

HOMOTOPÍA COMO HERRAMIENTA PARA EL CONTROL DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

HEBERTH MANUEL RANGEL ARIAS



ESCUELA DE INGENIERÍAS
ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA
Y DE TELECOMUNICACIONES



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2015

**HOMOTOPÍA COMO HERRAMIENTA PARA EL CONTROL
DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

HEBERTH MANUEL RANGEL ARIAS

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Electrónico**

**Director
RICARDO ALZATE CASTAÑO, PhD**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2015**

AGRADECIMIENTOS

Todavía no se escribe el párrafo final, todavía no comienza el cuarto movimiento de la sinfonía, todavía nos sorprenden las infinitas posibilidades de transformar la energía que nos rodea por medio de la creatividad humana, todavía la fuente de nuestra inspiración sigue siendo Dios.

To Him my gratitude for this amazing journey of discovering His creation through the engineering, it has been a concert of beautiful melodies, beautiful laws of science. Thanks be to God!

Aunque la lista podría ser mayor, quiero agradecer a las personas que han sido un motor en esta etapa que culmina:

A mis padres Manuel y Herminda, por no reservarse nada y entregarlo todo, por darnos ejemplo, techo y ayudarnos a preparar maletas para la vida;

A mi esposa Jaicel, por su paciencia y motivación, ella es mi gran proyecto, mi gran amor, el mejor rostro de cada día, el favor de Dios;

A mis hermanos y hermanas, quienes me retan cada día y le dan color a la familia con cada de sus pequeñitos y sus gestos de cariño;

Al profesor Ricardo Alzate por su experiencia, liderazgo y pasión por la educación, de quien aprendí que preguntando y corrigiendo se abren puertas, se controlan sistemas;

A la señora Ana Moreno, por sus respuestas amables y precisas, quien me ayudo con la coordinación de admisiones en la universidad;

A la UIS, por permitirme el privilegio de terminar, por pavimentar los sueños de los hijos de nuestra nación.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	12
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	14
1.1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN	14
1.2. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	18
1.3. OBJETIVOS	20
1.3.1. Objetivo General	20
1.3.2. Objetivos Específicos	20
2. MÉTODO DE CONTINUACIÓN POR HOMOTOPÍA	21
2.1. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA	21
2.2. MÉTODO DE CONTINUACION POR HOMOTOPÍA	23
3. ANÁLISIS DE HOMOTOPÍA EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO	27

3.1. EL PROBLEMA DE LA RESISTENCIA	27
3.2. EL PROBLEMA DEL VOLTAJE DE ENTRADA	32
4. CONTROL BASADO EN HOMOTOPÍA	36
4.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL ALGORITMO DE CONTROL	36
4.2. RESULTADOS DE SIMULACIÓN DEL ALGORITMO DE CONTROL PROPUESTO	38
5. CONCLUSIONES	41
5.1. RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO	42
BIBLIOGRAFIA	43

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Circuito RC básico	166
Figura 2. Circuito serie RLC	27
Figura 3. Circuito RLC modificado para cálculo de voltaje de entrada.....	32
Figura 4. Predicciones en valor de parámetro mediante método de homotopía ..	35
Figura 5. Contraste de parámetros mediante algoritmo de homotopía	35
Figura 6. Diagrama de flujo para algoritmo de control basado en homotopía	37
Figura 7. Respuesta en el tiempo de las variables del circuito perturbadas sin control	39
Figura 8. Respuesta en el tiempo de las variables del circuito controladas por homotopía	40

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Parámetros circuitales para cálculo de valores de resistencia	29
Tabla 2. Resultados numéricos para cálculo de R empleando método de homotopía	31
Tabla 3. Resultado comparativo entre métodos para el cálculo de R.....	31

RESUMEN

TÍTULO: HOMOTOPÍA COMO HERRAMIENTA PARA EL CONTROL DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS*

AUTORES: HEBERTH MANUEL RANGEL ARIAS**

PALABRAS CLAVES: Circuito eléctrico RLC; Control realimentado; Homotopía matemática; Perturbaciones de carga; Regulación de corriente.

DESCRIPCIÓN

El presente proyecto de grado aborda la aplicación de la teoría de homotopía para hacer control en circuitos eléctricos. Inicialmente, se presentan las ideas generales que permiten definir el contexto que enmarca el desarrollo del método numérico de continuación por homotopía el cual puede ser usado para solucionar sistemas de polinomios y luego se realizan ejemplos de aplicación empleando el método de homotopía para determinar el valor desconocido de un parámetro de interés en un circuito eléctrico el cual se puede representar como un sistema de ecuaciones no-lineales diferenciales e integrales. Hacemos uso de una ecuación conocida como la Función Lineal General de Homotopía que transforma o varía continuamente una función $f(x)$ hacia $g(x)$. Posteriormente, esta capacidad de predicción paramétrica es empleada para modificar en tiempo de ejecución un parámetro de simulación que hace las veces de variable de control en un esquema realimentado. Todo lo anterior permite visualizar numéricamente la regulación de la corriente de un inductor en un circuito RLC, a pesar de la acción de perturbaciones en la carga. Se busca entonces una solución empleando un algoritmo de homotopía sugerido por medio de las ecuaciones planteadas y se comparan algunos resultados para destacar la convergencia del método hacia el valor deseado en la medida que el parámetro de homotopía, λ , se acerca a la unidad ($\lambda \rightarrow 1$). Los cálculos analíticos presentados son desarrollados por medio de simulaciones numéricas en MATLAB®.

* Proyecto de Grado

** Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Ricardo Alzate Castaño, PhD.

ABSTRACT

TITLE: HOMOTOPY AS A TOOL FOR ELECTRICAL CIRCUITS CONTROL*

AUTHORS: HEBERTH MANUEL RANGEL ARIAS**

KEY WORDS: Homotopy; Electric current regulator; Feedback control; Load perturbation; RLC electric circuit.

DESCRIPTION:

This project addresses the application of the homotopy theory for control in electrical circuits. Initially, we present the general ideas that allow us to define the context that frames the development of the numerical homotopy continuation method which can be used to solve systems of polynomials and then application examples are performed using the homotopy method to determine the unknown value of a parameter of interest in an electrical circuit which can be represented as a system of nonlinear differential and integral equations. We use an equation known as the linear homotopy general function which continuously transform or deform a function $f(x)$ into another $g(x)$ function. Subsequently, this parametric prediction capability is used to modify at runtime a parameter simulation that serves as a control variable in a feedback control system. All this allows to numerically display the regulation of the current through an inductor in a RLC circuit, despite the action of load disturbances. Then we find a solution using a homotopy algorithm suggested by the formulated equations and some results are compared to highlight the convergence of the method towards the desired value to the extent that the homotopy parameter, λ , moves from 0 to 1 ($\lambda \rightarrow 1$). The presented analytical calculations are developed by numerical simulations in MATLAB®.

* Degree Final Project.

** Industrial University of Santander. Faculty of Physico-Mechanical Engineering. School of Electrical Engineering, Electronics and Telecommunications. Project Advisor: Ricardo Alzate Castaño, PhD.

INTRODUCCIÓN

La *topología* es el estudio matemático de objetos cuyas propiedades se mantienen aun cuando sufren alguna deformación, contorsión o estiramiento. Así que la topología algebraica se encarga del estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de los objetos espaciales (superficies, esferas, toroides, círculos, nodos, enlaces, etc.). Una de las principales ideas de la topología algebraica es que dos espacios se consideran equivalentes si tienen la 'misma forma', [10].

La *Teoría de Homotopía* es la rama de la topología algebraica que se encarga de estudiar los objetos topológicos según su equivalencia y grupos homotópicos. La homotopía (de las raíces griegas, homos=igual, similar y topos=lugar) es una transformación continua de una función a otra. Dos objetos (o funciones) matemáticos son homotópicos si uno de ellos puede ser deformado continuamente hacia el otro. Henri Poincaré publicó su trabajo *Analysis Situs* (cinco estudios entre 1895 y 1904) a partir de lo cual introdujo los conceptos de homotopía y homología, los cuales son considerados elementos importantes de la topología algebraica. Una homotopía entre dos funciones f y g desde el espacio X al espacio Y , es un mapa continuo $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, donde \times denota el producto cartesiano (par ordenado), de manera que si a pertenece a X , entonces $H(a,0) = f(a)$ y $H(a,1) = g(a)$. Es decir, una homotopía es una trayectoria en el espacio de mapeo desde f hasta g , [23].

Los métodos de continuación también son conocidos como métodos de homotopía. Cuando se habla de métodos numéricos de continuación se hace referencia a una familia de métodos con una terminología similar como: métodos de homotopía, métodos de variación de parámetros, métodos embebidos o métodos

incrementales, por ejemplo, donde estos representan una manera de encontrar la solución a un problema al construir uno más sencillo que el original e ir gradualmente deformando (continuando) esta función más sencilla hacia la función original tratando de seguir la serie de soluciones.

De esta manera, se han desarrollado métodos de homotopía que pueden ser usados para solucionar sistemas de polinomios; dichos métodos agrupan los polinomios en una familia de sistemas que definen la deformación de un problema original en un problema más simple cuyas soluciones son conocidas. Básicamente, se comienza con una versión del modelo simple de resolver para luego modificar lentamente algunos parámetros hasta llegar a la solución deseada [14].

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

La solución de sistemas no-lineales, como los sistemas algebraicos de polinomios, constituye un problema fundamental con grandes demandas en diferentes áreas de las matemáticas, física, ciencias en general e ingenierías como ocurre en procesos químicos, finanzas, robótica, procesamiento de señales, simulación de circuitos eléctricos, dinámica de fluidos, sistema climático, etc. Gran cantidad de estos problemas en ciencia e ingeniería comprenden ecuaciones no-lineales diferenciales e integrales, relaciones trascendentales, ecuaciones con coeficientes variables y/o condiciones iniciales complejas las cuales no tienen soluciones exactas; de igual manera, dada la dificultad al solucionar ecuaciones no-lineales diferenciales ordinarias y diferenciales-parciales, se hace necesario el uso de métodos numéricos. Tradicionalmente, las técnicas de perturbación y asintóticas se han aplicado ampliamente para obtener aproximaciones analíticas de problemas no-lineales, pero desafortunadamente estas técnicas dependen fuertemente de parámetros físicos en general, por lo cual son válidos solo para ciertos problemas. Por esto es necesario desarrollar métodos numéricos de aproximación independientes de estos parámetros físicos. Los métodos de continuación por homotopía (deformación homotópica o de continuación de caminos) constituyen una categoría de especial interés en los métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones de polinomios. En particular, el método de análisis por homotopía (HAM, *Homotopy Analysis Method*) propuesto por Liao [15] es un método válido para problemas no-lineales con fuertes características de no-linealidad y además provee una manera conveniente de controlar la convergencia de las aproximaciones, lo cual constituye ventajas muy importantes con respecto a otros métodos. A partir de una revisión de la literatura, se sugieren múltiples casos en los cuales dichos métodos permiten obtener soluciones a problemas de aplicación en áreas como los circuitos eléctricos y procesamiento de imágenes [6, 9, 24];

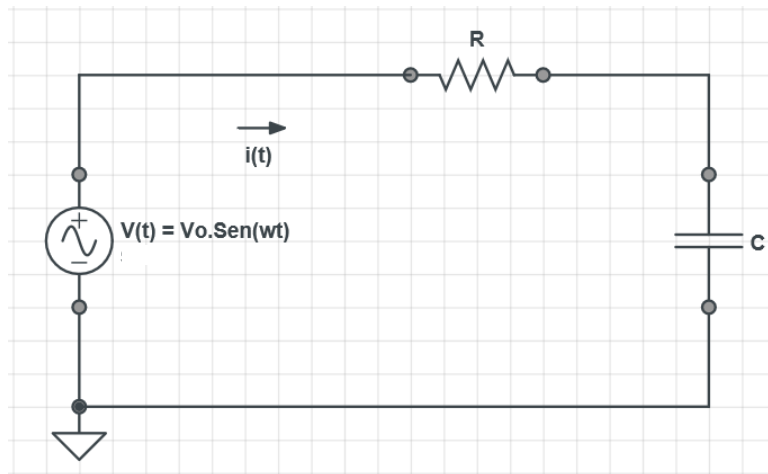
matemáticas aplicadas [1, 15]; química y biología (estructura de proteínas, modelos poblacionales y epidémicos, electro-hidrodinámica, ecuación dinámica de gas) [4, 5, 11, 12, 13, 16, 21]; física aplicada (ecuaciones de Kepler y determinación de órbita) [8, 18].

En ingeniería electrónica se tienen modelos matemáticos descritos por sistemas de polinomios no-lineales y resulta de interés, por ejemplo, encontrar las soluciones aproximadas de la ecuación diferencial no-lineal que describe un circuito RC de corriente alterna, el desarrollo y mejoramiento de herramientas numéricas aplicadas a la simulación y diseño de circuitos eléctricos, el análisis de circuitos con respuesta transitoria donde resultan ecuaciones diferenciales altamente no-lineales o encontrar los puntos de operación de circuitos DC en donde las técnicas basadas en el método de Newton no convergen fácilmente [6, 7, 9].

Considérese por ejemplo el caso analizado en [7], en donde se requiere la expresión analítica para la corriente de un circuito serie RC. Por tanto, asumiendo una tensión de entrada de la forma $V = V_0 \sin(\omega t)$, la ecuación diferencial que describe el circuito puede obtenerse mediante la ley de voltajes de Kirchoff, posterior a una diferenciación que elimine los términos integrales, a partir de:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = V_0 \omega \cos(\omega t). \quad (1)$$

Figura 1. Circuito RC básico



Analíticamente, es posible resolver la ecuación diferencial lineal (1), asumiendo $i(0) = 0$, $R = 2$, $C = 1$, $V_0 = 1$ y $\omega = 1$, para obtener:

$$i(t) = \frac{1}{5} (\cos(t) + 2\text{sen}(t)) - \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{2}}. \quad (2)$$

Sin embargo, tras considerar un valor variante para la resistencia R que sea a su vez función de la corriente del circuito a través de la expresión:

$$R(t) = R_0 + ki(t), \quad (3)$$

la ecuación que describe el comportamiento del circuito se modifica en la forma siguiente:

$$R_0 \frac{di}{dt} + 2ki(t) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = V_0 \omega \cos(\omega t), \quad (4)$$

y por tanto no será trivial resolver una expresión para $i(t)$ por tratarse ahora de una ecuación diferencial no lineal. Para ello entonces se propone una solución basada en homotopía a partir de la cual, si una ecuación es descrita en forma general como:

$$A(i) - f(t) = 0, \quad (5)$$

siendo $f(t)$ una función de la variable independiente t y $A(i)$ una función diferencial de la variable solución i , a su vez compuesta por una componente lineal $L(i)$ y una componente no lineal $N(i)$; es decir:

$$L(i) + N(i) - f(t) = 0, \quad (6)$$

Es posible proponer una función de homotopía de la forma:

$$H(m, p) = (1 - p)(L(m) - L(i_0)) + p(A(m) - f(t)) = 0, \quad (7)$$

Siendo $p \in [0,1]$ y $m(t)$ una solución aproximada para $i(t)$ que puede expresarse como una aproximación polinómica en p , es decir:

$$m(t) = m_0p + m_1p^2 + m_2p^3 + \dots$$

Ahora bien, realizando las equivalencias correspondientes para nuestro caso, asumiendo además $R_0 = 2$ y $k = 0.5$, se obtiene:

$$H(m, p) = (1 - p) \left(\frac{dm}{dt} + \frac{1}{2}m - \frac{di_0}{dt} - \frac{1}{2}i_0 \right) + p \left(\frac{dm}{dt} + \frac{1}{2}m \frac{dm}{dt} + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\cos(t) \right) = 0. \quad (8)$$

Puede mostrarse (ver [18]) que una aproximación de primer orden para $i(t)$ mediante el presente método es:

$$i(t) = \frac{24}{59}\sin(t) - \frac{22}{113}\cos(t) + \frac{46}{277} + \frac{14}{275}e^{-\frac{2}{93}t} - \frac{1}{1151}e^{-\frac{4}{93}t} - \frac{5}{354}e^{-\frac{2}{93}t}. \quad (9)$$

El desarrollo del presente proyecto busca comprender en forma detallada resultados como el anterior y por tanto no se realizará mayor profundización al respecto en este apartado.

Tomando en consideración las anteriores ideas que resumen métodos numéricos para resolver sistemas dinámicos no-lineales con dependencia paramétrica, mediante técnicas de homotopía o continuación, surgen posibles aplicaciones para

análisis de estabilidad y control, hacia lo cual se tratará de enfocar el presente proyecto.

En términos de investigación respecto al tema de los métodos de homotopía y continuación matemática, se destaca el trabajo del Dr. Phanikrishna Thota de la Universidad de Bristol en Inglaterra (<http://seis.bris.ac.uk/~enzpt/>), [19, 20]. También se destaca en la Universidad Industrial de Santander el trabajo liderado por el profesor Carlos Rodrigo Correa, del grupo CEMOS-E3T orientado a métodos numéricos para solución de sistemas de ecuaciones no-lineales, [2, 17].

1.2. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Los métodos numéricos presentan una gran ventaja al momento de aproximar soluciones numéricas en problemas que analíticamente representarían soluciones muy complejas o incluso inexistentes. Desde el punto de vista dinámico, la evolución temporal de un sistema puede estudiarse simplemente a partir de la solución de su ecuación diferencial en un problema de valor inicial. Lo anterior es válido sin importar que el sistema sea lineal o no, variante o invariante en el tiempo, de una o múltiples entradas o de una o múltiples salidas. Nuevamente será un apropiado método numérico quién permitirá aproximar la solución (trayectoria) del problema considerado.

Otro aspecto interesante en el análisis de la dinámica de los sistemas corresponde con su dependencia paramétrica. En particular puede estudiarse el comportamiento del punto de equilibrio (o valor en estado estable) al variar un parámetro de interés. Este proceso se conoce en general con el nombre de análisis de bifurcaciones y permite estudiar principalmente dinámicas complejas y transiciones al caos en sistemas no-lineales.

Las bifurcaciones pueden estudiarse de manera analítica o mediante aproximaciones numéricas a través de simulaciones y diagramas estroboscópicos, también obtenidos mediante algoritmos de continuación numérica. En este contexto, la homotopía matemática puede emplearse para realizar el análisis de bifurcaciones en espacios topológicos y por tanto, para proponer a partir de ella algoritmos de continuación numérica. Por tanto, la homotopía matemática nos brinda información acerca de la tendencia de la estabilidad de un sistema.

Tomando en consideración que muchos algoritmos de continuación se basan en la estructura predictor-corrector, ¿Es viable emplear la homotopía matemática para predecir el comportamiento de estabilidad del sistema? ¿Es posible proponer control basado en homotopía matemática? ¿Puedo aplicar homotopía al análisis de un circuito eléctrico? ¿Puedo hacer control basado en homotopía a un circuito eléctrico?

El presente proyecto de grado busca realizar aportes y obtener resultados direccionados a la resolución de estas inquietudes, constituyendo una base para posteriores desarrollos afines que permitan abordar de manera profunda esta temática al interior del grupo de investigación CEMOS.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo General

- Utilizar la homotopía para proponer una acción de control en un circuito eléctrico.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Describir el concepto matemático de la homotopía.
- Definir su aplicación al problema de análisis de estabilidad y control de sistemas dinámicos.
- Proponer un control basado en homotopía sobre un circuito eléctrico.

2. MÉTODO DE CONTINUACIÓN POR HOMOTOPÍA

El presente capítulo presenta las ideas generales que permiten definir el contexto temático sobre el cual se enmarca el desarrollo del método numérico de continuación por homotopía.

2.1. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Los métodos de continuación se basan en una propiedad matemática que permite mapear las trayectorias solución de una ecuación diferencial, sometida a deformación de sus espacios topológicos como función de algún parámetro. Dicha propiedad se define en términos del denominado teorema de la función implícita *TFI* [22].

De manera más precisa, en una formulación matemática multivariable siempre es posible expresar una variable como función de las demás en la medida que se cumplan las condiciones del *TFI* [22]. Por tanto, empleando estos resultados es posible expresar la dependencia paramétrica de los equilibrios de un sistema dinámico, o equivalentemente de su estabilidad.

Lo anterior se puede definir considerando el campo vectorial:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa el vector de estados del sistema de orden n y $\mu \in \mathfrak{R}$ relaciona un parámetro escalar. Los equilibrios de dicho sistema corresponden a todos los puntos del espacio $(n + 1)$ -dimensional (x, μ) para los cuales $f(x, \mu) = 0$. La función $f(\cdot)$ se define sólo para un subconjunto de este espacio $(n + 1)$ -dimensional.

En general, la ecuación $0 = f(x, \mu)$ define implícitamente una o más curvas en su dominio. La pregunta es entonces ¿Cuándo una ecuación $0 = f(x, \mu)$

implícitamente define una función $x = F(\mu)$, de manera tal que se satisfaga la expresión $0 = f(F(\mu), \mu)$? La respuesta a este interrogante viene dada en términos del siguiente teorema [22]:

Teorema. Teorema de la función implícita TFI: Dada $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, se asume que,

- 1) $f(x^*, \mu^*) = 0$;
- 2) $f(\cdot)$ es continuamente diferenciable en su dominio, y
- 3) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, \mu^*)}$ es no-singular;

Entonces, existe un intervalo $\mu_1 < \mu^* < \mu_2$ alrededor de μ^* , en el cual una función vectorial $x = F(\mu)$ es definida para $0 = f(x, \mu)$, cumpliendo con las siguientes propiedades para todo μ en el intervalo $\mu_1 < \mu < \mu_2$:

- a) $f(F(\mu), \mu) = 0$,
- b) $F(\mu)$ es única con $x^* = F(\mu^*)$,
- c) $F(\mu)$ es continuamente diferenciable y
- d) $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$.

Luego, considerando a μ como el parámetro de interés, los resultados de este teorema permiten trazar una rama de equilibrios para el sistema dinámico (1), dentro del intervalo $\mu_1 < \mu < \mu_2$.

En particular, a partir de la última expresión del TFI se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\mu} f(x(\mu), \mu) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \\
 &\Rightarrow f(x(\mu), \mu) = 0, \\
 &\Rightarrow \frac{d}{d\mu} f(x(\mu), \mu) = 0, \\
 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{dx}{d\mu} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mu}}{\frac{\partial f}{\partial x}}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Por tanto, integrar (2) con respecto a μ permite obtener los equilibrios de $f(\cdot)$, constituyendo el algoritmo básico de continuación numérica. Como se observa, la solución de (2) depende fuertemente de evitar nulidades en el denominador de la expresión, representado por el Jacobiano del sistema.

2.2. MÉTODO DE CONTINUACION POR HOMOTOPÍA

Para comenzar establecemos el problema a solucionar, el cual es la ecuación algebraica:

$$f(\mu) = 0, \quad (3)$$

donde: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, μ denota las variables del problema (parámetros) y n el número total de estas variables.

Para resolver la ecuación (3) se propone una función de homotopía [2]:

$$H(f(\mu), \lambda) = H(\mu, \lambda) = 0, \quad (4)$$

donde: $H: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$ es el parámetro de homotopía.

Para resolver la ecuación algebraica (3) por medio del método de continuación por homotopía, se construye la siguiente función general:

$$H(\mu, \lambda) = (1 - \lambda) g(\mu) + \lambda f(\mu) \quad (5)$$

Donde $g(\mu)$ es una función para la cual su cero (solución) es conocido o fácilmente calculado. Esta ecuación es conocida como la *Función Lineal General de Homotopía* que transforma (deforma, varia) continuamente la función $g(\mu)$ en $f(\mu)$. A diferencia del método de Newton, el de homotopía es un método numérico de convergencia global. El método de Newton necesita un valor inicial cercano a la raíz, es decir tiene una característica de convergencia local [23].

De esta manera entonces, tras asignar valores al parámetro λ tenemos:

$$\begin{aligned} H(\mu, 0) &= g(\mu) = 0, && \text{Función con solución conocida (simple).} \\ H(\mu, 1) &= f(\mu) = 0, && \text{Función con solución desconocida (difícil).} \end{aligned} \tag{6}$$

Se pueden desarrollar diferentes funciones de homotopía de acuerdo a la función $g(\mu)$ que se escoja, para este fin mencionaremos dos funciones ampliamente usadas:

- *Función de Homotopía de Newton:*

$$H(\mu, \lambda) = (1 - \lambda) [f(\mu) - f(\mu_0)] + \lambda f(\mu) \tag{7}$$

donde $g(\mu) = f(\mu) - f(\mu_0)$, siendo μ_0 un valor inicial cualquiera.

- *Función de Homotopía de Punto Fijo:*

$$H(\mu, \lambda) = (1 - \lambda) (\mu - \mu_0) + \lambda f(\mu) \tag{8}$$

donde $g(\mu) = (\mu - \mu_0)$, siendo μ_0 un valor inicial cualquiera.

Asimismo, se define:

$$\beta = \{ (\mu, \lambda) \mid H(\mu, \lambda) = 0 \}, \tag{9}$$

representando el conjunto de puntos (μ, λ) que satisfacen (4) y que por tanto implícitamente definen la relación paramétrica de las raíces (ceros) en dicha ecuación.

Luego, si $H(\mu_0, 0)$ y $H(\mu_0, 1)$ tienen ceros, entonces nuestro objetivo puede resumirse en efectuar el seguimiento de la trayectoria continua parametrizada β que

conecta los ceros de la función conocida $g(\mu)$ con los ceros de la función desconocida $f(\mu)$, para lo cual es necesario que la función $H(\mu, \lambda)$ sea diferenciable respecto de λ en el intervalo $[0,1]$.

Ahora bien, a partir de los resultados del *TFI* (en particular de la ecuación (2)) es posible asumir que la derivada de la función de homotopía $H(\mu, \lambda)$ con respecto a λ sea de valor 0, i.e.

$$\frac{dH}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} = 0, \quad (10)$$

y por tanto:

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (11)$$

Para garantizar la existencia de una solución para (11), $H(\mu, \lambda)$ debe ser regular (no singular) para todo (μ, λ) en la matriz Jacobiana $\frac{\partial H}{\partial \mu}$. En otras palabras, resolver para μ en términos de la variación de λ implica $\left(\frac{\partial H}{\partial \mu} \right)^{-1} \neq 0$, para asegurar convergencia numérica de los algoritmos.

Por tanto, en favor de resolver estas situaciones, se incluye un nuevo parámetro global s , que se relaciona con el par ordenado (μ, λ) a partir de la siguiente relación:

$$\left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 = 1, \quad (12)$$

Conocida como longitud de arco. De esta manera, la variación de la función de homotopía $H(\mu, \lambda) = H(\mu(s), \lambda(s))$ respecto a sus parámetros, queda definida mediante:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0, \quad (13)$$

y a partir de ello:

$$\frac{\left(\frac{d\mu}{ds}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)} = \frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \mu}\right)} \quad (14)$$

Luego para evitar la singularidad de (14) se analizan las proporciones de manera separada; es decir:

$$\frac{d\mu}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (15)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad (16)$$

y con base en ello, si se cumplen (15) y (16) ocurre lo propio con (14). Nótese que $\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$, representa una afectación sólo en la dirección de λ , y por tanto es posible analizar para otros valores de (μ, λ) en términos de variaciones del parámetro global s .

Finalmente, es posible definir a través de diferencias finitas de Newton, las siguientes ecuaciones:

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \Delta s \left. \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right|_{(\mu_k, \lambda_k)} ; \quad (17)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta s \left. \frac{\partial H}{\partial \mu} \right|_{(\mu_k, \lambda_k)}, \quad (18)$$

para el cálculo iterativo de los parámetros (μ, λ) que satisfacen β en (11), donde Δs representa el paso de variación para s .

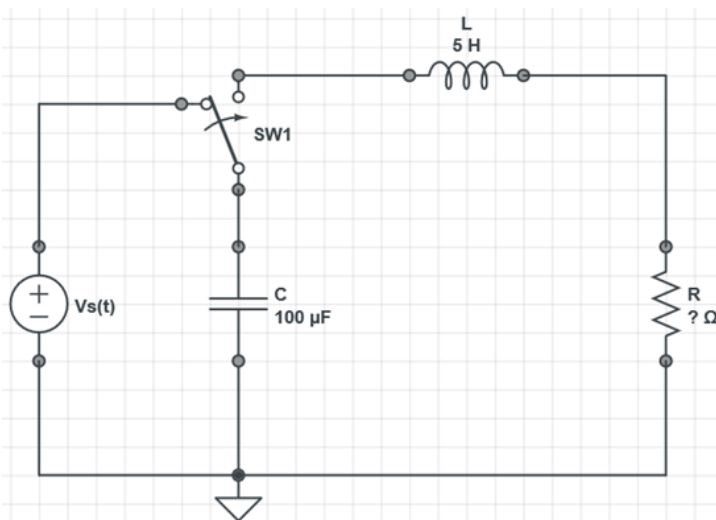
3. ANÁLISIS DE HOMOTOPÍA EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO

Con base en los resultados del capítulo anterior, el presente apartado realiza el empleo del método de homotopía para determinar el valor de un parámetro de interés en un circuito eléctrico. Inicialmente se abordará el problema de diseño que requiere determinar un valor de resistencia. Posteriormente se calculará el valor del voltaje de entrada que permite satisfacer ciertas condiciones de corriente en una bobina. Los cálculos analíticos presentados serán complementados por simulaciones numéricas en MATLAB®.

3.1. EL PROBLEMA DE LA RESISTENCIA

Considere el circuito de la Figura 1.

Figura 2. Circuito serie RLC



Posterior al instante de conmutación del interruptor, se obtiene la siguiente expresión:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0, \quad (19)$$

para la tensión en la malla, aplicando Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en términos de la carga del circuito $q(t)$.

Dicha expresión, representa una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden, con la solución dada por [3]:

$$q(t) = q_0 e^{-Rt/(2L)} \cos \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right]. \quad (20)$$

Por tanto, asumiendo que todos los valores son conocidos a excepción del valor de la resistencia R , es posible formular una función $f(R)$ mediante:

$$f(R) = e^{-Rt/(2L)} \cos \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right] - \frac{q}{q_0}, \quad (21)$$

cuyos ceros (es decir las soluciones de $f(R) = 0$) correspondan con los valores de resistencia desconocidos. En particular, considérese el caso para el cual se proponen los valores circuitales incluidos en la Tabla 1. Se buscará entonces una solución empleando el algoritmo de homotopía sugerido mediante las ecuaciones (17) y (18) del capítulo 2.

Tabla 1. Parámetros circuitales para cálculo de valores de resistencia

PARÁMETRO	SÍMBOLO	VALOR
Capacitor	C	10^{-4} [F]
Inductor	L	5 [H]
Carga final	q	0.001 [C]
Carga inicial	q ₀	0.1 [C]
tiempo	t	0.05 [s]

Para ello, la función $f(R)$ toma la forma:

$$f(R) = e^{-0.005R} \cos[\sqrt{2000 - 0.01R^2}(0.05)] - 0.01, \quad (22)$$

y, asimismo se propone una función de homotopía de punto fijo $H(R, \lambda)$ expresada mediante:

$$H(R, \lambda) = (1 - \lambda)R + \lambda f(R), \quad (23)$$

siendo $\mu = R$ el parámetro de interés, $g(R) = (R - R_0)$ y $R_0 = 0$.

Con base en esto y según las ecuaciones (17) y (18):

$$R_{k+1} = R_k - \Delta s \left. \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right|_{(R_k, \lambda_k)} ; \quad (24)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta s \left. \frac{\partial H}{\partial R} \right|_{(R_k, \lambda_k)} , \quad (25)$$

donde:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(R) - R;$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = (1 - \lambda) + \lambda \frac{df(R)}{dR};$$

$$\frac{df(R)}{dR} = e^{-uR} \left[\frac{wtR}{\sqrt{v-wR^2}} \text{sen}(\sqrt{v-wR^2}t) - u \cdot \text{cos}(\sqrt{v-wR^2}t) \right],$$

con:

$$u = \frac{t}{2L} = 0.005;$$

$$v = \frac{1}{LC} = 2000;$$

$$w = \left(\frac{1}{2L}\right)^2 = 0.01;$$

$$t = 0.05;$$

$$z = 0.01.$$

Luego, empleando MATLAB® y un tamaño de paso $\Delta s = 0.001$ junto con valores de condición inicial $(R_0, \lambda_0) = (0, 0)$, se generaron los resultados contenidos en la Tabla 2. De los mismos se observa como el valor de resistencia tiende hacia $R = 328.15$ [Ω] en la medida que el parámetro de homotopía λ se acerca a la unidad.

A manera de comparación, la Tabla 3 muestra la cantidad de iteraciones y el valor final obtenido para el mismo caso empleando otros métodos numéricos. Como dato importante se observa que el método propuesto no es precisamente el más veloz. Sin embargo se recuerda que la utilización del método no será principalmente para hallar los ceros de la función sino en cambio para aprovechar la deformación del polinomio desde una respuesta conocida hasta una desconocida. En este orden de ideas los resultados de la Tabla 3 resaltan la convergencia del método hacia el valor deseado en la medida que $\lambda \rightarrow 1$.

Tabla 2. Resultados numéricos para cálculo de R empleando método de homotopía

ITERACIONES	R	λ
0	6.2730x10-4	0.001
1	0.0013	0.0020
2	0.0019	0.0030
3	0.0025	0.0040
10	0.0069	0.0109
100	0.0666	0.0961
1000	1.0768	0.6335
2000	3.9915	0.8668
6189	299.9277	0.9999
6190	300.2277	0.9999
6279	328.1598	1

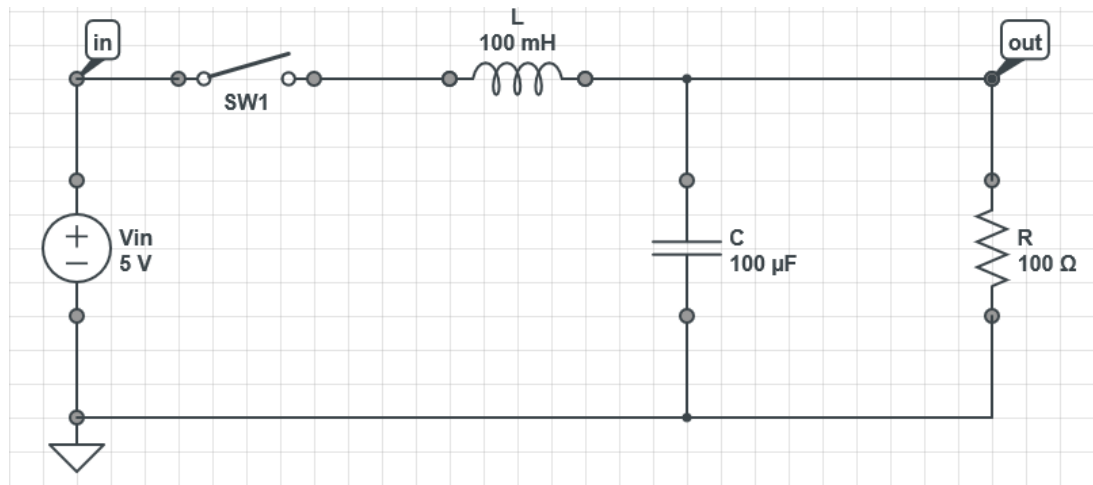
Tabla 3. Resultado comparativo entre métodos para el cálculo de R.

MÉTODO	ITERACIONES	R
Bisección	20	328.1515
Secante	5	328.1514
Newton-Raphson	4	328.1514
Homotopía	6279	328.1598

3.2. EL PROBLEMA DEL VOLTAJE DE ENTRADA

Posterior a la ilustración general del método de homotopía presentada en la sección anterior, se realizará a continuación un nuevo ejemplo de aplicación para resolución de parámetros en un circuito eléctrico, esta vez con la configuración mostrada en la Figura 3.

Figura 3. Circuito RLC modificado para cálculo de voltaje de entrada



En este caso nos interesa determinar el voltaje de entrada que permite satisfacer un cierto valor de corriente en la bobina del circuito. Para ello se define inicialmente la impedancia total vista desde la entrada mediante:

$$Z_T = Z_L + (Z_C // Z_R) = Ls + \frac{1}{Cs + \frac{1}{R}} = \frac{LCRs^2 + Ls + R}{RCs + 1}. \quad (26)$$

Por tanto, la corriente que pasa por el inductor puede expresarse en el dominio de Laplace a partir de la siguiente expresión:

$$I_L(s) = \frac{V_{in}(s)}{Z_T(s)}, \quad (27)$$

donde $V_{in}(s)$ representa la transformada de Laplace del voltaje aplicado como entrada. Luego, asumiendo que dicha tensión corresponde con un valor constante V a partir de $t = t_0 > 0$, reemplazando (26) en (27) se obtiene:

$$V_{in}(s) = \frac{V}{s} \Rightarrow I_L(s) = V \frac{1}{s} \frac{(RCs+1)}{(LCRs^2+Ls+R)} = \frac{V}{L} \frac{1}{s} \frac{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}{\left(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}\right)}, \quad (28)$$

A partir de lo cual:

$$i_L(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_L(s)\} = \frac{V}{L} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}{\left(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}\right)}\right\} = \frac{V}{L} \left(\frac{\sinh(\theta)e^{\alpha\rho}}{\epsilon C} + \frac{A(1-\cosh(\theta)e^{\alpha})}{C}\right), \quad (29)$$

Siendo:

$$A = \frac{1}{RC}; \quad B = \frac{1}{RC}; \quad C = \frac{1}{LC}; \quad \epsilon = \sqrt{B^2 - 4C};$$

$$\theta = \frac{1}{2t\epsilon};$$

$$\alpha = -\frac{1}{2tB};$$

$$\rho = -BA + 2C.$$

Con estos resultados se procede a aplicar el método de homotopía, considerando $\mu = V$ como el parámetro de interés, empleando además las siguientes definiciones:

$$f(V) = i_L(t) - i_{Ld} = \frac{V}{L} \left(\frac{\sinh(\theta)e^{\alpha\rho}}{\epsilon C} + \frac{A(1-\cosh(\theta)e^{\alpha})}{C}\right) - i_{Ld};$$

$$H(V, \lambda) = (1 - \lambda)V + \lambda f(V);$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(V) - V;$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = (1 - \lambda) + \lambda \frac{df(V)}{dV};$$

$$\frac{df(V)}{dV} = \frac{1}{L} \left(\frac{\sinh(\theta)e^{\alpha\rho}}{\epsilon C} + \frac{A(1-\cosh(\theta)e^{\alpha})}{C} \right),$$

Con $i_{Ld} = 0.05 [A]$ representando la corriente deseada en el inductor, siendo además:

$$R = 100 [\Omega]; \quad L = 100 [mH]; \quad C = 100 [\mu F]; \quad t = 0.1 [s].$$

Luego, empleando MATLAB® y un tamaño de paso $\Delta s = 0.0005$ junto con valores de condición inicial $(V_0, \lambda_0) = (0, 0)$, se generaron los resultados visualizados en las Figuras 3 y 4. A partir de estos se verifica como la tensión de entrada deseada se posiciona en el valor $V = 5 [V]$, en la medida que $\lambda \rightarrow 1$. Este valor en estado estacionario permite satisfacer las condiciones requeridas sobre i_{Ld} ; es decir:

$$i_{Ld} = V/R = 5/100 = 0.05 [A].$$

Figura 4. Predicciones en valor de parámetro mediante método de homotopía

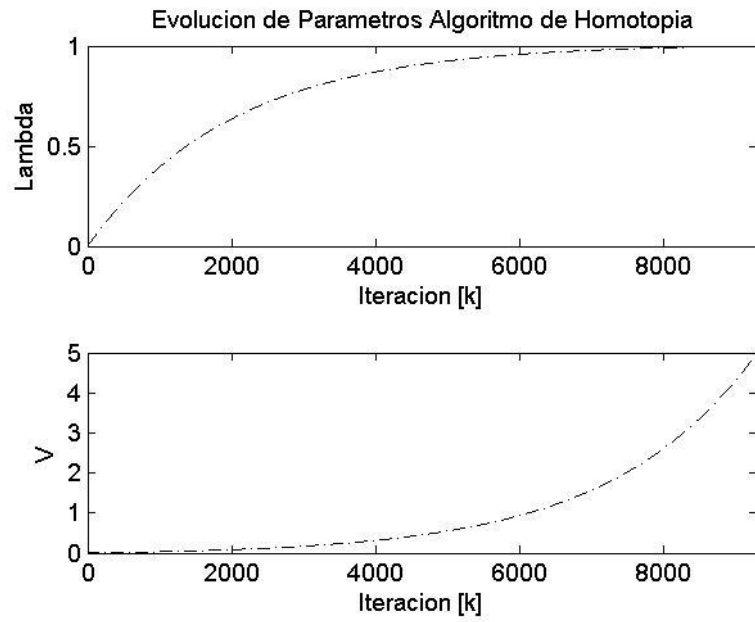
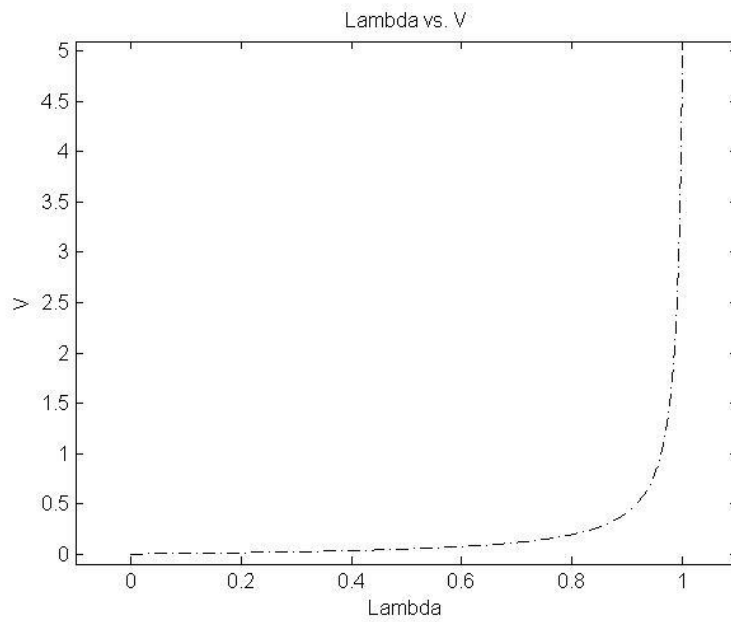


Figura 5. Contraste de parámetros mediante algoritmo de homotopía



4. CONTROL BASADO EN HOMOTOPÍA

Habiéndose definido ya la teoría del método de continuación por homotopía y luego de haberse demostrado su utilidad para hallar la dependencia paramétrica del comportamiento de un sistema eléctrico, se presentará en este capítulo la utilización del método para realizar acciones de control.

4.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL ALGORITMO DE CONTROL

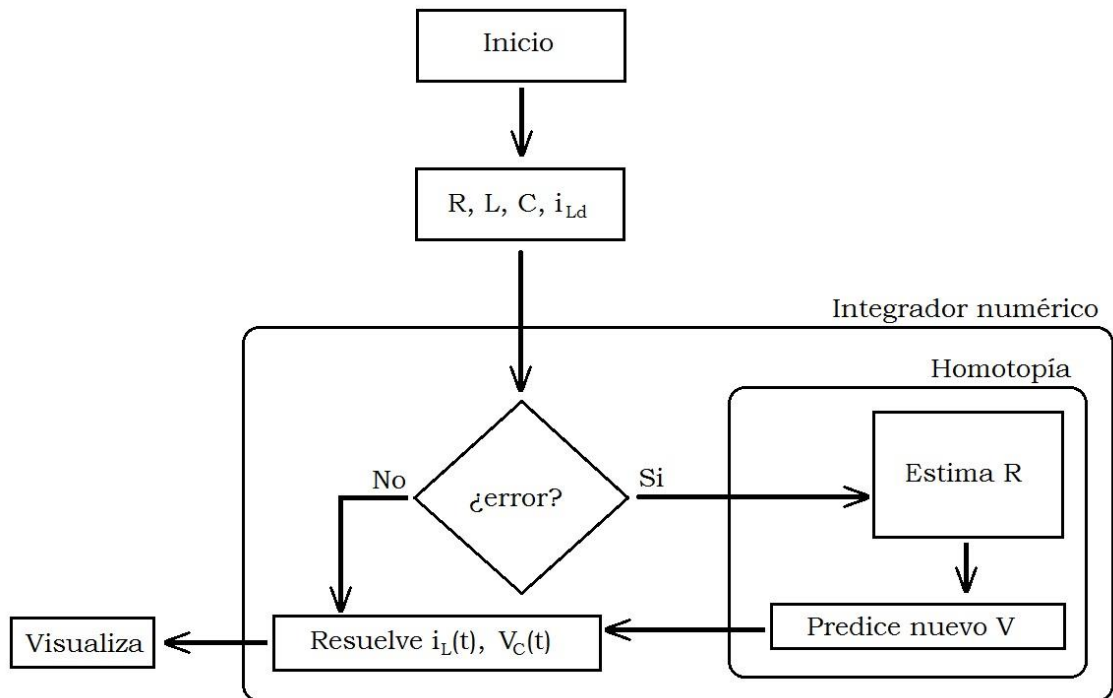
Tomando en consideración el problema descrito en la Sección 3.2, se abordará de nuevo el objetivo de mantener regulado (es decir constante en un valor deseado) el nivel de corriente en la bobina, a pesar de efectuar variación en el valor de resistencia, tras simular el efecto de perturbaciones en la carga del sistema.

Como variable manipulada por el controlador se considerará el parámetro de voltaje de entrada V obtenido mediante el método de homotopía, según se ha explicado previamente en este informe.

La Figura 5, ilustra el diagrama de flujo del algoritmo de control basado en homotopía implementado en MATLAB® para mantener regulada la corriente del inductor $i_L(t)$ en el circuito. Inicialmente, se inicializan las variables correspondientes a los valores de parámetro nominal como R, C y L . Asimismo se asigna el valor deseado para la corriente del inductor $i_{L,d}$. Posteriormente se hace el llamado a la función que resuelve las ecuaciones diferenciales del circuito (integrador numérico) mediante un problema de valor inicial. A su vez, este integrador numérico hace el llamado a una subrutina para calcular el parámetro de interés V (voltaje de entrada al circuito), cuando cierta condición de activación se cumple. Dicha condición de activación corresponde con la superación de un margen de error entre la corriente deseada y el valor generado para el circuito durante la

integración numérica. Cuando dicho umbral se supera, se recalcula un nuevo valor para el parámetro que tendrá incidencia a partir de ese momento en los valores subsiguientes de voltajes y corrientes en el circuito. El cambio paramétrico en la resistencia es estimado al interior de la función de homotopía a partir de consideraciones en estado estacionario, empleando la razón entre el voltaje aplicado actual respecto a la corriente de bobina actual.

Figura 6. Diagrama de flujo para algoritmo de control basado en homotopía

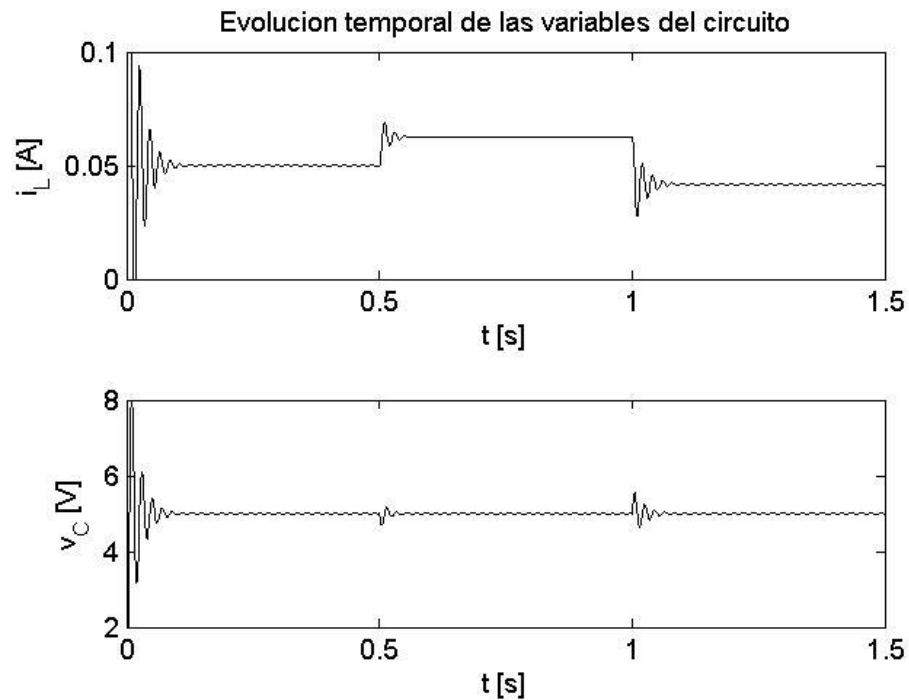


4.2. RESULTADOS DE SIMULACIÓN DEL ALGORITMO DE CONTROL PROPUESTO

La Figura 6 ilustra el comportamiento temporal, sin acción de control, para los estados del sistema (corriente en el inductor y voltaje en el capacitor) cuando se aplican las siguientes perturbaciones en la carga: $R = 80 [\Omega]$ para $1 > t > 0.5 [s]$ y $R = 120 [\Omega]$ para $1.5 > t > 1 [s]$. Como se observa de este resultado, la tensión en el capacitor luego del estado transitorio inicial se establece en el valor nominal de tensión de entrada $V = 5 [V]$. Este comportamiento es reiterativo a pesar de los cambios (perturbaciones) en el valor de la resistencia de carga; es decir, la tensión del capacitor permanece inalterada ante la presencia de perturbaciones. Lo anterior se debe a que la tensión del inductor se hace cero en estado estacionario y por tanto, la tensión del capacitor coincide con la tensión aplicada en la entrada.

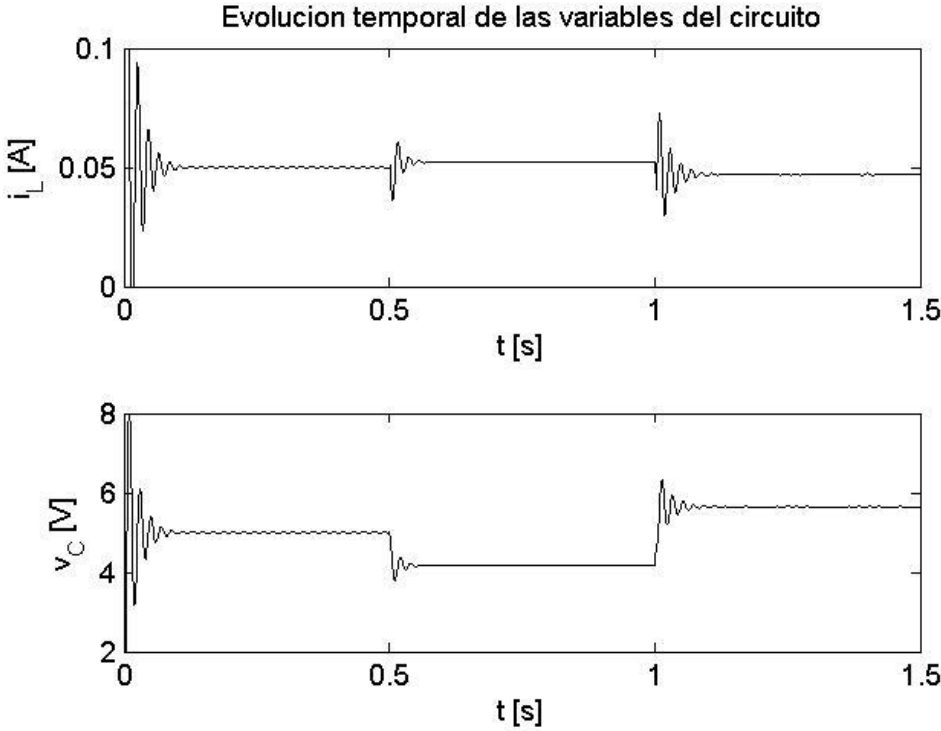
Situación diferente se observa en el comportamiento de la corriente del inductor, la cual se modifica en cada instante de perturbación, a partir de su valor nominal (para $t \leq 0.5 [s]$) $i_L(t) = 0.05 [A]$. Lo anterior, justifica la necesidad de incorporar una acción de control para mantener regulada la corriente del inductor ante los cambios presenciados en el valor de la carga.

Figura 7. Respuesta en el tiempo de las variables del circuito perturbadas sin control



De otro lado, tras incorporar los efectos de la función de homotopía se realiza una evaluación para el valor de entrada V cada vez que el error detectado así lo amerite. Esta situación es visualizada en la Figura 7, donde se observa una evidente respuesta por parte del sistema de control para corregir rápidamente las desviaciones en el valor de corriente $i_L(t)$, obteniendo a partir de una modificación en los valores de tensión en la entrada (equivalente en estado estacionario a la tensión en el capacitor) mantener en $i_{Ld} = 0.05$ [A] la corriente deseada en el inductor.

Figura 8. Respuesta en el tiempo de las variables del circuito controladas por homotopía



5. CONCLUSIONES

Como conclusiones del presente proyecto de grado, se pueden enunciar las siguientes:

- Se abordaron los conceptos matemáticos de la homotopía. Partiendo de las definiciones dadas por el Teorema de la Función Implícita, se pudo mostrar cómo era posible expresar la dependencia paramétrica de una función, y a través de ello, de sus soluciones (o ceros).
- Se realizó la aplicación del método basado en homotopía para determinar el valor de un parámetro desconocido en un circuito eléctrico. Este mismo principio fue empleado en un segundo ejemplo donde se ajustó el algoritmo para determinar el voltaje de entrada en un sistema perturbado en su salida.
- Empleando la información dada por el método de homotopía se acopló la simulación numérica de las ecuaciones del circuito para alterar en tiempo de ejecución el valor de voltaje aplicado en su entrada, como una manera de compensar los cambios evidenciados en el valor nominal de su carga. Lo anterior demuestra una potencial aplicabilidad de la técnica a manera de acción de control.

5.1. RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO

Se resalta la necesidad de obtener expresiones analíticas para determinar las condiciones a priori con base en las cuales se propone la dependencia paramétrica del sistema. Sin embargo, las expresiones matemáticas obtenidas son bastante complejas y difíciles de evaluar por incorporar funciones trigonométricas que divergen de manera exponencial. Como recomendación, se debe tener cuidado con los valores evaluados de dichas funciones, para evitar inconsistencias en el algoritmo de cálculo basado en homotopía.

Como trabajo futuro se propone el estudio de modificaciones dinámicas para las funciones paramétricas y maneras alternativas para inicializar las variables del algoritmo de homotopía buscando asegurar quizás una mejor convergencia hacia las soluciones. Asimismo, se deberán analizar los resultados propuestos sobre sistemas descritos a través de dinámicas más complejas y no lineales.

BIBLIOGRAFIA

[1]. Brindha, P., Rasi, M., Rajendran, L. “*Analytical Solution of Lorenz Equation Using Homotopy Analysis Method*”. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*. Volume 1, No. 6, June 2013.

[2]. Cruz D., Jorge M., Amaya C., Ivan M., Correa C., Carlos R. "Algoritmo de optimización para el cálculo de múltiples raíces de sistemas de ecuaciones no lineales". Colombia Inge Cuc ISSN: 0122-6517. Editorial Mejoras. v.9 fasc.1 p.197 - 208, 2013.

[3]. Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P. “*Numerical Methods for Engineers*” 6th ed. McGraw-Hill, 2010. pp. 207-209.

[4]. Chen, X. “*The Solutions for the Eco-Epidemic Model with Homotopy Analysis Method*”. *Engineering*, Vol. 5 No. 10B, 2013, pp. 446-449. doi: 10.4236/eng.2013.510B091.

[5]. Dunlavy, D. M., O'leary, D. P., Klimov, D. and Thirumalai, D. “*HOPE, A Homotopy Optimization Method for Protein Structure Prediction*”. *Journal of Computational Biology*. December 2005, 12(10): 1275-1288.

[6]. Filobello-Nino, U.; Vazquez-Leala, H.; Khanb,Y.; Yildirimc, A.; Pereyra-Diaza, D.; Perez-Sesmaa, A.; Hernandez-Martinezd, L.; Sanchez-Oreaa, J.; Castaneda-Sheissaa, R.; Rabago-Bernal, F. "*HPM Applied to Solve Nonlinear Circuits: A Study Case*". Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 87, 4331 - 4344

[7]. Filobello-Nino, U. et al., "*HPM applied to solve nonlinear circuits: a study case*". Applied Mathematical Sciences, Vol 6, N° 87, pp. 4331-4344; 2012.

[8]. Fitz-Coy, N., Jang, J.W. "*Homotopy Solutions of Kepler's Equations*". Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium 1996; 307-314; (NASA-CP-3333). NASA, United States.

[9]. Hasan, T.H. "*The Application of Homotopy Method In Solving Electrical Circuit Design Problem*". Proceedings of World Academy of Science: Engineering & Technology, 2009.

[10]. Hatcher, Allen. "*Algebraic Topology*". Cambridge University Press, 2001.

[11]. Jafari, H., Chun, C., Seifi, S., Saeidy, M. "*Analytical Solution for Nonlinear Gas Dynamic Equation by Homotopy Analysis Method*". Applications and Applied Mathematics Journal Vol. 4, Issue 1 (June 2009) pp. 149– 154.

[12]. Jiménez-Islas, H., Martínez-González, G.M., Navarrete-Bolaños, J.L., Botello-Álvarez, J.E., Oliveros-Muñoz, J.M.I. “*Nonlinear Homotopic Continuation Methods: A Chemical Engineering Perspective Review*”. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. Oct 2013, Vol. 52, No. 42: 14729-14742.

[13]. Kumar, D., Singh J. and Sushila. “*Application of Homotopy Analysis Transform Method to Fractional Biological Population Model*”. *Romanian Reports in Physics*, Vol. 65, No. 1, P. 63–75, 2013

[14]. Liao, S.J. “*Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*”. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[15]. Liao, S.J. “*On the Homotopy Analysis Method for Non-linear Problems*”. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 147, 2004, pp. 499-513. [http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00790-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00790-7)

[16]. Mastroberardino, A. “*Homotopy Analysis Method Applied to Electrohydrodynamic Flow*”. Elsevier B.V. 2010.

[17]. Salcedo B., Robin J., Correa C., Carlos R. “*Herramienta computacional para la simulación de sistemas que operan con técnicas de control predictivo*”. Tesis Ingeniería Electrónica, Universidad Industrial de Santander. 2007.

[18]. Smith, R.L., Huang, C.Y. “*Study of a Homotopy Continuation Method for Early Orbit Determination with the Tracking and Data Relay Satellite System (TDRSS)*”. NASA Goddard Space Flight Center. United States. NASA-TM-86230. 1986. 138p.

[19]. Thota, P., Krauskopf, B., Lowenberg, M.H. “*Bifurcation analysis of nose landing gear shimmy with lateral and longitudinal bending*”. Journal of Aircraft by the American Institute of Aeronautics and Astronautics Sponsorship: Airbus. 2009.

[20]. Thota, P., Krauskopf, B., Lowenberg, M.H., Coetzee, EB. “*Nonlinear analysis of the influence of tire inflation pressure on nose landing gear shimmy*”. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference, Chicago, USA. 2009.

[21]. Vahdati, S., Tavassoli Kajani, M. and Ghasemi, M. “*Application of Homotopy Analysis Method to SIR Epidemic Model*”. Research Journal of Recent Sciences. Vol. 2(1), 91-96, Jan 2013.

[22]. www.en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function_theorem

[23]. www.mathworld.wolfram.com/Homotopy.html

[24]. Yahya, K., Biazar, J., Azari, H. and Fard, P.R. “*Homotopy Perturbation Method for Image Restoration and Denoising*”. CoRR, abs/1008.2579, 2010.