribe sus cálculos y explica tu respuesta.
		6. ¿Cuánto dinero gastará Laura en transportes los 18 días festivos para ir al trabajo? Escribe sus cálculos y explica tu respuesta.
III	5. Si ambos jóvenes tienen \$350.000 destinados para el pago de los transportes en esos días festivos, ¿les alcanzará ese presupuesto a cada uno? ¿Exactamente para cuantos días les alcanza a cada uno? Escriba tus cálculos y explica tu respuesta.	Se reorganizó la pregunta, la redacción y el proceso predictivo.
		8. Si ambos jóvenes tienen \$350.000 destinados para el pago de los transportes en esos días festivos, ¿les alcanzará ese presupuesto a cada uno? ¿Exactamente para cuantos días les alcanza a cada uno? Escriba tus cálculos y explica tu respuesta.

III	6. Camila no sabe cómo calcular el precio sugerido a pagar para un servicio en taxi. Si la distancia que debe recorrer es de 4.5 km, ¿cómo le explicarías el procedimiento para determinar cuánto debería pagar en total durante los 18 días festivos?	Se mejoró la redacción y se fortaleció el enfoque procedimental.	9. Camila desea calcular el valor de un recorrido en taxi para una distancia de 4.5 km, pero no sabe cómo hacerlo. ¿cómo le explicarías el procedimiento para estimar el precio sugerido del servicio? ¿cuánto debería pagar si fuera para los 18 días festivos? Justifica tus respuestas.
III	Pregunta 7	Se corrigió la variable en las expresiones algebraicas I y T	Pregunta 10
III	11. Con el subsidio de taxi, explica ¿qué es mejor, utilizar el servicio de taxi o utilizar el servicio de InDriver? Justifica tu respuesta	Se corrigieron errores ortográficos y se fortaleció la toma de decisiones basada en argumentos matemáticos.	14. Teniendo en cuenta el subsidio aplicado al servicio de taxi, ¿considera que a Daniel le conviene continuar utilizando InDriver o cambiarse al servicio de taxi? Justifique su respuesta.
IV	Enunciado momento IV	Se aumento el tamaño de letra del ultimo párrafo.	Enunciado momento IV
IV	1. Describe con tus palabras cómo es el cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo.	Se fortaleció la precisión conceptual y la formalidad de la redacción.	1. Describe con tus palabras ¿cómo funciona el cobro del recargo por unidad de tiempo en el servicio de taxi?
IV	2. ¿Qué sucede con el costo del recargo en la medida que el tiempo avanza?	Se mejoró la redacción y se fortaleció la intención interpretativa.	2. ¿Qué sucede con el valor del recargo a medida que transcurre el tiempo? Explique su respuesta.
IV	3. ¿Cómo ubicaría el costo del recargo de taxi a los 50 min? Ubíquelo en la gráfica presentada anteriormente.	Se añadió una instrucción gráfica específica y se	3. ¿Cómo ubicaría el costo del recargo de taxi a los 50 min? Ubíquelo en la gráfica

		mejoró la claridad de la actividad.	presentada anteriormente con un punto de color rojo.
IV	7. ¿Qué puede observar respecto a los valores de la columna diferencia la cual relaciona la variación del cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo?	Se formalizó la pregunta y se fortaleció la interpretación de la variación.	7. ¿Qué puede observar respecto a los valores de la columna diferencia de la pregunta anterior, la cual relaciona la variación del cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo?
IV		Se añadió una nueva pregunta por sugerencia del docente evaluador para fortalecer la diferenciación conceptual entre linealidad y no linealidad.	9. A partir de los análisis realizados, explique por qué el comportamiento del recargo de taxi no puede modelarse mediante una función lineal.
IV		Se añadió una nueva pregunta para consolidar la comprensión conceptual de la función lineal.	10. Explique con sus palabras cuál es la principal diferencia entre una situación de variación lineal y una situación de variación no lineal.

Nota: Elaboración propia

En el siguiente apartado se presentará el diseño definitivo de aprendizaje, elaborado a partir de las correcciones, observaciones y ajustes analizados anteriormente.

5.4 Fase IV. Reporte del diseño definitivo

En este último capítulo se presenta el reporte definitivo del diseño de la situación de aprendizaje elaborado en el marco de la presente investigación. Para ello, el capítulo se organiza en tres apartados fundamentales: la construcción del diseño definitivo de aprendizaje, la

elaboración del informe que da respuesta al objetivo general de investigación y, finalmente, la presentación de la versión final de la situación de aprendizaje.

La consolidación de este diseño fue posible gracias al desarrollo progresivo de los capítulos anteriores, así como al proceso constante de revisión, análisis y ajuste realizado durante la investigación. En este sentido, fueron fundamentales las orientaciones y recomendaciones del docente director de tesis, las cuales permitieron fortalecer el primer bosquejo de la situación de aprendizaje. De igual manera, las observaciones y valoraciones realizadas por los docentes evaluadores contribuyeron significativamente al mejoramiento del diseño inicial, favoreciendo una mayor claridad en los objetivos, las actividades propuestas y la intención didáctica de cada momento.

Asimismo, el proceso investigativo implicó una revisión conceptual alrededor de la enseñanza de la función lineal, particularmente desde la perspectiva de las prácticas variacionales y la modelación matemática. Esto permitió caracterizar el concepto de función lineal más allá de una visión exclusivamente algebraica, priorizando la comprensión de la variación, el cambio y las relaciones entre magnitudes en contextos cercanos a la experiencia de los estudiantes.

A partir de ello, se diseñó una situación contextualizada vinculada con los servicios de transporte utilizados en el área metropolitana, buscando que los estudiantes pudieran reconocer fenómenos presentes en su vida cotidiana, recolectar información real, analizar datos y construir modelos matemáticos a partir de sus saberes previos y experiencias. De esta manera, las actividades propuestas procuran favorecer un aprendizaje significativo, donde los estudiantes no solo interpreten expresiones algebraicas y representaciones gráficas, sino que también comprendan el sentido y la utilidad de la función lineal en situaciones reales.

5.4.1 Construcción del diseño definitivo de aprendizaje

En este apartado se presenta el proceso de construcción del diseño definitivo de la situación de aprendizaje elaborada para la enseñanza de la función lineal. Para ello, se exponen los principales ajustes y transformaciones realizados al primer bosquejo de aprendizaje a partir de las observaciones y recomendaciones planteadas por el docente director y los docentes evaluadores.

Dichos ajustes permitieron fortalecer la coherencia didáctica, la contextualización de las actividades, la claridad de las instrucciones y la articulación entre los objetivos de aprendizaje y las tareas propuestas. Asimismo, se describe cómo el diseño definitivo fue estructurado desde la perspectiva socioepistemológica, integrando las etapas factual, procedimental y simbólica como ejes para la construcción progresiva del conocimiento matemático. De igual manera, se explica la manera en que las prácticas variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación se incorporan en las diferentes actividades con el propósito de favorecer la comprensión de la variación y el cambio en contextos reales. Finalmente, se analiza el papel de la modelación matemática dentro de la situación de aprendizaje, especialmente mediante el uso de enunciados verbales auténticos y la construcción de representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que permiten al estudiante interpretar, argumentar y modelar situaciones cercanas a su realidad cotidiana relacionadas con los servicios de transporte.

La construcción del diseño definitivo de la situación de aprendizaje fue el resultado de un proceso continuo de análisis, revisión y reorganización didáctica, desarrollado a partir de las observaciones realizadas por el docente director y los docentes evaluadores del primer bosquejo de aprendizaje. Dicho proceso permitió fortalecer tanto la estructura metodológica como la intención formativa de las actividades propuestas, buscando que la enseñanza de la función lineal trascendiera la repetición de procedimientos algebraicos y se orientara hacia la comprensión de la variación y el cambio en contextos cercanos a la realidad de los estudiantes.

En este sentido, uno de los principales ajustes realizados al diseño consistió en replantear las situaciones problema desde contextos auténticos relacionados con los servicios de transporte utilizados cotidianamente por los estudiantes, particularmente la plataforma de InDriver y los servicios de taxi en el área metropolitana. Esta decisión respondió a la necesidad de construir actividades contextualizadas que permitieran a los estudiantes reconocer la utilidad de la matemática en situaciones reales, interpretar información, formular hipótesis, tomar decisiones y construir modelos matemáticos a partir de fenómenos presentes en su entorno.

El diseño definitivo se estructuró en cuatro momentos progresivos, organizados de tal manera que el estudiante pudiera avanzar desde la identificación intuitiva de relaciones entre variables hasta la construcción e interpretación de modelos algebraicos asociados a la función lineal

y modelos no lineales. Cada momento fue pensado desde las etapas factual, procedimental y simbólica propuestas por la perspectiva socioepistemológica, permitiendo una construcción gradual del conocimiento matemático.

En la **etapa factual**, las actividades se orientan al reconocimiento y comprensión de la situación planteada. Los estudiantes interactúan inicialmente con información contextualizada relacionada con distancias recorridas, precios sugeridos y variaciones en tarifas de transporte. Por ejemplo, en el primer momento, los estudiantes deben construir tablas utilizando datos reales obtenidos mediante Google Maps y la plataforma InDriver, identificando magnitudes como distancia y costo del servicio. Esta aproximación inicial favorece que los estudiantes describan fenómenos de cambio desde su lenguaje cotidiano, establezcan relaciones entre variables y reconozcan que el costo del servicio depende de la distancia recorrida.

A partir de estas actividades emergen las primeras prácticas variacionales, especialmente la comparación y la seriación. La comparación se evidencia cuando los estudiantes analizan diferencias entre precios y distancias, identificando qué trayectos resultan más costosos o cuáles presentan mayores recorridos. Preguntas como “¿Qué diferencias observas entre los precios sugeridos en horario ordinario y en horario pico?” o “¿Qué relación observa entre la distancia recorrida y el precio sugerido?” movilizan acciones de comparación entre estados de un mismo fenómeno. Por su parte, la seriación aparece cuando los estudiantes organizan y analizan conjuntos de datos consecutivos para identificar regularidades y patrones de crecimiento, especialmente al construir tablas, calcular diferencias o interpretar tendencias en gráficas.

Posteriormente, en la **etapa procedimental**, el diseño promueve la construcción y análisis de representaciones matemáticas. En esta fase, las gráficas de dispersión adquieren un papel central, ya que permiten visualizar comportamientos de variación, reconocer tendencias y establecer relaciones entre variables. En el segundo momento, por ejemplo, los estudiantes construyen gráficos en Excel para comparar el comportamiento de los precios en horario ordinario y horario pico. Estas actividades favorecen la interpretación gráfica y la comprensión del crecimiento lineal a partir de representaciones visuales.

Dentro de esta etapa también se fortalecen las prácticas variacionales de predicción y estimación. La predicción se manifiesta cuando el estudiante debe anticipar valores específicos a

partir de un modelo identificado, como ocurre en preguntas relacionadas con estimar cuánto debería pagar una persona para determinadas distancias o cuántos kilómetros recorrió alguien que pagó cierto valor. Por otro lado, la estimación se evidencia cuando el estudiante analiza tendencias globales del comportamiento de una variable, por ejemplo, al determinar cómo cambia el costo del servicio cuando aumenta la distancia o al interpretar el comportamiento general de una gráfica.

La **etapa simbólica** se consolida cuando los estudiantes construyen expresiones algebraicas que modelan las situaciones estudiadas. En esta fase, la función lineal deja de ser presentada únicamente como una fórmula abstracta y adquiere significado a partir del contexto trabajado previamente. Preguntas orientadas a determinar la expresión algebraica del costo del servicio, interpretar la pendiente o analizar el significado del intercepto permiten resignificar los elementos de la función lineal desde la realidad contextualizada del estudiante. De esta manera, la pendiente comienza a comprenderse como la razón de cambio entre el costo y la distancia recorrida, mientras que el término independiente representa el valor mínimo del servicio.

Asimismo, el diseño definitivo incorpora de manera intencionada tareas de modelación matemática, especialmente mediante el uso de enunciados verbales auténticos y la construcción de representaciones. Los enunciados verbales auténticos se evidencian en situaciones cercanas a la experiencia de los estudiantes, donde el contexto no funciona únicamente como un “adorno” para introducir operaciones matemáticas, sino como un fenómeno que debe analizarse, interpretarse y modelarse. Casos como el análisis de presupuestos familiares para transporte, la comparación entre tarifas de taxi e InDriver o la evaluación de subsidios en el servicio de taxi permiten que el estudiante construya modelos matemáticos a partir de necesidades reales.

De igual manera, la construcción de representaciones constituye un eje transversal en toda la situación de aprendizaje. Las tablas, gráficas de dispersión y expresiones algebraicas permiten representar un mismo fenómeno desde diferentes registros semióticos, favoreciendo procesos de interpretación, análisis y validación. Los estudiantes no solo producen representaciones, sino que también deben analizarlas y establecer relaciones entre ellas, fortaleciendo así la comprensión de la función lineal como modelo matemático de fenómenos de variación.

Otro aspecto importante dentro del diseño definitivo fue la incorporación de actividades orientadas a diferenciar comportamientos lineales y no lineales. En el cuarto momento, los

estudiantes analizan el comportamiento de los recargos por tiempo en el servicio de taxi, identificando que las diferencias consecutivas dejan de ser constantes. Este contraste permite consolidar la comprensión de la linealidad no solo desde la representación gráfica o algebraica, sino desde el análisis del comportamiento de la variación y la estabilidad del cambio.

En consecuencia, el diseño definitivo de aprendizaje se configura como una propuesta didáctica que articula las prácticas variacionales, la modelación matemática y la perspectiva socioepistemológica para favorecer una comprensión más significativa de la función lineal. Más allá de aprender procedimientos algebraicos, se busca que los estudiantes interpreten fenómenos reales, construyan relaciones entre variables, argumenten sus ideas y reconozcan el papel de las matemáticas como herramienta para comprender y actuar sobre situaciones de su contexto cotidiano.

5.4.2 Elaboración del informe para dar respuesta al objetivo de investigación

En este apartado se busca dar respuesta a la pregunta de investigación que orientó y motivó el desarrollo del presente estudio: ¿cómo promover la enseñanza de la función lineal desde el proceso de modelación para fomentar el desarrollo de estrategias variacionales en estudiantes de noveno grado? Asimismo, se pretende responder al objetivo general planteado en la investigación, el cual consistió en construir un diseño de aprendizaje que favoreciera la comprensión de la función lineal mediante procesos de modelación matemática y prácticas variacionales en estudiantes de noveno grado.

Para comenzar la enseñanza de la función lineal se promovió mediante la construcción de una situación de aprendizaje fundamentada en el proceso de modelación matemática y en el desarrollo de prácticas variacionales, permitiendo al estudiante llegar a comprender el concepto desde fenómenos cercanos a su realidad cotidiana. La propuesta se apoyó en la perspectiva socioepistemológica de la matemática educativa (TSME), la cual reconoce que el conocimiento matemático adquiere sentido cuando surge de la necesidad de interpretar, explicar y resolver situaciones presentes en los contextos sociales y culturales de los estudiantes (Caballero, 2018 como se citó en Cantoral, 2016). Desde esta mirada, el aprendizaje de la función lineal no se redujo

a la memorización de fórmulas o a la representación mecánica de rectas en el plano cartesiano, sino que se orientó hacia la comprensión de la variación y el cambio a partir de situaciones reales relacionadas con los servicios de transporte utilizados en el área metropolitana de Bucaramanga. Así, el estudiante tuvo la posibilidad de reconocer que las matemáticas no son un conocimiento aislado de la realidad, sino una herramienta útil para analizar fenómenos cotidianos, tomar decisiones y construir explicaciones sobre lo que ocurre en su entorno.

Uno de los aspectos centrales del diseño fue el trabajo con variables y magnitudes relacionadas con situaciones auténticas, tales como distancia recorrida, precio sugerido, tiempo y variaciones en las tarifas de transporte. El reconocimiento de estas variables permitió que los estudiantes identificaran relaciones de dependencia y comprendieran cómo el cambio de una magnitud influye sobre otra. Este aspecto resulta fundamental para el estudio de la variación, debido a que la comprensión de los fenómenos variables constituye el punto de partida para construir nociones asociadas a la función lineal. A través de las actividades propuestas, los estudiantes pudieron analizar qué cambia, respecto de qué cambia y cómo se comporta dicho cambio en diferentes situaciones. De esta manera, la función lineal comenzó a adquirir significado desde la observación y análisis de comportamientos reales y no únicamente desde la formalización algebraica. El trabajo con variables favoreció también la interpretación de razones de cambio y permitió comprender que existen comportamientos constantes que pueden representarse y modelarse matemáticamente.

El proceso de modelación matemática desempeñó un papel fundamental tanto en la construcción del diseño definitivo de aprendizaje como en la manera de abordar la enseñanza de la función lineal. La modelación permitió articular la matemática escolar con situaciones problemáticas cercanas a la experiencia de los estudiantes, favoreciendo procesos de interpretación, análisis, representación y validación. En lugar de presentar ejercicios descontextualizados, el diseño propuso actividades donde los estudiantes debían recolectar información real, construir tablas, elaborar gráficas, interpretar tendencias y formular expresiones algebraicas a partir de fenómenos observables. Esto permitió que el estudiante participara activamente en la construcción del conocimiento matemático y comprendiera que las expresiones algebraicas son herramientas que permiten representar situaciones reales y explicar comportamientos de variación. Además, el

proceso de modelación favoreció la argumentación y la toma de decisiones, ya que los estudiantes debían justificar procedimientos, analizar resultados y validar si los modelos construidos tenían sentido dentro del contexto trabajado. En este sentido, la modelación dejó de ser únicamente un procedimiento matemático para convertirse en un medio que permitió resignificar la función lineal desde situaciones auténticas y cercanas a la vida cotidiana.

Por otra parte, las prácticas variacionales constituyeron uno de los ejes más importantes dentro del diseño de aprendizaje, debido a que permitieron caracterizar la variación y el cambio desde diferentes formas de razonamiento matemático. La comparación favoreció el análisis de diferencias entre magnitudes y permitió identificar relaciones entre precios, distancias y tipos de servicio. La seriación contribuyó al reconocimiento de regularidades y patrones de crecimiento a través del análisis de tablas y gráficas, posibilitando que los estudiantes identificaran comportamientos estables en la variación. Asimismo, la predicción y la estimación permitieron anticipar valores futuros, interpretar tendencias y construir argumentos sobre el comportamiento de las variables. Estas prácticas no fueron trabajadas de manera aislada, sino integradas dentro de situaciones contextualizadas que llevaron al estudiante a pensar matemáticamente sobre el cambio. Gracias a ello, la función lineal pudo comprenderse desde la razón de cambio y desde la estabilidad de la variación, favoreciendo un aprendizaje más significativo y funcional. De igual manera, las prácticas variacionales permitieron que el estudiante trascendiera la simple ejecución de procedimientos algebraicos y desarrollara habilidades relacionadas con la interpretación, el análisis y la explicación de fenómenos variables.

Otro aspecto relevante del diseño definitivo fue su construcción progresiva a partir de un proceso constante de análisis, revisión y refinamiento entre el primer y segundo bosquejo de aprendizaje. Las observaciones realizadas por el docente director y los docentes evaluadores permitieron fortalecer la claridad de las instrucciones, mejorar la redacción de las preguntas, reorganizar actividades y corregir aspectos conceptuales y didácticos que inicialmente limitaban la intención formativa de la propuesta. Este proceso de revisión favoreció la construcción de actividades más coherentes con los objetivos de investigación y permitió generar preguntas orientadas no solo al cálculo, sino también a la interpretación, argumentación y reflexión matemática. Asimismo, el refinamiento del diseño permitió fortalecer la relación entre las etapas

factual, procedimental y simbólica, garantizando una construcción gradual del conocimiento matemático y una mayor articulación entre las actividades de modelación y las prácticas variacionales.

Entre los principales aportes del diseño de aprendizaje se destaca la posibilidad de ofrecer una propuesta innovadora para la enseñanza de la función lineal, alejándose de enfoques tradicionales centrados exclusivamente en procedimientos algebraicos o en la construcción de expresiones algebraicas a partir de la representación de rectas. En contraste, la propuesta desarrollada permite abordar la función lineal desde situaciones contextualizadas que involucran variación, cambio, análisis de datos y modelación matemática. Además, el diseño promueve una matemática más cercana a la realidad de los estudiantes, fortaleciendo competencias relacionadas con la interpretación de información, la argumentación, la toma de decisiones y la comprensión de fenómenos cotidianos. Otro aspecto positivo radica en que las actividades fueron organizadas de manera progresiva, permitiendo que el estudiante transitara desde experiencias concretas y cercanas hasta la construcción de representaciones algebraicas con significado contextualizado.

Finalmente, aunque el diseño de aprendizaje no pudo ser aplicado en un aula de clase debido a limitaciones de tiempo dentro del desarrollo de la investigación, el trabajo realizado deja como resultado una propuesta didáctica sólida, pertinente y contextualizada para la enseñanza de la función lineal. En este sentido, el diseño constituye un aporte valioso para la comunidad educativa matemática en Colombia, para la comunidad científica y para aquellos docentes e investigadores interesados en desarrollar alternativas de enseñanza innovadoras y diferentes a las metodologías tradicionales. La propuesta presentada demuestra que es posible enseñar la función lineal desde la comprensión de fenómenos de variación y cambio, utilizando contextos auténticos y procesos de modelación matemática que permitan resignificar el aprendizaje y acercar las matemáticas a las experiencias reales de los estudiantes.

5.4.3 Entrega del diseño de aprendizaje final

En este apartado se presenta el diseño definitivo de aprendizaje construido para la enseñanza de la función lineal en estudiantes de grado noveno. La consolidación de esta propuesta fue el resultado de un proceso continuo de revisión, análisis y ajuste, en el que se tuvieron en cuenta las observaciones realizadas por los docentes evaluadores y la directora de tesis, así como las

reflexiones surgidas durante el desarrollo de la investigación. Cada corrección y sugerencia permitió fortalecer la claridad de las actividades, mejorar la coherencia entre los objetivos propuestos y las tareas planteadas, y enriquecer la intencionalidad didáctica del diseño. De igual manera, se buscó construir un instrumento de aprendizaje que favoreciera la autonomía del estudiante, mediante instrucciones precisas, un lenguaje comprensible y situaciones cercanas a su contexto cotidiano.

En este proceso también se incorporaron ejemplos orientadores, tablas y gráficos que sirvieran como apoyo para el desarrollo de las actividades en Microsoft Excel, facilitando la interpretación de los datos y la construcción de representaciones matemáticas. Asimismo, se reformularon diversas preguntas con el propósito de promover procesos de argumentación, explicación y razonamiento matemático, priorizando interrogantes abiertas que permitieran al estudiante justificar sus ideas y construir significados alrededor de la variación y el cambio. Estas modificaciones contribuyeron a superar enfoques centrados únicamente en respuestas cerradas o en la aplicación mecánica de expresiones algebraicas.

El diseño definitivo se fundamenta, además, en los aportes teóricos y metodológicos encontrados en la revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal, particularmente en las perspectivas relacionadas con el pensamiento variacional, las prácticas variacionales y el proceso de modelación matemática. Del mismo modo, se retomó la propuesta de organización en cuatro momentos planteada por Arciniegas (2023), la cual permitió estructurar el aprendizaje de manera progresiva y significativa. Esta organización favorece que el estudiante transite desde la observación e interpretación de fenómenos cotidianos hasta la construcción de modelos algebraicos con sentido contextual, fortaleciendo no solo la comprensión de la función lineal, sino también la capacidad de analizar, comparar, predecir y argumentar frente a situaciones de cambio.

Los cuatro momentos planteados cumplen una función articulada dentro del diseño, ya que posibilitan avanzar desde el reconocimiento intuitivo de la variación constante hasta la confrontación entre comportamientos lineales y no lineales. De esta manera, el aprendizaje deja de centrarse exclusivamente en la memorización de fórmulas o procedimientos algebraicos y se orienta hacia la comprensión de fenómenos reales relacionados con la movilidad y el transporte en

la ciudad. Así, la función lineal adquiere significado para el estudiante al convertirse en una herramienta para interpretar, modelar y predecir situaciones presentes en su entorno cotidiano.

A continuación, se presenta el diseño definitivo de aprendizaje.

Diseño de aprendizaje para la enseñanza de la función lineal a través del proceso
de modelación y las practicas variacionales.

Universidad
Industrial de
Santander



Nombre:

Fecha:

CONTEXTUALIZACIÓN

En la ciudad de Bucaramanga, cada día transportarse se ha convertido en un verdadero reto debido a las deficiencias del transporte masivo metrolínea, el limitado servicio de bus que solo pasa por determinadas rutas y los altos costos del servicio de taxi de la ciudad. Las plataformas de transporte alternativo han revolucionado por completo la manera de movilizarnos y son una opción alternativa para subsanar estas dificultades. InDriver, en particular, se ha convertido en una herramienta indispensable, ya que permite negociar la tarifa del viaje, da a conocer información importante del conductor antes de iniciar el viaje, brinda mayor seguridad y confort y, sobre todo, permite decidir cuánto estamos dispuestos a pagar por una carrera.

Pero detrás de cada carrera hay preguntas que parecen sencillas, aunque en realidad exigen criterio, análisis y sentido de justicia: ¿cuánto debería costar mi viaje? ¿estoy ofreciendo un precio razonable?, ¿estoy pagando lo justo? En una plataforma donde usted decides el precio, necesitas aprender a valorar el servicio, a reconocer cuando una tarifa es adecuada y a negociar de manera consciente para tomar decisiones acertadas.

Este contexto no solo es cercano y familiar para los estudiantes, sino que hace parte de situaciones presentes en la vida cotidiana de muchas personas. Comprender cómo funciona la negociación de tarifas en InDriver permite desarrollar una mirada más crítica frente a las decisiones económicas

relacionadas con el transporte y reconocer el valor de aquello que se paga. A partir de esta situación surge el reto de aprender a estimar, argumentar y decidir de manera fundamentada cuál podría ser un precio justo para un servicio de transporte.

¡Descubramos cuánto vale realmente tu viaje!

PRIMER MOMENTO



Para comenzar, piensa en 10 lugares que normalmente visitas o en lugares emblemáticos de la ciudad o del área metropolitana de Bucaramanga.

A continuación, abre una ventana en Microsoft Excel, crea una tabla con tres columnas, en la primera indica el número (1-10), en la segunda coloca el lugar en donde inicias el viaje y en la tercera el lugar a donde te diriges o el destino final.

<i>No.</i>	<i>Inicio</i>	<i>Llegada</i>
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

A continuación, vuelve al documento Excel, añade una cuarta columna llamada “distancia” y con ayuda de Google Maps estima la distancia que hay en automóvil desde el lugar de inicio hasta el lugar de llegada final.

Tabla 15. Ejemplo momento I en el diseño definitivo de situación de aprendizaje

No. #	Lugar		Distancia Km
	Inicio	Llegada	
1	Centro comercial Megamall	Centro comercial Acrópolis	4.6
2	Clínica Comuneros	Hospital Internacional de Colombia	13.2
3	Parroquia Sagrada Familia	Aeropuerto de Palonegro	20.5
4	Acrópolis Centro Comercial	San Andresito la Isla	1.7

Nota: Elaboración propia

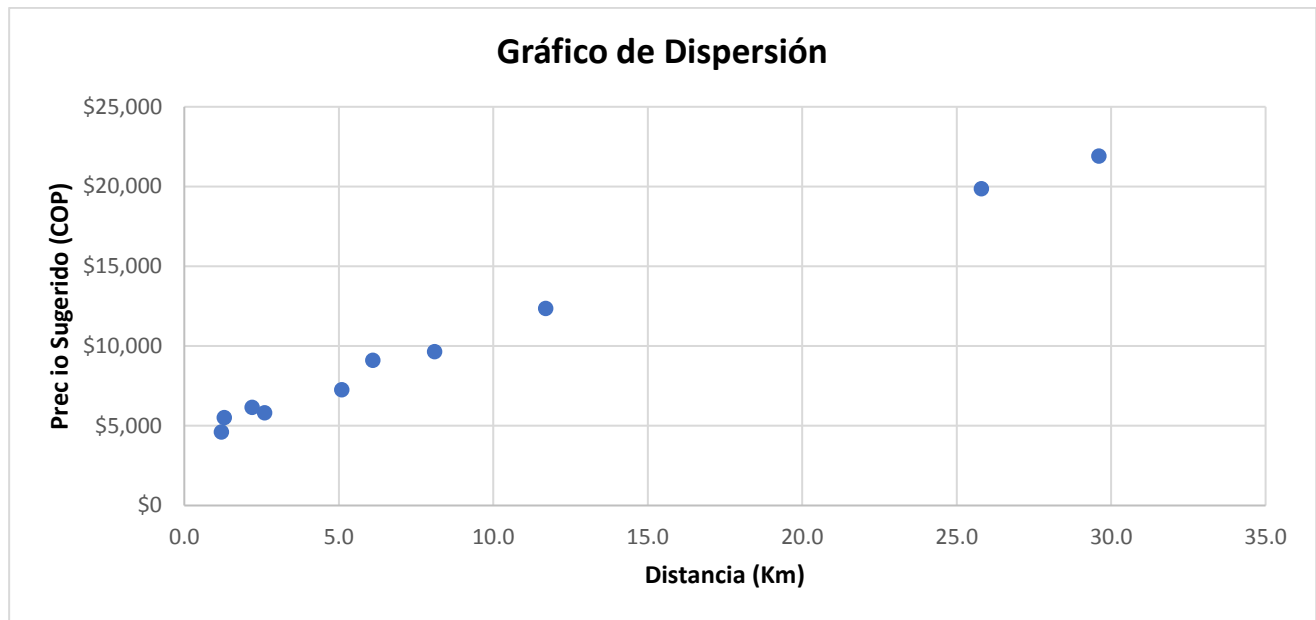
No. #	Lugar		Distancia Km
	Inicio	Llegada	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Una vez completada la tabla, utiliza tu celular para ingresar a la plataforma de transporte InDriver, en la modalidad de viaje en automóvil, y consulta el precio sugerido por la aplicación para cada uno de los 10 lugares que aparecen en la tabla.

Añade una quinta columna a tu tabla de Microsoft Excel, agrégale el nombre de precio sugerido y completa la tabla con los valores sugeridos arrojados para los 10 lugares. Toma el valor sugerido que da la plataforma.

No.	Lugar		Distancia	Precio sugerido
<i>#</i>	<i>Inicio</i>	<i>Llegada</i>	<i>Km</i>	<i>COP</i>
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Una vez completa la tabla, genera por medio de la aplicación Microsoft Excel un gráfico de dispersión teniendo en cuenta las variables cuantitativas de distancia (Km) y precio sugerido (COP) y observar cuidadosamente el comportamiento de los datos representados en la gráfica. Mira el ejemplo.



A continuación, responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta la información recolectada previamente en la tabla y en el gráfico de dispersión. Además, apoye sus respuestas en sus conocimientos sobre el uso de la plataforma InDriver y en los saberes previos relacionados con la función lineal.

1. ¿Has utilizado anteriormente la plataforma de InDriver? Describe brevemente tu experiencia.

2. ¿Explica con tus palabras cómo se solicita un servicio en InDriver?

3. ¿Por qué crees que es importante conocer el lugar de recogida y el destino final antes de solicitar un servicio por InDriver?

4. ¿Qué aspectos o magnitudes consideras que influyen en el valor de una carrera en InDriver? Explica tu respuesta.

5. Si se transportaran más de dos personas en un mismo viaje, ¿Consideras que cambiarían alguna de las magnitudes anteriores? Explica tu respuesta.

6. Al observar el gráfico de dispersión ¿qué comportamiento o tendencia identificas entre la distancia recorrida y el precio sugerido? Explica cómo llegaste a esa conclusión.

7. A partir de los datos obtenidos, ¿cómo cambia el precio del servicio cuando varía la distancia recorrida? Describe con tus palabras el comportamiento observado.

8. Si una persona necesita desplazarse desde el centro comercial Megamall hasta el centro comercial Acrópolis y decide hacerlo en carro, ¿qué distancia aproximada recorrería y cuál crees que sería el valor del servicio? Explica con tus palabras el procedimiento que utilizaste para realizar la estimación.

9. Supón que la aplicación de InDriver presenta una falla y no muestra el precio sugerido antes del viaje. ¿cómo podría una persona estimar el valor aproximado de la carrera utilizando únicamente la distancia recorrida? Justifica tu respuesta.

10. Si la carrera mínima en la plataforma de InDriver en carro es de \$5250. ¿Cómo puedo determinar la expresión algebraica que modela la razón de cambio del costo total del servicio por kilómetro? Justifica tu respuesta.
-
-
-

Indicación:

Observa nuevamente el gráfico de dispersión realizado en Microsoft Excel.

Selecciona uno de los puntos de la gráfica y haz clic derecho sobre él para acceder a la opción “Agregar línea de tendencia”. Explora las diferentes líneas de tendencia disponibles (lineal, exponencial, logarítmica y polinómica).

Activa las opciones de presentar ecuación en el gráfico y mostrar el valor de R^2

Analiza cuál de los modelos representa mejor el comportamiento de los datos obtenidos. Para esto tenga en cuenta la siguiente información:

- Presentar la ecuación de la gráfica permite identificar la relación matemática existente entre las variables estudiadas, en este caso, la distancia recorrida y el precio sugerido del servicio. A partir de esta expresión algebraica es posible estimar valores, realizar predicciones y comprender cómo cambia una variable respecto a la otra.
- El valor de R^2 permite saber qué tan bien la línea de tendencia representa los datos de la gráfica. Entre más cercano esté este valor a 1, significa que los datos siguen un comportamiento más parecido al modelo propuesto y que la ecuación encontrada puede utilizarse con mayor confianza para hacer estimaciones y predicciones.

11. ¿Cuál línea de tendencia se ajustó mejor a la situación modelada? Explica tu respuesta.
-
-
-

12. ¿Por qué consideras que el modelo exponencial no describe adecuadamente el comportamiento de los datos obtenidos?

13. ¿Qué información importante proporciona conocer el valor de R^2 del gráfico a la hora de analizar un modelo matemático? Justifica tu respuesta

14. ¿Cuál consideras que es el mejor modelo matemático más adecuado para representar la relación entre la distancia recorrida y el precio sugerido del servicio? Justifica tu respuesta

15. A partir del modelo obtenido, estima ¿Cuántos kilómetros aproximadamente recorrió una persona que pago cerca de \$12.000, \$25.000 y \$37.000?

Costo (COP)	Distancia (Km)
\$12000	
\$25000	
\$37000	

16. Utilizando el modelo encontrado, estima ¿Cuánto debería pagar una persona si recorre 810 metros y 5600 metros?

Sugerencia: Tenga en cuenta la conversión de unidades de metros a kilómetros.

Distancia (m)	Costo (COP)
810	
5600	

17. Explica con tus palabras cómo una persona podría estimar el valor de una carrera en InDriver conociendo únicamente la distancia del recorrido.

18. La mamá de Carlos dispone de \$80.000 COP para transportarse durante una semana y recorre aproximadamente 4 km diarios para ir a su trabajo. Según el modelo obtenido,

¿consideras que el dinero será suficiente para cubrir los gastos de transporte de la semana? (1 semana = 7 días). Justifica tu respuesta.

19. Si la razón de cambio en cuanto al precio sugerido por distancia aumenta a 1000 COP, ¿cuántos viajes podría hacer la mamá de Carlos? Justifica tu respuesta

20. Si aumenta el valor que se cobra por cada kilómetro recorrido, ¿cómo se vería afectado el comportamiento de la gráfica y de la expresión algebraica? Explica tu respuesta.

21. Si la razón de cambio de los servicios de InDriver en carro aumenta, ¿la situación dejaría de ser lineal? Justifica tu respuesta.

22. Si la razón de cambio de los servicios de InDriver en carro disminuye, ¿la situación seguiría siendo lineal? Explica por qué.

Figura 13. Relación entre razón de cambio y pendiente de la recta diseño definitivo

Razón de Cambio

Es la **RELACIÓN** de cambio entre una **variable** con respecto a **otra**.

Ejemplo:

Precio a pagar por
DISTANCIA RECORRIDA (km)

Razón de cambio = $\frac{\$200}{\text{Distancia} (\cdot 1\text{km})} + \frac{1 \text{ km}}{1\text{km}}$



Razón de cambio =



PREGUNTA:
De acuerdo con la información y la gráfica de la imagen, relaciona el concepto matemático de "Razón de cambio" con su descripción correspondiente en esta situación específica:

- A** A: Es la relación entre el precio a pagar y la distancia recorrida, que en este caso es constante e igual a \$200 por cada kilómetro.
- B** B: Representa la distancia total que el automóvil puede avanzar de forma horizontal en el plano.
- C** C: Es el punto exacto donde el automóvil inicia su recorrido en el plano cartesiano.
- D** D: Representa el total del dinero en billetes y monedas acumulado al final de todo el viaje que es de \$200.

Enviar

Nota: Elaboración propia.



SEGUNDO MOMENTO

Un joven trabajador no cuenta con vehículo propio para transportarse, por lo que diariamente utiliza la plataforma InDriver para movilizarse en automóvil. Al comenzar el mes, necesita organizar sus gastos y calcular cuánto dinero debe destinar para sus recorridos diarios.

El joven registró algunas de las distancias que normalmente recorre durante la semana y algunos de los precios sugeridos por la plataforma tanto en horario ordinario como en horario pico.

Observa cuidadosamente la siguiente tabla y responde las preguntas propuestas.

Tabla 16. Representación gráfica momento II en el diseño definitivo

No. #	Lugar		Distancia Km	Precio Sugerido	
	Inicio	Llegada		Hora Ordinaria	Hora Pico
1	Casa	Trabajo	9.5	\$10200	\$13075
2	Casa	Casa novia	1.7	\$5520	\$6445
3	Casa	Centro Comercial	4.3		
4	Trabajo	Casa novia	3.4		
5	Trabajo	Centro comercial		\$6000	
6	Centro comercial	Casa Novia			\$10270

Nota: Elaboración propia

Conteste las siguientes preguntas tomando como referencia la información anterior.

1. Complete los valores faltantes de la tabla teniendo en cuenta el comportamiento de los precios en horario ordinario y horario pico.
2. ¿Qué magnitudes o variables intervienen en esta situación? Explica tu respuesta.

3. ¿Cuáles son las razones de cambio de los precios correspondientes a hora ordinaria y hora pico?

4. ¿Qué diferencias observas entre los precios sugeridos en horario ordinario y en horario pico?

5. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora ordinaria? Suponga que la carrera mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.

6. ¿Cuánto es el precio de una carrera mínima en hora pico? Suponga que la mínima es como máximo 1 kilómetro de distancia.

7. ¿Qué puedes concluir sobre el comportamiento de los precios en ambos horarios a medida que aumenta la distancia recorrida? Apoyase de la tabla para justificar tus respuestas.

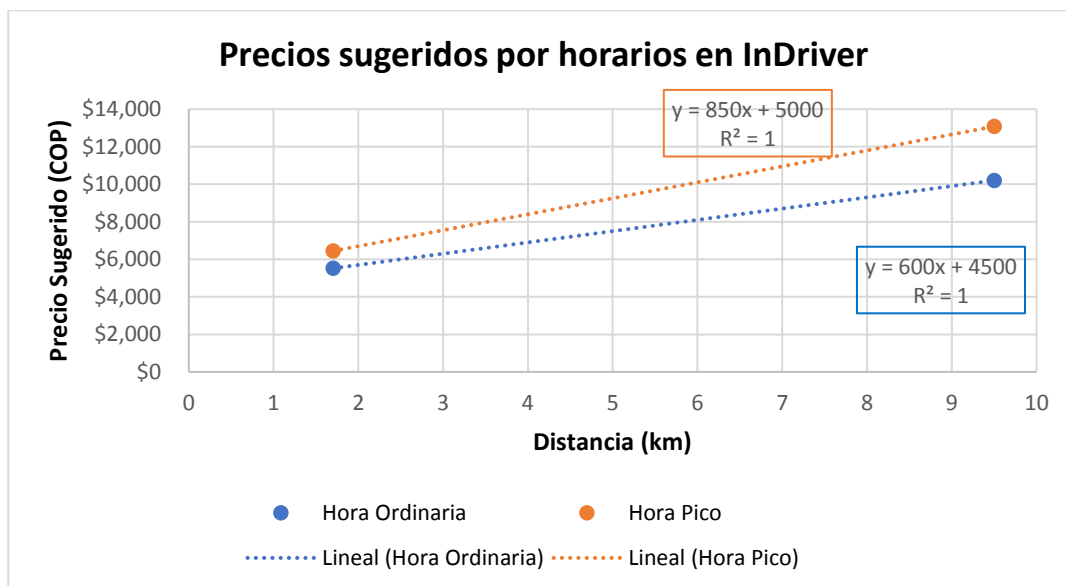
Indicación:

Utiliza Microsoft Excel para construir un gráfico de dispersión donde se visualice un gráfico correspondiente a horario ordinario y otro correspondiente a horario pico.

Para elaborar el grafico, dirígete a la pestaña **Insertar** y selecciona la opción “**Insertar gráfico de líneas o áreas**”. Posteriormente, en cada caso, relaciona la variable distancia recorrida con el precio sugerido según el horario correspondiente (ordinario o pico) y selecciona el gráfico de líneas 2D de tu preferencia.

Finalmente, observa y analiza el comportamiento de los datos representados en cada gráfica. Mira el ejemplo.

Figura 14. Ilustración gráfica precios sugeridos por horarios diseño definitivo



Nota: Elaboración Propia

8. Al comparar ambas gráficas, ¿qué diferencias observas en el crecimiento de los precios? Explica tu respuesta.

9. Construya una nueva columna que precise la diferencia del precio sugerido para los recorridos que visita en la semana el joven en los horarios ordinario y pico.
10. Con ayuda de Excel, elabora un gráfico de dispersión que relacione la distancia recorrida con la diferencia de precios entre ambos horarios.
11. ¿Qué diferencia hay entre el precio sugerido en hora ordinaria y el precio sugerido en hora pico por kilómetro recorrido?

12. ¿Es lineal el comportamiento entre la diferencia del precio a pagar por un servicio de InDriver por distancia recorrida? sí, no y por qué. Justifica tu respuesta.

13. ¿Qué significado tiene la pendiente en cada uno de los horarios analizados? Explica tu respuesta.

14. Proporcione las expresiones algebraicas de los precios sugeridos a pagar por un servicio de InDriver en horas ordinaria y pico por unidad de distancia.

Hora ordinaria: $F(x) = \underline{\hspace{2cm}} * x + \underline{\hspace{2cm}}$

Hora pico: $P(x) = \underline{\hspace{2cm}} * x + \underline{\hspace{2cm}}$

15. Explica con tus palabras que representa la variable “x”, la pendiente “m” y el intercepto “b” en las funciones F y P .

-
-
-
16. Sí el joven debe hacer el siguiente recorrido: Primero, ira de su casa al trabajo, posteriormente ira del trabajo al centro comercial, luego ira del centro comercial a la casa de su novia y finalmente irá de la casa de la novia a su casa. ¿Cuánto dinero deberá disponer para los transportes de ese día si solo utiliza InDriver?

Sugerencia: Utiliza las expresiones algebraicas construidas anteriormente para estimar cuánto dinero necesitaría para cubrir los transportes de ese día.

17. Si el joven trabaja de lunes a sábado y sabe que tiene que tomar 2 transportes diarios para ir a su trabajo, ¿Cuánto dinero deberá apartar para una semana? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al finalizar la semana? Explica tus respuestas.

Sugerencia: Utiliza las expresiones algebraicas construidas anteriormente para estimar cuánto dinero necesitaría para cubrir los transportes de ese día.

18. Si el joven visita a su novia 3 veces a la semana, ¿En cuál horario (ordinario/pico) gastaría más dinero? Justifica tu respuesta apoyándote de las expresiones algebraicas anteriores.
-
-
-

19. Si el joven ha decidido separar \$530.000 para visitar a su novia e ir al centro comercial, ¿Para cuantos viajes le alcanzaría si lo hace en ambos horarios (ordinario/pico)?

20. Si una persona realiza un recorrido de 5.7 km, ¿en cuál horario pagaría más por el servicio? Argumenta tu respuesta utilizando la información de las funciones obtenidas.

TERCER MOMENTO



El día domingo, Camila está leyendo el periódico “EL INFORMANTE”, en el encuentra el siguiente gráfico donde se muestran los precios sugeridos entre la plataforma de InDriver y el servicio de taxi para los días domingos y festivos.

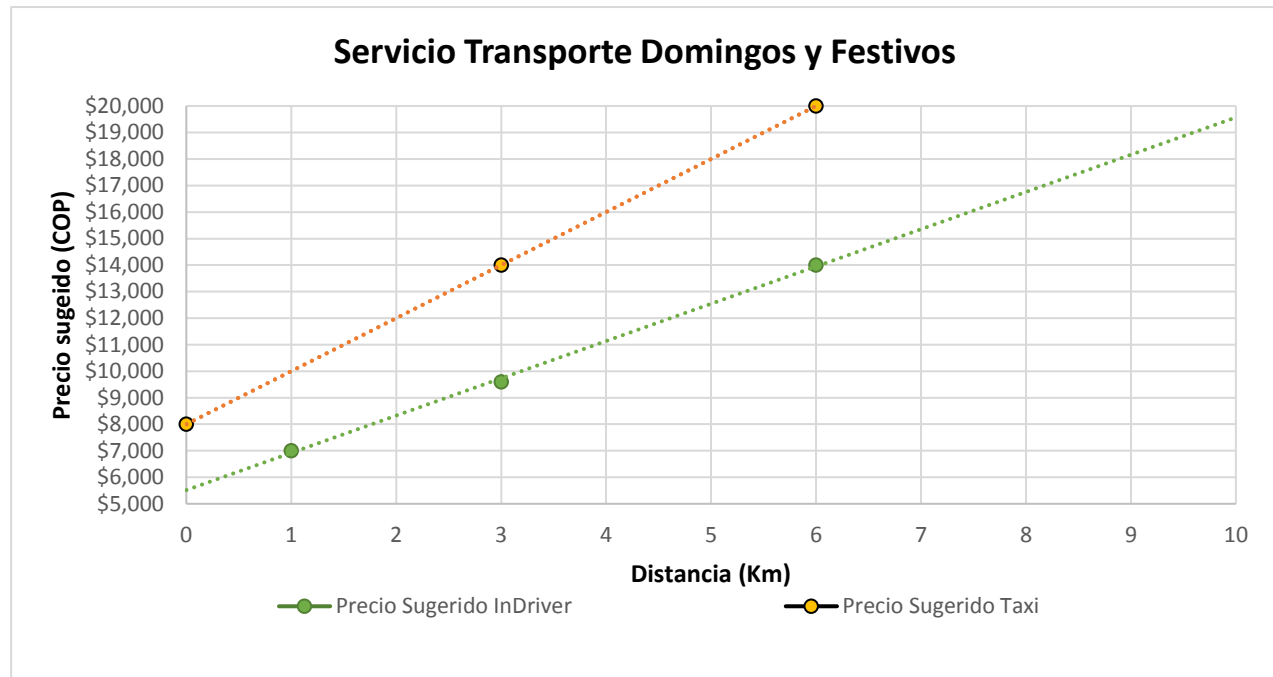
Al ver la información, recuerda a dos compañeros de trabajo: Daniel y Laura, quienes viven juntos, pero utilizan diferentes servicios de transporte para llegar a la empresa, ya que tienen horarios de entrada y salida distintos. Daniel siempre utiliza InDriver, mientras que Laura utiliza el servicio de Taxi.

Se sabe que, durante el año, ambos deberán asistir a su trabajo en aproximadamente 18 días festivos, y que la distancia desde su casa hasta la empresa es de 3 km.



Observe cuidadosamente el gráfico del periódico y responde las siguientes preguntas.

Figura 15. Ilustración gráfica servicio transporte domingos y festivos diseño definitivo



Nota: Elaboración Propia

1. A partir de la información presentada en el gráfico, completa la siguiente tabla, para ello cree un documento en Microsoft Excel, realice la tabla y estime los valores del precio sugerido para InDriver y Taxi según las distancias dadas.

	Indriver	Taxi
Distancia	Precio Sugerido	Precio Sugerido
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2. ¿Qué relación observa entre la distancia recorrida y el precio sugerido en cada uno de los servicios de transporte?

3. ¿Qué diferencias encuentra entre el comportamiento de los precios del servicio de taxi y los precios sugeridos de InDriver?

4. ¿Cuál de los dos servicios presenta un mayor aumento en el precio por cada kilómetro recorrido? Justifique su respuesta utilizando la información del gráfico.

5. ¿Cuánto dinero gastará Daniel en transportes los 18 días festivos para ir al trabajo? Escribe sus cálculos y explica tu respuesta.

6. ¿Cuánto dinero gastará Laura en transportes los 18 días festivos para ir al trabajo? Escribe sus cálculos y explica tu respuesta.

7. Construya una tabla en Excel donde se represente el gasto acumulado de Daniel y Laura durante los primeros 10 días festivos de trabajo.

Tabla 17. *Tabla de gastos para Daniel y Laura*

Día Festivo	Gasto Daniel	Gasto Laura
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Nota: Elaboración propia

8. Si ambos jóvenes tienen \$350.000 destinados para el pago de los transportes en esos días festivos, **¿le alcanzará ese presupuesto a cada uno? ¿Exactamente para cuantos días les alcanza a cada uno?** Escriba tus cálculos y explica tu respuesta.

9. Camila desea calcular el valor de un recorrido en taxi para una distancia de 4.5 km, pero no sabe cómo hacerlo. ¿cómo le explicarías el procedimiento para estimar el precio sugerido del servicio? ¿cuánto debería pagar si fuera para los 18 días festivos? Justifica tus respuestas.

- 10.** Ahora imagina que se recorrerá una distancia cualquiera denotada por la variable p km, donde p es un número entero positivo arbitrario, **¿cómo calcular el precio sugerido a pagar para esa distancia P si se toma el servicio de taxi e InDriver?**

Proporcione las expresiones algebraicas que permitan calcular el precio sugerido para el servicio de InDriver y Taxi para los días domingos y festivos.

Servicio Domingos y festivos $I(p) = \underline{\hspace{2cm}} * P + \underline{\hspace{2cm}}$

Servicio Domingos y festivos $T(p) = \underline{\hspace{2cm}} * P + \underline{\hspace{2cm}}$

- 11.** Si la tarifa de taxi es subsidiada en un tercio por kilómetro recorrido, ¿Cómo calcular el precio sugerido a pagar con este subsidio? Escriba sus cálculos y la respectiva justificación.

- 12.** Con el subsidio para taxis, ¿Cuánto deberá pagar Laura para los mismos 18 días festivos? Justifica tu respuesta.

- 13.** Con el subsidio para taxis, ¿Cuánto deberá pagar Daniel para los mismos 18 días festivo? Justifica tu respuesta.

14. Teniendo en cuenta el subsidio aplicado al servicio de taxi, ¿considera que a Daniel le conviene continuar utilizando InDriver o cambiarse al servicio de taxi? Justifique su respuesta.

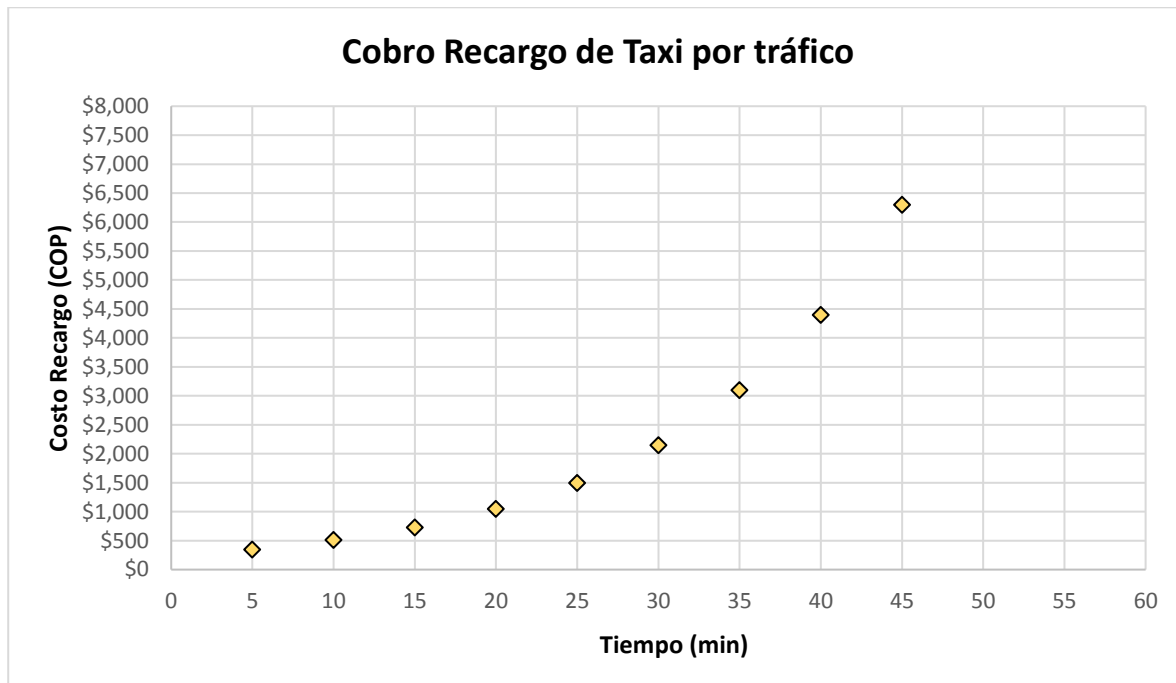
CUARTO MOMENTO



El Área metropolitana, a través de la empresa de monitoreo de transporte “*Metertaxi*”, está realizando un estudio sobre el cobro de recargos por unidad de tiempo en los servicios de taxi. Este recargo aparece únicamente cuando, durante una carrera, se presentan situaciones de alta densidad de tráfico o trancones, y su función es compensar el tiempo perdido del conductor. Dichos recargos quedan registrados automáticamente en los taxímetros.

Con el fin de analizar el comportamiento de estas tarifas, Metertaxi publicó un gráfico que resume los valores de recargo registrados por más de 300 conductores de taxi en la ciudad, mostrando la variación de cobros según diferentes condiciones de movilidad.

A partir de este análisis, surge la pregunta de cómo estos recargos pueden afectar el costo total de un viaje en situaciones reales. Para estudiar este caso, se plantean las siguientes preguntas:

Figura 16. Ilustración gráfica cobro recargo de taxi por tráfico diseño definitivo

Nota: Elaboración propia

1. Describe con tus palabras ¿cómo funciona el cobro del recargo por unidad de tiempo en el servicio de taxi?

2. ¿Qué sucede con el valor del recargo a medida que transcurre el tiempo? Explique su respuesta.

3. ¿Cómo ubicaría el costo del recargo de taxi a los 50 min? Ubíquelo en la gráfica presentada anteriormente con un punto de color rojo.

4. ¿Cómo es el comportamiento del recargo por unidad de tiempo?

5. ¿El cobro de un servicio de InDriver analizado en el primer momento comparado con el cobro del recargo de taxi presentado en el cuarto momento son iguales? Justifique detalladamente su respuesta.

6. En la siguiente tabla, se muestran los valores del costo del recargo por unidad de tiempo para el servicio de taxi. Halle las diferencias consecutivas de los valores del costo del recargo.

Tabla 18. Representación gráfica situación momento IV diseño definitivo

Tiempo (min)	Cobro Recargo (Cop)	Diferencia
5	\$350	
10	\$512	
15	\$732	
20	\$1.050	
25	\$1.500	
30	\$2.150	
35	\$3.100	
40	\$4.400	
45	\$6.300	

Nota: Elaboración propia

7. ¿Qué puede observar respecto a los valores de la columna diferencia de la pregunta anterior, la cual relaciona la variación del cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo?

8. En el momento dos, se hizo una columna sobre la diferencia de costo del servicio de InDriver en horas ordinaria y pico por distancia, ¿en qué se diferencia el comportamiento de los datos de esa columna con el comportamiento de los datos de la columna diferencia del cuarto momento (pregunta 6)? la cual relaciona el cobro del recargo de taxi por unidad de tiempo.

Proporcione los respectivos gráficos de dispersión de las diferencias mencionadas y analice la pregunta.

9. A partir de los análisis realizados, explique por qué el comportamiento del recargo de taxi no puede modelarse mediante una función lineal.

10. Explique con sus palabras cuál es la principal diferencia entre una situación de variación lineal y una situación de variación no lineal.

Síntesis del procedo metodológico

La implementación de la Estrategia Investigativa de Diseño propuesta por Camargo (2021) permitió desarrollar un proceso sistemático de construcción, análisis y refinamiento del diseño de aprendizaje, en el que cada una de las fases desempeñó un papel específico y complementario para alcanzar el objetivo de la investigación. Lejos de constituir etapas aisladas, las fases se articularon de manera progresiva, posibilitando que las decisiones didácticas adoptadas durante el proceso estuvieran sustentadas tanto en referentes teóricos como en procesos permanentes de valoración y mejora.

En la *primera fase*, correspondiente a la revisión bibliográfica, se consolidó el fundamento conceptual que orientó toda la investigación. El estudio de la función lineal desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las situaciones de variación y cambio, las prácticas variacionales y el proceso de modelación matemática permitió establecer los criterios teóricos que posteriormente guiaron la construcción del diseño de aprendizaje. Asimismo, la revisión de las diferentes tipologías de tareas de modelación facilitó la selección de aquellas que resultaban pertinentes para los propósitos de la investigación y para las características de los estudiantes de noveno grado.

A partir de estos fundamentos, la *segunda fase* se centró en el diseño inicial de la situación de aprendizaje. En esta etapa se definió el contexto auténtico que daría sentido al estudio de la función lineal, se estructuraron los momentos y las etapas factual, procedimental y simbólica, y se diseñaron las actividades que conformaron el primer bosquejo del diseño. De esta manera, los referentes teóricos dejaron de constituir únicamente un marco conceptual para convertirse en criterios concretos de diseño, permitiendo traducir los principios de la TSME, la modelación matemática y las prácticas variacionales en experiencias de aprendizaje contextualizadas y coherentes con el objetivo de la investigación.

Posteriormente, la *tercera fase* permitió someter el diseño elaborado a un proceso de valoración por parte de docentes expertos. Las observaciones realizadas durante la evaluación hicieron posible identificar fortalezas y aspectos susceptibles de mejora relacionados con la

organización de las actividades, la secuencia didáctica, la precisión matemática, la coherencia entre los momentos de aprendizaje y la articulación entre los referentes teóricos. El análisis de estas apreciaciones favoreció un proceso de reflexión permanente que condujo al refinamiento del diseño inicial, fortaleciendo su consistencia teórica y metodológica.

Finalmente, la *cuarta fase* correspondió a la consolidación del diseño definitivo y a la elaboración del informe de investigación. Esta etapa integró los ajustes derivados del proceso de evaluación, permitiendo presentar una propuesta didáctica fortalecida tanto desde el punto de vista conceptual como pedagógico. En consecuencia, el diseño definitivo representa el resultado de un proceso iterativo de construcción y validación, en el que cada decisión fue sustentada en los referentes teóricos asumidos y en los aportes obtenidos durante la valoración por expertos.

En conjunto, las cuatro fases evidencian que la Estrategia Investigativa de Diseño trasciende la elaboración de una propuesta didáctica para constituirse en un proceso de investigación orientado por la reflexión, la fundamentación teórica y la mejora continua. En este sentido, la metodología desarrollada permitió responder al objetivo de la investigación al plantear y valorar un diseño de aprendizaje que apoya la enseñanza de la función lineal mediante el proceso de modelación y las prácticas variacionales con estudiantes de noveno grado. Asimismo, la articulación entre la revisión conceptual, el diseño, la evaluación y el refinamiento favoreció la construcción de una propuesta coherente con los principios de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en la que el estudio de la variación y el cambio, el uso de contextos auténticos y la modelación matemática convergen para promover aprendizajes matemáticos con significado y funcionalidad.

6. Conclusiones

En este apartado se presentan las principales conclusiones derivadas del proceso investigativo, relacionadas con la enseñanza de la función lineal, el pensamiento variacional, la modelación matemática, las prácticas variacionales, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y los aportes del diseño de aprendizaje y metodológico construido para estudiantes de grado noveno.

La presente investigación permitió concluir que es posible plantear un diseño de aprendizaje para la enseñanza de la función lineal mediante la articulación del proceso de modelación matemática y las prácticas variacionales en contextos cercanos a la realidad de los estudiantes. El diseño de aprendizaje elaborado propone abordar la función lineal no únicamente como una expresión algebraica abstracta, sino como una herramienta para interpretar, describir y predecir situaciones relacionadas con el cambio y la variación a partir del contexto de las plataformas alternativas de transporte en Bucaramanga. En este sentido, el conjunto de tareas fue estructurado para propiciar la articulación entre las representaciones verbal, tabular, gráfica y algebraica de una misma situación contextualizada, favoreciendo la construcción de significado matemático desde situaciones auténticas y cercanas al contexto estudiantil.

En relación con el pensamiento variacional, se concluye que el diseño de aprendizaje favorece el reconocimiento, análisis e interpretación de la variación constante mediante situaciones contextualizadas que permiten al estudiante identificar qué cambia, respecto de qué cambia, cómo cambia y cuánto cambia una determinada magnitud. La organización progresiva de las actividades por momentos promovió la comprensión de la variación desde acciones concretas de observación, comparación y análisis de regularidades, fortaleciendo así la construcción del pensamiento variacional más allá de la simple manipulación algebraica. De esta manera, el estudio de la función lineal dejó de centrarse exclusivamente en procedimientos operativos para orientarse hacia la comprensión del comportamiento de las variables y la interpretación de situaciones contextualizadas asociadas al cambio y la variación.

Asimismo, el estudio permitió reconocer, desde la revisión teórica realizada, que el proceso de modelación matemática constituye una estrategia pedagógica con amplio potencial para favorecer el interés y la motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas. Diversas investigaciones, como las de Villa-Ochoa et al. (2022) y Olarte (2019), destacan que trabajar con situaciones cercanas al entorno de los estudiantes favorece una mayor disposición frente a las actividades propuestas y fortalece la relación entre la matemática escolar y la realidad. En coherencia con estos planteamientos, el diseño elaborado incorpora tareas contextualizadas que buscan promover la interpretación de situaciones reales, la toma de decisiones y la resolución de problemas, así como generar espacios para la reflexión, la argumentación y la validación de resultados.

Por otra parte, las prácticas variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación, reportadas por Cantoral et al. (2015, citado por Caballero, 2018), constituyeron un referente fundamental para la estructuración del diseño de aprendizaje. Estas prácticas orientaron la organización progresiva de las tareas y el estudio del cambio desde diferentes niveles de complejidad. En este sentido, la comparación y la seriación fueron consideradas como prácticas que favorecen el reconocimiento de regularidades y comportamientos entre las variables, mientras que la predicción y la estimación orientan la anticipación de comportamientos y la construcción de modelos matemáticos con fines explicativos y predictivos. De esta manera, las prácticas variacionales aportan una base teórica sólida para comprender la función lineal como un modelo de variación constante.

En cuanto a las etapas factual, procedimental y simbólica, reportadas en Arciniegas (2023, como se citó en Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019a), se concluye que su articulación permitió estructurar de manera progresiva el diseño de aprendizaje. La etapa factual se orientó a favorecer la familiarización con la situación contextualizada y el reconocimiento de las magnitudes involucradas; la etapa procedimental fue concebida para promover la construcción de estrategias, representaciones y argumentos que permitieran analizar el comportamiento de los datos; y la etapa simbólica buscó conducir a la formalización de relaciones matemáticas mediante expresiones algebraicas con sentido contextual. Esta organización dota al diseño de una secuencia coherente para el estudio de la función lineal y del pensamiento variacional.

De igual forma, el diseño de aprendizaje construido presenta diversos aspectos relevantes desde el punto de vista didáctico y pedagógico. Entre ellos se destacan el uso de situaciones auténticas y cercanas a la experiencia de los estudiantes, la integración de herramientas tecnológicas como Microsoft Excel y Google Maps, la construcción progresiva de representaciones matemáticas y la formulación de preguntas abiertas orientadas al análisis y la argumentación. Estos elementos configuran una propuesta que busca superar enfoques tradicionales centrados exclusivamente en la memorización de procedimientos algebraicos y ofrecer una alternativa para promover una comprensión más reflexiva, comprensiva y funcional de la función lineal.

Asimismo, se concluye que el diseño de aprendizaje fue construido para responder a los propósitos establecidos desde el inicio de la investigación, integrando actividades orientadas al reconocimiento de modelos lineales en situaciones contextualizadas y al abordaje de conceptos fundamentales asociados al estudio de la función lineal, entre ellos la razón de cambio, la pendiente, el intercepto, la conversión de unidades y la identificación de modelos no lineales. En consecuencia, la propuesta constituye una alternativa didáctica que busca promover la comprensión de las relaciones matemáticas presentes en situaciones contextualizadas de la vida cotidiana y favorecer el desarrollo de capacidades para analizar, interpretar y modelar situaciones contextualizadas.

Desde la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la investigación reafirma la importancia de comprender el aprendizaje matemático como una construcción social vinculada a prácticas culturales y contextos de significación. En coherencia con estos planteamientos, el diseño de aprendizaje fue concebido para situar el conocimiento matemático en escenarios cercanos a la realidad del estudiante, promoviendo actividades orientadas al uso funcional de las matemáticas para interpretar situaciones contextualizadas de la vida cotidiana. De esta manera, la propuesta se alinea con los principios socioepistemológicos que priorizan la resignificación del conocimiento matemático a partir de su uso y de las prácticas sociales.

También se concluye que el manejo de un lenguaje claro, preciso y cercano al estudiante constituye un aspecto fundamental en el diseño de situaciones de aprendizaje auténticas. Por esta razón, las instrucciones y preguntas formuladas dentro de la propuesta fueron diseñadas para

favorecer la autonomía del estudiante durante el desarrollo de las actividades. Aunque el acompañamiento del docente continúa siendo indispensable como mediador del proceso, el diseño busca generar condiciones para que el estudiante explore, interprete, cuestione resultados, formule explicaciones y construya estrategias propias en la resolución de las situaciones planteadas.

En relación con la caracterización del cambio y la variación constante, se concluye que la metodología propuesta por Caballero (2018), complementada con los aportes de Arciniegas (2023), proporcionó un referente sólido para estructurar un diseño de aprendizaje orientado al estudio de la función lineal desde el pensamiento variacional. La organización por momentos y etapas permitió construir una secuencia didáctica coherente que parte de la observación y el análisis de situaciones contextualizadas en las que se manifiestan procesos de cambio y variación y conduce progresivamente hacia la construcción de modelos matemáticos para describir y predecir comportamientos, resaltando el análisis de las relaciones entre variables y la interpretación de la pendiente como razón de variación constante.

Finalmente, se concluye que la metodología de diseño basada en las fases propuestas por Camargo (2011) resultó pertinente para la construcción de un diseño de aprendizaje sólido y fundamentado. El desarrollo progresivo de las etapas de revisión bibliográfica, diseño inicial, refinamiento y elaboración del diseño definitivo permitió fortalecer la coherencia teórica y didáctica de la propuesta. Asimismo, el proceso de revisión y ajuste continuo, apoyado en las observaciones realizadas por docentes expertos, contribuyó al mejoramiento de las actividades, las preguntas y la estructura general del diseño. Aunque la propuesta no fue implementada en un contexto escolar debido a las limitaciones de tiempo propias de la investigación, queda a disposición de la comunidad educativa, investigadores y docentes de matemáticas como un referente didáctico que podrá ser implementado, validado y enriquecido en futuras investigaciones orientadas a la enseñanza de la función lineal desde perspectivas contextualizadas, variacionales y de modelación matemática.

7. Recomendaciones

A continuación, se presentan algunas recomendaciones, reflexiones y problemáticas identificadas durante el desarrollo de la investigación, las cuales pueden servir como punto de partida para futuras investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares.

- Se recomienda continuar promoviendo investigaciones que aborden la enseñanza de las matemáticas desde perspectivas diferentes a la clase magistral tradicional, privilegiando propuestas centradas en la participación activa del estudiante, la problematización de situaciones reales y la construcción social del conocimiento matemático. En este sentido, enfoques como la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y el proceso de modelación matemática ofrecen herramientas valiosas para resignificar el aprendizaje de conceptos matemáticos desde contextos auténticos, favoreciendo procesos de análisis, argumentación, interpretación y toma de decisiones más cercanos a la realidad de los estudiantes.
- Se sugiere que futuras investigaciones amplíen el diseño metodológico desarrollado en este trabajo incorporando una fase adicional de aplicación piloto antes de la construcción definitiva del diseño de aprendizaje. Esta fase permitiría poner en práctica el segundo borrador de la situación de aprendizaje en un grupo de estudiantes de grado noveno, con el propósito de identificar dificultades, validar instrucciones, analizar tiempos de desarrollo y reconocer posibles ajustes didácticos y metodológicos antes de consolidar la versión final del diseño.
- Se recomienda que futuras investigaciones realicen la implementación del diseño de aprendizaje en contextos escolares reales, particularmente con estudiantes de grado noveno, con el fin de analizar el impacto de la propuesta en el desarrollo del pensamiento variacional, la comprensión de la función lineal y los procesos de argumentación matemática. La aplicación práctica permitiría obtener evidencias sobre los alcances,

fortalezas y limitaciones del diseño, así como realizar nuevas mejoras a partir de la experiencia en el aula.

- Se considera pertinente desarrollar nuevas investigaciones que amplíen el uso de las prácticas variacionales hacia otros objetos matemáticos diferentes a la función lineal, tales como funciones cuadráticas, exponenciales, estadísticas o fenómenos relacionados con el cálculo. Esto permitiría seguir fortaleciendo el estudio del cambio y la variación como eje transversal del aprendizaje matemático y contribuiría a la construcción de propuestas didácticas más articuladas con situaciones de la vida cotidiana.
- Finalmente, se recomienda continuar diseñando situaciones de aprendizaje contextualizadas que incorporen herramientas tecnológicas como hojas de cálculo, aplicaciones móviles, sistemas de geolocalización y recursos digitales interactivos. Estas herramientas no solo favorecen la representación y análisis de datos, sino que también incrementan la motivación, la autonomía y la participación de los estudiantes en la construcción de conocimientos matemáticos significativos.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, M y Joya, A (2013) Ingeniería Didáctica para la Enseñanza de la Función Lineal: análisis preliminar. *Revista El Astrolabio*, 115-127.
- Algar, (2020). Método constructivista para aprender a leer y escribir. ¿Qué es? Sitio web: <https://docentes.algareditorial.com/blog/22/constructivista-aprender-a-leer#:~:text=La%20ense%C3%B1anza%20constructivista%20concibe%20el,de%20compa%C3%B1eros%20como%20de%20profesores.>
- Alpízar, M, Fernández, H, Morales, J y Quesada, S (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa*, 9(1), pp. 6-19
- Antolín, S. (2024). Aprendiendo matemáticas: beneficios, estrategias y juegos divertidos para todas las edades. Bel Community. Sitio web: <https://www.bel.community/blog/aprender-matematicas>.
- Aravena, D. M. D., Díaz, L. D., Rodríguez, A. F. y Cárcamo, M. N. (2022). Estudio de caso y modelado matemático en la formación de ingenieros. Caracterización de habilidades STEM. *Ingeniare. Revista Chilena de ingeniería*, 30(1), 37-56. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-33052022000100037>.
- Arciniegas, R. H. L. (2023). Aula Inclusiva de Matemáticas. Un Estudio de situaciones de Variación y Cambio. (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander.
- Barbosa, J. C. (2001). Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema, Rio Claro*, 14(15), 5-23.
- Bassanezi, R. (2002). Ensino!aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M.& Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (002), 105-125.
- Benelli, S. (2012). La literatura y el cine en la clase de matemáticas: una nueva metodología de educación matemática. [Tesis de Máster]. Universidad de Cantabria, España. <http://hdl.handle.net/10902/1650>

- Caballero, E. E., Villarreal, V. R., y Caballero, R. E. (2021). Estrategia TIC para enseñar la función lineal en estudiantes universitarios. Universidad del Zulia. Venezuela. Dialnet. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8114575>
- Caballero, M. (2018). Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN]. Archivo digital. <https://www.researchgate.net/publication/331563013>.
- Caballero, P. M. A., Soto, C., & Pérez, L. R. (2012) Una Propuesta Para Resignificar Lo Lineal En Una Situación De Modelación De Movimiento. ResearchGate. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa V. 25, 897-904. México. <https://www.researchgate.net/publication/271966671>
- Cabanes, L., Colunga S., & García, J. (2017). La Matemática en el desarrollo cognitivo y metacognitivo del escolar primario. EduSol, Vol 17(60), 45-59.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y análisis*. Editorial Universidad de Antioquia y Universidad Pedagógica Nacional.
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3), 91-116.
- Casas, R. (2024). Colombia se vuelve a rajarse en nuevo ranking de las pruebas pisa que elabora la Oede. Revista la república. Sitio web: <https://www.larepublica.co/economia/colombia-con-el-peor-desempeno-en-pensamiento-creativo-entre-miembros-de-ocde-3882719>
- Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.
- Crouch, R. and Haines, C. (2004). Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology , 35 Issue 2, 197!206.
- de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

- Defaz, G., Triana, M., Sanchez, M. & Jadán, P. (2016). El problema como base de aprendizaje significativo y desarrollo del pensamiento crítico. *Didáctica y Educación* ISSN 2224-2643, 7(6), 277-284.
- Delgado, F. J. R. & Cují, C. D. E. (2023). Impacto del aula invertida como estrategia de aprendizaje de la función lineal, en estudiantes de bachillerato. *Prometeo Conocimiento Científico*, 3(2), e78. **DOI:** <https://doi.org/10.55204/pcc.v3i2.e78>
- DGómez Moreno, F. (2019). El desarrollo de competencias matemáticas en la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía de Guacarí, Colombia. *Universidad y Sociedad*, 10(6), 162-171. Recuperado de <http://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus>
- Díaz, B. A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. UNAM, México.
- Díaz-Pinzón, J. E. (2021). Análisis de los resultados de la prueba Pisa 2018 en matemáticas para América. *Revista De Investigaciones Universidad Del Quindío*, 33(1), 104–114. <https://doi.org/10.33975/riuq.vol33n1.463>
- Fowler, A. C. (1998). *Mathematical models in the applied sciences*. Cambridge University Press.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics Education. China Lectures*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. (Mathematics Education Library)
- Gravemeijer, K. P. E., y Terwel, J. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796. doi: <https://doi.org/10.1080/00220270050167170>
- Giordano F., Weir M., Fox W. (1997). *A first Course in Mathematical Modeling*. Brooks/Cole Publishing Company.
- Giraldo Buitrago, H. (2012). Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada en las nuevas tecnologías: Estudio de caso en el Colegio Marymount grupo 9° B del municipio de Medellín. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

- Gómez O, O. M. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. Universidad distrital Francisco José de Caldas. Maestría en educación. *Revista Científica*, 17(2), 115–120. <https://doi.org/10.14483/23448350.5966>
- Guzmán, G. D., & Vega, B. L. (2016). Modelación matemática escolar como proceso de enseñanza de la función lineal. *Revista Educación Las Américas*, 3, 17-28. Chile. Recuperado a partir de <https://revistas.udla.cl/index.php/rea/article/view/42>
- Hein, N., Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En M. Murillo (presidente), Memorias del V festival internacional de matemática. (pag. 1! 25). Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas.
- Ibarra, Y., & Moreno, V. (2010). Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín.
- ICFES, (31 de diciembre 2024). ¿Cuáles son los objetivos de las pruebas Saber 11?. https://www.icfes.gov.co/evaluaciones-icfes/saber-11/cuales_son_los_objetivos_del_examen_saber_11/#:~:text=Acerca%20del%20examen%20Saber%2011%C2%B0&text=Comprobar%20el%20grado%20de%20desarrollo,und%C3%A9cimo%20de%20la%20educaci%C3%B3n%20media.
- López, J., & Moguel, L. S. (2008). Dificultades Conceptuales y Procedimentales en el Aprendizaje de Funciones en Estudiantes de Bachillerato. *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa*, 21,308-317.
- Martínez, B. (2020). Música y matemática ¿Qué relación existe entre ambas?. Revista Unir la universidad en internet. Sitio web: <https://www.unir.net/humanidades/revista/musica-y-matematicas-relacion/>
- Martínez, G. B. (2020). Modelación matemática mediada por el software GeoGebra en la aplicación de funciones lineales para la solución de problemas en el contexto del manejo ambiental. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia. (Tesis de maestría). <http://hdl.handle.net/11349/22955>

- Mas Colombia (2024c, enero 11). Pruebas PISA y competitividad: en 2024 Colombia deberá atender la brecha educativa | Más Colombia. *Más Colombia*. <https://mascolombia.com/pruebas-pisa-y-competitividad-en-2024/>
- Mejía, J & Pino, L. (2021). El encuentro entre la medicina y la matemática. *Revista Medicina*. Volumen (43) número 4 (enero, 2021), 497-513. DOI:<https://doi.org/10.56050/01205498.1640>.
- MEN (2006). Estándares Básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019a). *Predecir. ¿Qué cambia? y ¿cómo cambia? Para saber qué pasa y que pasará*. Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México (Desarrollo de contenido).
- Ministerio de Educación, M.E.N. (1998). Lineamientos curriculares área de matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Ministerio Nacional de Educación. M.E.N. (2003). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia: M.E.N.
- Muñoz C. O. (2012). *Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC : Estudio de caso en el grado noveno de la Institución Educativa la Salle de Campoamor*.
- Muñoz, O., Piedrahita, A. & Jessie, A. (2012). Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC. *Revista de la Facultad de Ciencias*, 1(2), 22–33. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/rfc/article/view/49044>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. www.nctm.org ISBN 0-87353-480-8

- Olarte García, J. A. (2019). Homogeneizar la práctica de la modelación: un reto del sistema educativo colombiano. *Revista Educación*, 44(1), 346–360.
<https://doi.org/10.15517/revedu.v44i1.36285>
- Ortigoza, G., Lorandi, A. y Neri, I. (2020) Simulación Numérica y Modelación Matemática de la propagación del Covid 19 en el estado de Veracruz. *Rev Mex Med Forense*. 2020;5(3):21-37.
- Ospina, G. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales. Departamento de Educación.
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.
- Plata Sanabria, C. F. (2023). *Diseño para el estudio de funciones lineales con estudiantes de undécimo grado: Atendiendo la diversidad del aula*.
<https://noesis.uis.edu.co/items/658cb41f-fe28-4685-ab4f-bd4983f81118>
- Polo, R. I. G. (2021). *Actividades didácticas para el estudio de las funciones lineales en secundaria con tabletas electrónicas* (Doctoral dissertation, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada).
- Riveros, V. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en la construcción del conocimiento matemático. Algunos criterios teóricos. *Encuentro Educacional. Revista especializada en Educación*, 18(3), 418- 419.
- Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. España: *Publicaciones de la Universidad de Jaén*.
- Salazar, N. (2018). Secuencia didáctica centrada en la función lineal para fortalecer la competencia comunicación matemática mediada por el software GeoGebra en los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa "Pablo Correa León". (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga.

- Seoane, G., y Quesada, C. (2018). Data mining y análisis matemático de las cuotas de las casas de apuestas deportivas online. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, 19(2), 111-122.
- Silva, P. J. M. (2017). Estrategias didácticas para el fortalecimiento de las competencias matemáticas de comunicación, representación y modelación en los educandos del grado noveno, de la institución educativa Pablo Correa León, por medio de resolución de problemas. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga.
- Solarte Pabón, D. (2018). Una propuesta de aula para la enseñanza del concepto de función lineal y afín desde lo variacional. Universidad Tecnológica de Pereira. <https://hdl.handle.net/11059/8686>
- Solórzano, M. (2013). La importancia de las matemáticas en la educación y en la vida. Galileo Universidad. <https://www.galileo.edu/faced/historias-de-exito/la-importancia-de-las-matematicas-en-la-educacion-y-en-la-vida/>
- Sorando, J. (2017). La vida cotidiana en la clase de matemáticas. *Revista Suma+ sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Volumen (91) 23-31. Disponible en: <https://revistasuma.fespm.es/91-julio-2019/revista-91.html>
- Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education. Lines of Inquiry. In G. Stillman & J. Brown (Eds). Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education (pp. 1-20). https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-14931-4_1.
- Tiburcio, R. J. M. (2017). Organización matemática de la función lineal y función afín en un libro de texto de segundo año de educación secundaria. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Vanegas, G. (2023). Pruebas PISA: Colombia cae en matemáticas, lectura y ciencia. *El País*.
- Vargas Sánchez, J. R., y Velázquez Orihuela, D. (2013). Matemáticas y economía: virtudes y posibles abusos. Boletín científico de las ciencias económicas administrativas Del ICEA, 2(3). <https://doi.org/10.29057/icea.v2i3.65>

- Vargas, A., Cabañas-Sánchez, G., y Meza, E. (2013). Una situación de modelación de lo lineal. *FM Rodríguez-Vázquez, & R. Rodríguez Gallegos. Memoria de la XVI Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 266-272.
- Vasco, C. E. (2006). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Cali, Colombia. recuperado de: http://pibid.mat.ufrgs.br/20092010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf
- Vergel, O. M., Acevedo, R. G. A. & Nieto, S. Z. C. (2020). Transposición didáctica para apoyar la enseñanza de la función lineal y afín para estudiantes de cálculo usando las NTIC. Revista Aglala. <http://repositorio.ufps.edu.co/handle/ufps/1586>
- Villa Ochoa, J. A., Sánchez Cardona, J., & Parra Zapata, M. M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática.
- Villa, A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. *Asociación Colombiana de Matemática Educativa*, 5.
- Villa, J., Castrillón, A., y Sánchez, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.
- Yara, H. L. C. (2010). Conceptualización de la función lineal a través de situaciones concretas. (Tesis de Pregrado). Universidad Industrial de Santander.

Apéndices

I. Apéndice A. Rubrica para valoración de SA

Docente # 1



Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

SOLICITUD DE VALORACIÓN DE EXPERTO

Respetado profesional, conocedores de su formación, experiencia y trayectoria académica y de investigación, amablemente solicitamos su colaboración en la valoración de una situación de aprendizaje, como resultado de la investigación titulada:

DISEÑO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL EN GRADO NOVENO: UN ENFOQUE DE MODELACIÓN Y PRÁCTICAS VARIACIONALES

A cargo del estudiante de licenciatura en matemáticas:

RAFAEL HERNANDO SIERRA JAIMES

La valoración del diseño de la situación de aprendizaje es de gran relevancia para el trabajo de investigación pues, constituye una última fase para el rediseño y ajuste según los comentarios y sugerencias que usted haga. Luego, los resultados finales tendrán trascendencia para la aplicación, análisis y profundización en investigación en educación matemática.

Agradezco su valiosa colaboración.

Datos generales del experto:

Nombre y apellidos:
Docente # 1
Formación académica:
Licenciado en Matemáticas, Magister en Ciencias Matemáticas, Doctor en Calidad Educativa.

Línea de investigación: 1. Educación. 2. Geometría y Topología.
Experiencia profesional: 20 años de experiencia universitaria. Docente de tiempo completo en la Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga durante el periodo comprendido entre enero de 2010 y enero de 2024. Actualmente, docente cátedra de la Universidad Industrial de Santander y docente del magisterio colombiano nombrado en propiedad desde febrero de 2024. Director y evaluador de trabajos de grado del programa de Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander. Director y evaluador de trabajos de grado del programa de Maestría en gestión de la Educación de la Universidad Pontificia Bolivariana.
Cargo actual: Docente de educación básica y media nombrado en propiedad en la ETC de Bucaramanga. Docente de cátedra de la Universidad Industrial de Santander.
Institución donde labora: 1. IE Club Unión 2. Universidad Industrial de Santander

Resumen del trabajo de investigación

La investigación propone el diseño de una situación de aprendizaje (SA) para la enseñanza de la función lineal a partir de las prácticas variacionales y la modelación en estudiantes de noveno grado, articulando las etapas factual, procedimental y simbólica con las prácticas variacionales descritas por Caballero (2018) (comparación, seriación, predicción y estimación). En la etapa factual, los estudiantes reconocen magnitudes (variables o constantes), relaciones y contextos significativos como punto de partida para el respectivo análisis de la situación modelada. En este diseño, se parte de tomar decisiones a la hora de solicitar un servicio de transporte en la plataforma de InDriver al cuestionarlos sobre ¿cuánto es lo justo que debo pagar por mi servicio? En la etapa procedimental, desarrollan estrategias y métodos que les permiten establecer relaciones, construir

argumentos y organizar secuencias de razonamiento matemático. Finalmente, en la etapa simbólica, se busca que el estudiante establezca nuevas formas de representación que consoliden el pensamiento variacional y de esta manera faciliten la generalización. Esta SA aborda el desarrollo del pensamiento matemático a través de concepto de función lineal. Así se reconoce que la situación planteada articula los pensamientos variacional, numérico, espacial y métrico. En conjunto, estos pensamientos favorecen la interpretación y significación del cambio y la variación como fundamentos del razonamiento matemático para construir el concepto de función lineal. De este modo, la propuesta pretende superar la enseñanza algorítmica tradicional de la función lineal y generar aprendizajes mediante la modelación matemática y la problematización del saber. Estas afirmaciones se explicitan en la idea de que los estudiantes construyan conocimiento a partir de contextos relevantes y significativos que permitan dar significado a la función lineal desde la noción de variación constante.

Las prácticas de comparación y seriación se ven mayormente reflejadas en la etapa factual y procedimental y, la práctica de predicción y estimación en la etapa simbólica.

La SA consta de cuatro momentos que buscan incentivar las PV, articulándose con el objeto matemático función lineal (variación constante). Las prácticas de comparación y seriación se ven mayormente reflejadas en la etapa factual y procedimental y, la práctica de predicción y estimación en la etapa simbólica. El primer momento, se enfoca en identificar y caracterizar la variación del costo del servicio de transporte, en InDriver, por unidad de distancia, para ello se apoyará de las representaciones gráficas y tabulares. De igual forma se busca movilizar principalmente las prácticas de comparación y seriación: en la comparación, al analizar cómo se relacionan las variables distancia con el precio sugerido por la aplicación y en la seriación al observar cómo varía el precio sugerido de la aplicación para una distancia específica medida en kilómetros. Inicialmente en la representación tabular se caracteriza el cambio tras ordenar las distancias y luego se favorece esta observación a través de un gráfico de dispersión donde al buscar el tipo de linealidad lleva al estudiante a inferir que es un comportamiento lineal o sea una variación igual por unidad de kilómetro recorrido. De manera progresiva, las preguntas de síntesis orientan al estudiante hacia la práctica de predicción al invitarlos a proyectar escenarios como: calcular cuánto se debe pagar por una carrera de tantos kilómetros o cuántos kilómetros recorrió una persona que pagó cierta cantidad

de dinero. Así, el momento I comienza a activar en los estudiantes formas de razonar variacionalmente, pasando de la identificación de magnitudes a la generalización de patrones y anticipaciones sobre el comportamiento de las variables.

En el momento II, se puede diferenciar entre dos precios sugeridos por servicio de InDriver, uno correspondiente al horario ordinario y otro correspondiente a la hora pico. Al introducir estas dos variables relacionadas con la distancia recorrida se pretende hacer comparaciones y predicciones entre ambos comportamientos a partir del registro tabular y nuevas preguntas. Se introduce la razón como concepto matemático, se relaciona la razón de cambio con la pendiente de la recta, esto hace que los estudiantes gráficamente puedan hacer comparaciones sobre cual recta tiene mayor o menor pendiente y lo traduzcan a un lenguaje contextualizado, que, para este caso, es poder justificar o dar cuenta de cual carrera saldría más costosa en horario ordinario u hora pico para una misma unidad de distancia.

La comparación y la seriación nuevamente cobran un papel central en este momento, pues los estudiantes deben primero completar la representación tabular y para ello dan cuenta de qué y cómo cambia el precio sugerido para cada horario, luego de completar la tabla podrán generar un gráfico de dispersión donde visualmente se convencen de que se trata nuevamente de un comportamiento lineal, lo cual indica una variación constante, también podrán darse cuenta que aunque el comportamiento de las variables en las dos rectas son distintas por su pendiente, siguen un comportamiento lineal, lo cual permite hacer comparaciones entre si, por ejemplo poder cuantificar cual es la diferencia real en dinero entre una carrera en hora pico y hora ordinaria. Conocer esta información lleva al estudiante a hacer operaciones más elaboradas, ya que es comprender que se puede restar dos funciones lineales para conocer su diferencia, hacer esta operación permite comprender la razón de cambio de la diferencia entre pagar un servicio de InDriver en hora pico y hora ordinal. Esta diferencia se puede ver reflejada en el dinero que se puede ahorrar o en el número de carreras que se puede desajustar el joven al tomar un servicio en cualquiera de estos horarios. También en este momento los estudiantes pueden hacer predicciones, la idea es poder construir una expresión algebraica concreta que le sirva como modelo matemático para saber cuánto debe pagar el joven de la situación si recorre cierta cantidad de kilómetros o

cuántos viajes podrá hacer si dispone de cierto dinero para desplazarse a su trabajo conociendo la distancia a recorrer.

Finalmente, con la introducción de la pendiente de la recta como razón de cambio, se abren espacios para la práctica de estimación, ya que los estudiantes deben articular los saberes previos con la definición formal de función lineal para resolver situaciones nuevas.

En el momento III, los estudiantes se enfrentan a una nueva representación, se proporciona una gráfica donde aparecen dos funciones lineales que describen el comportamiento de los precios sugeridos para el servicio de transporte de InDriver y de Taxi por distancia recorrida, lo que les permite visualizar un comportamiento de variación constante. Lo que se busca es que, a partir del gráfico, el estudiante pueda hacer predicciones y pueda extraer datos importantes que le permitan dar cuenta del comportamiento del parámetro pendiente de las rectas. Desde el inicio se moviliza la práctica de comparación al traducir datos de la gráfica para completar la representación tabular y dar cuenta de cuánto dinero se gastan Laura y Daniel en transporte para ir a su trabajo utilizando el servicio de Taxi e InDriver respectivamente. La seriación se activa cuando los estudiantes deben dar cuenta del gasto de los primeros 10 días para ir a su trabajo en los días festivos, reconociendo el patrón de crecimiento constante, la predicción surge al identificar dicho patrón y dar cuenta de si tienen determinado monto de dinero y deben ir al trabajo por 18 días festivos, deberán responder si el presupuesto les alcanza a cada uno o para cuántos días les alcanzará. Este momento resulta clave porque los estudiantes no solo comparan o proyectan valores, sino que se les va llevando para que expliquen el cómo calcular el procedimiento de cuánto deberán pagar por los 18 días, además del momento II se espera, que los estudiantes piensen en construir una expresión algebraica que les permita dar cuenta más rápido de lo que se gasta por día festivo. Con todo esto, además de fortalecer la comparación, seriación y predicción, se introduce la práctica de estimación al analizar la relación entre variables desde la representación algebraica, las últimas preguntas de este momento le proponen nuevamente al estudiante una nueva situación donde el precio del servicio de Taxi será subsidiado en un tercio por kilómetro recorrido, a partir de esta condición, el estudiante nuevamente deberá modificar el parámetro de la pendiente adaptándolo con este subsidio, deberá comparar, seriar y predecir los costos para dar respuesta a los cuestionamientos ¿cómo calcular el precio sugerido a pagar con este subsidio?, ¿cuánto deberá pagar Laura por los 18 días festivos? O

explicar qué es más rentable, utilizar el servicio de taxi con el subsidio o el servicio de InDriver. La etapa simbólica ofrece una síntesis abstracta y flexible del fenómeno consolidado en los estudiantes, además de una visión más global del comportamiento de las variables en cuestión.

Finalmente, en el cuarto momento se contrasta el comportamiento lineal con uno no lineal. Se relaciona el tiempo de un servicio en taxi por unidad de distancia bajo un parámetro llamado recargo por tráfico. Aquí la comparación y la seriación juegan un papel fundamental, puesto que el análisis de tablas o cálculos permite identificar que el cambio entre magnitudes ya no se comporta de manera constante. Esta ruptura con lo trabajado previamente lleva al estudiante a reconocer, describir y justificar diferencias en el comportamiento de las variables, consolidando su capacidad para distinguir entre lo lineal (variación constante) y no lineal. A medida que avanzan en las preguntas, se busca incentivar la práctica de predicción a través de cuestionamientos que van orientados en comprender y justificar cómo los recargos de tráfico pueden afectar el costo total de un viaje, se espera que los estudiantes apliquen lo aprendido de los anteriores momentos como hacer representaciones, generar una tabla de valores, determinar la línea de tendencia del comportamiento de los datos y así llegar a convencerse de que se trata de un modelo no lineal. Esta práctica se complementa con la estimación, a través de generar estrategias, cálculos y argumentos que le permitan por ejemplo ubicar el costo del recargo en un intervalo de tiempo que no se da en la representación gráfica, o dar cuenta del ¿cómo es el comportamiento del recargo por unidad de tiempo? Así, el momento cuatro cierra la secuencia de aprendizaje al desafiar las concepciones iniciales y ampliar la comprensión del objeto matemático, fortaleciendo la argumentación y la flexibilidad en el razonamiento variacional.

El siguiente esquema (figura 1) permite observar la articulación de cada una de las etapas de la SA con los momentos descritos en el diseño.

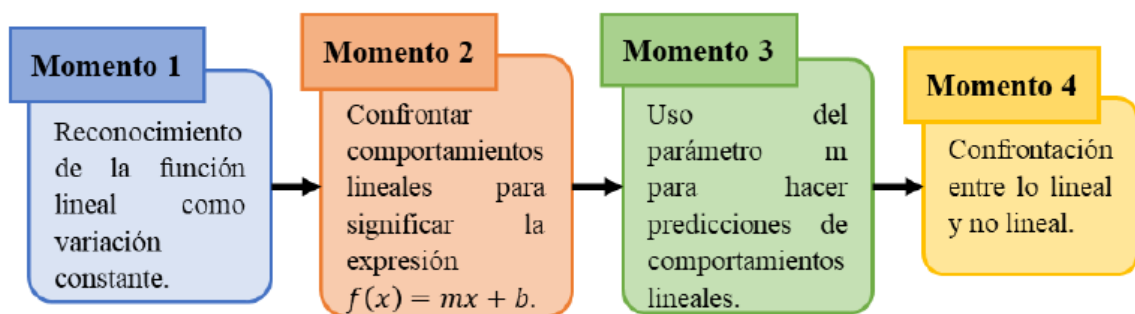


Figura 1. Momentos para el estudio de la variación constante. Tomado de (Arciniegas 2022, p. 140)

Justificación y objetivo del instrumento de validación:

El presente instrumento se enmarca en la fase de valoración de la metodología planteada en este trabajo de investigación, el cual sigue el enfoque de experimento de enseñanza. Este método implica un proceso cíclico y reflexivo que inicia con el diseño de una SA, continúa con su valoración a través del juicio de expertos y se ajusta con base en la retroalimentación obtenida. En este sentido, el instrumento constituye un medio sistemático para recoger las apreciaciones de los expertos y garantizar que el diseño conserve coherencia teórica didáctica y metodológica antes de su implementación.

El instrumento se organiza en dos niveles de análisis. En primer lugar, se abordan aspectos generales del diseño, tales como: la pertinencia del lenguaje frente al nivel escolar, la claridad de las instrucciones en relación con la actividad matemática esperada, la secuencialidad lógica de las tareas que promueve la construcción progresiva del conocimiento y la suficiencia de las actividades en términos de cantidad y calidad para responder al objeto matemático. Seguidamente, se valoran criterios específicos asociados a los ejes teóricos de la investigación: la coherencia de cada una de las etapas de la SA, la forma en que se aborda el objeto matemático y la articulación con las prácticas variacionales para el desarrollo del pensamiento variacional.

El objetivo de este instrumento es que ustedes, como expertos en el área, otorguen una valoración cuantitativa (en una escala de 1 a 5) y una cualitativa (observaciones y sugerencias) sobre los criterios establecidos. Esta retroalimentación permitirá revisar, ajustar y fortalecer el diseño cumpliendo con la naturaleza de la metodología adoptada y asegurando que la propuesta final mantenga un carácter progresivo, contextualizado y didácticamente sólido, respondiendo al objetivo principal de la investigación.

Validación

Agradecemos leer y analizar en detalle cada criterio y asignar una valoración entre 1 y 5, donde 1 es muy malo y 5 excelente. Además, agregue observaciones según considere conveniente.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Aspectos generales	El lenguaje es apropiado para el nivel escolar.				X		El lenguaje es adecuado para la población objetivo. El contexto utilizado es muy pertinente. Se sugiere revisar la redacción en algunas instrucciones de Excel. Revisar el documento compartido
	Existe claridad entre la instrucción y la actividad matemática esperada.				X		El lenguaje es adecuado para la población objetivo. El contexto utilizado es muy pertinente. Se sugiere revisar la redacción en algunas instrucciones de Excel. Revisar el documento compartido
	Existe una organización lógica y secuencial de las tareas en pro de la construcción progresiva del conocimiento.					X	La secuencia tiene una estructura progresiva clara y coherente (exploración, modelación, comparación y extensión de modelos) de acuerdo con la intencionalidad formativa. No obstante, se realizan algunas recomendaciones que podrían mejorar la interpretación de las actividades por parte de los estudiantes. Revisar documento.

	Las tareas y actividades son suficientes, en cantidad y calidad para responder al objetivo del diseño.					X	Las tareas son suficientes tanto en calidad como en cantidad. Se sugiere revisar algunas preguntas que podrían considerarse repetitivas.
Etapas de la SA	La SA parte de un escenario cercano (servicio de transporte InDriver) que resulta significativo y comprensible para el estudiante.					X	Excelente elección del contexto. Considero que esta es una de las fortalezas de la SA
	Factual Las preguntas iniciales permiten reconocer magnitudes involucradas (distancia, precio sugerido horario pico y ordinario) y establecer relaciones básicas, logrando que el estudiante se familiarice y se sitúe en la problemática.					X	Las preguntas logran su objetivo: Identificación de variables, relación entre estas e introducción de nuevas variables. Adicionalmente, están muy bien alineadas con el pensamiento variacional.
	Procedimental Las actividades propuestas conducen a que el estudiante formule estrategias de cálculo y comparaciones, para identificar regularidades					X	Las actividades cumplen su objetivo. Sin embargo, considero que se debe ser más explícito en la explicación de estrategias a fin de minimizar el riesgo de mecanización de parte de los estudiantes. Podrían incluirse cuestionamientos como

	entre cantidades y con ello construir argumentos que expliquen los resultados obtenidos a lo largo del proceso.					¿Qué estrategia utilizó...? ¿Por qué este procedimiento funciona...?	
	Simbólica Las actividades propuestas promueven el cambio de representaciones, que ayudan a consolidar el concepto de lo lineal (variación constante), permitiendo comparar comportamientos y generalizar conclusiones sobre el fenómeno.				X	La construcción de esta etapa es excelente. El tránsito entre representación gráfica, tabla y expresión algebraica está muy bien estructurado permitiendo alcanzar el objetivo	
Sobre el objeto matemático	Las tareas llevan a reconocer la existencia de una razón de cambio o variación constante entre magnitudes, permitiendo trascender el cálculo algorítmico hacia una perspectiva variacional del concepto función lineal.					X	Aquí se observa una fortaleza desde la didáctica. Las tareas abordan de una manera sólida la razón de cambio desde lo contextual hacia lo conceptual.
	El estudiante puede modelar, interpretar y predecir la relación entre					X	El aporte cognitivo es alto. Permite que el estudiante modele situaciones, realice

	variables , justificando cómo la variación de una de ellas incide en el comportamiento de la otra.					predicciones y justifique su toma de decisiones.
	Pendiente El concepto de pendiente de la recta se significa como representación de la razón de cambio constante en una función lineal, a partir de la interpretación y análisis de diversas situaciones contextualizadas.				X	El concepto de pendiente de la recta implícitamente está bien abordado. No obstante, falta la institucionalización explícita del concepto. Se sugiere incluir un momento de cierre para formalizar el concepto y relacionarlo con la razón de cambio. Aquí también se podría profundizar un poco más sobre el significado del punto de corte con el eje y.
	Lineal vs no lineal Se proponen actividades y tipos de tareas adecuados que permitan evidenciar y validar que los estudiantes reconocen y explican la diferencia entre variación constante y comportamientos no lineales .				X	Este apartado hace un aporte importante al diseño. Considero que está muy bien trabajado. Las actividades llevan al cumplimiento del objetivo
Desarrollo de las PV	<u>Comparación</u> Las actividades propuestas en la SA son pertinentes para que los estudiantes				X	Las actividades ayudan claramente a cumplir con este objetivo.

	comparen distintos estados de una o dos magnitudes (por ejemplo, costo del servicio y distancia recorrida), identificando con claridad qué cambia, qué permanece constante y cómo se expresa ese cambio (diferencia o razón) en el contexto de una relación lineal.					
	<u>Seriación</u> El diseño de aprendizaje promueve de manera coherente la organización y análisis de secuencias de datos (por ejemplo, variación del costo del servicio en función de la distancia), permitiendo a los estudiantes reconocer regularidades y el carácter constante del cambio propio de una función lineal				X	Aquí se encuentra otra fortaleza. El uso de software para creación de tablas y gráficos ayuda a organizar datos y a reconocer patrones de crecimiento y regularidades.
	<u>Predicción</u> Las actividades permiten de forma eficiente que los				X	La SA promueva constantemente la predicción cumpliendo con su objetivo

	estudiantes anticipen valores específicos de una variable (como el costo de un servicio para una distancia determinada), utilizando estrategias aritméticas, tabulares o algebraicas que evidencien la comprensión de la variación constante					
	<u>Estimación</u> El diseño favorece objetivamente que los estudiantes estimen tendencias globales del fenómeno (por ejemplo, la organización del dinero para transportarse a un lugar mensualmente conociendo la distancia a recorrer o si el costo del servicio aumenta de qué manera ese aumento afectará el gasto de dinero que requerirá para transportarse en el mes), describiendo el comportamiento general de la función lineal				X	Cumple. A manera de sugerencia, se podría pedir al estudiante que infieran el costo de un trayecto antes de utilizar las representaciones dadas para estimarlo a fin de comparar su intuición con la modelación, haciendo énfasis en la importancia del uso de la matemática en situaciones cotidianas.

	mediante representaciones verbales, gráficas o aproximadas						
--	--	--	--	--	--	--	--

(Para el tesista) En la columna de Criterio, en las últimas tres (etapas de la S.A., Sobre el objeto matemático, Desarrollo de las PV), coloque frases cortas alusivas a lo que ahí se comenta para que el evaluador tenga en cuenta lo que debe identificar en el diseño y determinar si sí se logra expresar con las preguntas y/o actividades.



C.C. 91505895

Docente # 2

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

SOLICITUD DE VALORACIÓN DE EXPERTO

Respetado profesional, conocedores de su formación, experiencia y trayectoria académica y de investigación, amablemente solicitamos su colaboración en la valoración de una situación de aprendizaje, como resultado de la investigación titulada:

DISEÑO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL EN GRADO NOVENO: UN ENFOQUE DE MODELACIÓN Y PRÁCTICAS VARIACIONALES

A cargo del estudiante de licenciatura en matemáticas:

RAFAEL HERNANDO SIERRA JAIMES

La valoración del diseño de la situación de aprendizaje es de gran relevancia para el trabajo de investigación pues, constituye una última fase para el rediseño y ajuste según los comentarios y sugerencias que usted haga. Luego, los resultados finales tendrán trascendencia para la aplicación, análisis y profundización en investigación en educación matemática.

Agradezco su valiosa colaboración.

Datos generales del experto:

Nombre y apellidos: Docente # 2
Formación académica: 1) Licenciada en Matemáticas 2) Magister en Educación matemática
Línea de investigación: 1) Pensamiento y lenguaje variación. 2) Educación inclusiva y atención a la diversidad.

Experiencia profesional: - Docente cátedra a cargo de formación matemática y prácticas pedagógicas, Universidad Nacional Abierta y a Distancia. - Docente cátedra a cargo de asignaturas de matemáticas, Unidades Tecnológicas de Santander - Docente cátedra con cursos preuniversitarios y educación matemática, Universidad Industrial de Santander - Docente de matemáticas en instituciones de educación básica y media de carácter privado y público.
Cargo actual: - Docente cátedra - Docente en propiedad
Institución donde labora: - Escuela de matemáticas, Universidad Industrial de Santander. - Institución Educativa Santander.

Resumen del trabajo de investigación

La investigación propone el diseño de una situación de aprendizaje (SA) para la enseñanza de la función lineal a partir de las prácticas variacionales y la modelación en estudiantes de noveno grado, articulando las etapas factual, procedimental y simbólica con las prácticas variacionales descritas por Caballero (2018) (comparación, seriación, predicción y estimación). En la etapa factual, los estudiantes reconocen magnitudes (variables o constantes), relaciones y contextos significativos como punto de partida para el respectivo análisis de la situación modelada. En este diseño, se parte de tomar decisiones a la hora de solicitar un servicio de transporte en la plataforma de InDriver al cuestionarlos sobre ¿cuánto es lo justo que debo pagar por mi servicio? En la etapa procedimental, desarrollan estrategias y métodos que les permiten establecer relaciones, construir

argumentos y organizar secuencias de razonamiento matemático. Finalmente, en la etapa simbólica, se busca que el estudiante establezca nuevas formas de representación que consoliden el pensamiento variacional y de esta manera faciliten la generalización. Esta SA aborda el desarrollo del pensamiento matemático a través de concepto de función lineal. Así se reconoce que la situación planteada articula los pensamientos variacional, numérico, espacial y métrico. En conjunto, estos pensamientos favorecen la interpretación y significación del cambio y la variación como fundamentos del razonamiento matemático para construir el concepto de función lineal. De este modo, la propuesta pretende superar la enseñanza algorítmica tradicional de la función lineal y generar aprendizajes mediante la modelación matemática y la problematización del saber. Estas afirmaciones se explicitan en la idea de que los estudiantes construyan conocimiento a partir de contextos relevantes y significativos que permitan dar significado a la función lineal desde la noción de variación constante.

Las prácticas de comparación y seriación se ven mayormente reflejadas en la etapa factual y procedimental y, la práctica de predicción y estimación en la etapa simbólica.

La SA consta de cuatro momentos que buscan incentivar las PV, articulándose con el objeto matemático función lineal (variación constante). Las prácticas de comparación y seriación se ven mayormente reflejadas en la etapa factual y procedimental y, la práctica de predicción y estimación en la etapa simbólica. El primer momento, se enfoca en identificar y caracterizar la variación del costo del servicio de transporte, en InDriver, por unidad de distancia, para ello se apoyará de las representaciones gráficas y tabulares. De igual forma se busca movilizar principalmente las prácticas de comparación y seriación: en la comparación, al analizar cómo se relacionan las variables distancia con el precio sugerido por la aplicación y en la seriación al observar cómo varía el precio sugerido de la aplicación para una distancia específica medida en kilómetros. Inicialmente en la representación tabular se caracteriza el cambio tras ordenar las distancias y luego se favorece esta observación a través de un gráfico de dispersión donde al buscar el tipo de linealidad lleva al estudiante a inferir que es un comportamiento lineal o sea una variación igual por unidad de kilómetro recorrido. De manera progresiva, las preguntas de síntesis orientan al estudiante hacia la práctica de predicción al invitarlos a proyectar escenarios como: calcular cuánto se debe pagar por una carrera de tantos kilómetros o cuántos kilómetros recorrió una persona que pagó cierta cantidad

de dinero. Así, el momento I comienza a activar en los estudiantes formas de razonar variacionalmente, pasando de la identificación de magnitudes a la generalización de patrones y anticipaciones sobre el comportamiento de las variables.

En el momento II, se puede diferenciar entre dos precios sugeridos por servicio de InDriver, uno correspondiente al horario ordinario y otro correspondiente a la hora pico. Al introducir estas dos variables relacionadas con la distancia recorrida se pretende hacer comparaciones y predicciones entre ambos comportamientos a partir del registro tabular y nuevas preguntas. Se introduce la razón como concepto matemático, se relaciona la razón de cambio con la pendiente de la recta, esto hace que los estudiantes gráficamente puedan hacer comparaciones sobre cual recta tiene mayor o menor pendiente y lo traduzcan a un lenguaje contextualizado, que, para este caso, es poder justificar o dar cuenta de cual carrera saldría más costosa en horario ordinario u hora pico para una misma unidad de distancia.

La comparación y la seriación nuevamente cobran un papel central en este momento, pues los estudiantes deben primero completar la representación tabular y para ello dan cuenta de qué y cómo cambia el precio sugerido para cada horario, luego de completar la tabla podrán generar un gráfico de dispersión donde visualmente se convencen de que se trata nuevamente de un comportamiento lineal, lo cual indica una variación constante, también podrán darse cuenta que aunque el comportamiento de las variables en las dos rectas son distintas por su pendiente, siguen un comportamiento lineal, lo cual permite hacer comparaciones entre si, por ejemplo poder cuantificar cual es la diferencia real en dinero entre una carrera en hora pico y hora ordinaria. Conocer esta información lleva al estudiante a hacer operaciones más elaboradas, ya que es comprender que se puede restar dos funciones lineales para conocer su diferencia, hacer esta operación permite comprender la razón de cambio de la diferencia entre pagar un servicio de InDriver en hora pico y hora ordinal. Esta diferencia se puede ver reflejada en el dinero que se puede ahorrar o en el número de carreras que se puede desajustar el joven al tomar un servicio en cualquiera de estos horarios. También en este momento los estudiantes pueden hacer predicciones, la idea es poder construir una expresión algebraica concreta que le sirva como modelo matemático para saber cuánto debe pagar el joven de la situación si recorre cierta cantidad de kilómetros o

cuántos viajes podrá hacer si dispone de cierto dinero para desplazarse a su trabajo conociendo la distancia a recorrer.

Finalmente, con la introducción de la pendiente de la recta como razón de cambio, se abren espacios para la práctica de estimación, ya que los estudiantes deben articular los saberes previos con la definición formal de función lineal para resolver situaciones nuevas.

En el momento III, los estudiantes se enfrentan a una nueva representación, se proporciona una gráfica donde aparecen dos funciones lineales que describen el comportamiento de los precios sugeridos para el servicio de transporte de InDriver y de Taxi por distancia recorrida, lo que les permite visualizar un comportamiento de variación constante. Lo que se busca es que, a partir del gráfico, el estudiante pueda hacer predicciones y pueda extraer datos importantes que le permitan dar cuenta del comportamiento del parámetro pendiente de las rectas. Desde el inicio se moviliza la práctica de comparación al traducir datos de la gráfica para completar la representación tabular y dar cuenta de cuánto dinero se gastan Laura y Daniel en transporte para ir a su trabajo utilizando el servicio de Taxi e InDriver respectivamente. La seriación se activa cuando los estudiantes deben dar cuenta del gasto de los primeros 10 días para ir a su trabajo en los días festivos, reconociendo el patrón de crecimiento constante, la predicción surge al identificar dicho patrón y dar cuenta de si tienen determinado monto de dinero y deben ir al trabajo por 18 días festivos, deberán responder si el presupuesto les alcanza a cada uno o para cuántos días les alcanzará. Este momento resulta clave porque los estudiantes no solo comparan o proyectan valores, sino que se les va llevando para que expliquen el cómo calcular el procedimiento de cuánto deberán pagar por los 18 días, además del momento II se espera, que los estudiantes piensen en construir una expresión algebraica que les permita dar cuenta más rápido de lo que se gasta por día festivo. Con todo esto, además de fortalecer la comparación, seriación y predicción, se introduce la práctica de estimación al analizar la relación entre variables desde la representación algebraica, las últimas preguntas de este momento le proponen nuevamente al estudiante una nueva situación donde el precio del servicio de Taxi será subsidiado en un tercio por kilómetro recorrido, a partir de esta condición, el estudiante nuevamente deberá modificar el parámetro de la pendiente adaptándolo con este subsidio, deberá comparar, seriar y predecir los costos para dar respuesta a los cuestionamientos ¿cómo calcular el precio sugerido a pagar con este subsidio?, ¿cuánto deberá pagar Laura por los 18 días festivos? O

explicar qué es más rentable, utilizar el servicio de taxi con el subsidio o el servicio de InDriver. La etapa simbólica ofrece una síntesis abstracta y flexible del fenómeno consolidado en los estudiantes, además de una visión más global del comportamiento de las variables en cuestión.

Finalmente, en el cuarto momento se contrasta el comportamiento lineal con uno no lineal. Se relaciona el tiempo de un servicio en taxi por unidad de distancia bajo un parámetro llamado recargo por tráfico. Aquí la comparación y la seriación juegan un papel fundamental, puesto que el análisis de tablas o cálculos permite identificar que el cambio entre magnitudes ya no se comporta de manera constante. Esta ruptura con lo trabajado previamente lleva al estudiante a reconocer, describir y justificar diferencias en el comportamiento de las variables, consolidando su capacidad para distinguir entre lo lineal (variación constante) y no lineal. A medida que avanzan en las preguntas, se busca incentivar la práctica de predicción a través de cuestionamientos que van orientados en comprender y justificar cómo los recargos de tráfico pueden afectar el costo total de un viaje, se espera que los estudiantes apliquen lo aprendido de los anteriores momentos como hacer representaciones, generar una tabla de valores, determinar la línea de tendencia del comportamiento de los datos y así llegar a convencerse de que se trata de un modelo no lineal. Esta práctica se complementa con la estimación, a través de generar estrategias, cálculos y argumentos que le permitan por ejemplo ubicar el costo del recargo en un intervalo de tiempo que no se da en la representación gráfica, o dar cuenta del ¿cómo es el comportamiento del recargo por unidad de tiempo? Así, el momento cuatro cierra la secuencia de aprendizaje al desafiar las concepciones iniciales y ampliar la comprensión del objeto matemático, fortaleciendo la argumentación y la flexibilidad en el razonamiento variacional.

El siguiente esquema (figura 1) permite observar la articulación de cada una de las etapas de la SA con los momentos descritos en el diseño.

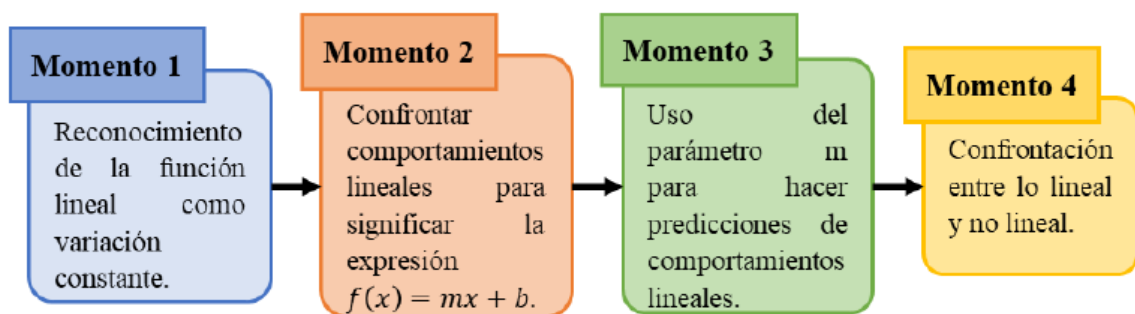


Figura 1. Momentos para el estudio de la variación constante. Tomado de (Arciniegas 2022, p. 140)

Justificación y objetivo del instrumento de validación:

El presente instrumento se enmarca en la fase de valoración de la metodología planteada en este trabajo de investigación, el cual sigue el enfoque de experimento de enseñanza. Este método implica un proceso cíclico y reflexivo que inicia con el diseño de una SA, continúa con su valoración a través del juicio de expertos y se ajusta con base en la retroalimentación obtenida. En este sentido, el instrumento constituye un medio sistemático para recoger las apreciaciones de los expertos y garantizar que el diseño conserve coherencia teórica didáctica y metodológica antes de su implementación.

El instrumento se organiza en dos niveles de análisis. En primer lugar, se abordan aspectos generales del diseño, tales como: la pertinencia del lenguaje frente al nivel escolar, la claridad de las instrucciones en relación con la actividad matemática esperada, la secuencialidad lógica de las tareas que promueve la construcción progresiva del conocimiento y la suficiencia de las actividades en términos de cantidad y calidad para responder al objeto matemático. Seguidamente, se valoran criterios específicos asociados a los ejes teóricos de la investigación: la coherencia de cada una de las etapas de la SA, la forma en que se aborda el objeto matemático y la articulación con las prácticas variacionales para el desarrollo del pensamiento variacional.

El objetivo de este instrumento es que ustedes, como expertos en el área, otorguen una valoración cuantitativa (en una escala de 1 a 5) y una cualitativa (observaciones y sugerencias) sobre los criterios establecidos. Esta retroalimentación permitirá revisar, ajustar y fortalecer el diseño cumpliendo con la naturaleza de la metodología adoptada y asegurando que la propuesta final mantenga un carácter progresivo, contextualizado y didácticamente sólido, respondiendo al objetivo principal de la investigación.

Validación

Agradecemos leer y analizar en detalle cada criterio y asignar una valoración entre 1 y 5, donde 1 es muy malo y 5 excelente. Además, agregue observaciones según considere conveniente.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Aspectos generales	El lenguaje es apropiado para el nivel escolar.				X		Se identifican algunos errores de redacción y ortografía en el diseño. Algunos se dejaron resaltados o comentarios en el documento.
	Existe claridad entre la instrucción y la actividad matemática esperada.				X		No se especifica si los datos de distancia se deben tomar en m o km. Si las orientaciones serán escritas, conviene ser más detallado, seleccione "Agregar línea de tendencia". Además, aclarar cómo se interpreta el margen de error en relación con la tendencia pues, luego se pregunta sobre su importancia de saberlo. Se solicita registrar datos de distancia usando Google y luego, datos sobre el precio usando InDriver. ¿Por qué no hacer ambos con InDriver?

	Existe una organización lógica y secuencial de las tareas en pro de la construcción progresiva del conocimiento.				X	Sugiero revisar el orden de las preguntas para que estén en sintonía con lo que se espera desde la etapa y desarrollo de las PV. Por ejemplo: En el momento 1, las preguntas 1 al 5 deberían ir antes de la instrucción de realizar la tabla pues, buscan conectar con conocimientos previos y contextualizar para luego, relacionar con las magnitudes. La pregunta 1 y 4 del momento 4, son la misma.
	Las tareas y actividades son suficientes, en cantidad y calidad para responder al objetivo del diseño.				X	
Etapas de la SA	La SA parte de un escenario cercano (servicio de transporte InDriver) que resulta significativo y comprensible para el estudiante.				X	
	Factual Las preguntas iniciales permiten reconocer magnitudes involucradas (distancia, precio sugerido				X	

	horario pico y ordinario) y establecer relaciones básicas, logrando que el estudiante se familiarice y se sitúe en la problemática.					
	Procedimental Las actividades propuestas conducen a que el estudiante formule estrategias de cálculo y comparaciones, para identificar regularidades entre cantidades y con ello construir argumentos que expliquen los resultados obtenidos a lo largo del proceso.				X	Se incentivan estrategias de cálculo y construcción de argumentos variacionales desde la interpretación o creación de representaciones tabulares, algebraicas o gráficas.
	Simbólica Las actividades propuestas promueven el cambio de representaciones, que ayudan a consolidar el concepto de lo lineal (variación constante), permitiendo comparar comportamientos y generalizar conclusiones sobre el fenómeno.				X	Se transita entre representaciones tabulares, gráficas, verbales y algebraicas.

Sobre el objeto matemático	Las tareas llevan a reconocer la existencia de una razón de cambio o variación constante entre magnitudes, permitiendo trascender el cálculo algorítmico hacia una perspectiva variacional del concepto función lineal.					X	
	El estudiante puede modelar, interpretar y predecir la relación entre variables , justificando cómo la variación de una de ellas incide en el comportamiento de la otra.					X	
	Pendiente El concepto de pendiente de la recta se significa como representación de la razón de cambio constante en una función lineal, a partir de la interpretación y análisis de diversas situaciones contextualizadas.					X	Conviene revisar o mejorar sobre cómo se interpreta R^2 con respecto a la tendencia con la regresión lineal pues, esto aporta significado adicional desde la estimación y modelación del fenómeno.
	Lineal vs no lineal					X	

	Se proponen actividades y tipos de tareas adecuados que permitan evidenciar y validar que los estudiantes reconocen y explican la diferencia entre variación constante y comportamientos no lineales .					
Desarrollo de las PV	<u>Comparación</u> Las actividades propuestas en la SA son pertinentes para que los estudiantes comparen distintos estados de una o dos magnitudes (por ejemplo, costo del servicio y distancia recorrida), identificando con claridad qué cambia, qué permanece constante y cómo se expresa ese cambio (diferencia o razón) en el contexto de una relación lineal.				X	
	<u>Seriación</u> El diseño de aprendizaje promueve de manera coherente la organización				X	

	y análisis de secuencias de datos (por ejemplo, variación del costo del servicio en función de la distancia), permitiendo a los estudiantes reconocer regularidades y el carácter constante del cambio propio de una función lineal					
	<u>Predicción</u> Las actividades permiten de forma eficiente que los estudiantes anticipen valores específicos de una variable (como el costo de un servicio para una distancia determinada), utilizando estrategias aritméticas, tabulares o algebraicas que evidencien la comprensión de la variación constante				X	
	<u>Estimación</u> El diseño favorece objetivamente que los estudiantes estimen tendencias globales del				X	

	fenómeno (por ejemplo, la organización del dinero para transportarse a un lugar mensualmente conociendo la distancia a recorrer o si el costo del servicio aumenta de qué manera ese aumento afectará el gasto de dinero que requerirá para transportarse en el mes), describiendo el comportamiento general de la función lineal mediante representaciones verbales, gráficas o aproximadas						
--	--	--	--	--	--	--	--

(Para el tesista) En la columna de Criterio, en las últimas tres (etapas de la S.A., Sobre el objeto matemático, Desarrollo de las PV), coloque frases cortas alusivas a lo que ahí se comenta para que el evaluador tenga en cuenta lo que debe identificar en el diseño y determinar si sí se logra expresar con las preguntas y/o actividades.

OBSERVACIONES ADICIONALES

No fue claro si el documento enviado como diseño era la SA que se entregaría al estudiante o la explicación de cómo se desarrollaría la SA en el aula pues, en algunos apartados se encuentran aclaraciones sobre cómo se hará con los estudiantes o cómo se espera que se desarrolle la actividad.

En relación con lo anterior, si es una SA donde se espera que el estudiante transite con el uso de la herramienta de Excel e instrucciones moderadas por el docente; conviene revisar algunas representaciones del diseño (tablas) que podrían sobrar pues, basta con la instrucción para realizarlo en Excel e incluso mostrar un ejemplo con pocas filas. Otras, mejorar su redacción para la autonomía en el desarrollo de la actividad.